

TUGAS AKHIR - SS234862

**PENGENDALIAN KUALITAS PRODUKSI AIR
MENGUNAKAN DIAGRAM KENDALI *MULTIVARIATE
EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING VARIANCE*
(MEWMV) DAN *SPATIAL SIGNED RANK MEWMA* (SSRM)
DI PT XYZ**

AURA SABINA

NRP 5003211162

Dosen Pembimbing

Dr. Wibawati, S.Si., M.Si.

NIP 19741213 199802 2 001

Program Studi Sarjana Statistika

Departemen Statistika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2025



TUGAS AKHIR - SS234862

**PENGENDALIAN KUALITAS PRODUKSI AIR
MENGUNAKAN DIAGRAM KENDALI *MULTIVARIATE
EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING VARIANCE*
(MEWMV) DAN *SPATIAL SIGNED RANK MEWMA* (SSRM)
DI PT XYZ**

AURA SABINA

NRP 5003211162

Dosen Pembimbing

Dr. Wibawati, S.Si., M.Si.

NIP 19741213 199802 2 001

Program Studi Sarjana Statistika

Departemen Statistika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2025



FINAL PROJECT - SS234862

**QUALITY CONTROL OF WATER PRODUCTION USING
MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING
VARIANCE (MEWMV) AND SPATIAL SIGNED RANK
MEWMA (SSRM) CONTROL CHARTS AT PT XYZ**

AURA SABINA

NRP 5003211162

Advisor

Dr. Wibawati, S.Si., M.Si.

NIP 19741213 199802 2 001

Bachelor Program of Statistics

Department of Statistics

Faculty of Science and Data Analytics

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2025

LEMBAR PENGESAHAN

PENGENDALIAN KUALITAS PRODUKSI AIR MENGGUNAKAN DIAGRAM KENDALI *MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING VARIANCE* (MEWMV) DAN *SPATIAL SIGNED RANK MEWMA (SSRM)* DI PT XYZ

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Statistika pada
Program Studi Sarjana Statistika
Departemen Statistika
Fakultas Sains Dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh: **AURA SABINA**
NRP 5003211162

Tanggal Ujian: 8 Juli 2025
Periode Wisuda: September 2025

Disetujui oleh:
Pembimbing:

1. Dr. Wibawati, S.Si., M.Si.
NIP 19741213 199802 2 001

.....

Penguji:

2. Diaz Fitra Aksioma S.Si., M.Si.
NIP 19870602 201212 2 002
3. Dr. Muhammad Ahsan, S.Si.
NIP 19900425 202406 1 001

.....

.....

Kepala Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data



Dr. rer. por Dedy Dwi Prastyo, S.Si, M.Si
NIP 19831204 200812 1 002

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

APPROVAL SHEET

QUALITY CONTROL OF WATER PRODUCTION USING MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING VARIANCE (MEWMV) AND SPATIAL SIGNED RANK MEWMA (SSRM) CONTROL CHARTS AT PT XYZ

FINAL PROJECT

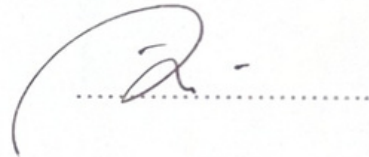
Submitted to fulfill one of the requirements
For obtaining a degree Bachelor of Statistics at
Bachelor Program of Statistics
Department of Statistics
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

by: **AURA SABINA**
NRP 5003211162

Exam Date: 8 July 2025
Graduation Period: September 2025

Approved by:
Advisor:

1. Dr. Wibawati, S.Si., M.Si.
NIP 19741213 199802 2 001



Examiners:

2. Diaz Fitra Aksioma S.Si., M.Si.
NIP 19870602 201212 2 002
3. Dr. Muhammad Ahsan, S.Si.
NIP 19900425 202406 1 001



Head of Statistics Department
Faculty of Science and Data Analytics



Dr. ~~fer~~ pol Dedy Dwi Prastyo, S.Si, M.Si
NIP 19831204 200812 1 002

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

PERNYATAAN ORISINALITAS

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama mahasiswa / NRP : Aura Sabina / 5003211162

Departemen : Statistika

Dosen Pembimbing / NIP : Dr. Wibawati, S.Si, M.Si. / 19741213 199802 2 001

dengan ini menyatakan bahwa Tugas Akhir dengan judul “Pengendalian Kualitas Produksi Air Menggunakan Diagram Kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV) Dan *Spatial Signed Rank* MEWMA (SSRM) Di PT XYZ” adalah hasil karya sendiri, bersifat orisinal, dan ditulis dengan mengikuti kaidah penulisan ilmiah.

Bilamana di kemudian hari ditemukan ketidaksesuaian dengan pernyataan ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan yang berlaku di Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

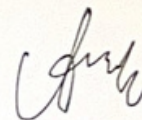
Surabaya, 11 Juni 2025

Mengetahui
Dosen Pembimbing



Dr. Wibawati, S.Si., M.Si.
NIP 19741213 199802 2 001

Mahasiswa



Aura Sabina
NRP 5003211162

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

STATEMENT OF ORIGINALITY

The undersigned below:

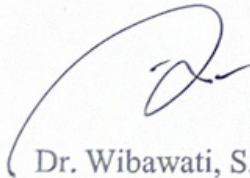
Name of Student / NRP : Aura Sabina / 5003211162
Department : Statistika
Advisor / NIP : Dr. Wibawati, S.Si, M.Si. / 19741213 199802 2 001

hereby declare that the Final Project with the title of "Quality Control of Water Production Using Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance (MEWMV) and Spatial Signed Rank Mewma (SSRM) Control Charts at PT XYZ" is the result of my own work, is original, and is written by following the rules of scientific writing.

If in the future there is a discrepancy with this statement, then I am willing to accept sanctions in accordance with the provisions that apply at Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, 11 June 2025

Acknowledged
Advisor



Dr. Wibawati, S.Si., M.Si.
NIP 19741213 199802 2 001

Students



Aura Sabina
NRP 5003211162

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

ABSTRAK

PENGENDALIAN KUALITAS PRODUKSI AIR MENGGUNAKAN DIAGRAM KENDALI SPATIAL SIGNED RANK MEWMA (SSRM) DAN MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING VARIANCE (MEWMV) DI PT XYZ

Nama Mahasiswa / NRP : Aura Sabina / 5003211162
Prodi, Departemen : Sarjana Statistika, Departemen Statistika FSAD ITS
Dosen Pembimbing : Dr. Wibawati, S.Si., M.Si.

Abstrak

Produksi air bersih merupakan tantangan utama dalam industri pengolahan air, terutama di PT XYZ, yang berlokasi di Tigaraksa, Tangerang. Parameter kualitas seperti kekeruhan, klorin, dan *Total Dissolved Solids* (TDS) harus dipantau untuk memastikan proses produksi tetap memenuhi standar yang telah ditetapkan. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis pengendalian kualitas air menggunakan diagram kendali *Spatial Signed Rank MEWMA* (SSRM) dan *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV). Langkah penelitian dimulai dengan mendeskripsikan karakteristik kualitas air, melakukan uji dependensi antar variabel menggunakan *Bartlett's test*, dan uji normalitas multivariat menggunakan *Shapiro-Wilk test*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa diagram kendali MEWMV dengan pembobot $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$ serta $L = 2,7900$, variabilitas proses pada Fase I terkendali secara statistik setelah dilakukan iterasi pengamatan *out of control* sebanyak 7 kali. Pada Fase II, variabilitas proses telah terkendali secara statistik. Transformasi *spatial signed rank* diterapkan sebelum analisis SSRM. Pada diagram SSRM dengan nilai pembobot $\lambda = 0,1$, rata-rata proses pada Fase I terkendali secara statistik setelah dilakukan iterasi pengamatan *out of control* sebanyak 7 kali. Namun, pada Fase II masih terdapat pengamatan *out of control*, sehingga proses dinyatakan tidak terkendali secara statistik. Berdasarkan analisis kapabilitas proses diperoleh bahwa kinerja proses produksi air di PT XYZ sudah kapabel secara multivariat.

Kata kunci: *Kapabilitas proses, MEWMV, Pengendalian kualitas, Produksi Air, SSRM*

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

ABSTRACT

QUALITY CONTROL OF WATER PRODUCTION USING MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING VARIANCE (MEWMV) AND SPATIAL SIGNED RANK MEWMA (SSRM) CONTROL CHARTS AT PT XYZ

Student Name / NRP : Aura Sabina / 5003211162
Program, Department : Bachelor Program of Statistics,
Department of Statistics F-Scientics ITS
Advisor : Dr. Wibawati, S.Si., M.Si.

Abstract

The production of clean water is a major challenge in the water treatment industry, particularly at PT XYZ, located in Tigaraksa, Tangerang. Quality parameters such as turbidity, chlorine, and Total Dissolved Solids (TDS) must be continuously monitored to ensure that the production process complies with established standards. This study aims to analyze water quality control using the Spatial Signed Rank MEWMA (SSRM) and Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance (MEWMV) control charts. The research steps began with describing the characteristics of water quality, followed by testing the dependency between variables using Bartlett's test and assessing multivariate normality using the Shapiro-Wilk test. The results show that the MEWMV control chart with weight parameters $\omega = 0,1$ and $\lambda = 0,1$, and control limit $L = 2.7900$, indicated that the process variability in Phase I was statistically in control after seven iterations of removing out-of-control observations. In Phase II, the process variability remained statistically controlled. A spatial signed rank transformation was applied prior to the SSRM analysis. Using the SSRM chart with a weight of $\lambda = 0,1$, the process mean in Phase I was also statistically in control after seven out-of-control observations were iteratively addressed. However, in Phase II, several out-of-control points were still observed, indicating that the process was not statistically in control. Based on the multivariate process capability analysis, the performance of the water production process at PT XYZ is considered multivariately capable.

Keywords: *MEWMV, Process Capability, Quality Control, SSRM, Water Productions*

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas segala rahmat, karunia, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "Pengendalian Kualitas Produksi Air Menggunakan Diagram Kendali *Spatial Signed Rank* MEWMA (SSRM) dan *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV) di PT XYZ." sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Statistika pada Program Studi Sarjana Statistika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) tahun 2025. Tugas akhir ini disusun dengan tujuan untuk mengaplikasikan ilmu yang telah diperoleh selama masa perkuliahan dan sebagai bentuk kontribusi kecil penulis dalam bidang statistika bisnis industri. Selama proses penyusunan, penulis banyak memperoleh bantuan, bimbingan, serta dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Allah SWT atas limpahan rahmat dan kasih sayang-Nya.
2. Kedua orang tua tercinta serta kakak dan abang atas doa, dukungan, dan kasih sayang yang tiada henti.
3. Bapak Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, S.Si, M.Si, selaku Kepala Departemen Statistika ITS yang telah memberikan fasilitas dalam kelancaran Tugas Akhir ini
4. Ibu Shofi Andari, S.Stat., M.Si., Ph.D. selaku Kepala Program Studi Sarjana Statistika FSAD ITS, Ibu Dr. Wibawati, S.Si., M.Si. selaku Sekretaris Departemen Statistika FSAD ITS yang telah memberikan bantuan dan arahan dalam proses pelaksanaan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Dr. Wibawati, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, masukan, dan semangat selama penyusunan tugas akhir ini.
6. Ibu Diaz Fitra Aksioma S.Si., M.Si., Ph.D dan Bapak Dr. Muhammad Ahsan, S.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan selama penyusunan Tugas Akhir.
7. Seluruh Dosen dan Staf Kependidikan Statistika ITS atas ilmu dan dukungan yang telah diberikan selama masa studi.
8. Teman-teman seperjuangan angkatan 2021 Statistika ITS yang selalu memberikan semangat dan kebersamaan selama kuliah.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per-satu yang telah membantu dalam penyelesaian tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih memiliki kekurangan, baik dari segi isi maupun penyajian. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan karya ini di masa yang akan datang. Akhir kata, semoga tugas akhir ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca serta menjadi kontribusi ilmiah yang berguna di bidang statistika.

Surabaya, 13 Juni 2025
Penulis

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN.....	i
APPROVAL SHEET	iii
PERNYATAAN ORISINALITAS	v
STATEMENT OF ORIGINALITY.....	vii
ABSTRACT	xi
KATA PENGANTAR	xiii
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR TABEL.....	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	4
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Hasil Penelitian Terdahulu	5
2.2 Landasan Teori	6
2.2.1 Pengendalian Kualitas Statistik	6
2.2.2 Diagram Kendali.....	6
2.2.3 Uji Dependensi	7
2.2.4 Uji Normal Multivariat	8
2.2.5 Diagram Kendali <i>Multivariate Exponentially Weighted Moved Variance</i> (MEWMV).....	8
2.2.6 Diagram Kendali <i>Multivariate Exponentially Weighted Moved Average</i> (MEWMA).....	11
2.2.7 Transformasi dengan <i>Multivariat Spatial Signed Rank</i>	12
2.2.8 Diagram Kendali <i>Spatial Signed Rank MEWMA</i> (SSRM).....	13
2.2.9 Analisis Kapabilitas Proses.....	14
2.2.10 Pengolahan Kualitas Air	15
BAB 3 METODOLOGI.....	17
3.1 Sumber Data.....	17

3.2	Variabel Penelitian.....	17
3.3	Struktur Data	18
3.4	Langkah Analisis	19
BAB 4	HASIL DAN PEMBAHASAN	23
4.1	Analisis Karakteristik Data Kualitas Air.....	23
4.2	Pengujian Dependensi antar Karakteristik Kualitas	24
4.3	Pengujian Distribusi Normal Multivariat.....	24
4.4	Pemeriksaan Outlier Karakteristik Kualitas Air	24
4.5	Pengendalian Kualitas Variabilitas Air dengan Diagram Kendali <i>Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance</i> (MEWMV).....	25
4.5.1	Pengendalian Kualitas Variabilitas Air dengan Diagram Kendali <i>Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance</i> (MEWMV) Fase I	26
4.5.2	Pengendalian Kualitas Variabilitas Air dengan Diagram Kendali <i>Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance</i> (MEWMV) Fase II	34
4.6	Pengendalian Rata-Rata Proses dengan Diagram Kendali <i>Spatial Signed Rank MEWMA</i> (SSRM).....	34
4.6.1	Transformasi <i>Spatial Signed Rank</i>	35
4.6.2	Pengendalian Kualitas Rata-Rata Proses dengan Diagram Kendali <i>Spatial Signed Rank MEWMA</i> (SSRM) Fase I.....	38
4.6.3	Pengendalian Kualitas Rata-Rata Proses dengan Diagram Kendali <i>Spatial Signed Rank MEWMA</i> (SSRM) Fase II	43
4.7	Analisis Kapabilitas Proses	45
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	47
5.1	Kesimpulan.....	47
5.2	Saran	47
	DAFTAR PUSTAKA	49
	LAMPIRAN	49

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Instalasi Pengelolaan air PT XYZ.....	1
Gambar 2.1 Diagram Kendali.....	6
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian.....	21
Gambar 4.1 Boxplot Data Karakteristik Kualitas Air	25
Gambar 4.2 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,1$ $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,7900$ Fase I .	28
Gambar 4.3 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,2$ $\lambda = 0,2$ dan $L = 3,3086$ Fase I .	28
Gambar 4.4 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,3$ $\lambda = 0,3$ dan $L = 3,6602$ Fase I .	29
Gambar 4.5 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,4$ $\lambda = 0,4$ dan $L = 3,9219$ Fase I .	29
Gambar 4.6 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,1$ $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,7900$ Fase I .	31
Gambar 4.7 Diagram Kendali MEWMV Kombinasi Kekeruhan dengan Klorin Fase I.....	32
Gambar 4.8 Diagram Kendali MEWMV Kombinasi Kekeruhan dengan TDS Fase I	32
Gambar 4.9 Diagram Kendali MEWMV Kombinasi Klorin dengan TDS Fase I	33
Gambar 4.10 Diagram Kendali MEWMV In Control dengan $\omega = 0,1$ $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,7900$ Fase I .	34
Gambar 4.11 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,1$ $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,7900$ Fase II	34
Gambar 4.12 Diagram Kendali SSRM $\lambda = 0,1$ Fase I.....	39
Gambar 4.13 Diagram Kendali SSRM $\lambda = 0,4$ Fase I.....	40
Gambar 4.14 Diagram Kendali SSRM $\lambda = 0,8$ Fase I.....	40
Gambar 4.15 Diagram Kendali SSRM Kombinasi Kekeruhan dengan Klorin Fase I	41
Gambar 4.16 Diagram Kendali SSRM Kombinasi Kekeruhan dengan TDS Fase I.....	42
Gambar 4. 17 Diagram Kendali SSRM Kombinasi Klorin dengan TDS Fase I.....	42
Gambar 4.18 Diagram Kendali SSRM $\lambda = 0,1$ in control Fase I.....	43
Gambar 4.19 Diagram Kendali SSRM $\lambda=0,1$ Fase II.....	43
Gambar 4. 20 Diagram Kendali SSRM Kombinasi Kekeruhan dengan Klorin Fase II.....	44
Gambar 4. 21 Diagram Kendali SSRM Kombinasi Kekeruhan dengan TDS Fase II.....	44
Gambar 4. 22 Diagram Kendali SSRM Kombinasi Klorin dengan TDS Fase II	45

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Hasil Penelitian Terdahulu	5
Tabel 3.1 Variabel Penelitian.....	17
Tabel 3.2 Struktur Data Penelitian	18
Tabel 3.3 Struktur Data Transformasi Spatial Signed Rank.....	18
Tabel 4.1 Karakteristik Data Fase I.....	23
Tabel 4.2 Karakteristik Data Fase II	23
Tabel 4.3 Hasil Uji Dependensi	24
Tabel 4.4 Hasil Uji Distribusi Normal Multivariat	24
Tabel 4.5 Hasil Perhitungan Maks $trVn$ dan Jumlah Out of Control.....	27
Tabel 4.6 Hasil Perhitungan BKA-BKB pada Diagram Kendali MEWMV Fase I.....	30
Tabel 4.7 Hasil Identifikasi Out of Control Diagram Kendali MEWMV Fase I.....	33
Tabel 4.8 Hasil Transformasi Spatial Signed Rank	37
Tabel 4.9 Hasil Perhitungan Nilai Pembobot Diagram Kendali SSRM Fase I	41
Tabel 4.10 Identifikasi Penyebab Out of Control Diagram Kendali SSRM Fase I	42
Tabel 4.11 Identifikasi Penyebab Out of Control Diagram Kendali SSRM Fase II	45
Tabel 4.12 Indeks Kapabilitas Proses.....	46

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Karakteristik Kualitas Air PT XYZ	51
Lampiran 2. Hasil Uji Dependensi.....	52
Lampiran 3. Hasil Uji Distribusi Normal Multivariat.....	52
Lampiran 4. Syntax MATLAB MEWMV	53
Lampiran 5. Syntax R Transformasi Spatial Signed Rank.....	55
Lampiran 6. Iterasi Diagram Kendali MEWMV Fase 1	56
Lampiran 7. Iterasi Diagram Kendali SSRM Fase 1.....	57
Lampiran 8. Diagram Kendali MEWMA Fase I dan II	57
Lampiran 9. Tabel Perbandingan Jumlah Pengamatan Out of Control Diagram Kendali SSRM dengan MEWMA.....	57
Lampiran 10. Tabel Nilai L pada Diagram MEWMV $ARL_0 \approx 370$ ($p = 2$)	58
Lampiran 11. Tabel Tabel Nilai L pada Diagram MEWMV $ARL_0 \approx 370$ ($p = 3$).....	58
Lampiran 12. Tabel Perbandingan ARL_1 berdasarkan Nilai $\lambda = 0,1; 0,2; 0,3$ serta Pergeseran δ dengan $ARL_0 \approx 370$ ($p = 3$).....	59
Lampiran 13. Tabel Perbandingan ARL_1 berdasarkan Nilai $\lambda = 0,4; 0,5; 0,8$ serta Pergeseran δ dengan $ARL_0 \approx 370$ ($p = 3$).....	59

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR SIMBOL

$x_{(i)p}$	: Observasi ke- i pada karakteristik ke- p
n	: Jumlah pengamatan
$i = 1, 2, \dots, n$	: Banyak observasi pengamatan
$k = 1, 2, \dots, p$	: Banyak karakteristik kualitas berdasarkan observasi ke- i
X^2	: Statistik uji <i>chi-square</i>
ρ	: Matriks korelasi masing-masing karakteristik kualitas
$ \rho $	: Determinan matriks korelasi
a	: Taraf signifikansi
W^*	: Statistik Uji <i>Shapiro-Wilk</i>
$C_{\alpha;n;p}$	: Nilai kritis statistik <i>Shapiro-Wilk</i>
$tr(Vn)$	: Nilai statistik MEWMV
Q	: Matriks bujur sangkar
M	: Matriks segitiga bawah dengan pembobot λ
C	: Matriks segitiga bawah dengan pembobot ω
L	: Konstanta yang bergantung pada nilai p , ω , dan λ
$U(x)$	: Hasil transformasi <i>spatial sign</i>
x^T	: Transpose vektor dari $x_{(i)}$
$\ x\ $	: Norm dari vektor x
x_h	: Observasi ke- i variabel ke- h
$R(x)$	: Hasil transformasi <i>spatial rank</i>
avg	: Rata-rata yang diambil dari semua pengamatan
$Q(x)$	: Hasil transformasi <i>spatial signed-rank</i>
λ	: Besar pembobot dengan nilai $0 < \lambda \leq 1$
δ	: Besarnya pergeseran rata-rata proses
$Q(y_i)$	: Nilai statistik SSRM
Q_i^{SSRM}	: Titik pengamatan pada diagram kendali SSRM
$\Sigma Q(x_i)$	: Matriks kovarians dari $Q(x_i)$
$\Sigma Q(y_i)$	: Matriks kovarians dari $Q(y_i)$
MC_p	: Indeks kapabilitas proses multivariat kepresisian untuk distribusi non-normal
MC_{pk}	: Indeks kapabilitas proses multivariat keakurasian untuk distribusi non-normal
C_{Np}	: Indeks kapabilitas proses univariat kepresisian untuk distribusi non-normal
C_{Npk}	: Indeks kapabilitas proses univariat keakurasian untuk distribusi non-normal
W_j	: Pembobot dari karakteristik kualitas
C_p	: Indeks kapabilitas proses univariat kepresisian saat <i>in control</i>
C_{pk}	: Indeks kapabilitas proses univariat keakurasian saat <i>in control</i>

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 1 PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Air merupakan salah satu kebutuhan mendasar bagi kehidupan makhluk hidup, baik untuk konsumsi maupun aktivitas sehari-hari seperti memasak, mencuci, dan mandi. Namun, selain untuk keperluan konsumsi, air juga memiliki peran penting dalam berbagai sektor industri. Di kawasan industri, air digunakan dalam proses produksi, pendinginan mesin, pembersihan, dan keperluan operasional lainnya. Mengingat pentingnya peran air dalam kegiatan industri, kualitas air yang digunakan harus memenuhi standar yang ditetapkan, agar proses produksi dapat berjalan dengan lancar dan efisien. Proses pengolahan air yang baik diperlukan untuk memastikan air yang didistribusikan ke kawasan industri aman, bebas dari kontaminasi, dan memenuhi persyaratan teknis untuk keperluan industri. Hal ini menjadikan pengendalian kualitas air semakin krusial, khususnya dalam industri pengolahan air seperti di PT XYZ. Air yang layak konsumsi harus memenuhi standar yang ditetapkan dalam Peraturan Menteri Kesehatan RI Nomor 2 Tahun 2023, yang meliputi kejernihan, ketiadaan bau, rasa, zat beracun, serta bebas dari mikroorganisme berbahaya.

PT XYZ yang didirikan pada tahun 2011 dan berlokasi di Kawasan Industri Millennium, Cikupa, Kabupaten Tangerang, Banten, merupakan perusahaan yang bergerak di bidang pengolahan dan distribusi air produksi untuk kawasan industri. PT XYZ bertanggung jawab atas pengelolaan, pengoperasian, dan pemeliharaan sistem penyediaan air bersih di kawasan industri. Perusahaan ini melayani tenant di Kawasan Industri Millennium dengan memastikan kontinuitas dan kualitas air yang diproduksi memenuhi standar yang telah ditetapkan pemerintah, khususnya untuk keperluan industri yang tercantum dalam regulasi teknis yang berlaku.



