TESIS - SM 142501

DIMENSI PARTISI DAN DIMENSI PARTISI BINTANG GRAF HASIL OPERASI *COMB* DUA GRAF TERHUBUNG

RIDHO ALFARISI
NRP 1215 201 001

Dosen Pembimbing:
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2017

THESIS - SM 142501

THE PARTITION DIMENSION AND STAR PARTITION DIMENSION OF COMB PRODUCT OF TWO CONNECTED GRAPHS

RIDHO ALFARISI
NRP 1215 201 001

Supervisor:
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

MASTER DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2017

DIMENSI PARTISI DAN DIMENSI PARTISI BINTANG GRAF HASIL OPERASI *COMB* DUA GRAF TERHUBUNG

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
RIDHO ALFARISI
NRP. 1215 201 001

Tanggal Ujian : 05 Januari 2017
Periode Wisuda : Maret 2017

Disetujui oleh :

Dr. Darmaji, S.Si., M.T. (Pembimbing)
NIP. 19691015 199412 1 001

Dr. Mahmud Yunus, M.Si. (Penguji)
NIP. 19620407 198703 1 005

Dr. Chairul Imron, MI.Komp. (Penguji)
NIP. 19611115 198703 1 003

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si. (Penguji)
NIP. 19830517 200812 1 003

an. Direktur Program Pascasarjana
Asisten Direktur

Prof. Dr. Ir. Tri Widjaja, M.Eng.
NIP. 19611021 198603 1 001

Direktur Program Pascasarjana

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

DIMENSI PARTISI DAN DIMENSI PARTISI BINTANG GRAF HASIL OPERASI *COMB* DUA GRAF TERHUBUNG

Nama Mahasiswa	:	Ridho Alfarisi
NRP	:	1215 201 001
Dosen Pembimbing	:	Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

ABSTRAK

Misalkan G adalah sebuah graf nontrivial dan terhubung dengan himpunan simpul $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$ dan $S \subseteq V(G)$ dengan simpul $v \in V(G)$, jarak antara v dan S adalah $d(v,S)$ =min$\{d(v,x)|x \in S\}$. Untuk sebuah partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ dari $V(G)$, representasi simpul v terhadap Π didefinisikan oleh pasangan $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), ..., d(v,S_k))$. Partisi Π disebut partisi pembeda dari G jika semua representasi dari setiap simpul $v \in V(G)$ berdeda. Kardinalitas minimum dari partisi pembeda disebut dimensi partisi dari G dan dinotasikan sebagai pd(G). Ragam lain dari konsep dimensi partisi yaitu dimensi partisi bintang. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ disebut partisi pembeda bintang jika setiap kelas-kelas partisi $S_i, 1 \leq i \leq k$ menginduksi sebuah graf bintang di G dan semua representasi dari setiap simpul $v \in V(G)$ berdeda. Kardinalitas minimum dari partisi pembeda bintang disebut dimensi partisi bintang dari G dan dinotasikan sebagai spd(G). Dalam Penelitian ini, kami akan menentukan dimensi partisi dan dimensi partisi bintang dari graf hasil operasi produk $comb$. Operasi $comb$ dinotasikan $\rhd$. Untuk graf G dan H, graf hasil operasi $comb$ $G \rhd H$ didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil satu duplikat G dan $|G|$ duplikat dari H dan melekatkan simpul u dari masing masing graf H duplikat ke-i pada simpul ke-i dari graf G. Misalkan G dan H adalah graf terhubung meliputi lintasan, lingkaran, dan graf lengkap.

