TESIS SM 092306

PENGARUH UNSUR HIDRODINAMIKA PADA PENYEBARAN POLUTAN DAN SEDIMENTASI DI PERTEMUAN DUA SUNGAI

RANI KURNIA PUTRI
1212201206

DOSEN PEMBIMBING
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
2014

TESIS SM 092306

THE INFLUENCE OF HYDRODYNAMICS ON THE SPREAD OF POLLUTANTS AND SEDIMENTATION IN THE CONFLUENCE OF TWO RIVERS

RANI KURNIA PUTRI
1212201206

SUPERVISOR
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc

PROGRAM OF MAGISTER
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
2014

PENGARUH UNSUR HIDRODINAMIKA PADA PENYEBARAN POLUTAN DAN SEDIMENTASI DI PERTEMUAN DUA SUNGAI

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
RANI KURNIA PUTRI
NRP. 1212 201 206

Tanggal Ujian : 24 Juli 2014
Periode Wisuda : September 2014

Disetujui oleh Tim Penguji Tesis:

1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc (Pembimbing)
   NIP. 19650605 198903 1 002
2. Dr. Hariyanto, M.Si (Penguji)
   NIP. 19530414 198203 1 002
3. Subchan, M.Sc, Ph.D (Penguji)
   NIP. 19710513 199702 1 001
4. Dr. Erna Apriliani, M.Si (Penguji)
   NIP. 19660414 199102 2 001

Direktur Program Pascasarjana,

Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, MT
NIP. 19640405 199002 1001

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL
LEMBAR PENGESAHAN i
ABSTRAK iii
ABSTRACT v
KATA PENGANTAR vii
DAFTAR ISI ix
DAFTAR GAMBAR xi
DAFTAR TABEL xiii
BAB 1 PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Batasan Masalah 3
1.4 Tujuan Penelitian 3
1.5 Manfaat Penelitian 4
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA 5
2.1 Peta Kajian Penelitian Pertemuan Dua Sungai 5
2.2 Konsep Hidrodinamika 6
2.2.1. Persamaan Kontinuitas 6
2.2.2. Persamaan Momentum Linear 6
2.2.3. Gaya-Gaya Hidrodinamika 7
2.2.4. Hal-Hal yang Berkaitan dengan Pencemaran 8
2.2.4.a TSS (*Total Suspended Solid*) 8
2.2.4.b DO (*Dissolved Oxygen*) 9
2.2.4.c BOD (*Biological Oxygen Demand*) 10
2.2.4.d COD (*Chemical Oxygen Demand*) 10
2.2.4.e TDS (*Total Dissolved Solid*) 10
2.3 Sedimentasi 11
2.4 Metode Beda Hingga 12
2.5 *Metode Alternating Direct Implicit* (ADI) 14

BAB 3 METODE PENELITIAN 17
3.1 Tempat Penelitian 17
3.2 Tahapan Penelitian 17
3.3 Jadwal Penelitian 19
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN 23
4.1 Model Hidrodinamika Penyebaran Polutan dan Sedimentasi 21
4.1.1 Persamaan Kontinuitas 22
4.1.2 Persamaan Kekekalan Momentum 25
4.1.3 Persamaan Skalar Transport 36
4.2 Persamaan Pembangun Non Dimensional 37
4.3 Persamaan Skalar Transport non-dimensi 39
4.4 Penyelesaian Numerik Menggunakan ADI 40
4.4.1 Diskritisasi Kekekalan Momentum Anak Sungai 40
4.4.2 Diskritisasi Kekekalan Momentum Sungai Utama 45
4.4.3 Diskritisasi Kekekalan Momentum Pertemuan Dua Sungai 48
4.4.4 Diskritisasi Persamaan Skalar Transport 53
4.5 Hasil dan Simulasi 55
BAB 5 PENUTUP 65
5.1 Kesimpulan 65
5.2 Saran 65
DAFTAR PUSTAKA 67
LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 3.3. Jadwal Penelitian 19

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1 Peta Kajian Penelitian 5
Gambar 4.1 Peta Kajian Penelitian 21
Gambar 4.2 Sketsa peta Kajian Penelitian dengan Volume Kendali 22
Gambar 4.3 Sketsa Volume Kendali sungai Utama dan Anak Sungai 28
Gambar 4.4 Kontur Penyebaran Konsentrasi di Aliran Anak Sungai 56
Gambar 4.5 Kontur Penyebaran Konsentrasi di Aliran Sungai Utama 57
Gambar 4.6 Grafik Kecepatan COD, BOD, DO di Aliran Anak Sungai 58
Gambar 4.7 Grafik Kecepatan TSS di Sungai Aliran Anak Sungai 59
Gambar 4.8 Grafik Kecepatan COD, BOD, DO di Aliran Sungai Utama..... 60
Gambar 4.9 Grafik Kecepatan TSS di Aliran Sungai Utama 61
Gambar 4.10 Grafik Kecepatan Polutan di Aliran Pertemuan dua Sungai 62
Gambar 4.11 Grafik Kecepatan TSS di Aliran Pertemuan dua Sungai 63

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat ALLAH SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan tesis ini dengan baik. Tesis dengan judul **"PENGARUH UNSUR HIDRODINAMIKA PADA PENYEBARAN POLUTAN DAN SEDIMENTASI DI PERTEMUAN DUA SUNGAI"** ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat kelulusan Program Studi Magister (S2) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan dan dukungan banyak pihak. Oleh karena itu, penulis sampaikan rasa hormat dan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc sebagai dosen pembimbing yang telah banyak membantu, membimbing dan membekali penulis dengan berbagai ilmu pengetahuan selama penyusunan tesis ini.
2. Bapak Dr. Budi Setiyono, M.T sebagai dosen wali yang telah memberi arahan, nasihat, dan motivasi penulis selama masa perkuliahan.
3. Ibu Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS.
4. Bapak Dr. Subiono, M.Sc selaku Ketua Program Studi Magister Matematika ITS.
5. Bapak/Ibu Dosen matematika ITS yang telah memberikan ilmunya selama penulis menjadi mahasiswa Pascasarjana Jurusan Matematika.
6. Seluruh staf Tata Usaha Program Studi Pascasarjana Jurusan Matematika ITS yang telah membantu selama penulis menempuh studi.

Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tentu tidak terlepas dari ketidaksempurnaan, oleh sebab itu saran dan kritik yang membangun dari pembaca sangat diharapkan demi penyempurnaan tesis ini. Semoga tesis ini bermanfaat bagi para pembaca sekalian.

Surabaya, Juli 2014

Penulis

SPECIAL THANKS TO :

1. Bapak Ibu tersayang, Keberhasilan dan kelancaran tesis ini karena kalian. Terimakasih atas segala doa, semangat dan dukungan yang selalu menyertai setiap langkahku. Teriring doa disetiap langkahku untuk membahagiakan kalian. Semoga Allah SWT meridhoi.. aamiin. Ayu Kurnia Putri dan aa' Didin Budiman, terimakasih atas segala motivasi, nasihat dan semangatnya, terimakasih telah menjadi kakak terbaikku. Kak Iqbal Sa Putra, thanks for everything ^_^ Semoga Allah SWT meridhoi langkah kita, aamiin.
2. Sahabat-sahabat yang selalu mendukung dan memotivasi penulis, Gusti Yuni Shinta Lestari, Nina Widyanti, terimakasih atas canda tawa dan supportnya selama ini. Semoga kita dapat bersama-sama mereguk nikmatnya kesuksesan dan kebahagiaan dunia dan akhirat. Aamiin..
3. Sahabat sekaligus teman satu team penelitian Mbak O, Dewi, Uswa, terimakasih atas segala moment yang tak terlupa dan partner diskusi yang seru. Kalian membuat hari-hariku berwarna. Alhamdulillah ya akhirnya kita lulllllusss. You are the best partner ever guys.
4. Mami ira, Mbak Imelda, Mbak Dessy, terimakasih telah bersabar membimbing adikmu ini. Dan seluruh mahasiswa pascasarjana Matematika ITS khususnya angkatan 2013, atas segala kebersamaan dan dukungan serta motivasi yang diberikan kepada penulis.

PENGARUH UNSUR HIDRODINAMIKA PADA PENYEBARAN POLUTAN DAN SEDIMENTASI DI PERTEMUAN DUA SUNGAI

Nama : Rani Kurnia Putri
NRP : 1212 201 206
Pembimbing : Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc

ABSTRAK

Pencemaran air menjadi salah satu isu yang sering dibahas di forum-forum internasional. Hal ini disebabkan karena air merupakan kebutuhan yang sangat krusial bagi kelangsungan hidup manusia maupun makhluk hidup yang lainnya. Seperti pada kasus di tahun 1996 dimana sungai-sungai yang bermuara di pantai Surabaya tercemar logam berat yang ditandai dengan tingginya kadar Hg (merkuri) dan Pb (timbal) dalam Air Susu Ibu (ASI) maupun dalam darah penduduk yang tinggal didaerah pesisir. Hal ini mengakibatkan 63% anak - anak yang tinggal di tepian Kali Brantas menderita kanker dan 80 % anak-anak di pesisir Kenjeran mengalami gejala Slow Learner (gejala idiot). Polutan air yang berbahaya bagi kesehatan ini bersumber pada limbah industri, limbah pertanian dan limbah rumah tangga (Arisandi, 2004). Pentingnya menjaga kualitas air dan mengurangi dampak dari sedimentasi menjadi latar belakang dilakukannya penelitian ini. Pada penelitian ini difokuskan pada perhitungan pengaruh unsur hidrodinamika pada penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai menggunakan Metode Beda Hingga Implisit yang dikenal dengan *Alternting Direct Implicit Method* (ADI). Sehingga hasil dari penelitian ini diharapkan mampu membantu pihak-pihak yang terkait dalam memelihara kualitas air disepanjang aliran Kali Brantas dan menginformasikan kepada masyarakat umum untuk ikut memelihara kebersihan air agar tetap layak dikonsumsi dan mengurangi terjadinya pendangkalan sungai.

THE INFLUENCE OF HYDRODYNAMICS ON THE SPREAD OF POLLUTANTS AND SEDIMENTATION IN THE CONFLUENCE OF TWO RIVERS

Name : **Rani Kurnia Putri**
NRP : **1212 201 206**
Supervisor : **Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc**

ABSTRACT

Water pollution is a topic that is often discussed in international forums, because water is vital for the survival of human beings and other living beings. As happened in 1996 where the rivers that flow through Surabaya river contaminated by heavy metals, characterized by high levels of Hg (mercury) and Pb (lead) in breast milk (ASI) and in the blood of residents living in the coastal area. This has resulted in 63% of children living near the Kali Brantas River suffering from cancer and 80% of children in coastal Kenjeran experience Slow Learner Symptoms (symptoms of idiots). These harmful pollutants come from industrial, agricultural and household waste (Arisandi, 2004). The importance of maintaining water quality and reducing the impact of sedimentation become the background of this research. This research is focused on calculation of the influence of hydrodynamic factors on the spreading of pollutants and sedimentation at the confluence of two rivers using Alternating Direct Implicit (ADI) methode. The results of this research are expected to assist the authorities concerned in maintaining the water quality along the stream of Kali Brantas river and to encourage the publics to keep the water clean and consumeable, and also to reduce the occurrence of shallowing river.

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan teknologi di berbagai aspek kehidupan, memiliki dampak positif dan negatif bagi kelangsungan hidup manusia, yang perlu untuk diperhatikan adalah dampak negatifnya yaitu pencemaran lingkungan, baik itu pencemaran terhadap air, tanah maupun udara. Suatu wilayah dikatakan tercemar bila kadar polutannya melebihi ambang batas normal. Polutan terdiri dari berbagai macam jenis, yaitu dapat berupa suara, panas, radiasi, debu, bahan-bahan kimia, atau zat-zat yang dihasilkan oleh makhluk hidup. Kadar polutan dalam jumlah besar dapat menyebabkan terganggunya suatu ekosistem.

Pencemaran air menjadi salah satu isu yang sering dibahas di forum-forum internasional. Hal ini disebabkan karena air merupakan kebutuhan yang sangat krusial bagi kelangsungan hidup manusia maupun makhluk hidup yang lainnya. Seperti pada kasus di tahun 1996 dimana sungai-sungai yang bermuara di pantai Surabaya tercemar logam berat yang ditandai dengan tingginya kadar Hg (merkuri) dan Pb (timbal) dalam Air Susu Ibu (ASI) maupun dalam darah penduduk yang tinggal didaerah pesisir. Hal ini mengakibatkan 63% anak - anak yang tinggal di tepian Kali Brantas menderita kanker dan 80 % anak-anak di pesisir Kenjeran mengalami gejala *Slow Learner* (gejala idiot). Polutan air yang berbahaya bagi kesehatan ini bersumber pada limbah industri, limbah pertanian dan limbah rumah tangga (Arisandi, 2004).

Sungai yang termasuk kedalam siklus hidrologi, selain mengalirkan air juga mengalirkan material-material sedimen yang berasal dari proses erosi akibat air hujan. Sedimen yang dihasilkan oleh proses erosi, terbawa oleh aliran air dan mengendap pada suatu tempat yang kecepatan alirannya melambat atau terhenti, Mengendapnya sedimen-sedimen didasar sungai secara terus menerus menyebabkan pendangkalan pada dasar sungai dan bila tidak ditindak lanjuti, maka akan menyebabkan banjir.

Berdasarkan pada hal tersebut, masalah pencemaran air dan pendangkalan sungai merupakan masalah penting yang membutuhkan evaluasi dari pihak-pihak

yang berwenang agar keseimbangan ekosistem tetap terjaga, dan masyarakat pun perlu untuk disadarkan mengenai pentingnya menjaga lingkungan sungai. Daerah pertemuan antara dua sungai merupakan daerah yang sangat mungkin memiliki tingkat pencemaran dan pendangkalan yang tinggi, Hal ini disebabkan oleh penambahan bahan-bahan organik maupun kimiawi yang berasal dari darat melalui aliran sungai secara terus menerus. Percampuran masa air yang terjadi di pertemuan dua sungai dapat menyebabkan perubahan kondisi fisik oseanografi di lokasi tersebut.

Daerah Aliran Sungai Brantas mengalir sepanjang kota Malang, Blitar, Tulungagung, Kediri, Jombang dan Mojokerto. Di kabupaten Mojokerto Sungai Brantas bercabang dua menjadi Kali Mas (ke arah Surabaya) dan Kali Porong (ke arah Porong, Kabupaten Sidoarjo) (Arisandi, 2004). Pentingnya menjaga kualitas air dan mengurangi dampak dari sedimentasi menjadi latar belakang dilakukannya penelitian ini. Pada penelitian ini difokuskan pada perhitungan pengaruh unsur hidrodinamika pada penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai. Sehingga hasil dari penelitian ini diharapkan mampu membantu pihak-pihak yang terkait dalam memelihara kualitas air sepanjang daerah aliran sungai brantas agar tetap layak dikonsumsi dan mengurangi terjadinya pendangkalan sungai.

Penelitian ini mengacu pada penelitian sebelumnya, yaitu membahas mengenai pengaruh hidrodinamika pada dispersi polutan di pertemuan dua sungai, pada penelitian tersebut, dapat disimpulkan bahwa selama tahun 2012 polutan menyebar kearah longitudinal dan lateral dengan pola yang relatif sama. Unsur hidrodinamika dengan variabel laten indikator debit, kecepatan, dan kedalaman sungai mempengaruhi dispersi polutan. Perbedaan mencolok ada pada jumlah polutan dimana kuantitas tertinggi polutan terjadi pada musim hujan. (Widodo,2013).

Selanjutnya untuk mengetahui pengaruh unsur hidrodinamika pada penyebaran polutan dan sedimentasi dilakukan simulasi dengan model matematika yang penyelesaiannya menggunakan Metode Beda Hingga Implisit yang dikenal dengan *Alternting Direct Implicit Method* (ADI). Metode ADI digunakan karena metode ini memiliki tingkat akurasi yang lebih baik dibandingkan dengan metode Beda Hingga Eksplisit. Sehingga dengan

menggunkan metode ini, diharapkan mampu mensimulasikan penyebaran polutan dan sedimentasi yang kemudian dapat membantu memantau kualitas air di sepanjang daerah aliran sungai brantas.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, masalah yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana model matematika penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai, dengan menggabungkan unsur hidrodinamika.
2. Bagaimana merumuskan model matematika menggunakan *Alternating Direct Implicit Method* (ADI)
3. Bagaimana simulasi antara unsur hidrodinamika dengan penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai

1.3 Batasan Masalah

Agar penelitian ini dapat berjalan sebagaimana mestinya, maka perlu dilakukan pembatasan masalah. Adapun batasan masalahnya adalah:

1. Penelitian ini dilakukan dalam bentuk simulasi numerik di komputer.
2. Pola penyebaran polutan digambarkan dalam satu dimensi
3. Data yang digunakan dalam proses validasi dari solusi numeriknya adalah data lapangan TSS, TDS, COD, BOD, DO, yang berupa data sekunder, dari Perum Jasa Tirta I yang telah mendapat persetujuan keabsahannya.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah

1. Mengkaji dan menganalisis penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai, dengan menggabungkan unsur hidrodinamika.
2. Merumuskan dan mencari solusinya menggunakan Metode Beda Hingga implisit yaitu *Alternating Direct Implicit Method* (ADI).
3. Mensimulasikan unsur hidrodinamika dengan penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Ilmu Pengetahuan : Memperkaya ragam penerapan metode beda hingga khususnya *Alternating Direct Implicit Method* (ADI) pada bidang hidrodinamika.
2. Bagi Masyarakat : Memberikan informasi kepada masyarakat luas mengenai kualitas air dan banyaknya kandungan sedimentasi di pertemuan dua sungai.
3. Bagi Peneliti : Menambah wawasan peneliti mengenai penerapan metode beda hingga di kehidupan sehari-hari, khusunya bidang hidrodinamika.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Peta Kajian Penelitian Pertemuan Dua Sungai di Kali Brantas

Morfologi pertemuan dua sungai memiliki berbagai macam bentuk. Salah satu model pertemuan dua sungai yang telah dikembangkan dengan cukup baik oleh Shazy Shabayek, dkk (2002), yaitu berbentuk numeeca busur atau seperti huruf Y, yang nampak pada gambar dibawah ini.

Gambar 2.1 : Peta Kajian Penelitian

Pada model ini, Shazy Shabayek membagi domain sungai menjadi dua bagian yaitu Kali Brantas sebagai Sungai utama (*main stream*) dan sungai Marmoyo sebagai anak sungai (*lateral stream*). Untuk gaya-gaya yang bekerja antara lain gaya hidrostatis, gaya gesek pada dasar sungai, gaya geser yang terjadi pada pertemuan sungai, dan gaya berat pengaruh dari gravitasi bumi.

2.2. Konsep Hidrodinamika

Hidrodinamika merupakan ilmu yang berhubungan dengan gerak liquid dalam skala mikroskopis. Mempelajari hidrodinamika menjadi hal yang krusial agar dapat menganalisa dan menjelaskan berbagai fenomena.

Konsep utama yang berlaku di hidrodinamika adalah konsep kontinum, yaitu konsep yang meyatakan bahwa seluruh partikel fluida berubah secara kontinu terhadap ruang. Beberapa persamaan yang diperlukan dalam hidrodinamika adalah sebagai berikut:

2.2.1. Persamaan kontinuitas

Konsep kontinuitas merupakan konsep utama yang berlaku dalam hidrodinamika. Persamaan-persamaan kontinuitas dikembangkan berdasarkan asas-asas umum kekekalan massa, yaitu massa di dalam suatu sistem adalah tetap konstan terhadap waktu (jika pengaruh relativitas diabaikan).

$$\frac{dm}{dt} = 0 \tag{2.1}$$

Dimana m adalah massa total.

Sehingga persamaan kontinuitas untuk suatu volume kendali adalah

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vk} \rho dV + \int_{pk} \rho \boldsymbol{v}.d\boldsymbol{A} \tag{2.2}$$

Dimana maksudnya adalah persamaan kontinuitas untuk volume kendali menyatakan bahwa laju pertambahan terhadap waktu untuk massa di dalam volume kendali adalah tepat sama dengan laju bersih aliran-masuk massa ke dalam volume kendali tersebut.

2.2.2. Persamaan Momentum Linear

Persamaan momentum menyatakan hubungan antara gaya yang bekerja dalam suatu volume dengan gaya inersia. Definisi gaya inersia adalah perubahan gaya per-satuan waktu per-satuan volume, atau bisa disebut gaya yang menolak perubahan geraknya. Dalam dinamika fluida, gaya hambat adalah gaya yang menghambat pergerakan sebuah benda padat melalui suatu fluida, cair taupun

gas.. Bentuk gaya hambat yang paling umum tersusun dari sejumlah gaya gesek, yang bertindak sejajar dengan permukaan benda, dan gaya tekan, yang bertindak pada arah tegak lurus dengan permukaan benda.

Prinsip kekekalan momentum sejalan dengan hukum Newton II, karena pada hukum Newton II berlaku hukum kekekalan massa atau kekekalan volume pada hidrodinamika. Pada hukum kedua newton, laju perubahan momentum adalah sebanding dengan gaya yang dikerjakan dan arah geraknya sesuai dengan arah gaya yang berlaku.

Hukum kedua Newton digunakan sebagai dasar guna mencari persamaan momentum linear untuk suatu volume kendali. Jika N adalah momentum linear mv sistem tersebut, dan η adalah momentum linear per massa satuan $\frac{\rho v}{\rho}$, maka,

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{vk} \rho \boldsymbol{v}\, d\mathcal{V} + \int_{pk} \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\, dV\right) \quad (2.3)$$

2.2.3 Gaya-Gaya Hidrodinamika

Beberapa gaya yang bekerja pada hidrodinamika, yaitu:

a. Gaya Permukaan (*Surface force*)

Gaya adveksi merupakan gaya yang terjadi akibat pengaruh dari faktor-faktor yang mempengaruhi permukaan. Gaya ini dipengaruhi oleh tekanan (P) yang dialami oleh fluida. Apabila diambil nilai awal (h = 0) pada permukaan bebas, maka tekanan pada kedalaman h dibawah permukaan adalah:

$$P = P_0 + \rho g h \quad (2.4)$$

Tekanan (P) yang merupakan perbandingan antara tekanan dan luas permukaan , dapat dinyatakan sebagai:

$$P = \frac{F}{A}\ atau\ F = P.A$$

Berdasarkan rumus diatas, maka diperoleh gaya permukaan pada kedalaman h adalah:

$$F = [P_0 + \rho g h][panjang * lebar] \quad (2.5)$$

Apabila pengaruh gaya gesek angin relatif kecil dan diabaikan, maka persamaan (2.5) dapat ditulis:

$$F = [P_0 + \rho g h]\Delta x \Delta y \quad (2.6)$$

b. Gaya Adveksi

Menurut Versteeg (2007), Gaya adveksi merupakan gaya yang dipengaruhi oleh kekentalan (viscosity) dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$F = \mu \frac{\partial U}{\partial h}[kedalaman * lebar] \quad (2.7)$$

c. Gaya Difusi

Menurut Versteeg (2007), Gaya difusi merupakan gaya yang dipengaruhi diffusitas dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$F = -E_x \frac{\partial C}{\partial X}[lebar * panjang] \quad (2.8)$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$F = -E_x \frac{\partial C}{\partial X}\Delta x \Delta y \quad (2.9)$$

2.2.4 Hal-Hal Yang Berkaitan Dengan Pencemaran

2.2.4.a TSS (*Total Suspended Solid*)

TSS (*Total Suspended Solid*) atau biasa disebut padatan tersuspensi merupakan indikator dari jumlahan padatan yang tersuspensi dalam satu liter air (mg/l). Padatan ini memiliki berat dan ukuran yang sangat kecil sehingga mampu melayang-layang dalam air namun tidak larut dan tidak dapat langsung mengendap.

Padatan tersuspensi merupakan salah satu penyebab utama kekeruhan air. Makin tinggi konsentrasi TSS, maka makin tinggi pula tingkat pencemaran suatu badan air. Sumber pencemaran utama TSS berasal dari limbah cair industri (Mukhtasor,2008).