Gambar 1.1 Instalasi Pengelolaan air PT XYZ

Sebagai perusahaan yang memiliki fungsi serupa dengan Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM), PT XYZ bertanggung jawab atas pengelolaan dan distribusi air produksi, terutama bagi tenant di Kawasan Industri Millennium. Dalam operasionalnya, perusahaan menghadapi berbagai tantangan dalam memastikan kualitas air yang diproduksi tetap sesuai dengan standar yang telah ditetapkan. Salah satu tantangan utama yang dihadapi adalah fluktuasi kualitas air baku yang sering dipengaruhi oleh kondisi lingkungan dan aktivitas industri di sekitar kawasan. Pencemaran limbah industri serta perubahan musim yang

menyebabkan peningkatan partikel tersuspensi dalam air merupakan beberapa faktor yang berkontribusi terhadap ketidakstabilan kualitas air.

Keberagaman dan interaksi antarparameter kualitas air semakin memperumit proses pengendalian kualitas. Kekeruhan dan klorin air memiliki hubungan yang erat, di mana peningkatan partikel tersuspensi dapat menyebabkan perubahan klorin yang lebih pekat. Selain itu, klorin dan *Total Dissolved Solids* (TDS) juga memiliki keterkaitan, di mana kadar klorin yang terlalu rendah dapat meningkatkan pelarutan zat padat dalam air, sehingga menyebabkan nilai TDS lebih tinggi, sementara klorin yang lebih tinggi dapat menyebabkan pengendapan mineral tertentu. Oleh karena itu, fluktuasi pada satu parameter dapat berdampak pada parameter lainnya, yang berpotensi memengaruhi efektivitas proses pengolahan air secara keseluruhan.

Selain itu, kesulitan dalam pemantauan dan pengendalian kualitas air secara akurat juga menjadi permasalahan yang harus diatasi. Data hasil pengendalian kualitas air sering kali menunjukkan adanya *outliers*, yaitu nilai pengukuran yang jauh berbeda dari nilai pengukuran lainnya dalam rangkaian data. *Outliers* ini sering terjadi akibat fluktuasi mendadak dalam kualitas air yang dipengaruhi oleh faktor eksternal, seperti perubahan mendadak dalam kondisi lingkungan, pencemaran air, atau gangguan dalam proses pengolahan air (Montgomery D. C., 2020). Sebagai contoh, perubahan mendadak pada kualitas air, seperti pencemaran dari limbah industri atau limbah domestik, dapat meningkatkan konsentrasi bahan kimia berbahaya atau kekeruhan air secara tiba-tiba, sehingga menghasilkan nilai pengukuran yang ekstrem dibandingkan dengan nilai normal. Dalam pengolahan air, gangguan seperti kegagalan sistem filtrasi, perubahan suhu yang ekstrem, atau bencana alam seperti hujan lebat atau banjir, dapat menyebabkan lonjakan yang tidak wajar dalam parameter kualitas air seperti kekeruhan, klorin, dan TDS, yang dapat terdeteksi sebagai *outliers*. Untuk memastikan validitas data, PT XYZ mengirimkan hasil pengukuran secara rutin ke PDAM Kabupaten Tangerang untuk diuji lebih lanjut. Meskipun hal ini membantu dalam validasi kualitas, ketergantungan pada analisis eksternal dapat menghambat efisiensi dalam pengambilan keputusan terkait kualitas air.

Dalam upaya memastikan kualitas air yang optimal, PT XYZ mengadopsi beberapa metode dalam monitoring dan pengendalian kualitas air. Salah satu metode yang relevan adalah pengendalian kualitas statistik, yang memungkinkan pemantauan proses produksi secara lebih efektif dan mendeteksi penyimpangan kualitas pada tahap awal. Pengendalian kualitas statistik merupakan kegiatan yang dilakukan untuk memonitor proses produksi dan mendeteksi adanya proses yang tidak terkendali (*out of control*) yang disebabkan oleh beberapa faktor atau karaktersistik kualitas. Pengendalian kualitas statistik dapat dilakukan dengan bantuan tujuh alat yang disebut *seven tools quality control* yang salah satunya merupakan diagram kendali (Montgomery D. C., 2020). Dalam penelitian ini, akan diterapkan diagram kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV) untuk memantau variabilitas kualitas air, serta *Spatial Signed Rank MEWMA* (SSRM) untuk mendeteksi perubahan rata-rata proses.

Pemilihan metode *Spatial Signed Rank MEWMA* (SSRM) dibandingkan MEWMA adalah karena MEWMA tidak cukup *robust* terhadap data yang memiliki *outliers*. Keberadaan *outliers* dalam data dapat menyebabkan bias dalam deteksi perubahan proses jika menggunakan metode konvensional seperti diagram kendali multivariat standar (MEWMA) yang mengasumsikan observasi bersifat independen. Jika data mengandung *outliers*, metode ini

cenderung menghasilkan alarm palsu (*false alarms*) atau gagal mendeteksi penyimpangan kecil dalam kualitas air. Oleh karena itu, untuk mengatasi hal tersebut, transformasi *Spatial Signed Rank* diterapkan pada diagram kendali SSRM, yang lebih *robust* terhadap asumsi distribusi normal. Dengan cara ini, SSRM lebih efektif dalam mendeteksi perubahan kecil dalam kualitas air. Hal ini didukung oleh penelitian (Haanchumpol, Sudasna-na-Ayudhya, & Singhtaun, 2019) yang menunjukkan bahwa metode SSRM lebih sensitif dalam mendeteksi perubahan proses meskipun data mengandung *outliers* dan tidak terdistribusi normal.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk menerapkan diagram kendali MEWMV dan SSRM dalam memantau kualitas produksi air di PT XYZ. Dengan fokus pada beberapa parameter utama, seperti kekeruhan, klorin dan TDS. Diharapkan penelitian ini dapat memberikan kontribusi nyata sebagai rekomendasi bagi PT XYZ untuk meningkatkan kapabilitas dan stabilitas proses produksinya. Dengan demikian, perusahaan dapat memastikan bahwa air produksi memenuhi standar kualitas yang berlaku, sekaligus meningkatkan kepercayaan pelanggan terhadap layanan yang diberikan. Dengan pendekatan ini, PT XYZ dapat meningkatkan akurasi pemantauan kualitas air, mengurangi ketergantungan pada analisis eksternal, serta memastikan bahwa kualitas air yang diproduksi tetap konsisten dan aman untuk dikonsumsi oleh Kawasan Industri Millennium.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana penerapan dan hasil diagram kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV) dan *Spatial Signed Rank* MEWMA (SSRM) dalam memantau kualitas produksi air di PT XYZ?
2. Bagaimana tingkat kapabilitas dan stabilitas proses produksi air di PT XYZ setelah menggunakan metode diagram kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV) dan *Spatial Signed Rank* MEWMA (SSRM)?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini terbatas pada analisis pengendalian kualitas air di PT XYZ dengan fokus pada tiga parameter harian utama yaitu kekeruhan, klorin, dan *Total Dissolved Solids* (TDS). Data yang digunakan dalam penelitian ini berasal dari hasil pengukuran harian internal perusahaan. Sebagai bagian dari proses validasi, data tersebut juga dikirimkan secara rutin setiap bulan ke PDAM Kabupaten Tangerang untuk diuji lebih lanjut, guna memastikan akurasi dan kesesuaian dengan standar kualitas yang berlaku. Namun, pada penelitian ini hanya berfokus pada analisis data internal harian PT XYZ, tanpa mencakup hasil validasi lanjutan dari PDAM.

1.4 Tujuan

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah yang telah dikemukakan sebelumnya, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menganalisis penerapan diagram kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV) dan *Spatial Signed Rank* MEWMA (SSRM) dalam memantau kualitas produksi air di PT XYZ.

2. Mengevaluasi tingkat kapabilitas dan stabilitas proses produksi air di PT XYZ setelah penerapan metode pengendalian kualitas menggunakan diagram kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV) dan *Spatial Signed Rank MEWMA* (SSRM).

1.5 Manfaat

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi berbagai pihak sebagai berikut.

1. Penelitian ini memberikan kontribusi dalam pengembangan ilmu statistika, khususnya pada penerapan metode pengendalian kualitas multivariat menggunakan diagram kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV) dan *Spatial Signed Rank MEWMA* (SSRM). Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi untuk studi lebih lanjut terkait pengendalian kualitas produksi yang melibatkan data multivariat.
2. Penelitian ini dapat menjadi panduan bagi PT XYZ dalam meningkatkan efektivitas sistem pengendalian kualitas produksi air. Hasil evaluasi kapabilitas dan stabilitas proses dapat digunakan sebagai dasar untuk mengambil langkah perbaikan dalam memastikan kualitas produk sesuai dengan standar yang ditetapkan.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Hasil Penelitian Terdahulu

Hasil penelitian-penelitian terdahulu menunjukkan perbandingan beberapa metode yang digunakan serta hasil analisis dalam menganalisis menggunakan metode yang ada pada “Pengendalian Kualitas Statistik” yang disajikan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Hasil Penelitian Terdahulu

No.	Tahun	Peneliti	Hasil Penelitian
1	2014	Johana Diannita Jayanti & Wibawati	Penerapan diagram kendali MEWMA dan MEWMV untuk pengendalian kualitas air produksi di IPAM Ngagel I Surabaya. Diagram ini mampu mendeteksi pergeseran variabilitas dan mean proses, serta menghasilkan proses yang lebih terkendali pada fase II dibandingkan fase I.
2	2018	Adestya Ayu Maharani, Mustafid, dan Sudarno	Penerapan diagram kendali MEWMA dan MEWMV pada pengendalian kualitas air di PDAM Tirta Moedal Semarang. MEWMA digunakan untuk memantau rata-rata proses, sedangkan MEWMV untuk variabilitas. Hasil menunjukkan proses terkendali namun belum kapabel.
3	2019	Bina Astri Sitoresmi	Analisis kombinasi diagram kendali MEWMA untuk mendeteksi pergeseran variabilitas dan rata-rata proses secara simultan di PDAM Surabaya. Hasil penelitian menunjukkan proses pada Fase II terkendali secara statistik menggunakan kriteria ATS.
4	2024	Amirah Farah Zulvania	Penggunaan diagram kendali MEWMV dan MSEWMA untuk pengendalian kualitas air di PDAM Surya Sembada Surabaya. Hasil menunjukkan bahwa variabilitas proses terkendali pada Fase II dengan proses kapabel secara multivariat.
5	2024	Randra Prawira Perdana	Kombinasi metode MEWMV dan SSRM diterapkan untuk memantau kualitas air di PDAM Surabaya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kekeruhan dan sisa <i>chlor</i> menjadi penyebab utama ketidaksesuaian proses pada Fase I.

2.2 Landasan Teori

2.2.1 Pengendalian Kualitas Statistik

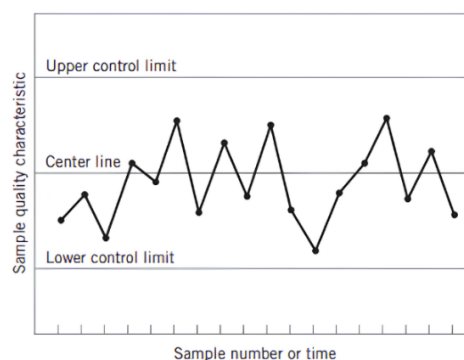
Pengendalian kualitas statistik atau *Statistical Quality Control* merupakan metode pengendalian kualitas dengan cara pendekatan secara statistika. Metode ini digunakan untuk memastikan setiap proses yang digunakan berjalan secara optimal, sehingga produk yang dikirimkan kepada konsumen memenuhi standar kualitas. Adapun beberapa manfaat yang didapatkan ketika melakukan pengendalian kualitas statistik adalah sebagai berikut (Antony, Balbontin, & Taner, 2000).

1. Memberikan informasi kepada operator kapan harus memperbaiki proses.
2. Membantu operator dalam membedakan penyebab umum dan penyebab khusus terjadinya variasi.
3. Menyediakan bahasa umum mengenai kinerja proses untuk beberapa pihak di suatu perusahaan.
4. Menghilangkan variasi karena penyebab khusus untuk mencapai konsistensi produk yang lebih baik.
5. Memberikan pemahaman yang lebih baik mengenai proses untuk suatu perusahaan.
6. Mengurangi waktu yang dihabiskan untuk menangani masalah kualitas secara signifikan.
7. Mengurangi biaya yang digunakan untuk produk cacat, pengerjaan ulang produk cacat, inspeksi ulang produk, dan lain-lain.
8. Meningkatkan komunikasi yang lebih baik dengan konsumen mengenai kemampuan produk dalam memenuhi spesifikasi pelanggan.

Terdapat tujuh alat utama dalam pengendalian kualitas yang memiliki peran penting dalam setiap bagiannya. Ketujuh alat tersebut terdiri dari Histogram atau stem and leaf plot, Checksheet, Diagram Pareto, Diagram Sebab-Akibat, Defect Concentration Diagram, Scatter Diagram, dan Diagram Kendali (Montgomery D. C., 2020).

2.2.2 Diagram Kendali

Diagram kendali merupakan sebuah grafik yang memberi gambaran perilaku pada suatu proses yang sedang berjalan untuk menentukan kapabilitas suatu proses. Diagram kendali juga dapat memberikan informasi yang berguna untuk memperbaiki proses. Diagram kendali merupakan alat yang efektif untuk mengurangi variabilitas dalam suatu proses sebanyak mungkin (Montgomery D. C., 2020). Tampilan grafik dari diagram kendali dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Diagram Kendali

Berdasarkan Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa terdapat garis horizontal di tengah merupakan garis yang mewakili rata-rata karakteristik kualitas sesuai dengan status dalam kendali. Dua garis horizontal lainnya merupakan *upper control limit* (UCL) dan *lower control limit* (LCL) yang masing-masing berfungsi sebagai Batas Kendali Atas (BKA) dan Batas Kendali Bawah (BKB). Batas kendali dalam diagram kendali dipilih jika proses telah terkendali atau *in control*, yang berarti semua sampel poin akan terletak di antara UCL dan LCL (Montgomery D. C., 2020). Namun, jika ada sampel poin yang terletak di luar UCL atau LCL (tidak di antara UCL dan LCL) maka dapat dikatakan proses tidak terkendali atau *out of control*.

2.2.3 Uji Dependensi

Uji dependensi dalam diagram kendali digunakan untuk menentukan jenis diagram kendali yang akan digunakan. Uji dependensi antar variabel diperlukan untuk melihat adanya hubungan yang signifikan antar variabel. Jika asumsi dependensi terpenuhi (antar variabel memiliki hubungan satu sama lain), maka akan digunakan diagram kendali multivariat. Sebaliknya, jika asumsi dependensi tidak terpenuhi (antar variabel tidak memiliki hubungan satu sama lain), maka akan digunakan diagram kendali univariat. Variabel dikatakan memiliki dependensi antara satu sama lain ketika matriks korelasi antar variabel tidak sama dengan matriks identitas (Johnson & Wichern, 2007). Adapun Hipotesis untuk uji *Bartlett Sericity* adalah sebagai berikut.

Hipotesis:

$H_0 : \rho = I$ (Tidak ada korelasi antar karakteristik kualitas)

$H_1 : \rho \neq I$ (Terdapat korelasi antar karakteristik kualitas)

Statistik Uji:

$$x_{hitung}^2 = -\left(n - 1 - \frac{2p+5}{6}\right) \ln|\rho| \quad (2.1)$$

di mana

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{2k} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

dengan nilai r_{jk}

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_k)^2}} \quad (2.3)$$

Keterangan:

p = Jumlah karakteristik kualitas

n = Jumlah pengamatan

$|\rho|$ = Nilai determinan matriks korelasi antar variabel karakteristik kualitas

r_{jk} = Nilai korelasi antara karakteristik ke j dengan karakteristik ke k

x_{ij} = Pengamatan ke i ($i = 1, 2, \dots, n$) karakteristik ke j ($j = 1, 2, \dots, m$)

x_{ik} = Pengamatan ke i ($i = 1, 2, \dots, n$) karakteristik ke k ($k = 1, 2, \dots, m$)

Daerah penolakan yang digunakan dalam uji *Bartlett Sphericity* yaitu tolak H_0 jika nilai $x_{hitung}^2 > x_{\alpha, 1/2p(p-1)}^2$, atau jika nilai $p - value < \alpha$. Oleh karena itu, jika hasilnya adalah tolak H_0 , maka matriks korelasi bukan merupakan matriks identitas atau dapat dikatakan bahwa

terdapat kolerasi minimal antar dua variabel. Jika hasilnya adalah gagal tolak H_0 , maka matriks korelasi merupakan matriks identitas atau dapat dikatakan tidak ada hubungan antar variable.

2.2.4 Uji Normal Multivariat

Uji normal multivariat merupakan uji yang dilakukan untuk mengetahui apakah data mengikuti distribusi normal secara multivariat atau tidak. Secara intuitif, normalitas multivariat berarti bahwa semua variabel memiliki distribusi normal secara sendiri-sendiri dan juga secara bersama-sama. Jadi, jika sebuah variabel normal secara multivariat, maka normal juga secara univariat. Namun, sebaliknya tidak selalu benar. Variabel yang normal secara univariat bisa saja tidak normal secara multivariat. (Hair, Black, Babin, & Anderson, 2005). Uji normalitas multivariat dilakukan menggunakan uji *Shapiro-Wilk* dengan hipotesis sebagai berikut.

H_0 : Data berdistribusi normal multivariat

H_1 : Data tidak berdistribusi normal multivariat

Statistik Uji:

$$W^* = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p W_k \quad (2.4)$$

dengan p adalah jumlah karakteristik kualitas,

$$W_k = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})} \quad (2.5)$$

untuk n bernilai genap maka nilai b adalah sebagai berikut dengan nilai $l = \frac{n}{2}$.

$$b = \sum_{i=1}^l a_{n-i+1} (x_{n-i+1} - x_{ij}) \quad (2.6)$$

sedangkan untuk n bernilai ganjil maka nilai b adalah sebagai berikut dengan nilai $l = \frac{(n-1)}{2}$.

$$b = \sum_{i=1}^l a_n (x_n - x_1) + \dots + a_{l+2} (x_{l+2} - x_l) \quad (2.7)$$

Di mana x_{l+1} adalah nilai median, dan nilai a_i merupakan koefisien dari tabel *normality tes*. W_k adalah statistik *Shapiro-Wilk* dari karakteristik kualitas ke $-k$ berdasarkan observasi ke $-i$ dari pengamatan dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Tolak H_0 apabila nilai $W^* < C_{\alpha;n;p}$ atau $p - value < \alpha$ di mana nilai $C_{\alpha;n;p}$ adalah nilai quantil statistik *Shapiro-Wilk*.

2.2.5 Diagram Kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moved Variance* (MEWMV)

Diagram kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* atau MEWMV merupakan diagram kendali yang digunakan untuk memonitor variabilitas proses pada kasus multivariat tanpa adanya asumsi tidak terjadi perubahan rata-rata proses selama periode pengendalian berlangsung (Huwang, Yeh, & Wu, 2007). Diagram kendali ini dapat mendeteksi terjadinya perubahan variabilitas proses secara sensitif menggunakan persamaan berikut.

$$V_n = \omega(x_n - z_n)(x_n - z_n)' + (1 - \omega)V_{n-1} \quad (2.8)$$

dengan:

ω : Pembobot *smoothing constant*, $0 < \omega < 1$

V_0 : $(x_1 - z_1)(x_1 - z_1)'$

z_n : Perubahan rata-rata proses pada waktu ke- n yang didefinisikan pada persamaan 2.9.

$$z_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)z_{n-1} \quad (2.9)$$

di mana $0 < \lambda \leq 1$ dan $\mathbf{z}_0 = 0$, yang berarti pada titik awal perhitungan, estimasi rata-rata proses belum ada, sehingga perhitungan dimulai dengan nilai awal nol tanpa pengaruh data sebelumnya. Untuk mendeteksi perubahan matriks kovarian, $\mathbf{z}_n$ didefinisikan sebagai estimasi rata-rata proses pada waktu ke- n yang diperoleh dari perhitungan dari *Multivariate Weighted Moving Average*. Statistik MEWMV pada pengamatan individu dapat dijelaskan pada persamaan 2.10.

$$tr(\mathbf{V}_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} \left(\sum_{k=1}^p x_{ik} x_{jk} \right) \quad (2.10)$$

dengan q_{ij} merupakan anggota dari matriks bujur sangkar $\mathbf{Q}$ yang dapat diperoleh dari persamaan 2.11.

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}) = (\mathbf{I}_n - \mathbf{M})' \mathbf{C} (\mathbf{I}_n - \mathbf{M}) \quad (2.11)$$

di mana $\mathbf{I}_n$ merupakan matriks identitas berukuran $n \times n$ dan $\mathbf{M}$ adalah matriks segitiga bawah berukuran $n \times n$ dengan λ sebagai pembobot yang telah ditetapkan.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda(1-\lambda) & \lambda & \vdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(1-\lambda)^{n-1} & \cdots & \lambda(1-\lambda) & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Sedangkan, matriks $\mathbf{C}$ merupakan matriks diagonal berukuran $n \times n$ dengan ω sebagai pembobotnya.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (1-\omega)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega(1-\omega)^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \omega(1-\omega) & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \omega \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Berdasarkan persamaan 2.8 dan 2.9 maka diperoleh persamaan berikut.

$$\mathbf{V}_n = \sum_{i=1}^n \omega(1-\omega)^{n-1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i)(\mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i)' + (1-\omega)\mathbf{V}_{n-1} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{z}_n = \sum_{i=1}^n \lambda(1-\lambda)^{n-i} \mathbf{x}_i \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i &= \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^i \lambda(1-\lambda)^{i-j} \mathbf{x}_j = (1-\lambda)\mathbf{x}_i - \lambda(1-\lambda)\mathbf{x}_{i-1} - \cdots - \lambda(1-\lambda)^{i-1} \mathbf{x}_1 \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.16)$$

lalu,

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} - \mathbf{Z}) &= [(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1)' (\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2)' \cdots (\mathbf{x}_n - \mathbf{z}_n)']' \\ &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda(1-\lambda) & 1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda(1-\lambda)^{n-1} & \cdots & -\lambda(1-\lambda) & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{M})\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.17)$$

di mana $\mathbf{I}_n$ adalah matriks identitas berukuran $n \times n$ dan $\mathbf{M}$ adalah matriks segitiga bawah berukuran $n \times n$ dengan λ sebagai elemennya yang ada pada persamaan 2.12. Nilai pembobot λ merupakan nilai bobot yang sudah ditetapkan pada perhitungan nilai ARL (*Average Run Length*) dengan simulasi Monte Carlo (Huwang, Yeh, & Wu, 2007). Sebagai hasilnya,

$$\mathbf{V}_n = (\mathbf{X} - \mathbf{Z})' \mathbf{C} (\mathbf{X} - \mathbf{Z}) = \mathbf{X} (\mathbf{I}_n - \mathbf{M})' \mathbf{C} (\mathbf{I}_n - \mathbf{M}) \mathbf{X} = \mathbf{X}' \mathbf{Q} \mathbf{X} \quad (2.18)$$

di mana nilai $\mathbf{Q}$ dapat diperoleh dari persamaan 2.11, sehingga $tr(\mathbf{V}_n) = tr(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}) = tr(\mathbf{Q}\mathbf{X}\mathbf{X}')$

$$\mathbf{X}\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n x_{1k}^2 & \sum_{k=1}^n x_{1k}x_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^n x_{1k}x_{nk} \\ \sum_{k=1}^n x_{2k}^2 & \sum_{k=1}^n x_{2k}^2 & \cdots & \sum_{k=1}^n x_{2k}x_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_{nk}x_{1k} & \sum_{k=1}^n x_{nk}x_{nk} & \cdots & \sum_{k=1}^n x_{nk}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{n2} & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{V}_n) &= \sum_{j=1}^n q_{1j} \left(\sum_{k=1}^n x_{jk}x_{1k} \right) + \sum_{j=1}^n q_{2j} \left(\sum_{k=1}^n x_{jk}x_{2k} \right) + \cdots + \sum_{j=1}^n q_{nj} \left(\sum_{k=1}^n x_{jk}x_{nk} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} \left(\sum_{k=1}^n x_{ik}x_{jk} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nilai variabel ke- j pada persamaan 2.19 tidak dapat didefinisikan pada kelompok data karena indeks j berjalan sesuai dengan matriks $\mathbf{Q}$. Matriks $\mathbf{Q}$ diperoleh berdasarkan persamaan 2.11 yang perhitungannya berubungan dengan nilai pembobot ω dan λ yang sudah ditetapkan. Nilai variabel ke- i dan ke- k pada kelompok data didefinisikan sesuai dengan perhitungan matriks pengamatan $\mathbf{X}\mathbf{X}'$. Menurut (Huwang, Yeh, & Wu, 2007), bila $n = 1$, nilai $tr(\mathbf{V}_n)$ akan sama seperti diagram kendali EWMV. Bila proses dalam keadaan terkontrol ($n > 1$), maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E(tr(\mathbf{V}_n)) &= \sum_{i=1}^n q_{ii} E \left(\sum_{k=1}^n x_{ik}^2 \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n q_{ij} E \left(\sum_{k=1}^n x_{ik}x_{jk} \right) = ptr(\mathbf{Q}) \\ Var(tr(\mathbf{V}_n)) &= Var \left[\sum_{i=1}^n q_{ii} \sum_{k=1}^n x_{ik}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i}^n q_{ij} \sum_{k=1}^n x_{ik}x_{jk} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n q_{ii}^2 Var \left(\sum_{k=1}^n x_{ik}^2 \right) + 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i}^n q_{ij}^2 Var \left(\sum_{k=1}^n x_{ik}x_{jk} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
&= 2p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ii}^2 + 4p \sum_{i=1}^n \sum_{j < i}^n q_{ij}^2 \\
&= 2p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}^2
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Untuk batas kendali yang digunakan pada diagram kendali MEWMV berdasarkan $tr(\mathbf{V}_n)$ ditunjukkan pada persamaan 2.22.

$$E(tr(\mathbf{V}_n)) \pm L\sqrt{Var(tr(\mathbf{V}_n))} = p \times tr(\mathbf{Q}) \pm L\sqrt{2p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}^2} \tag{2.22}$$

di mana L merupakan suatu konstanta yang bergantung pada nilai p , ω , dan λ yang nilainya didapatkan dari Tabel yang disediakan (Huwang, Yeh, & Wu, 2007) dan disajikan kembali pada Lampiran 9 dan 10.