***Kata kunci*:** Partisi pembeda, partisi pembeda bintang, dimensi partisi, dimensi partisi bintang, operasi *comb*

THE PARTITION DIMENSION AND STAR PARTITION DIMENSION OF COMB PRODUCT OF TWO CONNECTED GRAPHS

Name	:	Ridho Alfarisi
NRP	:	1215 201 001
Supervisor	:	Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

ABSTRACT

Let G be a nontrivial and connected graphs with vertex set $V(G)$, edge set $E(G)$ and $S \subseteq V(G)$ with vertex $v \in V(G)$. The distance between v and S is $d(v,S)$ =min$\{d(v,x)\}$ for $x \in S$. For an ordered partition $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ of vertex set $V(G)$, the representation of v with respect to Π is defined by the ordered $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), ..., d(v,S_k))$. The minimum cardinality of resolving partition is partition dimension of G, denoted by pd(G). A variant of partition dimension concept called star partition dimension of a graph. Let $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ be a star resolving partition for G if each partition class S_i, $1 \leq i \leq k$, induces a star in G and all representation of vertices $v \in V(G)$ are unique. The minimum cardinality of resolving partition is a star partition dimension of G, denoted by spd(G). In this research, we determine the partition dimension and star partition dimension of comb product of graphs. For graphs G and H, the comb product $G \triangleright H$ is defined as the graph obtained by taking one copy of G and $|V(G)|$ copies of H and grafting the i-th copy of H at the vertex o to the i-th vertex of G. In this work G and H are restricted to path, cycle and complete graph.

***Keywords*:** Resolving partition, star resolving partition, partition dimension, star partition dimension, comb product

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul

"Dimensi Partisi dan Dimensi Partisi Bintang Graf Hasil Operasi *Comb* Dua Graf Terhubung"

dengan baik. Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Bapak Dr. Darmaji, S.Si.,M.T. selaku dosen pembimbing atas segala bantuan, bimbingan, arahan dan motivasinya dalam mengerjakan Tesis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

2. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D yang senantiasa memberikan waktunya untuk berbagi ilmu dalam dunia graf.

3. Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp., Dr. Mahmud Yunus, M.Si. dan Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si. selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tesis ini.

4. Bapak Dr. Subiono, M.S. selaku dosen wali yang telah membimbing dan motivasi selama menempuh pendidikan magister.

5. Ketua Program Studi Pascasarjana Matematika ITS yang telah memberi bimbingan selama menempuh pendidikan magister.

6. Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS yang telah memberi bimbingan selama menempuh pendidikan magister.

7. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA ITS yang telah mendidik penulis baik di dalam maupun di luar perkuliahan serta Bapak dan Ibu staf Tata Usaha Jurusan Matematika ITS.

8. Kedua orang tua Bapak Sugeng Hariyanto, Ibu Supini dan keluarga tercinta, Yendra Purwanto, S.T., Hari Dayanto terima kasih atas perhatian doa dan segala dukungannya selama penulis menempuh studi di ITS.

9. Keluarga besar Pascasarjana Matematika ITS 2015, Mbk Ida, Mbk Trisna, Mbk Ena, Mbk Echa dan teman pascasarjana angkatan 2015 gasal yang telah menemani, membantu, mendoakan, dan memberikan semangat kepada penulis, serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa dalam Tesis ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan untuk kesempurnaan Tesis ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru khususnya dalam bidang teori graf.

Surabaya, Januari 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

$G(V, E)$	Graf G dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E
$V(G)$	Himpunan simpul pada graf G
$E(G)$	Himpunan sisi pada graf G
$e = (u, v)$	Sisi yang menghubungkan simpul u dan simpul v
$\|G\|$	*Order* (banyak simpul graf G)
$\|\|G\|\|$	*Size* (banyak sisi graf G)
$d(u, v)$	Jarak dari simpul u ke simpul v
$d(u, S)$	Jarak dari simpul u ke subhimpunan S
$ecc(v)$	Eksentrisitas simpul v
$rad(G)$	Radius graf G
$diam(G)$	Diameter graf G
$\times$	Operator perkalian kartesian
$\triangleright$	Operator *Comb*
$+$	Operator join
Π	Partisi pembeda
Π_S	Partisi pembeda bintang
W	Himpunan pembeda
$dim(G)$	Dimensi metrik graf G
$pd(G)$	Dimensi partisi graf G
$cpd(G)$	Dimensi partisi terhubung graf G
$spd(G)$	Dimensi partisi bintang graf G
P_n	Graf lintasan order n
C_m	Graf lingkaran order m
K_m	Graf lengkap order m
W_n	Graf roda order n
T	Graf pohon
$J_{k,n}$	Graf gir
$S(K_n)$	Graf subdivisi dari graf lengkap
$K_{1,n}$	Graf bintang order $n + 1$
W_n^m	Graf windmill order $mn + 1$
$C_{m,n}$	Graf kartepilar homogenous order $mn + m$