Penentuan kualitas air secara lengkap diperlukan upaya analisis zat padat secara cermat. Hal ini dipentingkan karena jumlah zat padat yang terlarut dalma air dapat digunakan sebagai indikator terjadinya pencemaran air. Zat padat dalam keadaan tersuspensi dibagi kedalam dua kategori, yaitu:

a. Partikel tersuspensi koloid

Jenis partikel tersuspensi koloid adalah penyebab kekeruhan dalam air yang disebabkan oleh penyimpangan sinar yang menembus suspensi. Partikel-partikel koloid tidak terlihat secara visual, sedangkan larutannya terbagi atas ion-ion dan molekul-molekul yang tidak pernah keruh. Larutan menjadi keruh bila terjadi suatu proses pengendapan (presipitasi)

b. Partikel tersuspensi biasa

Jenis partikel tersuspensi biasa memiliki ukuran lebih besar daripada partikel tersuspensi koloid, sehingga jenis partikel ini menghambat sinar yang akan menembus suspensi. Seperti halnya ion-ion dan molekul-molekul (zat yang terlarut), zat padat koloidal dan zat padat tersuspensi dapat bersifat anorganik (tanah liat) dan organisme (protein, sisa tanaman, ganggang dan bakteri).

2.2.4.b DO (*Dissolved Oxygen*)

DO atau biasa disebut Oksigen terlarut merupakan indikator banyaknya oksigen yang terlarut dalam satu liter air (mg/l). Oksigen merupakan gas yang dibutuhkan oleh makhluk hidup untuk proses metabolisme dalam tubuh. Tanpa oksigen, makhluk hidup tersebut tidak akan dapat bertahan, karena tidak akan mampu memecah makanan menjadi sumber energy untuk beraktivitas.

Kehidupan tumbuhan dan organisme perairan bergantung pada kemampuan badan air dalam mempertahankan kadar oksigen terlarutnya. Semakin rendah kadar oksigen terlarut dalam air menunjukkan makin tingginya tingkat pencemaran suatu perairan.

Tingginya jumlah zat pencemar yang masuk kedalam air mengakibatkan oksigen sulit larut dalam air. Oksigen terlarut, selain dihasilkan oleh produsen dalam air seperti tumbuhan, ganggang dan fitoplankton, juga dapat berasal dari pertukaran udara di permukaan air. Proses pengolahan limbah cair acapkali menggunakan oksigen sebagai bahan tambahan dengan cara menginjeksikan oksigen tersebut kedalam air, atau dengan cara melakukan pengadukan agar terjadi pertukaran udara sehingga oksigen dapat masuk dan larut dalam air (Mukhtasor,2008).

2.2.4.c BOD (*Biological Oxygen Demand*)

BOD (*Biological Oxygen Demand*) adalah jumlah oksigen (dalam mg) yang diperlukan oleh mikroorganisme (terutama bakteri) untuk melakukan proses oksidasi dan stabilisasi bahan organik secara biologis pada kondisi dimana mikroba tidak dapat hidup tanpa oksigen dalam satu liter air limbah.

BOD yang tinggi mengindikasikan adanya bahan organik yang tinggi pula, sehingga dapat diartikan bahwa tingkat pencemaran di suatu badan air mencapai ambang batas. Hal ini disebabkan oleh kebutuhan oksigen mikroorganisme untuk menguraikan bahan organic dalam jumlah besar (Mukhtasor,2008).

2.2.4.d COD (*Chemical Oxygen Demand*)

COD (*Chemical Oxygen Demand*) atau biasa disebut oksigen kimiawi, merupakan indikator pengukuran jumlah bahan organik dengan menggunakan persamaan dari jumlah oksigen (dalam mg) yang diperlukan untuk melakukan proses oksidasi bahan organik secara kimiawi dalam satu liter limbah. Atau dengan kata lain, pengukuran kadar oksigen yang diperlukan berdasarkan pada persamaan kimia, bukan pada jumlah oksigen yang dibutuhkan mikroba untuk menguraikan bahan organik.

Nilai COD selalu lebih besar daripada BOD. Hal ini dikarenakan tidak semua bahan organic yang dihitung melalui persamaan kimia mampu diuraikan oleh mikroorganisme (Mukhtasor,2008).

2.2.4.e TDS (*Total Disolved Solid*)

TDS (*Total Disolved Solid*) atau biasa disebut padatan terlarut merupakan indikator dari jumlah padatan yang terlarut dalam satu liter air (dalam mg/l). Padatan ini berasal dari kumpulan senyawa-senyawa anorganik dan senyawa organic yang larut dalam air. Bentuk padatan TDS berukuran lebih kecil dibandingkan padatan TSS, sehingga TDS lebih mudah larut dalam air.

Seperti pada TSS, semakin tinggi konsentrasi TDS, maka dapat digunakan sebagai indikator bahwa badan suatu sungai tersebut tercemar. Sumber utama pencemaran oleh TDS berasal dari limbah cair industri (Mukhtasor,2008).

2.3 Sedimentasi

Proses terjadinya sedimentasi karena adanya partikel-partikel padat yang ikut terbawa oleh aliran air. Mekanisme pengangkutan sedimen ini dikategorikan menjadi dua, yaitu *bed load* dan s*uspended load.* Proses pergerakkan sedimen jenis *bed load* bergerak pada dasar sungai dengan cara menggelinding, meluncur dan melompat-lompat. Sedangkan pada *Suspended load* terdiri dari butiran-butiran halus yang melayang-layang di dalam air (Sosrodarsono dan Tominaga, 1984).

Proses sedimentasi pada aliran sungai merupakan proses yang alami. Namun karena berbagai faktor, sedimentasi menimbulkan berbagai masalah dan dapat menimbulkan dampak yang berbahaya bagi lingkungan sekitar. Widodo (2012) mengemukakan bahwa proses terjadinya sedimentasi terdiri dari dua bagian, yaitu hidrodinamika dan morfologi. Hidrodinamika menjelaskan tentang aliran sungai, sedangkan morfologi menjelaskan tentang proses pengangkutan sedimen. Hubungan antara kedua bagian ini adalah arah dan besanya kecepatan aliran pada hidrodinamika menjadi input pada proses pembentukan sedimen pada morfologi. Sehingga dalam pembuatan model matematika untuk kasus ini, kedua bagian ini dapat dibangun secara terpisah. Pada dasarnya model matematika yang dibangun menjelaskan bahwa output dari komponen hidrodinamika menjadi inputan untuk komponen morfologi.

Zou Liu (2001) mengusulkan tiga macam transportasi sedimen, yaitu *wash load, bed-load,* dan *suspended load*. *Wash load* adalah partikel atau sedimen yang terbawa oleh air, akan tetapi partikel ini tidak berasal dari ataupun mengendap ke dasar aliran, sehingga perilaku atau komposisi dari jenis angkutan ini tidak dapat diprediksi. Beberapa peneliti membagi jenis transportasi sedimen dibagi menjadi dua yaitu *Bed load* dan *Suspended load*. *Bed load* adalah butiran sedimen yang bergerak atau berpindah dengan cara menggelinding, meluncur atu melompat.

Suspended load adalah transportasi sedimen dengan cara melayang didalam air. Tranportasi sedimen jenis ini biasanya terjadi pada aliran yang turbulen (Yang, 1996).

2.4 Metode Beda Hingga

Salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial adalah metode beda hingga. Metode beda hingga adalah suatu metode numerik untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan mengaproksimasi turunan-turunan persamaan tersebut menjadi sistem persamaan linear.

Untuk menerapkan metode beda hingga pada suatu permasalahan persamaan diferensial biasa maupun parsial, beberapa hal yang perlu diperhatikan yaitu diskritisasi dari suatu persamaan, bentuk aproksimasi beda hingga, kondisi syarat akhir dan syarat batas serta kestabilan dari skema beda hingga.

Jika $u = u(x, y)$ diekspansikan terhadap Deret Taylor di sekitar titik x_i, y akan menghasilkan :

$$u(x + \Delta x, y) = u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3} + \cdots \tag{2.10}$$

$$u(x - \Delta x, y) = u(x, y) - \Delta x \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3} + \cdots \tag{2.11}$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x} + \cdots \tag{2.12}$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x} + \cdots \tag{2.13}$$

Dengan *i* menandakan posisi *x* dan *j* menandakan posisi *y*

Pendekatan Turunan Pertama $u'(x)$

a. Beda Maju

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.14}$$

b. Beda Mundur

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.15}$$

c. Beda Tengah

Jika persamaan (2.14) dikurangi dengan persamaan (2.15) menghasilkan pendekatan beda tengah, yaitu

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \tag{2.16}$$

Pendekatan Turunan Kedua $u''(x)$

Jika persamaan (2.14) dijumlah dengan persamaan (2.15) menghasilkan pendekatan beda tengah untuk turunan kedua, yaitu:

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \tag{2.17}$$

Kemudian, jika $u = u(x, y)$ diekspansikan terhadap Deret Taylor di sekitar titik x, y_j akan menghasilkan :

$$u(x + \Delta y, y) = u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial y^3} + \cdots \tag{2.18}$$

$$u(x - \Delta y, y) = u(x, y) - \Delta x \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3} + \cdots \tag{2.19}$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \Delta y \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^3}{3!}\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y} + \cdots \tag{2.20}$$

$$u_{i,j-1} = u_{i,j} - \Delta y \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y} - \frac{(\Delta y)^3}{3!}\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y} + \cdots \tag{2.21}$$

Dengan *i* menandakan posisi *x* dan *j* menandakan posisi *y*

Pendekatan Turunan Pertama $u'(x)$

a. Beda Maju

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) \tag{2.22}$$

b. Beda Mundur

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \tag{2.23}$$

c. Beda Tengah

Jika persamaan (2.22) dikurangi dengan persamaan (2.23) menghasilkan pendekatan beda tengah, yaitu

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \tag{2.24}$$

Pendekatan Turunan Kedua $u''(x)$

Jika persamaan (2.22) dijumlah dengan persamaan (2.23) menghasilkan pendekatan beda tengah untuk turunan kedua, yaitu:

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2 \qquad (2.25)$$

2.5. Metode *Alternating Direct Implicit* (ADI)

Menurut Hoffman (1992), Masalah keseimbangan yang stabil dapat diselesaikan sebagai solusi asimtotik dari masalah yang tidak stabil yang tepat pada waktu yang lama. Persamaan Laplace yang stabil,

$$\bar{f}_{xx} + \bar{f}_{yy} = 0 \qquad (2.26)$$

Persamaan diferensial parsial yang tidak stabil yang sesuai adalah persamaan difusi, yaitu:

$$\bar{f}_t = \alpha\left(\bar{f}_{xx} + \bar{f}_{yy}\right) \qquad (2.27)$$

dimana *boundary contidition* dari masalah tidak stabil sama dengan *boundary condition* pada masalah yang stabil.

Karena keadaan *steady state* asimtotik diinginkan, maka metode numerik dapat mengambil langkah-langkah waktu yang lama yang diinginkan. Dari pertimbangan stabilitas numerik, metode beda hingga implisit tanpa syarat stabil adalah pilihan yang jelas. Metode beda hingga implisit hasil sistem persamaan beda hingga yang digabungkan, harus diselesaikan secara simultan. Untuk satu dimensi ruang, hasil persamaan sistem tridiagonal, dapat diselesaikan dengan sangat efisien oleh Algoritma Thomas. Namun, untuk yang lebih dari satu dimensi ruang, sistem terikat pada hasil persamaan, yang memerlukan sejumlah besar upaya untuk menyelesaikannya. Metode *Alternating-Direction Implicit* (ADI) dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan lebih efisien. Metode ADI adalah pilihan yang jelas untuk memecahkan persamaan Laplace yang stabil sebagai solusi asimtotik pada waktunya dari persamaan difusi yang tidak stabil.

Pendekatan *alternating direction implicit* (ADI) menyelesaikan persamaan diferensial parsial dalam dua langkah. Pada langkah pertama, turunan spasial dalam satu arah, katakan *y*, dievaluasi pada *n* tingkat waktu yang diketahui

dan turunan spasial lainnya, katakan x, dievaluasi pada $n + 1$ tingkat waktu yang tidak diketahui. Pada langkah berikutnya, proses ini dilakukan sebaliknya. Berdasarkan persamaan difusi dua dimensi. Untuk langkah pertama, semi diskrit (yaitu, diskritisasi waktu saja) hasil pendekatan beda hingga adalah

$$\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha\left(f_{xx}\,|_{i,j}^{n+1} + f_{yy}\,|_{i,j}^{n}\right) \tag{2.28}$$

$$\frac{f_{i,j}^{n+2}-f_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} = \alpha\left(f_{xx}\,|_{i,j}^{n+1} + f_{yy}\,|_{i,j}^{n+2}\right) \tag{2.29}$$

Menerapkan persamaan tersebut untuk langkah waktu $\Delta t/2$ hasilnya adalah

$$\frac{f_{i,j}^{n+1/2}-f_{i,j}^{n}}{(\Delta t/2)} = \alpha\left(f_{xx}\,|_{i,j}^{n+1/2} + f_{yy}\,|_{i,j}^{n}\right) \tag{2.30}$$

$$\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n+1/2}}{(\Delta t/2)} = \alpha\left(f_{xx}\,|_{i,j}^{n+1/2} + f_{yy}\,|_{i,j}^{n+1}\right) \tag{2.31}$$

Dengan mengganti turunan spasial yang tepat dengan beda pusat orde kedua-pendekatan beda hingga dan memperkenalkan aspek jaringan rasio $\beta = \Delta x/\Delta y$, Persamaan (2.30) dan (2.31) menjadi

$$f_{i,j}^{n+1/2} - f_{i,j}^{n} = \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2}\left(\left(f_{i+1,j}^{n+1/2} - 2f_{i,j}^{n+1/2} + f_{i-1,j}^{n+1/2}\right) + \beta^2\left(f_{i,j+1}^{n} - 2f_{i,j}^{n} + f_{i,j-1}^{n}\right)\right) \tag{2.32}$$

$$f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1/2} = \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2}\left(\left(f_{i+1,j}^{n+1/2} - 2f_{i,j}^{n+1/2} + f_{i-1,j}^{n+1/2}\right) + \beta^2\left(f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}\right)\right) \tag{2.33}$$

Persamaan (2.32) dan (2.33) merupakan Solusi *steady-state Asymptotic* yang diinginkan dari solusi persamaan *Laplace*.

Persamaan (2.32) dan (2.33) dapat dinyatakan dengan *jumlah difusi d*, yang berbanding lurus dengan Δt:

$$d = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \tag{2.34}$$

Ketika menyelesaikan persamaan differensial parsial elips dengan metode ADI, Persamaan (2.32) dan (2.33) umumnya dinyatakan dalam iterasi parameter ρ:

$$\rho = \frac{\Delta x^2}{\alpha\Delta t} \tag{2.35}$$

yang berbanding terbalik dengan Δt. Substitusi ρ ke Persamaan (2.32) dan (2.33) maka persamaan beda hingga tersebut menjadi:

$$f_{i-1,j}^{n+1/2} - (2+\rho) f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\beta^2 \left(f_{i,j-1}^{n} - \left(2 - \frac{\rho}{\beta^2}\right) f_{i,j}^{n} + f_{i,j+1}^{n} \right) \quad (2.36)$$

$$f_{i,j-1}^{n+1} - \left(2 + \frac{\rho}{\beta^2}\right) f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j+1}^{n+1} = -\frac{1}{\beta^2} \left(f_{i-1,j}^{n+1/2} - (2-\rho) f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (2.37)$$

Ketika diterapkan pada setiap titik dalam grid beda hingga, Persamaan (2.36) menghasilkan sistem persamaan tridiagonal di setiap baris titik-titik grid (yaitu, di sepanjang baris *j* yang konstan), kemudian persamaan (2.37) menghasilkan sistem persamaan tridiagonal sepanjang masing-masing kolom titik-titik grid (yaitu di sepanjang baris *i* yang konstan).

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{\mathrm{jmax}-1} & b_{\mathrm{jmax}-1} & a_{\mathrm{jmax}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{\mathrm{jmax}} & a_{\mathrm{jmax}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1}^{n+1} \\ u_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i,j\,\mathrm{max}-1}^{n+1} \\ u_{i,j\,\mathrm{max}}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{\mathrm{jmax}-1} \\ d_{\mathrm{jmax}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{i\,\mathrm{max}-1} & b_{i\,\mathrm{max}-1} & a_{i\,\mathrm{max}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{i\,\mathrm{max}} & a_{i\,\mathrm{max}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j}^{n+1} \\ u_{2,j}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i\,\mathrm{max}-1,j}^{n+1} \\ u_{i\,\mathrm{max},j}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{i\,\mathrm{max}-1} \\ d_{i\,\mathrm{max}} \end{pmatrix}$$

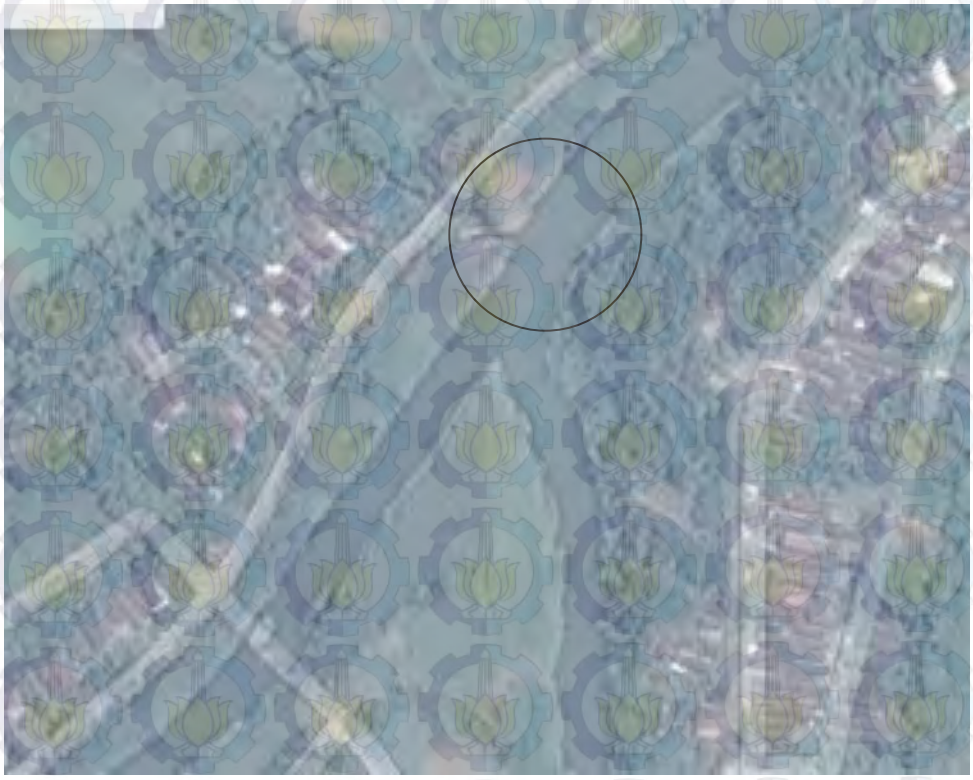
BAB 3
METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada penulisan tesis ini. Disamping itu, dijelaskan pula mengenai prosedur dan pelaksanaan tiap – tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan tesis ini.

Adapun beberapa tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

3. 1 Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di pertemuan dua sungai antara Kali Surabaya dan Sungai Marmoyo didaerah Perning Mojokerto Provinsi Jawa Timur.



3.2 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan-tahapan penelitian dapat diuraikan sebagai berikut :

a. Studi literatur dan pengumpulan data

Pada tahap ini dipelajari mengenai teori-teori dasar yang mendukung pembahasan masalah dan mengumpulkan berbagai referensi yang mendukung penelitian serta mengumpulkan data sekunder berupa data TSS, TDS, BOD, COD, dan DO dari Perum Jasa Tirta I.

b. **Mengkaji dan menganalisis model matematika penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai**

Pada tahap ini dikaji serta dianalisis model yang diusulkan dalam penelitian, yakni model penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai dengan menggabungkan unsur hidrodinamika.

c. **Mengkonstruksi model matematika penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai**

Pada tahap ini dikonstruksi model penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai dengan menggabungkan unsur hidrodinamika menggunakan prinsip-prinsip dasar aliran fluida dan parameter-parameter yang digunakan.

d. **Merumuskan penyelesaian numerik**

Pada tahap ini digunakan metode *Alternating Direct Implicit* (ADI) untuk menyelesaikan model hidrodinamika pada penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai, Hasil ini selanjutnya dibuat algoritma solusinya dan disusun program komputernya menggunakan *software* MATLAB dengan simulasinya menggunakan *software* SURFER

e. **Simulasi numerik**

Pada tahapan ini, disimulasikan menggunakan komputer dengan jalan memasukkan data-data sekunder serta parameter-parameter hidrodinamika.

f. **Validasi**

Pada proses ini, dilakukan perbandingan antara solusi numerik yang diperoleh pada *item* dengan data lapangan, yaitu data sekunder dari PT Jasa Tirta.

g. **Analisa hasil dan pembahasan**

Pada tahapan ini, hasil yang diperoleh dari simulasi akan dibahas untuk kemudian diambil kesimpulan.

h. **Menyusun laporan**

i. **Seminar Hasil di *Event* Nasional atau Internasional**

3.3 Jadwal Penelitian

Penelitian ini direncanakan selama lima bulan. Adapun rencana tersebut dijabarkan dalam tabel berikut :

NO	JENIS KEGIATAN	BULAN KE-				
		I	II	III	IV	V
1.	Studi Pustaka dan Pengumpulan Data					
2.	Mengkaji dan Menganalisis Model Hidrodinamika					
3.	Mengkonstruksi Model Matematika					
4.	Merumuskan Penyelesaian Numerik					
5.	Simulasi Numerik					
6.	Validasi					
7.	Analisa Hasil					
8.	Penyusunan Laporan					
9.	Seminar Nasional maupun Internasional					

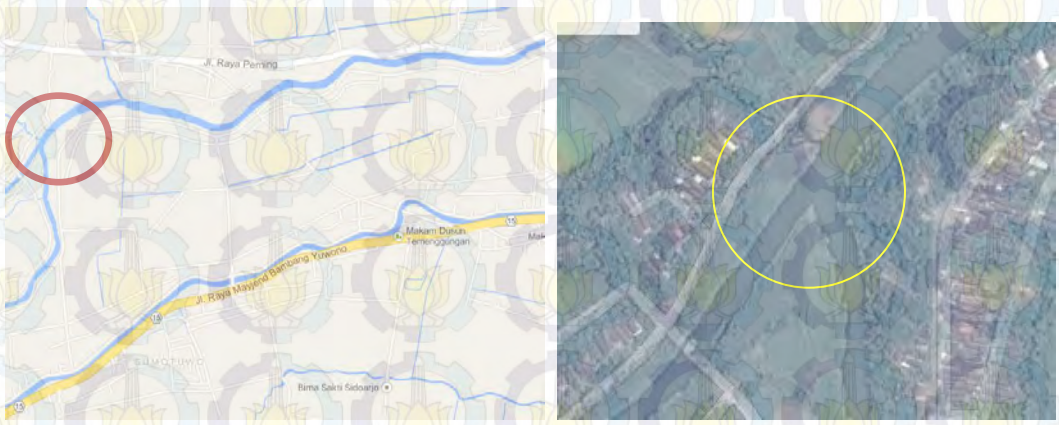
BAB 4
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Hidrodinamika Penyebaran Polutan dan Sedimentasi

Bentuk morfologi pertemuan dua sungai antara sungai Marmoyo dan sungai Surabaya menyerupai model Shazy Shabayek, sehingga pada penelitian ini model Shazy Shabayek digunakan untuk dasar memodelkan penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai.. Arah pergerakan aliran air sungai dan zat-zat yang dibawa oleh air sungai merupakan dinamika dari fluida. Sehingga untuk membangun model hidrodinamika pola penyebaran polutan dan sedimentasi dibutuhkan hukum-hukum dasar fisika sebagai acuannya.

