ITS
Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember

TUGAS AKHIR - SM234801

DIMENSI METRIK KETETANGGAAN LOKAL GRAF *EDGE-DEGREE SPLITTING*

AFFELLA DESTYAN REGINATASYA

NRP 5002221007

Dosen Pembimbing

Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

NIP 19640304 198903 2 002

Program Studi Sarjana

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2026

TUGAS AKHIR - SM234801

DIMENSI METRIK KETETANGGAAN LOKAL GRAF *EDGE-DEGREE SPLITTING*

AFFELLA DESTYAN REGINATASYA

NRP 5002221007

Dosen Pembimbing

Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

NIP 19640304 198903 2 002

Program Sarjana

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2026

FINAL PROJECT - SM234801

LOCAL ADJACENCY METRIC DIMENSION OF EDGE-DEGREE SPLITTING GRAPHS

AFFELLA DESTYAN REGINATASYA

NRP 5002221007

Supervisor

Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

NIP 19640304 198903 2 002

Bachelor Program

Department of Mathematics

Faculty of Scientics

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2026

LEMBAR PENGESAHAN

DIMENSI METRIK KETETANGGAAN LOKAL GRAF *EDGE-DEGREE SPLITTING*

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Matematika pada
Program Studi S-1 Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh: **AFFELLA DESTYAN REGINATASYA**
NRP 5002221007

Surabaya, Juli 2026

Disetujui oleh:
Pembimbing:

1. Dr. Dra. Rinurwati, M.Si (.....)
   NIP 19640304 198903 2 002

Penguji:

1. Prof. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. (.....)
   NIP 19611115 198703 1 003

2. Dr. Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si (.....)
   NIP. 19761215 200312 2 001

3. Soleha, S.Si, M.Si (.....)
   NIP 19830107 200604 2 001

Mengetahui
Kepala Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
NIP 19730930 199702 1 001

APPROVAL SHEET

LOCAL ADJACENCY METRIC DIMENSION OF EDGE-DEGREE SPLITTING GRAPHS

FINAL PROJECT

Submitted to fulfill one of the requirements
For obtaining a degree Bachelor of Mathematics at
Bachelor Program of Mathematics
Department of Mathematics
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

By: **AFFELLA DESTYAN REGINATASYA**
NRP 5002221007

Surabaya, July 2026

Approved By:
Advisor:

1. Dr. Dra. Rinurwati, M.Si (.....)
   NIP 19640304 198903 2 002

Examiners:

1. Prof. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. (.....)
   NIP 19611115 198703 1 003
2. Dr. Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si (.....)
   NIP 19761215 200312 2 001
3. Soleha, S.Si, M.Si (.....)
   NIP 19830107 200604 2 001

Acknowledged by
Head of Mathematics Department
Faculty of Science and Data Analytics

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
NIP 19730930 199702 1 001

PERNYATAAN ORISINALITAS

Yang bertanda tangan disini:

Nama Mahasiswa / NRP	:	Affella Destyan Reginatsaya / 5002221007
Departemen	:	Matematika
Dosen Pembimbing / NIP	:	Dr. Dra. Rinurwati, M.Si / 19640304 198903 2 002

dengan ini menyatakan bahwa Tugas Akhir dengan judul "DIMENSI METRIK KETETANGGAAN LOKAL GRAF *EDGE-DEGREE SPLITTING*" adalah hasil karya sendiri, bersifat orisinal, dan ditulis dengan mengikuti kaidah penulisan ilmiah.

Bilamana di kemudian hari ditemukan ketidaksesuaian dengan pernyataan ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan yang berlaku di Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, 13 Juli 2026

Mengetahui
Dosen Pembimbing

Dr. Dra. Rinurwati, M.Si
NIP 19640304 198903 2 002

Mahasiswa

Affella Destyan Reginatsaya
NRP 5002221007

STATEMENT OF ORIGINALITY

The undersigned below:

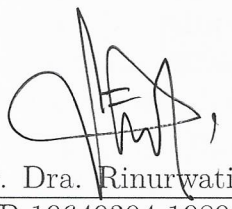
Student's Name/NRP	:	Affella Destyan Reginatsaya / 5002221007
Department	:	Mathematics
Advisor	:	Dr. Dra. Rinurwati, M.Si / 19640304 198903 2 002

Hereby declare that the Final Project with the title of "LOCAL ADJACENCY METRIC DIMENSION OF EDGE-DEGREE SPLITTING GRAPHS" is the result of my own work, is original, and is written by following the rules of scientific writing.

If in the future there is a discrepancy with this statement, then I am willing to accept sanctions in accordance with the provisions that apply at Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, 13 July 2026

Acknowledged,
Advisor



Dr. Dra. Rinurwati, M.Si
NIP 19640304 198903 2 002

Student

Affella Destyan Reginatsaya
NRP 5002221007

ABSTRAK

DIMENSI METRIK KETETANGGAAN LOKAL GRAF *EDGE-DEGREE SPLITTING*

Nama Mahasiswa / NRP	:	Affella Destyan Reginatsaya / 5002221007
Departemen	:	Matematika FSAD -ITS
Dosen Pembimbing	:	Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

Abstrak

Dimensi metrik merupakan salah satu parameter dalam teori graf yang digunakan untuk membedakan pasangan simpul berdasarkan representasi jaraknya terhadap suatu himpunan pembeda. Pengembangan konsep ini menghasilkan dimensi metrik ketetanggaan lokal yang membedakan pasangan simpul bertetangga berdasarkan representasi ketetanggaannya terhadap suatu himpunan pembeda. Kardinalitas minimum himpunan pembeda ketetanggaan lokal pada graf G dinotasikan dengan $dim_{Al}(G)$. Pada penelitian ini dikonstruksi suatu operasi graf baru yang disebut *edge-degree splitting* dengan notasi $EDS(G)$, yaitu operasi yang dilakukan dengan menambahkan sebuah sisi baru $e'_k = u_k v_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$yang dihubungkan dengan seluruh sisi $e_p = u_p v_p$ dan $e_q = u_q v_q$ yang simpulnya yang termasuk dalam himpunan sisi yang simpulnya memiliki $deg(u_p) = deg(u_q)$ dan $deg(v_p) = deg(v_q)$. Operasi tersebut menghasilkan graf baru dengan struktur yang berbeda dari graf asal. Selanjutnya, ditentukan dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf hasil operasi $EDS(G)$ yang dibangun dari graf dasar P_n, C_n, K_n, $K_{s,t}$, dan S_n, serta beberapa graf khusus dari operasi korona ($\odot$), yaitu $P_n \odot K_1$, $C_n \odot K_1$, $K_n \odot K_1$, $K_{s,t} \odot K_1$, dan H_n. Hasil penelitian menunjukkan bahwa diperoleh nilai dimensi metrik ketetanggaan lokal, $dim_{Al}(EDS(G))$, pada graf dasar dan graf khusus tersebut.

Kata kunci: *Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal, Representasi Ketetanggaan, Jarak Ketetanggaan, Graf Edge-Degree Splitting, Operasi Korona.*

ABSTRACT

LOCAL ADJACENCY METRIC DIMENSION OF EDGE-DEGREE SPLITTING GRAPHS

Student Name / NRP	:	Affella Destyan Reginatsaya / 5002221007
Departement	:	Mathematics SCIENTICS - ITS
Supervisor	:	Dr. Dra. Rinurwati, M.Si

Abstract

The metric dimension is one of the parameters in graph theory used to distinguish pairs of vertices based on their distance representation to a resolving set. The development of this concept has produced the local adjacency metric dimension, which distinguishes pairs of adjacent vertices based on their adjacency representation to a resolving set. The minimum cardinality of a local adjacency resolving set in a graph G is denoted by $\dim_{Al}(G)$. In this research, a new graph operation called *edge-degree splitting* is constructed, denoted by $EDS(G)$, which is performed by adding a new edge $e'_k = u_k v_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$, connected to all edges $e_p = u_p v_p$ and $e_q = u_q v_q$ whose vertices belong to the edge set where the vertices satisfy $\deg(u_p) = \deg(u_q)$ and $\deg(v_p) = \deg(v_q)$. This operation produces a new graph with a structure different from the original graph. Furthermore, the local adjacency metric dimension of the graphs resulting from the $EDS(G)$ operation is determined, constructed from the base graphs P_n, C_n, K_n, $K_{s,t}$, and S_n, as well as several special graphs resulting from the corona operation ($\odot$), namely $P_n \odot K_1$, $C_n \odot K_1$, $K_n \odot K_1$, $K_{s,t} \odot K_1$, and H_n. The results show that the local adjacency metric dimension values, $\dim_{Al}(EDS(G))$, are obtained for these base graphs and special graphs.

Keywords: *Local Adjacency Metric Dimension, Adjacency Representation, Adjacency Distance, Edge-Degree Splitting Graphs, Corona Operation.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat, karunia, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul:

"DIMENSI METRIK KETETANGGAAN LOKAL GRAF *EDGE-DEGREE SPLITTING*"

Tugas akhir ini disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Sarjana Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Dalam proses penyusunan tugas akhir ini, penulis memperoleh banyak bantuan, bimbingan, dukungan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua dan keluarga yang senantiasa memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis
2. Ibu Dr. Dra. Rinurwati M.Si selaku dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, serta masukan yang sangat berharga selama proses penyusunan skripsi.
3. Ibu Dr. Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si, Ibu Soleha, S.Si, M.Si, dan Bapak Prof. Dr. Chairul Imron, MI.Komp. selaku dosen penguji yang memberikan kritik dan saran yang membangun kepada Penulis, serta Bapak/Ibu dosen pengajar yang telah memberikan ilmu buat Penulis.
4. Teman-teman Matematika ITS 2022 yang telah membantu baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyusunan tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi perbaikan di masa mendatang. Semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan manfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan pembaca.

Surabaya, Juni 2026

Affella Destyan Reginatasya

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN i

APPROVAL SHEET iii

PERNYATAAN ORISINALITAS v

STATEMENT OF ORIGINALITY vii

ABSTRAK ix

ABSTRACT xi

KATA PENGANTAR xiii

DAFTAR ISI xv

DAFTAR GAMBAR xvii

DAFTAR TABEL xix

DAFTAR SIMBOL xxi

BAB I PENDAHULUAN 1
- 1.1 Latar Belakang . . . 1
- 1.2 Rumusan Masalah . . . 2
- 1.3 Batasan Masalah . . . 2
- 1.4 Tujuan . . . 2
- 1.5 Manfaat . . . 3

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 5
- 2.1 Penelitian Terdahulu . . . 5
- 2.2 Dasar Teori Graf . . . 6
- 2.3 Jenis-Jenis Graf . . . 7
- 2.4 Dimensi Metrik Graf . . . 10
- 2.5 Dimensi Metrik Ketetanggan Graf . . . 11
- 2.6 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf . . . 12
- 2.7 Graf Splitting . . . 13
- 2.8 Graf Degree Splitting . . . 13

BAB III METODOLOGI 15
- 3.1 Tahapan Penelitian . . . 15
- 3.2 Diagram Alir Langkah I . . . 16
- 3.3 Diagram Alir Langkah II . . . 17

BAB IV Hasil dan Pembahasan 19
- 4.1 Definisi Graf *Edge-Degree Splitting* . . . 19
- 4.2 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Graf Dasar . . . 20
  - 4.2.1 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Lintasan . . . 20

4.2.2 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Lengkap . . . 26
4.2.3 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Siklus . . . 29
4.2.4 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Bipartit Lengkap . . . 33
4.2.5 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Bintang . . . 37
4.3 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf Khusus . . . 39
4.3.1 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Sisir . . . 40
4.3.2 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* $K_n \odot K_1$ . . . 48
4.3.3 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Matahari . . . 52
4.3.4 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* $K_{s,t} \odot K_1$ . . . 56
4.3.5 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* *Helm* . . . 62
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN 69
5.1 Kesimpulan . . . 69
5.2 Saran . . . 70
DAFTAR PUSTAKA 71
UCAPAN TERIMA KASIH 73
BIODATA PENULIS 75

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G 6
Gambar 2.2 Graf P_n 7
Gambar 2.3 Graf K_n 7
Gambar 2.4 Graf C_n 7
Gambar 2.5 Graf $K_{s,t}$, $s+t=n$ 8
Gambar 2.6 Graf S_n 8
Gambar 2.7 Graf $P_n \bigodot K_1$ 9
Gambar 2.8 Graf $K_n \bigodot K_1$ 9
Gambar 2.9 Graf $K_{s,t} \bigodot K_1$ 9
Gambar 2.10 Graf $C_n \bigodot K_1$ 10
Gambar 2.11 Graf H_n 10
Gambar 2.12 Graf $Spl(G)$ 13
Gambar 2.13 Graf $DS(G)$ 14

Gambar 3.1 Diagram Alir Langkah 1 16
Gambar 3.2 Diagram Alir Langkah 2 17

Gambar 4.1 Graf $EDS(G)$ 19
Gambar 4.2 Graf P_n 20
Gambar 4.3 Graf $EDS(P_3)$ 21
Gambar 4.4 Graf $EDS(P_4)$ 21
Gambar 4.5 Graf $EDS(P_n)$ 21
Gambar 4.6 Graf $EDS(P_{10})$ 26
Gambar 4.7 Graf K_n 27
Gambar 4.8 Graf $EDS(K_n)$ 27
Gambar 4.9 Graf $EDS(K_5)$ 28
Gambar 4.10 Graf C_n 30
Gambar 4.11 Graf $EDS(C_n)$ 30
Gambar 4.12 Graf $EDS(C_{11})$ 32
Gambar 4.13 Graf $K_{s,t}$ 34
Gambar 4.14 Graf $EDS(K_{s,t})$ 34
Gambar 4.15 Graf $EDS(K_{5,6})$ 36
Gambar 4.16 Graf S_n 37
Gambar 4.17 Graf $EDS(S_n)$ 37
Gambar 4.18 Graf $EDS(S_8)$ 39
Gambar 4.19 Graf $P_n \bigodot K_1$ 41
Gambar 4.20 Graf $EDS(P_3 \bigodot K_1)$ 41
Gambar 4.21 Graf $EDS(P_4 \bigodot K_1)$ 41
Gambar 4.22 Graf $EDS(P_n \bigodot K_1)$ 41
Gambar 4.23 Graf $EDS(P_{12} \bigodot K_1)$ 47
Gambar 4.24 Graf $K_n \bigodot K_1$ 49
Gambar 4.25 Graf $EDS(K_n \bigodot K_1)$ 49

Gambar 4.26 Graf $EDS(K_5 \bigodot K_1)$ 51
Gambar 4.27 Graf $C_n \bigodot K_1$ 53
Gambar 4.28 Graf $EDS(C_n \bigodot K_1)$ 53
Gambar 4.29 Graf $EDS(C_6 \bigodot K_1)$ 55
Gambar 4.30 Graf $K_{s,t} \bigodot K_1$ 57
Gambar 4.31 Graf $EDS(K_{s,t} \bigodot K_1)$, $s \neq t$ 57
Gambar 4.32 Graf $EDS(K_{s,t} \bigodot K_1)$, $s = t$ 58
Gambar 4.33 Graf $EDS(K_{3,4} \bigodot K_1)$ 61
Gambar 4.34 Graf H_n 63
Gambar 4.35 Graf $EDS(H_4)$ 63
Gambar 4.36 Graf $EDS(H_n)$ 63
Gambar 4.37 Graf $EDS(H_5)$ 67

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Himpunan untuk $|S| = 4$ graf $EDS(P_{10})$. 26
Tabel 4.2 Himpunan untuk $|S| = 4$ graf $EDS(K_5)$. 29
Tabel 4.3 Himpunan untuk $|S| = 3$, graf $EDS(C_{11})$. 33
Tabel 4.4 Himpunan untuk $|S| = 2$, graf $EDS(K_{5,6})$. 37
Tabel 4.5 Himpunan untuk $|S| = 2$ graf $EDS(S_8)$. 39
Tabel 4.6 Himpunan untuk $|S| = 6$ graf $EDS(P_n \bigodot K_1)$ 48
Tabel 4.7 Himpunan untuk $|S| = 4$ graf $EDS(K_n \bigodot K_1)$. 52
Tabel 4.8 Himpunan untuk $|S| = 3$ graf $EDS(C_n \bigodot K_1)$ 56
Tabel 4.9 Himpunan terurut untuk $|P| = 4$, graf $EDS(K_{s,t} \bigodot K_1)$ 62
Tabel 4.10 Himpunan untuk $|S| = 5$, graf $EDS(H_n)$ 68

DAFTAR SIMBOL

G	:	Graf G	1
P_n	:	Graf lintasan berordo n	2
K_n	:	Graf lengkap berordo n	2
C_n	:	Graf siklus berordo n	2
$K_{s,t}$	:	Graf bipartit berordo $s + t = n$	2
S_n	:	Graf bintang berordo n	2
H_n	:	Graf *helm* berordo n	2
$\odot$	:	Operasi korona	2
$\|V(G)\|$	:	Ordo graf	6
$dim(G)$	:	Dimensi metrik graf G	11
$d(u, v)$	:	Jarak antara dua simpul u dan v	11
$r(v \mid S)$	:	Representasi simpul v terhadap himpunan pembeda S	11
$r_A(v \mid S)$	:	Representasi ketetanggaan v terhadap himpunan pembeda S	11
$d_A(u, v)$	:	Jarak ketetanggaan antara dua simpul u dan v	11
$\|S\|$	:	Kardinalitas himpunan S	11
$dim_A(G)$	:	Dimensi metrik ketetanggaan graf G	12
$dim_{Al}(G)$	:	Dimensi metrik ketetanggaan lokal graf G	12
$Spl(G)$	:	Graf *splitting*	13
$DS(G)$	:	Graf *degree splitting*	13
F_i	:	Himpunan simpul	15

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang dalam matematika yang banyak digunakan untuk merepresentasikan berbagai permasalahan nyata. Permasalahan pertama adalah cara melintasi Jembatan Königsberg dengan setiap jembatan hanya dilalui tepat sekali. Permasalahan tersebut menjadi asal mula adanya teori graf yang diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1735 (Levin, 2025). Sejak saat itu, teori graf berkembang cukup pesat. Salah satu topik yang berkembang pesat dalam teori graf adalah dimensi metrik. Dimensi metrik diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 serta Harary dan Melter pada tahun 1976. Dimensi metrik adalah suatu konsep yang digunakan untuk mengukur suatu jarak dari sebuah graf. Seiring berjalannya waktu, terdapat beberapa varian dimensi metrik yang muncul, seperti dimensi metrik lokal, dimensi metrik non lokal, dan dimensi metrik ketetanggaan.

Pada tahun 2013, penelitian mengenai dimensi metrik ketetanggaan mulai berkembang melalui kajian Rodriguez-Velazquez dan Fernau yang membahas mengenai dimensi metrik ketetanggaan beserta variasi lokalnya pada graf hasil operasi *corona* dan *strong product* (Rodríguez-Velázquez & Fernau, 2013). Penelitian ini menunjukkan bahwa struktur operasi graf memiliki pengaruh terhadap nilai dimensi metrik ketetanggaan dan membuka akses penelitian yang lebih pada dimensi metrik ketetanggaan lokal. Pada tahun 2017, penelitian mengenai dimensi metrik ketetanggaan lokal mulai digunakan pada graf tertentu, salah satunya pada *wheel related graphs* dengan titik gantung atau (*pendant points*) sebagaimana dibahas oleh (Rinurwati, Suprajitno, & Slamin, 2017). Penelitian tersebut memberikan gambaran awal mengenai bagaimana penambahan struktur tertentu seperti *pendant points* memengaruhi nilai dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf. Selanjutnya, pada tahun 2019, penelitian Albirri dkk. membahas dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf *splitting*, khususnya graf yang dibentuk melalui operasi *splitting* (Albirri et al., 2019). Hasil penelitian ini memberikan karakterisasi nilai dimensi metrik ketetanggaan lokal pada berbagai kelas graf *splitting* seperti *cycle*, *path*, *ladder*, dan *triangular ladder*. Perkembangan terbaru pada tahun 2025 ditunjukkan oleh Ghalavand, Klavžar, dan Li melalui penelitian mengenai hubungan antara dimensi metrik ketetanggaan lokal dan *clique number* suatu graf (Ghalavand, Klavžar, & Li, 2025). Penelitian tersebut memberikan batas atas umum untuk dimensi metrik ketetanggaan lokal berdasarkan ukuran *clique number*, serta mengonfirmasi beberapa dugaan sebelumnya terkait hubungan antara struktur klika dan kemampuan pembeda lokal dalam graf.

Selain itu perkembangan mengenai operasi disuatu graf juga berkembang seiring berjalannya waktu, salah satunya adalah graf *splitting*. Pada tahun 1981, Sampathkumar dan Walikar memperkenalkan konsep graf *splitting*, yaitu operasi yang menduplikat setiap simpul pada graf G sehingga menjadi dua yakni simpul asli dan simpul hasil *splitting* di mana simpul hasil *splitting* tetap mempertahankan hubungan ketetanggaan dari simpul asal. Operasi ini menghasilkan graf baru dengan struktur yang lebih kompleks sehingga perubahan tersebut memengaruhi sifat graf, termasuk pelabelan

dan karakteristik ketetanggaannya (Sampathkumar & Walikar, 1981). Perkembangan lanjutan muncul pada tahun 2004 ketika Ponraj dan Somasundaram mengusulkan konsep graf *degree splitting*, yaitu variasi dari graf *splitting* yang mempertimbangkan derajat simpul, sehingga operasi *splitting* diterapkan berdasarkan struktur lokal dari setiap simpul pada graf (Ponraj & Somasundaram, 2004). Kedua operasi ini menjadi dasar penting dalam analisis bagaimana transformasi graf memengaruhi dimensi metrik dan dimensi metrik ketetanggaannya.

Berdasarkan teori-teori mengenai dimensi metrik serta karakteristik graf *degree splitting* dan graf *splitting*, pada penelitian ini akan dikembangkan konsep dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf *edge-degree splitting*. Hasil penelitian ini diharapkan dapat ikut berperan dalam perkembangan teori graf dan dapat dijadikan referensi untuk bahan penelitian selanjutnya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dibahas sebelumnya, didapat rumusan masalah pada topik ini adalah:

1. Bagaimana definisi dari graf *edge-degree splitting*?
2. Bagaimana cara menentukan dimensi metrik ketetanggan lokal pada graf *edge-degree splitting*?

1.3 Batasan Masalah

Adapun graf yang digunakan untuk mencari dimensi metrik ketetanggan lokal dari graf hasil operasi *edge-degree splitting* adalah:

1. Graf dasar antara lain:
   (a) Graf lintasan P_n dengan $n \geq 2$
   (b) Graf Siklus C_n dengan $n \geq 4$
   (c) Graf Lengkap K_n dengan $n \geq 3$
   (d) Graf Bipartit Lengkap $K_{s,t}$ dengan $s \geq 2$, $t \geq 3$
   (e) Graf Bintang S_n dengan $n \geq 4$
2. Graf khusus antara lain:
   (a) Graf Matahari $C_n \bigodot K_1$ dengan $n \geq 4$
   (b) Graf Sisir $P_n \bigodot K_1$ dengan $n \geq 2$
   (c) Graf $K_{s,t} \bigodot K_1$, dengan $s \geq 2$, $t \geq 2$
   (d) Graf $K_n \bigodot K_1$ dengan $n \geq 3$
   (e) Graf Helm H_n dengan $n \geq 3$

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah sebelumnya, didapatkan tujuan adalah:

1. Mendefinisikan graf *edge-degree splitting*.
2. Menentukan dimensi metrik ketetanggan lokal pada graf *edge-degree splitting*.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. Untuk memperluas variasi dalam teori graf, melalui penambahan variasi baru mengenai hasil operasi graf.

2. Dapat digunakan sebagai referensi penelitian berikutnya bagi pembaca yang tertarik dengan teori graf.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada bagian ini, akan menyampaikan hasil penelitian terdahulu terkait topik Tugas Akhir:

Pada tahun 1735 Leonhard Euler memperkenalkan teori graf pertama kali melalui permasalahan Jembatan Koninsberg (Levin, 2025). Sejak saat itu, perkembangan teori graf cukup pesat. Terdapat banyak peneliti yang membahas mengenai graf dan variasi-variasi terbarunya. Seperti, penelitian mengenai graf *degree splitting* dikembangkan oleh Ponraj dan Somasundaram (2004). Dalam penelitian ini, mereka memperkenalkan graf *degree splitting* sebagai variasi dari graf *splitting* yang didasarkan pada derajat setiap simpul dalam graf asal. Pada operasi ini, untuk setiap himpunan simpul yang memiliki derajat sama, ditambahkan sebuah simpul baru yang kemudian dihubungkan dengan seluruh simpul dalam himpunan tersebut. Penelitian ini membahas bagaimana struktur graf berubah ketika simpul-simpul baru tersebut diperkenalkan, termasuk pengaruhnya terhadap ketetanggaan, kelompok simpul berderajat sama, serta karakteristik struktural graf secara keseluruhan. Penelitian mereka menunjukkan bahwa graf *degree splitting* dapat memberikan gambaran lebih jelas mengenai pengelompokan simpul berdasarkan derajat dan memberikan dasar penting dalam analisis graf yang melibatkan transformasi berbasis derajat (Ponraj & Somasundaram, 2004).

Selanjutnya, Penelitian yang dilakukan Rodriguez dan Fernau pertama kali mengkaji mengenai dimensi metrik ketetanggaan lokal. Konsep dimensi metrik ketetanggaan lokal merupakan gabungan dimensi metrik ketetanggaan dan dimensi metrik lokal. Pada penelitian mereka juga mengkaji hubungan dimensi metrik, dimensi metrik lokal, dimensi metrik ketetanggaan, dan dimensi metrik ketetanggaan lokal (Rodríguez-Velázquez & Fernau, 2013). Dari penelitian tersebut didapatkan hasil dimensi metrik ketetanggaan lokal yang akan dirujuk dalam penelitian Tugas Akhir:

Teorema 2.1.1. *(Rodríguez-Velázquez & Fernau, 2013) Misalkan G adalah graf dengan $V(G) = \emptyset$ berorde n. Maka* $\dim_{Al}(G) = 1$, *jika dan hanya jika G adalah graf bipartit yang hanya memiliki satu komponen tak trivial G^* dan memenuhi $r(G^*) \leq 2$.*

Teorema 2.1.2. *(Rodríguez-Velázquez & Fernau, 2013) $dim_{Al}(G) = n-1$ jika dan hanya jika $G \cong K_n$ atau $G \cong K_1 \cup K_{n-1}$.*

Selanjutnya penelitian yang dilakukan Albirri dkk berfokus pada perkembangan konsep dimensi metrik ketetanggaan lokal. Pada penilitian ini membahas definisi graf sederhana dan terhubung, serta mendefinisikan representasi ketetanggaan yang berfungsi untuk membedakan simpul-simpul bertetangga berdasarkan jarak ketetanggaannya. Pada penelitian ini menghasilkan nilai dimensi metrik ketetanggaan lokal graf hasil operasi *splitting* seperti *splitting cycle graph*, *splitting ladder graph* dan *splitting triangular ladder graph* (Albirri et al., 2019).