$B_{m,n}$	Graf pohon pisang homogenous order $mn + 2m + 1$
F_n	Graf persahabatan order $2n + 1$
$\odot$	Operator korona
$A_{n\times n}$	Matriks berordo $n \times n$
$r(u\|W)$	Representasi simpul u terhadap himpunan pembeda W
$r(u\|\Pi)$	Representasi simpul u terhadap partisi pembeda Π
Z^+	Bilangan Bulat Positif
$\lfloor x \rfloor$	Bilangan Bulat Terbesar lebih kecil atau sama dengan x (*floor*)
$\lceil x \rceil$	Bilangan Bulat Terkecil lebih besar atau sama dengan x (*ceiling*)
δ	Derajat terkecil
Δ	Derajat terbesar
$G \rhd_\delta H$	Graf hasil operasi *comb* G dan H untuk simpul pelekatan dari graf H dengan derajat terkecil
$G \rhd_\Delta H$	Graf hasil operasi *comb* G dan H untuk simpul pelekatan dari graf H dengan derajat terbesar

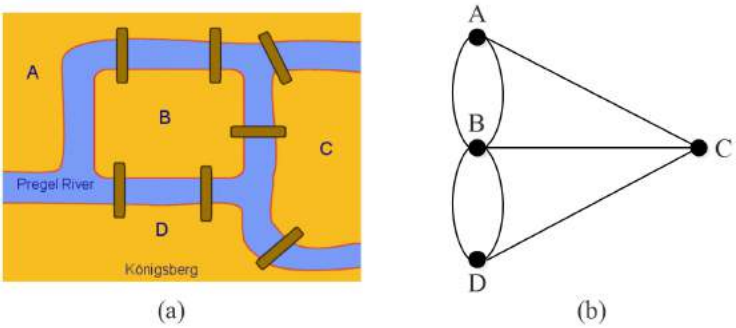
BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika berkembang sangat pesat sehingga Matematika sering dipakai untuk menyelesaikan berbagai permasalahan di banyak bidang. Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu, diantaranya Aljabar, Geometri, Statistika, Probabilitas (peluang), Matematika Teknik, Matematika Komputasi, Matematika Ekonomi, Matematika Diskrit, Sains Komputer dan lain sebagainya. Salah satu cabang matematika yang menarik untuk diteliti lebih lanjut adalah matematika diskrit dengan fokus kajian pada teori graf. Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan tidak kosong simpul (*vertex*), sedangkan E adalah himpunan sisi, boleh kosong, yang menghubungkan sepasang simpul. Untuk selanjutnya, suatu graf dapat ditulis dengan notasi G, tanpa menyebutkan himpunan simpul dan sisinya.

Teori graf pada mulanya dikembangkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 di Jerman. Pada saat itu terdapat empat daerah yang dihubungkan oleh tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg Jerman. Leonhard Euler mencoba membuktikan kemungkinan mengunjungi empat daerah yang terhubung oleh tujuh jembatan, melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat asal. Permasalahan Jembatan Konigsberg dapat direpresentasikan dengan graf, dengan merepresentasikan keempat daerah itu sebagai simpul $(vertex)$ dan ketujuh jembatan sebagai sisi $(edge)$ yang menghubungkan pasangan simpul yang sesuai. Berikut disajikan masalah tujuh jembatan representasi pada graf. (Gambar 1.1)