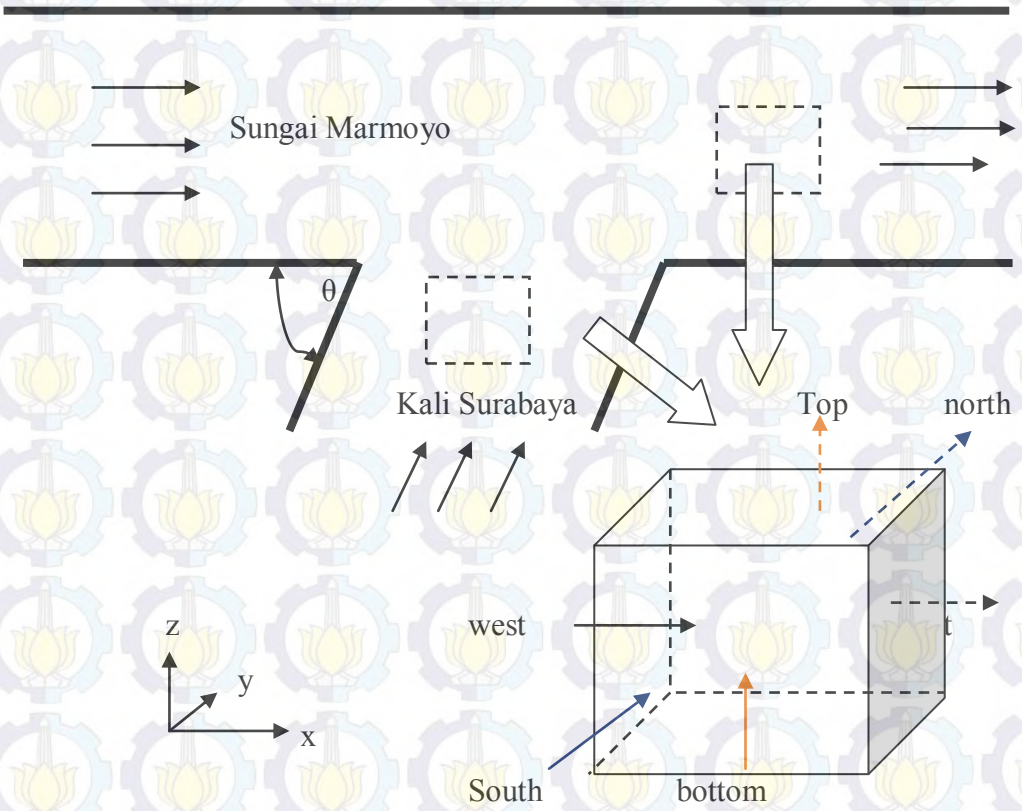
Untuk merumuskan model hidrodinamika pada penyebaran polutan dan sedimentasi di pertemuan dua sungai, diawali dengan pengambilan data dari observasi yang telah dilakukan sebelumnya. Data-data diperoleh dari Perum Jasa Tirta 1 yang meliputi data kualitas air yaitu COD, BOD, DO dan TSS, serta data-data mengenai morfologi sungai. Selanjutnya adalah mengetahui karakteristik polutan dan sedimentasi yang didasarkan pada proses biologi dan proses kimiawi, kemudian mengetahui proses yang terjadi dalam aliran sungai yang meliputi proses adveksi dan difusi. Semua proses tersebut dimodelkan dengan menerapkan hukum kekekalan massa, kekekalan momentum dan hukum pertama dan kedua termodinamika.

Peta kajian penelitian dari sungai yang akan diteliti adalah sebagai berikut:



Gambar 4.1 Peta Kajian Penelitian

Untuk memudahkan pemahaman dalam mengkonstruksi model penyebaran, perlu di lakukan sketsa dari peta kajian penelitian lengkap dengan volume kendalinya sebagai berikut:



Gambar 4.2 Sketsa peta kajian penelitian dan volume kendali

Analisis yang dilakukan dalam studi hidrodinamika didasarkan pada suatu volume kendali yang menunjuk pada suatu daerah di dalam ruang berhingga yang didalamnya terjadi proses aliran ke dalam ruang dan keluar dari ruang tersebut. Volume kendali yang juga disebut sebagai sistem terbuka, digunakan dalam penurunan persamaan kontinuitas, persamaan momentum serta persamaan skalar transport.

4.1.1. Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas dikembangkan berdasarkan hukum kekekalan massa yang dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial. Berdasarkan hukum

kekekalan massa, massa yang masuk sama dengan massa yang keluar. Diketahui bahwa $\rho = \frac{m}{\forall}$ sehingga massa dapat dinyatakan sebagai $m = \rho\forall$. Maka:

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t_2}$$

$$\frac{\rho.\forall}{\Delta t_1} = \frac{\rho.\forall}{\Delta t_2}$$

$$\rho.A.\frac{\Delta x}{\Delta t} = \rho.A.\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Karena permukaan bidang dianggap sama, maka $\rho_1.v_1 = \rho_2.v_2$ Sehingga berdasarkan hukum kekekalan massa untuk suatu volume kendali, Menurut Munson 1990:

Laju perubahan terhadap waktu dari massa sistem yang berimpit	=	**Laju perubahan massa dari kandungan volume kendali (CV) yang berimpit**	+	**Laju aliran netto dari massa yang melalui permukann kendali (CS)**

Bila dikaitkan dengan teorema pengangkutan Reynold, dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{sys} \rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall + \int_{CS} \rho U.n\, dA \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall + \int_{CS} \rho U.n\, dA = 0 \tag{4.2}$$

Dimana $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)$ merupakan fluks massa aliran yang ada dalam volume kendali. Dan $U.n$ dalam integral laju aliran massa, menyatakan perkalian dari komponen kecepatan U yang tegak lurus terhadap suatu bagian kecil pada permukaan kendali (CS) dan bidang diferensial dA. Jadi $U.n\, dA$ merupakan laju aliran volume melalui dA dan $\rho U.n\, dA$ merupakan laju aliran massa melalui dA. Kemudian, untuk tanda perkalian titik, menyatakan "+" untuk aliran keluar dari volume kendali (CV), dan "−" untuk aliran masuk kedalam volume kendali (CV).

Jika volume kendali pada gambar (4.1) digambarkan arah fluks massanya, maka persamaan (4.2) menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall + \rho UA|_{keluar} - \rho UA|_{masuk} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall) + (\rho uA)_e - (\rho uA)_w + (\rho vA)_n - (\rho vA)_s + (\rho wA)_t - (\rho wA)_b = 0$$

Dimana : A_e = permukaan kendali yang keluar dari sisi timur

A_w = permukaan kendali yang masuk dari sisi barat

A_n = permukaan kendali yang keluar dari sisi utara

A_s = permukaan kendali yang masuk dari sisi selatan

A_t = permukaan kendali yang keluar dari sisi atas

A_b = permukaan kendali yang masuk dari sisi bawah

$$\forall = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$A_e = A_w = \Delta y \Delta z$$

$$A_n = A_s = \Delta x \Delta z$$

$$A_t = A_b = \Delta x \Delta y$$

Sehingga persamaan diatas dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) + \rho(u_e - u_w)\Delta y \Delta z + \rho(v_n - v_s)\Delta x \Delta z + \rho(w_b - w_t)\Delta x \Delta y = 0$$

(4.3)

Karena $\Delta x \Delta y \Delta z$ bukan fungsi terhadap t, sehingga:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t}\rho + \rho(u_e - u_w)\Delta y \Delta z + \rho(v_n - v_s)\Delta x \Delta z + \rho(w_b - w_t)\Delta x \Delta y = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho(u_e - u_w)}{\Delta x} + \frac{\rho(v_n - v_s)}{\Delta y} + \frac{\rho(w_b - w_t)}{\Delta z} = 0 \qquad (4.4)$$

Untuk limit $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ dan karena volume kendalinya adalah tetap (*fixed*) dan tidak berdeformasi (berubah bentuk) maka ρ konstan, sehingga persamaan (4.4) dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (4.5)$$

Karena pada penelitian ini hanya difokuskan pada arah lateral dan longitudinal (*2D Vertically Averaged Equations*), maka persamaan kekekalan massa untuk sungai utama (Sungai Marmoyo) menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (4.6)$$

Sedangkan persamaan kekekalan massa untuk anak sungai (Sungai Surabaya) , cara penurunan rumusnya sama dengan kekekalan massa untuk sungai utama, hanya sumbu koordinat x di simbolkan x' dan sumbu koordinat y disimbolkan y' dengan sudut antara sungai utama dengan anak sungai sebesar θ , sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} = 0 \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} cos\,\theta + \frac{\partial v}{\partial y} sin\,\theta = 0 \tag{4.8}$$

Persamaan kekekalan massa untuk pertemuan dua sungai (antara Kali Surabaya dan Sungai Marmoyo) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = Q_1 + Q_2 \tag{4.9}$$

Dengan Q_1 adalah debit aliran sungai untuk sungai utama persatuan luas dan Q_2 adalah debit aliran sungai untuk anak sungai persatuan luas. Karena arah aliran sungai dalam pertemuan dua sungai adalah lurus dan seragam (searah sumbu x), maka kecepatan untuk arah sumbu y sama dengan nol, sehingga persamaannya menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Q_1 + Q_2 \tag{4.10}$$

4.1.2. Persamaan Kekekalan Momentum

Berdasarkan pada prinsip kontinuitas, gaya resultant yang bekerja terhadap suatu volume kendali dalam sebuah sistem sama dengan laju perubahan fisik yang masuk melalui volume kendali ditambah dengan laju perubahan fisik yang keluar melalui volume kendali. Kemudian berdasarkan hukum kedua Newton dari gerak sebuat sistem dinyatakan sebagai, laju perubahan momentum sama dengan gaya yang bekerja. Sehingga berdasarkan kedua prinsip tersebut, dapat dikombinasikan suatu persamaan matematika untuk persamaan kekekalan momentum:

Debit adalah kecepatan dikalikan luas penampang, dan momentum adalah massa dikalikan dengan kecepatan, maka momentum dari partikel polutan $\rho d\forall$

adalah $U\rho d\forall$, dan bila dikaitkan dengan debit, maka akan diperoleh partikel sedimentasi bed load $q_b \rho d\forall$. Jadi momentum dari seluruh sistem adalah $\int_{sys}(U\rho d\forall_{COD,BOD,DO} + q_b \rho d\forall)$ Dan hukum kedua Newton menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{sys}(U\rho d\forall_{COD,BOD,DO} + q_b \rho d\forall) = \sum F_{yang\ bekerja\ di\ sistem} \qquad (4.11)$$

Kemudian, bila dikaitkan dengan teorema pengangkutan Reynolds,menurut Munson 1990 yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{sys}(U\rho d\forall_{COD,BOD,DO} + q_b \rho d\forall) \qquad (4.12)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}(U\rho d\forall_{COD,BOD,DO} + q_b \rho d\forall) + \int_{CS} U\rho U.n\, dA$$

Sehingga persamaan untuk kekekalan momentum dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}(U\rho d\forall_{COD,BOD,DO} + q_b \rho d\forall) + \int_{CS} U\rho U.n\, dA$$

$$= \sum F_{yang\ bekerja\ di\ sistem} \qquad (4.13)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}(U\rho d\forall_{COD,BOD,DO} + q_b \rho d\forall) + \sum_{CS} \rho UA\, U = \sum F \qquad (4.14)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(U\rho\forall_{COD,BOD,DO} + q_b \rho\forall\right) + \sum_{CS} \rho UA\, U = \sum F \qquad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U\rho\forall_{COD,BOD,DO} + q_b \rho\forall\right) + (\rho uAU)_e - (\rho uAU)_w + (\rho vAU)_n - (\rho vAU)_s$$

$$+ (\rho wAU)_t - (\rho uAU)_b = \sum F \qquad (4.16)$$

Dimana : A_e = permukaan kendali yang keluar dari sisi timur

A_w = permukaan kendali yang masuk dari sisi barat

A_n = permukaan kendali yang keluar dari sisi utara

A_s = permukaan kendali yang masuk dari sisi selatan

A_t = permukaan kendali yang keluar dari sisi atas

A_b = permukaan kendali yang masuk dari sisi bawah

$$\forall = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$A_e = A_w = \Delta y \Delta z$$

$$A_n = A_s = \Delta x \Delta z$$

$$A_t = A_b = \Delta x \Delta y$$

Sehingga persamaan diatas dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U \Delta x \Delta y \Delta z + q_b \rho \Delta x \Delta y \Delta z) + \rho(Uu_e - Uu_w)\Delta y \Delta z + \rho(Uv_n - Uv_s)\Delta x \Delta z$$
$$+ \rho(Uw_b - Uw_t)\Delta x \Delta y = \sum F$$

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t}(\rho U + q_b \rho) + \rho(Uu_e - Uu_w)\Delta y \Delta z + \rho(Uv_n - Uv_s)\Delta x \Delta z$$
$$+ \rho(Uw_b - Uw_t)\Delta x \Delta y = \sum F$$

Persamaan diatas dibagi dengan $\Delta x \Delta y \Delta z$ sehingga menjadi:

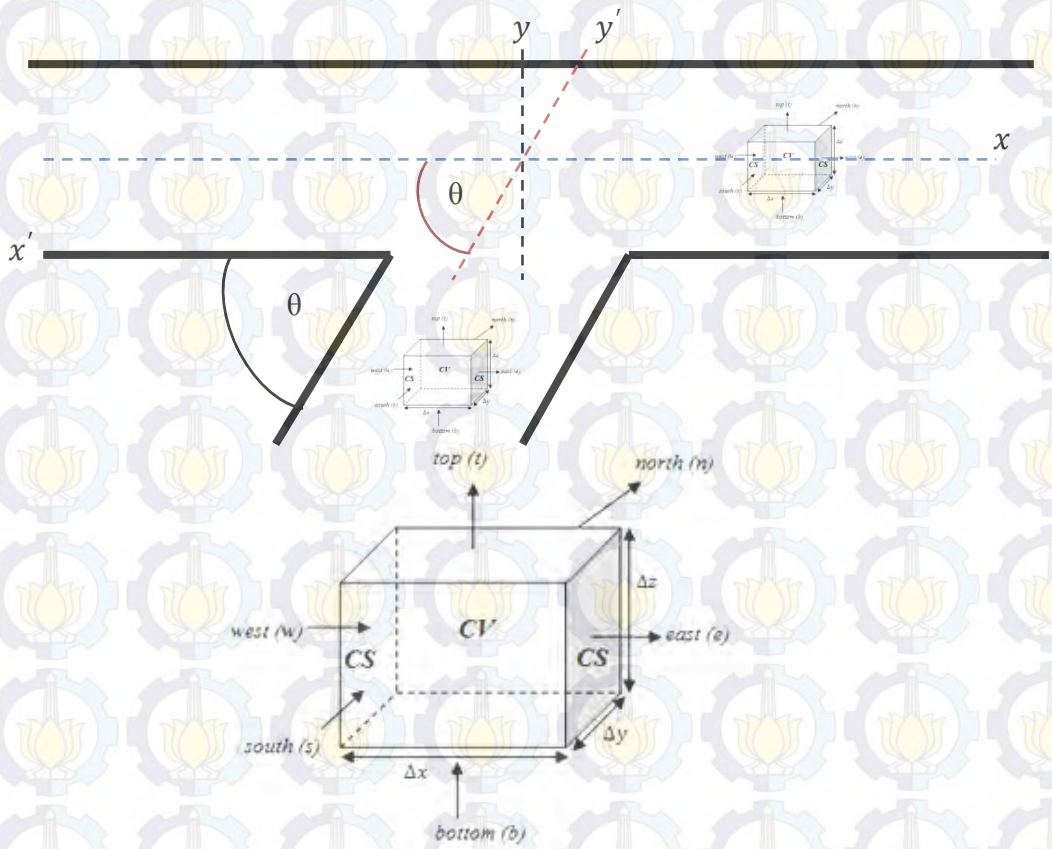
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U + q_b \rho) + \frac{\rho(Uu_e - Uu_w)}{\Delta x} + \frac{\rho(Uv_n - Uv_s)}{\Delta y} + \frac{\rho(Uw_b - Uw_t)}{\Delta z}$$
$$= \frac{\sum F}{\Delta x \Delta y \Delta z} \tag{4.17}$$

Karena pada penelitian ini hanya difokuskan pada arah lateral dan longitudinal (*2D Vertically Averaged Equations*), maka persamaan (4.17) menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U + q_b \rho) + \frac{\rho(Uu_e - Uu_w)}{\Delta x} + \frac{\rho(Uv_n - Uv_s)}{\Delta y} = \frac{\sum F}{\Delta x \Delta y \Delta z} \tag{4.18}$$

Untuk membangun persamaan momentum, perlu dilakukan penjabaran gaya pada masing-masing sumbu koordinat. Gaya-gaya yang bekerja pada sistem ini adalah gaya permukaan (*surface force*) dan gaya badan fluida (*body force*). Kemudian gaya-gaya tersebut diuraikan kedalam koordinat kartesius sesuai dengan arahnya (arah longitudinal dan arah lateral), arah longitudinal sebagai sumbu *x* dan arah lateral sebagai sumbu *y*.

Sketsa penampang sungai utama dan anak sungai berdasarkan sumbu koordinatnya adalah sebagai berikut:



Gambar 4.3 Sketsa Volume Kendali Sungai Utama dan Anak Sungai

a. Kekekalan momentum untuk Aliran di Sungai Marmoyo

Kekekalan momentum pada anak sungai (Sungai Marmoyo) pada sumbu y dan sumbu x sebagai berikut:

Pada Sumbu *x* :

Persamaan kekekalan momentum untuk aliran di sungai marmoyo diperoleh dari persamaan (4.18) sehingga penjabaran gaya-gaya pada sumbu x yang terjadi pada aliran sungai marmoyo adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U + q_b \rho) + \frac{\rho(Uu_e - Uu_w)}{\Delta x} + \frac{\rho(Uv_n - Uv_s)}{\Delta y}$$

$$= \left(\frac{\left(F_{s_x}\right)_e - \left(F_{s_x}\right)_w \Delta y \Delta z + \left(F_{s_y}\right)_n + \left(F_{s_y}\right)_s \Delta x \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{F_{b_x} + F_{b_y}}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U + q_b \rho) + \frac{\rho(Uu_e - Uu_w)}{\Delta x} + \frac{\rho(Uv_n - Uv_s)}{\Delta y}$$

$$= \left(\frac{\left(\left(F_{s_x}\right)_e - \left(F_{s_x}\right)_w\right)\Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{\left(\left(F_{s_y}\right)_n - \left(F_{s_y}\right)_s\right)\Delta x \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right.$$

$$\left. + \frac{(F_{b_x} + F_{b_y})\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right) \quad (4.19)$$

Untuk limit $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ dan karena alirannya tak mampu mampat, maka:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U + q_b \rho) + \frac{\partial \rho u U}{\partial x} + \frac{\partial \rho v U}{\partial y} = \left(\frac{\partial\left(F_{s_x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(F_{s_y}\right)}{\partial y} + (F_{b_x} + F_{b_y}) \right) \quad (4.20)$$

Karena $U = ui + vj$ maka persamaan (4.20) dapat ditulis dalam bentuk arah sumbu x dengan $U = u$, sehingga:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u + q_b \rho) + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} = \left(\frac{\partial\left(F_{s_x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(F_{s_y}\right)}{\partial y} + (F_{b_x} + F_{b_y}) \right) \quad (4.21)$$

Jika kedua ruas dibagi dengan ρ, sehingga didapat sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + q_b) + \frac{\partial u u}{\partial x} + \frac{\partial v u}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(F_{s_x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(F_{s_y}\right)}{\partial y} + (F_{b_x} + F_{b_y}) \right) \quad (4.22)$$

Karena gaya yang bekerja pada *surface force* fluida (F_s) adalah gaya tekan hidrostatis serta gaya-gaya yang bekerja pada *body force* fluida (F_b) yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$F_s = -\frac{p}{A} = -\frac{\frac{1}{2}\gamma h^2 b}{hb} = -\frac{1}{2}\rho g h$$

$$\tau_b = \rho g h (S_x + S_y)$$

dengan p adalah tekanan hidrostatis, τ_b adalah gaya gesek dasar sungai, dan S_x adalah kemiringan dasar saluran pada sumbu x, dan S_y adalah kemiringan dasar saluran pada sumbu y.

$$\frac{\partial}{\partial t}(U+q_b)+\frac{(Uu)_e-(Uu)_w}{\Delta x}+\frac{(Uv)_n-(Uv)_s}{\Delta y}$$

$$=\frac{1}{\rho}\left(\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta x}+\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta y}+\rho gh(S_x+S_y)\right) \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(U+q_b)+\frac{Uu_x}{\Delta x}+\frac{Uu_y}{\Delta y}$$

$$=\frac{1}{\rho}\left(\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta x}+\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta y}+\rho gh(S_x+S_y)\right) \tag{4.24}$$

dengan limit $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ maka pada persamaan (4.22) diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t}(U+q_b)+\frac{Uu_x}{\partial x}+\frac{Uu_y}{\partial y}$$

$$=\frac{1}{\rho}\left(\frac{-\frac{1}{2}\partial\rho gh}{\partial x}+\frac{-\frac{1}{2}\partial\rho gh}{\partial y}+\rho gh(S_x+S_y)\right) \tag{4.25}$$

karena $U = ui + vj$, maka persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk arah sumbu x dengan $U = u$ dan dengan $u_x = u, v_y = v$ maka persamaan (4.25) menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}=\frac{-\partial gh}{2\partial x}+\frac{-\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+2u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.30}$$

Karena mensubtitusi persamaan (4.6) kedalam persamaan (4.30) sehingga didapatkan persamaan pembangun anak sungai pada sumbu-*x* sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.31}$$

Pada Sumbu *y*

Persamaan kekekalan momentum untuk aliran di sungai marmoyo diperoleh dari persamaan (4.18) sehingga penjabaran gaya-gaya pada sumbu y yang terjadi pada aliran sungai marmoyo adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+\frac{(Uu)_e-(Uu)_w}{\Delta x}+\frac{(Uv)_n-(Uv)_s}{\Delta y}$$
$$=\frac{1}{\rho}\left(\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta x}+\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta y}+\rho gh(S_x+S_y)\right) \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+\frac{Uu_x}{\Delta x}+\frac{Uu_y}{\Delta y}$$
$$=\frac{1}{\rho}\left(\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta x}+\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta y}+\rho gh(S_x+S_y)\right) \tag{4.33}$$

dengan limit $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ maka pada persamaan (4.33) diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+\frac{Uu_x}{\partial x}+\frac{Uu_y}{\partial y}$$
$$=\frac{1}{\rho}\left(\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\partial x}+\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\partial y}+\rho gh(S_x+S_y)\right) \tag{4.34}$$

Karena $U=ui+vj$ maka persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk arah sumbu y dengan $U=v$ dan dengan $u_x=u, v_y=v$ maka persamaan (4.34) menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v+q_b)+\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial vv}{\partial y}=\frac{-\partial gh}{2\partial x}+\frac{-\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v+q_b)+v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v+q_b)+v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v+q_b)+v\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v+q_b)+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.39}$$

Karena mensubtitusi persamaan (4.6) kedalam persamaan (4.39) sehingga didapatkan persamaan pembangun anak sungai pada sumbu-y sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v+q_b)+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.40}$$

b. Kekekalan momentum untuk Aliran di Kali Surabaya

Kekekalan momentum pada sungai utama (Kali Surabaya) pada arah sumbu y dan arah sumbu x sebagai berikut:

Pada Sumbu x

Persamaan kekekalan momentum untuk aliran di Kali Surabaya diperoleh dari persamaan (4.18) sehingga penjabaran gaya-gaya pada sumbu x yang terjadi pada aliran Kali Surabaya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y'} = -\frac{gh}{2\partial x}-\frac{gh}{2\partial y'}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.41}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.8) ke dalam persamaan (4.39)