2.2.6 Diagram Kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moved Average* (MEWMA)

Diagram kontrol *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* atau MEWMA digunakan untuk mendeteksi adanya perubahan pada target proses. Kelebihan dari diagram kontrol ini adalah *robust* terhadap asumsi distribusi normal, sehingga ketika asumsi normal multivariat tidak terpenuhi, maka diagram kontrol ini masih bisa digunakan. Diagram kontrol MEWMA merupakan generalisasi dari proses untuk data univariat EWMA dengan persamaan berikut.

$$\mathbf{z}_i = \lambda \mathbf{x}_i + (1 - \lambda) \mathbf{z}_{i-1} \tag{2.23}$$

Di mana $\mathbf{x}_i$ merupakan vektor rata-rata sampel dan λ adalah pembobot dengan nilai $0 < \lambda \leq 1$ dan $\mathbf{z}_0 = 0$.

Nilai pembobot yang digunakan pada diagram kontrol ini bisa menggunakan nilai yang sama ataupun beda untuk masing-masing variabelnya. Nilai pembobot yang digunakan adalah $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda$ pada kondisi umum, namun dapat digunakan pembobot yang berbeda pada kondisi tertentu. Titik pengamatan digambarkan pada diagram kontrol menggunakan rumus:

$$T_i^2 = \mathbf{z}_i' \Sigma_{\mathbf{z}_i}^{-1} \mathbf{z}_i \tag{2.24}$$

$$\Sigma_{\mathbf{z}_i} = \frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \Sigma \tag{2.25}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

matriks kovarian Σ analog dengan varians pada data univariat EWMA. Di mana p merupakan indeks variabel dan σ menyatakan nilai kovarian dari 2 variabel.

Data *out of control* ketika nilai T_i^2 lebih besar dari *Upper Control Limit* (UCL), didapatkan dari hasil simulasi yang disesuaikan dengan besarnya ARL hingga didapatkan nilai *Upper Control Limit* yang konvergen. *Lower Control Limit* (LCL) untuk diagram kontrol MEWMA sama dengan 0 karena nilai T_i^2 yang selalu positif sehingga *Lower Control Limit* (LCL) yang paling minimum dari suatu nilai yang positif adalah 0 (Montgomery D. C., 2020).

2.2.7 Transformasi dengan *Multivariat Spatial Signed Rank*

Langkah pertama sebelum membuat diagram kendali *Spatial Signed Rank* MEWMA (SSRM) adalah melakukan transformasi data menggunakan uji nonparametrik multivariat, yaitu Uji *Spatial Signed Rank*. *Spatial Signed Rank* (SSR) merupakan metode yang efektif untuk menganalisis data multivariat dan dapat diterapkan untuk mendeteksi data yang tidak normal, serta untuk mengendalikan kualitas dalam berbagai konteks, termasuk karakteristik kualitas air. Metode ini banyak digunakan dalam pengendalian kualitas karena sifatnya yang *robust* terhadap *outlier* dan tidak memerlukan asumsi distribusi tertentu. Transformasi ini penting karena variabel kualitas yang diamati saling berkorelasi dan tidak mengikuti distribusi normal multivariat.

Proses transformasi ini mengikuti prinsip-prinsip yang telah ditetapkan dalam model univariat, namun dengan penerapan yang lebih kompleks untuk data multivariat. Dalam konteks penelitian ini, istilah "*spatial*" tidak merujuk pada posisi geografis, tetapi lebih kepada pengamatan yang ditransformasi menjadi titik koordinat dalam ruang multivariat untuk setiap data. Transformasi ini memungkinkan pengendalian variasi data multivariat tanpa mempertimbangkan lokasi fisik pengamatan, dengan fokus pada hubungan antar variabel dalam ruang data tersebut. Dalam hal ini, $\mathbf{x}$ adalah vektor ke- j yang berisi data observasi untuk setiap karakteristik kualitas air, sedangkan $\mathbf{y}$ adalah vektor ke- i yang mewakili nilai variabel untuk setiap pengamatan. Tanda (+1 atau -1) dari setiap pengamatan, yang berupa vektor satu dimensi, mencerminkan arah dari titik pusat data.

Penerapan metode transformasi multivariat terdiri dari tiga tahapan, yaitu metode *spatial sign*, metode *spatial rank*, dan metode *spatial signed rank*. Fungsi empiris untuk masing-masing metode tersebut, dalam konteks univariat, didefinisikan dengan cara tertentu yang mendukung analisis data yang lebih kompleks.

$$U(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^{-1}\mathbf{x}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.27)$$

$$R(\mathbf{x}) = \text{avg}\{U(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\} \quad (2.28)$$

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{[R_x(\mathbf{x}) + R_{-x}(\mathbf{x})]}{2} \quad (2.29)$$

dengan, $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n)'$ menjadi kumpulan matriks $n \times p$ dengan nilai $i = 1, 2, \dots, n$ dan $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$ adalah jarak *Euclidean* dari vektor $\mathbf{x}$. Notasi "*avg*" memiliki makna rata-rata yang diambil dari semua pengamatan $i = 1, 2, \dots, n$. Pada konteks multivariat atau vektor dengan dimensi lebih dari satu $R(\mathbf{x}) = R_x(\mathbf{x})$ (Randles & Oja, 2010). Sehingga fungsi empiris pada metode *spatial rank* ditunjukkan pada persamaan yang dituliskan sebagai berikut.

$$R(\mathbf{x}) = \text{avg}\{U(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_h)\} \quad (2.30)$$

$$R(\mathbf{x}) = \text{avg}\{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_h\|^{-1}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_h)\} \quad (2.31)$$

di mana $\mathbf{x}_j$ merupakan vektor elemen kolom dari matriks $\mathbf{X}$. Sedangkan untuk $\mathbf{x}_h$ merupakan salah satu vektor elemen kolom dari matriks $\mathbf{X}$ juga di mana $h = 1, 2, \dots, p$, tetapi $j \neq h$. Fungsi empiris pada metode *spatial signed rank* yang mana pada vektor dengan dimensi lebih dari satu dapat dijelaskan pada persamaan dibawah ini.

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{[R_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + R_{-\mathbf{x}}(\mathbf{x})]}{2} \quad (2.32)$$

di mana,

$$R_{-\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \text{avg}\{||\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_h||^{-1}(\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_h)\} \quad (2.33)$$

maka persamaan spatial signed rank dalam konteks multivariat menjadi,

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{(\text{avg}\{||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_h||^{-1}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_h)\} + \text{avg}\{||\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_h||^{-1}(\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_h)\})}{2} \quad (2.34)$$

Multivariat spatial signed rank dari pengamatan yang sudah diubah ($Q(\mathbf{x}_i)$) adalah standardized spatial signed rank dengan menggunakan inner standardization.

2.2.8 Diagram Kendali *Spatial Signed Rank MEWMA* (SSRM)

Diagram kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) digunakan untuk mengidentifikasi perubahan dalam proses target. Keunggulan dari diagram kendali ini terletak pada ketahanannya terhadap asumsi distribusi normal, sehingga dapat tetap digunakan bahkan ketika asumsi normal multivariat tidak. Namun, seiring perkembangannya terdapat diagram kendali baru yang lebih efektif untuk monitoring data berdistribusi non-normal. Diagram kendali *Spatial Signed Rank MEWMA* (SSRM) merupakan perluasan atau perkembangan dari diagram kendali MEWMA yang secara efektif mampu mendeteksi pergeseran kecil tanpa terpaku pada bentuk distribusi tertentu dari data mean proses. Hal ini disebabkan oleh adanya proses standarisasi menggunakan *spatial signed rank*. SSRM efektif dalam mendeteksi *outlier* dalam data multivariat yang mungkin tidak terlihat dalam analisis univariat. Ini membantu dalam menjaga kualitas air dengan mengidentifikasi pengamatan yang keluar dari batas kendali yang ditetapkan. Transformasi ini tidak secara langsung menangani gejala autokorelasi temporal. Namun, dalam beberapa kasus, transformasi ini dapat mengurangi pengaruh fluktuasi data yang kecil atau *outlier*, sehingga gejala autokorelasi yang lemah dapat tampak berkurang. Nilai statistik SSRM dapat dijelaskan pada persamaan 2.35.

$$Q(\mathbf{y}_i) = \lambda Q(\mathbf{x}_i) + (1 - \lambda)Q(\mathbf{y}_{i-1}) \quad (2.35)$$

dengan,

i : 1, 2, 3, ..., n

n : Banyak pengamatan yang dilakukan

$Q(\mathbf{y}_0)$: Nilai dasar sebelum adanya perubahan yang terdeteksi (0, 0, ..., 0)'

$Q(\mathbf{x}_i)$: Hasil *spatial signed rank* dari $\mathbf{x}_i$

λ : Besar pembobot dengan nilai $0 < \lambda \leq 1$

Selanjutnya untuk perhitungan titik pengamatan pada diagram kendali SSRM adalah sebagai berikut.

$$Q_i^{SSRM} = Q(\mathbf{y}_i)' \Sigma_{Q(\mathbf{y}_i)}^{-1} Q(\mathbf{y}_i) \quad (2.36)$$

dengan matriks kovarians dari $Q(\mathbf{y}_i)$ adalah sebagai berikut.

$$\Sigma_{Q(\mathbf{y}_i)} = \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \Sigma_{Q(\mathbf{x}_i)} \quad (2.37)$$

di mana $\Sigma Q(\mathbf{x}_i)$ adalah matriks kovarians dari $Q(\mathbf{x}_i)$. Apabila nilai $Q_i^{SSRM} > BKA$ maka menandakan adanya sinyal *out of control* dengan nilai BKB SSRM adalah 0. Nilai Batas Kendali Atas (BKA) untuk diagram kendali SSRM diperoleh dengan simulasi distribusi *Monte Carlo*. Proses ini dimulai dengan membangkitkan data acak yang mengikuti distribusi tertentu (misalnya distribusi gamma) dalam kondisi *in-control*. Selanjutnya, statistik kendali SSRM dihitung berdasarkan *Spatial Signed Rank* (SSR) dengan mempertimbangkan matriks kovarians $\Sigma Q(\mathbf{x}_i)$. BKA ditentukan sebagai nilai yang membuat probabilitas menghasilkan $P(Q_i^{SSRM} > BKA)$ menghasilkan $ARL_0 \approx 370$, yang dihitung berdasarkan jumlah sinyal *out of control* dalam simulasi. Penentuan nilai Batas Kendali Atas (BKA) diperoleh dari Tabel yang diperoleh dari (Haanchumpol, Sudasna-na-Ayudhya, & Singhtaun, 2019) dan disajikan kembali dalam Lampiran 12 dan 13.

2.2.9 Analisis Kapabilitas Proses

Analisis kapabilitas proses adalah suatu analisis variabilitas proses relatif berdasarkan persyaratan atau spesifikasi produk serta dapat membantu mengembangkan produksi dalam menghilangkan atau mengurangi variabilitas yang terjadi. Analisis kapabilitas proses juga dapat dikatakan bagaimana diagram kendali dan teknik statistik lainnya dapat digunakan untuk memperkirakan kemampuan alami suatu proses dan untuk menentukan bagaimana kinerjanya relatif terhadap suatu spesifikasi produk (Montgomery D. C., 2020). Meskipun suatu proses telah dikontrol secara statistik, belum tentu setiap produk yang dihasilkan memenuhi standar spesifikasi yang ditetapkan oleh konsumen atau perusahaan (Bass, 2007). Dalam analisis kapabilitas proses, terdapat dua asumsi yang harus terpenuhi, yakni asumsi tentang distribusi normal dan keadaan terkendali secara statistik. Sebuah proses dianggap mampu (*capable*) jika telah terkendali secara statistik, sesuai dengan batasan spesifikasi, dan menunjukkan tingkat presisi dan akurasi yang tinggi. Untuk mendeteksi hal ini, dapat digunakan indeks kapabilitas proses berupa C_p , C_{pk} , P_p , dan P_{pk} . Terdapat tiga keadaan yang ditentukan dari hasil perhitungan yang didapat yaitu sebagai berikut

1. Apabila nilai $C_{pk} < 1$, maka proses memiliki tingkat akurasi dan presisi yang rendah sehingga proses dikatakan tidak kapabel dan terdapat cukup banyak produk yang tidak sesuai dengan spesifikasi.
2. Apabila nilai $C_{pk} = 1$, maka proses hanya memenuhi batas spesifikasi. Terjadinya peningkatan sedikit pada variabilitas proses akan berdampak pada produk yang kualitasnya berada di luar batas spesifikasi.
3. Apabila nilai $C_{pk} > 1$, maka proses memiliki tingkat akurasi dan presisi yang tinggi sehingga proses dikatakan kapabel dengan produk yang berada di luar spesifikasi relatif sedikit.

Akan tetapi, (Chen & Pearn, 1997) mengusulkan indeks baru untuk menangani data yang tidak berdistribusi normal, yaitu indeks C_{Np} dan C_{Npk} . Indeks C_{Np} dan C_{Npk} berbeda dengan indeks dasar C_p dan C_{pk} karena mengganti mean proses (μ) dengan median proses (M) dan standar deviasi proses (σ) dengan $(F_{99,865} - F_{0,135})/6$ di mana F_α adalah nilai persentil ke- α . Nilai α yang dipakai pada persentil adalah nilai probabilitas dari area kurva distribusi normal di luar $\pm 3\sigma$, yaitu sekitar 0,27%. Selain itu, indeks ini juga dianggap lebih tepat daripada indeks dasar dalam mengukur kapabilitas proses. Hal ini karena nilai median dan persentil *robust* terhadap nilai ekstrim dan sesuai untuk data dengan distribusi non-normal yang memiliki kurva

tidak simetris. Perhitungan Indeks C_{Np} dan C_{Npk} dapat dilihat pada persamaan 2.38 dan persamaan 2.39.

$$C_{Np} = \frac{USL - LSL}{F_{99,865} - F_{0,135}} \quad (2.38)$$

$$C_{Npk} = \min \left\{ \frac{USL - M}{\left[\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{2} \right]}, \frac{M - LSL}{\left[\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{2} \right]} \right\} \quad (2.39)$$

Di mana (USL) merupakan *Upper Specification Limit* atau BKA dan (LSL) merupakan *Lower Specification Limit* atau BKB. Jika nilai indeks C_{Npk} bernilai lebih dari satu, hal itu mengindikasikan bahwa proses telah memadai dalam memenuhi batas spesifikasi yang telah ditetapkan oleh perusahaan. Selanjutnya, untuk mengukur kemampuan proses secara multivariat, dapat dilakukan dengan menggunakan pendekatan metode rata-rata pembobotan pada persamaan 2.40 dan persamaan 2.41.

$$MC_{Np} = \sum_{j=1}^p W_j \times C_{Np}(x_j) \quad (2.40)$$

$$MC_{Npk} = \sum_{j=1}^m W_j \times C_{Npk}(x_j) \quad (2.41)$$

Dengan W_j sebagai faktor pembobot untuk karakteristik kualitas yang telah ditentukan oleh perusahaan, dengan catatan bahwa jika perusahaan tidak memiliki pembobot tersebut, nilai pembobot dianggap setara.

2.2.10 Pengolahan Kualitas Air

PT XYZ merupakan perusahaan pengelola air bersih yang berkomitmen tinggi untuk menyediakan air yang aman dan layak konsumsi bagi tenant-tenant industri di Kawasan Industri Milenium Tigakarsa, Tangerang. Proses produksi air dimulai dengan pengambilan air baku dari sumber-sumber alami seperti danau, mata air, dan Sungai Cimanceri, yang kemudian dialirkan ke Instalasi Pengolahan Air (IPA) milik perusahaan untuk menjalani serangkaian tahapan penjernihan yang efektif dan efisien. Di IPA, air baku pertama-tama menjalani proses koagulasi dan flokulasi, di mana bahan kimia ditambahkan untuk mengikat partikel-partikel kecil menjadi gumpalan besar yang dapat dipisahkan lebih mudah. Selanjutnya, air dialirkan ke dalam bak sedimentasi, di mana flok yang terbentuk mengendap ke dasar bak, sementara air jernih tetap berada di bagian atas. Proses ini efektif dalam menghilangkan partikel-partikel tersuspensi dan memudahkan tahap penyaringan berikutnya. Setelah tahap sedimentasi, air kemudian melalui tahap filtrasi, menggunakan berbagai media filter seperti pasir silika untuk menghilangkan kotoran yang masih tersisa, serta mengurangi bau dan rasa yang tidak sedap. Tahap berikutnya adalah disinfeksi, di mana klorin digunakan untuk membunuh mikroorganisme patogen berbahaya seperti bakteri, virus, dan protozoa, memastikan air bebas dari kontaminasi.

Sebagai bagian dari proses pengolahan, PT XYZ secara rutin melakukan pengolahan lanjutan untuk menyesuaikan kualitas air dengan standar yang diterapkan, yang meliputi penghilangan bau, penyesuaian rasa, dan penghilangan kontaminan lainnya. Setelah melalui

semua tahap ini, air bersih disimpan dalam tangki reservoir dan kemudian didistribusikan ke tenant-tenant industri di kawasan Tigakarsa melalui jaringan perpipaan yang terawat dengan baik. PT XYZ secara berkala memantau kualitas air yang disalurkan dan mengirimkan sampel air ke PDAM Kabupaten Tangerang untuk diuji kesesuaiannya dengan spesifikasi standar air bersih yang berlaku. Dengan sistem produksi dan pengendalian mutu yang berkelanjutan, perusahaan ini berperan strategis dalam mendukung kelancaran operasional industri yang sangat bergantung pada ketersediaan air bersih dengan kualitas yang stabil dan terjaga.

BAB 3 METODOLOGI

3.1 Sumber Data

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder yang didapatkan dari bagian pengendalian kualitas produksi air di PT XYZ. Sampel yang diuji berupa air produksi yang telah melewati proses pengolahan air dan tertampung di reservoir utama sebelum didistribusikan ke tenant di kawasan industri. Pengambilan sampel dilakukan setiap hari untuk memastikan bahwa parameter kualitas air tetap dalam batas standar yang telah ditetapkan. Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan hasil pengujian laboratorium internal PT XYZ yang nantinya akan dikirimkan secara rutin ke PDAM Kabupaten Tangerang untuk analisis lebih lanjut. Penelitian ini dibagi menjadi dua fase, yaitu Fase I (1 Maret 2024 – 31 Mei 2024) dan Fase II (1 Juni 2024 – 31 Juli 2024). Pemilihan periode ini didasarkan pada stabilitas suhu udara di Kabupaten Tangerang. Pemilihan dengan suhu yang relatif stabil bertujuan untuk meminimalkan pengaruh fluktuasi cuaca terhadap kualitas air. Adapun karakteristik kualitas air yang digunakan pada penelitian ini yaitu kekeruhan, klorin, dan *Total Dissolved Solids* (TDS).

3.2 Variabel Penelitian

Pada Tabel 3.1, disajikan penjelasan mengenai karakteristik kualitas yang digunakan dalam penelitian ini.

Tabel 3.1 Variabel Penelitian

No.	Karakteristik Kualitas	Keterangan	Satuan Pengukuran	Spesifikasi
1	X_1	Kekeruhan	NTU	<1
2	X_2	Klorin	mg/L	0,6-1,20
3	X_3	TDS	mg/L	90-105

Berikut adalah penjelasan lebih lanjut mengenai setiap variable yang terdapat dalam sel tabel:

1. Kekeruhan (*Turbidity*)

Kekeruhan merupakan indikator tingkat kejernihan air yang ditentukan berdasarkan jumlah partikel tersuspensi yang menyebarkan cahaya di dalam air. Semakin tinggi nilai kekeruhan, semakin banyak partikel seperti lumpur, sedimen, dan bahan organik yang terkandung dalam air. Kekeruhan yang tinggi dapat menandakan adanya pencemaran atau proses penyaringan yang tidak optimal. Dalam penelitian ini, standar kualitas air yang digunakan mengacu pada batas maksimum kekeruhan sebesar 1 NTU (*Nephelometric Turbidity Unit*) agar air tetap jernih dan aman digunakan.

2. Klorin (*Chlorine*)

Klorin adalah unsur kimia yang umum digunakan sebagai disinfektan dalam proses pengolahan air. Peran utamanya adalah untuk membunuh mikroorganisme patogen seperti bakteri, virus, dan parasit yang dapat membahayakan kesehatan manusia. Meskipun efektif dalam desinfeksi, kadar klorin yang terlalu tinggi dapat memengaruhi rasa dan bau air, sehingga perlu dikendalikan sesuai standar yang berlaku.

3. *Total Dissolved Solids* (TDS)

Total Dissolved Solids (TDS) mengacu pada jumlah total zat padat terlarut dalam air, yang meliputi garam anorganik seperti kalsium, magnesium, natrium, dan klorida, serta senyawa organik lainnya. Nilai TDS yang tinggi dapat memengaruhi cita rasa air, menurunkan efisiensi proses industri, serta meningkatkan risiko korosi atau

pembentukan kerak pada sistem perpipaan. Oleh karena itu, batas maksimum TDS yang digunakan dalam penelitian ini adalah 105 mg/L, sesuai dengan standar kualitas air yang berlaku.

3.3 Struktur Data

Pada penelitian ini, setelah memahami karakteristik variabel, langkah selanjutnya adalah melihat bagaimana data tersebut disusun dan dianalisis. Struktur data penelitian menjadi aspek penting dalam menentukan metode pengolahan dan analisis yang tepat. Struktur data yang digunakan dalam penelitian ini disusun berdasarkan sampel yang dikumpulkan serta karakteristik kualitas air yang diukur. Setiap sampel memiliki nilai untuk masing-masing variabel, yang mencerminkan parameter kualitas air seperti kekeruhan, klorin, dan *Total Dissolved Solids* (TDS). Tabel 3.2 menyajikan susunan data berdasarkan observasi individual, yang mencerminkan format data yang akan digunakan dalam penerapan diagram kendali multivariat. Dengan memahami struktur ini, proses analisis dapat dilakukan secara sistematis untuk mengidentifikasi pola dalam kualitas air yang dianalisis.