Salah satu topik yang menjadi kajian dalam teori graf adalah dimensi metrik dan dimensi partisi. Dalam artikelnya, Slater dalam Imran dkk (2012) menyebutkan suatu himpunan dengan sebutan *locating set* yang sering dikenal dengan himpunan pembeda (*resolving set*). Selanjutnya, Chartrand dkk (2000) mengenalkan konsep partisi pembeda yang serupa dengan himpunan pembeda suatu graf. Chartrand dkk (2000) melakukan pengelompokan simpul di graf G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menghitung jarak setiap simpul di G terhadap semua kelas partisi untuk mempresentasikan setiap simpul pada graf G. Salah satu aplikasi dari



Gambar 1.1: (a) Jembatan Konigsberg (b) Graf yang Merepresentasikan Jembatan Konigsberg

himpunan pembeda yaitu representasi senyawa kimia dan navigasi robot (Khuller dan Raghavachari, 1996).

Representasi dan klasifikasi senyawa kimia adalah salah satu masalah yang dihadapi oleh para kimiawan. Permasalahan ini dapat diuraikan sebagai berikut: Pertama, bagaimana merepresentasikan dua atau lebih senyawa kimia yang mempunyai rumus kimia sama tetapi memiliki struktur berbeda. Kedua, bagaimana merepresentasikan dua senyawa kimia yang mempunyai rumus kimia berbeda tetapi mempunyai struktur yang sama. Dalam reaksi kimia, struktur senyawa kimia menentukan karakteristik senyawa yang direaksikan. Representasi memudahkan klasifikasi sebuah senyawa kimia. Johnson dalam Darmaji (2011), adalah seorang kimiawan pada sebuah perusahaan farmasi, menggunakan konsep himpunan pembeda dalam mengklasifikasikan senyawa kimia. Dengan konsep ini, senyawa kimia direpresentasikan secara unik sebagai objek matematika. Senyawa kimia direpresentasikan dalam bentuk graf dengan simpul graf menyatakan atom dan sisi graf menyatakan ikatan valensi antara dua atom.

Misalkan $S \subset V(G)$ dan simpul v di G, $d(v, S)$ adalah jarak antara v dengan S didefinisikan sebagai $d(v, S)$ =min$\{d(v, x)|x \in S\}$. Untuk $k-$partisi dari $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ dan simpul v dari $V(G)$. Representasi dari $v \in V(G)$ terhadap Π adalah $k-$vektor $r(v|\Pi) = \{d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k)\}$. Jika untuk setiap dua simpul berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$, maka Π disebut partisi pembeda dari $V(G)$. Partisi pembeda Π dengan kardinalitas minimum disebut partisi pembeda minimum dari G dan partisi pembeda minimum dari G disebut dimensi partisi yang dinotasikan dengan pd(G). Variasi lain dari partisi pembeda adalah partisi pembeda bintang. $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ adalah partisi pembeda bintang dengan setiap kelas-kelas partisi S_i untuk $1 \leq i \leq k$ menginduksi subgraf bintang. Partisi pembeda bintang dengan kardinalitas minimal disebut dimensi partisi bintang yang dinotasikan spd(G).

Dalam papernya, Chartrand dkk (2000) menunjukkan bahwa pd(G)$=2$ jika dan hanya jika G adalah graf lintasan (P_n) dan pd(G)$=n$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap (K_n). Selain itu, dimensi partisi graf bipartit lengkap ($K_{r,r}$), bahwa pd($K_{r,s}$)$=r+1$ jika $r=s$ dan pd($K_{r,s}$)=max$\{r,s\}$ jika $r \neq s$. Selanjutnya, dimensi partisi untuk beberapa kelas graf tertentu telah dikaji oleh banyak peneliti, misalnya Grigorious dkk (2014) menunjukkan dimensi partisi dari kelas graf circulant, Amrullah dkk (2015) menunjukkan dimensi partisi pada subdivisi graf lengkap, Haryeni dkk (2015) menentukan dimensi partisi dari beberapa kelas graf tak terhubung yang homogen dan Arimbawa dkk (2015) mempelajari dimensi partisi dari beberapa kelas graf pohon. Lebih lanjut, Yero dkk (2011) menunjukkan dimensi partisi dari graf hasil perkalian kartesian dan Darmaji (2011) juga menunjukkan dimensi partisi dari graf multipartit dan graf hasil korona dari dua graf terhubung.