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \tag{4.42}$$
$$=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial x}\cos\theta-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta+gh\,(S_x+S_y)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+\frac{\partial u}{\partial x}(u+v\cos\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \tag{4.43}$$
$$=-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\cos\theta\right)-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta+gh\,(S_x+S_y)$$

Pada Sumbu y

Persamaan kekekalan momentum untuk aliran di Kali Surabaya diperoleh dari persamaan (4.18) sehingga penjabaran gaya-gaya pada sumbu y yang terjadi pada aliran Kali Surabaya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v+q_b)+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y'}=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y'}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.44}$$

Dengan mensubtitusi (4.8) sehingga persamaan 4.44 menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v+q_b)+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+v\frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta \tag{4.45}$$
$$=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial x}\cos\theta-\frac{\partial gh}{2\partial x}\sin\theta+gh\,(S_x+S_y)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v+q_b)+\frac{\partial v}{\partial x}(u+v\cos\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta \tag{4.46}$$
$$=-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\cos\theta\right)-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta+gh\,(S_x+S_y)$$

c. Kekekalan Momentum di aliran Pertemuan Dua Sungai

Kekekalan momentum pada pertemuan dua sungai pada arah sumbu y dan arah sumbu x sebagai berikut:

Pada Sumbu *x* :

Pada pertemuan aliran dua sungai untuk kekekalan momentum berdasarkan dari persamaan (4.31), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.47}$$
$$=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\left(S_x+S_y\right)+v_1Q_1+v_2Q_2$$

Karena arah aliran pada pertemuan dua sungai lurus dan seragam, sehingga kecepatan untuk arah sumbu y sama dengan nol, sehingga persamaan (4.47) menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + q_b) + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial gh}{2\partial x} + gh\left(S_x + S_y\right) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 \quad (4.48)$$

Pada Sumbu *y* :

Pada pertemuan aliran dua sungai untuk kekekalan momentum didasarkan pada persamaan (4.40), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}(v + q_b) + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh\,(S_x + S_y) \quad (4.49)$$

Karena arah aliran pada pertemuan dua sungai lurus dan seragam, sehingga kecepatan untuk arah sumbu x sama dengan nol, sehingga persamaan (4.49) menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v + q_b) + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial gh}{2\partial y} + gh\,(S_x + S_y) \quad (4.50)$$

Untuk transportasi sedimen diperoleh dari rumus Meyer-Peter & Muller (Liu, 2001) sebagai berikut:

$$q_b = c_m[(s-1)g]^{0,5} d_{50}^{1.5} (\mu\theta_b - \theta_c)^{1,5} \quad (4.51)$$

dengan:

q_b = banyaknya sedimen *bed load*

s = rasio massa jenis sedimen dengan massa jenis air

$d_{50}^{1.5}$ =rata-rata diameter sedimen

c_m = 8.0

μ = 1.0

θ_c = 0.047

θ_b = $\frac{\tau_b}{(\rho_b - \rho) g d_{50}}$

dimana:

$$\tau_b = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{0.06}{\left(\log\left(\frac{12h}{2.5d_{50}}\right)\right)^2}\right)u^2$$

dengan:

ρ = Massa jenis air

τ_b = Tegangan geser

Dari persamaan-persamaan yang dibangun di atas, dapat dituliskan persamaan pembangun (*Governing equation*) sebagai berikut:

Persamaan Pembangun untuk aliran Anak Sungai (Sungai Marmoyo):

Kekekalan massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4.52}$$

Kekekalan momentum:

Sumbu x :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + q_b) + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh\,(S_x + S_y) \tag{4.53}$$

Sumbu y:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v + q_b) + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh\,(S_x + S_y) \tag{4.54}$$

Persamaan Pembangun untuk aliran Sungai Utama (Kali Surabaya):

Kekekalan massa :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta = 0 \tag{4.55}$$

Kekekalan momentum :

Sumbu x :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + q_b) + \frac{\partial u}{\partial x}(u + v\cos\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta = -\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2} + \frac{g}{2}\cos\theta\right) - \frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta + gh\,(S_x + S_y) \tag{4.56}$$

Sumbu y :

$$\frac{\partial}{\partial t}(v + q_b) + \frac{\partial v}{\partial x}(u + v\cos\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta = -\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2} + \frac{g}{2}\cos\theta\right) - \frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta + gh\,(S_x + S_y) \tag{4.57}$$

Persamaan Pembangun untuk aliran di Pertemuan dua sungai:

Kekekalan massa :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = Q_1 + Q_2 \tag{4.58}$$

Kekekalan momentum :

Sumbu x :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + q_b) + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial gh}{2\partial x} + gh\left(S_x + S_y\right) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 \tag{4.59}$$

Sumbu y :

$$\frac{\partial}{\partial t}(v + q_b) + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial gh}{2\partial y} + gh\left(S_x + S_y\right) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 \tag{4.60}$$

4.1.3. Persamaan Skalar Transport

Persamaan untuk perubahan konsentrasi diperoleh dari persamaan skalar transport (Apsley, 2013) yaitu:

Laju perubahan konsentrasi dalam volume kendali	=	Laju perubahan konsentrasi dalam volume kendali yang berkaitan dengan adveksi	+	Laju perubahan konsentrasi dalam volume kendali yang berkaitan dengan difusi	+	sumber
$\frac{\partial C}{\partial t}$	=	$-u_i \frac{\partial C}{\partial x_i}$	+	$\frac{\partial}{\partial x_i} E_i \frac{\partial C}{\partial x_i}$	+	R

Persamaan diatas dijabarkan dengan koefisien dispersi pada arah longitudinal x dan lateral y diasumsikan tetap

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_x \frac{\partial C}{\partial x} + u_y \frac{\partial C}{\partial y} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + R \tag{4.61}$$

Karena aliran sungai pada pertemuan dua sungai antara sungai Marmoyo dan kali Surabaya bersifat laminer, maka proses yang terjadi didalamnya adalah proses adveksi. $u_x = u$ adalah kecepatan pada sumbu x dan $u_y = v$ adalah kecepatan pada sumbu y Persamaan (4.61) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} = R \tag{4.62}$$

Persamaan (4.62) merupakan persamaan skalar transport untuk sungai utama (Kali Surabaya). Persamaan skalar transport untuk anak sungai (Sungai Marmoyo), perhitungannya sama seperti pada sungai utama, yaitu:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u\frac{\partial C}{\partial x'} - v\frac{\partial C}{\partial y'} + R \tag{4.63}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u\frac{\partial C}{\partial x} - v\left(\frac{\partial C}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial C}{\partial y}\sin\theta\right) + R \tag{4.64}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -(u + v\cos\theta)\frac{\partial C}{\partial x} - v\sin\theta\frac{\partial C}{\partial y} + R \tag{4.65}$$

4.2 Persamaan Pembangun Non Dimensional

Persamaan Pembangun yang telah diperoleh masih mengandung dimensi/satuan, sehingga dalam proses simulasi banyak mengalami kesulitan dalam menyeragamkan dimensi/satuan. Agar persamaan tersebut dapat disimulasikan tanpa bergantung dengan dimensi/satuan, maka persamaan-persamaan yang ada harus dibentuk ke dalam persamaan non-dimensi. Adapun variabel non-dimensional tersebut adalah sebagai berikut (Apsley,2005) :

$x = Lx^*$	L	= panjang pada sumbu-*x*
$u = Uu^*$	L	=panjang pada sumbu-*y*
$v = Uv^*$	U	= kecepatan pada sumbu-*x*
$t = \frac{L}{U}t^*$	$\frac{L}{U}$	= waktu
$p = \rho U^2 p^*$	ρU^2	=tekanan

Untuk mendapatkan persamaan pembangun non-dimensi, diperoleh dengan cara mensubstitusikan variabel non-dimensional yang sesuai ke masing masing persamaan kekekalan massa, kekekalan momentum dan skalar transport sebagai berikut :

Kekekalan massa non-dimensi :

a. Kekekalan masa untuk aliran di Sungai Marmoyo

Persamaan kekekalan massa yang akan di non dimensional kan diperoleh dari persamaan (4.52). Untuk menghilangkan satuan guna mempermudah perhitungan

numerik, maka persamaan kekekalan massa yang telah diperoleh disubstitusi dengan variabel non dimensional yang sesuai, sehingga terbentuk persamaan kekekalan massa non dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4.66}$$

$$\frac{\partial (Uu^*)}{\partial (Lx^*)} + \frac{\partial (Uv^*)}{\partial (Ly^*)} = 0 \tag{4.67}$$

$$\frac{U}{L}\frac{\partial (u^*)}{\partial (x^*)} + \frac{U}{L}\frac{\partial (v^*)}{\partial (y^*)} = 0 \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \tag{4.69}$$

Untuk memudahkan penulisan selanjutnya, maka tanda bintang dihilangkan, sehingga Persamaan (4.69) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4.70}$$

b. Kekekalan massa di aliran Kali Surabaya

Persamaan kekekalan massa yang akan di non dimensional kan diperoleh dari persamaan (4.55). Untuk menghilangkan satuan guna mempermudah perhitungan numerik, maka persamaan kekekalan massa yang telah diperoleh disubstitusi dengan variabel non dimensional yang sesuai, sehingga terbentuk persamaan kekekalan massa non dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v\, cos\theta}{\partial x} + \frac{\partial v\, sin\theta}{\partial y} = 0 \tag{4.71}$$

$$\frac{\partial (Uu^*)}{\partial (Lx^*)} + \frac{\partial (Uv^*)cos\theta}{\partial (Lx^*)} + \frac{\partial (Uv^*)sin\theta}{\partial (Ly^*)} = 0 \tag{4.72}$$

$$\frac{U}{L}\frac{\partial (u^*)}{\partial (x^*)} + \frac{Ucos\theta}{L}\frac{\partial (v^*)}{\partial (x^*)} + \frac{Usin\theta}{L}\frac{\partial (v^*)}{\partial (y^*)} = 0 \tag{4.73}$$

$$\frac{\partial (u^*)}{\partial (x^*)} + cos\theta\frac{\partial (v^*)}{\partial (x^*)} + sin\theta\frac{\partial (v^*)}{\partial (y^*)} = 0 \tag{4.74}$$

Untuk memudahkan penulisan selanjutnya, maka tanda bintang dihilangkan, sehingga persamaan (4.74) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + cos\theta \frac{\partial v}{\partial x} + sin\theta \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4.75}$$

4.3 Persamaan Skalar Transport non-dimensi

Untuk Aliran di Sungai Utama (Kali Surabaya)

Persamaan skalar transport yang akan di non dimensional kan diperoleh dari persamaan (4.62). Untuk menghilangkan satuan guna mempermudah perhitungan numerik, maka persamaan skalar transport yang telah diperoleh disubstitusi dengan variabel non dimensional yang sesuai, sehingga terbentuk persamaan skalar transport non dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} - v \frac{\partial C}{\partial y} + R \tag{4.76}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \left(\frac{L}{U} t^*\right)} = -Uu^* \frac{\partial C}{\partial (Lx^*)} - Uv^* \frac{\partial C}{\partial (Ly^*)} + R \tag{4.77}$$

$$\frac{U}{L} \frac{\partial C}{\partial (t^*)} = -\frac{U}{L} u^* \frac{\partial C}{\partial (x^*)} - \frac{U}{L} v^* \frac{\partial C}{\partial (y^*)} + R \tag{4.78}$$

Karena diasumsikan tidak ada sumber lain, maka R=0 dan untuk memudahkan penulisan selanjutnya, maka tanda bintang dihilangkan, sehingga persamaan (4.78) dapat ditulis menjadi :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} - v \frac{\partial C}{\partial y} \tag{4.79}$$

Untuk Aliran di Anak sungai (Sungai Marmoyo)

Persamaan skalar transport yang akan di non dimensional kan diperoleh dari persamaan (4.65). Untuk menghilangkan satuan guna mempermudah perhitungan numerik, maka persamaan skalar transport yang telah diperoleh disubstitusi dengan variabel non dimensional yang sesuai, sehingga terbentuk persamaan skalar transport non dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -(u + v \cos\theta) \frac{\partial C}{\partial x} - v \sin\theta \frac{\partial C}{\partial y} + R \tag{4.80}$$

$$\frac{\partial C}{\partial\left(\frac{L}{U}t^*\right)} = -(Uu^* + Uv^* \cos\theta)\frac{\partial C}{\partial(Lx^*)} - Uv^* \sin\theta \frac{\partial C}{\partial(Ly^*)} + R \qquad (4.81)$$

$$\frac{U}{L}\frac{\partial C}{\partial(t^*)} = -\frac{U}{L}(u^* + v^* \cos\theta)\frac{\partial C}{\partial(x^*)} - \frac{U}{L}v^* \sin\theta \frac{\partial C}{\partial(y^*)} - R \qquad (4.82)$$

Karena diasumsikan tidak ada sumber lain, maka *R=0* dan untuk memudahkan penulisan selanjutnya, maka tanda bintang dihilangkan, sehingga persamaan (4.82) dapat ditulis menjadi :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -(u + v \cos\theta)\frac{\partial C}{\partial x} - v \sin\theta \frac{\partial C}{\partial y} \qquad (4.83)$$

4.4 Penyelesaian Numerik Menggunakan ADI (*Alternating Direction Implicit*)

Dari uraian sebelumnya, diperoleh persamaan kekekalan momentum non-dimensi yang akan digunakan untuk menghitung kecepatan aliran polutan dan sedimentasi dan persamaan transport untuk menghitung konsentrasi COD, BOD, dan DO. Persamaan yang didapat kemudian didiskritisasi dalam grid empat persegi dengan ukuran konstan yang selanjutnya akan diselesaikan dengan metode beda hingga implisit bergantian arah (*Alternating Direction Implicit*, ADI) untuk tiap suku persamaan dan menggunakan skema diferensial maju untuk turunan pertama terhadap *t*, serta diferensial terpusat untuk turunan pertama dan tururnan ke dua terhadap *x* dan *y*.

Dalam metode ini diperlukan dua langkah. Pada langkah pertama derivatif terhadap *x* dihitung dengan *u, v,* dan *c* pada *n* dan derivatif terhadap *y* dihitung pada *n+1*. Pada langkah kedua derivatif terhadap *x* dihitung padan *n+1* dan derivatif terhadap *y* dihitung pada *n+2*.

4.4.1 Diskritisasi Kekekalan momentum untuk Aliran di Anak Sungai (Sungai Marmoyo)

Persamaan kekekalan momentum yang akan didiskritkan diperoleh dari persamaan yang telah dikonstruksi sebelumnya, sehingga sesuai dengan arah nya, bentuk diskrit persamaan kekekalan momentum menjadi:

Pada sumbu x :

Persamaan kekekalan momentum untuk arah sumbu x diperoleh dari perhitungan pada persamaan (4.53) sehingga bentuk diskritnya sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+q_b)+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\,(S_x+S_y) \tag{4.84}$$

Diskritisasi pada langkah pertama *(fixed row j)* adalah :

$$\left(\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right)+\frac{\partial q_b}{\partial t}+u_{i,j}^{n}\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1}-u_{i-1,j}^{n+1}}{2(\Delta x)}\right)+v\left(\frac{u_{i,j+1}^{n}-u_{i.j-1}^{n}}{2(\Delta y)}\right)$$
$$=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh(S_x+S_y)\,,n=0,2,\ldots \tag{4.85}$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)u_{i+1,j}^{n+1}+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)u_{i,j}^{n+1}-\left(\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)u_{i-1,j}^{n+1}$$
$$=-\frac{\partial q_b}{\partial t}-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh(S_x+S_y)$$
$$-\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)u_{i,j+1}^{n}+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)u_{i,j}^{n}+\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)u_{i.j-1}^{n} \tag{4.86}$$

Persamaan (4.89) dapat disederhanakan menjadi:

$$c_i u_{i-1,j}^{n+1}+b_i u_{i,j}^{n+1}+a_i u_{i+1,j}^{n+1}=d_i$$

Dengan :

$$a_i=\left(\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)$$

$$b_i=\left(\frac{1}{\Delta t}\right)$$

$$c_i=\left(-\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)$$

$$d_i=-\frac{\partial q_b}{\partial t}-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh(S_x+S_y)-\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)u_{i,j+1}^{n}+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)u_{i,j}^{n}$$
$$+\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)u_{i.j-1}^{n}$$

Persamaan (4.86) menghasilkan sistem persamaan linier (SPL) tridiagonal pada setiap *n* jika persamaan-persamaan tersebut diterapkan baris per baris atau dikenal sebagai x sweep. Jika ditulis dalam bentuk matriks menjadi:

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{i\max-1} & b_{i\max-1} & a_{i\max-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{i\max} & a_{i\max} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j}^{n+1} \\ u_{2,j}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i\max-1,j}^{n+1} \\ u_{i\max,j}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{i\max-1} \\ d_{i\max} \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan linier diatas diselesaikan menggunakan software MATLAB untuk mencari nilai $u_{i,j}$ sampai dengan $u_{imax\ ,j}$

Sedangkan pada langkah kedua *(fixed coloumn i)* adalah:

$$\left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right) + \frac{\partial q_b}{\partial t} + u_{i,j}^{n}\left(\frac{u_{i+1,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)$$

$$+ v_{i,j}^{n}\left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2(\Delta y)}\right) =$$

$$= -\frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y)\ , n = 1,3, \ldots \qquad (4.87)$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right) u_{i,j+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) u_{i,j}^{n+1} - \left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right) u_{i,j-1}^{n+1}$$

$$= -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y)$$

$$+ \left(\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right) u_{i-1,j}^{n} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) u_{i,j}^{n} - \left(\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right) u_{i+1,j}^{n} \qquad (4.88)$$

Persamaan (4.88) dapat disederhanakan menjadi:

$$c_i u_{i,j-1}^{n+1} + b_i u_{i,j}^{n+1} + a_i u_{i,j+1}^{n+1} = d_j$$

Dengan :

$$a_i = \left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)$$

$$b_i = \left(\frac{1}{\Delta t}\right)$$

$$c_i = -\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)$$

$$d_i = -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) + \left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) u_{i-1,j}^n + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) u_{i,j}^n$$

$$- \left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) u_{i+1,j}^n,$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{\mathrm{jmax}-1} & b_{\mathrm{jmax}-1} & a_{\mathrm{jmax}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{\mathrm{jmax}} & a_{\mathrm{jmax}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1}^{n+1} \\ u_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i,j\,\mathrm{max}-1}^{n+1} \\ u_{i,j\,\mathrm{max}}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{\mathrm{jmax}-1} \\ d_{\mathrm{jmax}} \end{pmatrix}$$

Pada Sumbu y :

Persamaan kekekalan momentum untuk arah sumbu y diperoleh dari perhitungan pada persamaan (4.54) sehingga bentuk diskritnya sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v + q_b) + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh\,(S_x + S_y) \tag{4.89}$$

Diskritisasi pada langkah pertama *(fixed row j)* adalah :

$$\left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t}\right) + \frac{\partial q_b}{\partial t} + u_{i,j}^n \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{2(\Delta x)}\right) + v_{i,j}^n \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i.j-1}^n}{2(\Delta y)}\right)$$

$$= -\frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y), n = 0,2, \ldots \tag{4.90}$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) v_{i+1,j}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^{n+1} - \left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) v_{i-1,j}^{n+1}$$

$$= -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y)$$

$$- \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i,j+1}^n + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^n + \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i.j-1}^n \tag{4.91}$$

Persamaan (4.91) dapat disederhanakan menjadi:

$$c_i u_{i,j-1}^{n+1} + b_i u_{i,j}^{n+1} + a_i u_{i,j+1}^{n+1} = d_j$$

Dengan :

$$a_i = \frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}$$

$$b_i = \left(\frac{1}{\Delta t}\right)$$

$$c_i = -\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}$$

$$d_i = -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial g h}{2\partial x} - \frac{\partial g h}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) - \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i,j+1}^n + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^n + \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i.j-1}^n$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{\text{jmax}-1} & b_{\text{jmax}-1} & a_{\text{jmax}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{\text{jmax}} & a_{\text{jmax}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1}^{n+1} \\ u_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i,j\max-1}^{n+1} \\ u_{i,j\max}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{\text{jmax}-1} \\ d_{\text{jmax}} \end{pmatrix}$$

Sedangkan pada langkah kedua *(fixed coloumn i)* adalah:

$$\left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t}\right) + \frac{\partial q_b}{\partial t} + u_{i,j}^n \left(\frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2(\Delta x)}\right) + v_{i,j}^n \left(\frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i.j-1}^{n+1}}{2(\Delta y)}\right)$$
$$= -\frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y), n = 1,3, \ldots \quad (4.92)$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i,j+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^{n+1} - \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i.j-1}^{n+1}$$
$$= -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y)$$
$$- \left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) v_{i+1,j}^n + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^n + \left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) v_{i-1,j}^n \quad (4.93)$$

Persamaan (4.93) dapat disederhanakan menjadi:

$$c_i u_{i,j-1}^{n+1} + b_i u_{i,j}^{n+1} + a_i u_{i,j+1}^{n+1} = d_j$$

Dengan :

$$a_i = \frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}$$

$$b_i = \left(\frac{1}{\Delta t}\right)$$

$$c_i = -\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}$$

$$d_i = -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) - \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i,j+1}^n + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^n + \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i.j-1}^n$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{\text{jmax}-1} & b_{\text{jmax}-1} & a_{\text{jmax}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{\text{jmax}} & a_{\text{jmax}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1}^{n+1} \\ u_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i,j\,\text{max}-1}^{n+1} \\ u_{i,j\,\text{max}}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{\text{jmax}-1} \\ d_{\text{jmax}} \end{pmatrix}$$

4.4.2 Diskritisasi Kekekalan momentum Sungai Utama (Kali Surabaya)

Persamaan kekekalan momentum yang akan didiskritkan diperoleh dari persamaan yang telah dikonstruksi sebelumnya, sehingga sesuai dengan arah nya, bentuk diskrit persamaan kekekalan momentum menjadi:

Pada sumbu x :

Persamaan kekekalan momentum untuk arah sumbu x diperoleh dari perhitungan pada persamaan (4.56) sehingga bentuk diskritnya sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + q_b) + \frac{\partial u}{\partial x}(u + v\cos\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} v\sin\theta = -\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2} + \frac{g}{2}\cos\theta\right) - \frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta + gh\,(S_x + S_y) \tag{4.94}$$

Diskritisasi pada langkah pertama *(fixed row j)* adalah :

$$\left(\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right)+\frac{\partial q_b}{\partial t}+\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\cos\theta\right)\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1}-u_{i-1,j}^{n+1}}{2(\Delta x)}\right)$$

$$+v_{i,j}^{n}\sin\theta\left(\frac{u_{i,j+1}^{n}-u_{i.j-1}^{n}}{2(\Delta y)}\right)$$

$$=-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\cos\theta\right)-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta+gh\,(S_x+S_y),n$$

$$=0,2,\ldots \tag{4.95}$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\cos\theta}{2(\Delta x)}\right)u_{i+1,j}^{n+1}+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)u_{i,j}^{n+1}-\left(\frac{u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\cos\theta}{2(\Delta x)}\right)u_{i-1,j}^{n+1}$$

$$=-\frac{\partial q_b}{\partial t}-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\cos\theta\right)-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta+gh\,(S_x$$

$$+S_y)+\left(\frac{v_{i,j}^{n}\sin\theta}{2(\Delta y)}\right)u_{i.j-1}^{n}+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)u_{i,j}^{n}$$

$$+\left(-\frac{v_{i,j}^{n}\sin\theta}{2(\Delta y)}\right)u_{i,j+1}^{n} \tag{4.96}$$