2.2 Dasar Teori Graf

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai beberapa dasar-dasar pada teori graf. Berikut ini disajikan definisi graf.

Definisi 2.2.1. *(Levin, 2025) Sebuah graf dikatakan sebagai pasangan terurut $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan simpul tidak kosong, dan E adalah himpunan sisi dengan setiap sisi menghubungkan dua verteks.*

Selanjutnya akan diuraikan mengenai definisi ordo, dan ukuran. Berikut ini definisinya.

Definisi 2.2.2. *(Xu, 2025) Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. Banyaknya simpul pada graf G yakni $|V(G)| = n$, disebut dengan ordo dari G.*

Definisi 2.2.3. *(Xu, 2025) Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. Banyaknya sisi pada graf G yakni $|E(G)| = m$ disebut dengan size atau ukuran dari graf G.*

Setelah definisi ordo dan ukuran, berikut penjelasan mengenai bertetangga pada simpul dan sisi menurut (Gross, Yellen, & Zhang, 2013)

Definisi 2.2.4. *Simpul v dan w dikatakan bertetangga jika simpul-simpul tersebut memiliki sisi yang menghubungkannya.*

Definisi 2.2.5. *Sisi dikatakan bertetangga adalah dua sisi yang mempunyai titik ujung yang sama.*

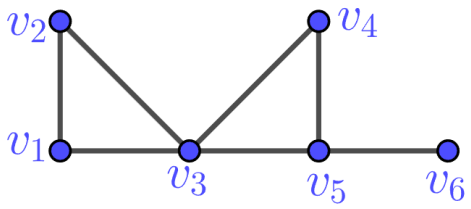
Setelah mengetahui definisi bertetangga, akan diuraikan definisi mengenai graf sederhana, graf terhubung.

Definisi 2.2.6. *(Gross, Yellen, & Anderson, 2023) Suatu graf disebut graf sederhana jika graf tersebut tidak memiliki loop dan tidak terdapat dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan simpul yang sama.*

Definisi 2.2.7. *(Diestel, 2017) Graf terhubung adalah graf yang simpul-simpulnya terhubung melalui lintasan.*

Setelah mengetahui beberapa definisi dasar mengenai teori graf, akan diberikan contoh dari definisi-definisi yang telah diberikan sebelumnya. Berikut ini contohnya.

Contoh 2.2.1. Berikut ini graf G yang akan digunakan sebagai contoh:



Gambar 2.1 Graf G

Dari graf G pada Gambar 2.1 dapat diamati bahwa graf G adalah graf sederhana dan terhubung yang memiliki himpunan simpul yakni $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ sehingga ordo dari graf G, $|V(G)| = 6$. Graf G memiliki himpunan sisi yakni $\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_5v_6\}$ sehingga ukuran graf G, $|E(G)| = 7$. Pada sisi v_1 dan v_2 pada graf G dikatakan bertetangga, sedangkan sisi v_2 dengan v_4 tidak bertetangga di graf G.

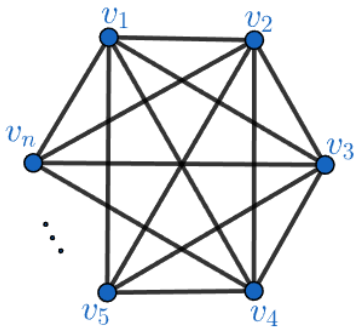
2.3 Jenis-Jenis Graf

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai jenis-jenis graf yang akan digunakan pada penelitian ini.

Definisi 2.3.1. *(Chartrand & Zhang, 2012) Graf path atau graf lintasan P_n adalah graf dengan n simpul yang dapat diberikan penamaan $v_1, v_2, ..., v_n$ dengan sisi-sisi yang menghubungkan setiap pasangan simpul berturut-turut dari v_1 hingga v_n.*

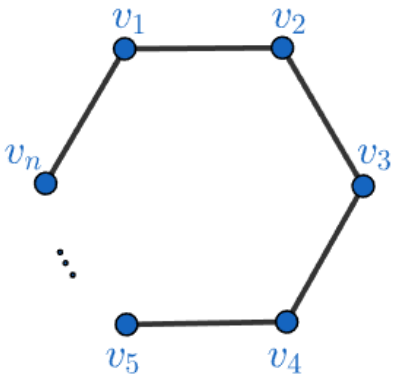
Gambar 2.2 Graf P_n

Definisi 2.3.2. *(Chartrand & Zhang, 2012) Graf lengkap K_n adalah Setiap pasangan simpul pada K_n selalu dihubungkan oleh sisi, maka graf K_n memeliki jumlah sisi maksimum sebesar $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.*



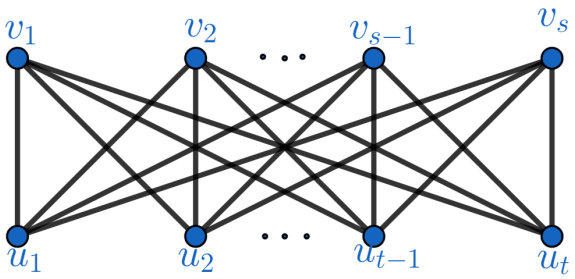
Gambar 2.3 Graf K_n

Definisi 2.3.3. *(Chartrand & Zhang, 2012) Graf siklus C_n adalah graf G yang memiliki $n \geq 3$ simpul jika simpul-simpulnya dapat diberi penomoran $v_1, v_2, ..., v_n$ sehingga sisinya terdiri atas $v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n$ serta v_1v_n.*



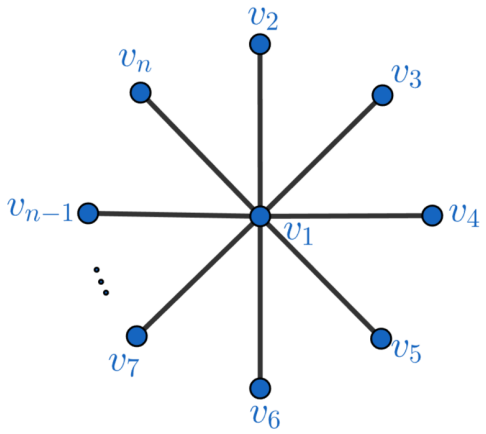
Gambar 2.4 Graf C_n

Definisi 2.3.4. *(Chartrand & Zhang, 2012) Graf bipartit lengkap $K_{s,t}$ adalah suatu graf dimana setiap simpul $(u_1, u_2, ..., u_s)$ pada himpunan pertama terhubung dengan semua simpul $(v_1, v_2, ..., v_t)$ pada himpunan kedua.*



Gambar 2.5 Graf $K_{s,t}$, $s + t = n$

Definisi 2.3.5. *(Chartrand & Zhang, 2012) Graf star atau graf bintang S_n adalah graf bipartit lengkap dengan partisi simpul U dan W, dengan $|U| = s$ dan $|W| = t$ dinotasikan dengan $K_{s,t}$ atau $K_{t,s}$ dengan salah satu dari s atau t bernilai 1.*

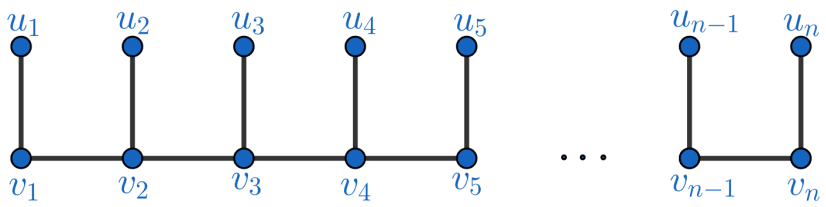


Gambar 2.6 Graf S_n

Definisi 2.3.6. *(Frucht & Harary, 1970) Korona $G \odot H$ dibentuk dengan cara mengambil satu graf G, lalu membuat beberapa salinan graf H sebanyak simpul pada graf G. Selanjutnya, simpul pada G dihubungkan dengan semua simpul pada satu salinan H yang bersesuaian.*

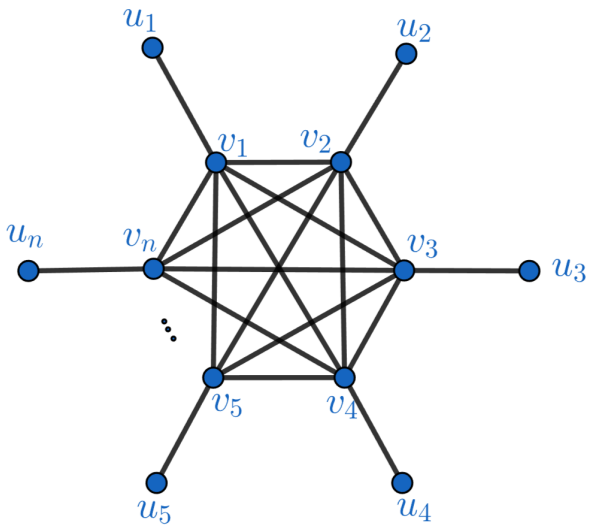
Pada penelitian ini akan menggunakan beberapa graf G yang akan dioperasikan korona produk dengan K_1 atau graf yang memiliki anting (*pendant point*). Berikut ini graf-graf yang akan digunakan:

Graf sisir adalah graf yang diperoleh dengan mengoperasikan korona graf P_n dengan K_1. Berikut ini gambar hasil operasi $P_n \odot K_1$.



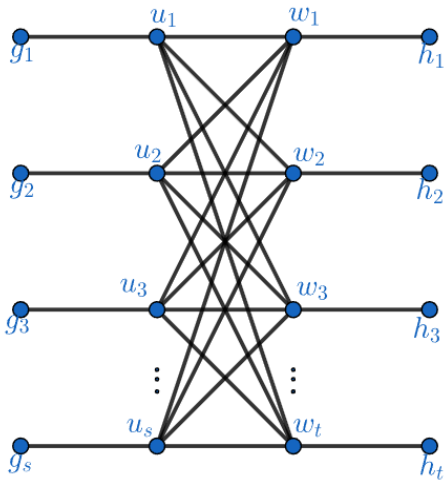
Gambar 2.7 Graf $P_n \odot K_1$

Graf $(K_n \odot K_1)$ adalah graf K_n yang dioperasi korona dengan graf K_1. Berikut ini gambar hasil operasi $K_n \odot K_1$.



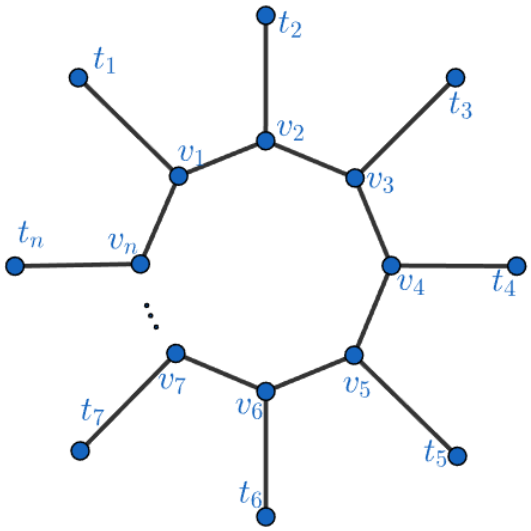
Gambar 2.8 Graf $K_n \odot K_1$

Graf $K_{s,t} \odot K_1$ adalah graf hasil operasi korona dari graf $K_{s,t}$ dengan graf K_1. Berikut ini gambar hasil operasi $K_{s,t} \odot K_1$.



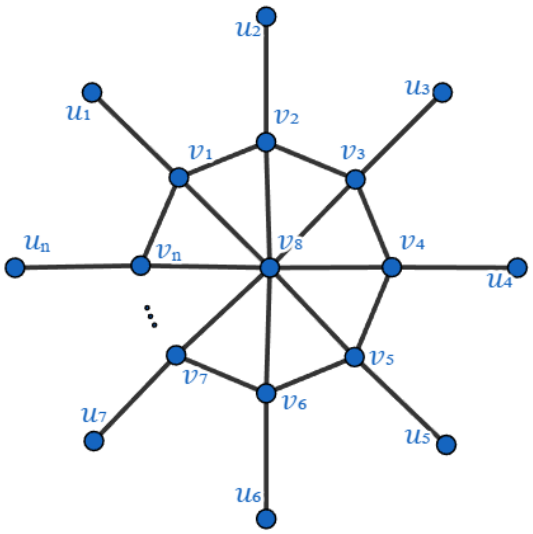
Gambar 2.9 Graf $K_{s,t} \odot K_1$

Definisi 2.3.7. *(Maulidia & Purwanto, 2021) Graf matahari adalah graf yang dibentuk dari graf siklus pada n simpul dengan menambahkan sebuah sisi gantung pada setiap simpul.*



Gambar 2.10 Graf $C_n \odot K_1$

Definisi 2.3.8. *(Maulidia & Purwanto, 2021) Graf helm dinotasikan dengan H_n adalah graf yang dibentuk dari graf roda W_n dengan menambahkan sisi gantung pada setiap simpul siklus.*



Gambar 2.11 Graf H_n

2.4 Dimensi Metrik Graf

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai dimensi metrik graf. Berikut ini penjelasannya.

Definisi 2.4.1. *(Simanjuntak, Uttunggadewa, & Saputro, 2013) Misalkan G adalah sebuah graf dengan $G(V, E)$ adalah graf terhubung. Jarak antara dua simpul u dan v adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan simpul u dan v di G, dapat dinotasikan dengan $d(u, v)$. Graf G memiliki simpul $V(G)$, dan $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq V(G)$ dengan S adalah himpunan pembeda. Vektor representasi dari simpul $v \in V(G)$ terhadap S didefinisikan sebagai berikut:*

$$r(v \mid S) = \Big(d(v, u_1),\, d(v, u_2),\, \ldots,\, d(v, u_k)\Big),$$

Himpunan S disebut himpunan pembeda untuk graf G apabila untuk setiap dua simpul berbeda $t, v \in V(G)$ memiliki representasi yang tidak sama yakni $r(v \mid S) \neq r(t \mid S)$. Basis dari graf G adalah himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Banyaknya simpul dalam suatu basis graf G disebut dimensi metrik dari graf G, dinotasikan dengan $dim(G)$.

Berikut ini akan diberikan contoh mengenai dimensi metrik graf dari graf pada Gambar 2.1.

Contoh 2.4.1. Dari Gambar 2.1 akan dicari dimensi metrik. Akan dipilih himpunan pembeda berturut $S = \{v_1, v_3, v_4\} \subseteq V(G)$, sehingga kardinalitasnya $|S| = 3$. Dan representasi dari simpul-simpulnya adalah:

$$\begin{array}{lll} r(v_1 \mid S) = (0, 1, 2), & r(v_3 \mid S) = (1, 0, 1), & r(v_5 \mid S) = (2, 1, 1), \\ r(v_2 \mid S) = (1, 1, 2), & r(v_4 \mid S) = (2, 1, 0), & r(v_6 \mid S) = (3, 2, 2) \end{array}$$

Dapat diamati bahwa simpul-simpul pada graf G tidak ada yang sama terhadap himpunan pembedanya, maka $S \subseteq V(G)$ memenuhi basis dimensi metrik dari graf G, sehingga $dim(G) = 3$.

2.5 Dimensi Metrik Ketetanggan Graf

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai dimensi metrik ketetanggaan graf. Berikut penjelasannya.

Definisi 2.5.1. *(Jannesari & Omoomi, 2012) Misalkan G adalah sebuah graf terhubung dengan himpunan simpul $V(G)$, dan $S = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ himpunan bagian $V(G)$ yang terurut. Untuk setiap $v \in V(G)$, representasi ketetanggaannya didefinisikan sebagai vektor,*

$$r_A(v \mid S) = \Big(d_A(v, u_1),\, d_A(v, u_2),\, \ldots,\, d_A(v, u_k)\Big),$$

dengan $d_A(u, v)$ adalah jarak ketetanggaannya, yakni:

$$d_A(v, u_i) = \begin{cases} 0, & \text{jika } v = u_i, \\ 1, & \text{jika } v \sim u_i, \\ 2, & \text{jika } v \not\sim u_i. \end{cases}$$

dengan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan terurut bagi G jika vektor $r_A(v \mid S) \neq r_A(s \mid S)$ untuk setiap $s, v \in V(G)$. Kardinalitas basis ketetanggaan disebut dimensi

metrik ketetanggaan dari graf G yang dinotasikan dengan $dim_A(G)$. Basis ketetanggaan dari graf G adalah himpunan pembeda ketetanggaan minimal $dim_A(G)$.

Berikut ini akan diberikan contoh mengenai dimensi metrik ketetanggaan graf.

Contoh 2.5.1. Dari Gambar 2.1 akan dicari dimensi metrik ketetanggaannya. Dipilih himpunan pembeda berturut $S = \{v_1, v_4\} \subseteq V(G)$, sehingga kardinalitasnya $|S| = 2$. Representasi dari simpul-simpul G adalah

$$\begin{aligned} &r_A(v_1 \mid S) = (0,2), \quad &&r_A(v_3 \mid S) = (1,1), \quad &&r_A(v_5 \mid S) = (2,1), \\ &r_A(v_2 \mid S) = (1,2), \quad &&r_A(v_4 \mid S) = (2,0), \quad &&r_A(v_6 \mid S) = (2,2). \end{aligned}$$

Dapat diamati bahwa, semua representasi simpul-simpul pada graf G tidak ada yang sama terhadap himpunan pembeda terurut S, maka S himpunan bagian $V(G)$ memenuhi basis ketetanggaan dari graf G sehingga $dim_A(G) = 2$.

2.6 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai dimensi metrik ketetanggaan lokal. Berikut definisinya.

Definisi 2.6.1. *(Rinurwati et al., 2017) Misalkan G sebuah graf dengan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung. Graf G memiliki himpunan simpul $V(G)$, dan $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$ himpunan bagian $V(G)$ dengan S adalah himpunan pembeda terurut, representasi ketetanggaan dari simpul v terhadap S didefinisikan sebagai berikut:*

$$r_A(v \mid S) = (d_A(v, u_1),\, d_A(v, u_2),\, \ldots,\, d_A(v, u_k))$$

dengan $d_A(v, u)$ adalah jarak ketetanggaan, yaitu:

$$d_A(v, s_i) = \begin{cases} 0, & \textit{jika } v = s_i, \\ 1, & \textit{jika } v \sim s_i, \\ 2, & \textit{jika } v \not\sim s_i. \end{cases}$$

dengan $\sim$ menandakan bahwa simpul u_i dan v bertetangga, dan $\not\sim$ tidak bertetangga. Suatu himpunanan S disebut himpunan pembeda ketetanggan lokal jika setiap dua simpul bertetangga u dan v di G memiliki representasi ketetanggaan yang berbeda $r_A(v \mid S) \neq r_A(w \mid S)$ dengan $v, w \in V(G)$. Dimensi metrik ketetanggaan lokal dinotasikan dengan $dim_{Al}(G)$ adalah kardinalitas basis ketetanggaan lokal dari graf G. Basis ketetanggaan lokal dari graf G adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal.

Berikut ini akan diberikan contoh mengenai dimensi metrik ketetanggaan lokal.

Contoh 2.6.1. Dari Gambar 2.1 akan dicari dimensi metrik ketetanggaan lokalnya. Dipilih himpunan pembeda berturut $S = \{v_1, v_5\} \subseteq V(G)$, sehingga kardinalitasnya $|S| = 2$. Representasi dari simpul-simpul G adalah

$$\begin{aligned} &r_A(v_1 \mid S) = (0,2), \quad &&r_A(v_3 \mid S) = (1,1), \quad &&r_A(v_5 \mid S) = (2,0), \\ &r_A(v_2 \mid S) = (1,2), \quad &&r_A(v_4 \mid S) = (2,1), \quad &&r_A(v_6 \mid S) = (2,1). \end{aligned}$$

Dapat diamati bahwa, semua representasi simpul-simpul pada graf G berbeda terhadap himpunan pembeda terurut S, maka S himpunan bagian $V(G)$ memenuhi basis

ketetanggaan dari graf G sehingga $dim_{Al}(G) = 2$.

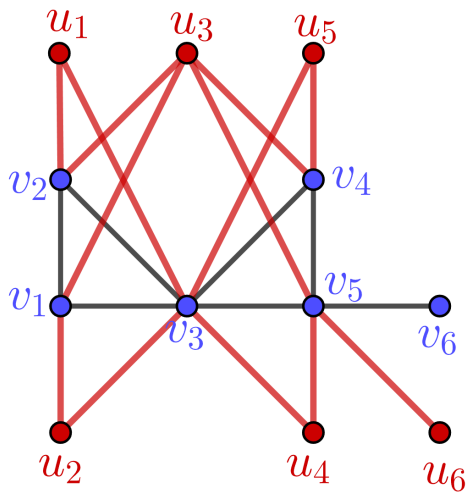
2.7 Graf Splitting

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai graf splitting. Berikut definisi dari graf splitting.

Definisi 2.7.1. *(Sampathkumar & Walikar, 1981) Untuk setiap simpul $v \in V(G)$, buat sebuah simpul baru sebanyak simpul v dan notasikan dengan u, hubungkan setiap simpul baru u ke semua simpul yang bertetangga dengan v, graf ini disebut graf splitting.*

Graf yang diperoleh dengan proses ini disebut graf *splitting* dari G yang dinotasikan dengan $Spl(G)$. Berikut ini akan diberikan contoh untuk operasi *splitting*.

Contoh 2.7.1. Berikut ini graf hasil operasi *splitting* dari Gambar 2.1:



Gambar 2.12 Graf $Spl(G)$

Dari Gambar 2.12 hasil operasi *splitting*, simpul berwarna merah dengan notasi $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ adalah salinan simpul baru sejumlah banyaknya simpul pada graf G, sedangkan sisi yang berwarna merah menyatakan sisi yang menghubungkan simpul baru dengan tetangga simpul pada graf G.

2.8 Graf Degree Splitting

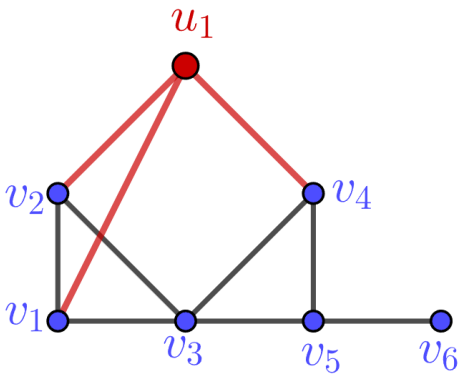
Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai graf *degree splitting*.

Definisi 2.8.1. *(Ponraj & Somasundaram, 2004) Diberikan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. Dengan himpunan simpul V sebagai berikut:*

$$V = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_t \cup T,$$

dengan setiap S_i adalah himpunan simpul yang memiliki derajat sama minimal terdapat dua simpul, dan T adalah himpunan simpul-simpul yang tidak termasuk kedalam himpunan S_i. Graf degree splitting dinotasikan dengan $DS(G)$. $DS(G)$ dibentuk dengan cara menambahkan simpul baru $u_1, u_2, ..., u_i$ dan menghubungkan simpul baru ke setiap simpul S_i.

Contoh 2.8.1. Berikut ini graf hasil operasi dari Gambar 2.1 dengan operasi *degree splitting*:



Gambar 2.13 Graf $DS(G)$

Dari Gambar 2.12 hasil operasi *degree splitting*, simpul berwarna merah dengan notasi u_1 adalah simpul baru yang diberikan karena adanya simpul di graf G yang derajat simpulnya sama yakni berderajat 2 sebanyak 3 simpul (minimal harus 2 simpul yang berderajat sama), sedangkan sisi yang berwarna merah menyatakan sisi yang menghubungkan simpul baru dengan simpul-simpul yang memiliki derajat sama pada simpul graf G.

BAB III
METODOLOGI

Pada bab ini akan dijelaskan secara umum mengenai urutan pelaksanaan Tugas Akhir dengan langkah-langkah yang dilakukan ditunjukkan pada diagram alir.

3.1 Tahapan Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penyusunan Tugas Akhir ini dengan membaca dan mengumpulkan penelitian-penelitian terdahulu yang berkaitan dengan dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik ketetanggaan lokal, graf *splitting*, dan graf *degree splitting*. Setelah itu akan dijelaskan mengenai tahapan-tahapan yang akan dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini :

Langkah I: Menentukan dan mengkontruksi graf G *edge-degree splitting*, dengan graf $G \in \{P_n, C_n, K_n, K_{m,n}, S_n, C_n \bigodot K_1, P_n \bigodot K_1, K_{m,n} \bigodot K_1, K_n \bigodot K_1, H_n\}$ dengan penjelasan sebagai berikut:

1. Menentukan graf dasar $G = (V, E)$ yang akan digunakan sebagai graf awal dalam proses konstruksi.
2. Mengelompokkan sisi-sisi pada graf dasar ke dalam subhimpunan $F_1, F_2, ..., F_t$ berdasarkan kesamaan derajat setiap simpul di suatu sisi, dengan setiap subhimpunan memiliki minimal dua simpul.
3. Menambahkan satu sisi baru setiap subhimpunan F_i sebagai *edge-degree splitting*.
4. Menghubungkan sisi baru dari hasil operasi *edge-degree splitting* dengan seluruh sisi yang berada dalam subhimpunan F_i.
5. Menentukan himpunan sisi/*edge* dan himpunan simpul graf hasil konstruksi serta memastikan graf *edge-degree splitting* memenuhi sifat graf dan terhubung.