Tabel 3.2 Struktur Data Penelitian

Sampel ke- i	Karakteristik Kualitas		
	X_1	X_2	X_3
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}
3	X_{31}	X_{32}	X_{33}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	X_{n1}	X_{n2}	X_{n3}

Pada Tabel 3.2 terdapat kolom sampel ke- i , di mana mengacu pada setiap observasi atau pengukuran yang dilakukan pada hari tertentu. Karena data diambil setiap hari, maka i menunjukkan urutan sampel dari hari pertama hingga hari ke- n , di mana n adalah jumlah total hari pengukuran dalam periode penelitian. Setiap sampel ini diukur untuk berbagai variabel, yang disimbolkan sebagai x_1, x_2 , dan x_3 . Kolom variabel x_1, x_2 , dan x_3 menyajikan data yang dikumpulkan untuk setiap variabel pada setiap sampel. Setiap nilai variabel, misalnya x_{11} atau x_{22} , mewakili karakteristik kualitas air yang diukur untuk sampel ke- i pada variabel yang bersangkutan. Sedangkan variabel j merujuk pada indeks variabel kualitas air yang diamati.

Ketika asumsi normal multivariat tidak terpenuhi, data ditransformasi menggunakan transformasi *spatial signed rank*. Data yang ditransformasi berasal dari data *in control* yang dihasilkan dari pengendalian kualitas variabilitas menggunakan diagram kendali MEWMV. Struktur data yang telah ditransformasi dapat dilihat pada Tabel 3.3.

Tabel 3.3 Struktur Data Transformasi *Spatial Signed Rank*

Sampel ke- i	X_1	X_2	X_3
1	$Q(X_{11})$	$Q(X_{12})$	$Q(X_{13})$
2	$Q(X_{21})$	$Q(X_{22})$	$Q(X_{23})$
3	$Q(X_{31})$	$Q(X_{32})$	$Q(X_{33})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$Q(X_{n1})$	$Q(X_{n2})$	$Q(X_{n3})$

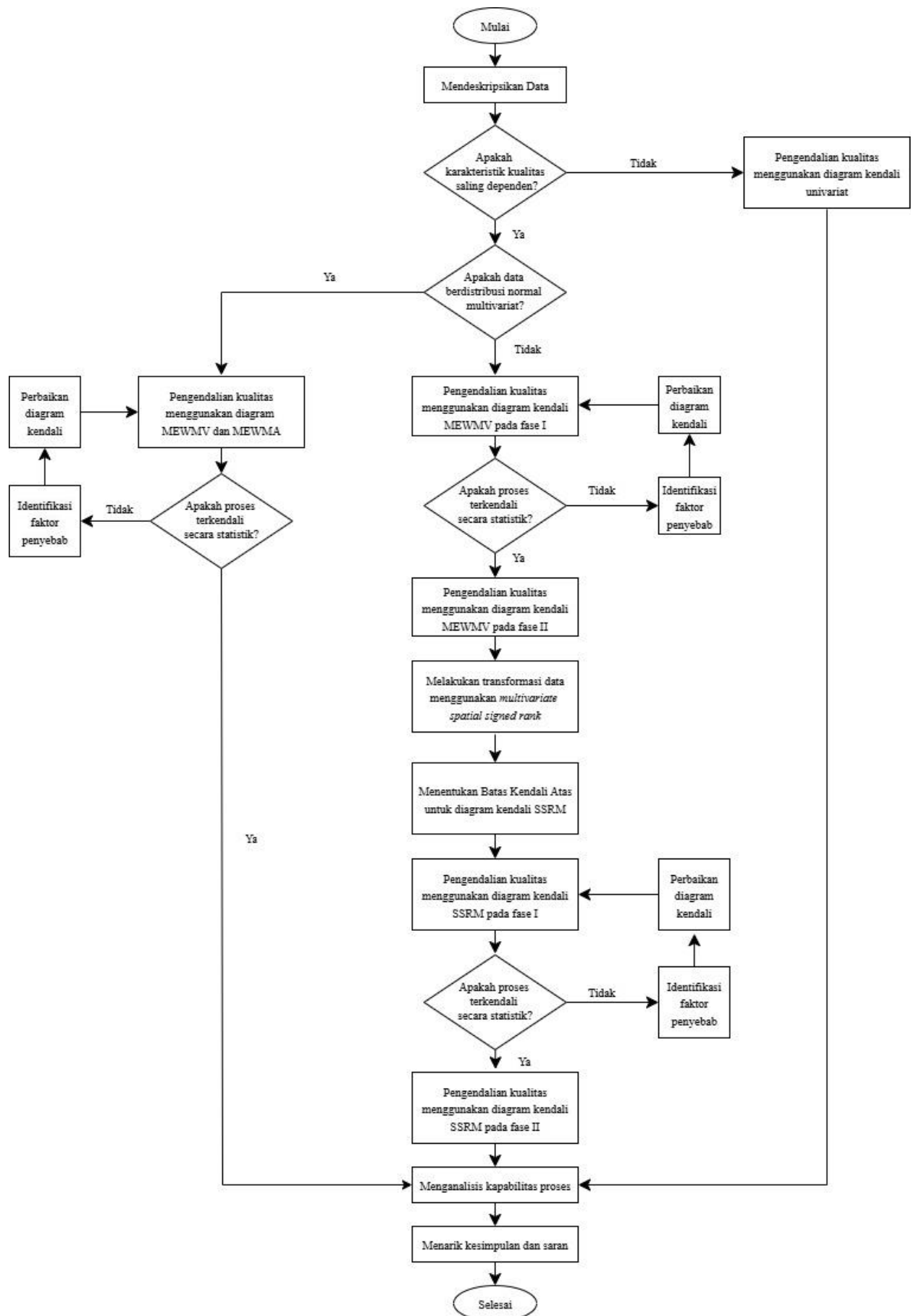
3.4 Langkah Analisis

Berikut adalah urutan pelaksanaan penelitian dengan metode diagram kendali MEWMV dan SSRM untuk pengendalian kualitas produksi air di PT XYZ.

1. Mengidentifikasi permasalahan utama dalam pengendalian kualitas produksi air di PT XYZ.
2. Mengumpulkan data parameter kualitas air (kekeruhan, klorin, TDS) dari hasil pengukuran di PT XYZ.
3. Mendeskripsikan data untuk memahami karakteristik awal dari parameter kualitas air.
4. Melakukan pengujian dependensi antar parameter kualitas air menggunakan *Bartlett's Test of Sphericity* berdasarkan persamaan (2.1) untuk memastikan adanya hubungan antarparameter yang relevan dengan analisis multivariat.
5. Menguji apakah parameter kualitas air memenuhi asumsi normalitas multivariat menggunakan *Shapiro-Wilk Test* berdasarkan persamaan (2.4).
 - a. Jika asumsi terpenuhi, analisis dilakukan dengan diagram kendali MEWMA dan MEWMV.
 - b. Jika asumsi tidak terpenuhi, data ditransformasi menggunakan metode *spatial signed rank* sebelum dilanjutkan ke analisis SSRM.
6. Menentukan nilai BKA untuk diagram kendali SSRM berdasarkan nilai ARL_0 yang mendekati nilai 370.
7. Membuat diagram kendali MEWMV untuk mendeteksi pergeseran variabilitas proses.
 - a. Membuat vector $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p)'$
 - b. Menghitung matriks $\mathbf{Z}_n$ berdasarkan persamaan (2.9) dan nilai $\mathbf{V}_n$ berdasarkan persamaan (2.8).
 - c. Menentukan nilai $tr(\mathbf{V}_n)$ berdasarkan persamaan (2.10).
 - d. Menghitung nilai BKA dan BKB berdasarkan persamaan (2.22).
 - e. Membuat plot $tr(\mathbf{V}_n)$ dengan kombinasi pembobot ω dan λ yang telah ditentukan
 - f. Membuat diagram kendali MEWMV untuk data fase I berdasarkan persamaan.
 - g. Mengeksplorasi berbagai nilai ω dan λ yang optimal berdasarkan jumlah titik yang berada di luar batas kendali (*out of control*) terbanyak.
8. Membuat diagram SSRM untuk mendeteksi pergeseran rata-rata proses.
 - a. Melakukan transformasi data awal karakteristik kualitas air hasil produksi menggunakan *multivariate spatial signed rank* berdasarkan persamaan (2.27), (2.28), dan (2.29).
 - b. Menghitung vektor $Q(\mathbf{y}_i)$ berdasarkan persamaan (2.35).
 - c. Menghitung nilai Q_i^{SSRM} pada setiap pengamatan berdasarkan persamaan (2.36).
 - d. Membuat plot Q_i^{SSRM} berdasarkan setiap λ dengan BKA dari ARL_0 yang telah didapatkan dan $BKB = 0$.
 - e. Mencari titik maksimum dari setiap Q_i^{SSRM} .
 - f. Melakukan pemilihan nilai λ yang optimum berdasarkan jumlah titik yang berada di luar batas kendali (*out of control*) paling besar.
 - g. Diagram kendali SSRM yang terpilih adalah diagram kendali dengan λ optimum
9. Mengukur kapabilitas proses menggunakan indeks kapabilitas multivariat.

10. Menyusun kesimpulan dari hasil analisis, seperti efektivitas diagram kendali MEWMV dan SSRM dalam pengendalian kualitas air.

Dengan mengikuti langkah-langkah ini, penelitian akan dapat memantau dan mengendalikan variabilitas dalam produksi air yang dihasilkan oleh PT XYZ.



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini menyajikan hasil analisis pengendalian kualitas air produksi PT XYZ, dengan penekanan pada dua komponen utama. Aspek pertama adalah analisis variabilitas proses yang dilakukan menggunakan diagram kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV). Aspek kedua adalah identifikasi pergeseran rata-rata proses melalui pendekatan diagram kendali non-parametrik yang mengintegrasikan metode transformasi *Spatial Signed Rank* (SSR) dengan diagram kendali MEWMA, sehingga membentuk metode yang dikenal SSRM. Penelitian ini memfokuskan pengamatan pada tiga variabel kualitas air, yaitu kekeruhan air (*Turbidity*), konsentrasi klorin (*Chlorine*), dan TDS (*Total Dissolved Solids*).

4.1 Analisis Karakteristik Data Kualitas Air

Analisis terhadap karakteristik data dilakukan sebagai tahap awal untuk mengevaluasi apakah kualitas air hasil produksi PT XYZ telah memenuhi standar atau spesifikasi yang telah ditetapkan oleh instansi berwenang. Data dianalisis menggunakan metode statistika deskriptif guna memberikan gambaran menyeluruh terkait pola dan distribusi dari masing-masing variabel kualitas air. Hasil analisis deskriptif ini dapat dilihat pada Tabel 4.1, yang merangkum statistik dasar dari karakteristik kualitas air pada fase pengamatan pertama.

Tabel 4.1 Karakteristik Data Fase I

Karakteristik Kualitas	Rata-rata	Varians	Min.	Maks.	Spesifikasi
Kekeruhan	0,633	0,001	0,530	0,730	<1
Klorin	1,149	0,005	0,956	1,352	0,6-1,2
TDS	102,302	0,642	100,000	103,620	90-105

Pada fase pertama, berdasarkan Tabel 4.1 menunjukkan rata-rata untuk ketiga karakteristik kualitas air yang diamati, yakni kekeruhan (*turbidity*), klorin (*chlorine*), dan TDS (*Total Dissolved Solids*) secara umum berada dalam batas spesifikasi yang ditetapkan oleh standar kualitas air. Nilai maksimum untuk kekeruhan dan TDS tetap berada dalam rentang spesifikasi yang diizinkan, masing-masing <1 NTU dan <105 mg/L. Namun, terdapat satu karakteristik kualitas air, yaitu klorin (*chlorine*) yang memiliki nilai maksimum sebesar 1,352 mg/L, yang melebihi batas atas yang diizinkan (1,2 mg/L). Dari sisi variabilitas, ketiga parameter menunjukkan nilai varians yang rendah, yang mengindikasikan bahwa data relatif homogen dan tidak menunjukkan fluktuasi yang ekstrem selama periode pengamatan pada fase ini.

Tabel 4.2 Karakteristik Data Fase II

Karakteristik Kualitas	Rata-rata	Varians	Min.	Maks.	Spesifikasi
Kekeruhan	0,637	0,001	0,597	0,682	<1
Klorin	0,998	0,008	0,810	1,193	0,6-1,2
TDS	102,998	0,046	102,060	103,343	90-105

Pada fase pengamatan kedua, data yang disajikan dalam Tabel 4.2 mengindikasikan adanya konsistensi yang cukup baik terhadap karakteristik kualitas air. Nilai rata-rata dari ketiga karakteristik kualitas air kembali menunjukkan bahwa proses produksi air berada dalam kondisi yang terkendali dan sesuai dengan batasan spesifikasi yang telah ditetapkan. Rentang nilai minimum hingga maksimum untuk masing-masing parameter juga tetap berada dalam

ambang toleransi yang ditentukan oleh standar kualitas air. Hal ini menunjukkan bahwa tidak terdapat penyimpangan yang signifikan selama periode pengamatan fase kedua. Selain itu, nilai varians yang relatif kecil dibandingkan nilai rata-rata untuk setiap variabel memperkuat indikasi bahwa data pada fase ini bersifat homogen, serta mencerminkan tingkat kestabilan proses produksi air dalam jangka waktu tertentu.

4.2 Pengujian Dependensi antar Karakteristik Kualitas

Pada penerapan pengendalian kualitas statistik menggunakan diagram kendali multivariat, diperlukan uji dependensi untuk memastikan apakah terdapat hubungan yang signifikan antar karakteristik kualitas yang diamati. Dalam penelitian ini, digunakan uji *Bartlett* sebagai metode untuk menguji asumsi ketergantungan antar karakteristik kualitas air. Hasil dari uji tersebut disajikan pada Tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.3 Hasil Uji Dependensi		
<i>Chi-Square</i>	<i>df</i>	<i>P-Value</i>
10,494	3	0,015

Berdasarkan hasil uji, dengan $\alpha = 5\%$ dan $p = 3$, diperoleh nilai statistik uji *chi-square* sebesar 10,494 dan *p-value* sebesar 0,015. Apabila nilai x_{hitung}^2 dibandingkan dengan nilai x_{tabel}^2 sebesar 7,815, maka diperoleh keputusan hipotesis nol (H_0) ditolak, karena $x_{hitung}^2 > x_{tabel}^2$. Selain itu, karena nilai *p-value* yang diperoleh jauh lebih kecil dari α ($0,000 < 0,05$). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa terdapat hubungan yang signifikan antara ketiga karakteristik kualitas air yang diuji, yaitu kekeruhan, klorin, dan TDS.

4.3 Pengujian Distribusi Normal Multivariat

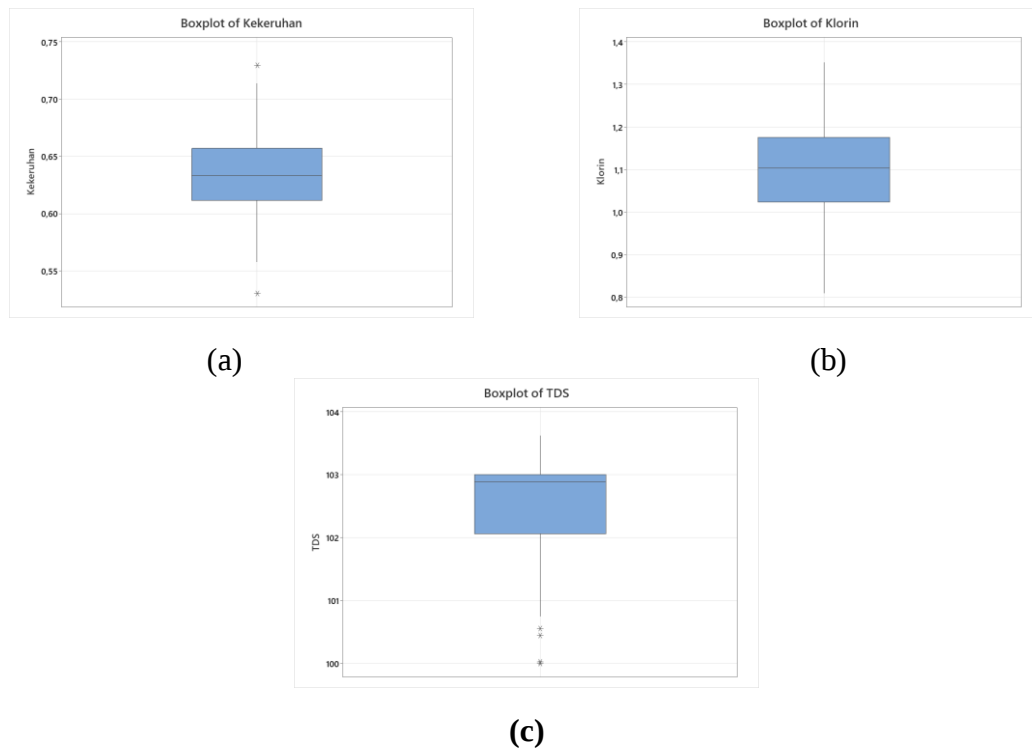
Pengujian terhadap distribusi normal multivariat dilakukan terhadap ketiga karakteristik kualitas air produksi, yaitu kekeruhan, klorin, dan TDS. Pengujian ini menggunakan metode *Shapiro-Wilk* dengan $\alpha = 5\%$ dan diperoleh hasil seperti pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4 Hasil Uji Distribusi Normal Multivariat	
<i>W*</i>	<i>P-value</i>
0,924	0,000

Berdasarkan hasil yang ditampilkan pada Tabel 4.4, perbandingan antara nilai *P-value* dengan nilai tingkat signifikansi α menunjukkan bahwa keputusan hipotesis nol (H_0) ditolak. Hal ini disebabkan oleh nilai *P-value* yang diperoleh (0,000) lebih kecil dari α (0,05). Selain itu, berdasarkan perbandingan antara nilai *W** dan $C_{\alpha;n;p}$, dimana $0,924 < 0,979$, sehingga keputusan hipotesis nol (H_0) ditolak. Hal ini mengindikasikan bahwa data tidak memenuhi asumsi distribusi normal multivariat. Untuk mengatasi pelanggaran asumsi tersebut, penelitian ini menggunakan pendekatan transformasi non-parametrik dengan menerapkan metode *Spatial Signed Rank*, sehingga model analisis tetap valid meskipun distribusi data tidak normal.

4.4 Pemeriksaan Outlier Karakteristik Kualitas Air

Untuk mengetahui pola distribusi awal dan mendeteksi keberadaan *outlier* pada masing-masing variabel kualitas air, dilakukan visualisasi menggunakan boxplot. Visualisasi ini bertujuan memberikan gambaran awal mengenai sebaran data sebelum dilakukan analisis lanjutan menggunakan diagram kendali.



Gambar 4.1 Boxplot Data Karakteristik Kualitas Air
(a) Kekeruhan, (b) Klorin, (c) TDS

Berdasarkan Gambar 4.1 hasil boxplot untuk data karakteristik kualitas air menunjukkan adanya *outlier* pada (a) kekeruhan dan (c) TDS. Pada kekeruhan, terdapat beberapa nilai yang berada jauh di luar batas normal, yang dapat memengaruhi kestabilan analisis. Begitu pula dengan TDS, yang juga menunjukkan adanya data yang jauh dari distribusi umum. Keberadaan *outlier* ini berpotensi mengganggu kesimpulan yang diambil dari data tersebut, sehingga diperlukan pendekatan metode yang lebih *robust* untuk memantau proses kualitas air tersebut. Oleh karena itu, dalam penelitian ini, digunakan diagram kendali SSRM (*Spatial Signed Rank Method*) dibandingkan dengan diagram kendali MEWMA (*Moving Average Exponentially Weighted Method*), karena SSRM lebih tahan terhadap pengaruh *outlier* (Haanchumpol, Sudasna-na-Ayudhya, & Singhtaun, 2019). Dengan demikian, analisis yang dilakukan tetap stabil dan dapat diandalkan meskipun terdapat nilai ekstrem dalam dataset.

4.5 Pengendalian Kualitas Variabilitas Air dengan Diagram Kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV)

Setelah dilakukan pengujian terhadap asumsi distribusi normal dan diketahui bahwa data tidak memenuhi asumsi normalitas multivariat, maka tahap selanjutnya dalam proses analisis adalah melakukan pengendalian kualitas terhadap variabilitas proses. Dalam hal ini, digunakan diagram kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* atau MEWMV. Diagram kendali MEWMV dipilih karena memiliki karakteristik yang *robust* terhadap pelanggaran asumsi distribusi normal multivariat, sehingga tetap dapat digunakan meskipun data tidak terdistribusi normal. Kelebihan ini menjadikan MEWMV sebagai alternatif yang andal dalam kondisi data nyata yang sering kali tidak memenuhi asumsi distribusi teoretis.

Dalam implementasinya, diagram MEWMV menggunakan nilai pembobotan berdasarkan $tr(V_n)$, yaitu jejak (*trace*) dari matriks kovarians bergerak, sebagai titik pengamatan utama untuk mengevaluasi variabilitas proses. Titik-titik yang diplotkan dalam

diagram tersebut merupakan nilai hasil pembobotan yang mencerminkan dinamika variabilitas dalam proses produksi dari waktu ke waktu. Nilai $tr(V_n)$ ini berfungsi sebagai indikator multivariat terhadap fluktuasi proses yang terjadi, dan menjadi dasar dalam menentukan apakah proses masih berada dalam batas kendali statistik atau telah mengalami penyimpangan.

4.5.1 Pengendalian Kualitas Variabilitas Air dengan Diagram Kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV) Fase I

Pada subbab ini, tahapan awal dalam penerapan diagram kendali MEWMV adalah pengumpulan data fase pertama (fase 1) dari proses produksi. Data fase 1 sangat penting karena berfungsi sebagai dasar untuk membentuk model kendali statistik; oleh karena itu, diperlukan jumlah sampel yang memadai agar dapat merepresentasikan variabilitas proses secara akurat dan andal. Pada penelitian ini data yang digunakan adalah pengamatan harian dari tiga karakteristik kualitas air hasil produksi PT XYZ, yaitu kekeruhan air (*Turbidity*), konsentrasi klorin (*Chlorine*), dan TDS (*Total Dissolved Solids*). Berdasarkan data tersebut, dilakukan perhitungan matriks kovarians, yang memberikan informasi penting mengenai sejauh mana masing-masing karakteristik kualitas air bervariasi serta sejauh mana keterkaitan atau korelasi antar karakteristik kualitas air tersebut.

Langkah selanjutnya adalah menghitung statistik MEWMV, yang didasarkan pada nilai rata-rata bergerak (*moving average*) dari variabilitas proses. Statistik ini digunakan sebagai dasar untuk menentukan Batas Kendali Atas (BKA) dan Batas Kendali Bawah (BKB), yang bertujuan untuk mendeteksi apakah suatu proses produksi berada dalam kondisi statistik yang stabil atau mengalami penyimpangan. Nilai parameter L , yang berperan sebagai faktor pembobot dalam perhitungan statistik MEWMV, diperoleh dengan merujuk pada penelitian sebelumnya yang telah terbukti relevan dan sesuai untuk kondisi proses yang dianalisis.