Sedangkan pada langkah kedua *(fixed coloumn i)* adalah :

$$\left(\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right)+\frac{\partial q_b}{\partial t}+\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\cos\theta\right)\left(\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)$$

$$+v_{i,j}^{n}\sin\theta\left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-u_{i.j-1}^{n+1}}{2(\Delta y)}\right)$$

$$=-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\cos\theta\right)-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta+gh\,(S_x+S_y),n$$

$$=0,2,\ldots \tag{4.97}$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{v_{i,j}^{n}\,sin\theta}{2(\Delta y)}\right)u_{i,j+1}^{n+1}+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)u_{i,j}^{n+1}-\left(\frac{v_{i,j}^{n}\,sin\theta}{2(\Delta y)}\right)u_{i.j-1}^{n+1}$$

$$=-\frac{\partial q_b}{\partial t}-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\cos\theta\right)-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta$$

$$+gh\left(S_x+S_y\right)+\left(\frac{\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\,cos\theta\right)}{2(\Delta x)}\right)u_{i-1,j}^{n}$$

$$+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)u_{i,j}^{n}-\left(\frac{\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\,cos\theta\right)}{2(\Delta x)}\right)u_{i+1,j}^{n}, \qquad (4.98)$$

Pada sumbu y :

Persamaan kekekalan momentum untuk arah sumbu x diperoleh dari perhitungan pada persamaan (4.57) sehingga bentuk diskritnya sebagai berikut:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial q_b}{\partial t}+(u+v\cos\theta)\frac{\partial v}{\partial x}+vsin\theta\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\cos\theta\right)-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta+gh\left(S_x+S_y\right) \qquad (4.99)$$

Diskritisasi pada langkah pertama *(fixed row j)* adalah :

$$\left(\frac{v_{i,j}^{n+1}-v_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right)+\frac{\partial q_b}{\partial t}+\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\,cos\theta\right)\left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1}-v_{i-1,j}^{n+1}}{2(\Delta x)}\right)$$

$$+v_{i,j}^{n}\,sin\,\theta\left(\frac{v_{i,j+1}^{n}-v_{i.j-1}^{n}}{2(\Delta y)}\right)$$

$$=-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\cos\theta\right)-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta+gh\left(S_x+S_y\right),n$$

$$=0,2,\ldots \qquad (4.100)$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\,cos\theta\right)}{2(\Delta x)}\right)v_{i+1,j}^{n+1}+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)v_{i,j}^{n+1}-\left(\frac{\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\,cos\theta\right)}{2(\Delta x)}\right)v_{i-1,j}^{n+1}$$

$$=-\frac{\partial q_b}{\partial t}-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\cos\theta\right)-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta$$

$$+gh\left(S_x+S_y\right)+\left(\frac{v_{i,j}^{n}\,sin\,\theta}{2(\Delta y)}\right)v_{i.j-1}^{n}+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)v_{i,j}^{n}$$

$$-\left(\frac{v_{i,j}^{n}\,sin\,\theta}{2(\Delta y)}\right)v_{i,j+1}^{n}, \qquad (4.101)$$

Sedangkan pada langkah kedua *(fixed coloumn i)* adalah :

$$\left(\frac{v_{i,j}^{n+1}-v_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right)+\frac{\partial q_b}{\partial t}+\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}cos\theta\right)\left(\frac{v_{i+1,j}^{n}-v_{i-1,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)$$

$$+v_{i,j}^{n}sin\theta\left(\frac{v_{i,j+1}^{n+1}-v_{i.j-1}^{n+1}}{2(\Delta y)}\right)$$

$$=-\frac{\partial q_b}{\partial t}-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\cos\theta\right)-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta$$

$$+gh\left(S_x+S_y\right) \qquad (4.102)$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{v_{i,j}^{n}sin\theta}{2(\Delta y)}\right)v_{i,j+1}^{n+1}+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)v_{i,j}^{n+1}-\left(\frac{v_{i,j}^{n}sin\theta}{2(\Delta y)}\right)v_{i.j-1}^{n+1}$$

$$=-\frac{\partial q_b}{\partial t}-\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{g}{2}+\frac{g}{2}\cos\theta\right)-\frac{\partial gh}{2\partial y}\sin\theta$$

$$+gh\left(S_x+S_y\right)+\left(\frac{\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}cos\theta\right)}{2(\Delta x)}\right)v_{i-1,j}^{n}$$

$$+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)v_{i,j}^{n}+\left(-\frac{\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}cos\theta\right)}{2(\Delta x)}\right)v_{i+1,j}^{n},n=1,3,\ldots \qquad (4.103)$$

4.4.3 Diskritisasi Kekekalan Momentum Pertemuan Dua Sungai

Persamaan kekekalan momentum yang akan didiskritkan diperoleh dari persamaan yang telah dikonstruksi sebelumnya, sehingga sesuai dengan arah nya, bentuk diskrit persamaan kekekalan momentum menjadi:

Pada sumbu x

Persamaan kekekalan momentum untuk arah sumbu x diperoleh dari perhitungan pada persamaan (4.59) sehingga bentuk diskritnya sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v+q_b)+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (4.104)$$

$$=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\left(S_x+S_y\right)+v_1Q_1+v_2Q_2$$

Diskritisasi pada langkah pertama *(fixed row j)* adalah :

$$\left(\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right)+\frac{\partial q_b}{\partial t}+u_{i,j}^{n}\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1}-u_{i-1,j}^{n+1}}{2(\Delta x)}\right)+v\left(\frac{u_{i,j+1}^{n}-u_{i.j-1}^{n}}{2(\Delta y)}\right)$$

$$=-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh(S_x+S_y)+v_1Q_1+v_2Q_2\ ,n$$

$$=0,2,\ldots \tag{4.105}$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)u_{i+1,j}^{n+1}+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)u_{i,j}^{n+1}-\left(\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)u_{i-1,j}^{n+1}$$

$$=-\frac{\partial q_b}{\partial t}-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\left(S_x+S_y\right)+v_1Q_1$$

$$+v_2Q_2-\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)u_{i,j+1}^{n}+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)u_{i,j}^{n}$$

$$+\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)u_{i.j-1}^{n} \tag{4.106}$$

Persamaan (4.106) dapat disederhanakan menjadi:

$$c_iu_{i-1,j}^{n+1}+b_iu_{i,j}^{n+1}+a_iu_{i+1,j}^{n+1}=d_i$$

Dengan :

$$a_i=\left(\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)$$

$$b_i=\left(\frac{1}{\Delta t}\right)$$

$$c_i=\left(-\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)$$

$$d_i=-\frac{\partial q_b}{\partial t}-\frac{\partial gh}{2\partial x}-\frac{\partial gh}{2\partial y}+gh\left(S_x+S_y\right)+v_1Q_1+v_2Q_2-\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)u_{i,j+1}^{n}$$

$$+\left(\frac{1}{\Delta t}\right)u_{i,j}^{n}+\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)u_{i.j-1}^{n}$$

Persamaan (4.106) menghasilkan sistem persamaan linier (SPL) tridiagonal pada setiap *n* jika persamaan-persamaan tersebut diterapkan baris per baris atau dikenal sebagai x sweep. Jika ditulis dalam bentuk matriks menjadi:

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{i\max-1} & b_{i\max-1} & a_{i\max-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{i\max} & a_{i\max} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j}^{n+1} \\ u_{2,j}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i\max-1,j}^{n+1} \\ u_{i\max,j}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{i\max-1} \\ d_{i\max} \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan linier diatas diselesaikan menggunakan software MATLAB untuk mencari nilai $u_{i,j}$ sampai dengan $u_{imax\ ,j}$

Sedangkan pada langkah kedua *(fixed coloumn i)* adalah:

$$\left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right) + \frac{\partial q_b}{\partial t} + u_{i,j}^{n}\left(\frac{u_{i+1,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right) + v_{i,j}^{n}\left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i.j-1}^{n+1}}{2(\Delta y)}\right)$$

$$= -\frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2\ , n = 1,3, \ldots \qquad (4.107)$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right) u_{i,j+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) u_{i,j}^{n+1} - \left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right) u_{i.j-1}^{n+1}$$

$$= -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2$$

$$+ \left(\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right) u_{i-1,j}^{n} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) u_{i,j}^{n} - \left(\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right) u_{i+1,j}^{n} \qquad (4.108)$$

Persamaan (4.108) dapat disederhanakan menjadi:

$$c_i u_{i,j-1}^{n+1} + b_i u_{i,j}^{n+1} + a_i u_{i,j+1}^{n+1} = d_j$$

Dengan :

$$a_i = \left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)$$

$$b_i = \left(\frac{1}{\Delta t}\right)$$

$$c_i = -\left(\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}\right)$$

$$d_i = -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 + \left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) u_{i-1,j}^n$$

$$+ \left(\frac{1}{\Delta t}\right) u_{i,j}^n - \left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) u_{i+1,j}^n,$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{\mathrm{jmax}-1} & b_{\mathrm{jmax}-1} & a_{\mathrm{jmax}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{\mathrm{jmax}} & a_{\mathrm{jmax}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1}^{n+1} \\ u_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i,j\max-1}^{n+1} \\ u_{i,j\max}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{\mathrm{jmax}-1} \\ d_{\mathrm{jmax}} \end{pmatrix}$$

Pada Sumbu y :

Persamaan kekekalan momentum untuk arah sumbu y diperoleh dari perhitungan pada persamaan (4.59) sehingga bentuk diskritnya sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v + q_b) + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= -\frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh\left(S_x + S_y\right) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 \qquad (4.109)$$

Diskritisasi pada langkah pertama *(fixed row j)* adalah :

$$\left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t}\right) + \frac{\partial q_b}{\partial t} + u_{i,j}^n \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{2(\Delta x)}\right) + v_{i,j}^n \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i.j-1}^n}{2(\Delta y)}\right)$$

$$= -\frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2,$$

$$n = 0,2, \ldots \qquad (4.110)$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) v_{i+1,j}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^{n+1} - \left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) v_{i-1,j}^{n+1}$$

$$= -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2$$

$$- \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i,j+1}^n + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^n + \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i.j-1}^n \qquad (4.111)$$

Persamaan (4.111) dapat disederhanakan menjadi:

$$c_i u_{i,j-1}^{n+1} + b_i u_{i,j}^{n+1} + a_i u_{i,j+1}^{n+1} = d_j$$

Dengan :

$$a_i = \frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}$$

$$b_i = \left(\frac{1}{\Delta t}\right)$$

$$c_i = -\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}$$

$$d_i = -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 - \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i,j+1}^n + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^n + \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i.j-1}^n$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{\text{jmax}-1} & b_{\text{jmax}-1} & a_{\text{jmax}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{\text{jmax}} & a_{\text{jmax}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1}^{n+1} \\ u_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i,j\,\max-1}^{n+1} \\ u_{i,j\,\max}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{\text{jmax}-1} \\ d_{\text{jmax}} \end{pmatrix}$$

Sedangkan pada langkah kedua *(fixed coloumn i)* adalah:

$$\left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t}\right) + \frac{\partial q_b}{\partial t} + u_{i,j}^n \left(\frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2(\Delta x)}\right) + v_{i,j}^n \left(\frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i.j-1}^{n+1}}{2(\Delta y)}\right) = -\frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2,$$

$n = 1,3, \ldots$ (4.112)

yang dapat diatur menjadi :

$$\left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i,j+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^{n+1} - \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i.j-1}^{n+1} = -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial gh}{2\partial x} - \frac{\partial gh}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 - \left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) v_{i+1,j}^n + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^n + \left(\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}\right) v_{i-1,j}^n \quad (4.113)$$

Persamaan (4.113) dapat disederhanakan menjadi:

$$c_i u_{i,j-1}^{n+1} + b_i u_{i,j}^{n+1} + a_i u_{i,j+1}^{n+1} = d_j$$

Dengan :

$$a_i = \frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}$$

$$b_i = \left(\frac{1}{\Delta t}\right)$$

$$c_i = -\frac{u_{i,j}^n}{2(\Delta x)}$$

$$d_i = -\frac{\partial q_b}{\partial t} - \frac{\partial g\,h}{2\partial x} - \frac{\partial g\,h}{2\partial y} + gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 - \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i,j+1}^n + \left(\frac{1}{\Delta t}\right) v_{i,j}^n + \left(\frac{v_{i,j}^n}{2(\Delta y)}\right) v_{i.j-1}^n$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{\mathrm{jmax}-1} & b_{\mathrm{jmax}-1} & a_{\mathrm{jmax}-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{\mathrm{jmax}} & a_{\mathrm{jmax}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1}^{n+1} \\ u_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i,j\,\mathrm{max}-1}^{n+1} \\ u_{i,j\,\mathrm{max}}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{\mathrm{jmax}-1} \\ d_{\mathrm{jmax}} \end{pmatrix}$$

4.4.4 Diskritisasi Persamaan Skalar Transport

Persamaan skalar transport yang akan didiskritkan diperoleh dari persamaan yang telah dikonstruksi sebelumnya, sehingga sesuai dengan arah nya, bentuk diskrit persamaan kekekalan momentum menjadi:

Untuk Aliran di Sungai Utama (Kali Surabaya)

Persamaan yang digunakan dalam diskritisasi ini adalah persamaan (4.65) sehingga perhitungan diskritisasinya adalah sebagai berikut:

Diskritisasi pada langkah pertama *(fixed row j)* adalah :

$$\left(\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t}\right) = -u_{i,j}^n \left(\frac{C_{i+1,j}^{n+1} - C_{i-1,j}^{n+1}}{2(\Delta x)}\right) - v_{i,j}^n \left(\frac{C_{i,j+1}^n - C_{i.j-1}^n}{2(\Delta y)}\right) \quad ,n = 0,2,\ldots \tag{4.114}$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}C_{i+1,j}^{n+1}+\frac{1}{\Delta t}C_{i,j}^{n+1}-\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}C_{i-1,j}^{n+1}$$

$$=\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}C_{i.j-1}^{n}+\frac{1}{\Delta t}C_{i,j}^{n}-\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}C_{i,j+1}^{n}\,,n=0,2,\ldots \qquad (4.115)$$

Sedangkan pada langkah kedua *(fixed coloumn i)* adalah :

$$\left(\frac{C_{i,j}^{n+1}-C_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right)=-u_{i,j}^{n}\left(\frac{C_{i+1,j}^{n}-C_{i-1,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)-v_{i,j}^{n}\left(\frac{C_{i,j+1}^{n+1}-C_{i.j-1}^{n+1}}{2(\Delta y)}\right),n$$

$$=1,3,\ldots \qquad (4.116)$$

yang dapat diatur menjadi :

$$\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}C_{i,j+1}^{n+1}+\frac{1}{\Delta t}C_{i,j}^{n+1}-\frac{v_{i,j}^{n}}{2(\Delta y)}C_{i.j-1}^{n+1}$$

$$=\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}C_{i-1,j}^{n}+\frac{1}{\Delta t}C_{i,j}^{n}-\frac{u_{i,j}^{n}}{2(\Delta x)}C_{i+1,j}^{n}\,,n=1,3,\ldots \qquad (4.117)$$

Untuk Aliran di Anak sungai (Sungai Marmoyo)

Persamaan yang digunakan untuk pendiskritan pada aliran di anak sungai adalah persamaan (4.62), sehingga perhitungannya menjadi:

Diskritisasi pada langkah pertama *(fixed row j)* adalah :

$$\left(\frac{C_{i,j}^{n+1}-C_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right)=-\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\cos\theta\right)\left(\frac{C_{i+1,j}^{n+1}-C_{i-1,j}^{n+1}}{2(\Delta x)}\right)$$

$$-v_{i,j}^{n}\sin\theta\left(\frac{C_{i,j+1}^{n}-C_{i.j-1}^{n}}{2(\Delta y)}\right)\,,n=0,2,\ldots \qquad (4.118)$$

yang dapat diatur menjadi :

$$-\frac{\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\cos\theta\right)}{2(\Delta x)}C_{i-1,j}^{n+1}+\frac{1}{\Delta t}C_{i,j}^{n+1}+\frac{\left(u_{i,j}^{n}+v_{i,j}^{n}\cos\theta\right)}{2(\Delta x)}C_{i+1,j}^{n+1}$$

$$=\frac{v_{i,j}^{n}\sin\theta}{2(\Delta y)}C_{i.j-1}^{n}+\frac{1}{\Delta t}C_{i,j}^{n}-\frac{v_{i,j}^{n}\sin\theta}{2(\Delta y)}C_{i,j+1}^{n}\,,n$$

$$=0,2,\ldots \qquad (4.119)$$

Sedangkan pada langkah kedua *(fixed coloumn i)* adalah :

$$\left(\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right) = -\left(u_{i,j}^{n} + v_{i,j}^{n}\cos\theta\right)\left(\frac{C_{i+1,j}^{n} - C_{i-1,j}^{n}}{2(\Delta x)}\right)$$

$$- v_{i,j}^{n}\sin\theta\left(\frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i.j-1}^{n+1}}{2(\Delta y)}\right), n = 1,3, \ldots \quad (4.120)$$

yang dapat diatur menjadi :

$$-\frac{v_{i,j}^{n}\sin\theta}{2(\Delta y)}C_{i.j-1}^{n+1} + \frac{1}{\Delta t}C_{i,j}^{n+1} + \frac{v_{i,j}^{n}\sin\theta}{2(\Delta y)}C_{i,j+1}^{n+1}$$

$$= \frac{\left(u_{i,j}^{n} + v_{i,j}^{n}\cos\theta\right)}{2(\Delta x)}C_{i-1,j}^{n} + \frac{1}{\Delta t}C_{i,j}^{n}$$

$$- \frac{\left(u_{i,j}^{n} + v_{i,j}^{n}\cos\theta\right)}{2(\Delta x)}C_{i+1,j}^{n}, n = 1,3, \ldots \quad (4.121)$$

Superskrip *n* menyatakan jumlah iterasi, subskrip *i* menandakan posisi *x* dan subskrip *j* menandakan posisi *y*.

4.5 Hasil dan Simulasi

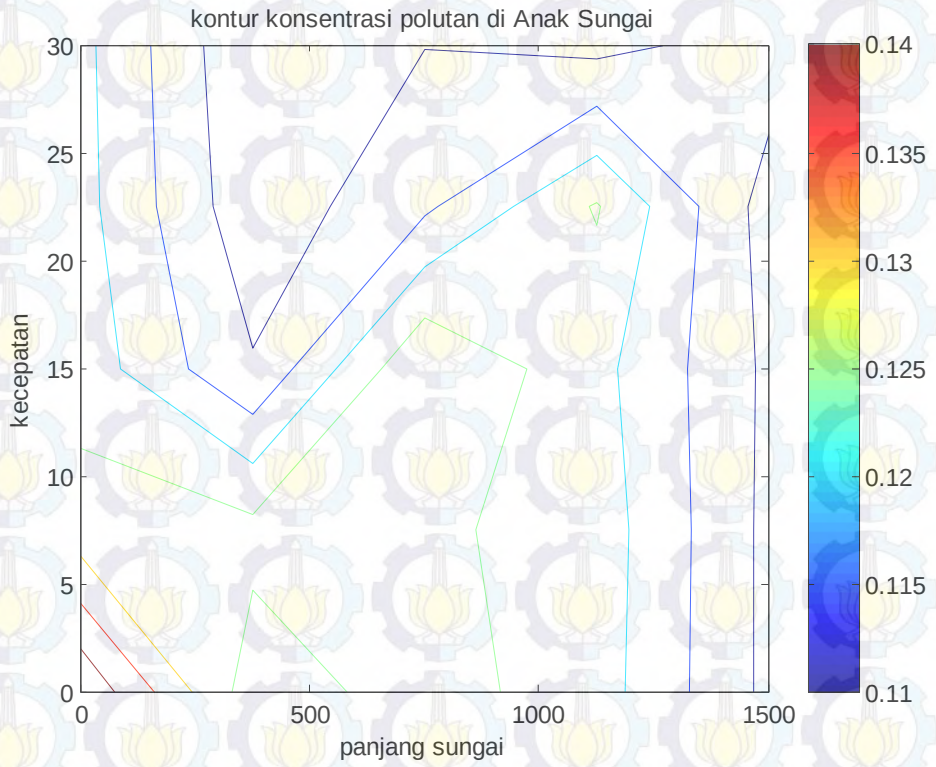
Simulasi dilakukan dengan mendesain penyelesaian numerik model matematika menggunakan software MATLAB. Data-data yang diperlukan untuk mendukung simulasi adalah data kecepatan, kedalaman, debit dan konsentrasi kualitas air COD, BOD, DO, TSS di Sungai Marmoyo, Kali Surabaya dan pertemuan antara keduanya sebagai input program.

Pada program, untuk melihat penyebaran konsentrasi di aliran sungai, konsentrasi COD, BOD, DO dan TSS dimasukkan sebagai nilai awal yaitu sebesar 0.025. Sedangkan panjang dan lebar sungai yang digunakan adalah 1500 dan 30

Data yang diperoleh tersebut, kemudian di running ke dalam program MATLAB, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

SIMULASI I

Kontur penyebaran polutan di Sepanjang aliran Anak Sungai (Sungai Marmoyo)

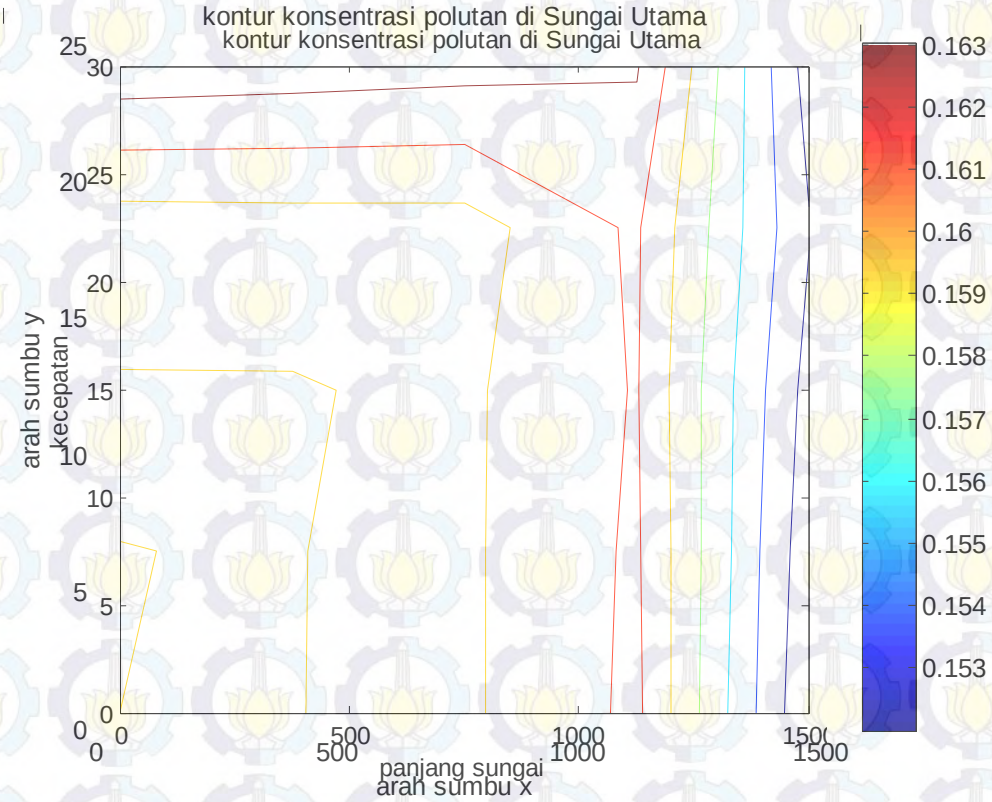


Gambar 4.4 Kontur penyebaran konsentrasi polutan COD, BOD, DO di aliran anak sungai (Sungai Marmoyo)

Initial guess (tebakan awal) yang diberikan terhadap kecepatan sebesar 10 dan konsentrasi sebesar 0.025 di aliran anak sungai (Sungai Marmoyo) dengan grid atau pias sebesar 150 dengan iterasi sebanyak 700 kali dan delta T sebesar 0.05/500. Output ditampilkan dalam bentuk kontur penyebaran konsentrasi COD, BOD, DO.