Langkah II: Penentuan dimensi metrik ketetanggaan lokal yang telah dioperasikan *edge-degree splitting* dengan penjelasan sebagai berikut:

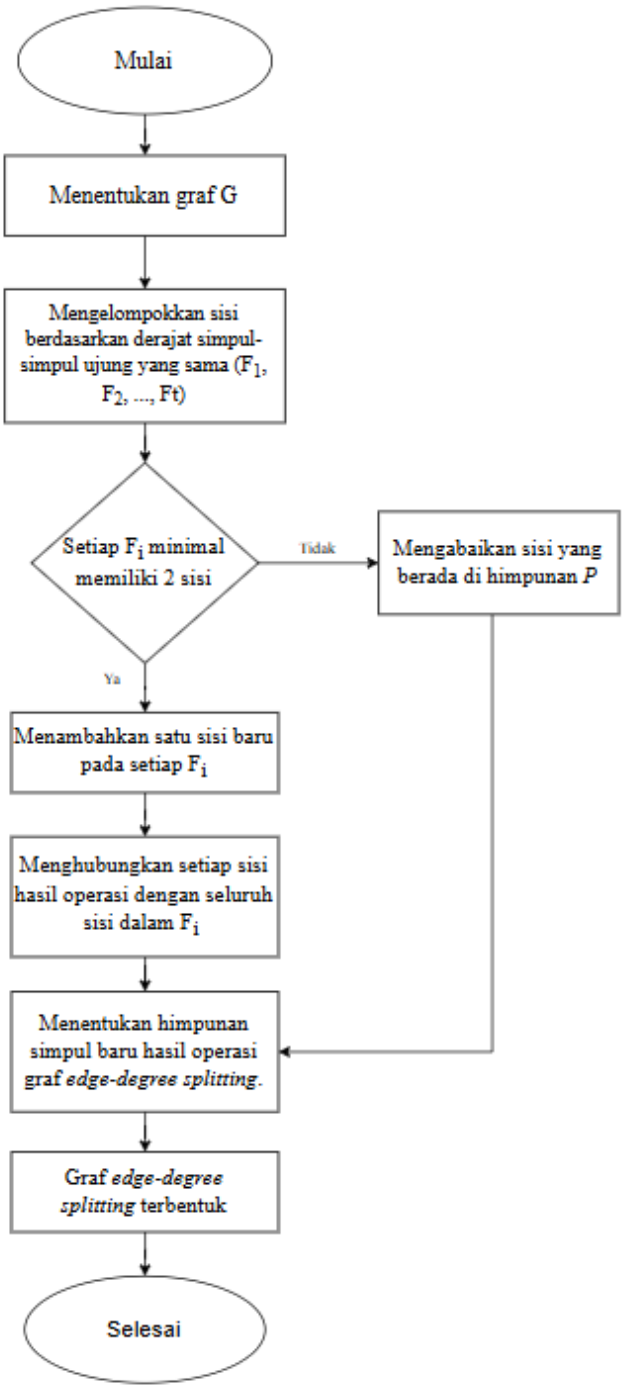
1. Menentukan himpunan simpul kandidat sebagai himpunan pembeda ketetanggaan lokal pada graf *edge-degree splitting* yang telah dikonstruksi.
2. Menentukan representasi ketetanggaan lokal setiap simpul terhadap himpunan pembeda yang dipilih.
3. Menetapkan jarak pada setiap pasangan simpul bertetangga sesuai dengan dimensi metrik ketetanggaan lokal.
4. Memeriksa setiap simpul yang bertetangga memiliki representasi ketetanggaan lokal yang berbeda terhadap himpunan pembeda.
5. Menentukan kardinalitas minimum dari himpunan pembeda ketetanggaan lokal yang memenuhi syarat pembeda.

6. Menetapkan kardinalitas minimum tersebut sebagai nilai dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf G *(edge-degree splitting)*.

Langkah III: Pada tahap ini akan dilakukan penarikan kesimpulan dari analisis hasil dimensi metrik ketetanggaan lokal graf *edge-degree splitting*.

3.2 Diagram Alir Langkah I

Berikut adalah diagram alir langkah 1:



Gambar 3.1 Diagram Alir Langkah 1

3.3 Diagram Alir Langkah II

Berikut adalah diagram alir langkah 2:

Gambar 3.2 Diagram Alir Langkah 2

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini diawali dengan pemaparan definisi graf *edge-degree splitting*. Konsep graf *edge-degree splitting* merupakan pengembangan dari graf *degree-splitting*. Adapun definisi graf *edge-degree splitting* sebagai berikut.

4.1 Definisi Graf *Edge-Degree Splitting*

Berdasarkan operasi graf *degree splitting* pada Definisi 2.8.1, pada penelitian ini dikonstruksi suatu operasi graf baru dengan memperhatikan struktur dan karakteristik pada graf asal. Berikut ini definisi operasi *edge-degree splitting* sebagai berikut.

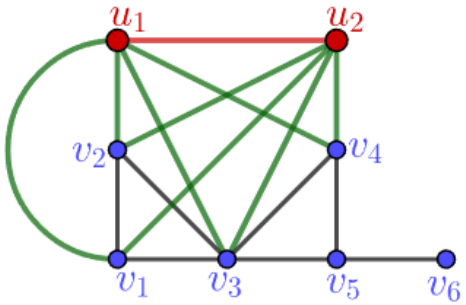
Definisi 4.1.1. *Diberikan graf $G(V(G), E(G))$ adalah sebuah graf yang memiliki himpunan sisi:*

$$E(G) = P \bigcup \left(\cup_{i=1}^{t} F_i \right)$$

dengan F_i adalah himpunan sisi yang memiliki paling sedikit dua sisi $e_p = u_p v_p$ dan $e_q = u_q v_q$, $deg(u_p) = deg(u_q)$ dan $deg(v_p) = deg(v_q)$ dengan u_p dan v_p tidak harus berbeda dan $P = E(G) - \cup_{i=1}^{t} F_i$. Graf edge-degree splitting dinotasikan dengan EDS(G) diperoleh dengan menambahkan sisi baru $e'_k = u_k v_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, t\}$ kemudian menghubungkan simpul baru u_k dan v_k dengan semua simpul ujung dari sisi-sisi di F_i dengan $F_i = \{e_j\}_{j=1}^{s}, \quad s \geq 2$.

Selanjutnya akan diberikan contoh graf *edge-degree splitting* dari Definisi(4.1.1).

Contoh 4.1.2. Misalkan graf G pada Gambar 2.1, didapatkan graf *edge-degree splitting* sebagai berikut.



Gambar 4.1 Graf $EDS(G)$

Gambar 4.1 adalah gambar graf $EDS(G)$ dengan sisi berwarna merah adalah sisi tambahan graf *edge-degree splitting* dan sisi berwarna hijau adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf G, $F_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ dengan $e_1 = v_2 v_3$, $e_2 = v_3 v_4$, dan $e_3 = v_1 v_3$ yang memiliki derajat simpul-simpul ujungnya sama ($\deg(v_2) = \deg(v_4) = \deg(v_1) = 2$) dan ($\deg(v_3) = 4$). Selanjutnya akan dipaparkan dimensi metrik ketetanggaan lokal graf *edge-degree splitting* graf dasar.

4.2 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Graf Dasar

Pada bagian ini dipaparkan dimensi metrik ketetanggaan lokal graf *edge-degree splitting* graf dasar seperti graf lintasan (P_n), graf lengkap (K_n), graf siklus (C_n), graf bipartit lengkap ($K_{s,t}$), dan graf bintang (S_n). Berikut ini pemaparan dimensi metrik ketetanggaan lokal graf *edge-degree splitting* graf dasar.

4.2.1 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Lintasan

Graf *edge-degree splitting* P_n dinotasikan dengan $EDS(P_n)$ adalah graf terhubung hasil operasi *edge-degree splitting*. Banyaknya simpul pada graf $EDS(P_n)$ unutuk $n \in \{3,4\}$, $|V(EDS(P_n))| = n+2$ dengan himpunan simpul:

$$\begin{aligned} V(EDS(P_n)) &= V(P_n) \cup V(K_2^1) \\ &= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{w_1, w_2\} \end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf $EDS(P_n)$, $|E(EDS(P_n)| = 3n$. Selanjutnya untuk $n \geq 5$, banyaknya simpul $|V(EDS(P_n))| = n+4$ dengan himpunan simpul:

$$\begin{aligned} V(EDS(P_n)) &= V(P_n) \cup V(K_2^1) \cup V(K_2^2) \\ &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \cup \{w_1, w_2\} \cup \{x_1, x_2\} \end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf $EDS(P_n)$, $|E(EDS(P_n))| = 3n+7$. dengan:

a. u_j : simpul ke-j pada graf P_n

b. w_l : simpul ke-l dari graf K_2^1

c. x_l : simpul ke-l dari graf K_2^2

d. K_2^1 : sisi tambahan pertama

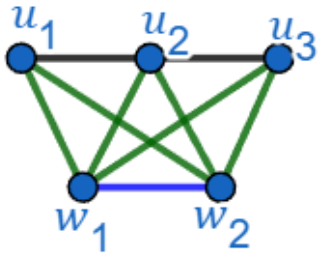
e. K_2^2 : sisi tambahan kedua

f. $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

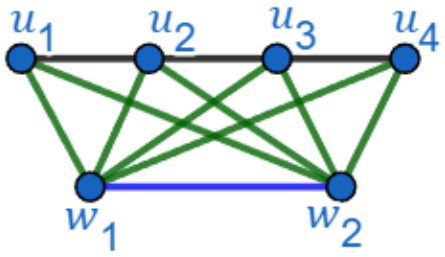
g. $l \in \{1, 2\}$

Berikut ini Gambar 4.2 menunjukkan graf P_n dan Gambar 4.3, Gambar 4.4 dan Gambar 4.5 menunjukkan graf $EDS(P_n)$.

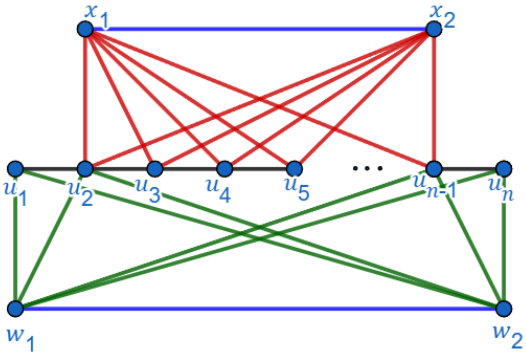
Gambar 4.2 Graf P_n



Gambar 4.3 Graf $EDS(P_3)$



Gambar 4.4 Graf $EDS(P_4)$



Gambar 4.5 Graf $EDS(P_n)$

Gambar 4.2 adalah graf P_n. Gambar 4.3, Gambar 4.4, dan Gambar 4.5 adalah graf $EDS(P_n)$. Pada Gambar 4.3 dan Gambar 4.4 sisi berwarna biru adalah sisi tambahan EDS dan sisi berwarna hijau adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf P_n dengan simpul-simpul ujungnya berderajat satu dan dua. Pada Gambar 4.5 sisi berwarna biru adalah sisi tambahan EDS. Sisi-sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf P_n dengan simpul-simpul ujungnya berderajat dua. Sisi-sisi berwarna hijau adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf P_n dengan simpul-simpul ujungnya berderajat satu dan dua.

Teorema 4.2.1. *Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf edge-degree splitting P_n adalah*

$$dim_{Al}(EDS(P_n)) = \begin{cases} 3, & untuk\ n \in \{3,4\}, \\ 4, & untuk\ n \in \{5,6,7\}, \\ 5, & untuk\ n \in \{8,9\}, \\ \left\lfloor \frac{n-10}{4} \right\rfloor + 5, & untuk\ n \geq 10. \end{cases}$$

Bukti. Untuk $n = 1$, $dim_{Al}(P_1) = dim_{Al}(K_1) = 0$ (Teorema 2.1.2.)
Untuk $n = 2$, $dim_{Al}(P_2) = 1$ (Teorema 2.1.1.)
Untuk $n \geq 3$ terdapat empat kasus.

Kasus 1. Untuk $n \in \{3,4\}$
Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, u_2, w_1\} \subseteq V(EDS(P_n))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* P_n. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(P_n)$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = \Big(d_A(v,u_1), d_A(v,u_2), d_A(v,w_1)\Big)$$

dengan

$$d_A(v,u_j) = \begin{cases} 0, & v = u_j, \\ 1, & v \in \{u_{j+1}, u_{j-1}, w_i\} \\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1,2\}, \\ j \in \{1,2,\ldots,n\}. \end{array}$$

$$d_A(v,w_i) = \begin{cases} 0, & v = w_i, \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \\ j \in \{1,2,\ldots,n\}. \end{array}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(EDS(P_n))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(P_n)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 3$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(EDS(P_n))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \backslash \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = w_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $w_1, w_2 \in V(EDS(P_n))$ dengan $r_A(w_1 \mid S') = r_A(w_2 \mid S') = (1,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(P_n \bigodot K_1)$, untuk menunjukkan bahwa tidak terdapat himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari k, cukup ditinjau kasus $|S'| = k-1$. Hal ini karena setiap himpunan dengan kardinalitas kurang dari $k-1$ merupakan kasus yang lebih kecil.

Oleh karena itu, apabila himpunan berukuran $k-1$ saja tidak dapat menjadi himpunan pembeda, maka setiap himpunan dengan kardinalitas yang lebih kecil juga tidak dapat menjadi himpunan pembeda.. Jadi $|S| = 3$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(P_n)) = 3$.

Kasus 2. Untuk $n \in \{5,6,7\}$

1. Untuk $n = 5$, dipilih himpunan terurut $S = \{u_3, u_5, x_1, w_1\} \subseteq V(EDS(P_n))$.

   Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* P_n. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(P_n))$ adalah

   $$\begin{array}{ll} r_A(u_1 \mid S) = (2,2,2,1), & r_A(w_1 \mid S) = (2,1,2,0), \\ r_A(u_2 \mid S) = (1,2,1,1), & r_A(w_2 \mid S) = (2,1,2,1), \\ r_A(u_3 \mid S) = (0,2,1,2), & r_A(x_1 \mid S) = (1,2,0,2), \\ r_A(u_4 \mid S) = (1,1,1,1), & r_A(x_2 \mid S) = (1,2,1,2), \\ r_A(u_5 \mid S) = (2,0,2,1). & \end{array}$$

   Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(EDS(P_n))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semuanya berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(P_n)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 4$ adalah minimal.

   Dipilih $S' \subseteq V(EDS(P_n))$ dengan kardinalitas $|S'| < |S|$, yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, untuk $v \in S$. Dipilih $v = w_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $w_1, w_2 \in V(EDS(P_n))$ dengan $r_A(w_1 \mid S') = r_A(w_2 \mid S') = (2,1,2)$

sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(P_n)$. Jadi $|S| = 4$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(P_n)) = 4$.

2. Untuk $n \in \{6, 7\}$, dipilih himpunan terurut $S = \{u_2, u_{n-1}, w_1, x_1\} \subseteq V(EDS(P_n))$.

   Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* P_n. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(P_n))$ adalah

   $$r_A(v \mid S_i) = \Big(d_A(v, u_2), d_A(v, u_{n-1}), d_A(v, w_1), d_A(v, x_1)\Big)$$

   dengan

   $$d_A(v, u_j) = \begin{cases} 0, & v = u_j \\ 1, & v = u_{j-1} \text{ dan } v = u_{j+1} \\ 1, & v = x_i \text{ dan } v = w_i \\ 2, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad \begin{matrix} j \in \{2, n-1\}, \\ i \in \{1, 2\}. \end{matrix}$$

   $$d_A(v, x_i) = \begin{cases} 0, & v = x_i, \\ 1, & v = u_j \text{ dan } v = x_2, \\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad \begin{matrix} i = 1, \\ j \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \end{matrix}$$

   $$d_A(v, w_i) = \begin{cases} 0, & v = w_i, \\ 1, & v = u_j \text{ atau } w_2, \\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad \begin{matrix} i = 1, \\ j \in \{1, 2, n-1, n\} \end{matrix}$$

   Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(EDS(P_n))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semuanya berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(P_n)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 4$ adalah minimal.

   Dipilih $S' \subseteq V(EDS(P_n))$ dengan kardinalitas $|S'| < |S|$, yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, untuk $v \in S$. Dipilih $v = x_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $x_1, x_2 \in V(EDS(P_n))$ dengan $r_A(x_1 \mid S') = r_A(x_2 \mid S') = (1, 1, 2)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(P_n)$. Pada kasus ini, untuk menunjukkan bahwa tidak terdapat himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari k, cukup ditinjau kasus $|S'| = k - 1$. Hal ini karena setiap himpunan dengan kardinalitas kurang dari $k - 1$ merupakan kasus yang lebih kecil.

   Oleh karena itu, apabila himpunan berukuran $k - 1$ saja tidak dapat menjadi himpunan pembeda, maka setiap himpunan dengan kardinalitas yang lebih kecil juga tidak dapat menjadi himpunan pembeda. Jadi $|S| = 4$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(P_n)) = 4$.

Kasus 3. Untuk $n \in \{8, 9\}$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_4, u_{n-1}, x_1, w_1, w_2\} \subseteq V(EDS(P_n))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* P_n. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(P_n))$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = \Big(d_A(v, u_4), d_A(v, u_{n-1}), d_A(v, x_1), d_A(v, w_1), d_A(v, w_2)\Big)$$

dengan

$$d_A(v,u_j)=\begin{cases}0, & v=u_j,\\ 1, & v\in\{u_{j-1},u_{j+1},x_i\}, \qquad j\in\{4,n-1\},\\ 1, & v=w_i,\ \text{jika } u_j=u_{n-1}, \qquad i\in\{1,2\}.\\ 2, & \text{lainnya},\end{cases}$$

$$d_A(v,x_i)=\begin{cases}0, & v=x_i,\\ 1, & v=u_j \text{ dan } v=x_{i+1}, \qquad i=1,\\ 2, & \text{lainnya.} \qquad j\in\{2,3,\ldots,n-1\}\end{cases}$$

$$d_A(v,w_i)=\begin{cases}0, & v=w_i,\\ 1, & v\in\{u_j,w_{3-i}\}, \qquad i\in\{1,2\},\\ 2, & \text{lainnya.} \qquad j\in\{1,2,n-1,n\}\end{cases}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v\in V(EDS(P_n))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(P_n)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S|=5$ adalah minimal.

Dipilih $S'\subseteq V(EDS(P_n))$ dengan kardinalitas S', $|S'|<|S|$ yaitu $S'=S\setminus\{v\}$, $v\in S$. Dipilih $v=w_2$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $w_2,u_n\in V(EDS(P_n))$ dengan $r_A(w_2\mid S')=r_A(u_n\mid S')=(2,1,2,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(P_n)$, untuk menunjukkan bahwa tidak terdapat himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari k, cukup ditinjau kasus $|S'|=k-1$. Hal ini karena setiap himpunan dengan kardinalitas kurang dari $k-1$ merupakan kasus yang lebih kecil.

Oleh karena itu, apabila himpunan berukuran $k-1$ saja tidak dapat menjadi himpunan pembeda, maka setiap himpunan dengan kardinalitas yang lebih kecil juga tidak dapat menjadi himpunan pembeda.. Jadi $|S|=5$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(P_n))=5$.

Kasus 4. Untuk $n\geq 10$

Dipilih himpunan terurut $S=\{u_{5+4k}\mid 0\leq k<\left\lfloor\frac{n-10}{4}\right\rfloor+2\}\cup\{x_1,w_1,w_2\}\subseteq V(EDS(P_n))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* P_n. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v\in V(EDS(P_n))$ adalah

$$r_A(v\mid S_i)=\Big(d_A(v,u_5),\ldots,d_A(v,u_{5+4(k-3)}),d_A(v,x_1),d_A(v,w_1),d_A(v,w_2)\Big)$$

dengan

$$d_A(v,u_j)=\begin{cases}0, & v=u_j,\\ 1, & v\in\{u_{j-1},u_{j+1},x_i\},\\ 1, & v=w_i \text{ jika } u_j \text{ simpul basis terakhir dan } n\equiv 2 \pmod 4,\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}$$

$$i \in \{1,2\},$$
$$j \in \left\{ 5+4k \;\middle|\; 0 \le k < \left\lfloor \frac{n-10}{4} \right\rfloor + 2 \right\}.$$

$$d_A(v,x_i) = \begin{cases} 0, & v = x_i, \\ 1, & v \in \{u_j, x_{i+1}\}, \\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \\ j \in \{2,3,\ldots,n-1\} \end{array}$$

$$d_A(v,w_i) = \begin{cases} 0, & v = w_i, \\ 1, & v = u_j \text{ dan } v = w_{3-i}, \\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1,2\}, \\ j \in \{1,2,n-1,n\} \end{array}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(EDS(P_n))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(P_n)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = \left\lfloor \frac{n-10}{4} \right\rfloor + 5$ adalah minimal.

Misalkan $k = \left\lfloor \frac{n-10}{4} \right\rfloor + 5$ dan terdapat himpunan $S' \subseteq V(EDS(P_n))$ dengan $|S'| < k$. Karena $|S'| < k$, cukup ditunjukkan bahwa himpunan dengan kardinalitas terbesar yang masih kurang dari k, yaitu $k-1$, tetap tidak dapat menjadi himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Pada himpunan terurut S, terdapat tiga simpul khusus, yaitu x_1, w_1, dan w_2, yang diperlukan untuk membedakan pasangan simpul bertetangga pada bagian khusus graf. Jika salah satu dari ketiga simpul tersebut tidak termuat dalam S', maka terdapat pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S', sehingga S' bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

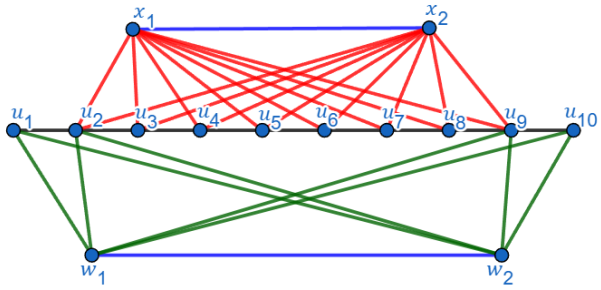
Oleh karena itu, agar tidak langsung gagal pada bagian khusus, S' harus memuat ketiga simpul khusus tersebut. Akibatnya, banyak simpul pada S' yang dapat digunakan untuk membedakan pola utama paling banyak adalah $(k-1)-3 = k-4$. Karena $k = \left\lfloor \frac{n-10}{4} \right\rfloor + 5$, maka $k-4 = \left\lfloor \frac{n-10}{4} \right\rfloor + 1$. Dengan demikian, $k-4 \le \frac{n-10}{4} + 1 = \frac{n-6}{4}$, sehingga $4(k-4) \le n-6 < n$. Padahal pada pola graf awal terdapat simpul sebanyak n yang harus dibedakan, sedangkan setiap satu simpul pembeda pada pola utama hanya dapat membedakan paling banyak empat simpul berurutan. Akibatnya, masih terdapat paling sedikit satu pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S' seperti $r_A(x_1 \mid S) = r_A(x_2 \mid S)$. Jadi, tidak terdapat himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan kardinalitas kurang dari k. Karena telah diperoleh himpunan pembeda ketetanggaan lokal S dengan $|S| = k$, maka S merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimum. Dengan,

$$\dim_{Al}(EDS(P_n)) = \left\lfloor \frac{n-10}{4} \right\rfloor + 5.$$

□

Berdasarkan pembuktian yang telah dijelaskan sebelumnya. Berikut diberikan contoh penerapan pada graf $EDS(P_{10})$.

Contoh 4.2.2. Misalkan graf EDS(P_{10}) pada Gambar 4.5 akan ditentukan dimensi metrik ketetanggaan lokal.



Gambar 4.6 Graf $EDS(P_{10})$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_5, u_9, x_1, w_1, w_2\} \subseteq V(EDS(P_{10}))$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari $EDS(P_{10})$. Representasi ketetanggaan dari simpul-simpul $EDS(P_{10})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r_A(u_1 \mid S) &= (2,2,2,1,1), & r_A(u_6 \mid S) &= (1,2,1,2,2),\\
r_A(u_2 \mid S) &= (2,2,1,1,1), & r_A(u_7 \mid S) &= (2,2,1,2,2),\\
r_A(u_3 \mid S) &= (2,2,1,2,2), & r_A(u_8 \mid S) &= (2,1,1,2,2),\\
r_A(u_4 \mid S) &= (1,2,1,2,2), & r_A(u_9 \mid S) &= (2,0,1,1,1),\\
r_A(u_5 \mid S) &= (0,2,1,2,2), & r_A(u_{10} \mid S) &= (2,1,2,1,1),\\
r_A(x_1 \mid S) &= (1,1,0,2,2), & r_A(x_2 \mid S) &= (1,1,1,2,2),\\
r_A(w_1 \mid S) &= (2,1,2,0,1), & r_A(w_2 \mid S) &= (2,1,2,1,0).
\end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $EDS(P_{10})$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetanggga berbeda.

Dapat ditunjukkan $|S|$ adalah minimal. Ambil sebarang $S' \subseteq V(EDS(P_{10}))$ dengan $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \backslash \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = w_2$ akibatnya terdapat simpul bertetangga $w_2, u_{10} \in V(EDS(P_{10}))$ dengan $r_A(w_2 \mid S') = r_A(u_{10} \mid S') = (2,1,2,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(P_{10})$. Jadi $|S| = 5$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(P_{10})) = 5$.

Misalkan dipilih himpunan terurut untuk $\mid S \mid = 4$.

No.	Himpunan	Representasi yang Sama	No.	Himpunan	Representasi yang Sama
1	$\{u_i, u_j, u_h, u_g\}$	$r_A(w_1 \mid S) = r_A(w_2 \mid S)$	5	$\{u_i, u_j, x_a, x_{3-a}\}$	$r_A(w_1 \mid S) = r_A(w_2 \mid S)$
2	$\{u_i, u_j, u_h, x_a\}$	$r_A(w_1 \mid S) = r_A(w_2 \mid S)$	6	$\{w_i, w_j, x_a, x_{3-a}\}$	$r_A(u_{2i+2} \mid S) = r_A(u_{2i+3} \mid S)$
3	$\{u_i, u_j, u_h, w_a\}$	$r_A(x_1 \mid S) = r_A(x_2 \mid S)$	7	$\{x_a, x_{3-a}, w_b, u_i\}$	$r_A(u_{2i+2} \mid S) = r_A(u_{2i+3} \mid S)$
4	$\{u_i, u_j, w_a, w_{3-a}\}$	$r_A(x_1 \mid S) = r_A(x_2 \mid S)$	8	$\{u_i, x_b, w_a, w_{3-a}\}$	$r_A(u_{i+3} \mid S) = r_A(u_{i+4} \mid S)$

Tabel 4.1 Himpunan untuk $|S| = 4$ graf $EDS(P_{10})$.