Diagram kendali MEWMV dibentuk dengan memvisualisasikan nilai $tr(V_i)$, yaitu jejak (*trace*) dari matriks kovarians eksponensial untuk setiap titik waktu $ke - i$. Plot dimulai dari pengamatan pertama saat $i = 1$, dan nilai $tr(V_i)$ ini digunakan sebagai indikator untuk mengamati perubahan variabilitas secara keseluruhan dalam ruang multivariat. Dengan demikian, diagram ini memungkinkan pemantauan proses yang lebih sensitif dan akurat, terutama ketika data tidak memenuhi asumsi distribusi normal. Berikut merupakan contoh perhitungan nilai V_1 yang dilakukan berdasarkan formula dasar dari statistik MEWMV.

$$V_1 = \omega(x_1 - z_1)(x_1 - z_1)' + (1 - \omega)V_{1-1}$$

Karena $V_{1-1} = V_0$, maka rumus tersebut dapat ditulis ulang menjadi:

$$V_1 = \omega(x_1 - z_1)(x_1 - z_1)' + (1 - \omega)V_0$$

Di mana nilai awal matriks kovarians V_0 ditentukan sebagai:

$$V_0 = (x_1 - z_1)(x_1 - z_1)'$$

Untuk menentukan nilai z_1 , digunakan rumus:

$$z_1 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)z_0$$

Karena $z_0 = 0$ maka:

$$z_1 = \lambda x_1$$

Dalam penelitian ini, digunakan nilai $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$, sehingga perhitungan selanjutnya dapat diperoleh sebagai berikut.

$$x_1 = \begin{bmatrix} -0,7568 \\ -0,1688 \\ -0,0528 \end{bmatrix}, \text{ maka } z_1 = 0,1 \begin{bmatrix} -0,7568 \\ -0,1688 \\ -0,0528 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0757 \\ -0,0169 \\ -0,0053 \end{bmatrix}$$

$$V_0 = \left(\begin{bmatrix} -0,7568 \\ -0,1688 \\ -0,0528 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,0757 \\ -0,0169 \\ -0,0053 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} -0,7568 \\ -0,1688 \\ -0,0528 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,0757 \\ -0,0169 \\ -0,0053 \end{bmatrix} \right)'$$

$$V_0 = \begin{bmatrix} 0,4638 & 0,1033 & 0,0324 \\ 0,1033 & 0,0231 & 0,0072 \\ 0,0324 & 0,0072 & 0,0023 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh nilai V_0 maka dapat dihitung V_1

$$V_1 = 0,1 \left(\begin{bmatrix} -0,7568 \\ -0,1688 \\ -0,0528 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,0757 \\ -0,0169 \\ -0,0053 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} -0,7568 \\ -0,1688 \\ -0,0528 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,0757 \\ -0,0169 \\ -0,0053 \end{bmatrix} \right)' + 0,9 \begin{bmatrix} 0,4638 & 0,1033 & 0,0324 \\ 0,1033 & 0,0231 & 0,0072 \\ 0,0324 & 0,0072 & 0,0023 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0,4638 & 0,1033 & 0,0324 \\ 0,1033 & 0,0231 & 0,0072 \\ 0,0324 & 0,0072 & 0,0023 \end{bmatrix}$$

Setelah nilai V_1 selanjutnya adalah menghitung $tr(V_1)$

$$tr(V_1) = 0,4892$$

Dalam perhitungan nilai statistik pada diagram kendali MEWMV, diperlukan parameter penting, yaitu pembobot ω (*omega*) dan λ (*lambda*). Nilai kedua parameter ini tidak dipilih secara sembarangan, melainkan ditentukan berdasarkan referensi dari penelitian sebelumnya. Menurut studi yang dilakukan oleh Huwang (2007), nilai pembobot ω dan λ yang kurang dari 0,4 dinilai mampu memberikan performa pengendalian yang lebih sensitif terhadap perubahan variabilitas proses.

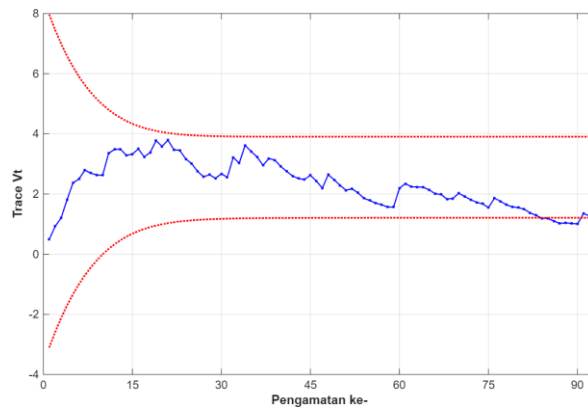
Berdasarkan temuan tersebut, penelitian ini menetapkan nilai ω dan $\lambda \leq 0,4$, dengan rincian nilai yang diuji adalah 0,1, 0,2, 0,3, dan 0,4. Proses pengujian dilakukan melalui kombinasi pasangan nilai ω dan λ , dimulai dari $\omega = 0,1$ dengan $\lambda = 0,1$, kemudian dilanjutkan berturut-turut hingga $\omega = 0,4$ dan $\lambda = 0,4$. Tujuan dari pengujian kombinasi ini adalah untuk menentukan pasangan pembobot yang paling optimal dalam mendeteksi ketidakstabilan proses secara efektif. Apabila dalam proses analisis ditemukan bahwa proses produksi tidak berada dalam kendali statistik, maka dilakukan identifikasi terhadap faktor penyebab ketidakstabilan tersebut. Langkah awal dalam tahap ini adalah melakukan evaluasi ulang pengendalian variabilitas dengan menggunakan pembobot ω dan λ yang bernilai sama untuk setiap kombinasi, guna memastikan konsistensi dan efektivitas pengendalian. Hasil dari evaluasi kombinasi pembobot tersebut disajikan secara rinci pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5 Hasil Perhitungan Maks $tr(V_n)$ dan Jumlah *Out of Control*

ω	λ	L	Maks $tr(V_n)$	Jumlah <i>Out of Control</i>
0,1	0,1	2,7900	0,1172	7
0,2	0,2	3,3086	0,3376	0
0,3	0,3	3,6602	0,3982	0
0,4	0,4	3,9219	0,3581	0

Berdasarkan hasil yang ditampilkan pada Tabel 4.5, dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai pembobot ω , maka jumlah titik pengamatan yang berada di luar batas kendali (*out of control*) cenderung semakin sedikit. Hal ini menunjukkan bahwa pembobot ω yang lebih besar memberikan efek pelunakan terhadap fluktuasi data, sehingga sistem menjadi lebih stabil dalam mengidentifikasi variabilitas proses. Sementara itu, parameter λ menunjukkan pengaruh signifikan terhadap nilai maksimum dari statistik $tr(V_n)$, di mana semakin besar nilai λ , maka nilai maksimum $tr(V_n)$ yang dihasilkan akan menjadi semakin kecil. Hal ini mengindikasikan bahwa nilai λ yang lebih tinggi memperkuat pembobotan terhadap observasi terbaru, sehingga

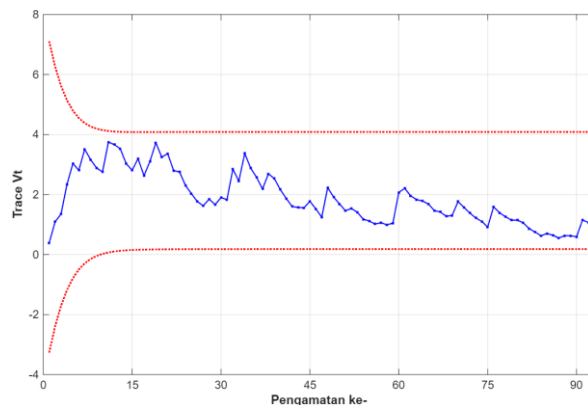
memberikan respons yang lebih cepat terhadap perubahan dalam proses. Adapun hasil visualisasi diagram kendali MEWMV untuk kombinasi pembobot $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$ ditampilkan pada Gambar 4.2. Diagram ini memperlihatkan pola variabilitas proses serta kemampuan model dalam mendeteksi titik-titik yang berada di luar batas kendali.



Gambar 4.2 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,1$ $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,7900$ Fase I

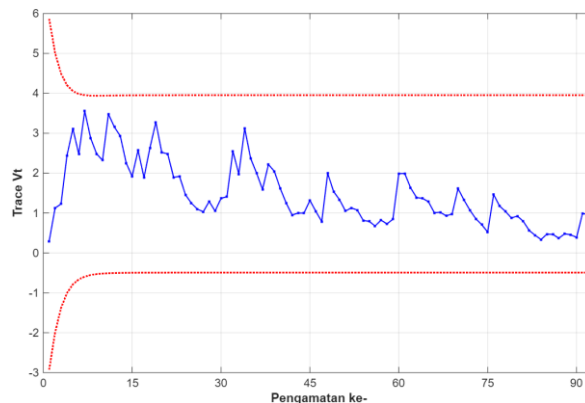
Batas kendali pada diagram kendali MEWMV ditentukan oleh nilai L , yang dihitung berdasarkan kombinasi nilai pembobot ω dan λ . Nilai L ini memengaruhi batas kendali atas (BKA) dan batas kendali bawah (BKB) yang menjadi acuan dalam menilai apakah proses masih berada dalam kondisi yang terkendali secara statistik. Sebagai contoh, pada Gambar 4.2, ditampilkan diagram kendali MEWMV untuk kombinasi pembobot $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$, dengan nilai L sebesar 2,7900, yang menghasilkan BKA sebesar 3,9057 dan BKB sebesar 1,2100.

Sebagai bagian dari pendekatan iteratif dalam pengendalian kualitas, dilakukan analisis ulang dengan menggunakan kombinasi pembobot yang berbeda, yakni $\omega = 0,2$ dan $\omega = 0,2$. Pemilihan kombinasi ini didasarkan pada hasil studi oleh (Huwang, Yeh, & Wu, 2007), yang menyarankan penggunaan nilai pembobot kurang dari 0,4 untuk meningkatkan sensitivitas dalam mendeteksi perubahan variabilitas proses. Harapannya, kombinasi baru ini dapat memberikan hasil pengendalian yang lebih stabil dan akurat. Hasil penerapan kombinasi tersebut divisualisasikan dalam Gambar 4.3, di mana pola distribusi titik pengamatan diamati ulang untuk menilai apakah perubahan parameter pembobot mampu memperbaiki kendali terhadap variabilitas proses. Strategi ini merupakan bagian dari usaha berkelanjutan dalam mencapai kondisi proses yang benar-benar terkendali dan sesuai dengan spesifikasi kualitas yang ditetapkan.



Gambar 4.3 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,2$ $\lambda = 0,2$ dan $L = 3,3086$ Fase I

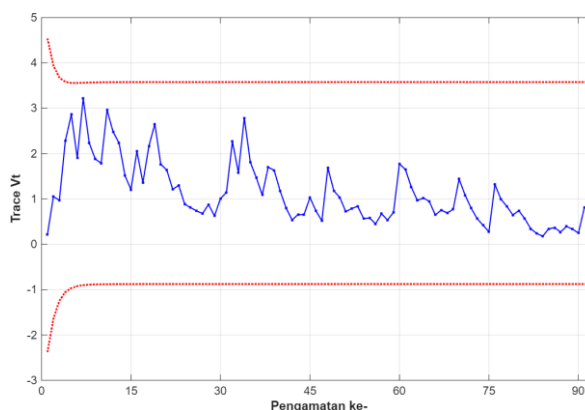
Hasil visualisasi pada gambar 4.3 menunjukkan diagram kendali MEWMV yang dibentuk menggunakan pembobot $\omega = 0,2$ dan $\lambda = 0,2$, dengan nilai parameter $L = 3,3086$. Berdasarkan perhitungan tersebut, diperoleh nilai BKA sebesar 4,0856 dan nilai BKB sebesar 0,1811. Diagram kendali ini menunjukkan bahwa seluruh titik pengamatan berada di dalam batas kendali, baik atas maupun bawah, yang mengindikasikan bahwa proses produksi telah berada dalam kondisi yang stabil dan terkendali secara statistik. Sebagai langkah lanjutan dalam evaluasi performa proses, dilakukan analisis pengendalian variabilitas menggunakan diagram kendali MEWMV dengan kombinasi pembobot $\omega = 0,3$ dan $\lambda = 0,3$. Hasil dari penerapan parameter ini disajikan pada Gambar 4.4, yang digunakan untuk menilai konsistensi kestabilan proses dalam kondisi parameter pembobot yang berbeda.



Gambar 4.4 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,3$ $\lambda = 0,3$ dan $L = 3,6602$ Fase I

Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4.4, diagram kendali MEWMV dibentuk menggunakan pembobot $\omega = 0,3$ dan $\lambda = 0,3$, dengan nilai $L = 3,6602$. Berdasarkan perhitungan, diperoleh nilai BKA sebesar 3,9520 dan nilai BKB sebesar -0,4932. Hasil pengamatan pada diagram ini menunjukkan bahwa seluruh titik pengamatan berada dalam batas kendali, sama seperti pada diagram sebelumnya. Kondisi ini menandakan bahwa proses produksi tetap berada dalam kondisi yang stabil dan terkendali secara statistik.

Sebagai kelanjutan dari analisis, Gambar 4.5 menyajikan diagram kendali MEWMV dengan kombinasi pembobot $\omega = 0,4$ dan $\lambda = 0,4$, serta nilai $L = 3,9219$. Penerapan pembobot yang lebih besar ini bertujuan untuk mengevaluasi apakah peningkatan *smoothing* dapat menghasilkan pengendalian yang lebih stabil terhadap variabilitas proses, serta untuk mengamati pengaruhnya terhadap sensitivitas deteksi terhadap perubahan proses. Analisis ini menjadi bagian penting dalam memastikan kestabilan proses secara menyeluruh dan menguji konsistensi hasil pada berbagai konfigurasi parameter pengendalian.



Gambar 4.5 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,4$ $\lambda = 0,4$ dan $L = 3,9219$ Fase I

Berdasarkan Gambar 4.5, yang menunjukkan diagram kendali MEWMV kombinasi pembobot $\omega = 0,4$ dan $\lambda = 0,4$ dengan nilai $L = 3,9219$, diperoleh nilai BKA sebesar 3,5767 dan nilai BKB sebesar -0,8767. Sama halnya dengan diagram sebelumnya, seluruh titik pengamatan berada di dalam batas kendali atas maupun bawah, yang mengindikasikan bahwa proses sudah berada dalam kondisi yang terkendali secara statistik.

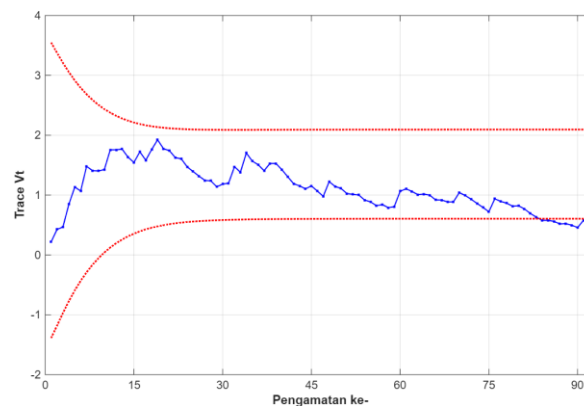
Untuk menentukan kombinasi pembobot yang paling optimal dalam mendeteksi pengamatan di luar batas kendali, dilakukan evaluasi berdasarkan dua kriteria utama. Pertama, jumlah titik *out of control*, di mana semakin banyak pengamatan yang terdeteksi berada di luar batas kendali, maka semakin sensitif diagram tersebut terhadap perubahan proses. Kedua, nilai selisih absolut antara BKA dan BKB ($|BKB - BKA|$), di mana semakin kecil nilai ini, maka rentang kendali semakin sempit dan sensitif. Evaluasi dilakukan dengan menguji kombinasi pembobot ω dan λ mulai dari nilai 0,1 hingga 0,4, untuk memperoleh pasangan parameter yang memberikan hasil pengendalian paling efektif. Hasil analisis dan perbandingan dari setiap kombinasi pembobot tersebut telah dirangkum secara lengkap pada Tabel 4.6.

Tabel 4.6 Hasil Perhitungan BKA-BKB pada Diagram Kendali MEWMV Fase I

ω	λ	L	Maks $tr(V_n)$	BKA	BKB	$ BKA-BKB $	$ Maks\ tr(V_n)-BKA $	Jumlah <i>Out of Control</i>
0,1	0,1	2,7900	3,7885	3,9057	1,2100	2,6957	0,1172	7
0,1	0,2	2,7939	3,1455	3,2732	0,9934	2,2798	0,1277	7
0,1	0,3	2,7949	2,5221	2,6670	0,7918	1,8752	0,1449	8
0,1	0,4	2,7988	1,9234	2,0945	0,6055	1,4890	0,1711	8
0,2	0,1	3,3105	4,5522	4,8756	0,2402	4,6354	0,3234	0
0,2	0,2	3,3086	3,748	4,0856	0,1811	3,9045	0,3376	0
0,2	0,3	3,3164	3,0715	3,3359	0,1229	3,2130	0,2644	0
0,2	0,4	3,3213	2,4016	2,6240	0,0760	2,5480	0,2224	0
0,3	0,1	3,6484	5,1493	5,7717	-0,6559	6,4276	0,6224	0
0,3	0,2	3,6523	4,2401	4,8395	-0,5728	5,4123	0,5994	0
0,3	0,3	3,6602	3,5538	3,9520	-0,4932	4,4452	0,3982	0
0,3	0,4	3,6699	2,8436	3,1118	-0,4118	3,5236	0,2682	0
0,4	0,1	3,8984	5,7372	6,6407	-1,5249	8,1656	0,9035	0
0,4	0,2	3,9063	4,6329	5,5684	-1,3018	6,8702	0,9355	0
0,4	0,3	3,9121	3,98	4,5438	-1,0850	5,6288	0,5638	0
0,4	0,4	3,9219	3,2186	3,5767	-0,8767	4,4534	0,3581	0

Tabel 4.6 menyajikan hasil perhitungan dari berbagai kombinasi nilai pembobot ω dan λ dalam rentang 0,1 hingga 0,4, yang menghasilkan beragam parameter pada diagram kendali MEWMV. Berdasarkan hasil tersebut, dapat diamati bahwa kombinasi pembobot $\omega = 0,1$ dengan $\lambda = 0,3$ maupun $\lambda = 0,4$ menghasilkan jumlah pengamatan di luar batas kendali (*out of control*) terbanyak. Sebaliknya, kombinasi pembobot $\omega = 0,2$ hingga 0,4 dengan berbagai nilai $\lambda = 0,1$ hingga 0,4 cenderung tidak menghasilkan titik pengamatan yang berada di luar batas kendali. Hal ini menunjukkan bahwa semakin besar nilai ω , maka rentang batas kendali cenderung semakin lebar, sehingga sensitivitas terhadap perubahan dalam proses menjadi lebih rendah. Namun demikian, pemilihan kombinasi optimal tidak hanya mempertimbangkan jumlah pengamatan di luar batas kendali (*out of control*) semata, namun juga memperhatikan ketajaman sensitivitas terhadap perubahan kecil dalam proses dan kemampuan dalam mereduksi *white noise*.

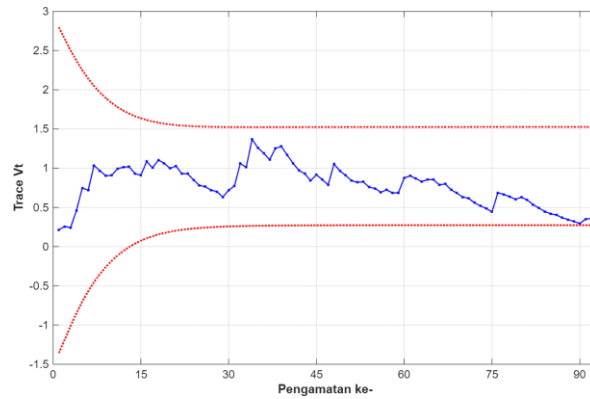
Dalam konteks ini, kombinasi $\lambda = 0,1$ dinilai lebih unggul karena lebih menekankan bobot informasi historis, sehingga mampu mendeteksi variasi kecil yang mungkin tidak terlihat oleh nilai λ yang lebih besar. Dengan mempertimbangkan keseimbangan antara jumlah pengamatan di luar batas kendali (*out of control*), sensitivitas terhadap variasi kecil, serta stabilitas dalam menghadapi *noise* alami pada data *time series*, maka kombinasi $\omega = 0,1$ dengan $\lambda = 0,1$ dipilih sebagai kombinasi parameter paling optimal untuk pengendalian variabilitas dalam penelitian ini. Visualisasi dari diagram kendali MEWMV menggunakan pembobot $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$ disajikan pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,1$ $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,7900$ Fase I

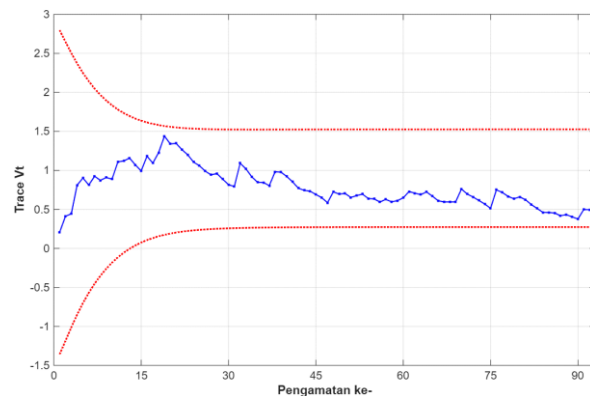
Gambar 4.6 menampilkan diagram kendali MEWMV yang dibentuk dengan menggunakan kombinasi pembobot $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$ dengan nilai $L = 2,7900$. Berdasarkan hasil perhitungan, diperoleh Nilai BKA sebesar 3,9057 dan nilai BKB sebesar 1,2100. Pada diagram ini, terdapat 7 titik pengamatan yang berada di luar batas kendali (*out of control*). Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa variabilitas parameter kualitas air hasil produksi menggunakan diagram kendali MEWMV dengan pembobot $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$ masih belum terkendali secara statistik.

Sebelum melanjutkan ke tahap analisis berikutnya, dilakukan proses identifikasi penyebab sinyal *out of control*, dengan tujuan untuk mengetahui karakteristik kualitas air mana yang memberikan berkontribusi paling signifikan terhadap ketidakterkendalian proses produksi di PT XYZ. Proses identifikasi dilakukan melalui pendekatan analisis kombinasi dua variabel dari tiga karakteristik kualitas yang diamati, yaitu: kekeruhan dan klorin, kekeruhan dan TDS, serta klorin dan TDS. Pendekatan ini memungkinkan analisis yang lebih terfokus terhadap interaksi antar parameter yang mungkin menjadi pemicu sinyal *out of control*. Identifikasi pertama dilakukan pada kombinasi antara karakteristik kualitas kekeruhan dan klorin untuk melihat apakah fluktuasi pada kedua parameter ini berkontribusi terhadap ketidakstabilan proses yang terdeteksi dalam diagram kendali multivariat.



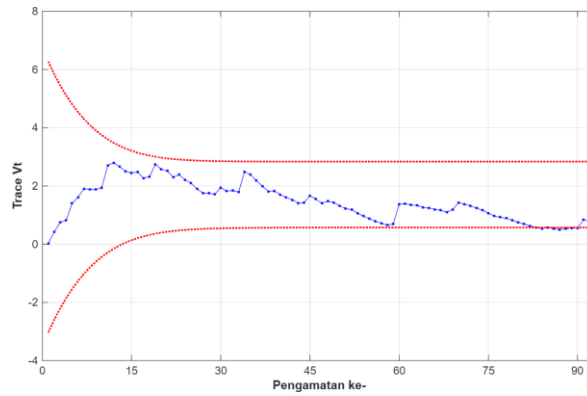
Gambar 4.7 Diagram Kendali MEWMV Kombinasi Kekeruhan dengan Klorin Fase I

Berdasarkan Gambar 4.7, hasil identifikasi sinyal *out of control* melalui kombinasi karakteristik kualitas kekeruhan dengan klorin menggunakan diagram kendali MEWMV dengan parameter $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,8725$, menunjukkan bahwa seluruh titik pengamatan berada dalam batas kendali. Hal ini mengindikasikan bahwa kombinasi antara kekeruhan dan klorin berada dalam kondisi yang terkendali secara statistik, serta tidak memberikan kontribusi signifikan terhadap ketidakterkendalian proses yang terdeteksi sebelumnya. Identifikasi berikutnya difokuskan pada kombinasi antara kekeruhan dan TDS, yang akan dianalisis untuk mengevaluasi apakah kombinasi ini juga berada dalam batas kendali atau menunjukkan adanya potensi ketidakterkendalian dalam proses.



Gambar 4.8 Diagram Kendali MEWMV Kombinasi Kekeruhan dengan TDS Fase I

Berdasarkan Gambar 4.8, hasil identifikasi sinyal *out of control* pada kombinasi karakteristik kualitas kekeruhan dengan TDS menggunakan diagram kendali MEWMV dengan parameter $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,8725$ menunjukkan bahwa seluruh titik pengamatan berada dalam batas kendali statistik, yang menandakan bahwa kombinasi kedua karakteristik ini telah terkendali secara statistik dan tidak menjadi penyebab utama dari ketidakterkendalian proses yang terdeteksi sebelumnya. Selanjutnya, proses identifikasi dilanjutkan dengan menganalisis Gambar 4.9, yang menyajikan diagram kendali MEWMV untuk kombinasi klorin dan TDS guna mengevaluasi kemungkinan kontribusi kedua variabel tersebut terhadap ketidakstabilan proses, sehingga diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam terkait sumber variabilitas dalam sistem produksi air.