SIMULASI II

Kontur penyebaran polutan di sepanjang aliran Sungai Utama (kali Surabaya)

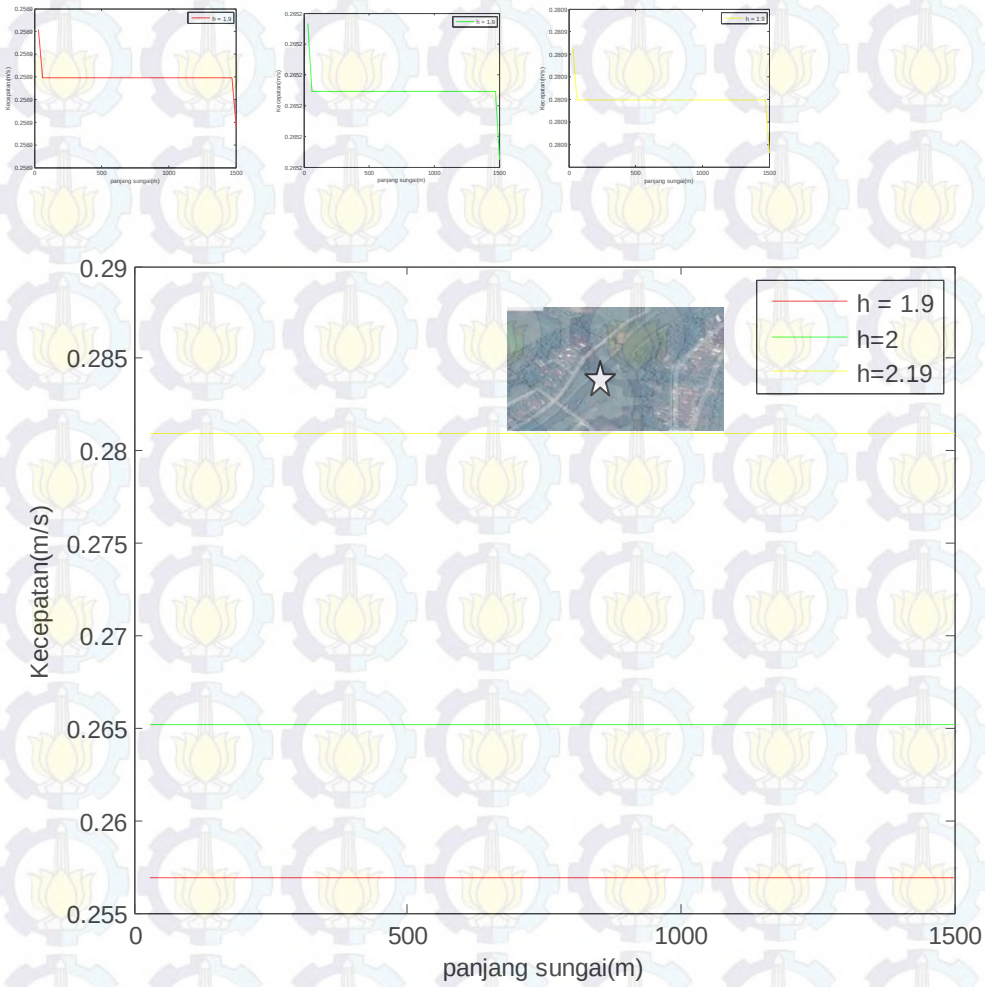


Gambar 4.5 kontur penyebaran konsentrasi COD, BOD, DO, TSS di aliran sungai utama (Kali Surabaya)

Initial guess (tebakan awal) yang diberikan terhadap kecepatan air sungai sebesar 10 dan konsentrasi sebesar 0.025 di sungai utama (Kali Surabaya) dengan pias sebesar 240 dan iterasi yang dilakukan sebanyak 700 kali dan delta T sebesar 0.05/500. Output ditampilkan dalam bentuk kontur penyebaran konsentrasi COD, BOD, DO

SIMULASI III

Kecepatan penyebaran Polutan di aliran Anak Sungai (Sungai Marmoyo)



Gambar 4.6 Grafik kecepatan COD, BOD, DO di aliran anak sungai (Sungai Marmoyo)

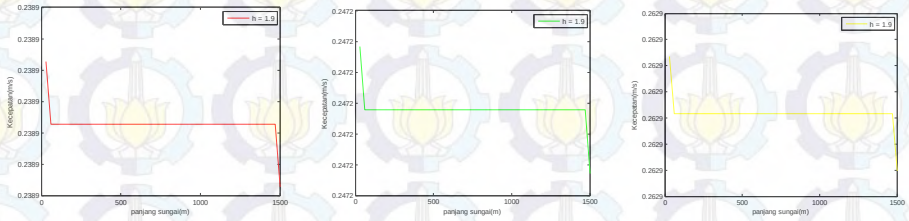
Initial guess (tebakan awal) yang diberikan terhadap kecepatan penyebaran COD, BOD, DO, dan TSS sebesar 0.1. diuji dengan kedalaman sungai yang berbeda-beda yaitu 1.9m, 2m, 2.19m, dengan grid atau pias sebesar 50 dan jumlah iterasi sebanyak 700 kali. Output ditampilkan dalam bentuk grafik perubahan kecepatan penyebaran COD, BOD, DO.

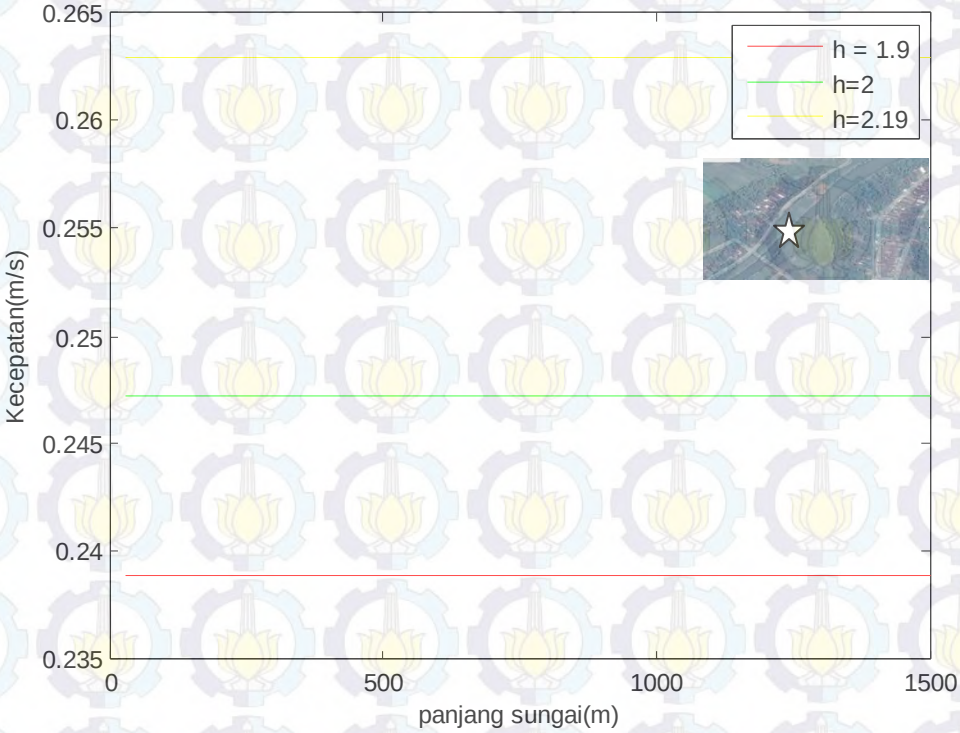
Output program menunjukkan bahwa kedalaman sungai berpengaruh terhadap kecepatan penyebaran COD, BOD, DO untuk anak sungai (Sungai Marmoyo). Dari grafik, terlihat bahwa semakin dalam sungai, maka kecepatan

polutan semakin besar. Dari hasil simulasi, bila grafik setiap kedalaman dijadikan satu, maka perubahannya tidak Nampak, hal ini dikarenakan perubahan yang terjadi kecil bila dibandingkan dengan panjang sungai

SIMULASI IV

Kecepatan penyebaran Sedimentasi di aliran Anak Sungai (Sungai Marmoyo)





Gambar 4.7 Grafik kecepatan TSS di aliran anak sungai (Sungai Marmoyo)

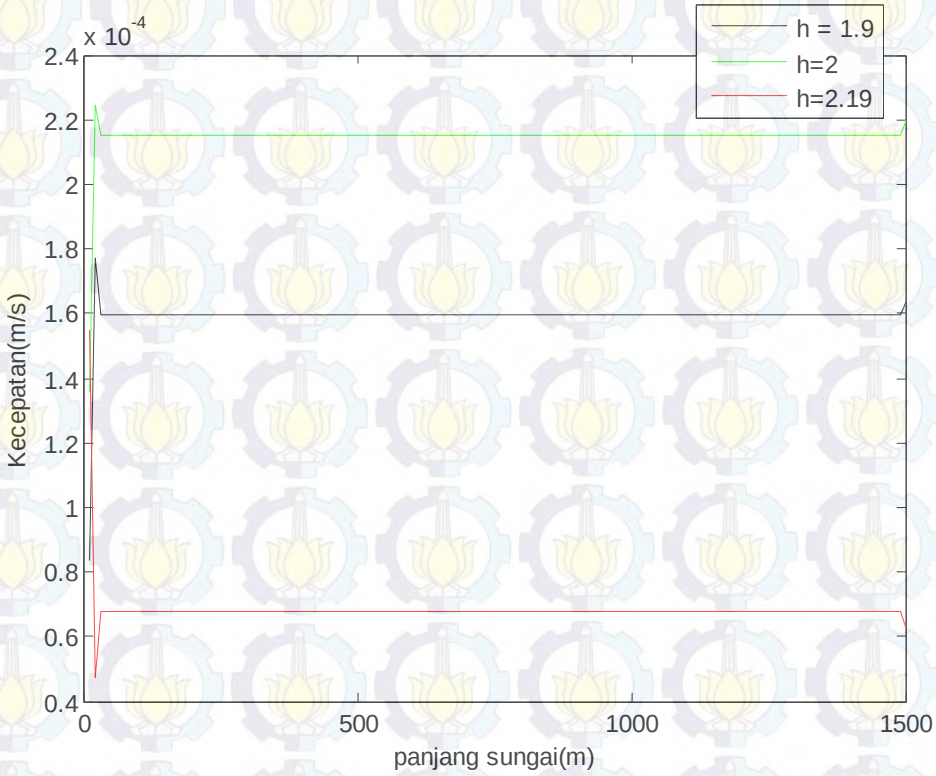
Initial guess (tebakan awal) yang diberikan terhadap kecepatan penyebaran TSS sebesar 0.1. diuji dengan kedalaman sungai yang berbeda-beda yaitu 1.9m, 2m, 2.19m, dengan grid atau pias sebanyak 50 dan iterasi dilakukan

sebanyak 700 kali. Output ditampilkan dalam bentuk grafik perubahan kecepatan penyebaran TSS.

Output program menunjukkan bahwa kedalaman sungai berpengaruh terhadap kecepatan penyebaran TSS untuk anak sungai (Sungai Marmoyo). Kecenderungan grafik menurun kemudian konstan dan menurun kembali.

SIMULASI V

Kecepatan penyebaran polutan di aliran Sungai Utama (Kali Surabaya)



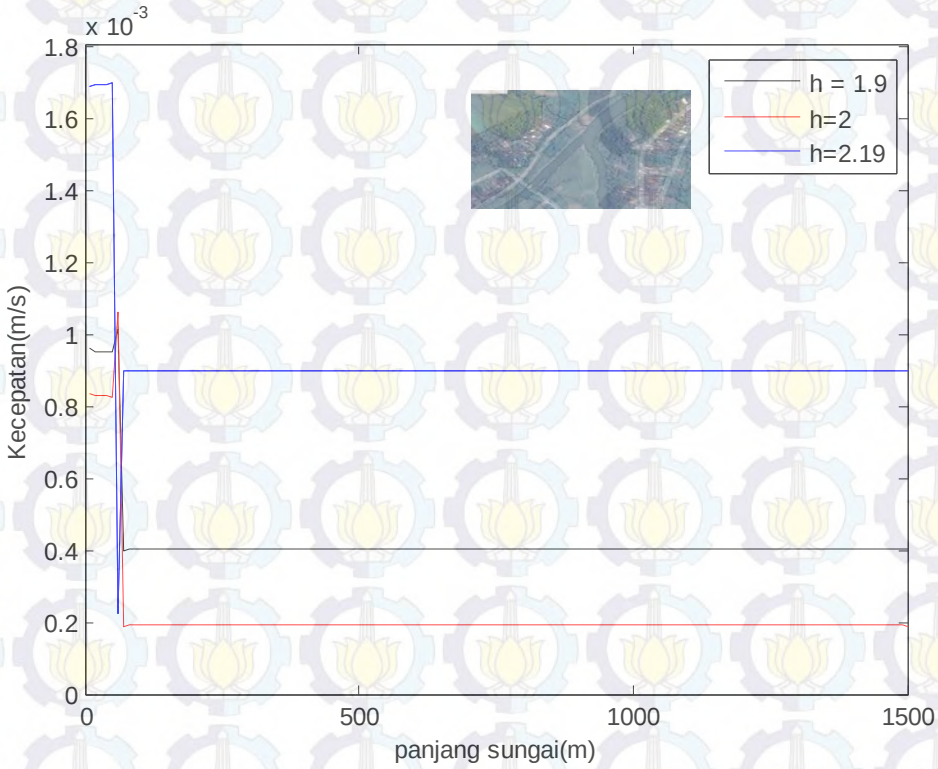
Gambar 4.8 Grafik kecepatan COD, BOD, DO di sungai utama (Kali Surabaya)

Initial guess (tebakan awal) yang diberikan terhadap kecepatan penyebaran COD, BOD, DO sebesar 0.1. diuji dengan kedalaman sungai yang berbeda-beda yaitu 1.9m, 2m, 2.19m, dengan grid atau pias sebanyak 150 dan iterasi dilakukan sebanyak 700 kali. Output ditampilkan dalam bentuk grafik perubahan kecepatan penyebaran COD, BOD, DO.

Output program menunjukkan bahwa kedalaman sungai berpengaruh terhadap kecepatan penyebaran COD, BOD, DO TSS untuk sungai utama (Kali Surabaya). Kecenderungan grafik menurun kemudian konstan.

SIMULASI VI

Kecepatan penyebaran sedimentasi di aliran Sungai Utama (Kali Surabaya)



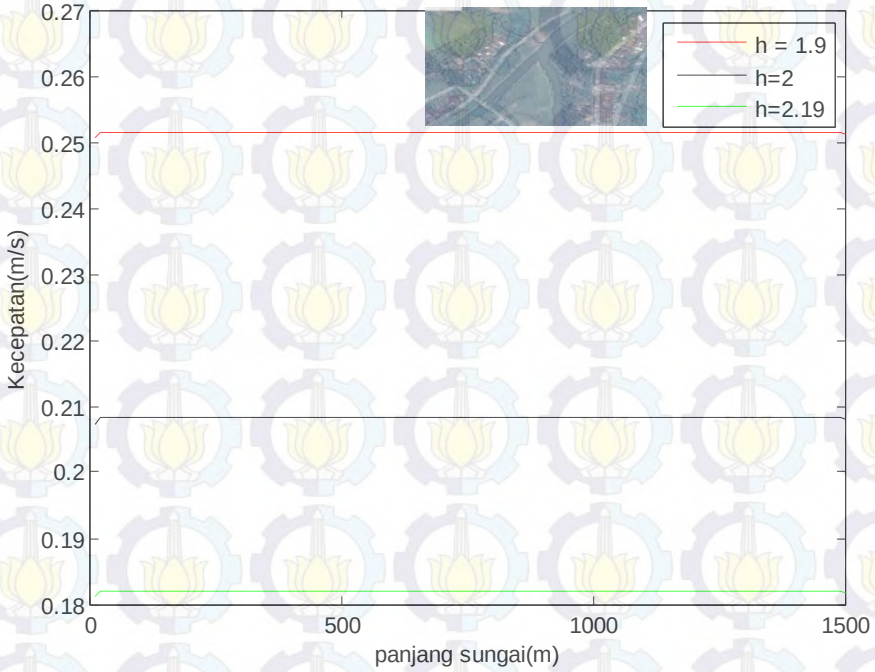
Gambar 4.9 Grafik kecepatan TSS di sungai utama (Kali Surabaya)

Initial guess (tebakan awal) yang diberikan terhadap kecepatan penyebaran TSS sebesar 0.1. diuji dengan kedalaman sungai yang berbeda-beda yaitu 1.9m, 2m, 2.19m, dengan grid atau pias sebanyak 60 dan iterasi dilakukan sebanyak 700 kali. Output ditampilkan dalam bentuk grafik perubahan kecepatan penyebaran TSS.

Output program menunjukkan bahwa kedalaman sungai berpengaruh terhadap kecepatan penyebaran TSS untuk sungai utama (Kali Surabaya). Kecenderungan grafik menurun kemudian konstan.

SIMULASI VII

Kecepatan penyebaran Polutan di aliran Pertemuan Dua Sungai



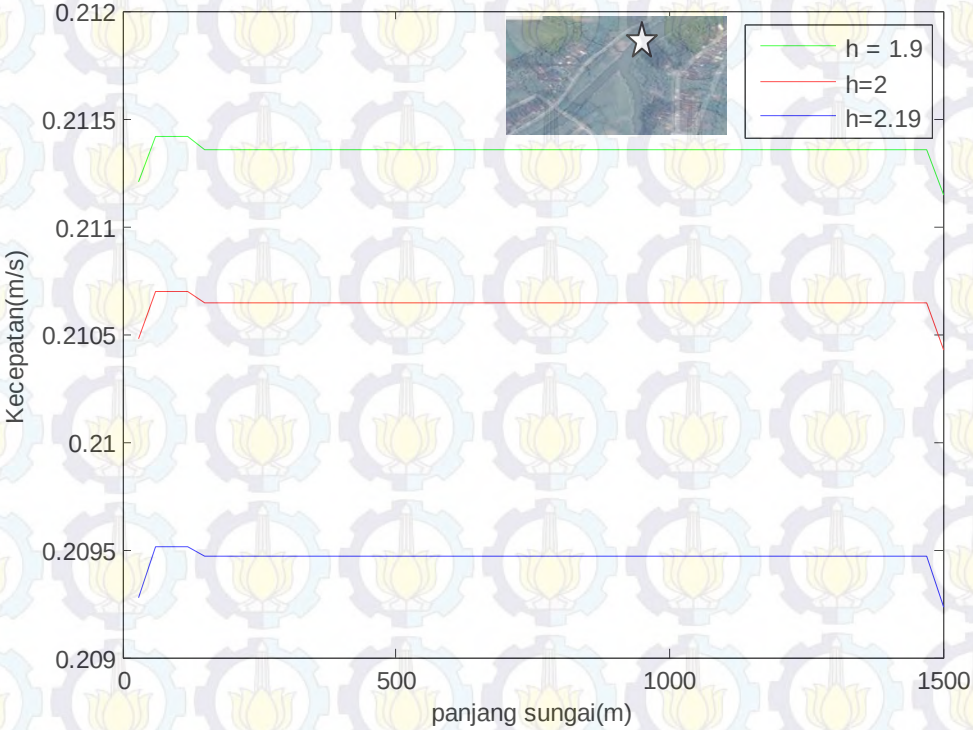
Gambar 4.10 Grafik kecepatan COD, BOD, DO di pertemuan dua sungai

Initial guess (tebakan awal) yang diberikan terhadap kecepatan penyebaran COD, BOD, DO sebesar 0.1. diuji dengan kedalaman sungai yang berbeda-beda yaitu 1.9m, 2m, 2.19m, dengan pias sebesar 150 dan iterasi yang dilakukan sebanyak 700 kali. Output ditampilkan dalam bentuk grafik perubahan kecepatan penyebaran COD, BOD, DO.

Output menunjukkan bahwa kedalaman sungai berpengaruh terhadap kecepatan penyebaran COD, BOD, DO di pertemuan dua sungai. Dari grafik, terlihat bahwa semakin dalam sungai, maka kecepatan polutan semakin berkurang. Hal ini disebabkan karena di pertemuan dua sungai, terdapat akumulasi penambahan debit air dari sungai utama, sehingga kecepatan aliran menjadi semakin besar.

SIMULASI VIII

Kecepatan penyebaran Sedimentasi di aliran Pertemuan Dua Sungai



Gambar 4.11 Grafik kecepatan TSS di pertemuan dua sungai

Initial guess (tebakan awal) yang diberikan terhadap kecepatan penyebaran TSS sebesar 0.1. diuji dengan kedalaman sungai yang berbeda-beda yaitu 1.9m, 2m, 2.19m, dengan pias sebanyak 50 dan iterasi yang dilakukan sebanyak 700 kali. Output ditampilkan dalam bentuk grafik kecepatan penyebaran TSS.

Output program menunjukkan bahwa kedalaman sungai berpengaruh terhadap kecepatan penyebaran TSS di pertemuan dua sungai. Dari grafik, terlihat bahwa semakin dalam sungai, maka kecepatan polutan semakin berkurang. Hal ini disebabkan karena di pertemuan dua sungai, terdapat akumulasi penambahan debit air dari sungai utama dan anak sungai, sehingga kecepatan aliran menjadi semakin besar.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa yang telah dilakukan, diperoleh:

1. Model matematika untuk polutan dan sedimentasi dari persamaan kekekalan massa, kekekalan momentum, dan persamaan skalar transport.
2. Persamaan skalar transport digunakan untuk menghitung penyebaran konsentrasi polutan dan sedimentasi, dan persamaan kekekalan momentum digunakan untuk menghitung kecepatan penyebaran polutan dan sedimentasi
3. Dari simulasi numerik, diperoleh hasil bahwa unsur hidrodinamika berpengaruh terhadap penyebaran polutan dan sedimentasi. Dengan kedalaman 1.9m , 2m, dan 2.19m dan kecepatan awal COD, BOD, DO dan TSS sebesar 0.1 , diperoleh hasil bahwa semakin dalam air sungai, maka kecepatan penyebaran polutan juga semakin cepat. Namun pada pertemuan dua sungai, berlaku sebaliknya. Hal ini disebabkan adanya penambahan akumulasi debit dari Sungai Marmoyo (Anak Sungai) dan Kali Surabaya (Sungai Utama).

5.2 Saran

Diharapkan pada penelitian selanjutnya, sungai yang diteliti, memiliki arah aliran yang turbulen atau transisi, serta menggunakan metode beda hingga yang lain.