4.2.2 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Lengkap

Graf *edge-degree splitting* K_n dinotasikan dengan $EDS(K_n)$ adalah graf terhubung hasil operasi *edge-degree splitting*. Banyaknya simpul pada graf EDS(K_n),

$|V(EDS(K_n))| = n + 2$ dengan simpul-simpul:

$$\begin{aligned} V(EDS(K_n \odot K_1)) &= V(K_n) \cup V(K_2) \\ &= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{p_1, p_2\} \end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf EDS(K_n), $| E(EDS(K_n)) | = \frac{n^2+3n+2}{2}$, dengan:

a. u_j : simpul ke-j pada graf K_n

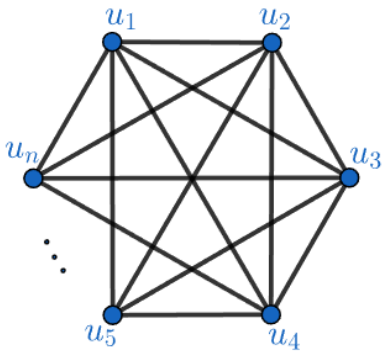
b. p_l : simpul ke-l dari graf K_2^1

c. K_2 : sisi tambahan

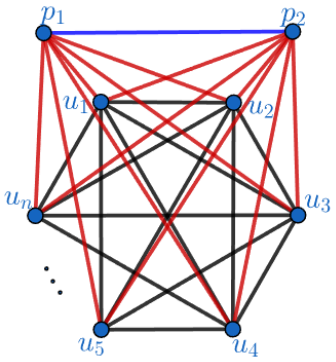
d. $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

e. $l \in \{1, 2\}$

Berikut ini Gambar 4.7 menunjukkan graf K_n dan Gambar 4.8 menunjukkan graf EDS(K_n).



Gambar 4.7 Graf K_n



Gambar 4.8 Graf $EDS(K_n)$

Gambar 4.7 adalah graf K_n sedangkan Gambar 4.8 adalah graf $EDS(K_n)$. Pada Gambar 4.8 sisi berwarna biru adalah sisi tambahan *edge-degree splitting* dan sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf K_n dengan simpul-simpul ujungnya berderajat $n - 1$.

Karena operasi *edge-degree splitting* graf lengkap K_n menghasilkan graf lengkap K_{n+2}, maka

$$EDS(K_n) \cong K_{n+2}$$

Pada graf lengkap setiap simpul pada graf tersebut saling bertetangga satu sama lain, maka setiap simpul memiliki himpunan ketetanggaan yang hampir sama. Akibatnya, untuk membedakan setiap pasangan simpul diperlukan paling sedikit $(n - 1)$ simpul pembeda, sehingga dimensi metrik ketetanggaan lokal graf (K_n) adalah $n - 1$. Karena graf $EDS(K_n) \cong$ graf K_{n+2} maka dimensi metrik ketetanggaan lokal graf $EDS(K_n)$ sebagai berikut.

Teorema 4.2.3. *Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf edge-degree splitting K_n, untuk $n \geq 3$ adalah*

$$dim_{Al}(EDS(K_n)) = n - 1 + 2$$

Bukti. Untuk $n = 1$, $dim_{Al}(K_1) = 0$ (Teorema 2.1.2.)
Untuk $n = 2$, $dim_{Al}(K_2) = dim_{Al}(P_2) = 1$ (Teorema 2.1.1.)
Untuk $n \geq 3$ terdapat satu kasus.

Kasus 1. Untuk $n \geq 3$ Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, p_1\} = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subseteq V(EDS(K_n))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* K_n, EDS(K_n). Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(K_n))$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = (d_A(v, u_1), d_A(v, u_2), \ldots, d_A(v, u_n), d_A(v, p_1)$$

dengan

$$d_A(v, s_i) = \begin{cases} 0, & \text{jika } v = s_i, \\ 1, & \text{jika } v \sim s_i, \end{cases} \qquad i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$$

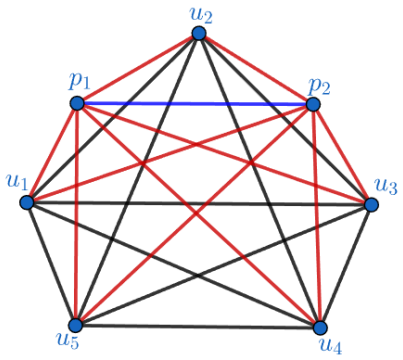
Tampak bahwa jarak simpul $v \in V(EDS(K_n))$ terhadap s_i bernilai 0 untuk $v = s_i$ dan 1 untuk $v \sim s_i$ hal ini karena setiap simpul pada graf $EDS(K_n)$ semuanya bertetangga. Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(K_n))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf EDS(K_n). Selanjutnya akan ditunjukkan $\mid S \mid = n + 1$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(\text{EDS}(K_n))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \backslash \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = p_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_1, p_2 \in V(EDS(K_n))$ dengan $r_A(p_1 \mid S') = r_A(p_2 \mid S') = (1, 1, \ldots, 1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(K_n)$, karena pada graf ini setiap satu simpul bertetangga dengan seluruh simpul lainnya, maka jika terdapat himpunan terurut lain S', $\mid S' \mid < k$ terdapat dua simpul yang representasinya sama. Jadi $|S| = n+1$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(K_n)) = n + 1$.

□

Berdasarkan pembuktian yang telah dijelaskan sebelumnya. Berikut diberikan contoh penerapan pada graf $EDS(K_5)$.

Contoh 4.2.4. Misalkan graf EDS(K_5) pada Gambar 4.9 akan ditentukan dimensi metrik ketetanggaan lokalnya.



Gambar 4.9 Graf $EDS(K_5)$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, p_1\} \subseteq V(EDS(K_5))$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari $EDS(K_5)$. Representasi ketetanggaan dari simpul-simpul $EDS(K_5)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r_A(u_1 \mid S) &= (0,1,1,1,1,1), & r_A(u_5 \mid S) &= (1,1,1,1,0,1),\\ r_A(u_2 \mid S) &= (1,0,1,1,1,1), & r_A(p_1 \mid S) &= (1,1,1,1,1,0),\\ r_A(u_3 \mid S) &= (1,1,0,1,1,1), & r_A(p_2 \mid S) &= (1,1,1,1,1,1),\\ r_A(u_4 \mid S) &= (1,1,1,0,1,1). \end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $EDS(K_5)$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetanggga berbeda.
Dapat ditunjukkan $|S|$ adalah minimal. Ambil sebarang $S' \subseteq V(EDS(K_5))$ dengan $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = p_1$ akibatnya terdapat simpul bertetangga $p_1, p_2 \in V(EDS(K_5))$ dengan $r_A(p_1 \mid S') = r_A(p_2 \mid S') = (1,1,1,1,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(K_5)$. Jadi $|S| = 6$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(K_5)) = 6$.

Misalkan dipilih himpunan terurut untuk $\mid S \mid = 4$.

No.	Himpunan	Representasi yang Sama
1	$\{u_i, u_j, u_h, p_a\}$	$r_A(u_{j+2} \mid S) = r_A(u_{j+3} \mid S)$
2	$\{p_1, p_2, u_i, u_h\}$	$r_A(u_{i+2} \mid S) = r_A(u_{i+3} \mid S)$
3	$\{u_i, u_j, u_h, u_g\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$

Tabel 4.2 Himpunan untuk $|S| = 4$ graf $EDS(K_5)$.

4.2.3 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Siklus

Graf *edge-degree splitting* C_n dinotasikan dengan $EDS(C_n)$ adalah graf terhubung hasil operasi *edge-degree splitting*. Banyaknya simpul pada graf EDS(C_n), $|V(EDS(C_n))| = n + 2$ dengan simpul-simpul:

$$\begin{aligned} V(EDS(C_n)) &= V(C_n) \cup V(K_2)\\ &= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{p_1, p_2\} \end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf EDS(C_n), $\mid E(EDS(C_n)) \mid = 3n + 1$, dengan:

a. u_j : simpul ke-j pada graf C_n

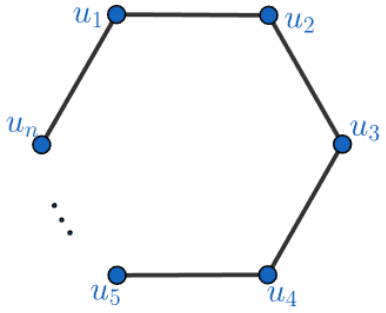
b. p_l : simpul ke-l dari graf K_2^1

c. K_2 : sisi tambahan

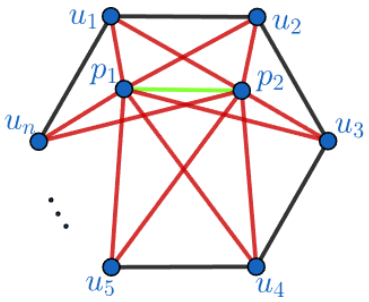
d. $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

e. $l \in \{1, 2\}$

Berikut ini Gambar 4.10 menunjukkan graf C_n dan Gambar 4.11 menunjukkan graf EDS(C_n).



Gambar 4.10 Graf C_n



Gambar 4.11 Graf $EDS(C_n)$

Gambar 4.10 adalah graf C_n sedangkan Gambar 4.11 adalah graf $EDS(C_n)$. Pada Gambar 4.11 sisi berwarna hijau adalah sisi tambahan *edge-degree splitting* dan sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf C_n dengan simpul-simpul ujungnya berderajat dua.

Teorema 4.2.5. *Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf edge-degree splitting C_n adalah*

$$dim_{Al}(EDS(C_n)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 4, \\ \left\lfloor \frac{n+7}{4} \right\rfloor, & \text{untuk } n \geq 5. \end{cases}$$

Bukti. Untuk $n = 1$, $dim_{Al}(C_1) = dim_{Al}(K_1) = 0$ (Teorema 2.1.2.)
Untuk $n = 2$, $dim_{Al}(C_2) = dim_{Al}(P_2) = 1$ (Teorema 2.1.1.)
Untuk $n = 3$, $dim_{Al}(EDS(C_3)) = dim_{Al}(EDS(K_3)) = 4$ (Teorema 4.2.3.)
Untuk $n \geq 4$, terdapat dua kasus.

Kasus 1. Untuk $n = 4$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, u_2, p_1\} \subseteq V(EDS(C_n))$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(C_n)$.

Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(C_n))$ adalah

$$\begin{aligned} r_A(u_1 \mid S) &= (0, 1, 1), \\ r_A(u_2 \mid S) &= (1, 0, 1), \\ r_A(u_3 \mid S) &= (2, 1, 1), \\ r_A(u_4 \mid S) &= (1, 2, 1), \\ r_A(p_1 \mid S) &= (1, 1, 0), \\ r_A(p_2 \mid S) &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(C_n))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(C_n)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 3$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(EDS(C_n))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \backslash \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = p_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_1, p_2 \in V(EDS(C_n))$ dengan $r_A(p_1 \mid S') = r_A(p_2 \mid S') = (1, 1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda EDS(C_n). Jadi $|S| = 3$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(C_n)) = 3$.

Kasus 2. Untuk $n \geq 5$

1. Untuk $n = 6$

   Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, u_4, p_1\} \subseteq V(EDS(C_6))$.

   Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf EDS(C_6). Representasi ketetanggaan simpul $v \in V(EDS(C_6)$ adalah

$$\begin{aligned} r_A(u_1 \mid S) &= (0,2,1), & r_A(u_4 \mid S) &= (2,0,1),\\ r_A(u_2 \mid S) &= (1,2,1), & r_A(u_5 \mid S) &= (2,1,1),\\ r_A(u_3 \mid S) &= (2,1,1), & r_A(u_6 \mid S) &= (1,2,1),\\ r_A(p_1 \mid S) &= (1,1,0), & r_A(p_2 \mid S) &= (1,1,1). \end{aligned}$$

   Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(EDS(C_6))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(C_6)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = \left\lfloor \frac{n+7}{4} \right\rfloor$ adalah minimal.

   Dipilih $S' \subseteq V(EDS(C_6))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = p_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_1, p_2 \in V(EDS(C_6))$ dengan $r_A(p_1 \mid S') = r_A(p_2 \mid S') = (1,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(C_6)$. Jadi $\mid S \mid = \left\lfloor \frac{n+7}{4} \right\rfloor$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(C_n)) = \left\lfloor \frac{n+7}{4} \right\rfloor$.

2. Untuk $n \neq 6$

   Dipilih himpunan terurut $S = \{u_{1+4k} \mid 0 \leq k < \left\lfloor \frac{n+7}{4} \right\rfloor - 1\} \cup \{p_1\} \subseteq V(EDS(C_n))$.

   Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf EDS(C_n). Representasi ketetanggaan simpul $v \in V(EDS(C_n)$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = \Big(d_A(v,u_1),\, d_A(v,u_5), \ldots, d_A(v,u_{1+4(k-1)}), d_A(v,p_1)\Big)$$

   dengan

$$d_A(v,u_i) = \begin{cases} 0, & v = u_i,\\ 1, & v \in \{u_{i-1}, u_{i+1}, p_j\}\\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1+4k \mid 0 \leq k < \left\lfloor \dfrac{n+7}{4} \right\rfloor - 1\},\\ j \in \{1,2\} \end{array}$$

$$d_A(v,p_j) = \begin{cases} 0, & v = p_j, \\ 1, & v \in \{u_i, p_j\} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1,2,\ldots,n\},\\ j = 1 \end{array}$$

   Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(EDS(C_n))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(C_n)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\mid S \mid = \left\lfloor \frac{n+7}{4} \right\rfloor$ adalah minimal.

   Misalkan $k = \left\lfloor \frac{n+7}{4} \right\rfloor$ dan terdapat himpunan $S' \subseteq V(EDS(C_n))$ dengan $|S'| < k$. Karena $|S'| < k$, cukup ditunjukkan bahwa himpunan dengan kardinalitas terbesar yang masih kurang dari k, yaitu $k-1$, tetap tidak dapat menjadi himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Pada himpunan terurut S, terdapat satu simpul khusus, yaitu p_1, yang diperlukan untuk membedakan pasangan simpul bertetangga pada bagian khusus graf. Jika simpul tersebut tidak termuat dalam S', maka terdapat pasangan

simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S', sehingga S' bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Oleh karena itu, agar tidak langsung gagal pada bagian khusus, S' harus memuat simpul khusus tersebut. Akibatnya, banyak simpul pada S' yang dapat digunakan untuk membedakan pola utama paling banyak adalah $(k-1)-1 = k-2$. Karena $k = \left\lfloor \frac{n+7}{4} \right\rfloor$, maka $k-2 = \left\lfloor \frac{n+7}{4} \right\rfloor - 2$. Dengan demikian, $k-2 \leq \frac{n+7}{4} - 2 = \frac{n-1}{4}$, sehingga $4(k-2) \leq n-1 < n$. Padahal pada pola graf awal terdapat simpul sebanyak n yang harus dibedakan, sedangkan setiap satu simpul pembeda pada graf awal hanya dapat membedakan paling banyak empat simpul berurutan. Akibatnya, masih terdapat paling sedikit satu pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S',

$$r_A(u_n \mid S') = r_A(u_{n-1} \mid S') = (2, 2, \ldots, 2).$$

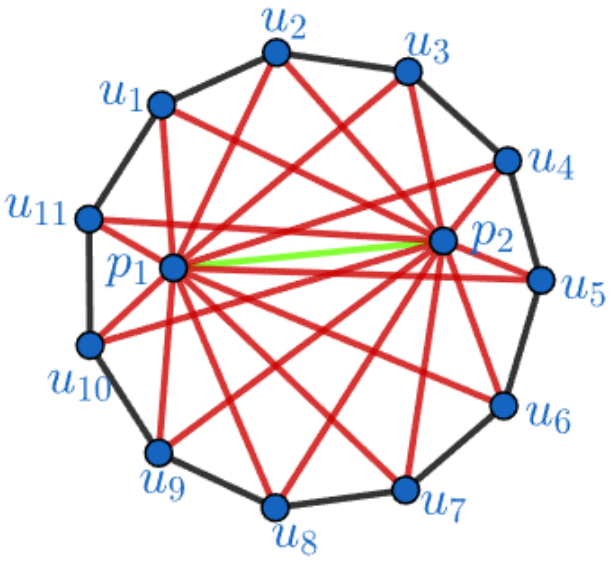
Jadi, tidak terdapat himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan kardinalitas kurang dari k. Karena telah diperoleh himpunan pembeda ketetanggaan lokal S dengan $|S| = k$, maka S merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimum. Dengan,

$$\dim_{Al}(EDS(C_n)) = \left\lfloor \frac{n+7}{4} \right\rfloor.$$

□

Berdasarkan pembuktian yang telah dijelaskan sebelumnya. Berikut diberikan contoh penerapan pada graf $EDS(C_{11})$.

Contoh 4.2.6. Misalkan graf EDS(C_{11}) pada Gambar 4.12 akan ditentukan dimensi metrik ketetanggaan lokal.



Gambar 4.12 Graf $EDS(C_{11})$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, u_5, u_9, p_1\} \subseteq V(EDS(C_{11}))$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari $EDS(C_{11})$. Representasi

ketetanggaan dari simpul-simpul $EDS(C_{11})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r_A(u_1 \mid S) &= (0,2,2,1), & r_A(u_6 \mid S) &= (2,1,2,1),\\
r_A(u_2 \mid S) &= (1,2,2,1), & r_A(u_7 \mid S) &= (2,2,2,1),\\
r_A(u_3 \mid S) &= (2,2,2,1), & r_A(u_8 \mid S) &= (2,2,1,1),\\
r_A(u_4 \mid S) &= (2,1,2,1), & r_A(u_9 \mid S) &= (2,2,0,1),\\
r_A(u_5 \mid S) &= (2,0,2,1), & r_A(u_{10} \mid S) &= (2,2,1,1),\\
r_A(u_{11} \mid S) &= (1,2,2,1), & r_A(p_1 \mid S) &= (1,1,1,0),\\
r_A(p_2 \mid S) &= (1,1,1,1).
\end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $EDS(C_{11})$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetanggga berbeda.
Dapat ditunjukkan $|S|$ adalah minimal. Ambil sebarang $S' \subseteq V(EDS(C_{11}))$ dengan $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = p_1$ akibatnya terdapat simpul bertetangga $p_1, p_2 \in V(EDS(C_{11}))$ dengan $r_A(p_1 \mid S') = r_A(p_2 \mid S') = (1,1,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(C_{11})$. Jadi $|S| = 4$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(C_{11})) = 4$.

Misalkan dipilih himpunan terurut untuk $\mid S \mid = 3$.

No.	Himpunan	Representasi yang Sama
1	$\{u_i, u_j, p_a\}$	$r_A(u_{j+2} \mid S) = r_A(u_{j+3} \mid S)$
2	$\{p_1, p_2, u_i\}$	$r_A(u_{i+2} \mid S) = r_A(u_{i+3} \mid S)$
3	$\{u_i, u_j, u_h\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$

Tabel 4.3 Himpunan untuk $|S| = 3$, graf $EDS(C_{11})$.

4.2.4 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Bipartit Lengkap

Graf *edge-degree splitting* $K_{s,t}$ dinotasikan dengan $EDS(K_{s,t})$ adalah graf terhubung hasil operasi *edge-degree splitting*. Banyaknya simpul $n = s + t$ pada graf $EDS(K_{s,t})$, $|V(EDS(K_{s,t}))| = n + 2$ dengan simpul-simpul:

$$\begin{aligned}
V(EDS(K_{s,t})) &= V(K_{s,t}) \cup V(K_2)\\
&= \{u_1, u_2, \ldots, u_s\} \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_t\} \cup \{p_1, p_2\}
\end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf $EDS(K_{s,t})$, $\mid E(EDS(K_{s,t})) \mid = 3n$. dengan:

a. u_j : simpul ke-j pada graf $K_{s,t}$

b. w_l : simpul ke-l pada graf $K_{s,t}$

c. p_m : simpul ke-m dari graf K_2

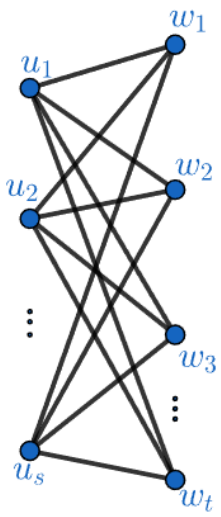
d. K_2 : sisi tambahan

e. $j \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$

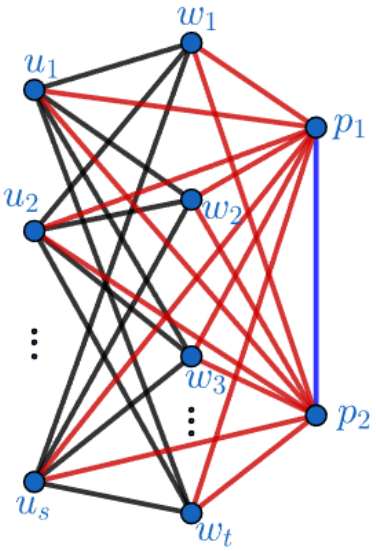
f. $l \in \{1, 2, 3, \ldots, t\}$

g. $m \in \{1, 2\}$

Berikut ini Gambar 4.13 menunjukkan graf $K_{s,t}$ dan Gambar 4.14 menunjukkan graf $EDS(K_{s,t})$.



Gambar 4.13 Graf $K_{s,t}$



Gambar 4.14 Graf $EDS(K_{s,t})$

Gambar 4.13 adalah graf $K_{s,t}$. Gambar 4.14 adalah graf $EDS(K_{s,t})$. Pada Gambar 4.14 sisi berwarna biru adalah sisi tambahan *edge-degree splitting* dan sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $K_{s,t}$ dengan simpul-simpul ujungnya berderajat s dan t.

Teorema 4.2.7. *Untuk $s, t \geq 2$, dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf edge-degree splitting $K_{s,t}$ adalah*

$$dim_{Al}(EDS(K_{s,t})) = 3$$

Bukti. Untuk $s, t \geq 2$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, w_1, p_1\} \subseteq V(EDS(K_{s,t}))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* $K_{s,t}$, $EDS(K_{s,t})$. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(K_{s,t})$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = \Big(d_A(v, u_1),\, d_A(v, w_1), d_A(v, p_1)\Big)$$

dengan

$$d_A(v, u_i) = \begin{cases} 0, & v = u_i, \\ 1, & v \in \{w_j, p_l\}, \\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad \begin{array}{l} i = 1, \\ j \in \{1, 2, \ldots, t\}, \\ l \in \{1, 2, \} \end{array}$$

$$d_A(v, w_j) = \begin{cases} 0, & v = w_j, \\ 1, & v \in \{u_i, p_l\}, \\ 2, & \text{lainnya} \end{cases} \quad \begin{array}{l} i \in \{1, 2, \ldots, s\}, \\ j = 1, \\ l \in \{1, 2\} \end{array}$$

dan

$$d_A(v, p_i) = \begin{cases} 0, & v = p_i, \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad i = 1$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(K_{s,t}))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(K_{s,t})$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 3$ adalah minimal.

Misalkan $k = 3$ dan terdapat himpunan $S' \subseteq V(EDS(K_{s,t}))$ dengan $|S'| < k$. Karena $|S'| < k$, cukup ditunjukkan bahwa himpunan dengan kardinalitas terbesar yang masih kurang dari k, yaitu $k - 1$, tetap tidak dapat menjadi himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Pada himpunan terurut S, terdapat satu simpul khusus, yaitu p_1, yang diperlukan untuk membedakan pasangan simpul bertetangga pada bagian khusus graf. Jika simpul tersebut tidak termuat dalam S', maka terdapat pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S', sehingga S' bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

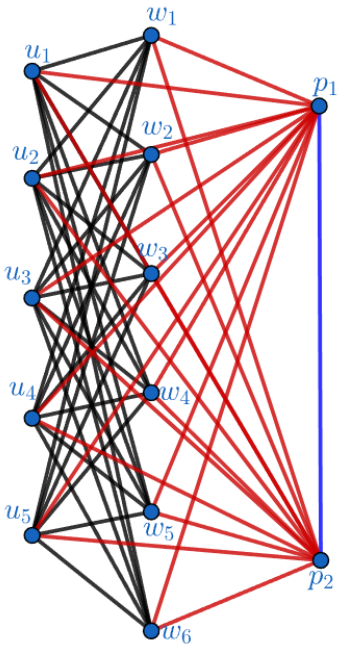
Oleh karena itu, agar tidak langsung gagal pada bagian khusus, S' harus memuat simpul khusus tersebut. Akibatnya, banyak simpul pada S' yang dapat digunakan untuk membedakan pola utama paling banyak adalah $(k-1)-1 = k-2$. Dengan demikian, $k-2 \leq 3-2 = 1$, sehingga $(k-2) \leq 3-2 < s+t$. Padahal pada pola graf awal terdapat simpul sebanyak $n = s+t$ yang harus dibedakan, sedangkan setiap satu simpul pembeda pada graf awal hanya dapat membedakan paling banyak s atau t simpul berurutan. Akibatnya, masih terdapat paling sedikit satu pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S', $r_A(w_n \mid S') = r_A(p_2 \mid S') = (1)$. Jadi, tidak terdapat himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan kardinalitas kurang dari k. Karena telah diperoleh himpunan pembeda ketetanggaan lokal S dengan $|S| = k$, maka S merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimum. Dengan,

$$\dim_{Al}(EDS(K_{s,t})) = 3.$$

□

Berdasarkan pembuktian yang telah dijelaskan sebelumnya. Berikut diberikan contoh penerapan pada graf $EDS(K_{5,6})$.

Contoh 4.2.8. Misalkan graf EDS($K_{5,6}$) pada Gambar 4.15 akan ditentukan dimensi metrik ketetanggaan lokalnya.



Gambar 4.15 Graf $EDS(K_{5,6})$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, w_1, p_1\} \subseteq V(EDS(K_{5,6}))$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari $EDS(K_{5,6})$. Representasi ketetanggaan dari simpul-simpul $EDS(K_{5,6})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r_A(u_1 \mid S) &= (0,1,2), & r_A(w_1 \mid S) &= (1,0,1),\\
r_A(u_2 \mid S) &= (2,1,1), & r_A(w_2 \mid S) &= (1,2,1),\\
r_A(u_3 \mid S) &= (2,1,1), & r_A(w_3 \mid S) &= (1,2,1),\\
r_A(u_4 \mid S) &= (2,1,0), & r_A(w_4 \mid S) &= (1,2,1),\\
r_A(u_5 \mid S) &= (2,1,0), & r_A(w_5 \mid S) &= (1,2,1),\\
r_A(p_1 \mid S) &= (1,1,0), & r_A(w_6 \mid S) &= (1,2,1),\\
r_A(p_2 \mid S) &= (1,1,1). &&
\end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(K_{5,6}))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(K_{5,6})$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 3$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(\text{EDS}(K_{5,6}))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = p_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_1, p_2 \in V(EDS(K_{5,6}))$ dengan $r_A(p_1 \mid S') = r_A(p_2 \mid S') = (1,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $\text{EDS}(K_{5,6})$. Jadi $|S| = 3$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(K_{5,6})) = 3$.