Gambar 4.9 Diagram Kendali MEWMV Kombinasi Klorin dengan TDS Fase I

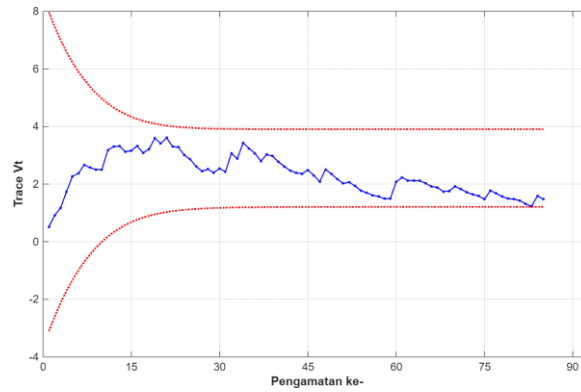
Berdasarkan Gambar 4.9, hasil identifikasi sinyal *out of control* melalui kombinasi karakteristik kualitas klorin dengan TDS menggunakan diagram kendali MEWMV dengan $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,8725$ menunjukkan bahwa terdapat 6 titik pengamatan yang berada di luar batas kendali, sehingga dapat dikatakan karakteristik kualitas dengan kombinasi klorin dengan TDS belum terkendali secara statistik dan kemungkinan besar berkontribusi terhadap ketidakstabilan proses yang terdeteksi pada fase sebelumnya. Informasi ringkasan dari hasil identifikasi seluruh kombinasi karakteristik kualitas air terhadap sinyal *out of control* pada fase I disajikan secara sistematis pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Hasil Identifikasi Out of Control Diagram Kendali MEWMV Fase I

Kombinasi Karakteristik Kualitas	Keterangan	Jumlah Out of Control	Titik Out of Control
Kekeruhan & Klorin	Terkendali	0	0
Kekeruhan & TDS	Terkendali	0	0
Klorin & TDS	Tidak Terkendali	6	84, 86, 87, 88, 89, 90

Tabel 4.7 menunjukkan bahwa pada kombinasi karakteristik kualitas terhadap proses produksi air di PT XYZ, penggunaan diagram kendali MEWMV dengan parameter $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,8725$ menghasilkan bahwa kombinasi klorin dan TDS merupakan satu-satunya pasangan karakteristik kualitas yang memunculkan pengamatan *out of control*. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa kombinasi karakteristik tersebut berpotensi menjadi penyebab utama munculnya sinyal ketidakterkendalian pada proses produksi air yang dianalisis.

Tahap selanjutnya dalam proses analisis adalah melakukan perbaikan terhadap diagram kendali MEWMV dengan cara mengeluarkan titik-titik pengamatan yang berada di luar batas kendali. Berdasarkan hasil analisis sebelumnya, pada diagram kendali MEWMV dengan kombinasi pembobot optimum $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$, teridentifikasi sebanyak 7 titik yang berada di luar kendali statistik, yaitu pada pengamatan ke-84 hingga 90. Proses pengeluaran data dilakukan secara bertahap, dimulai dari pengamatan dengan nilai $tr(V_n)$ tertinggi, yang mencerminkan penyimpangan terbesar dari batas kendali. Metode ini dilakukan secara iteratif sebanyak tujuh kali, hingga seluruh sinyal *out of control* dapat dieliminasi dan kondisi proses berada dalam keadaan terkendali secara statistik. Hasil dari proses perbaikan tersebut divisualisasikan dalam Gambar 4.10, yang menunjukkan performa diagram kendali MEWMV pasca-eliminasi titik-titik pengamatan yang berada di luar batas kendali (*out of control*).

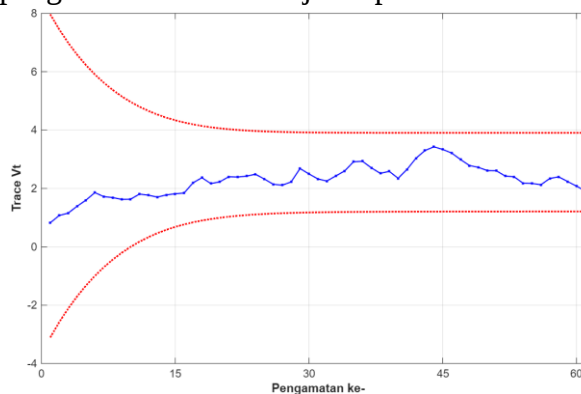


Gambar 4.10 Diagram Kendali MEWMV *In Control* dengan $\omega = 0,1$ $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,7900$ Fase I.

Berdasarkan Gambar 4.10, diagram kendali MEWMV telah berada dalam kondisi *in-control* setelah dilakukan proses pengeluaran titik-titik pengamatan yang berada di luar batas kendali (*out of control*). Seluruh titik pengamatan tampak berada di dalam batas kendali, yang mengindikasikan bahwa variabilitas karakteristik kualitas air produksi telah berhasil dikendalikan secara statistik. Dengan demikian, proses pengolahan air dapat dianggap stabil dan sesuai dengan standar kualitas yang ditetapkan.

4.5.2 Pengendalian Kualitas Variabilitas Air dengan Diagram Kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV) Fase II

Pengendalian variabilitas proses fase II dilakukan menggunakan diagram kendali MEWMV dengan pembobot optimum $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$, berdasarkan hasil analisis pada fase I. Visualisasi hasil pengamatan fase II disajikan pada Gambar 4.11.



Gambar 4.11 Diagram Kendali MEWMV dengan $\omega = 0,1$ $\lambda = 0,1$ dan $L = 2,7900$ Fase II

Berdasarkan Gambar 4.11, terlihat bahwa seluruh titik pengamatan berada di dalam batas kendali atas maupun bawah. Pengamatan pada fase II ini mencakup data harian dari tanggal 1 Juni hingga 31 Juli 2024, dengan total 61 pengamatan. Hasil ini menunjukkan bahwa tidak terdapat sinyal *out of control*, sehingga dapat disimpulkan bahwa proses produksi air di PT XYZ selama fase II telah berada dalam kondisi yang terkendali secara statistik.

4.6 Pengendalian Rata-Rata Proses dengan Diagram Kendali *Spatial Signed Rank* MEWMA (SSRM)

Diagram kendali *Spatial Signed Rank MEWMA* (SSRM) merupakan pengembangan dari diagram kendali MEWMA yang dirancang untuk mendeteksi pergeseran kecil pada rata-rata proses, tanpa bergantung pada asumsi distribusi tertentu. Hal ini dimungkinkan melalui proses standarisasi berbasis transformasi *spatial signed rank*, yang membuat SSRM lebih

robust terhadap data non-normal. Dalam implementasinya, nilai Batas Kendali Atas (BKA) ditentukan berdasarkan parameter pembobot serta hasil adaptasi dari nilai *Average Run Length* ($ARL_0 \approx 370$) dengan asumsi $\delta = 0.0$. Suatu proses dianggap terkendali secara statistik apabila vektor rata-rata maupun matriks kovariansinya tidak mengalami pergeseran yang signifikan dari nilai target. Dalam kondisi tersebut, titik-titik pada diagram kendali akan berada di bawah BKA. Sebaliknya, jika terdapat pergeseran besar dalam proses, maka titik-titik pengamatan akan melewati batas kendali atas, yang menjadi indikator bahwa proses belum stabil secara statistik. Sebelum membentuk diagram SSRM, perlu dilakukan terlebih dahulu transformasi data awal menggunakan uji nonparametrik multivariat, yaitu *spatial signed rank transformation*, untuk menyesuaikan data terhadap pendekatan analisis yang tidak bergantung pada distribusi tertentu.

4.6.1 Transformasi *Spatial Signed Rank*

Proses transformasi data menggunakan *multivariate spatial signed rank* diperlukan karena karakteristik kualitas air yang diamati dalam penelitian ini menunjukkan adanya korelasi dan tidak mengikuti distribusi normal multivariat. Hal ini diperkuat oleh hasil pengujian asumsi yang telah dilakukan sebelumnya, yang menunjukkan bahwa data memiliki hubungan antarvariabel yang signifikan dan tidak memenuhi asumsi distribusi normal. Sebagai solusi, analisis dilanjutkan dengan menerapkan transformasi data menggunakan metode *spatial signed rank*, yang merupakan metode nonparametrik multivariat yang tidak mengharuskan distribusi data normal. Transformasi ini juga memungkinkan penanganan data yang saling berkorelasi secara lebih efektif. Langkah-langkah transformasi data dilakukan sebagai berikut.

1. Menggunakan data *in control* pada fase I yang diperoleh dari pengendalian variabilitas proses menggunakan diagram kendali MEWMV, sebagaimana telah dijelaskan pada subbab sebelumnya.
2. Menghitung nilai $U(\mathbf{x})$ untuk setiap pengamatan. Berikut merupakan contoh perhitungan nilai tersebut.

$$U(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^{-1}\mathbf{x}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Dengan $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n)'$ menjadi kumpulan matriks $p \times n$,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0,7893 & 0,8871 & 0,1061 & \dots & -0,3600 \\ -0,1432 & -0,4294 & 0,3226 & \dots & 0,9825 \\ -0,0396 & -2,1153 & -2,2547 & \dots & 0,3999 \end{bmatrix}$$

Maka nilai dari $\mathbf{x}_1$ adalah,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -0,7893 \\ -0,1432 \\ -0,0396 \end{bmatrix}$$

Setelah kita dapatkan nilai matriks $\mathbf{X}$ dan nilai $\mathbf{x}_1$, lalu kita menghitung nilai $\|\mathbf{x}_1\|$.

$$\|\mathbf{x}_1\| = (\mathbf{x}_1' \mathbf{x}_1)^{\frac{1}{2}} = \left(\begin{bmatrix} -0,7893 & -0,1432 & -0,0396 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,7893 \\ -0,1432 \\ -0,0396 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\mathbf{x}_1\| = 0,8031$$

Maka nilai $U_1(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_1\|^{-1}\mathbf{x}_1$ adalah,

$$\|x_1\|^{-1}x_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{\begin{bmatrix} -0,7893 \\ -0,1432 \\ -0,0396 \end{bmatrix}}{0,8031} = \begin{bmatrix} -0,9827 \\ -0,1783 \\ -0,0494 \end{bmatrix}$$

3. Menghitung nilai $R(x)$. Berikut merupakan contoh perhitungan nilai $R(x)$ pada data fase I *in control* pengamatan pertama.

$$R(x) = avg\{U(x_j - x_h)\}$$

- a. Untuk $U(x_1 - x_2)$ adalah sebagai berikut,

$$x_1 - x_2 = \begin{bmatrix} -0,7893 \\ -0,1432 \\ -0,0396 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,8871 \\ -0,4294 \\ -2,1153 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,6763 \\ 0,2863 \\ 2,0756 \end{bmatrix}$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{-1,6763^2 + 0,2863^2 + 2,0756^2} = 2,6833$$

$$U(x_1 - x_2) = \frac{\begin{bmatrix} -1,6763 \\ 0,2863 \\ 2,0756 \end{bmatrix}}{2,6833} = \begin{bmatrix} -0,6247 \\ 0,1067 \\ 0,7735 \end{bmatrix}$$

- b. Untuk $U(x_1 - x_3)$ adalah sebagai berikut,

$$x_1 - x_3 = \begin{bmatrix} -0,7893 \\ -0,1432 \\ -0,0396 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,1061 \\ 0,3226 \\ -2,2547 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8945 \\ -0,4658 \\ 2,2151 \end{bmatrix}$$

$$|x_1 - x_3| = \sqrt{-0,8945^2 + -0,4658^2 + 2,2151^2} = 2,4342$$

$$U(x_1 - x_3) = \frac{\begin{bmatrix} -0,8945 \\ -0,4658 \\ 2,2151 \end{bmatrix}}{2,4342} = \begin{bmatrix} -0,3681 \\ -0,1906 \\ 0,9101 \end{bmatrix}$$

Dengan langkah yang sama dilakukan perhitungan nilai $R(x)$ sampai dengan banyaknya pengamatan data *in control*, yaitu $U(x_1 - x_{85})$. Sehingga untuk nilai $R_1(x)$ diperoleh perhitungan sebagai berikut.

$$R_1(x) = \left(\frac{U(x_1 - x_2) + (x_1 - x_3) + \dots + U(x_1 - x_{109})}{85} \right)$$

$$R_1(x) = \begin{bmatrix} -0,3943 \\ -0,1283 \\ -0,0932 \end{bmatrix}$$

4. Menghitung nilai $Q(x)$. Berikut merupakan contoh perhitungan nilai $Q(x)$ pada data fase I *in control* pengamatan pertama.

$$Q(x) = \frac{[R_x(x) + R_{-x}(x)]}{2}$$

Di mana,

$$R_{-x}(x) = avg\{\|x_j + x_h\|^{-1}(x_j + x_h)\}$$

Sehingga diperoleh persamaan,

$$Q(x) = \frac{(R_x(x) + avg\{\|x_j + x_h\|^{-1}(x_j + x_h)\})}{2}$$

- a. Untuk $U(x_1 + x_2)$ adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -0,7893 \\ -0,1432 \\ -0,0396 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,8871 \\ -0,4294 \\ -2,1153 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0978 \\ -0,5727 \\ -2,1549 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2| = \sqrt{0,0978^2 + (-0,5727)^2 + (-2,1549)^2} = 2,2319$$

$$U(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \frac{\begin{bmatrix} 0,0978 \\ -0,5727 \\ -2,1549 \end{bmatrix}}{2,2319} = \begin{bmatrix} 0,0438 \\ -0,2566 \\ -0,9655 \end{bmatrix}$$

b. Untuk $U(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3)$ adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -0,7893 \\ -0,1432 \\ -0,0396 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,1061 \\ 0,3226 \\ -2,2547 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6831 \\ 0,1794 \\ -2,2944 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3| = \sqrt{(-0,6831)^2 + 0,1794^2 + (-2,2944)^2} = 2,4006$$

$$U(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3) = \frac{\begin{bmatrix} -0,6831 \\ 0,1794 \\ -2,2944 \end{bmatrix}}{2,4006} = \begin{bmatrix} -0,2846 \\ 0,0748 \\ -0,9557 \end{bmatrix}$$

Untuk nilai $U(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_4)$ sama dengan perhitungan dari langkah sebelumnya. Dengan langkah yang sama lakukan seterusnya sampai dengan banyaknya pengamatan data *in control* untuk memperoleh nilai $R_{-x}(\mathbf{x})$.

$$R_{-x}(\mathbf{x}) = \left(\frac{U(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + U(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3) + \dots + U(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_{109})}{85} \right)$$

$$R_{-x}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -0,3858 \\ -0,0206 \\ -0,0191 \end{bmatrix}$$

Sehingga untuk nilai $Q_1(\mathbf{x})$ diperoleh perhitungan sebagai berikut:

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{[R_x(\mathbf{x}) + R_{-x}(\mathbf{x})]}{2}$$

$$Q_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -0,3901 \\ -0,0744 \\ -0,0562 \end{bmatrix}$$

- Melakukan langkah – langkah sebelumnya untuk mendapatkan data hasil transformasi pada fase II.

Hasil transformasi data secara menyeluruh yang diperoleh melalui langkah-langkah sebelumnya dan dibantu dengan pengolahan oleh *software* R dapat dilihat secara rinci pada Tabel 4.8

Tabel 4.8 Hasil Transformasi *Spatial Signed Rank*

Fase	Sampel ke- <i>i</i>	$Q(\mathbf{X}_1)$	$Q(\mathbf{X}_2)$	$Q(\mathbf{X}_3)$
1	1	-0,3958	-0,0755	-0,0564
	2	0,2976	-0,1508	-0,7668
	3	0,0042	0,1348	-0,8109
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	85	-0,1642	0,4832	0,1531
2	1	0,1904	0,1288	-0,4185
	2	-0,0859	0,4540	0,5877
	3	0,4262	0,4988	0,1405
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	61	0,0592	-0,4894	0,0045

Setelah seluruh data yang telah ditransformasi, proses analisis menggunakan metode diagram *kendali spatial signed rank* MEWMA (SSRM) dapat dilanjutkan untuk melakukan evaluasi lebih lanjut terhadap kapabilitas proses. Tahapan ini bertujuan untuk mendalami hubungan antar variabel yang telah terolah melalui transformasi dan untuk mengidentifikasi potensi ketidakterkendalian dalam proses yang sedang dianalisis.

4.6.2 Pengendalian Kualitas Rata-Rata Proses dengan Diagram Kendali *Spatial Signed Rank* MEWMA (SSRM) Fase I

Setelah data ditransformasi menggunakan *multivariate spatial signed rank*, tahapan selanjutnya adalah pengendalian kualitas *mean* proses pada data hasil transformasi menggunakan diagram kendali *Spatial Signed Rank* MEWMA (SSRM). Diagram kendali SSRM merupakan pengembangan dari metode diagram kendali MEWMA yang dirancang untuk mendeteksi pergeseran kecil pada rata-rata proses, serta memiliki keunggulan karena tidak bergantung pada asumsi bentuk distribusi data tertentu. Pada tahap ini, analisis dilakukan terhadap data transformasi dari tiga karakteristik kualitas air yaitu x_1 , x_2 , dan x_3 yang telah melalui proses *spatial signed rank*. Ketiga variabel tersebut kemudian direpresentasikan dalam bentuk vektor berukuran 3×1 , sebagaimana ditunjukkan pada persamaan berikut.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

di mana, pada data yang telah di transformasi menggunakan *spatial signed rank*, notasinya berubah menjadi

$$Q(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} Q(x_1) \\ Q(x_2) \\ Q(x_3) \end{bmatrix}$$

Pada SSRM didefinisikan sebagai

$$Q(\mathbf{y}_i) = \lambda Q(\mathbf{x}_i) + (1 - \lambda)Q(\mathbf{y}_{i-1})$$

Dengan $Q(\mathbf{y}_i)$ vektor SSRM pengamatan ke- i

$$Q(\mathbf{y}_i) = \begin{bmatrix} Q(y_1) \\ Q(y_2) \\ \vdots \\ Q(y_n) \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Untuk $i = 1$ nilai $Q(\mathbf{y}_1) = \lambda Q(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)Q(\mathbf{y}_0)$, karena nilai $Q(\mathbf{y}_0) = 0$ maka persamaan menjadi $Q(\mathbf{y}_1) = \lambda Q(\mathbf{x}_1)$

$$Q(\mathbf{x}) = \lambda \begin{bmatrix} Q(x_1) \\ Q(x_2) \\ Q(x_3) \end{bmatrix}$$

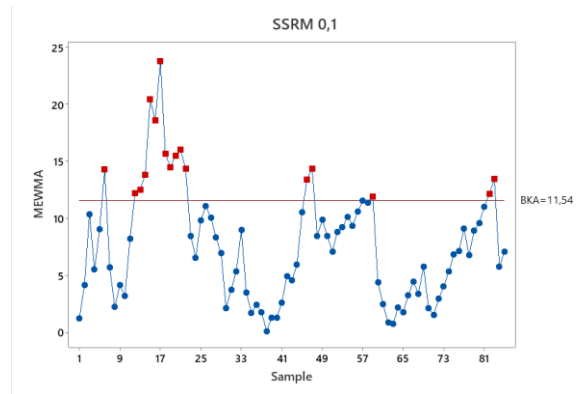
Menggunakan pembobot $\lambda = 0,1$ diperoleh

$$Q(\mathbf{y}_1) = 0,1 \begin{bmatrix} -0,3958 \\ -0,0755 \\ -0,0564 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,03958 \\ -0,00755 \\ -0,00564 \end{bmatrix}$$

Titik yang akan diplotkan dengan diagram kendali SSRM merupakan nilai dari Q_i^{SSRM} dan hasilnya untuk $i = 1$ sebagai berikut

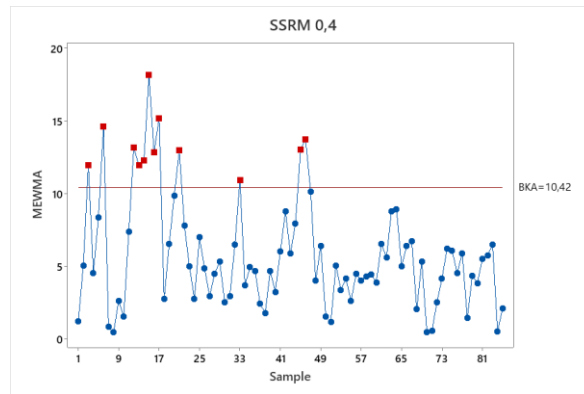
$$\begin{aligned}\sum_{Q(y_i)} &= \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}] \sum_{Q(x_i)} \\ \sum_{Q(x_i)} &= \begin{pmatrix} 0,1475 & 0,0073 & -0,0283 \\ 0,0073 & 0,1423 & 0,0149 \\ -0,0283 & 0,0149 & 0,1465 \end{pmatrix} \\ \sum_{Q(y_i)} &= \left(\frac{0,1}{2-0,1}\right) [1 - (1-0,1)^2] \begin{pmatrix} 0,1475 & 0,0073 & -0,0283 \\ 0,0073 & 0,1423 & 0,0149 \\ -0,0283 & 0,0149 & 0,1465 \end{pmatrix} \\ Q_i^{SSRM} &= [-0,03958 \quad -0,00739 \quad -0,00503] \left[\left(\frac{0,1}{1,9}\right) [1 - (0,9)^2] \begin{pmatrix} 0,1475 & 0,0073 & -0,0283 \\ 0,0073 & 0,1423 & 0,0149 \\ -0,0283 & 0,0149 & 0,1465 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -0,03958 \\ -0,00755 \\ -0,00564 \end{bmatrix} \\ Q_i^{SSRM} &= 1,1987\end{aligned}$$

Nilai statistik Q_i^{SSRM} yang telah dihitung kemudian diplotkan terhadap batas kendali atas (BKA) untuk memantau kestabilan rata-rata proses kualitas air produksi. Penentuan nilai pembobot λ dan BKA mengacu pada Lampiran 12 dan 13. Analisis dilakukan dengan menggunakan beberapa nilai pembobot λ untuk mengevaluasi sensitivitas diagram terhadap perubahan kecil dalam proses. Nilai pembobot λ yang digunakan secara bertahap adalah 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; dan 0,8. Pemilihan variasi nilai pembobot ini bertujuan untuk mengidentifikasi kombinasi yang paling optimal dalam mendeteksi sinyal *out of control*, serta menilai sejauh mana pendekatan nonparametrik multivariat mampu memastikan kestabilan proses.



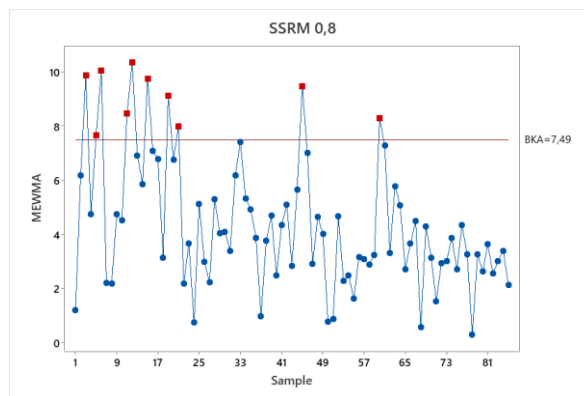
Gambar 4.12 Diagram Kendali SSRM $\lambda = 0,1$ Fase I

Gambar 4.12 menunjukkan bahwa terdapat 17 titik pengamatan berada di luar batas kendali atas (*out of control*), dengan nilai BKA sebesar 11,54 dan nilai BKB sebesar 0. Kondisi ini menunjukkan bahwa rata-rata proses menggunakan diagram kendali SSRM dengan pembobot $\lambda = 0,1$ belum terkendali secara statistik. Oleh karena itu, dilakukan evaluasi lanjutan dengan menggunakan nilai pembobot $\lambda = 0,4$ untuk mengendalikan rata-rata proses yang dapat dilihat pada Gambar 4.13



Gambar 4.13 Diagram Kendali SSRM $\lambda = 0,4$ Fase I

Gambar 4.13 menunjukkan diagram kendali SSRM dengan pembobot $\lambda = 0,4$ dan nilai BKA sebesar 10,42. Dari visualisasi tersebut, dilihat bahwa masih terdapat 12 pengamatan yang berada di luar batas kendali atas, yang menandakan bahwa rata-rata proses belum dalam kondisi yang terkendali secara statistik. Oleh karena itu, pengendalian kualitas rata-rata proses dilanjutkan menggunakan pembobot $\lambda = 0,8$, sebagaimana ditampilkan pada Gambar 4.14.