LAMPIRAN

Lampiran 1: Data Kualitas Air

No	LOKASI	SUNGAI	DATE	HOUR	DO	BOD	COD	TSS
1	Jembatan Canggu	Surabaya	06/01/10	9:00	6.4	6.48	17.99	462
2	Jembatan Canggu	Surabaya	08/02/10	9:46	6.4	5.9	30.101	610
3	Jembatan Canggu	Surabaya	03/03/10	9:25	6.5	4.41	17.939	349.7
4	Jembatan Canggu	Surabaya	08/04/10	9:20	6.7	3.8	12.411	320
5	Jembatan Canggu	Surabaya	10/05/10	9:50	6.6	7.53	38.951	816.7
6	Jembatan Canggu	Surabaya	10/06/10	9:15	7.2	3.48	10.524	157
7	Jembatan Canggu	Surabaya	06/07/10	10:28	6.9	2.59	7.824	52
8	Jembatan Canggu	Surabaya	05/08/10	9:58	5.01	2.3	9.952	33
9	Jembatan Canggu	Surabaya	07/09/10	9:46	5.88	3.16	11.304	100
10	Jembatan Canggu	Surabaya	15/10/10	9:51	5.19	5.04	26.076	502.5
11	Jembatan Canggu	Surabaya	09/11/10	10:05	7.04	6.08	37.925	290
12	Jembatan Canggu	Surabaya	06/12/10	10:00	5.45	3.19	14.558	46.7
13	Jembatan Canggu	Surabaya	10/01/11	9:47	7.03	6.01	26.552	314
14	Jembatan Canggu	Surabaya	09/02/11	9:01	6.19	2.02	10.721	73
15	Jembatan Canggu	Surabaya	07/03/11	10:18	6.73	4.66	20.989	274
16	Jembatan Canggu	Surabaya	11/04/11	16:20	5.97	4.33	16.409	118.6
17	Jembatan Canggu	Surabaya	11/05/11	9:20	6.41	5.58	27.176	746.7
18	Jembatan Canggu	Surabaya	07/06/11	11:30	6.17	2.11	9.685	28.7
19	Jembatan Canggu	Surabaya	05/07/11	15:40	6.21	2.85	9.65	18.4

20	Jembatan Canggu	Surabaya	10/08/11	8:42	6.8	1.79	7.58	17.5
21	Jembatan Canggu	Surabaya	14/09/11	9:59	6.29	1.8	6.219	18
22	Jembatan Canggu	Surabaya	12/10/11	9:45	6.23	3.38	9.402	20
23	Jembatan Canggu	Surabaya	10/11/11	10:10	6.59	3.16	11.15	88
24	Jembatan Canggu	Surabaya	08/12/11	12:23	6.29	1.6	7.325	28
25	Jembatan Canggu	Surabaya	09/01/12	9:40	5.01	1.53	8.754	145
26	Jembatan Canggu	Surabaya	09/02/12	9:45	5.47	1.71	7.726	81
27	Jembatan Canggu	Surabaya	12/03/12	9:40	6.11	1.22	8.833	170
28	Jembatan Canggu	Surabaya	11/04/12	9:10	6.17	3.06	14.81	102
29	Jembatan Canggu	Surabaya	09/05/12	8:48	6.04	2	7.267	6
30	Jembatan Canggu	Surabaya	05/06/12	13:05	5.78	1.91	8.208	10
31	Jembatan Canggu	Surabaya	12/07/12	10:55	6.11	1.54	5.326	9
32	Jembatan Canggu	Surabaya	03/08/12	11:10	5.8	2.06	6.154	10
33	Jembatan Canggu	Surabaya	10/09/12	8:55	6.12	0.67	3.653	7.2
34	Jembatan Canggu	Surabaya	04/10/12	9:25	6.1	1.07	5.199	5.6
35	Jembatan Canggu	Surabaya	08/11/12	9:50	6.1	0.53	4.54	7.1
36	Jembatan Canggu	Surabaya	05/12/12	10:00	5.9	5.9	28.48	580
37	Jembatan Canggu	Surabaya	07/01/13	10:15	6.33	4.59	25.38	396.7
38	Jembatan Canggu	Surabaya	05/02/13	9:20	6.01	5.23	29.91	436
39	Jembatan Canggu	Surabaya	05/03/13	9:05	5.71	2.55	11.4	48
40	Jembatan Canggu	Surabaya	05/04/13	9:05	6.01	3.32	11.1	108
41	Jembatan Canggu	Surabaya	07/05/13	10:10	5.09	4.27	20.49	21.6
No	**LOKASI**	**SUNGAI**	**DATE**	**HOUR**	**DO**	**BOD**	**COD**	**TSS**

42	Jembatan Canggu	Surabaya	07/06/13	10:33	6.01	6.14	42.71	836
43	Jembatan Canggu	Surabaya	05/07/13	10:00	6.02	1.67	8.531	86
44	Jembatan Canggu	Surabaya	13/08/13	9:25	6.01	2.55	9.111	6
45	Jembatan Canggu	Surabaya	05/09/13	8:54	5.94	2.18	11.02	13.3
46	Jembatan Canggu	Surabaya	07/10/13	9:30	5.14	4.53	19.84	13
47	Jembatan Canggu	Surabaya	11/11/13	9:25	5.99	2.06	5.802	10.5
48	Jembatan Canggu	Surabaya	05/12/13	8:30	6.01	3.15	9.972	78
49	Jembatan Jetis	Marmoyo	06/01/10	9:45	5.9	6.72	13.953	157.1
50	Jembatan Jetis	Marmoyo	08/02/10	10:01	4.8	5.74	70.101	589
51	Jembatan Jetis	Marmoyo	03/03/10	9:50	5.8	7.63	21.992	420
52	Jembatan Jetis	Marmoyo	08/04/10	9:40	6.1	3.2	10.785	245.7
53	Jembatan Jetis	Marmoyo	10/05/10	10:10	4.9	14.72	68.508	1063.3
54	Jembatan Jetis	Marmoyo	10/06/10	9:33	5.7	3.06	13.112	129
55	Jembatan Jetis	Marmoyo	06/07/10	10:44	5.1	3.18	10.365	65
56	Jembatan Jetis	Marmoyo	05/08/10	10:17	4.25	5.97	28.679	154
57	Jembatan Jetis	Marmoyo	07/09/10	9:55	4.55	3.97	14.166	60
58	Jembatan Jetis	Marmoyo	15/10/10	10:05	3.32	5.01	26.384	344
59	Jembatan Jetis	Marmoyo	09/11/10	10:40	4.33	4.79	16.725	312
60	Jembatan Jetis	Marmoyo	06/12/10	10:20	4.31	5.87	28.62	384
61	Jembatan Jetis	Marmoyo	10/01/11	5.59	4.92	15.305	167.1	
62	Jembatan Jetis	Marmoyo	09/02/11	9:16	4.98	3.03	19.158	88
63	Jembatan Jetis	Marmoyo	07/03/11	10:32	4.57	4.57	20.212	200
64	Jembatan Jetis	Marmoyo	11/04/11	16:03	5.21	7.49	39.64	616
65	Jembatan Jetis	Marmoyo	11/05/11	9:40	4.71	4.71	16.603	330
66	Jembatan Jetis	Marmoyo	07/06/11	11:52	4.03	2.91	17.276	12.7
67	Jembatan Jetis	Marmoyo	05/07/11	15:20	4.7	3.3	15.587	9.3
68	Jembatan Jetis	Marmoyo	10/08/11	9:05	0.11	16.91	41.064	7.7
69	Jembatan Jetis	Marmoyo	14/09/11	10:22	3.61	4	21.659	12.5
70	Jembatan Jetis	Marmoyo	12/10/11	10:05	4.81	3.01	12.35	30
71	Jembatan Jetis	Marmoyo	10/11/11	10:25	4.99	4.15	16.03	103
72	Jembatan Jetis	Marmoyo	08/12/11	12:46	5.59	3.07	11.55	60
73	Jembatan Jetis	Marmoyo	09/01/12	9:58	3.52	3.06	13.02	171
74	Jembatan Jetis	Marmoyo	09/02/12	10:05	5.21	2.26	9.628	68
75	Jembatan Jetis	Marmoyo	12/03/12	10:20	4.4	2.07	10.33	138
76	Jembatan Jetis	Marmoyo	11/04/12	9:27	4.91	3.15	14.2	92
77	Jembatan Jetis	Marmoyo	09/05/12	9:05	4.65	3.12	12.24	116
78	Jembatan Jetis	Marmoyo	05/06/12	13:20	3.3	2.42	16.27	12

79	Jembatan Jetis	Marmoyo	12/07/12	11:20	3.01	2.58	8.597	36
80	Jembatan Jetis	Marmoyo	03/08/12	11:25	4.11	2.31	8.268	34.5
81	Jembatan Jetis	Marmoyo	10/09/12	9:20	4.92	1.98	7.441	26
82	Jembatan Jetis	Marmoyo	04/10/12	9:48	4.12	2.26	11.34	30
83	Jembatan Jetis	Marmoyo	08/11/12	10:10	3.42	3	12.62	28
84	Jembatan Jetis	Marmoyo	05/12/12	10:20	4.56	6.05	47.59	972
85	Jembatan Jetis	Marmoyo	07/01/13	10:40	6.02	2.93	13.46	92
86	Jembatan Jetis	Marmoyo	05/02/13	9:40	4.45	4.48	21.62	100
87	Jembatan Jetis	Marmoyo	05/03/13	9:30	4.33	9.66	54.5	420
88	Jembatan Jetis	Marmoyo	05/04/13	9:30	4.1	4.09	12.3	128
No	**LOKASI**	**SUNGAI**	**DATE**	**HOUR**	**DO**	**BOD**	**COD**	**TSS**
89	Jembatan Jetis	Marmoyo	07/05/13	10:25	4.23	4.18	22.21	22.3
90	Jembatan Jetis	Marmoyo	07/06/13	10:45	5.29	4.58	30.25	752
91	Jembatan Jetis	Marmoyo	05/07/13	10:20	4.89	3.05	15.53	120
92	Jembatan Jetis	Marmoyo	13/08/13	9:40	5.45	3.27	12.49	6
93	Jembatan Jetis	Marmoyo	05/09/13	9:28	6.07	3.29	14.87	30.7
94	Jembatan Jetis	Marmoyo	07/10/13	9:45	4.11	4.65	22.87	12
95	Jembatan Jetis	Marmoyo	11/11/13	9:45	5.39	3.52	8.816	19.5

Sumber: Perum Jasa Tirta I

Lampiran 2: Hasil Simulasi

Simulasi I

(Konsentrasi Polutan dan Sedimentasi Untuk Aliran di Sungai Utama (Kali Surabaya))

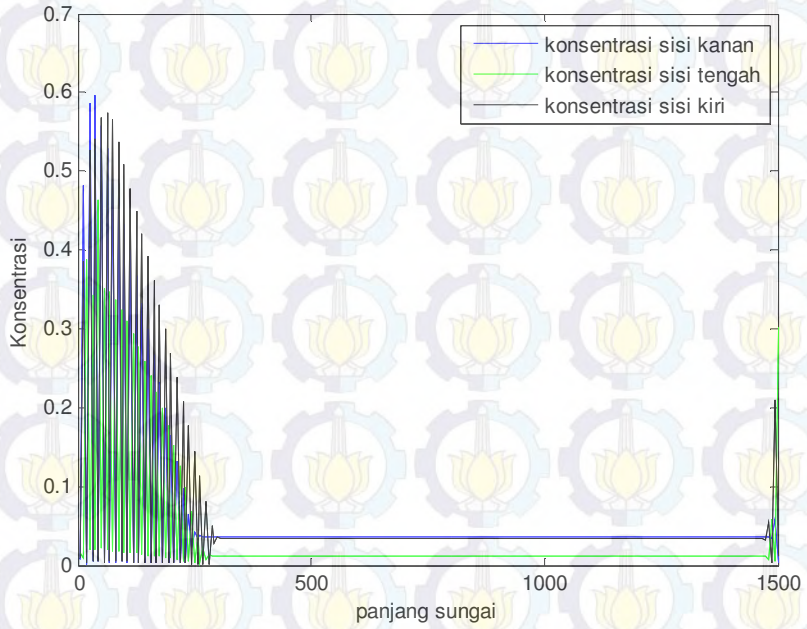
Input:

Konsentrasi awal : 0.025

Grid :240

Delta T :0.05/500

Iterasi : 700



Simulasi II

(Konsentrasi Polutan dan Sedimentasi Untuk Aliran di Sungai Utama (Kali Surabaya))

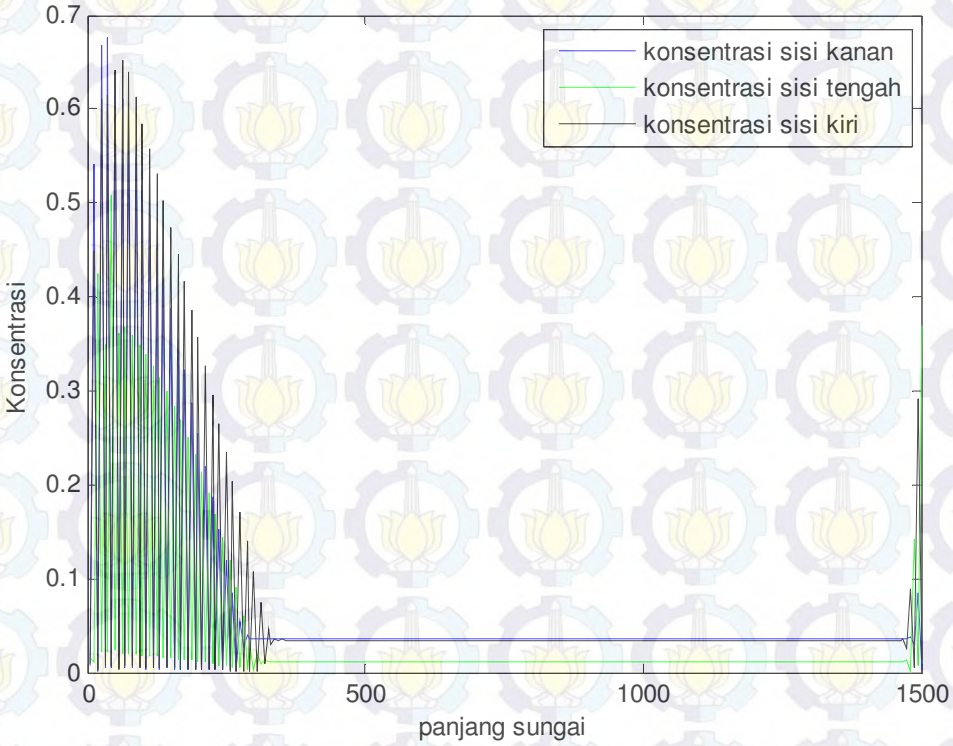
Input:

Konsentrasi awal : 0.025

Grid :240

Delta T :0.05/500

Iterasi : 800



Simulasi III

(Konsentrasi Polutan dan Sedimentasi Untuk Aliran di Sungai Utama (Kali Surabaya))

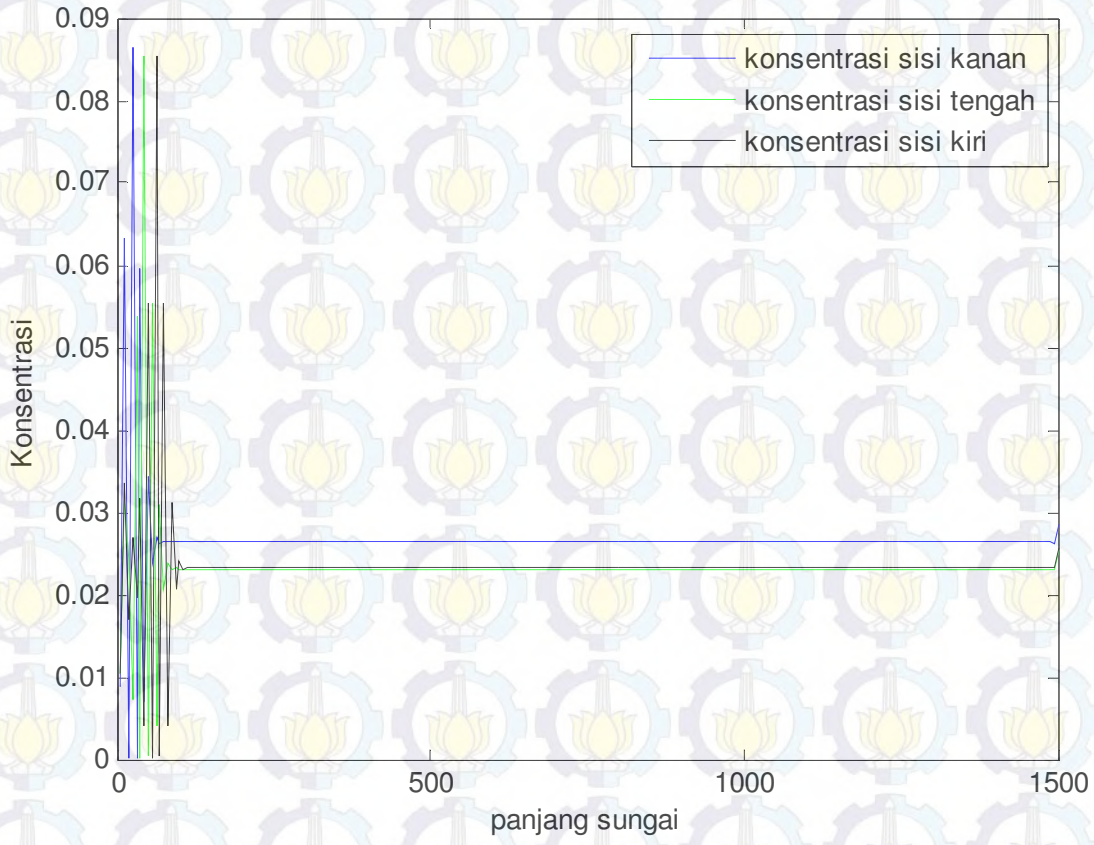
Input:

Konsentrasi awal : 0.025

Grid :240

Delta T :0.005/500

Iterasi : 1000



Simulasi IV

(Konsentrasi Polutan dan Sedimentasi Untuk Aliran di Anak Sungai (Sungai Marmoyo))

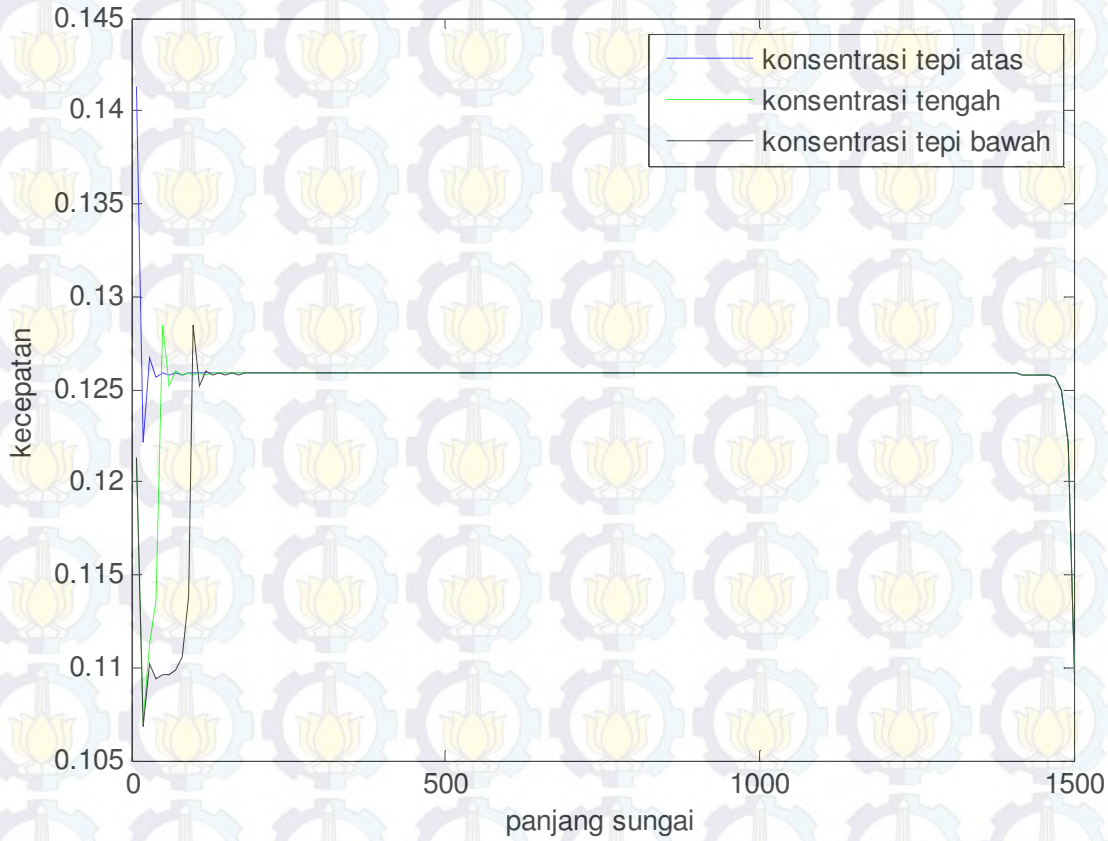
Input:

Konsentrasi awal : 0.025

Grid :150

Delta T :0. 5/50

Iterasi : 700



Simulasi V

(Konsentrasi Polutan dan Sedimentasi Untuk Aliran di Anak Sungai (Sungai Marmoyo))

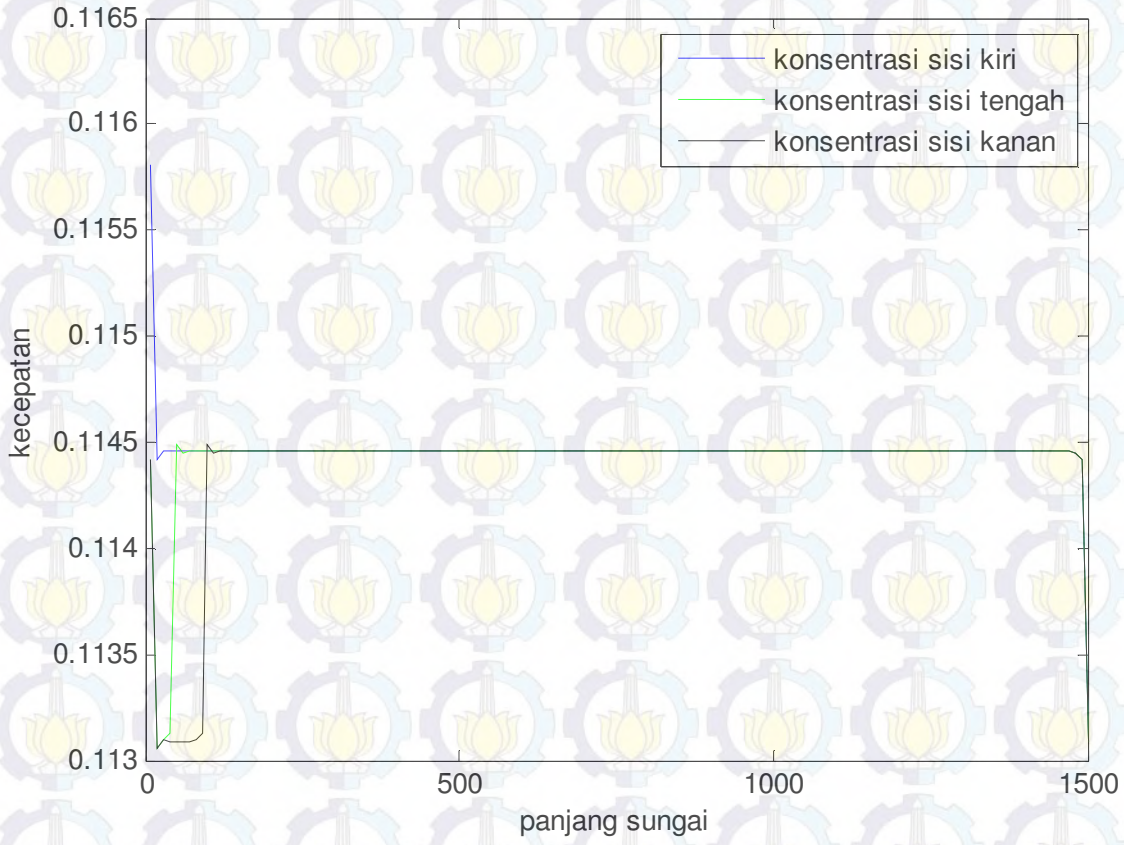
Input:

Konsentrasi awal : 0.025

Grid :150

Delta T :0. 5/500

Iterasi : 700



Simulasi VI

(Kecepatan Polutan Untuk Aliran di Anak Sungai (Sungai Marmoyo))