Misalkan dipilih himpunan terurut untuk $\mid S \mid = 2$.

No.	Himpunan	Representasi yang Sama
1	$\{u_i, u_j\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
2	$\{u_i, w_a\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
3	$\{u_i, p_b\}$	$r_A(w_{i+1} \mid S) = r_A(p_{3-i} \mid S)$
4	$\{w_i, w_j\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
5	$\{w_i, p_b\}$	$r_A(u_i \mid S) = r_A(p_{3-i} \mid S)$
6	$\{p_1, p_2\}$	$r_A(u_i \mid S) = r_A(w_i \mid S)$

Tabel 4.4 Himpunan untuk $|S| = 2$, graf $EDS(K_{5,6})$.

4.2.5 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Bintang

Graf *edge-degree splitting* S_n dinotasikan dengan $EDS(S_n)$ adalah graf terhubung hasil operasi *edge-degree splitting*. Banyaknya simpul pada graf $EDS(S_n)$, $|V(EDS(S_n)| = n + 2$ dengan simpul-simpul:

$$\begin{aligned} V(EDS(S_n)) &= V(S_n) \cup V(K_2) \\ &= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{p_1, p_2\} \end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf $EDS(S_n)$, $\mid E(EDS(S_n)) \mid = 3n.$ dengan:

a. u_1 : simpul pusat graf S_n

b. u_j : simpul ke-j pada graf S_n

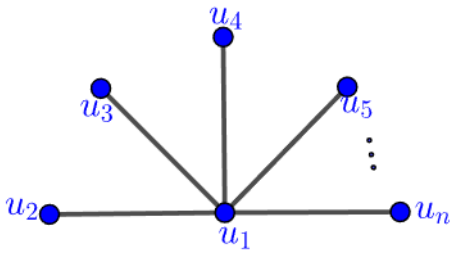
c. p_l : simpul ke-l dari graf K_2

d. K_2 : sisi tambahan

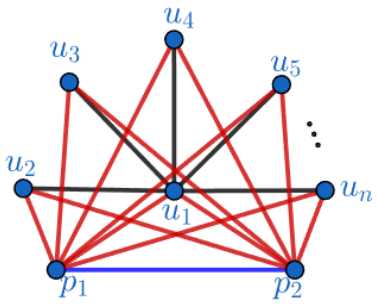
e. $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

f. $l \in \{1, 2\}$

Berikut ini Gambar 4.16 menunjukkan graf S_n dan Gambar 4.17 menunjukkan graf $EDS(S_n)$.



Gambar 4.16 Graf S_n



Gambar 4.17 Graf $EDS(S_n)$

Gambar 4.16 menunjukkan graf S_n dan Gambar 4.17 menunjukkan graf $EDS(S_n)$. Pada Gambar 4.17 sisi berwarna biru adalah sisi tambahan EDS dan sisi berwarna merah

adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf S_n dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat satu dan $n-1$.

Teorema 4.2.9. *Untuk $n \geq 4$, dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf edge-degree splitting S_n adalah*

$$dim_{Al}(EDS(S_n)) = 3.$$

Bukti. Untuk $n = 1$, $dim_{Al}(S_1) = dim_{Al}(K_1) = 0$ (Teorema 2.1.2.)
Untuk $n = 2$, $dim_{Al}(S_2) = dim_{Al}(P_2) = 1$ (Teorema 2.1.1.)
Untuk $n = 3$, $dim_{Al}(EDS(S_3)) = dim_{Al}(EDS(P_3)) = 3$ (Teorema 4.2.1.)
Untuk $n \geq 4$ terdapat satu kasus.

Kasus 1. Untuk $n \geq 4$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, p_1, p_2\} \subseteq V(EDS(S_n))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* S_n, $EDS(S_n)$. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(S_n)$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = \Big(d_A(v, u_1),\, d_A(v, p_1), d_A(v, p_2)\Big)$$

dengan

$$d_A(v, u_i) = \begin{cases} 0, & v = u_i, \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad i = 1$$

dan

$$d_A(v, p_i) = \begin{cases} 0, & v = p_i, \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad i \in \{1, 2\}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(S_n))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(S_n)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 3$ adalah minimal.

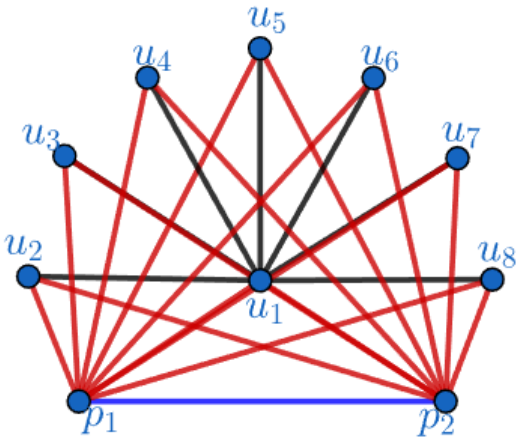
Dipilih $S' \subseteq V(EDS(S_n))$ dengan kardinalitas S', $\mid S' \mid = k-1$, yaitu $S' = S \backslash \{v\},\ v \in S$. Dipilih $v = p_2$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_2, u_2 \in V(S_n)$ dengan $r_A(p_2 \mid S') = r_A(u_2 \mid S') = (1, 1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(S_n)$. Jadi $\mid S \mid = 3$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal,

$$\dim_{Al}(EDS(S_n)) = 3.$$

□

Berdasarkan pembuktian yang telah dijelaskan sebelumnya. Berikut diberikan contoh penerapan pada graf $EDS(S_8)$.

Contoh 4.2.10. Misalkan graf EDS(S_8) pada Gambar 4.18 akan ditentukan dimensi metrik ketetanggaan lokalnya.



Gambar 4.18 Graf $EDS(S_8)$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, p_1, p_2\} \subseteq V(EDS(S_8))$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari $EDS(S_8)$. Representasi ketetanggaan dari simpul-simpul $EDS(S_8)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r_A(u_1 \mid S) &= (0,1,1), & r_A(u_5 \mid S) &= (1,1,1),\\ r_A(u_2 \mid S) &= (1,1,1), & r_A(u_6 \mid S) &= (1,1,1),\\ r_A(u_3 \mid S) &= (1,1,1), & r_A(u_7 \mid S) &= (1,1,1),\\ r_A(u_4 \mid S) &= (1,1,1), & r_A(u_8 \mid S) &= (1,1,1),\\ r_A(p_1 \mid S) &= (1,0,1), & r_A(p_2 \mid S) &= (1,1,0). \end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(S_8))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(S_8)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 3$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(\text{EDS}(S_8))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = p_2$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_2, u_2, \ldots, u_8 \in V(EDS(S_8))$ dengan $r_A(p_2 \mid S') = r_A(u_2 \mid S') = \ldots = r_A(u_8 \mid S') = (1,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $\text{EDS}(S_8)$. Jadi $|S| = 3$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(S_8)) = 3$.

Misalkan dipilih himpunan terurut untuk $\mid S \mid = k - 1$.

No.	Himpunan	Representasi yang Sama
1	$\{u_i, u_j\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
2	$\{u_i, p_a\}$	$r_A(u_{i+1} \mid S) = r_A(p_{3-a} \mid S)$
3	$\{p_1, p_2\}$	$r_A(u_1 \mid S) = r_A(u_{i+1} \mid S)$

Tabel 4.5 Himpunan untuk $|S| = 2$ graf $EDS(S_8)$.

4.3 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf Khusus

Pada bagian ini dipaparkan dimensi metrik ketetanggaan lokal graf *edge-degree splitting* graf khusus seperti graf $P_n \odot K_1$, graf $K_n \odot K_1$, graf $C_n \odot K_1$, graf $K_{s,t} \odot K_1$,

dan graf helm (H_n). Berikut ini pemaparan dimensi metrik ketetanggaan lokal graf *edge-degree splitting* graf khusus.

4.3.1 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Sisir

Graf *edge-degree splitting* $P_n \bigodot K_1$ dinotasikan dengan $EDS(P_n \bigodot K_1)$ adalah graf terhubung hasil operasi *edge-degree splitting*. Banyaknya simpul pada graf $EDS(P_n \bigodot K_1)$ unutuk $n = 3$, $|V(EDS(P_n \bigodot K_1))| = 2n + 4$ dengan himpunan simpul:

$$\begin{aligned} V(EDS(P_n \bigodot K_1)) &= V(P_3) \cup \bigcup_{i=1}^{3} V(K_1) \cup V(K_2^1) \cup V(K_2^2) \\ &= \{u_1, u_2, u_3\} \cup \{w_1, w_2, w_3\} \cup \{p_1, p_2\} \cup \{q_1, q_2\} \end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf $EDS(P_3 \bigodot K_1)$, $|EDS(P_3 \bigodot K_1)| = 7n$. Selanjutnya untuk $n = 4$, banyaknya simpul $|V(EDS(P_n \bigodot K_1))| = 2n + 6$ dengan himpunan simpul:

$$\begin{aligned} V(EDS(P_n \bigodot K_1)) &= V(P_4) \cup \bigcup_{i=1}^{4} V(K_1) \cup V(K_2^1) \cup V(K_2^2) \cup V(K_2^3) \\ &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \cup \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \cup \{p_1, p_2\} \cup \{q_1, q_2\} \cup \{t_1, t_2\} \end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf $EDS(P_n \bigodot K_1)$, $|E(EDS(P_n \bigodot K_1))| = 8n + 2$. Untuk $n \geq 5$, banyaknya simpul graf $EDS(P_n \bigodot K_1)$, $|V(EDS(P_n \bigodot K_1))| = 2n + 8$, dengan himpunan simpul:

$$\begin{aligned} V(EDS(P_n \bigodot K_1)) &= V(P_n) \cup \bigcup_{i=1}^{n} V(K_1) \cup V(K_2^1) \cup V(K_2^2) \cup V(K_2^3) \cup V(K_2^4) \\ &= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \cup \{p_1, p_2\} \cup \{q_1, q_2\} \\ &\quad \cup \{t_1, t_2\} \cup \{o_1, o_2\} \end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf $EDS(P_n \bigodot K_1)$, $|E(EDS(P_n \bigodot K_1))| = 8n + 7$. dengan:

a. u_j : simpul ke-j pada graf P_n

b. w_j : simpul gantung ke-j pada graf P_n

c. p_l : simpul ke-l dari graf K_2^1

d. q_l : simpul ke-l dari graf K_2^2

e. t_l : simpul ke-l dari graf K_2^3

f. o_l : simpul ke-l dari graf K_2^4

g. K_2^1 : sisi tambahan pertama

h. K_2^2 : sisi tambahan kedua

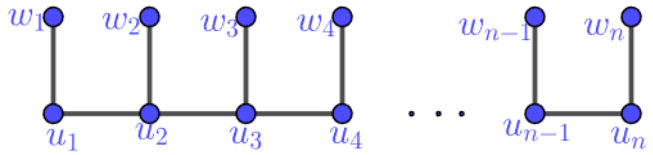
i. K_2^3 : sisi tambahan ketiga

j. K_2^4 : sisi tambahan keempat

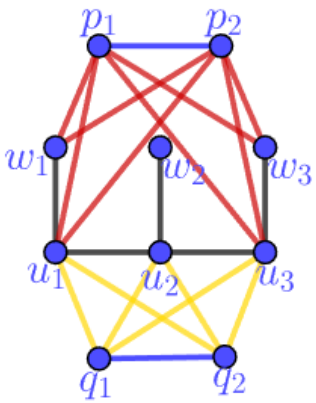
k. $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

l. $l \in \{1, 2\}$

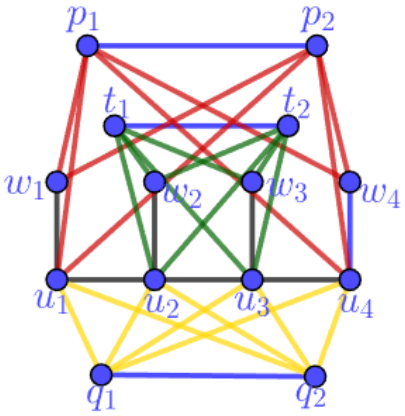
Berikut ini Gambar 4.19 menunjukkan graf $P_n \odot K_1$, Gambar 4.20, Gambar 4.21, Gambar 4.22 menunjukkan graf $EDS(P_n \odot K_1)$.



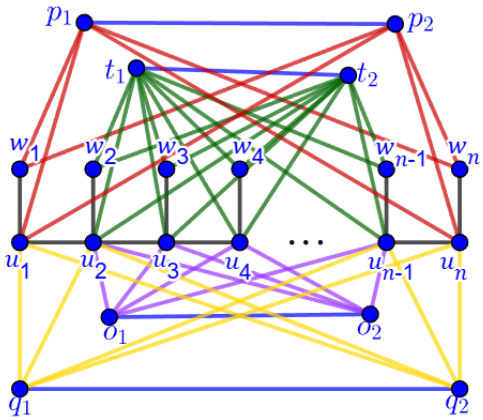
Gambar 4.19 Graf $P_n \odot K_1$



Gambar 4.20 Graf $EDS(P_3 \odot K_1)$



Gambar 4.21 Graf $EDS(P_4 \odot K_1)$



Gambar 4.22 Graf $EDS(P_n \odot K_1)$

Gambar 4.19 adalah graf $P_n \odot K_1$, Gambar 4.20 adalah graf $EDS(P_3 \odot K_1)$, Gambar 4.21 adalah graf $EDS(P_4 \odot K_1)$, dan Gambar 4.22 adalah graf $EDS(P_n \odot K_1)$. Pada Gambar 4.20 sisi berwarna biru adalah sisi tambahan EDS. Sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $P_3 \odot K_1$ dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat satu dan dua. Sisi berwarna kuning adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $P_3 \odot K_1$ dengan simpul-simpul ujung

sebuah sisi berderajat dua dan tiga. Selanjutnya, pada Gambar 4.21 sisi berwarna biru adalah sisi tambahan EDS. Sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $P_4 \bigodot K_1$ dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat satu dan dua. Sisi berwarna kuning adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $P_4 \bigodot K_1$ dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat dua dan tiga. Sisi-sisi berwarna hijau adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $P_4 \bigodot K_1$ dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat satu dan tiga. Terakhir, Gambar 4.22 sisi berwarna biru adalah sisi tambahan EDS. Sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $P_n \bigodot K_1$ dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat satu dan dua. Sisi berwarna kuning adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $P_n \bigodot K_1$ dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat dua dan tiga. Sisi-sisi berwarna hijau adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $P_n \bigodot K_1$ dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat satu dan tiga. Sisi-sisi berwarna ungu menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $P_n \bigodot K_1$ dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat tiga.

Teorema 4.3.1. *Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf edge-degree splitting* $P_n \bigodot K_1$ *adalah*

$$dim_{Al}(EDS(P_n \bigodot K_1)) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 3, \\ 5, & \text{untuk } n = 4, \\ 6, & \text{untuk } n \in \{5, 6, 7\}, \\ 7, & \text{untuk } n \in \{8, 9\}, \\ \left\lfloor \frac{n-10}{4} \right\rfloor + 7, & \text{untuk } n \geq 10. \end{cases}$$

Bukti. Untuk $n = 1$, $dim_{Al}(P_n \bigodot K_1) = dim_{Al}(P_2) = 1$ (Teorema 2.1.1.)
Untuk $n = 2$, $dim_{Al}(EDS(P_2 \bigodot K_1)) = dim_{Al}(EDS(P_4)) = 3$ (Teorema 4.2.1.)
Untuk $n \geq 3$ terdapat lima kasus.

Kasus 1. Untuk $n = 3$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_2, q_1, p_1, p_2\} \subseteq V(EDS(P_n \bigodot K_1))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* $P_n \bigodot K_1$. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(P_n \bigodot K_1))$ adalah

$$\begin{aligned} r_A(u_1 \mid S) &= (1,1,1,1), & r_A(w_1 \mid S) &= (2,2,1,1), \\ r_A(u_2 \mid S) &= (0,1,1,2), & r_A(w_2 \mid S) &= (1,1,1,2), \\ r_A(u_3 \mid S) &= (1,1,1,1), & r_A(w_3 \mid S) &= (2,2,1,1), \\ r_A(p_1 \mid S) &= (2,2,0,1), & r_A(p_2 \mid S) &= (2,2,1,0), \\ r_A(q_1 \mid S) &= (1,0,2,2), & r_A(q_2 \mid S) &= (1,1,2,2). \end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(EDS(P_n \bigodot K_1))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(P_n \bigodot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 4$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(EDS(P_n \bigodot K_1))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = p_2$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_2, w_1, w_3 \in$

$V(EDS(P_n \bigodot K_1))$ dengan $r_A(p_2 \mid S') = r_A(w_1 \mid S') = r_A(w_3 \mid S') = (2,2,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(P_n \bigodot K_1)$. Jadi $|S| = 4$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(P_n \bigodot K_1)) = 4$.

Kasus 2. Untuk $n = 4$

Dipilih himpunan terurut $S = \{w_3, t_1, q_1, p_1, p_2\} \subseteq V(EDS(P_n \bigodot K_1))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* $P_n \bigodot K_1$. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(P_n \bigodot K_1))$ adalah

$$\begin{aligned}
r_A(u_1 \mid S) &= (2,2,1,1,1), & r_A(w_1 \mid S) &= (2,2,2,1,1),\\
r_A(u_2 \mid S) &= (2,1,1,2,2), & r_A(w_2 \mid S) &= (2,1,1,1,2),\\
r_A(u_3 \mid S) &= (1,1,1,2,2), & r_A(w_3 \mid S) &= (0,1,2,2,2),\\
r_A(p_1 \mid S) &= (2,2,2,0,1), & r_A(p_2 \mid S) &= (2,2,2,1,0),\\
r_A(q_1 \mid S) &= (2,2,0,2,2), & r_A(q_2 \mid S) &= (2,2,1,2,2),\\
r_A(t_1 \mid S) &= (1,0,2,2,2), & r_A(t_2 \mid S) &= (1,1,2,2,2).
\end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(EDS(P_n \bigodot K_1))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(P_n \bigodot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 5$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(EDS(P_n \bigodot K_1))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = p_2$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_2, w_1, w_4 \in V(EDS(P_n \bigodot K_1))$ dengan $r_A(p_2 \mid S') = r_A(w_1 \mid S') = r_A(w_4 \mid S') = (2,2,2,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda EDS($P_n \bigodot K_1$). Jadi $|S| = 5$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(P_n \bigodot K_1)) = 5$.

Kasus 3. Untuk $n \in \{5,6,7\}$

Dipilih himpunan terurut $S = \{w_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, t_1, o_1, q_1, p_1, p_2\} \subseteq V(EDS(P_n \bigodot K_1))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* $P_n \bigodot K_1$. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(P_n \bigodot K_1))$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = (d_A(v, w_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}), d_A(v,t_1), d_A(v,o_1), d_A(v,q_1), d_A(v,p_1), d_A(v,p_2)),$$

dengan

$$d_A(v,w_i) = \begin{cases} 0, & v = w_i,\\ 1, & v \in \{u_i, t_j\},\\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad \begin{array}{l} i = \lceil \frac{n}{2} \rceil,\\ j \in \{1,2\} \end{array}$$

$$d_A(v,t_i) = \begin{cases} 0, & v = t_i,\\ 1, & v \in \{t_{i+1}, u_j, w_j\},\\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad \begin{array}{l} i = 1,\\ j \in \{2,3,\ldots,n-1\} \end{array}$$

$$d_A(v,o_i) = \begin{cases} 0, & v = o_i,\\ 1, & v \in \{o_{i+1}, u_j\},\\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad \begin{array}{l} i = 1,\\ j \in \{2,3,\ldots,n-1\} \end{array}$$

$$d_A(v,q_i)=\begin{cases}0, & v=q_i,\\ 1, & v\in\{q_{i+1},u_j\},\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\quad\begin{matrix}i=1,\\ j\in\{1,2,n-1,n\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,p_i)=\begin{cases}0, & v=p_i,\\ 1, & v\in\{w_j,u_j\},\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\quad\begin{matrix}i\in\{1,2\}\\ j\in\{1,2,n-1,n\}\end{matrix}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v\in V(EDS(P_n\bigodot K_1))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(P_n\bigodot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S|=6$ adalah minimal.

Dipilih $S'\subseteq V(EDS(P_n\bigodot K_1))$ dengan kardinalitas S', $|S'|<|S|$ yaitu $S'=S\setminus\{v\}$, $v\in S$. Dipilih $v=p_2$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_2,w_1,w_n\in V(EDS(P_n\bigodot K_1))$ dengan $r_A(p_2\mid S')=r_A(w_1\mid S')=r_A(w_n\mid S')=(2,2,2,2,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda EDS$(P_n\bigodot K_1)$, untuk menunjukkan bahwa tidak terdapat himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari k, cukup ditinjau kasus $|S'|=k-1$. Hal ini karena setiap himpunan dengan kardinalitas kurang dari $k-1$ merupakan kasus yang lebih kecil. Oleh karena itu, apabila himpunan berukuran $k-1$ saja tidak dapat menjadi himpunan pembeda, maka setiap himpunan dengan kardinalitas yang lebih kecil juga tidak dapat menjadi himpunan pembeda. Jadi $|S|=6$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(P_n\bigodot K_1))=6$.

Kasus 4. Untuk $n\in\{8,9\}$

Dipilih himpunan terurut $S=\{u_4,u_7,t_1,o_1,q_1,p_1,p_2\}\subseteq V(EDS(P_n\bigodot K_1))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* $P_n\bigodot K_1$. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v\in V(EDS(P_n\bigodot K_1))$ adalah

$$r_A(v\mid S_i)=(d_A(v,u_4),d_A(v,u_7),d_A(v,t_1),d_A(v,o_1),d_A(v,q_1),d_A(v,p_1),d_A(v,p_2)),$$

dengan

$$d_A(v,u_i)=\begin{cases}0, & v=u_i,\\ 1, & v\in\{w_i,t_j,o_j\},\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\quad\begin{matrix}i\in\{4,7\},\\ j\in\{1,2\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,t_i)=\begin{cases}0, & v=t_i,\\ 1, & v\in\{t_{i+1},u_j,w_j\},\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\quad\begin{matrix}i=1,\\ j\in\{2,3,\ldots,n-1\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,o_i)=\begin{cases}0, & v=o_i,\\ 1, & v\in\{o_{i+1},u_j\},\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\quad\begin{matrix}i=1,\\ j\in\{2,3,\ldots,n-1\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,q_i)=\begin{cases}0, & v=q_i,\\ 1, & v\in\{q_{i+1},u_j\},\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\quad\begin{matrix}i=1,\\ j\in\{1,2,n-1,n\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,p_i)=\begin{cases}0, & v=p_i,\\ 1, & v\in\{w_j,u_j\},\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\quad\begin{matrix}i\in\{1,2\}\\ j\in\{1,2,n-1,n\}\end{matrix}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v\in V(EDS(P_n\bigodot K_1))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(P_n\bigodot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S|=7$ adalah minimal.

Dipilih $S'\subseteq V(EDS(P_n\bigodot K_1))$ dengan kardinalitas S', $|S'|<|S|$ yaitu $S'=S\setminus\{v\}$, $v\in S$. Dipilih $v=p_2$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_2,w_1,w_n\in V(EDS(P_n\bigodot K_1))$ dengan $r_A(p_2\mid S')=r_A(w_1\mid S')=r_A(w_n\mid S')=(2,2,2,2,2,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda EDS$(P_n\bigodot K_1)$, untuk menunjukkan bahwa tidak terdapat himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari k, cukup ditinjau kasus $|S'|=k-1$. Hal ini karena setiap himpunan dengan kardinalitas kurang dari $k-1$ merupakan kasus yang lebih kecil. Oleh karena itu, apabila himpunan berukuran $k-1$ saja tidak dapat menjadi himpunan pembeda, maka setiap himpunan dengan kardinalitas yang lebih kecil juga tidak dapat menjadi himpunan pembeda. Jadi $|S|=7$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(P_n\bigodot K_1))=7$.

Kasus 5. Untuk $n\geq 10$

Dipilih himpunan terurut $S=\{u_{5+4k}\mid 0\leq k<\left\lfloor\frac{n-10}{4}\right\rfloor+2\}\cup\{t_1,o_1,q_1,p_1,p_2\}\subseteq V(EDS(P_n\bigodot K_1))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* $P_n\bigodot K_1$. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v\in V(EDS(P_n\bigodot K_1))$ adalah

$$r_A(v\mid S_i)=\big(d_A(v,u_5),\ldots,d_A(v,u_{5+4(k-5)}),d_A(v,t_1),\\ d_A(v,o_1),d_A(v,q_1),d_A(v,p_1),d_A(v,p_2)\big).$$

dengan

$$d_A(v,u_i)=\begin{cases}0, & v=u_i,\\ 1, & v\in\{u_{i-1},u_{i+1},w_i,t_j,o_j\},\\ 1, & v=q_j \text{ jika } u_i \text{ simpul basis terakhir dan untuk } n\equiv 2 \pmod 4,\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}$$

$$i\in\left\{5+4k\mid 0\leq k<\left\lfloor\frac{n-10}{4}\right\rfloor+2\right\}$$

$$j\in\{1,2\}$$

$$d_A(v,t_i)=\begin{cases}0, & v=t_i,\\ 1, & v\in\{t_{i+1},u_j,w_j\},\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\quad\begin{matrix}i=1,\\ j\in\{2,3,\ldots,n-1\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,o_i)=\begin{cases}0, & v=o_i,\\ 1, & v\in\{o_{i+1},u_j\}\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\quad\begin{matrix}i=1,\\ j\in\{2,3,\ldots,n-1\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,q_i)=\begin{cases}0, & v=q_i,\\ 1, & v\in\{q_{i+1},u_j\}\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\quad\begin{matrix}i=1,\\ j\in\{1,2,n-1,n\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,p_i)=\begin{cases}0, & v=p_i,\\ 1, & v\in\{w_j,u_2\}\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\quad\begin{matrix}i\in\{1,2\}\\ j\in\{1,2,n-1,n\}\end{matrix}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v\in V(EDS(P_n\bigodot K_1)$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(P_n\bigodot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S|=\left\lfloor\frac{n-10}{4}\right\rfloor+7$ adalah minimal.