Gambar 4.14 Diagram Kendali SSRM $\lambda = 0,8$ Fase I

Berdasarkan Gambar 4.14 terlihat bahwa diagram kendali SSRM dengan pembobot $\lambda = 0,8$ dan nilai BKA sebesar 7,49, menunjukkan adanya 10 titik pengamatan yang keluar dari batas kendali atas (BKA). Hal ini menandakan bahwa rata-rata proses belum dalam kondisi yang terkendali secara statistik.

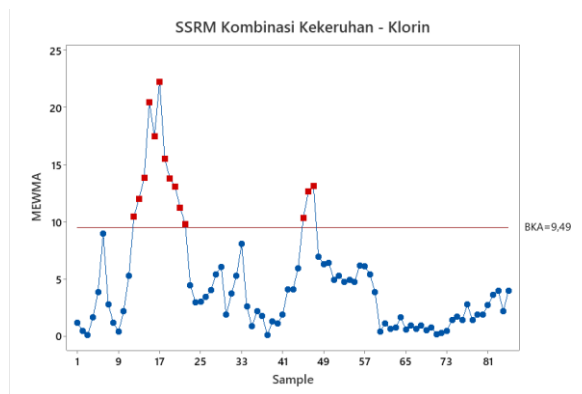
Dalam menentukan pembobot optimum pada diagram kendali SSRM, analisis dilakukan dengan mempertimbangkan dua aspek, yaitu jumlah pengamatan yang berada di luar batas kendali (*out of control*) dan selisih antara nilai maksimum dengan batas kendali atas (BKA). Pembobot dikategorikan sebagai optimal apabila menghasilkan jumlah sinyal *out of control* terbanyak, disertai dengan selisih nilai terhadap BKA yang paling kecil, karena kombinasi ini mencerminkan tingkat sensitivitas yang tinggi dalam mendeteksi ketidakterkendalian proses. Perhitungan untuk menentukan pembobot optimum dapat disajikan secara rinci pada Tabel 4.9.

Tabel 4.9 Hasil Perhitungan Nilai Pembobot Diagram Kendali SSRM Fase I

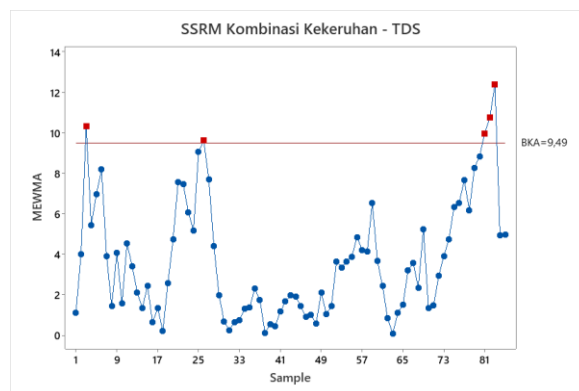
λ	Titik Maksimum	BKA	Selisih Titik Maksimum - BKA	Jumlah Out of Control
0,1	23,80	11,54	12,26	17
0,2	23,03	11,59	11,44	11
0,3	20,57	11,09	9,48	13
0,4	18,13	10,42	7,71	12
0,5	15,52	9,69	5,83	13
0,8	10,36	7,49	2,87	10

Tabel 4.9 menunjukkan bahwa jumlah pengamatan di luar batas kendali paling banyak terdapat pada $\lambda = 0,1$, dengan jumlah pengamatan yang *out of control* sebanyak 17 pengamatan dan selisih antara nilai maksimum dan BKA sebesar 12,26. Berdasarkan penelitian terdahulu pengamatan pada rata-rata proses ideal terjadi pada $\lambda = 0,1$ hingga $\lambda = 0,2$. Oleh karena itu, dalam penelitian ini digunakan $\lambda = 0,1$ dengan pertimbangan pembobot $\lambda = 0,1$ mempunyai titik pengamatan yang di luar batas kendali paling banyak sehingga lebih sensitif dibanding pembobot yang lain dan diharapkan dapat lebih optimal dalam mendeteksi pergeseran rata-rata. Kesimpulannya, pembobot paling optimal untuk memonitoring rata-rata proses pada data parameter kualitas air hasil produksi fase I adalah $\lambda = 0,1$.

Selanjutnya, dilakukan identifikasi *out of control* pada pengendalian kualitas rata-rata proses untuk mengetahui penyebab sinyal *out of control* pada karakteristik kualitas air produksi PT XYZ. Identifikasi ini dilakukan dengan menggunakan kombinasi dua variabel karakteristik kualitas, yaitu kekeruhan dengan klorin, kekeruhan dengan TDS, dan Klorin dengan TDS. Berikut adalah identifikasi penyebab *out of control* pada kombinasi karakteristik kualitas kekeruhan dengan klorin.

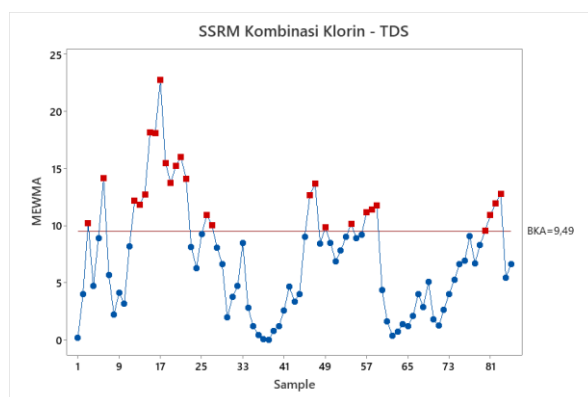
**Gambar 4.15** Diagram Kendali SSRM Kombinasi Kekeruhan dengan Klorin Fase I

Berdasarkan Gambar 4.15 dapat dilihat bahwa identifikasi *out of control* dengan kombinasi karakteristik kualitas kekeruhan dengan klorin menggunakan diagram kendali SSRM dengan $\lambda = 0,1$ diperoleh informasi bahwa terdapat 14 pengamatan yang berada di luar batas kendali sehingga dapat dikatakan karakteristik kualitas dengan kombinasi kekeruhan dengan klorin belum terkendali secara statistik. Selanjutnya melakukan identifikasi *out of control* pada kombinasi karakteristik kualitas kekeruhan dengan TDS.



Gambar 4.16 Diagram Kendali SSRM Kombinasi Kekeruhan dengan TDS Fase I

Berdasarkan Gambar 4.16 dapat dilihat bahwa identifikasi *out of control* dengan kombinasi karakteristik kualitas kekeruhan dengan TDS menggunakan diagram kendali SSRM dengan $\lambda = 0,1$ diperoleh informasi bahwa terdapat 5 pengamatan yang berada di luar batas kendali sehingga dapat dikatakan karakteristik kualitas dengan kombinasi kekeruhan dengan TDS belum terkendali secara statistik. Selanjutnya melakukan identifikasi *out of control* pada kombinasi karakteristik kualitas klorin dengan TDS.



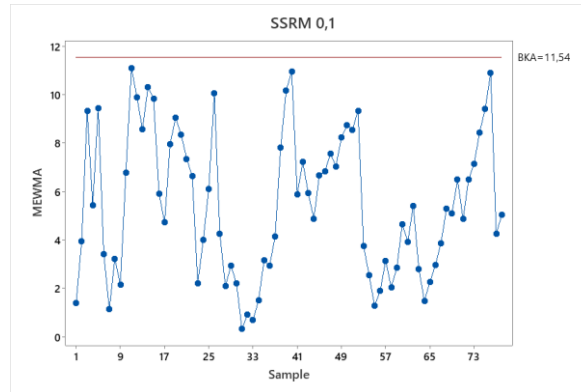
Gambar 4. 17 Diagram Kendali SSRM Kombinasi Klorin dengan TDS Fase I

Berdasarkan Gambar 4.17 dapat dilihat bahwa identifikasi *out of control* dengan kombinasi karakteristik kualitas klorin dengan TDS menggunakan diagram kendali SSRM dengan $\lambda = 0,1$ diperoleh informasi bahwa terdapat 26 pengamatan yang berada di luar batas kendali sehingga dapat dikatakan karakteristik kualitas kombinasi klorin dengan TDS belum terkendali secara statistik. Tabel 4.10 di bawah ini menunjukkan hasil identifikasi penyebab *out of control* pada diagram kendali SSRM Fase 1.

Tabel 4.10 Identifikasi Penyebab *Out of Control* Diagram Kendali SSRM Fase I

Kombinasi Karakteristik Kualitas	Keterangan	Jumlah Out of Control	Titik Out of Control
Kekeruhan & Klorim	Tidak Terkendali	14	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 45, 46, 47
Kekeruhan & TDS	Tidak Terkendali	5	3, 26, 81, 82, 83
Klorin & TDS	Tidak Terkendali	26	3, 6, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 46, 47, 49, 54, 57, 58, 59, 80, 81, 82, 83

Hasil identifikasi mengindikasikan bahwa kombinasi klorin dan TDS memiliki beberapa titik pengamatan yang memerlukan perbaikan agar dapat mencapai kondisi terkendali secara statistik. Hal ini menunjukkan adanya potensi ketidakterkendalian dalam proses yang perlu segera dianalisis dan diperbaiki untuk memastikan kualitas yang konsisten dan sesuai dengan spesifikasi yang ditetapkan. Selanjutnya, Gambar 4.18 akan menampilkan diagram kendali yang telah diatasi titik pengamatan yang berada di luar batas kendali (*in control*).

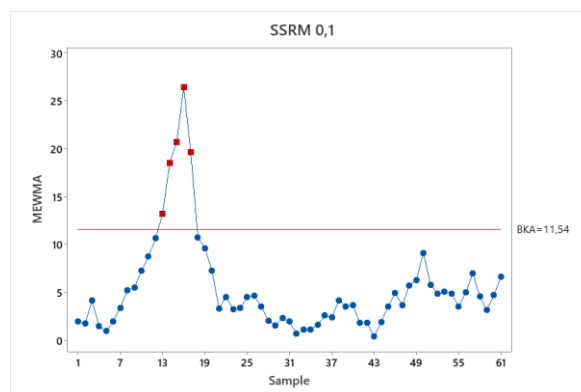


Gambar 4.18 Diagram Kendali SSRM $\lambda = 0,1$ *in control* Fase I.

Berdasarkan Gambar 4.18 diketahui bahwa setelah pengamatan yang berada di luar batas kendali dikendalikan satu per satu dari yang terjauh terlihat bahwa sudah tidak ada lagi pengamatan yang berada di luar batas kendali. Dapat disimpulkan bahwa setelah dilakukan perbaikan maka rata - rata proses parameter air hasil PT XYZ pada fase I telah terkendali secara statistik.

4.6.3 Pengendalian Kualitas Rata-Rata Proses dengan Diagram Kendali Spatial Signed Rank MEWMA (SSRM) Fase II

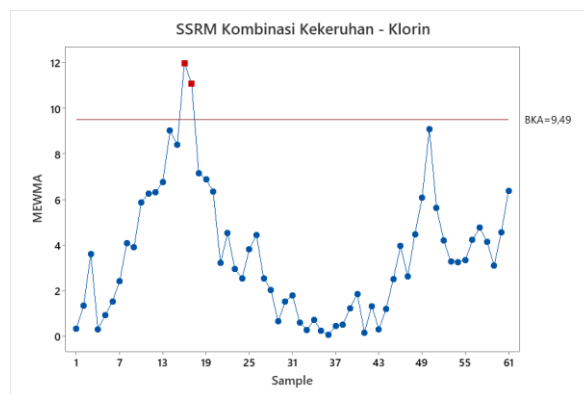
Pengendalian rata-rata proses pada fase II menggunakan data karakteristik kualitas air dari PT XYZ, yang terdiri dari 61 data pengamatan pada bulan Juni hingga Juli. Pembobot optimal yang digunakan adalah $\lambda = 0,1$. Pembobot tersebut telah dihasilkan dari pengendalian variabilitas proses pada fase I. Pergeseran proses dianggap tidak ada karena perbaikan proses belum dilakukan oleh perusahaan. Hasil dari pengendalian rata-rata proses pada fase II untuk data karakteristik kualitas air PT XYZ pada bulan Juni hingga Juli, yang terdiri dari 61 data, dapat dilihat pada Gambar 4.19.



Gambar 4.19 Diagram Kendali SSRM $\lambda=0,1$ Fase II

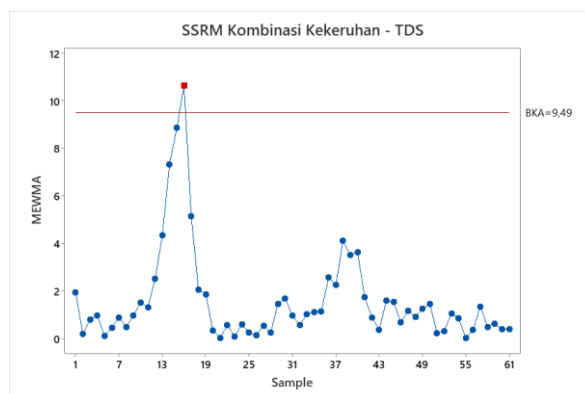
Gambar 4.19 menampilkan diagram kendali SSRM fase II dengan pembobot $\lambda = 0,1$, yang memiliki nilai batas kendali atas sebesar 12,41. Terdapat 5 pengamatan yang berada di luar batas kendali atas dalam diagram kendali tersebut, yaitu pada pengamatan ke - 13, 14, 15, 16, dan 17. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa rata-rata proses kualitas air dari PT XYZ pada fase II belum terkendali secara statistik.

Sebelum melanjutkan ke tahap berikutnya, perlu dilakukan identifikasi *out of control* pada pengendalian kualitas rata-rata proses terlebih dahulu untuk mengetahui penyebab sinyal *out of control* pada karakteristik kualitas air produksi PT XYZ. Identifikasi ini dilakukan dengan menggunakan kombinasi dua variabel karakteristik kualitas, yaitu kekeruhan dengan klorin, kekeruhan dengan TDS, dan Klorin dengan TDS. Identifikasi ini juga bertujuan untuk mendapatkan data yang telah *in control* dari fase II, yang akan digunakan untuk analisis kapabilitas proses pada sub bab selanjutnya. Berikut adalah identifikasi penyebab *out of control* pada kombinasi karakteristik kualitas kekeruhan dengan klorin.



Gambar 4. 20 Diagram Kendali SSRM Kombinasi Kekeruhan dengan Klorin Fase II

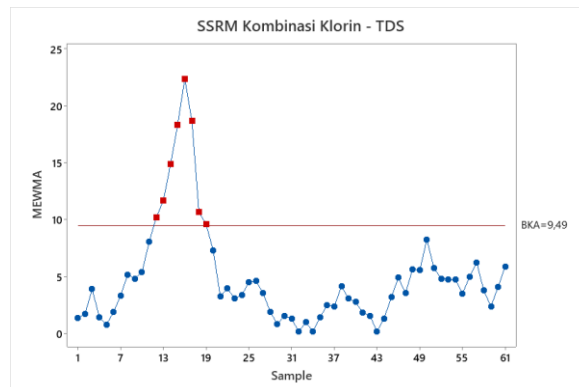
Berdasarkan Gambar 4.20 dapat dilihat bahwa identifikasi *out of control* pada data fase II dengan kombinasi karakteristik kualitas kekeruhan dengan klorin menggunakan diagram kendali SSRM dengan $\lambda = 0,1$ diperoleh informasi bahwa terdapat 2 pengamatan yang berada di luar batas kendali sehingga dapat dikatakan karakteristik kualitas dengan kombinasi kekeruhan dengan klorin belum terkendali secara statistik. Selanjutnya melakukan identifikasi *out of control* pada kombinasi karakteristik kualitas kekeruhan dan TDS.



Gambar 4. 21 Diagram Kendali SSRM Kombinasi Kekeruhan dengan TDS Fase II

Berdasarkan Gambar 4.21 dapat dilihat bahwa identifikasi *out of control* pada data fase II dengan kombinasi karakteristik kualitas kekeruhan dengan TDS menggunakan diagram kendali SSRM dengan $\lambda = 0,1$ diperoleh informasi bahwa terdapat 1 pengamatan yang berada

di luar batas kendali sehingga dapat dikatakan karakteristik kualitas dengan kombinasi kekeruhan dengan TDS belum terkendali secara statistik. Selanjutnya melakukan identifikasi *out of control* pada kombinasi karakteristik kualitas klorin dan TDS.



Gambar 4. 22 Diagram Kendali SSRM Kombinasi Klorin dengan TDS Fase II

Berdasarkan Gambar 4.22 dapat dilihat bahwa identifikasi *out of control* pada data fase II dengan kombinasi karakteristik kualitas klorin dengan TDS menggunakan diagram kendali SSRM dengan $\lambda = 0,1$ diperoleh informasi bahwa terdapat 8 pengamatan yang berada di luar batas kendali sehingga dapat dikatakan karakteristik kualitas dengan kombinasi klorin dengan TDS belum terkendali secara statistik. Berdasarkan hasil plot kombinasi dari setiap variabel, akan dibuat tabel yang bertujuan untuk mengidentifikasi jumlah *out of control* pada setiap kombinasi variabel. Tabel ini juga akan membantu dalam melihat variabel mana yang diduga menjadi penyebab *out of control* pada diagram kendali SSRM. Dalam tabel tersebut, setiap kombinasi variabel akan diidentifikasi dan dihubungkan dengan analisis karakteristik data pada sub-bab sebelumnya.

Tabel 4.11 Identifikasi Penyebab *Out of Control* Diagram Kendali SSRM Fase II

Kombinasi Karakteristik Kualitas	Keterangan	Jumlah <i>Out of Control</i>	Titik <i>Out of Control</i>
Kekeruhan & Klorimn	Tidak Terkendali	2	16, 17
Kekeruhan & TDS	Tidak Terkendali	1	16
Klorin & TDS	Tidak Terkendali	8	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19

Tabel 4.11 menunjukkan bahwa pada kombinasi karakteristik kualitas terhadap rata-rata proses produksi air PT XYZ pada data fase II menggunakan diagram kendali SSRM dengan $\lambda = 0,1$. Didapatkan kombinasi yang memiliki pengamatan *out of control* terbanyak yaitu klorin dengan TDS.

4.7 Analisis Kapabilitas Proses

Analisis kapabilitas proses dilakukan untuk mengevaluasi kemampuan perusahaan dalam menghasilkan produk yang sesuai dengan batas spesifikasi yang telah ditentukan. Evaluasi ini juga mencerminkan sejauh mana proses produksi berjalan dengan baik secara keseluruhan. Sebuah proses dikatakan kapabel apabila telah terkendali secara statistik dan hasil produksinya berada dalam batas spesifikasi. Dalam hal ini, suatu proses dianggap cukup baik jika nilai indeks kapabilitasnya lebih besar dari satu. Pada penelitian ini, digunakan indeks CN_p dan CN_{pk} untuk analisis kapabilitas proses secara univariat, serta MCN_p dan MCN_{pk} untuk multivariat. Pengukuran dilakukan terhadap tiga karakteristik kualitas air hasil produksi PT XYZ, yaitu kekeruhan, klorin, dan TDS. Perhitungan lengkap disajikan dalam Tabel 4.13.

Tabel 4.12 Indeks Kapabilitas Proses

Karakteristik Kualitas	W_j	CN_p	CN_{pk}	MCN_p	MCN_{pk}
Kekeruhan	0,333	5,13	3,75	1,71	1,25
Klorin	0,333	1,52	0,17	0,51	0,05
TDS	0,333	5,53	4,20	1,84	1,40
Total	1	-	-	4,06	2,70

Berdasarkan Tabel 4.12, seluruh variabel kualitas air menunjukkan nilai $CN_p > 1$, yang menunjukkan masing-masing proses memiliki tingkat presisi yang sangat baik dalam memenuhi spesifikasi secara univariat. Namun demikian, untuk menilai aspek akurasi, digunakan nilai CN_{pk} . Terlihat bahwa karakteristik kualitas kekeruhan dan TDS memiliki nilai $CN_{pk} > 1$, sehingga dapat disimpulkan bahwa secara univariat kapabel baik dari sisi presisi maupun akurasi. Namun, proses untuk karakteristik kualitas klorin menunjukkan nilai $CN_{pk} = 0,17$ yang mengindikasikan bahwa rata-rata proses klorin berada di luar batas spesifikasi, yang menandakan adanya masalah pada akurasi proses Klorin. Selanjutnya, pada analisis kapabilitas proses secara multivariat, nilai $MCN_p = 4,06$ dan $MCN_{pk} = 2,70$, yang keduanya jauh lebih besar dari 1.

BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari hasil analisis dan pembahasan mengenai pengendalian kualitas air hasil produksi di PT XYZ menggunakan diagram kendali MEWMV adalah sebagai berikut:

1. Berdasarkan hasil analisis pengendalian variabilitas menggunakan diagram kendali MEWMV pada data fase I, yaitu tanggal 1 Maret 2024 hingga 31 Mei 2024, dengan menggunakan pembobot $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$ dengan $L = 2,7900$, didapatkan bahwa diagram kendali belum terkendali secara statistik. Namun, setelah dilakukan proses iterasi dengan pengeluaran titik pengamatan yang *out of control* sebanyak 7 kali, hasil diagram kendali telah terkendali secara statistik. Pada fase II dengan menggunakan pembobot yang sama dengan fase I, yaitu $\omega = 0,1$ dan $\lambda = 0,1$ dengan $L = 2,7900$, didapatkan bahwa diagram kendali tidak menunjukkan adanya sinyal *out of control*, yang berarti hasil titik pengamatan sudah terkendali secara statistik. Sedangkan, pengendalian kualitas rata-rata proses dilakukan dengan menggunakan diagram kendali SSRM. Pada data fase I, dengan menggunakan pembobot $\lambda = 0,1$, terdapat 17 pengamatan *out of control* yang memerlukan pengeluaran titik pengamatan yang memiliki sinyal *out of control* terjauh dengan iterasi sebanyak 7 kali agar diagram kendali telah terkendali secara statistik. Pada fase II dengan pembobot $\lambda = 0,1$, terdapat 5 pengamatan *out of control* yang menunjukkan bahwa proses pada fase II belum terkendali secara statistik. Berdasarkan hasil identifikasi penyebab *out of control* pada diagram kendali MEWMV dan SSRM pada data fase I, ditemukan dua kombinasi karakteristik kualitas yang dominan menjadi penyebab terjadinya kondisi *out of control*, yaitu Klorin dan TDS. Hal yang serupa juga teridentifikasi pada data fase II SSRM, di mana kombinasi karakteristik kualitas antara Klorin dan TDS menghasilkan jumlah titik pengamatan *out of control* terbanyak baik pada MEWMV maupun SSRM pada kedua fase tersebut.
2. Berdasarkan hasil analisis kapabilitas proses terhadap kekeruhan, klorin, dan TDS pada produksi air PT XYZ, dapat disimpulkan bahwa proses untuk kekeruhan dan TDS menunjukkan kapabilitas yang baik dari sisi presisi dan akurasi, dengan nilai $CN_p > 1$ dan $CN_{pk} > 1$. Namun, proses klorin menunjukkan nilai $CN_{pk} = 0,17$, yang mengindikasikan bahwa rata-rata proses klorin berada di luar batas spesifikasi, sehingga membutuhkan perbaikan untuk mencapai kondisi terkendali secara statistik. Secara keseluruhan, kapabilitas proses produksi air di PT XYZ sangat baik, dengan nilai $MCN_p = 4,06$ dan $MCN_{pk} = 2,70$, meskipun masih ada kebutuhan untuk meningkatkan akurasi proses klorin.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, berikut adalah beberapa saran yang dapat diberikan untuk PT XYZ:

1. Perusahaan disarankan untuk mempertahankan kinerja proses dengan melaksanakan perawatan rutin pada komponen alat produksi dan secara konsisten mengawasi kualitas produksi air agar tetap memenuhi standar yang ditetapkan. Fokus utama adalah memperbaiki proses klorin untuk memastikan rata-rata proses tetap berada dalam batas

spesifikasi. Selain itu, pemantauan dan pengendalian kualitas yang lebih ketat terhadap klorin perlu dilakukan secara teratur untuk menjaga agar proses tetap terkendali.

2. Pengendalian kualitas menggunakan diagram kendali MEWMV dan SSRM dapat dipertimbangkan sebagai salah satu alat untuk memonitor kualitas air yang dihasilkan. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk mengembangkan pendekatan yang dapat mengatasi data pengamatan yang tidak mengikuti distribusi normal multivariat dan mengendalikan kualitas statistik dengan memperhatikan kasus autokorelasi serta penentuan nilai Batas Kendali Atas (BKA) perlu dilakukan secara cermat, misalnya melalui simulasi Average Run Length (ARL), agar sensitivitas dan efektivitas diagram kendali tetap optimal dalam mendeteksi penyimpangan proses.