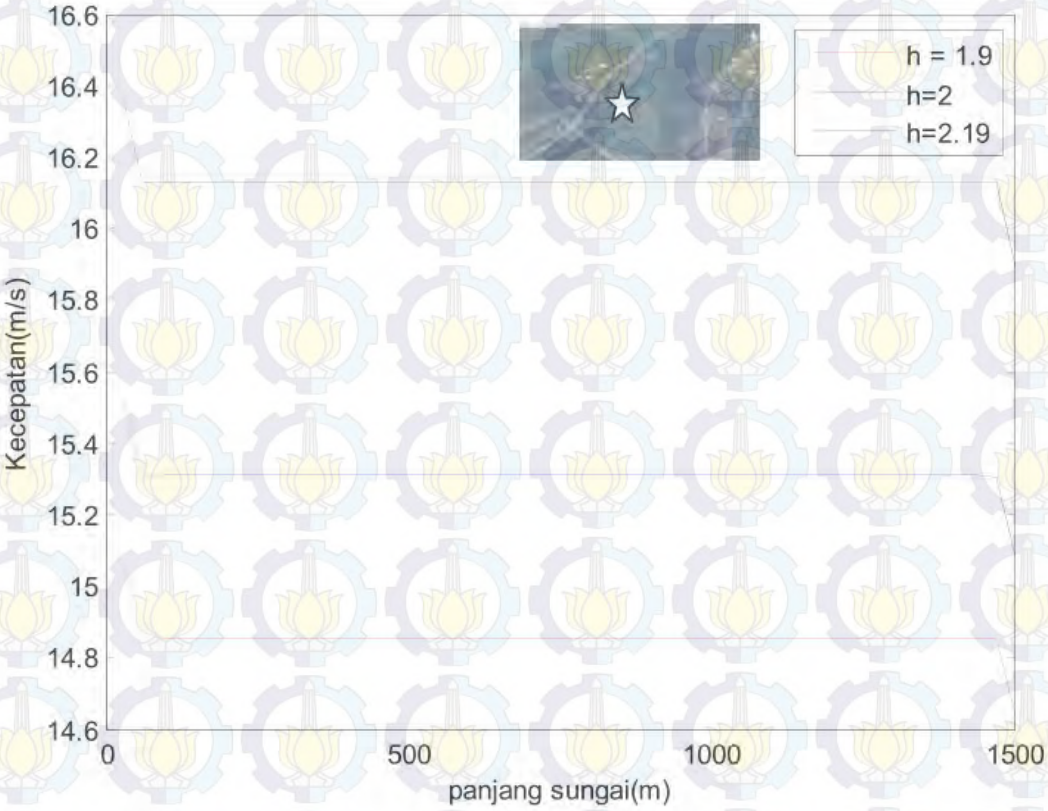
Input:

Kecepatan awal : 0.1

Grid :10

Delta T :1/3

Iterasi : 200



Simulasi VII

(Kecepatan Polutan Untuk Aliran di Anak Sungai (Sungai Marmoyo))

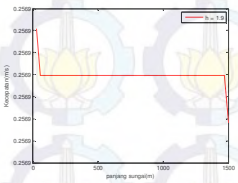
Input:

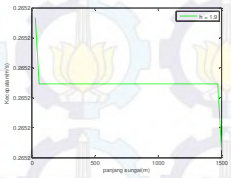
Kecepatan awal : 0.1

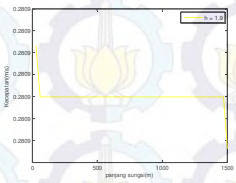
Grid :150

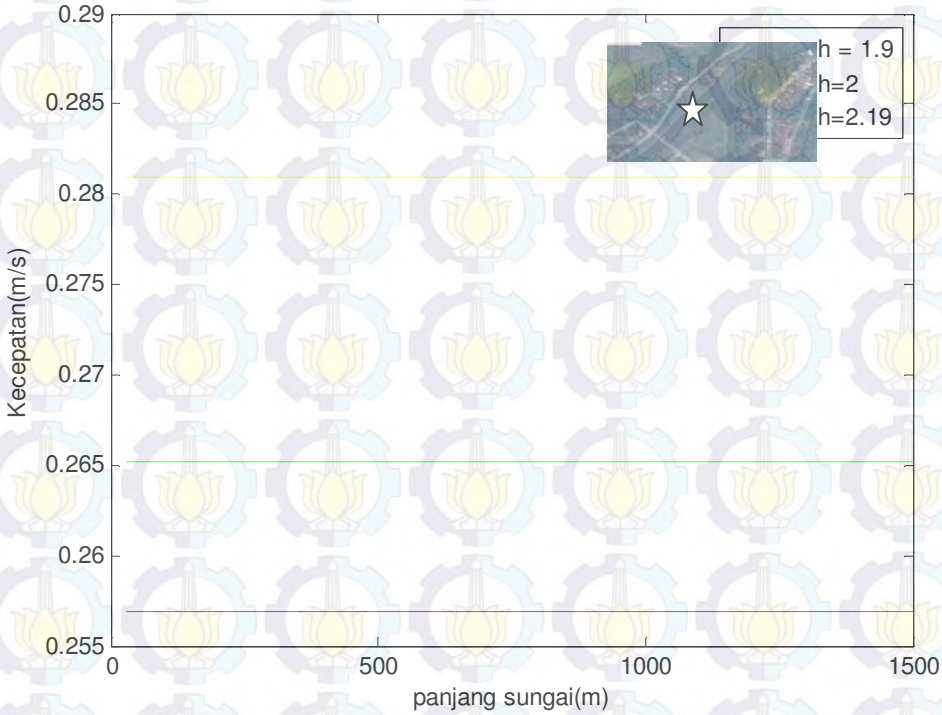
Delta T :0. 5/500

Iterasi : 700









Simulasi VIII

(Kecepatan Penyebaran Sedimentasi Untuk Aliran di Sungai Utama (Kali Surabaya))

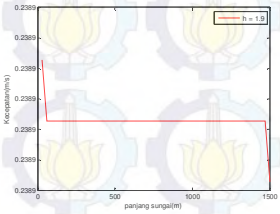
Input:

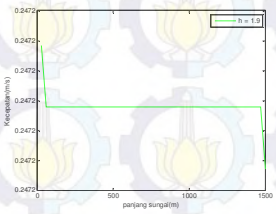
Kecepatan awal : 0.1

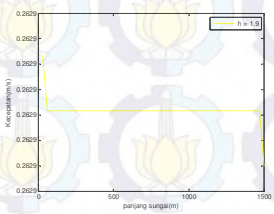
Grid :150

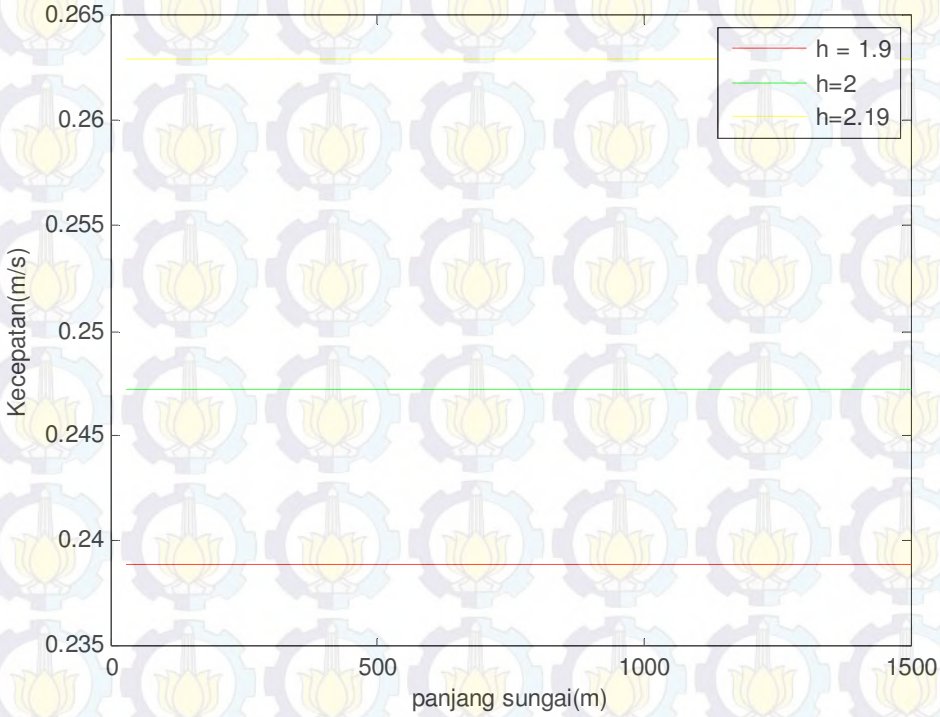
Delta T :0. 5/500

Iterasi : 700









Simulasi IX

(Kecepatan Penyebaran Polutan Untuk Aliran di Sungai Utama (Kali Surabaya))

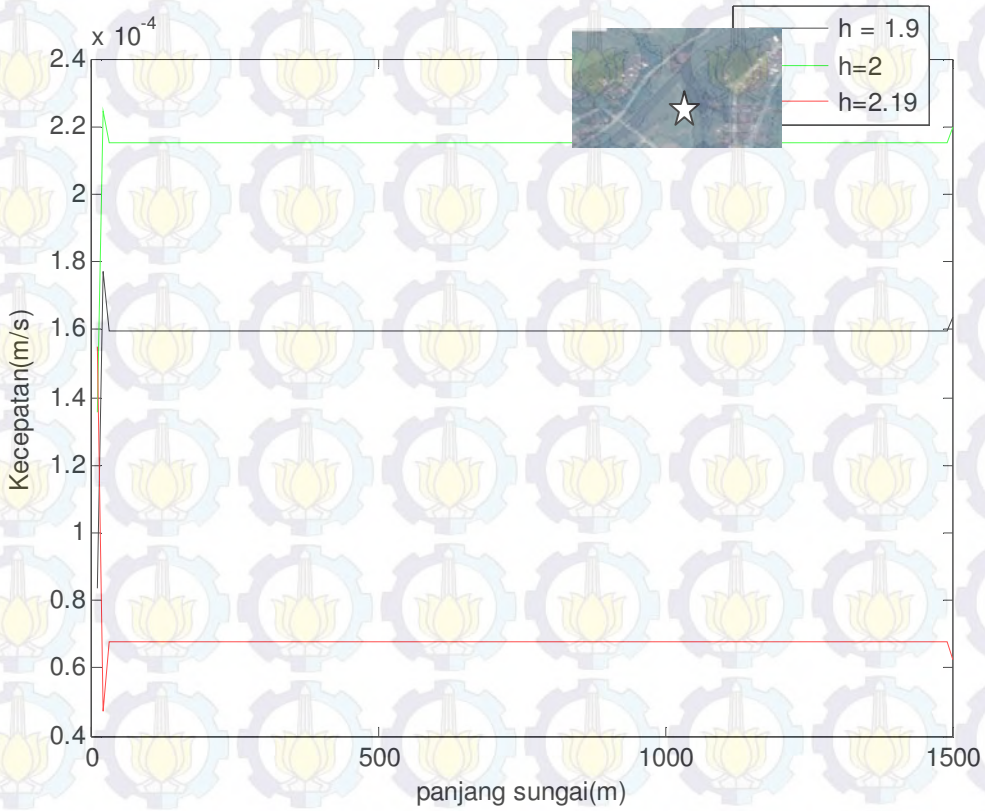
Input:

Kecepatan awal : 0.1

Grid :150

Delta T :0. 5/500

Iterasi : 700



Simulasi X

(Kecepatan Penyebaran Sedimentasi Untuk Aliran di Sungai Utama (Kali Surabaya))

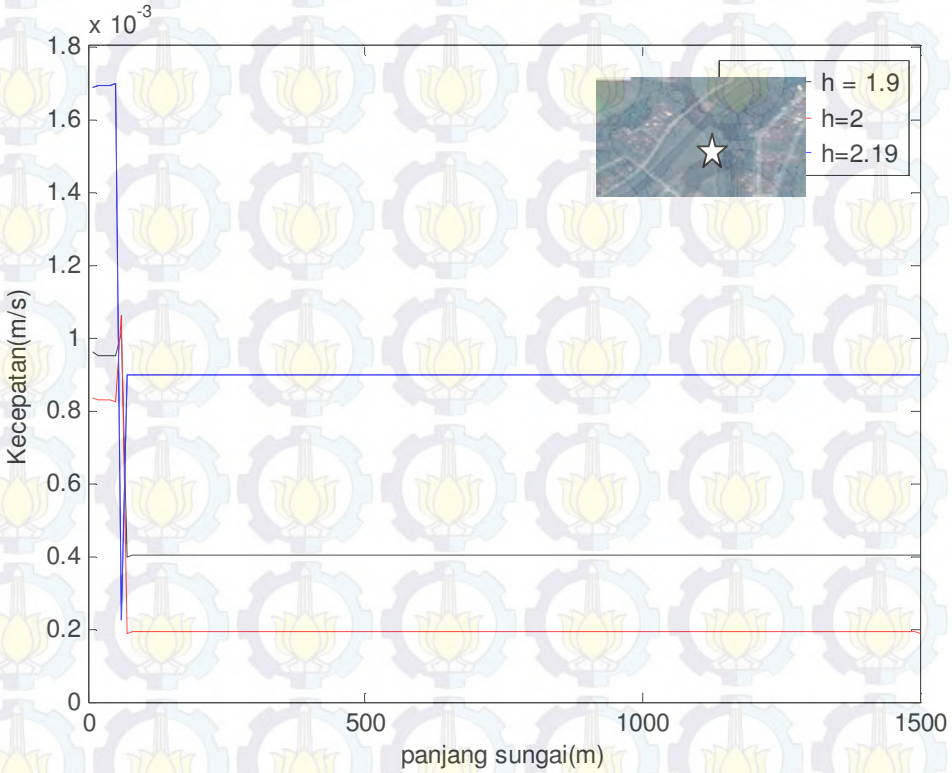
Input:

Kecepatan awal : 0.1

Grid :150

Delta T :0. 5/500

Iterasi : 700



Simulasi XI

(Kecepatan Polutan Untuk Aliran di Pertemuan Dua Sungai)

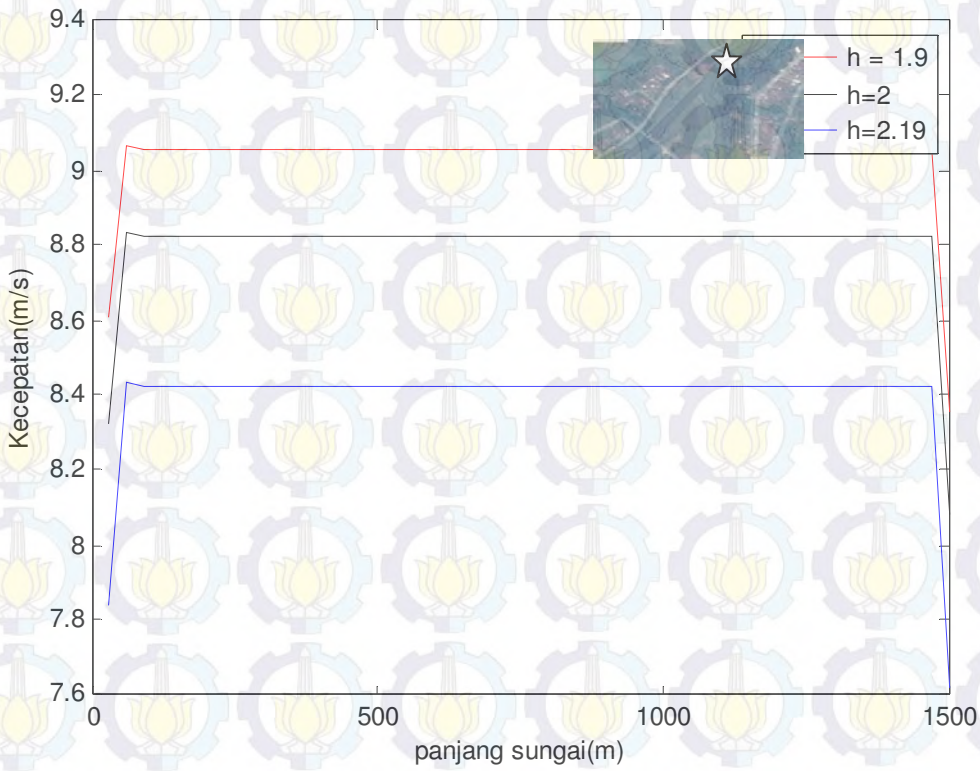
Input:

Kecepatan awal : 0.1

Grid :50

Delta T :1/3

Iterasi : 400



Simulasi XII

(Kecepatan Polutan Untuk Aliran di Pertemuan Dua Sungai)

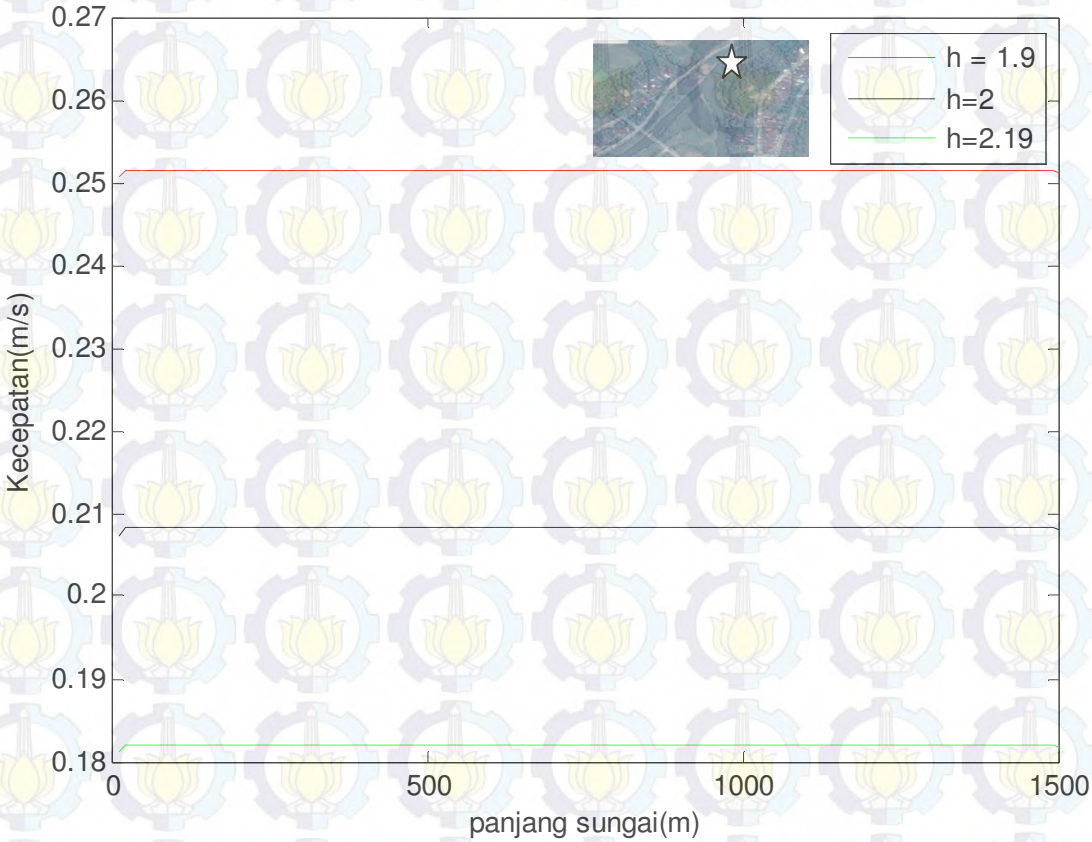
Input:

Kecepatan awal : 0.1

Grid :150

Delta T :0.05/500

Iterasi : 700



Simulasi XIII

(Kecepatan Sedimentasi Untuk Aliran di Pertemuan Dua Sungai)

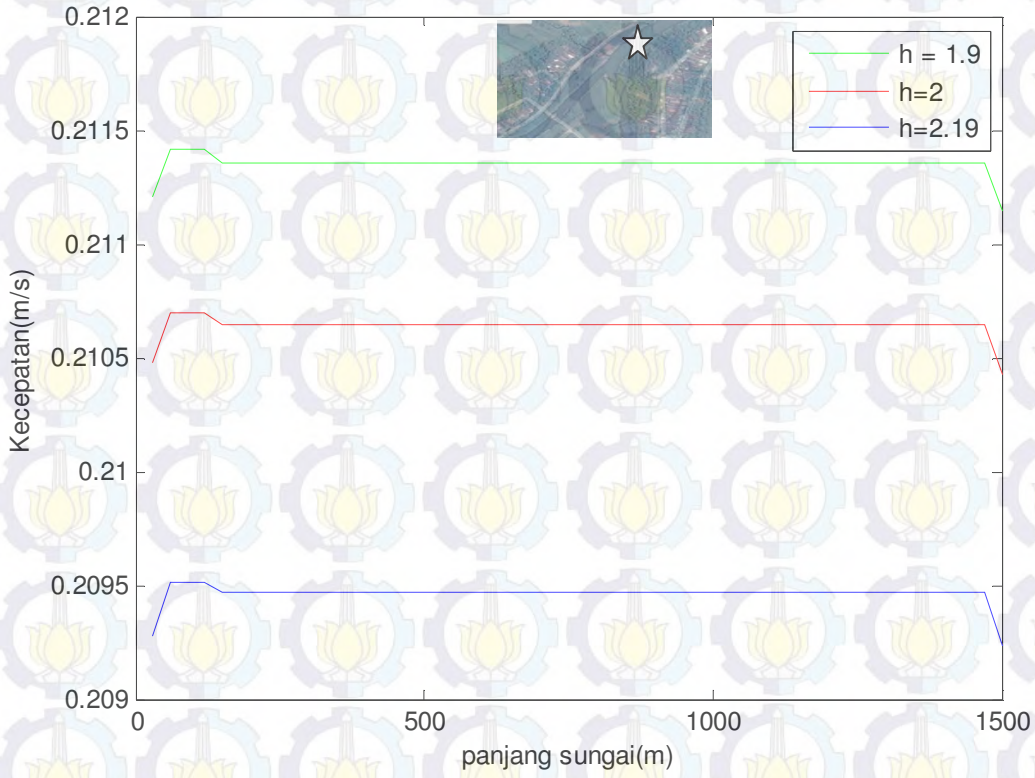
Input:

Kecepatan awal : 0.1

Grid :150

Delta T :0. 5/500

Iterasi : 700



DAFTAR PUSTAKA

Arisandi, Prigi. (2004), "*Kali Surabaya Sudah Mati*", Lembaga Kajian Ekologi dan Konservasi Lahan Basah. Surabaya.

Faisol, (2012), *Pengaruh Hidrodinamika Pada Penyebaran Polutan di Sungai*, Penelitian Tesis, Pasca Sarjana Matematika, FMIPA-ITS Surabaya.

Gang Ji, Zhen. (2008), "Hydrodinamics And Water Quality Modeling Rivers, Lakes, And Estuaries", Canada : A Jhon Wiley & Sons,Inc., Publication.

Hoffman, J. D. (1992), *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York.

Ikhtisholiyah. (2013), *Pengaruh Hidrodinamika Pada Pola Penyebaran Polutan Di Pertemuan Dua Sungai*, Penelitian Tesis, Pasca Sarjana Matematika, FMIPA-ITS Surabaya.

Kyung-Suk Suh, dkk. (2011), "Numerical Analysis Of A pollutant Dispersion In Subsurface Soil", *Mathematical and Computer Modelling* 54 (2011) 3197-3203.

Liu, Z. (2001), "*Sediment Transport*", Laboratoriet for hydraulic og Havnebygning Intituttet for Vand Manual, Jord og Miljotenik Aalborg Universitet.

Mukhtasor, dkk. (2008), *Pengantar Ilmu Lingkungan*, itspress Surabaya.

Sosrodarsono dan Tominaga, (1984), "*Perbaikan dan Pengaturan Sungai*", Pradnya Paramita, Jakarta.

Versteeg (2007), *An Introduction to Computational Fluida Dynamics The Finite Volume Method*, Longman Scientific & Technical, Malaysia.

Widodo, B. (2013), "*Model Matematika Dan Simulasi Komputer Dari Pengaruh Hidrodinamika Pada Dispersi Polutan di Pertemuan Dua Sungai*", Hibah Penelitian, ITS Surabaya.

Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*, ITSPress, Surabaya.

Yang, C.T. (1996) *Sediment Transport, Teory and Practice*, Mc Graw Hill, New York.

BIODATA PENULIS

Penulis dilahirkan di Pasuruan, 18 Mei 1989 yang merupakan anak kedua dari dua bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu SD Al Kautsar Pasuruan, SMP Negeri 3 Pasuruan, SMA Negeri 2 Pasuruan, kemudian diterima sebagai mahasiswa program Strata 1 Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya Malang pada tahun 2007. Selanjutnya, penulis melanjutkan studi Strata 2 Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya. Informasi yang berhubungan dengan Tesis ini dapat ditujukan ke alamat email: rani.kurnia@ymail.com