Misalkan $k=\left\lfloor\frac{n-10}{4}\right\rfloor+7$ dan terdapat himpunan $S'\subseteq V(EDS(P_n\bigodot K_1))$ dengan $|S'|<k$. Karena $|S'|<k$, cukup ditunjukkan bahwa himpunan dengan kardinalitas terbesar yang masih kurang dari k, yaitu $k-1$, tetap tidak dapat menjadi himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Pada himpunan terurut S, terdapat lima simpul khusus, yaitu p_1,p_2,q_1,t_1 dan o_1, yang diperlukan untuk membedakan pasangan simpul bertetangga pada bagian khusus graf. Jika salah satu dari kedua simpul tersebut tidak termuat dalam S', maka terdapat pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S', sehingga S' bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Oleh karena itu, agar tidak langsung gagal pada bagian khusus, S' harus memuat kelima simpul khusus tersebut. Akibatnya, banyak simpul pada S' yang dapat digunakan untuk membedakan pola utama paling banyak adalah $(k-1)-5=k-6$. Karena $k=\left\lfloor\frac{n-10}{4}\right\rfloor+7$, maka $k-6=\left\lfloor\frac{n-10}{4}\right\rfloor+1$. Dengan demikian, $k-6\leq\frac{n-10}{4}+1=\frac{n-6}{4}$, sehingga $4(k-6)\leq n-6<n$. Padahal pada pola graf awal terdapat simpul sebanyak n yang harus dibedakan, sedangkan setiap satu simpul pembeda pada pola graf awal hanya dapat membedakan paling banyak empat simpul berurutan. Akibatnya, masih terdapat paling sedikit satu pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S',

$$r_A(u_{n-2}\mid S')=r_A(u_{n-3})=(2,2,\ldots,2).$$

Jadi, tidak terdapat himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan kardinalitas kurang dari k. Karena telah diperoleh himpunan pembeda ketetanggaan lokal S dengan $|S|=k$,

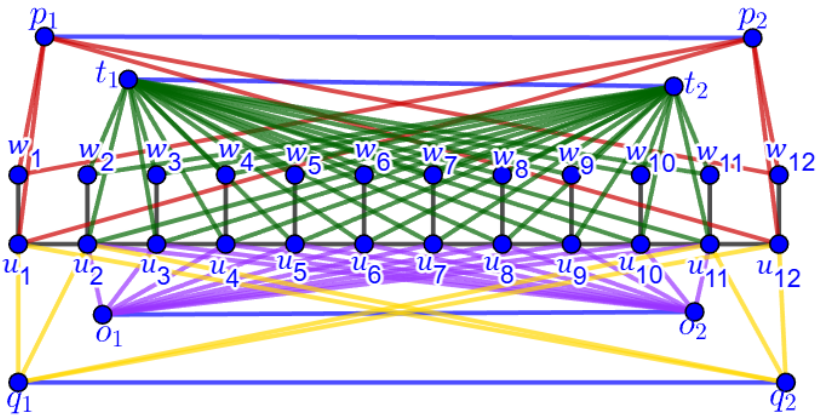
maka S merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimum. Dengan,

$$\dim_{Al}(EDS(P_n \bigodot K_1)) = \left\lfloor \frac{n-10}{4} \right\rfloor + 7.$$

□

Berdasarkan pembuktian yang telah dijelaskan sebelumnya. Berikut diberikan contoh penerapan pada graf $EDS(P_{12} \bigodot K_1)$.

Contoh 4.3.2. Misalkan graf EDS($P_{12} \bigodot K_1$) pada Gambar 4.23 akan ditentukan dimensi metrik ketetanggaan lokalnya.



Gambar 4.23 Graf $EDS(P_{12} \bigodot K_1)$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_5, u_9, t_1, o_1, q_1, p_1, p_2\} \subseteq V(EDS(P_{12} \bigodot K_1))$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari $EDS(P_{12} \bigodot K_1)$. Representasi ketetanggaan dari simpul-simpul $EDS(P_{12} \bigodot K_1)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r_A(u_1 \mid S) &= (2,2,2,2,1,1,1), & r_A(w_1 \mid S) &= (2,2,2,2,2,1,1),\\
r_A(u_2 \mid S) &= (2,2,1,1,1,2,2), & r_A(w_2 \mid S) &= (2,2,1,2,2,2,2),\\
r_A(u_3 \mid S) &= (2,2,1,1,2,2,2), & r_A(w_3 \mid S) &= (2,2,1,2,2,2,2),\\
r_A(u_4 \mid S) &= (1,2,1,1,2,2,2), & r_A(w_4 \mid S) &= (2,2,1,2,2,2,2),\\
r_A(u_5 \mid S) &= (0,2,1,1,2,2,2), & r_A(w_5 \mid S) &= (1,2,1,2,2,2,2),\\
r_A(u_6 \mid S) &= (1,2,1,1,2,2,2), & r_A(w_6 \mid S) &= (2,2,1,2,2,2,2),\\
r_A(u_7 \mid S) &= (2,2,1,1,2,2,2), & r_A(w_7 \mid S) &= (2,2,1,2,2,2,2),\\
r_A(u_8 \mid S) &= (2,1,1,1,2,2,2), & r_A(w_8 \mid S) &= (2,2,1,2,2,2,2),\\
r_A(u_9 \mid S) &= (2,0,1,1,2,2,2), & r_A(w_9 \mid S) &= (2,1,1,2,2,2,2),\\
r_A(u_{10} \mid S) &= (2,1,1,1,2,2,2), & r_A(w_{10} \mid S) &= (2,2,1,2,2,2,2),\\
r_A(u_{11} \mid S) &= (2,2,1,1,1,2,2), & r_A(w_{11} \mid S) &= (2,2,1,2,2,2,2),\\
r_A(u_{12} \mid S) &= (2,2,2,2,1,1,1), & r_A(w_{12} \mid S) &= (2,2,2,2,2,1,1),\\
r_A(p_1 \mid S) &= (2,2,2,2,2,0,1), & r_A(p_2 \mid S) &= (2,2,2,2,2,1,0),\\
r_A(q_1 \mid S) &= (2,2,2,2,0,2,2), & r_A(q_2 \mid S) &= (2,2,2,2,1,2,2),\\
r_A(t_1 \mid S) &= (1,1,0,2,2,2,2), & r_A(t_2 \mid S) &= (1,1,1,2,2,2,2),\\
r_A(o_1 \mid S) &= (1,1,2,0,2,2,2), & r_A(o_2 \mid S) &= (1,1,2,1,2,2,2).
\end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(P_{12} \bigodot K_1))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(P_{12} \bigodot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 7$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(\text{EDS}(P_{12} \bigodot K_1))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = p_2$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_2, w_{12} \in V(EDS(P_{12} \bigodot K_1))$ dengan $r_A(p_2 \mid S') = r_A(w_{12} \mid S') = (2, 2, 2, 2, 2, 1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $\text{EDS}(P_{12} \bigodot K_1)$. Jadi $|S| = 7$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(P_{12} \bigodot K_1)) = 7$.

Misalkan dipilih himpunan terurut untuk $\mid S \mid = 6$.

No.	Himpunan	Representasi yang Sama	No.	Himpunan	Representasi yang Sama
1	$\{u_j, w_j, p_i, t_i, q_i, o_i\}$	$r_A(u_{j+2} \mid S) = r_A(u_{j+3} \mid S)$	9	$\{u_j, u_h, u_l, u_m, u_a, q_i\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
2	$\{u_j, u_h, p_i, t_i, q_i, o_i\}$	$r_A(u_{j+2} \mid S) = r_A(u_{j+3} \mid S)$	10	$\{u_j, u_h, u_l, u_m, u_a, t_i\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
3	$\{w_h, w_j, p_i, t_i, q_i, o_i\}$	$r_A(u_{j+2} \mid S) = r_A(u_{j+3} \mid S)$	11	$\{u_j, u_h, u_l, u_m, p_i, o_i\}$	$r_A(t_1 \mid S) = r_A(t_2 \mid S)$
4	$\{u_j, u_h, u_l, u_m, u_a, o_i\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$	12	$\{u_j, u_h, u_l, u_m, t_i, o_i\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
5	$\{u_j, u_h, u_l, u_m, u_a, u_b\}$	$r_A(q_1 \mid S) = r_A(q_2 \mid S)$	13	$\{u_j, u_h, u_l, u_m, q_i, o_i\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
6	$\{u_j, u_h, u_l, u_m, u_a, p_i\}$	$r_A(q_1 \mid S) = r_A(q_2 \mid S)$	14	$\{u_j, u_h, u_l, t_i, q_i, o_i\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
7	$\{u_j, u_h, u_l, u_m, u_a, o_i\}$	$r_A(q_1 \mid S) = r_A(q_2 \mid S)$	15	$\{u_j, u_h, u_l, p_i, q_i, o_i\}$	$r_A(t_1 \mid S) = r_A(t_2 \mid S)$
8	$\{u_j, u_h, u_l, u_m, p_i, p_{3-i}\}$	$r_A(q_1 \mid S) = r_A(q_2 \mid S)$	16	$\{u_j, u_h, u_l, t_i, q_i, o_i\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$

Tabel 4.6 Himpunan untuk $|S| = 6$ graf $EDS(P_n \bigodot K_1)$

4.3.2 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* $K_n \bigodot K_1$

Graf *edge-degree splitting* $K_n \bigodot K_1$ dinotasikan dengan $\text{EDS}(K_n \bigodot K_1)$ adalah graf terhubung hasil operasi *edge-degree splitting*. Banyaknya simpul pada graf $\text{EDS}(K_n \bigodot K_1)$, $|V(EDS(K_n \bigodot K_1))| = 2n + 4$ dengan simpul-simpul:

$$\begin{aligned} V(EDS(K_n \bigodot K_1)) &= V(K_n) \cup \bigcup_{i=1}^{n} V(K_1) \cup V(K_2^1) \cup V(K_2^2) \\ &= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \cup \{p_1, p_2\} \cup \{q_1, q_2\} \end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf $\text{EDS}(K_n \bigodot K_1)$, $\mid E(EDS(K_n \bigodot K_1)) \mid = \frac{n^2+13n+4}{2}$, dengan:

a. u_j : simpul ke-j pada graf K_n

b. w_j : simpul gantung ke-j pada graf K_n

c. p_l : simpul ke-l dari graf K_2^1

d. q_l : simpul ke-l dari graf K_2^2

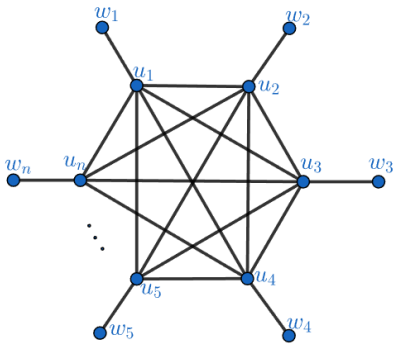
e. K_2^1 : sisi tambahan pertama

f. K_2^2 : sisi tambahan kedua

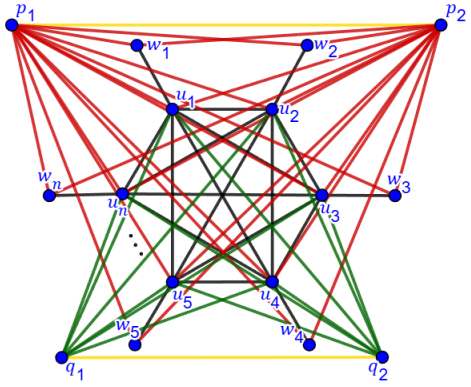
g. $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

h. $l \in \{1, 2\}$

Berikut ini Gambar 4.24 menunjukkan graf $K_n \odot K_1$ dan Gambar 4.25 menunjukkan graf EDS($K_n \odot K_1$).



Gambar 4.24 Graf $K_n \odot K_1$



Gambar 4.25 Graf $EDS(K_n \odot K_1)$

Gambar 4.24 adalah graf $K_n \odot K_1$. Gambar 4.25 adalah graf $EDS(K_n \odot K_1)$. Pada Gambar 4.25 sisi berwarna kuning adalah sisi tambahan *edge-degree splitting*. Sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $K_n \odot K_1$ dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat satu dan n. Sisi berwarna hijau adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $K_n \odot K_1$ dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat n.

Teorema 4.3.3. *Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf edge-degree splitting* $K_n \odot K_1$, *untuk* $n \geq 3$ *adalah*

$$dim_{Al}(EDS(K_n \bigodot K_1)) = n + 1$$

Bukti. Untuk $n = 1$, $dim_{Al}(K_1 \odot K_1) = dim_{Al}(P_2) = 1$ (Teorema 2.1.1.)
Untuk $n = 2$, $dim_{Al}(EDS(K_2 \odot K_1)) = dim_{Al}(EDS(P_4)) = 3$ (Teorema 4.2.1.)
Selanjutnya, untuk $n \geq 3$ terdapat satu kasus.

Kasus 1. Untuk $n \geq 3$ Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{p_1, q_1\}$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* $K_n \odot K_1$, EDS($K_n \odot K_1$). Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(K_n \odot K_1)$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = (d_A(v, u_1), d_A(v, u_2), \ldots, d_A(v, u_{n-1}), d_A(v, p_1), d_A(v, q_1))$$

dengan

$$d_A(v, u_i) = \begin{cases} 0, & v = u_i, \\ 1, & v \in \{w_i, p_j, q_j\}, \\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1, 3, 5, \ldots\}, \\ j \in \{1, 2\} \end{array}$$

$$d_A(v, p_i) = \begin{cases} 0, & v = p_i, \\ 2, & v = q_i, \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad i \in \{1, 2\},$$

$$d_A(v, q_j) = \begin{cases} 0, & v = q_1, \\ 1, & v \in \{u_i\}, \\ 2, & \text{lainnya.}, \end{cases} \quad \begin{array}{l} i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ j \in \{1, 2\} \end{array}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(K_n \odot K_1))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf EDS($K_n \odot K_1$). Selanjutnya akan ditunjukkan $\mid S \mid = n + 1$ adalah minimal.

Misalkan $k = n + 1$ dan terdapat himpunan $S' \subseteq V(EDS(K_n \odot K_1))$ dengan $|S'| < k$. Karena $|S'| < k$, cukup ditunjukkan bahwa himpunan dengan kardinalitas terbesar yang masih kurang dari k, yaitu $k - 1$, tetap tidak dapat menjadi himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Pada himpunan terurut S, terdapat dua simpul khusus, yaitu p_1 dan q_1, yang diperlukan untuk membedakan pasangan simpul bertetangga pada bagian khusus graf. Jika salah satu dari kedua simpul tersebut tidak termuat dalam S', maka terdapat pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S', sehingga S' bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Oleh karena itu, agar tidak langsung gagal pada bagian khusus, S' harus memuat kedua simpul khusus tersebut. Akibatnya, banyak simpul pada S' yang dapat digunakan untuk membedakan pola utama paling banyak adalah $(k - 1) - 2 = k - 3$. Karena $k = n + 1$, maka $k - 3 = n - 2$. Dengan demikian, $k - 3 \leq n - 2$, sehingga $2(k - 3) \leq n-2 < n$. Padahal pada pola graf awal terdapat simpul sebanyak n yang harus dibedakan, sedangkan setiap satu simpul pembeda pada pola graf awal hanya dapat membedakan paling banyak dua simpul berurutan. Akibatnya, masih terdapat paling sedikit satu pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S',

$$r_A(u_{n-1} \mid S') = r_A(u_{n-2} \mid S') = (2, 2, \ldots, 2).$$

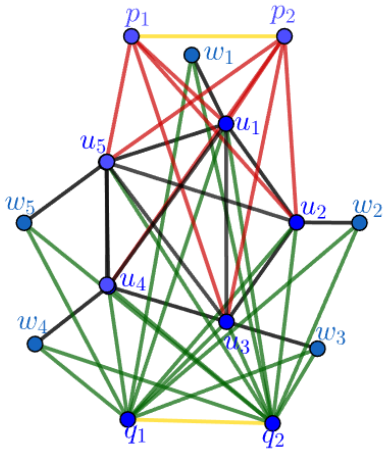
Jadi, tidak terdapat himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan kardinalitas kurang dari k. Karena telah diperoleh himpunan pembeda ketetanggaan lokal S dengan $|S| = k$, maka S merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimum. Dengan,

$$\dim_{Al}(EDS(K_n \bigodot K_1)) = n + 1.$$

□

Berdasarkan pembuktian yang telah dijelaskan sebelumnya. Berikut diberikan contoh penerapan pada graf $EDS(K_5 \odot K_1)$.

Contoh 4.3.4. Misalkan graf EDS($K_5 \odot K_1$) pada Gambar 4.26 akan ditentukan dimensi metrik ketetanggaan lokalnya.



Gambar 4.26 Graf $EDS(K_5 \odot K_1)$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4 p_1, q_1\} \subseteq V(EDS(K_5 \odot K_1))$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari $EDS(K_5 \odot K_1)$. Representasi ketetanggaan dari simpul-simpul $EDS(K_5 \odot K_1)$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
r_A(u_1 \mid S) &= (0,1,1,1,1,1), & r_A(w_1 \mid S) &= (1,2,2,2,1,2),\\
r_A(u_2 \mid S) &= (1,0,1,1,1,1), & r_A(w_2 \mid S) &= (2,1,2,2,1,2),\\
r_A(u_3 \mid S) &= (1,1,0,1,1,1), & r_A(w_3 \mid S) &= (2,2,1,2,1,2),\\
r_A(u_4 \mid S) &= (1,1,1,0,1,1), & r_A(w_4 \mid S) &= (2,2,2,1,1,2),\\
r_A(u_5 \mid S) &= (1,1,1,1,1,1), & r_A(w_5 \mid S) &= (2,2,2,2,1,2),\\
r_A(p_1 \mid S) &= (1,1,1,1,0,2), & r_A(p_2 \mid S) &= (1,1,1,1,1,2),\\
r_A(q_1 \mid S) &= (1,1,1,1,2,0), & r_A(q_2 \mid S) &= (1,1,1,1,2,1).
\end{aligned}
$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(K_5 \odot K_1))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(K_5 \odot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 6$. adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(\text{EDS}(K_5 \odot K_1))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = q_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $q_1, q_2 \in V(EDS(K_5 \odot K_1))$ dengan $r_A(q_1 \mid S') = r_A(q_2 \mid S') = (1,1,1,2)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $\text{EDS}(K_5 \odot K_1)$. Jadi $|S| = 5$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(K_5 \odot K_1)) = 6$.

Misalkan dipilih himpunan terurut untuk $\mid S \mid = 4$.

No.	Himpunan	Representasi yang Sama
1	$\{u_i, w_h, p_l, q_j\}$	$r_A(u_{i+1} \mid S) = r_A(u_{i+2} \mid S)$
2	$\{u_i, u_g, p_l, q_j\}$	$r_A(q_{3-j} \mid S) = r_A(u_{i+2} \mid S)$
3	$\{w_i, w_g, p_l, q_j\}$	$r_A(u_h \mid S) = r_A(u_{h+1} \mid S)$
4	$\{u_i, w_h, p_l, p_{3-l}\}$	$r_A(q_1 \mid S) = r_A(q_2 \mid S)$
5	$\{u_i, w_h, q_j, q_{3-j}\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
6	$\{u_i, u_h, p_l, p_{3-l}\}$	$r_A(q_1 \mid S) = r_A(q_2 \mid S)$
7	$\{w_i, w_h, p_l, p_{3-l}\}$	$r_A(q_1 \mid S) = r_A(q_2 \mid S)$
8	$\{u_i, u_h, q_j, q_{3-j}\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
9	$\{w_i, w_h, q_j, q_{3-j}\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
10	$\{u_a, u_b, u_c, u_d\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
11	$\{w_a, w_b, w_c, w_d\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$

Tabel 4.7 Himpunan untuk $|S| = 4$ graf $EDS(K_n \bigodot K_1)$

4.3.3 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* Matahari

Graf *edge-degree splitting* $C_n \bigodot K_1$ dinotasikan dengan EDS($C_n \bigodot K_1$) adalah graf terhubung hasil operasi *edge-degree splitting*. Banyaknya simpul pada graf EDS($C_n \bigodot K_1$), $|V(EDS(C_n \bigodot K_1))| = 2n + 4$ dengan simpul-simpul:

$$V(EDS(C_n \bigodot K_1)) = V(C_n) \cup \bigcup_{i=1}^{n} V(K_1) \cup V(K_2^1) \cup V(K_2^2)$$
$$= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \cup \{p_1, p_2\} \cup \{q_1, q_2\}$$

Banyaknya sisi graf EDS($C_n \bigodot K_1$), $\mid E(EDS(C_n \bigodot K_1)) \mid = 8n + 2$, dengan:

a. u_j : simpul ke-j pada graf C_n

b. w_j : simpul gantung ke-j pada graf C_n

c. p_l : simpul ke-l dari graf K_2^1

d. q_l : simpul ke-l dari graf K_2^2

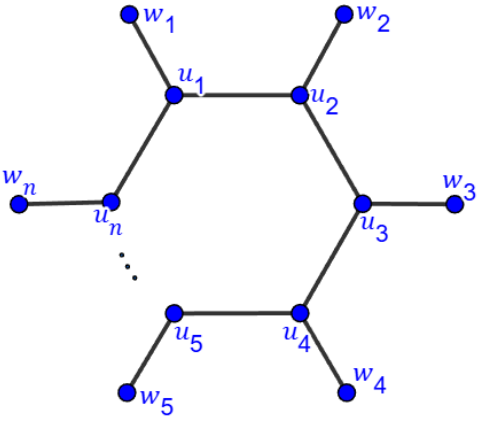
e. K_2^1 : sisi tambahan pertama

f. K_2^2 : sisi tambahan kedua

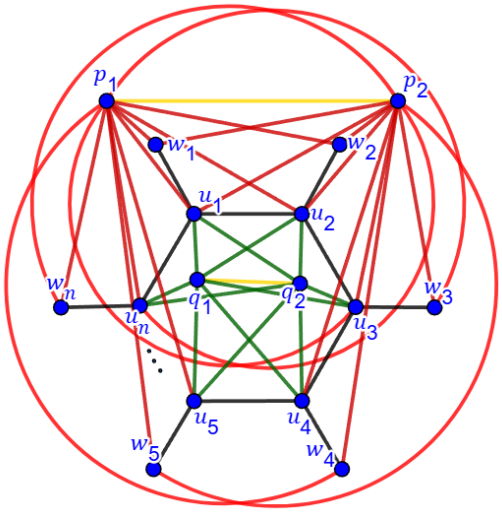
g. $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

h. $l \in \{1, 2\}$

Berikut ini Gambar 4.27 menunjukkan graf EDS($C_n \bigodot K_1$).



Gambar 4.27 Graf $C_n \odot K_1$



Gambar 4.28 Graf $EDS(C_n \odot K_1)$

Gambar 4.27 adalah graf $C_n \odot K_1$ dan Gambar 4.28 adalah graf $EDS(C_n \odot K_1)$. Pada Gambar 4.28 sisi berwarna Kuning adalah sisi tambahan *edge-degree splitting*. Sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $C_n \odot K_1$ dengan sisi yang simpul-simpul ujungnya berderajat satu dan tiga. Sisi berwarna hijau adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $C_n \odot K_1$ dengan sisi yang simpul-simpul ujungnya berderajat tiga.

Teorema 4.3.5. *Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf edge-degree splitting* $C_n \odot K_1$ *adalah*

$$dim_{Al}(EDS(C_n \odot K_1)) = \begin{cases} 4, & untuk\ n = 4, \\ \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 3, & untuk\ n \geq 5. \end{cases}$$

Bukti. Untuk $n = 1$, $dim_{Al}(C_1 \odot K_1) = dim_{Al}(P_2) = 1$ (Teorema 2.1.1.)

Untuk $n = 2$, $dim_{Al}(EDS(C_2 \odot K_1)) = dim_{Al}(EDS(P_4)) = 3$ (Teorema 4.2.1.)

Untuk $n = 3$, $dim_{Al}(EDS(C_3 \odot K_1)) = dim_{Al}(EDS(K_3 \odot K_1)) = 4$ (Teorema 4.3.3.)

Selanjutnya, untuk $n \geq 4$ terdapat dua kasus.

Kasus 1. Untuk $n = 4$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, p_1, q_1, w_1\}$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* $C_n \odot K_1$, $EDS(C_n \odot K_1)$. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(C_n \odot K_1))$ adalah

$$\begin{aligned}
&r_A(u_1 \mid S) = (0,1,1,1), && r_A(w_1 \mid S) = (1,2,1,0), && r_A(p_1 \mid S) = (1,2,1,1),\\
&r_A(u_2 \mid S) = (1,1,1,2), && r_A(w_2 \mid S) = (2,2,1,2), && r_A(p_2 \mid S) = (1,2,0,1),\\
&r_A(u_3 \mid S) = (2,1,1,2), && r_A(w_3 \mid S) = (2,2,1,2), && r_A(q_1 \mid S) = (1,0,2,2),\\
&r_A(u_4 \mid S) = (1,1,1,2), && r_A(w_4 \mid S) = (2,2,1,2), && r_A(q_2 \mid S) = (1,1,2,2).
\end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(C_n \odot K_1))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh

karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(C_n \bigodot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 4$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(EDS(C_n \bigodot K_1))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = w_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_2, w_1 \in V(EDS(C_n \bigodot K_1))$ dengan $r_A(p_2 \mid S') = r_A(w_1 \mid S') = (1, 2, 1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda EDS$(C_n \bigodot K_1)$, Untuk menunjukkan bahwa tidak terdapat himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari k, cukup ditinjau kasus $|S'| = k - 1$. Hal ini karena setiap himpunan dengan kardinalitas kurang dari $k - 1$ merupakan kasus yang lebih kecil. Oleh karena itu, apabila himpunan berukuran $k-1$ saja tidak dapat menjadi himpunan pembeda, maka setiap himpunan dengan kardinalitas yang lebih kecil juga tidak dapat menjadi himpunan pembeda. Jadi $|S| = 4$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(C_n \bigodot K_1)) = 4$.

Kasus 2. Untuk $n \geq 5$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_{1+4k} \mid 0 \leq k < \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1\} \cup \{p_1, q_1\}$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf EDS$(C_n \bigodot K_1)$. Representasi ketetanggaan simpul $v \in V(EDS(C_n \bigodot K_1)$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = \Big(d_A(v, u_1),\, d_A(v, u_5), \ldots, d_A(v, u_{1+4(\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor + 1)}), d_A(v, p_1), d_A(v, q_1)\Big)$$

dengan

$$d_A(v, u_i) = \begin{cases} 0, & v = u_i, \\ 1, & v \in \{u_{i-1}, u_{i+1}, w_i, p_j, q_j\}, \\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1 + 4k \mid 0 \leq k < \left\lfloor \dfrac{n-1}{4} \right\rfloor + 1\}, \\ j \in \{1, 2\} \end{array}$$

$$d_A(v, p_i) = \begin{cases} 0, & v = p_i, \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad i \in \{1, 2\},$$

$$d_A(v, q_j) = \begin{cases} 0, & v = q_j, \\ 1, & v = u_i, \\ 2, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ j \in \{1, 2\} \end{array}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(EDS(C_n \bigodot K_1))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(C_n \bigodot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\mid S \mid = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 3$ adalah minimal.