DAFTAR PUSTAKA

- Antony, J., Balbontin, A., & Taner, T. (2000). Key Ingredients for The Effective. *Work Study*, 49, 242-247.
- Bass, I. (2007). *Sig Sixma Statistics with Excel and Minitab*. United States of America: McGraw-Hill.
- Chen, K. S., & Pearn, W. L. (1997). An Application of Non-Normal Process Capability. *Quality and Reability Engineering International*, 13, 355-360.
- Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J., & Anderson, R. E. (2005). *Multivariate Data Analysis: Pearson New International Edition*.
- Haanchumpol, T., Sudasna-na-Ayudhya, P., & Singhtaun, C. (2019). Modified Multivariate Control Chart Using Spatial Signs and Ranks for Monitoring Process Mean: A Case of t-Distribution. *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*.
- Huwang, L., Yeh, A. B., & Wu, C. W. (2007). Monitoring Multivariate Process Variability for . *Journal of Quality Industry*, 258-278.
- Jayanti, J. D., & Wibawati. (2014). Penerapan Diagram Kontrol Mewma dan Mewmv Pada Pengendalian Kualitas Air Produksi Di Ipam Ngagel I. *JURNAL SAINS DAN SENI POMITS*, 3.
- Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis (5 Edition ed.)*. United States of America: Prentice-Hall, Inc.
- Maharani, A. A., Mustafid, & Sudarno. (2018). Penerapan Diagram Kontrol MEWMA dan MEWMV pada Pengendalian Karakteristik Kualitas Air (Studi Kasus: Kualitas Pengolahan Air II PDAM Tirta Moedal Kota Semarang). *Jurnal Gaussian*, 7, 23-32.
- Montgomery, D. C. (2020). *Introduction to Statistical Quality Control*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
- Perdana, R. P. (2024). Analisis Pengendalian Kualitas Proses Produksi Air PDAM Surya Sembada Kota Surabaya Menggunakan Peta Kendali Spatial Signed Rank MEWMA (SSRM) dan Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance (MEWMV). *Tugas Akhir – SS234862*.
- Sitoesmi, B. A. (2019). Penerapan Diagram Kontrol Kombinasi MEWMA pada Pengendalian Kualitas Air Produksi di PDAM Surya Sembada Kota Surabaya. *Tugas Akhir - KS184822*.
- Zulvania, A. F. (2024). Pengendalian Kualitas Air di PDAM Surya Sembada Kota Surabaya Menggunakan Diagram Kendali MEWMV dan MSEWMA Berbasis Residual Model Time Series. *Tugas Akhir – SS234862*.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Karakteristik Kualitas Air PT XYZ

Tanggal	Kekeruhan	Klorin	TDS
01 Maret 2024	0,61	1,14	102,26
02 Maret 2024	0,67	1,12	100,56
03 Maret 2024	0,64	1,17	100,44
04 Maret 2024	0,73	1,10	102,93
05 Maret 2024	0,61	0,96	101,00
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
27 Mei 2024	0,60	1,16	102,00
28 Mei 2024	0,61	1,14	102,00
29 Mei 2024	0,60	1,15	102,00
30 Mei 2024	0,66	1,13	101,00
31 Mei 2024	0,62	1,22	102,62
01 Juni 2024	0,64	1,02	102,80
02 Juni 2024	0,63	1,10	103,33
03 Juni 2024	0,66	1,10	103,09
04 Juni 2024	0,62	0,87	103,17
05 Juni 2024	0,61	1,06	102,67
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
27 Juli 2024	0,68	0,94	102,78
28 Juli 2024	0,65	1,00	103,33
29 Juli 2024	0,65	1,03	103,12
30 Juli 2024	0,63	0,90	102,99
31 Juli 2024	0,64	0,90	103,01

Lampiran 2. Hasil Uji Dependensi

```
> #Uji Dependensi
> #install.packages("psych")
> library(psych)
> cor_matrix <- cor(data)
> cortest.bartlett(cor_matrix, n = nrow(data))
$chisq
[1] 10.49359

$p.value
[1] 0.01480447

$df
[1] 3
```

Lampiran 3. Hasil Uji Distribusi Normal Multivariat

```
> #Uji Normalitas
> #install.packages("mvnormtest")
> library(mvnormtest)
> mshapiro.test(t(data))

      Shapiro-Wilk normality test

data:  Z
W = 0.92397, p-value = 3.085e-07
```

Lampiran 4. Syntax MATLAB MEWMV

```
% --- Load data ---
data = readmatrix('F:\TA\TUGAS AKHIR\DATA_TA.xlsx', 'Sheet', 'Fase1');

% Ambil hanya variabel kualitas
X = data(:, 2:4);

% --- Preprocessing data ---
X = zscore(X); % Standardize the data

omega = 0.1;
lambda = 0.1;
p = 3;
L = 2.7900;

[brsX, klmX] = size(X);
t = brsX;
I = eye(t);

elemen = zeros(1, t);
for i = 1:t
    elemen(i) = lambda * (1 - lambda)^(i - 1);
end

M = zeros(t, t);
for j = 1:t
    for i = j:t
        M(i, j) = elemen(i - j + 1);
    end
end

A = X * X';

trv = zeros(1, t);
ekspektasi = zeros(1, t);
varian = zeros(1, t);
ba = zeros(1, t);
bb = zeros(1, t);

for u = 1:brsX
    Apartu = A(1:u, 1:u);
    Ipartu = I(1:u, 1:u);
    Mpartu = M(1:u, 1:u);

    elemenC = zeros(1, u);
    for i = 1:u
        if i > 1
            elemenC(i) = omega * (1 - omega)^(u - i);
        else
            elemenC(i) = (1 - omega)^(u - i);
        end
    end

    C = diag(elemenC);
    Q = (Ipartu - Mpartu)' * C * (Ipartu - Mpartu);

    trv(u) = trace(Q * Apartu);
    ekspektasi(u) = p * trace(Q);

    Q2 = Q.^2;
```

```

sumQ2 = sum(Q2(:));
varian(u) = 2 * p * sumQ2;

ba(u) = ekspektasi(u) + L * sqrt(varian(u));
bb(u) = ekspektasi(u) - L * sqrt(varian(u));
end

% Gunakan seluruh vector trv dan batas kendali
trvpartial = trv;
ekspekpartial = ekspektasi;
varpartial = varian;
bapartial = ba;
bbpartial = bb;

keluar = 0;
d = 0;
yangkeluar = [];

for i = 1:t-1
    if trvpartial(i) < bbpartial(i)
        keluar = keluar + 1;
        d = d + 1;
        yangkeluar(d) = i;
    end
    if trvpartial(i) > bapartial(i)
        keluar = keluar + 1;
        d = d + 1;
        yangkeluar(d) = i;
    end
end
end

```

Lampiran 5. Syntax R Transformasi *Spatial Signed Rank*

```
# Data Standardized Fase 1
df1 <- read_excel("F:/TA/FIX/DATASSR.xlsx", sheet = "DATASSR1")
head(df1)

#== Transformasi Spatial Signed Rank ==
# Mengatur tampilan grafik dalam 2x2 grid
par(mfrow = c(2, 2), pty = "s", las = 1)

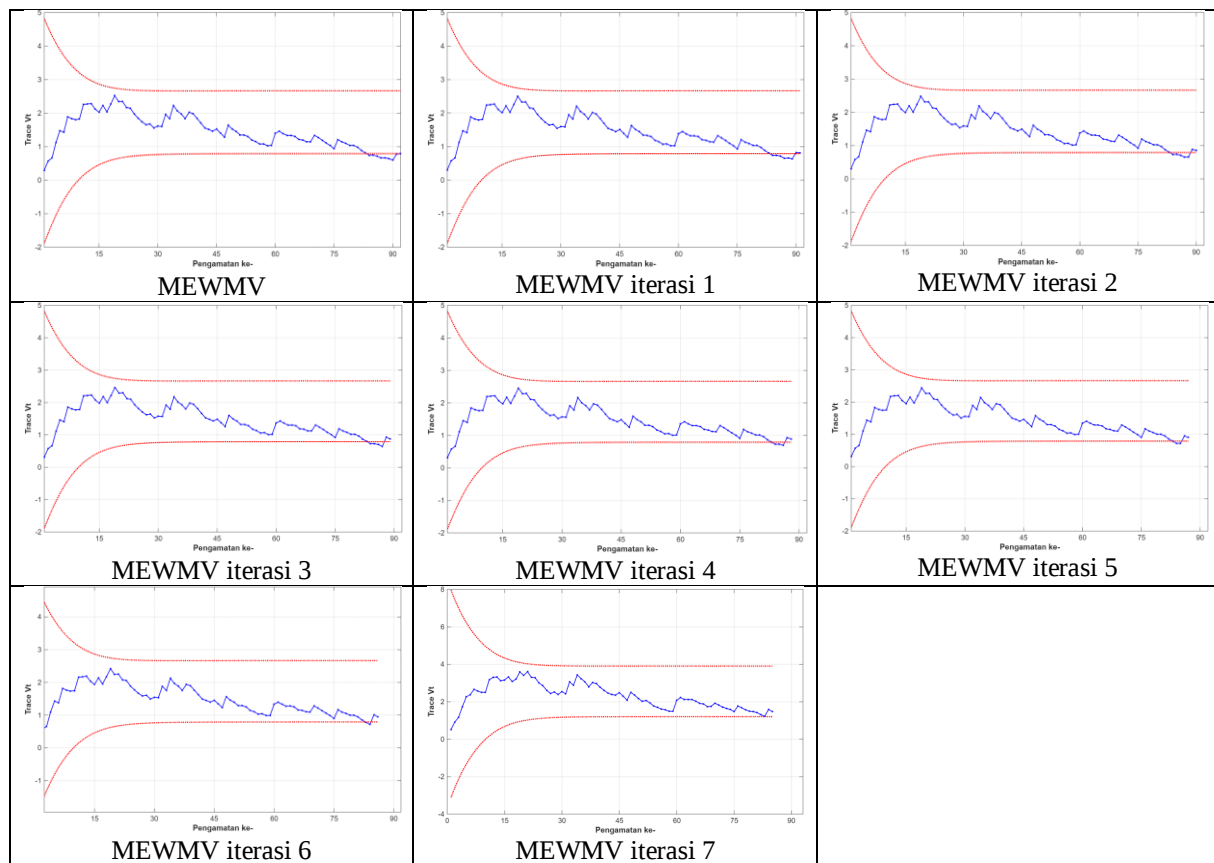
# Plot data asli
plot(df1, xlim = c(-4, 4),
      ylim = c(-4, 4),
      main = "Original Data")

# Transformasi Spatial Sign
Sx1 <- spatial.sign(df1, FALSE, FALSE)
plot(Sx1, xlim = c(-1, 1),
      ylim = c(-1, 1),
      xlab = "X_1",
      ylab = "X_2",
      main = "Spatial Signs")
head(Sx1)

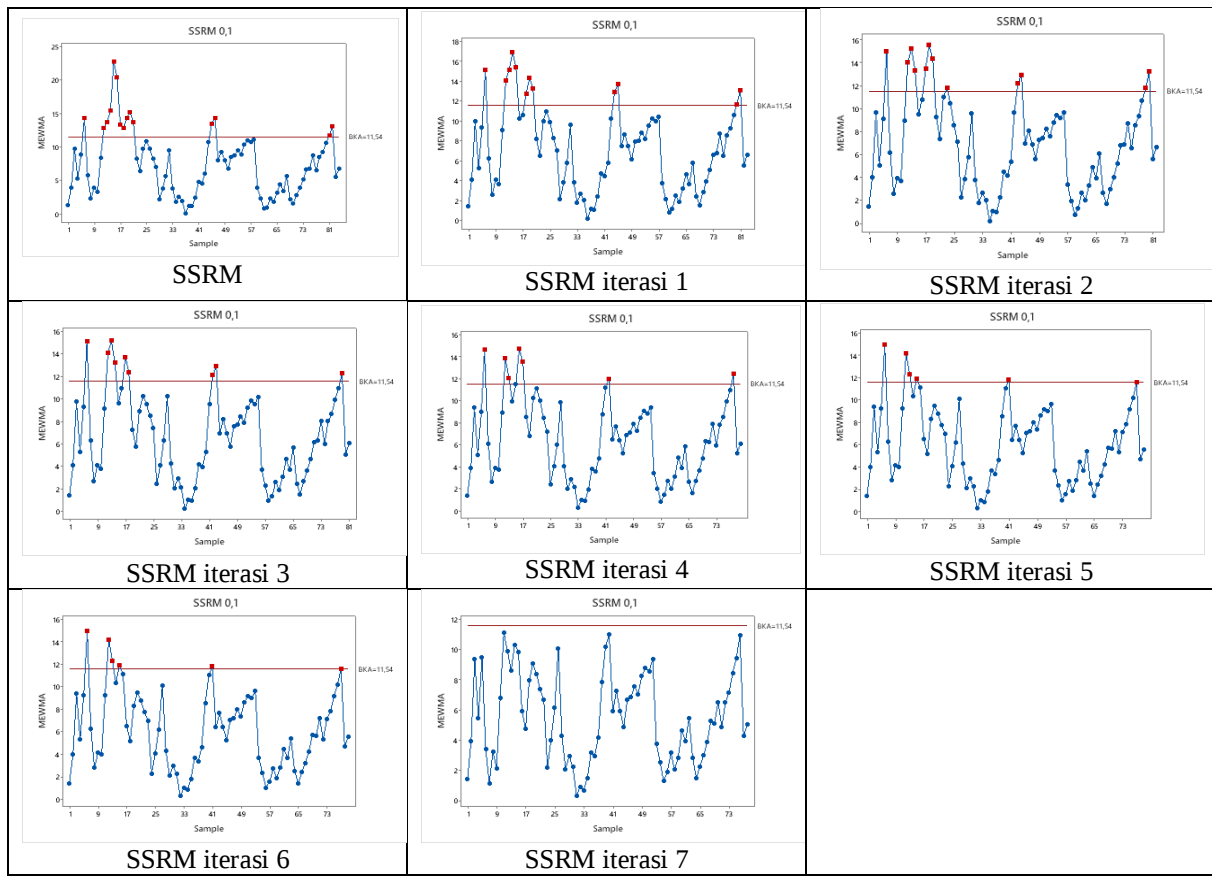
# Transformasi Spatial Rank
Rx1 <- spatial.rank(df1, FALSE)
plot(Rx1, xlim = c(-1, 1),
      ylim = c(-1, 1),
      xlab = "X_1",
      ylab = "X_2",
      main = "Spatial Ranks")
head(Rx1)

# Transformasi Spatial Signed Rank
Qx1 <- spatial.signrank(df1, FALSE, FALSE)
plot(Qx1, xlim = c(-1, 1),
      ylim = c(-1, 1),
      xlab = "X_1",
      ylab = "X_2",
      main = "Spatial Signed Ranks")
head(Qx1)
```

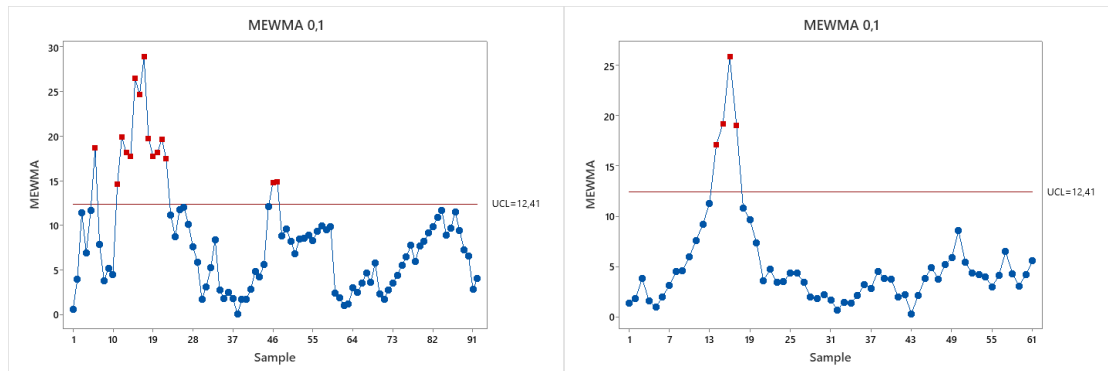
Lampiran 6. Iterasi Diagram Kendali MEWMV Fase I



Lampiran 7. Iterasi Diagram Kendali SSRM Fase 1



Lampiran 8. Diagram Kendali MEWMA Fase I dan II



Lampiran 9. Tabel Perbandingan Jumlah Pengamatan *Out of Control* Diagram Kendali SSRM dengan MEWMA.

Fase	Jenis Diagram Kendali	Jumlah <i>Out of Control</i>
1	SSRM	17
	MEWMA	15
2	SSRM	5
	MEWMA	4

Lampiran 10. Tabel Nilai L pada Diagram MEWMV $ARL_0 \approx 370$ ($p = 2$)

ω	λ	L	ω	λ	L	ω	λ	L
0.1	0.1	2.8725	0.4	0.1	4.1625	0.7	0.1	4.7281
	0.2	2.8738		0.2	4.1675		0.2	4.7313
	0.3	2.8800		0.3	4.1788		0.3	4.7288
	0.4	2.8838		0.4	4.1875		0.4	4.7325
	0.5	2.8900		0.5	4.1900		0.5	4.7350
	0.6	2.8975		0.6	4.2050		0.6	4.7450
	0.7	2.9038		0.7	4.2088		0.7	4.7250
	0.8	2.9138		0.8	4.2150		0.8	4.7225
	0.9	2.9238		0.9	4.2250		0.9	4.7100
0.2	0.1	3.4725	0.5	0.1	4.4000	0.8	0.1	4.8313
	0.2	3.4775		0.2	4.4000		0.2	4.8281
	0.3	3.4850		0.3	4.4050		0.3	4.8313
	0.4	3.4975		0.4	4.4150		0.4	4.8313
	0.5	3.5075		0.5	4.4225		0.5	4.8359
	0.6	3.5175		0.6	4.4225		0.6	4.8250
	0.7	3.5275		0.7	4.4300		0.7	4.8188
	0.8	3.5350		0.8	4.4350		0.8	4.8063
	0.9	3.5394		0.9	4.4350		0.9	4.8004
0.3	0.1	3.8675	0.6	0.1	4.5875	0.9	0.1	4.8953
	0.2	3.8725		0.2	4.5925		0.2	4.8900
	0.3	3.8800		0.3	4.5875		0.3	4.8900
	0.4	3.8850		0.4	4.5938		0.4	4.8900
	0.5	3.9000		0.5	4.6013		0.5	4.8950
	0.6	3.9100		0.6	4.6000		0.6	4.8813
	0.7	3.9213		0.7	4.5975		0.7	4.8725
	0.8	3.9325		0.8	4.6000		0.8	4.8638
	0.9	3.9413		0.9	4.5975		0.9	4.8475

Lampiran 11. Tabel Tabel Nilai L pada Diagram MEWMV $ARL_0 \approx 370$ ($p = 3$)

ω	λ	L	ω	λ	L	ω	λ	L
0.1	0.1	2.7900	0.4	0.1	3.8984	0.7	0.1	4.3777
	0.2	2.7939		0.2	3.9063		0.2	4.3797
	0.3	2.7949		0.3	3.9121		0.3	4.3816
	0.4	2.7988		0.4	3.9219		0.4	4.3836
	0.5	2.7979		0.5	3.9277		0.5	4.3855
	0.6	2.8027		0.6	3.9395		0.6	4.3875
	0.7	2.8066		0.7	3.9492		0.7	4.3836
	0.8	2.8105		0.8	3.9511		0.8	4.3836
	0.9	2.8164		0.9	3.9492		0.9	4.3758
0.2	0.1	3.3105	0.5	0.1	4.1016	0.8	0.1	4.4707
	0.2	3.3086		0.2	4.1016		0.2	4.4668
	0.3	3.3164		0.3	4.1094		0.3	4.4629
	0.4	3.3213		0.4	4.1152		0.4	4.4688
	0.5	3.3340		0.5	4.1191		0.5	4.4688
	0.6	3.3438		0.6	4.1270		0.6	4.4688
	0.7	3.3535		0.7	4.1367		0.7	4.4629
	0.8	3.3594		0.8	4.1387		0.8	4.4590
	0.9	3.3691		0.9	4.1328		0.9	4.4551
0.3	0.1	3.6484	0.6	0.1	4.2578	0.9	0.1	4.5234
	0.2	3.6523		0.2	4.2578		0.2	4.5195
	0.3	3.6602		0.3	4.2617		0.3	4.5117
	0.4	3.6699		0.4	4.2695		0.4	4.5195
	0.5	3.6797		0.5	4.2715		0.5	4.5176
	0.6	3.6895		0.6	4.2715		0.6	4.5137
	0.7	3.6943		0.7	4.2734		0.7	4.5098
	0.8	3.7011		0.8	4.2813		0.8	4.5078
	0.9	3.7070		0.9	4.2715		0.9	4.4984

Lampiran 12. Tabel Perbandingan ARL_1 berdasarkan Nilai $\lambda = 0,1; 0,2; 0,3$ serta Pergeseran δ dengan $ARL_0 \approx 370$ ($p = 3$)

δ	λ					
	0,1		0,2		0,3	
	BKA					
	15,05	11,54	19,88	11,59	24,11	11,09
	MEWMA	SSRM	MEWMA	SSRM	MEWMA	SSRM
0,00	370	371	371	371	371	371
0,10	327	279	357	291	364	302
0,25	193	114	295	142	334	152
0,50	58	33	161	40	242	44
1,00	13	9	29	10	79	10
1,50	6	4	10	4	21	4
2,50	2	2	3	2	4	2

Lampiran 13. Tabel Perbandingan ARL_1 berdasarkan Nilai $\lambda = 0,4; 0,5; 0,8$ serta Pergeseran δ dengan $ARL_0 \approx 370$ ($p = 3$)

δ	λ					
	0,4		0,5		0,8	
	BKA					
	27,89	10,42	31,15	9,69	37,77	7,49
	MEWMA	SSRM	MEWMA	SSRM	MEWMA	SSRM
0,00	370	371	371	370	371	371
0,10	366	300	369	300	369	267
0,25	344	154	354	152	363	106
0,50	285	46	312	44	346	29
1,00	146	10	201	9	290	7
1,50	50	4	97	4	218	3
2,50	7	1	13	1	87	1

SURAT KETERANGAN

No. 01/Surket/MPM/VI-2025

Yang bertanda tangan di bawah ini menerangkan bahwa :

Nama : Aura Sabina
NRP : 5003211162
Perguruan Tinggi : Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Program Studi : Statistika

Dengan ini menyatakan bahwa yang bersangkutan telah mendapat izin untuk melakukan pengambilan data di PT Milwater Mandiri dalam rangka penyusunan Tugas Akhir dengan judul :

"Analisis Pengendalian Kualitas Air Menggunakan Diagram Kendali MEWMV dan SSRM pada PT Milwater Mandiri."

Demikian surat keterangan ini dibuat untuk dipergunakan sebagaimana mestinya.

Tangerang, 01 Juni 2025
PT MILWATER PRATAMA MANDIRI



MILWATER
PRATAMA MANDIRI

Mulyo Adi Winoto
Direktur

BIODATA PENULIS



Penulis bernama Aura Sabina. Penulis dilahirkan di Jakarta, 16 November 2002, merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu di TK Islam As Salam, SDN Joglo 10 Pagi Jakarta, SMPN134 Jakarta, dan SMAN 85 Jakarta. Setelah lulus dari pendidikan di SMAN 85 Jakarta tahun 2021, Penulis mendaftar dan mengikuti SMITS (Seleksi Mandiri ITS) dan diterima di Departemen Statistika FSAD - ITS pada tahun 2021 dan terdaftar dengan NRP 5003211162

Selama berkuliah di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS), penulis mengikuti berbagai kegiatan akademik dan kegiatan non-akademik. Salah satu kegiatan non-akademik yang diikuti adalah sebagai panitia Pekan Raya Statistika (PRS) tahun 2023 sebagai staff event opening dan closing. Selain itu berpartisipasi dalam beberapa kepanitiaan seperti Aski Nirwasita 2022, dan kegiatan lainnya. Penulis berharap bagi yang ingin berdiskusi dan ingin memberikan kritik serta saran dalam konteks Tugas Akhir dan konsultasi, dapat disampaikan permintaannya melalui email berikut: aurasbina@gmail.com