Misalkan $k = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 3$ dan terdapat himpunan $S' \subseteq V(EDS(C_n \bigodot K_1))$ dengan $|S'| < k$. Karena $|S'| < k$, cukup ditunjukkan bahwa himpunan dengan kardinalitas terbesar yang masih kurang dari k, yaitu $k - 1$, tetap tidak dapat menjadi himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Pada himpunan terurut S, terdapat dua simpul khusus, yaitu p_1 dan q_1, yang diperlukan untuk membedakan pasangan simpul bertetangga pada bagian khusus graf. Jika salah satu simpul tersebut tidak termuat dalam S', maka terdapat pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S', sehingga S' bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, agar tidak langsung gagal pada bagian khusus, S' harus memuat kedua simpul khusus

tersebut. Akibatnya, banyak simpul pada S' yang dapat digunakan untuk membedakan pola utama paling banyak adalah $(k-1)-2 = k-3$. Karena $k = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 3$, maka $k-3 = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor$. Dengan demikian, $k-3 \leq \frac{n-1}{4}$, sehingga $4(k-3) \leq n-1 < n$. Padahal pada pola graf awal terdapat simpul sebanyak n yang harus dibedakan, sedangkan setiap satu simpul pembeda pada pola graf awal hanya dapat membedakan paling banyak empat simpul berurutan. Akibatnya, masih terdapat paling sedikit satu pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S',

$$r_A(u_{n-1} \mid S') = r_A(u_{n-2} \mid S') = (2, 2, \ldots, 2).$$

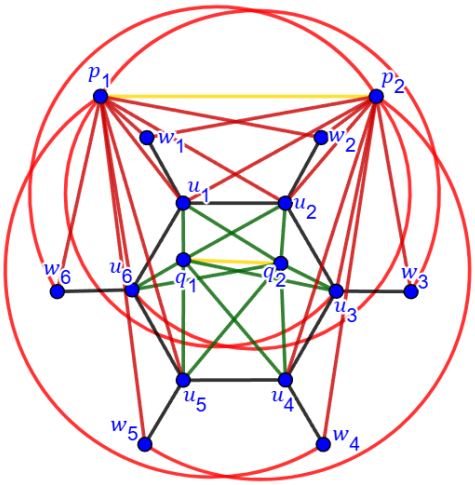
Jadi, tidak terdapat himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan kardinalitas kurang dari k. Karena telah diperoleh himpunan pembeda ketetanggaan lokal S dengan $|S| = k$, maka S merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimum. Dengan,

$$\dim_{Al}(EDS(C_n \bigodot K_1)) = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 3.$$

□

Berdasarkan pembuktian yang telah dijelaskan sebelumnya. Berikut diberikan contoh penerapan pada graf $EDS(C_6 \bigodot K_1)$.

Contoh 4.3.6. Misalkan graf EDS($C_6 \bigodot K_1$) pada Gambar 4.29 akan ditentukan dimensi metrik ketetanggaan lokalnya.



Gambar 4.29 Graf $EDS(C_6 \bigodot K_1)$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, u_5, p_1, q_1\} \subseteq V(EDS(C_6 \bigodot K_1))$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari $EDS(C_6 \bigodot K_1)$.

Representasi ketetanggaan dari simpul-simpul $EDS(C_6 \odot K_1)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r_A(u_1 \mid S) &= (0,2,1,1), & r_A(w_1 \mid S) &= (1,2,1,2),\\
r_A(u_2 \mid S) &= (1,2,1,1), & r_A(w_2 \mid S) &= (2,2,1,2),\\
r_A(u_3 \mid S) &= (2,2,1,1), & r_A(w_3 \mid S) &= (2,2,1,2),\\
r_A(u_4 \mid S) &= (2,1,1,1), & r_A(w_4 \mid S) &= (2,2,1,2),\\
r_A(u_5 \mid S) &= (2,0,1,1), & r_A(w_5 \mid S) &= (2,1,1,2),\\
r_A(u_6 \mid S) &= (1,1,1,1), & r_A(w_6 \mid S) &= (2,2,1,2),\\
r_A(p_1 \mid S) &= (1,1,0,2), & r_A(p_2 \mid S) &= (1,1,1,2),\\
r_A(q_1 \mid S) &= (1,1,2,0), & r_A(q_2 \mid S) &= (1,1,2,1).
\end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(C_6 \odot K_1))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(C_6 \odot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 4$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(\text{EDS}(C_6 \odot K_1))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = q_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $q_1, q_2 \in V(EDS(C_6 \odot K_1))$ dengan $r_A(q_1 \mid S') = r_A(q_2 \mid S') = (1,1,2)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $\text{EDS}(C_6 \odot K_1)$. Jadi $|S| = 4$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(C_6 \odot K_1)) = 4$.

Misalkan dipilih himpunan terurut untuk $\mid S \mid = 3$.

No.	Himpunan	Representasi yang Sama	No.	Himpunan	Representasi yang Sama
1	$\{u_i, w_i, p_j\}$	$r_A(q_1 \mid S) = r_A(q_2 \mid S)$	6	$\{u_i, p_j, q_j\}$	$r_A(u_{i+1} \mid S) = r_A(u_{i+2} \mid S)$
2	$\{u_i, w_i, q_j\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$	7	$\{w_i, p_j, q_j\}$	$r_A(u_{i+1} \mid S) = r_A(u_{i+2} \mid S)$
3	$\{u_i, u_h, q_j\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$	8	$\{u_i, u_h, p_j\}$	$r_A(q_1 \mid S) = r_A(q_2 \mid S)$
4	$\{u_i, u_h, w_l\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$	9	$\{w_i, w_j, q_j\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$
5	$\{w_i, w_l, p_j\}$	$r_A(q_1 \mid S) = r_A(q_2 \mid S)$	10	$\{w_i, w_h, u_l\}$	$r_A(p_1 \mid S) = r_A(p_2 \mid S)$

Tabel 4.8 Himpunan untuk $|S| = 3$ graf $EDS(C_n \odot K_1)$

4.3.4 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting* $K_{s,t} \odot K_1$

Graf *edge-degree splitting* $K_{s,t} \odot K_1$ dinotasikan dengan $EDS(K_{s,t} \odot K_1)$ adalah graf terhubung hasil operasi *edge-degree splitting*. Banyaknya simpul untuk $s = t$ dengan $n = s + t$ pada graf $EDS(K_{s,t} \odot K_1)$, $|V(EDS(K_{s,t} \odot K_1)| = 2n + 4$ dengan simpul-simpul:

$$\begin{aligned}
V(EDS(K_{s,t} \bigodot K_1)) &= V(K_{s,t}) \cup \bigcup_{i=1}^{n} V(K_1) \cup V(K_2^1) \cup V(K_2^2)\\
&= \{u_1, u_2, \ldots, u_s\} \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_t\} \cup \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}\\
&\cup \{h_1, h_2, \ldots, h_t\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z_1, z_2\}
\end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf $EDS(K_{s,t} \odot K_1)$, $\mid E(EDS(K_{s,t} \odot K_1)) \mid = 16s + 2$. Selanjutnya, untuk $s \neq t$ dengan $n = s + t$, banyaknya simpul $|V(EDS(K_{s,t} \odot K_1))| = 2n + 6$ dengan

himpunan simpul:

$$V(EDS(K_{s,t} \bigodot K_1)) = V(K_{s,t}) \cup \bigcup_{i=1}^{n} V(K_1) \cup V(K_2^1) \cup V(K_2^2) \cup V(K_2^3)$$
$$= \{u_1, u_2, \ldots, u_s\} \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_t\} \cup \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$$
$$\cup \{h_1, h_2, \ldots, h_t\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{z_1, z_2\} \cup \{x_1, x_2\}$$

Banyaknya sisi graf $EDS(K_{s,t} \bigodot K_1)$, $|E(EDS(K_{s,t} \bigodot K_1))| = 8s + 8t + 3$,
dengan:

a. u_j : simpul ke-j pada graf $K_{s,t}$

b. w_l : simpul ke-l pada graf $K_{s,t}$

c. g_j : simpul gantung ke-j pada graf $K_{s,t}$

d. h_l : simpul gantung ke-l pada graf $K_{s,t}$

e. x_m : simpul ke-m dari graf K_2^1

f. y_m : simpul ke-m dari graf K_2^1

g. z_m : simpul ke-m dari graf K_2^1

h. K_2^1 : sisi tambahan pertama

i. K_2^2 : sisi tambahan kedua

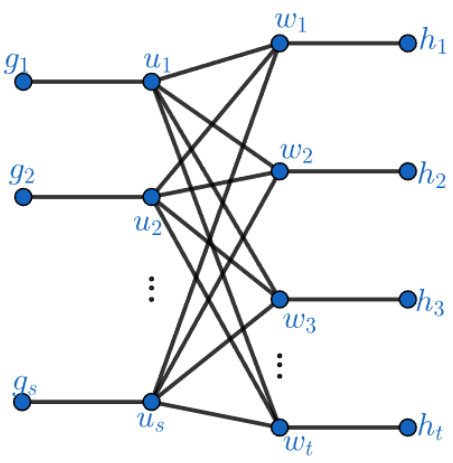
j. K_2^3 : sisi tambahan ketiga

k. $j \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$

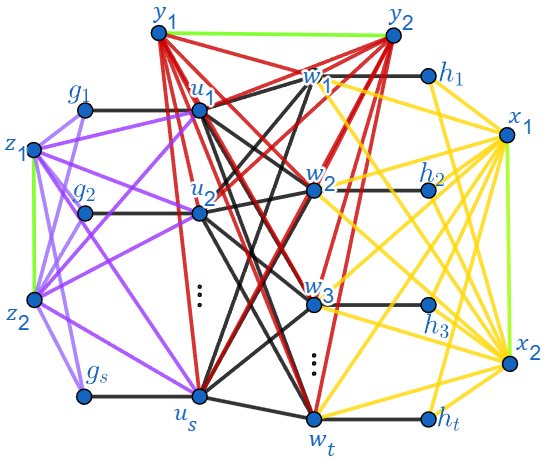
l. $l \in \{1, 2, 3, \ldots, t\}$

m. $m \in \{1, 2\}$

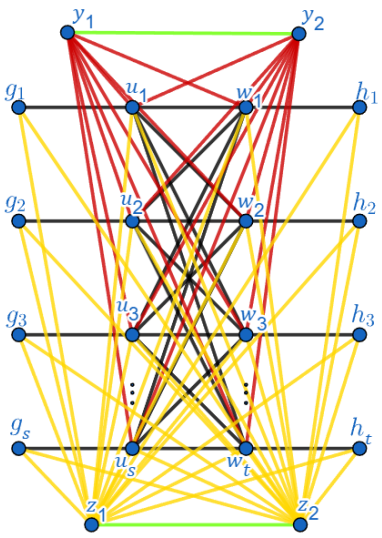
Berikut ini Gambar 4.30 menunjukkan graf $K_{s,t} \bigodot K_1$ dan Gambar 4.31 dan Gambar 4.32 menunjukkan graf $EDS(K_{s,t} \bigodot K_1)$.



Gambar 4.30 Graf $K_{s,t} \bigodot K_1$



Gambar 4.31 Graf $EDS(K_{s,t} \bigodot K_1)$, $s \neq t$



Gambar 4.32 Graf $EDS(K_{s,t} \odot K_1)$, $s = t$

Gambar 4.30 adalah graf $K_{s,t} \odot K_1$, Gambar 4.31 adalah graf $EDS(K_{s,t} \odot K_1)$ untuk $s \neq t$, Gambar 4.32 adalah graf $EDS(K_{s,t} \odot K_1)$ untuk $s = t$. Pada Gambar 4.31 sisi berwarna hijau adalah sisi tambahan *edge-degree splitting*. Sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $K_{s,t} \odot K_1$ dengan sisi yang simpul-simpul ujungnya berderajat $s+1$ dan $t+1$. Sisi berwarna kuning adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $K_{s,t} \odot K_1$ dengan sisi yang simpul-simpul ujungnya berderajat satu dan $s+1$. Sisi berwarna ungu adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $K_{s,t} \odot K_1$ dengan sisi yang simpul-simpul ujungnya berderajat satu dan $t+1$. Pada Gambar 4.32 sisi berwarna hijau adalah sisi tambahan *edge-degree splitting*. Sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $K_{s,t} \odot K_1$ dengan sisi yang simpul-simpul ujungnya berderajat $s+1$ dan $t+1$. Sisi berwarna kuning adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf $K_{s,t} \odot K_1$ dengan sisi yang simpul-simpul ujungnya berderajat satu dan $s+1$.

Teorema 4.3.7. *Untuk $s, t \geq 2$, dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf edge-degree splitting $K_{s,t} \odot K_1$ adalah*

$$dim_{Al}(EDS(K_{s,t} \odot K_1)) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } s = t, \\ 5, & \text{untuk } s \neq t. \end{cases}$$

Bukti. Terdapat dua kasus yang akan dijelaskan dibawah ini.
Kasus 1. Untuk $s = t$

Dipilih himpunan terurut $P = \{u_1, y_1, z_1, z_2\} \subseteq V(EDS(K_{s,t} \odot K_1))$.

Akan ditunjukkan P adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* $K_{s,t} \odot K_1$, $EDS(K_{s,t} \odot K_1)$. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(K_{s,t} \odot K_1)$ adalah

$$r_A(v \mid P_i) = \Big(d_A(v, u_1),\, d_A(v, y_1), d_A(v, z_1), d_A(v, z_2)\Big)$$

dengan

$$d_A(v,u_i)=\begin{cases}0, & v=u_i,\\ 2, & v=h_j \text{ dan } v\neq g_i,\\ 1, & \text{lainnya.}\end{cases}\qquad \begin{matrix} i=1,\\ j\in\{1,2,\ldots,t\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,y_i)=\begin{cases}0, & v=y_i,\\ 1, & v\in\{y_{i+1},u_j,w_j\}\\ 2, & \text{lainnya}\end{cases}\qquad \begin{matrix} i=1,\\ j\in\{1,2,\ldots,s\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,z_i)=\begin{cases}0, & v=z_i,\\ 2, & v=y_i,\\ 1, & \text{lainnya.}\end{cases}\qquad i\in\{1,2\}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(K_{s,t}\bigodot K_1))$ terhadap P untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, P adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(K_{s,t}\bigodot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|P|=4$ adalah minimal.

Dipilih $P' \subseteq V(\text{EDS}(K_{s,t}\bigodot K_1))$ dengan kardinalitas P', $|P'|<|P|$ yaitu $P'=P\setminus\{v\}$, $v\in P$. Dipilih $v=z_2$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $z_2,g_1\in V(EDS(K_{s,t}\bigodot K_1))$ dengan $r_A(z_2 \mid P')=r_A(g_1 \mid P')=(1,1,2)$ sehingga P' bukan himpunan pembeda $\text{EDS}(K_{s,t}\bigodot K_1)$, untuk menunjukkan bahwa tidak terdapat himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari k, cukup ditinjau kasus $|P'|=k-1$. Hal ini karena setiap himpunan dengan kardinalitas kurang dari $k-1$ merupakan kasus yang lebih kecil.

Oleh karena itu, apabila himpunan berukuran $k-1$ saja tidak dapat menjadi himpunan pembeda, maka setiap himpunan dengan kardinalitas yang lebih kecil juga tidak dapat menjadi himpunan pembeda. Jadi $|P|=4$ adalah minimal dan P adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(K_{s,t}\bigodot K_1))=4$.

Kasus 2. Untuk $s\neq t$

Dipilih himpunan terurut $P=\{x_1,x_2,z_1,z_2,y_1\}\subseteq V(EDS(K_{s,t}\bigodot K_1))$.

Akan ditunjukkan P adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(K_{s,t}\bigodot K_1)$. Representasi ketetanggaan simpul $v\in V(EDS(K_{s,t}\bigodot K_1)$ adalah

$$r_A(v \mid P_i)=\Big(d_A(v,x_1),d_A(v,x_2),d_A(v,z_1),d_A(v,z_2),d_A(v,y_1)\Big)$$

dengan

$$d_A(v,u_i)=\begin{cases}0, & v=u_i,\\ 1, & v\in\{w_j,g_2,y_1,y_2\},\\ 2, & \text{lainnya.}\end{cases}\qquad \begin{matrix} i=1,\\ j\in\{1,2,\ldots,t\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,x_i)=\begin{cases}0, & v=y_i,\\ 1, & v\in\{h_j,w_j\}\\ 2, & \text{lainnya}\end{cases}\qquad \begin{matrix}i=1,\\ j\in\{1,2,\ldots,t\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,z_i)=\begin{cases}0, & v=z_i,\\ 1, & v\in\{g_j,u_j\},\\ 2, & \text{lainnya}\end{cases}\qquad \begin{matrix}i\in\{1,2\}\\ j\in\{1,2,\ldots,s\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,y_i)=\begin{cases}0, & v=y_i,\\ 1, & v\in\{u_j,w_l\}\\ 2, & \text{lainnya}\end{cases}\qquad \begin{matrix}i=1,\\ j\in\{1,2,\ldots,s\}\\ l\in\{1,2,\ldots,t\}\end{matrix}$$

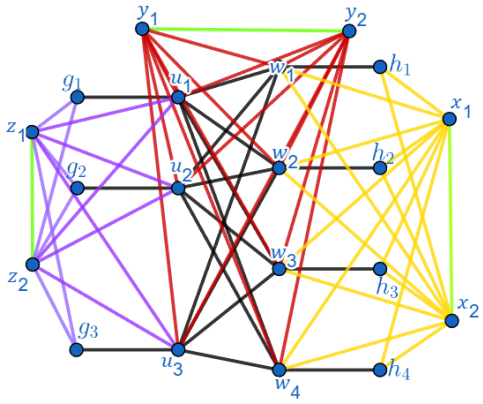
Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(EDS(K_{s,t}\bigodot K_1))$ terhadap P untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, P adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(K_{s,t}\bigodot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|P|=5$ adalah minimal.

Dipilih $P' \subseteq V(EDS(K_{s,t}\bigodot K_1))$ dengan kardinalitas P', $|P'|<|P|$ yaitu $P'=P\setminus\{v\}$, $v\in P$. Dipilih $v=y_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $y_1,y_2\in V(EDS(K_{s,t}\bigodot K_1))$ dengan $r_A(y_1 \mid P')=r_A(y_2 \mid S')=(2,2,2,2)$ sehingga P' bukan himpunan pembeda $EDS(K_{s,t}\bigodot K_1)$. Pada kasus ini, untuk menunjukkan bahwa tidak terdapat himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari k, cukup ditinjau kasus $|P'|=k-1$. Hal ini karena setiap himpunan dengan kardinalitas kurang dari $k-1$ merupakan kasus yang lebih kecil.

Oleh karena itu, apabila himpunan berukuran $k-1$ saja tidak dapat menjadi himpunan pembeda, maka setiap himpunan dengan kardinalitas yang lebih kecil juga tidak dapat menjadi himpunan pembeda.. Jadi $|P|=5$ adalah minimal dan P adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(K_{s,t}\bigodot K_1))=5$. □

Berdasarkan pembuktian yang telah dijelaskan sebelumnya. Berikut diberikan contoh penerapan pada graf $EDS(K_{3,4}\bigodot K_1)$.

Contoh 4.3.8. Misalkan graf EDS($K_{3,4}\bigodot K_1$) pada Gambar 4.33 akan ditentukan dimensi metrik ketetanggaan lokalnya.



Gambar 4.33 Graf $EDS(K_{3,4} \odot K_1)$

Dipilih himpunan terurut $P = \{x_1, x_2, z_1, z_2, y_1\} \subseteq V(EDS(K_{3,4} \odot K_1))$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari $EDS(K_{3,4} \odot K_1)$. Representasi ketetanggaan dari simpul-simpul $EDS(K_{3,4} \odot K_1)$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
r_A(u_1 \mid P) &= (2,2,1,1,1), & r_A(w_1 \mid P) &= (1,1,2,2,1),\\
r_A(u_2 \mid P) &= (2,2,1,1,1), & r_A(w_2 \mid P) &= (1,1,2,2,1),\\
r_A(u_3 \mid P) &= (2,2,1,1,1), & r_A(w_3 \mid P) &= (1,1,2,2,1),\\
& & r_A(w_4 \mid P) &= (1,1,2,2,1),\\
r_A(g_1 \mid P) &= (2,2,1,1,2), & r_A(h_1 \mid P) &= (1,1,2,2,2),\\
r_A(g_2 \mid P) &= (2,2,1,1,2), & r_A(h_2 \mid P) &= (1,1,2,2,2),\\
r_A(g_3 \mid P) &= (2,2,1,1,2), & r_A(h_3 \mid P) &= (1,1,2,2,2),\\
& & r_A(h_4 \mid P) &= (1,1,2,2,2),\\
r_A(x_1 \mid P) &= (0,1,2,2,2), & r_A(x_2 \mid P) &= (1,0,2,2,2),\\
r_A(y_1 \mid P) &= (2,2,2,2,0), & r_A(y_2 \mid P) &= (2,2,2,2,1),\\
r_A(z_1 \mid P) &= (2,2,0,1,2), & r_A(z_2 \mid P) &= (2,2,1,0,2).
\end{aligned}
$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(K_{3,4} \odot K_1))$ terhadap P untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, P adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(K_{3,4} \odot K_1)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|P| = 5$ adalah minimal.

Dipilih $P' \subseteq V(\text{EDS}(K_{3,4} \odot K_1))$ dengan kardinalitas P', $|P'| < |P|$ yaitu $P' = P \setminus \{v\}$, $v \in P$. Dipilih $v = y_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $y_1, y_2 \in V(EDS(K_{3,4} \odot K_1))$ dengan $r_A(y_1 \mid P') = r_A(y_2 \mid P') = (2,2,2,2)$ sehingga P' bukan himpunan pembeda $\text{EDS}(K_{3,4} \odot K_1)$. Jadi $|P| = 5$ adalah minimal dan P adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(K_{3,4} \odot K_1)) = 5$.

Misalkan dipilih himpunan terurut $\mid P \mid = 4$.

No.	Himpunan	Representasi yang Sama	No.	Himpunan	Representasi yang Sama
1	$\{x_i, y_i, z_i, u_j\}$	$r_A(z_2 \mid P) = r_A(g_j \mid P)$	19	$\{y_i, z_i, w_i, h_i\}$	$r_A(x_1 \mid P) = r_A(x_2 \mid P)$
2	$\{x_i, y_i, z_i, w_j\}$	$r_A(z_2 \mid P) = r_A(g_j \mid P)$	20	$\{y_i, z_i, g_i, h_i\}$	$r_A(x_1 \mid P) = r_A(x_2 \mid P)$
3	$\{x_i, y_i, z_i, g_j\}$	$r_A(x_{3-i} \mid P) = r_A(h_j \mid P)$	21	$\{y_i, u_i, w_i, g_i\}$	$r_A(z_1 \mid P) = r_A(z_2 \mid P)$
4	$\{x_i, y_i, z_i, h_i\}$	$r_A(z_{3-i} \mid P) = r_A(g_i \mid P)$	22	$\{y_i, u_i, w_i, h_i\}$	$r_A(x_1 \mid P) = r_A(x_2 \mid P)$
5	$\{x_i, y_i, u_i, w_i\}$	$r_A(z_1 \mid P) = r_A(z_2 \mid P)$	23	$\{y_i, u_i, g_i, h_i\}$	$r_A(x_1 \mid P) = r_A(x_2 \mid P)$
6	$\{x_i, y_i, u_i, g_i\}$	$r_A(z_1 \mid P) = r_A(z_2 \mid P)$	24	$\{y_i, w_i, g_i, h_i\}$	$r_A(x_1 \mid P) = r_A(x_2 \mid P)$
7	$\{x_i, y_i, u_i, h_i\}$	$r_A(z_1 \mid P) = r_A(z_2 \mid P)$	25	$\{z_i, u_i, w_i, g_i\}$	$r_A(x_1 \mid P) = r_A(x_2 \mid P)$
8	$\{x_i, y_i, w_i, g_i\}$	$r_A(z_1 \mid P) = r_A(z_2 \mid P)$	26	$\{z_i, u_i, w_i, h_i\}$	$r_A(z_1 \mid P) = r_A(z_2 \mid P)$
9	$\{x_i, y_i, w_i, h_i\}$	$r_A(z_1 \mid P) = r_A(z_2 \mid P)$	27	$\{z_i, u_i, g_i, h_i\}$	$r_A(y_1 \mid P) = r_A(y_2 \mid P)$
10	$\{x_i, y_i, g_i, h_i\}$	$r_A(z_1 \mid P) = r_A(z_2 \mid P)$	28	$\{z_i, w_i, g_i, h_i\}$	$r_A(y_1 \mid P) = r_A(y_2 \mid P)$
11	$\{x_i, z_i, u_i, w_i\}$	$r_A(y_1 \mid P) = r_A(y_2 \mid P)$	29	$\{u_i, w_i, g_i, h_i\}$	$r_A(x_1 \mid P) = r_A(x_2 \mid P)$
12	$\{x_i, z_i, u_i, g_i\}$	$r_A(y_1 \mid P) = r_A(y_2 \mid P)$	30	$\{x_i, y_i, z_i, u_i\}$	$r_A(z_{3-i} \mid P) = r_A(g_2 \mid P)$
13	$\{x_i, z_i, u_i, h_i\}$	$r_A(y_1 \mid P) = r_A(y_2 \mid P)$	31	$\{x_i, y_i, z_i, w_i\}$	$r_A(x_{3-i} \mid P) = r_A(g_2 \mid P)$
14	$\{x_i, z_i, w_i, g_i\}$	$r_A(y_1 \mid P) = r_A(y_2 \mid P)$	32	$\{x_i, y_i, z_i, g_i\}$	$r_A(y_{3-i} \mid P) = r_A(h_2 \mid P)$
15	$\{x_i, z_i, w_i, h_i\}$	$r_A(y_1 \mid P) = r_A(y_2 \mid P)$	33	$\{x_i, y_i, z_i, h_i\}$	$r_A(z_{3-i} \mid P) = r_A(g_2 \mid P)$
16	$\{x_i, z_i, g_i, h_i\}$	$r_A(y_1 \mid P) = r_A(y_2 \mid P)$	34	$\{x_i, y_i, u_i, w_i\}$	$r_A(z_1 \mid P) = r_A(z_2 \mid P)$
17	$\{y_i, z_i, u_i, w_i\}$	$r_A(x_1 \mid P) = r_A(x_2 \mid P)$	35	$\{x_i, y_i, u_i, g_i\}$	$r_A(z_1 \mid P) = r_A(z_2 \mid P)$
18	$\{y_i, z_i, u_i, g_i\}$	$r_A(x_1 \mid P) = r_A(x_2 \mid P)$			

Tabel 4.9 Himpunan terurut untuk $|P| = 4$, graf $EDS(K_{s,t} \bigodot K_1)$

4.3.5 Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf *Edge-Degree Splitting Helm*

Graf *edge-degree splitting* H_n dinotasikan dengan $EDS(H_n)$ adalah graf terhubung hasil operasi *edge-degree splitting*. Banyaknya simpul untuk $n = 4$, $|V(EDS(H_n))| = 2n + 5$ dengan himpunan simpul:

$$\begin{aligned} V(EDS(H_n)) &= V(W_4) \bigcup_{i=1}^{4} V(K_1) \cup V(K_2^1) \cup V(K_2^2) \\ &= \{c\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \cup \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \cup \{p_1, p_2\} \cup \{q_1, q_2\} \end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf $EDS(H_4)$, $|EDS(H_4)| = 11n + 2$. Selanjutnya untuk $n \neq 4$, banyaknya simpul $|V(EDS(H_n))| = 2n + 7$ dengan himpunan simpul:

$$\begin{aligned} V(EDS(H_n)) &= V(W_n) \cup \bigcup_{i=1}^{n} V(K_1) \cup V(K_2^1) \cup V(K_2^2) \cup V(K_2^3) \\ &= \{c\} \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \cup \{p_1, p_2\} \cup \{q_1, q_2\} \cup \{t_1, t_2\} \end{aligned}$$

Banyaknya sisi graf $EDS(H_n)$, $|E(EDS(H_n))| = 11n + 5$, dengan:

a. c : simpul K_1 dari graf W_n

b. u_j : simpul ke-j pada graf C_n dari W_n

c. w_j : simpul gantung ke-j pada graf H_n

d. p_l : simpul ke-l dari graf K_2^1

e. q_l : simpul ke-l dari graf K_2^2

f. t_l : simpul ke-l dari graf K_2^3

g. K_2^1 : sisi tambahan pertama

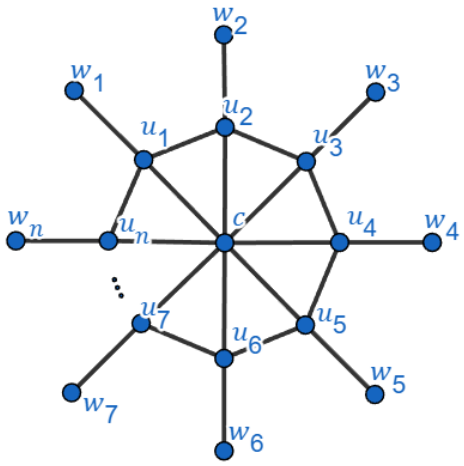
h. K_2^2 : sisi tambahan kedua

i. K_2^3 : sisi tambahan ketiga

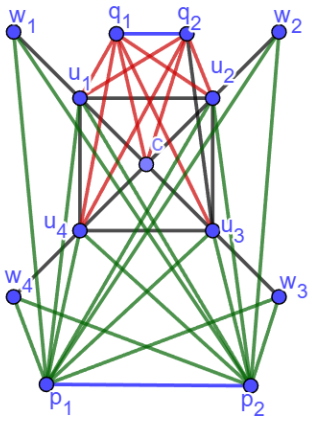
j. $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

k. $l \in \{1, 2\}$

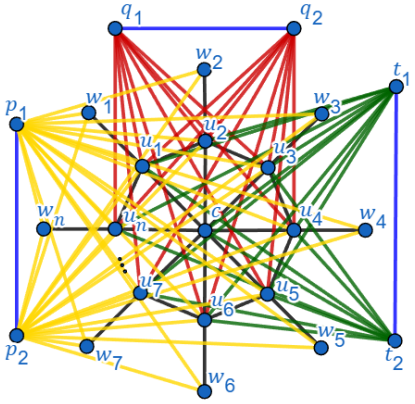
Berikut ini Gambar 4.34 menunjukkan graf H_n dan Gambar 4.35 dan Gambar 4.36 menunjukkan graf $EDS(H_n)$.



Gambar 4.34 Graf H_n



Gambar 4.35 Graf $EDS(H_4)$



Gambar 4.36 Graf $EDS(H_n)$

Gambar 4.34 adalah graf H_n dan Gambar 4.35, dan Gambar 4.36 menunjukkan graf $EDS(H_n)$. Pada Gambar 4.35 sisi berwarna biru adalah sisi tambahan *edge-degree splitting*. Sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf H_4 dengan sisi yang simpul-simpul ujungnya berderajat empat. Sisi berwarna hijau adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf H_n dengan sisi yang simpul-simpul ujungnya berderajat satu dan empat. Pada Gambar 4.36 sisi berwarna biru adalah sisi tambahan *edge-degree splitting*. Sisi berwarna merah adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf H_n dengan sisi yang simpul-simpul ujungnya berderajat empat. Sisi berwarna hijau adalah sisi yang menghubungkan sisi baru dengan sisi graf H_n dengan simpul-simpul ujung sebuah sisi berderajat empat dan n. Sisi berwarna kuning menghubungkan sisi baru dengan sisi graf H_n dengan sisi yang simpul-simpul ujungnya berderajat satu dan empat.

Teorema 4.3.9. *Dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf edge-degree splitting H_n adalah*

$$dim_{Al}(EDS(H_n)) = \begin{cases} 6, & \textit{untuk } n = 3, \\ 5, & \textit{untuk } n = 4, \\ \left\lfloor \frac{n-5}{4} \right\rfloor + 6, & \textit{untuk } n \geq 5. \end{cases}$$

Bukti. Terdapat tiga kasus yang perlu diperhatikan.
Kasus 1. Untuk $n = 3$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, u_2, c, q_1, p_1, t_1\} \subseteq V(EDS(H_n))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* H_n. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(H_n))$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = \Big(d_A(v, u_1),\, d_A(v, u_2), d_A(v, c), d_A(v, q_1), d_A(v, p_1), d_A(v, t_1)\Big)$$

dengan

$$d_A(v, u_i) = \begin{cases} 0, & v = u_i, \\ 2, & v = w_j \text{ dan } w_j \nsim u_i \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad \begin{matrix} i \in \{1, 2\}, \\ j \in \{1, 2, \ldots, n\} \end{matrix}$$

$$d_A(v, c) = \begin{cases} 0, & v = c, \\ 2, & v \in \{p_i, q_i, w_j\}, \\ 1, & \text{lainnya}, \end{cases} \qquad \begin{matrix} i \in \{1, 2\} \\ j \in \{1, 2, \ldots, n\} \end{matrix}$$

$$d_A(v, q_1) = \begin{cases} 0, & v = q_1, \\ 2, & v \in \{w_j, p_i, t_i\}, \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad \begin{matrix} i \in \{1, 2\}, \\ j \in \{1, 2, \ldots, n\} \end{matrix}$$

$$d_A(v, p_i) = \begin{cases} 0, & v = p_i, \\ 1, & v \in \{w_j, u_j\}, \\ 2, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad \begin{matrix} i \in \{1, 2\}, \\ j \in \{1, 2, \ldots, n\} \end{matrix}$$

$$d_A(v,t_i)=\begin{cases}0, & v=t_i,\\ 1, & v\in\{c,u_j\},\\ 2, & \text{lainnya}\end{cases}\qquad \begin{matrix} i\in\{1,2\},\\ j\in\{1,2,\ldots,n\}\end{matrix}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf EDS(H_n). Selanjutnya akan ditunjukkan $\mid S \mid = 6$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(EDS(H_n))$ dengan kardinalitas S', $\mid S' \mid < \mid S \mid$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = t_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $t_1, t_2 \in V(EDS(H_n))$ dengan $r_A(t_1 \mid S') = r_A(t_2 \mid S') = (1,1,1,2,2)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $EDS(H_n)$. Jadi $\mid S \mid = 6$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(H_n) = 6$.

Kasus 2. Untuk $n = 4$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, c, q_1, p_1, p_2\} \subseteq V(EDS(H_n))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* H_n. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(H_n))$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = \Big(d_A(v,u_1),\, d_A(v,c), d_A(v,q_1), d_A(v,p_1), d_A(v,p_2)\Big)$$

dengan

$$d_A(v,u_1)=\begin{cases}0, & v=u_1,\\ 2, & v\in\{w_i,u_3\},\\ 1, & \text{lainnya}\end{cases}\qquad i\in\{1,2,\ldots,n\},$$

$$d_A(v,c)=\begin{cases}0, & v=c,\\ 2, & v\in\{p_i,w_j\},\\ 1, & \text{lainnya},\end{cases}\qquad \begin{matrix} i\in\{1,2\}\\ j\in\{1,2,\ldots,k\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,q_i)=\begin{cases}0, & v=q_i,\\ 2, & v\in\{w_j,p_i\},\\ 1, & \text{lainnya}\end{cases}\qquad \begin{matrix} i\in\{1,2\},\\ j\in\{1,2,\ldots,n\}\end{matrix}$$

$$d_A(v,p_i)=\begin{cases}0, & v=p_i,\\ 2, & v\in\{c,q_i\},\\ 1, & \text{lainnya}\end{cases}\qquad i\in\{1,2\},$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(H_n)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\mid S \mid = 5$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(EDS(H_n))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = p_2$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $p_2, w_2 \in$

$V(EDS(H_n))$ dengan $r_A(p_2 \mid S') = r_A(w_2 \mid S') = (1,2,2,1)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda EDS(H_n), untuk menunjukkan bahwa tidak terdapat himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari k, cukup ditinjau kasus $|S'| = k-1$. Hal ini karena setiap himpunan dengan kardinalitas kurang dari $k-1$ merupakan kasus yang lebih kecil. Oleh karena itu, apabila himpunan berukuran $k-1$ saja tidak dapat menjadi himpunan pembeda, maka setiap himpunan dengan kardinalitas yang lebih kecil juga tidak dapat menjadi himpunan pembeda.. Jadi $|S| = 5$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(H_n)) = 5$.

Kasus 3. Untuk $n \geq 5$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_{1+4k} \mid 0 \leq k < \left\lfloor \frac{n-5}{4} \right\rfloor + 2\} \cup \{c, p_1, q_1, t_1\} \subseteq V(EDS(H_n))$.

Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf *edge-degree splitting* H_n. Representasi ketetanggaan simpul-simpul $v \in V(EDS(H_n))$ adalah

$$r_A(v \mid S_i) = \Big(d_A(v,u_1), d_A(v,u_5), \ldots, d_A(v,u_{1+4(k-4)}), d_A(v,c), d_A(v,p_1), d_A(v,q_1), d_A(v,t_1)\Big)$$

dengan

$$d_A(v,u_i) = \begin{cases} 0, & v = u_i, \\ 2, & v = w_j \text{ dan } w_j \nsim u_i \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \left\{ 1+4k \;\middle|\; 0 \leq k < \left\lfloor \dfrac{n-5}{4} \right\rfloor + 2 \right\}, \\ j \in \{1,2,\ldots,n\} \end{array}$$

$$d_A(v,c) = \begin{cases} 0, & v = c, \\ 2, & v \in \{p_i, q_i, w_j\}, \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1,2\} \\ j \in \{1,2,\ldots,n\} \end{array}$$

$$d_A(v,q_1) = \begin{cases} 0, & v = q_1, \\ 2, & v \in \{w_j, p_i, t_i\}, \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1,2\}, \\ j \in \{1,2,\ldots,n\} \end{array}$$

$$d_A(v,p_i) = \begin{cases} 0, & v = p_i, \\ 1, & v \in \{w_j, u_j\}, \\ 2, & \text{lainnya} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1,2\}, \\ j \in \{1,2,\ldots,n\} \end{array}$$

$$d_A(v,t_i) = \begin{cases} 0, & v = t_i, \\ 1, & v \in \{c, u_j\}, \\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i \in \{1,2\}, \\ j \in \{1,2,\ldots,n\} \end{array}$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(H_n)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = \left\lfloor \frac{n-5}{4} \right\rfloor + 6$ adalah minimal.

Misalkan $k = \left\lfloor \frac{n-5}{4} \right\rfloor + 6$ dan terdapat himpunan $S' \subseteq V(EDS(H_n))$ dengan $|S'| < k$.

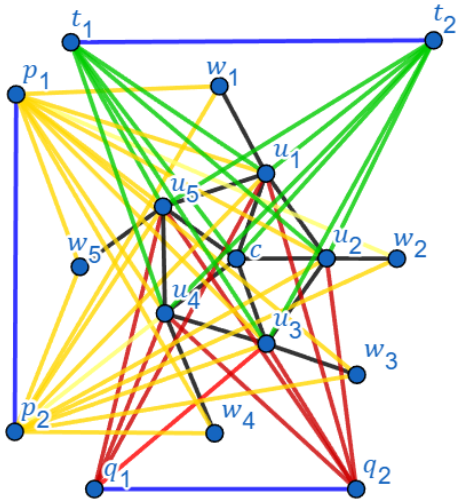
Karena $|S'| < k$, cukup ditunjukkan bahwa himpunan dengan kardinalitas terbesar yang masih kurang dari k, yaitu $k-1$, tetap tidak dapat menjadi himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Pada himpunan terurut S, terdapat empat simpul khusus, yaitu c, p_1, q_1, dan t_1, yang diperlukan untuk membedakan pasangan simpul bertetangga pada bagian khusus graf. Jika salah satu dari keempat simpul tersebut tidak termuat dalam S', maka terdapat pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S', sehingga S' bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, agar tidak langsung gagal pada bagian khusus, S' harus memuat keempat simpul khusus tersebut. Akibatnya, banyak simpul pada S' yang dapat digunakan untuk membedakan pola utama paling banyak adalah $(k-1)-4 = k-5$. Karena $k = \left\lfloor \frac{n-5}{4} \right\rfloor + 6$, maka $k-5 = \left\lfloor \frac{n-5}{4} \right\rfloor + 1$. Dengan demikian, $k-5 \leq \frac{n-5}{4} + 1 = \frac{n-1}{4}$, sehingga $4(k-5) \leq n-1 < n$. Padahal pada pola graf awal terdapat simpul sebanyak n yang harus dibedakan, sedangkan setiap satu simpul pembeda pada pola graf awal hanya dapat membedakan paling banyak empat simpul berurutan. Akibatnya, masih terdapat paling sedikit satu pasangan simpul bertetangga yang memiliki representasi ketetanggaan sama terhadap S'. Jadi, tidak terdapat himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan kardinalitas kurang dari k. Karena telah diperoleh himpunan pembeda ketetanggaan lokal S dengan $|S| = k$, maka S merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimum. Jadi,

$$\dim_{Al}(EDS(H_n)) = \left\lfloor \frac{n-5}{4} \right\rfloor + 6.$$

□

Berdasarkan pembuktian yang telah dijelaskan sebelumnya. Berikut diberikan contoh penerapan pada graf $EDS(H_5)$.

Contoh 4.3.10. Misalkan graf EDS(H_5) pada Gambar 4.37 akan ditentukan dimensi metrik ketetanggaan lokalnya.



Gambar 4.37 Graf $EDS(H_5)$

Dipilih himpunan terurut $S = \{u_1, u_5, c, p_1, q_1, t_1\} \subseteq V(EDS(H_5))$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari $EDS(H_5)$.

Representasi ketetanggaan dari simpul-simpul $EDS(H_5)$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
r_A(c \mid S) &= (1,1,0,2,2,1), \\
r_A(u_1 \mid S) &= (0,1,1,1,1,1), & r_A(w_1 \mid S) &= (1,2,2,1,2,2), \\
r_A(u_2 \mid S) &= (1,2,1,1,1,1), & r_A(w_2 \mid S) &= (2,2,2,1,2,2), \\
r_A(u_3 \mid S) &= (2,2,1,1,1,1), & r_A(w_3 \mid S) &= (2,2,2,1,2,2), \\
r_A(u_4 \mid S) &= (2,1,1,1,1,1), & r_A(w_4 \mid S) &= (2,2,2,1,2,2), \\
r_A(u_5 \mid S) &= (1,0,1,1,1,1), & r_A(w_5 \mid S) &= (2,1,2,1,2,2), \\
r_A(p_1 \mid S) &= (1,1,2,0,2,2), & r_A(p_2 \mid S) &= (1,1,2,1,2,2), \\
r_A(q_1 \mid S) &= (1,1,2,2,0,2), & r_A(q_2 \mid S) &= (1,1,2,2,1,2), \\
r_A(t_1 \mid S) &= (1,1,1,2,2,0), & r_A(t_2 \mid S) &= (1,1,1,2,2,1).
\end{aligned}
$$

Tampak bahwa representasi ketetanggaan setiap simpul di $v \in V(EDS(H_5))$ terhadap S untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga semua berbeda. Oleh karena itu, S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dari graf $EDS(H_5)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $|S| = 6$ adalah minimal.

Dipilih $S' \subseteq V(\text{EDS}(H_5))$ dengan kardinalitas S', $|S'| < |S|$ yaitu $S' = S \setminus \{v\}$, $v \in S$. Dipilih $v = t_1$, akibatnya terdapat beberapa simpul bertetangga $t_1, t_2 \in V(EDS(H_5))$ dengan $r_A(t_1 \mid S') = r_A(t_2 \mid S') = (1,1,1,2,2)$ sehingga S' bukan himpunan pembeda $\text{EDS}(H_5)$. Jadi $|S| = 6$ adalah minimal dan S adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Jadi $dim_{Al}(EDS(H_5)) = 6$.

Misalkan dipilih himpunan terurut untuk $\mid S \mid = 5$.

No.	Himpunan	Representasi yang Sama	No.	Himpunan	Representasi yang Sama
1	$\{c, u_j, w_a, p_i, t_b\}$	$r_A(q_1 \mid S) = r_A(q_2 \mid S)$	4	$\{c, w_j, p_i, t_b, q_d\}$	$r_A(u_1 \mid S) = r_A(u_2 \mid S)$
2	$\{c, u_j, w_a, p_i, q_b\}$	$r_A(t_1 \mid S) = r_A(t_2 \mid S)$	5	$\{u_j, w_a, p_i, t_b, q_d\}$	$r_A(z_1 \mid S) = r_A(z_2 \mid S)$
3	$\{c, u_j, w_a, t_i, q_d\}$	$r_A(z_1 \mid S) = r_A(z_2 \mid S)$	6	$\{c, u_j, p_i, t_b, q_d\}$	$r_A(u_{j+2} \mid S) = r_A(u_{j+3} \mid S)$

Tabel 4.10 Himpunan untuk $|S| = 5$, graf $EDS(H_n)$

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada subbab ini disajikan kesimpulan dan saran yang diperoleh berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan.

5.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini telah didapatkan hasil dimensi metrik ketetanggaan lokal graf *edge-degree splitting* dari graf dasar dan graf khusus. Misalkan graf $G \in \{P_n, K_n, C_n, K_{s,t}, S_n, P_n \bigodot K_1, K_n \bigodot K_1, C_n \bigodot K_1, K_{s,t} \bigodot K_1, H_n\}$.

Berikut ini hasil dimensi metrik ketetanggaan lokal graf *edge-degree splitting*, $EDS(G)$.

1. Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf Dasar

   (a) $dim_{Al}(EDS(P_n)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \in \{3,4\}, \\ 4, & \text{untuk } n \in \{5,6,7\}, \\ 5, & \text{untuk } n \in \{8,9\}, \\ \left\lfloor \frac{n-10}{4} \right\rfloor + 5, & \text{untuk } n \geq 10. \end{cases}$

   (b) $dim_{Al}(EDS(K_n)) = n+1, \quad n \geq 3$

   (c) $dim_{Al}(EDS(C_n)) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 4, \\ \left\lfloor \frac{n+7}{4} \right\rfloor, & \text{untuk } n \geq 5, \end{cases}$

   (d) $dim_{Al}(EDS(K_{s,t})) = 3, \quad s,t \geq 2$

   (e) $dim_{Al}(EDS(S_n)) = 3, \quad n \geq 4$

2. Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal Graf Khusus

   (a) $dim_{Al}(EDS(P_n \bigodot K_1)) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 3, \\ 5, & \text{untuk } n = 4, \\ 6, & \text{untuk } n \in \{5,6,7\}, \\ 7, & \text{untuk } n \in \{8,9\}, \\ \left\lfloor \frac{n-10}{4} \right\rfloor + 7, & \text{untuk } n \geq 9. \end{cases}$

   (b) $dim_{Al}(EDS(K_n \bigodot K_1)) = n+1, \quad n \geq 3$

   (c) $dim_{Al}(EDS(C_n \bigodot K_1)) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 4, \\ \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 3, & \text{untuk } n \geq 5 \end{cases}$

(d) $dim_{Al}(EDS(K_{s,t} \bigodot K_1)) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } s = t, \\ 5, & \text{untuk } s \neq t \end{cases}$

(e) $dim_{Al}(EDS(H_n)) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } n = 3, \\ 5, & \text{untuk } n = 4, \\ \left\lfloor \frac{n-5}{4} \right\rfloor + 6, & \text{untuk } n \geq 5. \end{cases}$

5.2 Saran

Berikut ini adalah saran yang diperoleh dari hasil penelitian:

1. Penelitian selanjutnya dapat menentukan dimensi metrik, dimensi metrik ketetanggaan non lokal graf *edge-degree splitting*. Kemudian, dapat membandingkan hasil-hasil yang diperoleh.

2. Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan konsep operasi graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Albirri, E. R., Agustin, I., Alfarisi, R., Prihandini, R., Adawiyah, R., et al. (2019). On the local adjacency metric dimension of split graph. In *Iop conference series: Earth and environmental science* (Vol. 243, p. 012076). doi: 10.1088/1755-1315/243/1/012076

Chartrand, G., & Zhang, P. (2012). *A first course in graph theory.* Retrieved from `https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118861635`

Diestel, R. (2017). *Graph theory: 5th edition.* Retrieved from `https://books.google.co.id/books?id=zIxRDwAAQBAJ`

Frucht, R., & Harary, F. (1970). On the corona of two graphs. *Aequationes Mathematicae*, *4*, 322–325. doi: 10.1007/BF01844162

Ghalavand, A., Klavžar, S., & Li, X. (2025). *Intertwining local (adjacency) metric dimension with the clique number of a graph.* Retrieved from `https://arxiv.org/abs/2507.13777`

Gross, J. L., Yellen, J., & Anderson, M. (2023). *Topics in graph theory* (1st ed.). Chapman and Hall/CRC. doi: 10.1201/9781003051237

Gross, J. L., Yellen, J., & Zhang, P. (Eds.). (2013). *Handbook of graph theory* (2nd ed.). Chapman and Hall/CRC. doi: https://doi.org/10.1201/b16132

Jannesari, M., & Omoomi, B. (2012). The metric dimension of the lexicographic product of graphs. *Discrete Mathematics*, *312*(22), 3349-3356. doi: https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.07.025

Levin, O. (2025). *Discrete mathematics: An open introduction* (4th ed.). OpenMathBooks.org. Retrieved from `https://discrete.openmathbooks.org/pdfs/dmoi4.pdf`

Maulidia, A. R., & Purwanto. (2021). Elegant labeling of sun graphs and helm graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, *1872*(1), 012008. Retrieved from `https://doi.org/10.1088/1742-6596/1872/1/012008` doi: 10.1088/1742-6596/1872/1/012008

Ponraj, R., & Somasundaram, S. (2004). On the degree splitting graph of a graph. *National Academy Science Letters*, *27*, 275-278.

Rinurwati, Suprajitno, H., & Slamin. (2017). On local adjacency metric dimension of some wheel related graphs with pendant points. In *Aip conference proceedings* (Vol. 1867, p. 020065). doi: https://doi.org/10.1063/1.4994468

Rodríguez-Velázquez, J. A., & Fernau, H. (2013). On the (adjacency) metric dimension of corona and strong product graphs and their local variants: combinatorial and computational results. *arXiv preprint arXiv:1309.2275*.

Sampathkumar, E., & Walikar, H. B. (1981). On the splitting graph of a graph. *J. Karnatak Univ., Sci., 25-26*, 13–16.

Simanjuntak, R., Uttunggadewa, S., & Saputro, S. W. (2013). Metric dimension of amalgamation of graphs. *arXiv preprint arXiv:1312.0191*.

Xu, J. (2025). Graph theory fundamentals. In *Maximal planar graph theory and the four-color conjecture* (pp. 1–35). Singapore: Springer Nature Singapore. Retrieved from `https://doi.org/10.1007/978-981-96-4745-3_1`

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyadari bahwa penyusunan Tugas Akhir ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini Penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Mbak Najmi yang telah membantu dalam penulisan Tugas Akhir dari awal hingga akhir.
2. Teman dari SMP Penulis, Keisya Paramita Suryanata yang telah memberikan dukungan, bantuan dan doa untuk Penulis.
3. Teman-teman sbyy, Graciella, Theresia, dan Jelita yang sudah berteman baik selama perkuliahan dan memberikan dukungan kepada Penulis.
4. Yuni, Marsyanda, Aisyah Rania, Erwin yang menjadi teman Penulis dari awal perkuliahan.
5. *Podcast* di *Youtube*, Agak Laen, Raditya Dika, dan lainnya yang menemani Penulis saat mengerjakan tugas akhir.
6. Teman-teman SUITS yang telah menjadi bagian dari perjalanan di awal perkuliahan Penulis.

Semoga segala bantuan, dukungan dan kebaikan yang telah diberikan mendapat balasan yang terbaik dari Allah SWT.

Surabaya, Juni 2026

Affella Destyan Reginatasya

BIODATA PENULIS

Nama saya Affella Destyan Reginatasya, lahir di Mojokerto pada Senin, 15 Desember 2003. Saya merupakan anak kedua dari empat bersaudara. Pada tahun 2022, saya diterima sebagai mahasiswa Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Selain kegiatan akademik, saya mengikuti kegiatan sosial dan organisasi dibawah naungan HIMATIKA untuk mengembangkan kemampuan diri selama masa perkuliahan. Saya berharap ilmu dan pengalaman yang diperoleh selama menempuh pendidikan di ITS dapat menjadi bekal untuk terus belajar, berkembang, dan memberikan kontribusi yang bermanfaat bagi masyarakat.