Salah satu variasi dimensi partisi adalah dimensi partisi bintang. Marinescu dkk (2010) menentukan dimensi partisi bintang graf gir diperumum. Hasil yang diperoleh yakni untuk graf gir $J_{k,n}$ dengan $k \geq 2$ dan $n \geq 2$ didapatkan spd($J_{k,n}$)=3 untuk $k = 2$ atau 3 dan $n = 2$; spd($J_{k,n}$)=$\frac{kn}{3}$ untuk $k = 0(\text{mod } 3)$ dan $(k,n) \neq (3,2)$; spd($J_{k,n}$)=$\lfloor\frac{k}{3}\rfloor n+1$ untuk $k = 1(\text{mod } 3)$ dan $n \geq 3$ atau $n = 2$ dan $k \geq 4$; spd($J_{k,n}$)=$\lfloor\frac{k}{3}\rfloor n+1+\lceil\frac{n}{2}\rceil$ untuk $k = 2(\text{mod } 3)$ dan $n \geq 4$ atau $n = 2$ dan $k \geq 5$; spd($J_{k,n}$)=$3\lfloor\frac{k}{3}\rfloor+2$ untuk $k = 2(\text{mod } 3)$ dan $n = 3$. Kemudian Marinescu dan Ghemeci (2012) kembali meneliti dimensi partisi bintang pada graf pohon. Dari penelitian ini diperoleh hasil dimensi partisi bintang graf pohon yakni spd(T)=$\sigma_b(T) - ex_b(T) + sp\underbrace{(T_{1\ldots1})}_{p}$, dengan σ_b merupakan jumlah derajat terkahir dari simpul mayor bercabang, ex_b merupakan banyaknya simpul mayor bercabang, dan sp merupakan kardinalitas dimensi bintang.

Operasi antara dua graf merupakan salah satu cara untuk memperoleh bentuk graf-graf baru. Terdapat berbagai jenis operasi dalam graf, misalnya operasi *join* (+), tensor ($\otimes$), gabungan ($\cup$), kartesian ($\times$), korona ($\odot$), dan operasi *comb* ($\triangleright$). Dalam penelitian ini, akan diteliti operasi graf $comb$ dari dua graf terhubung.

Penelitian tentang dimensi partisi dan dimensi partisi bintang merupakan salah satu topik dari teori graf yang banyak diteliti khususnya pada graf hasil operasi biner antara dua graf. Dalam penelitian ini akan ditentukan dimensi partisi dan dimensi partisi bintang dari graf-graf sederhana yaitu graf lintasan, lingkaran, dan lengkap dengan operasi *comb* antara lain graf lintasan dengan graf lintasan, graf lingkaran dengan graf lintasan, graf lintasan dengan graf lengkap, graf lengkap dengan graf lingkaran, graf lengkap dengan graf lengkap dan graf lingkaran dengan graf lingkaran. Beberapa pemaparan di atas yang melatar belakangi penulis untuk melakukan penelitian dengan judul "Dimensi Partisi dan Dimensi Partisi Bintang Graf Hasil Operasi *Comb* Dua Graf Terhubung"

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Berapakah dimensi partisi pada graf hasil operasi *comb* dua graf terhubung.
2. Berapakah dimensi partisi bintang pada graf hasil operasi *comb* dua graf terhubung.
3. Adakah hubungan antara dimensi partisi dan dimensi partisi bintang pada graf hasil operasi *comb* dua graf terhubung.

1.3 Batasan Masalah

Untuk menjaga fokus pembahasan pada penelitian, masalah dalam penelitan ini dibatasi pada:

1. Graf yang menjadi objek penelitian adalah graf Lintasan, graf Lengkap dan graf Lingkaran.
2. Menggunakan operasi *comb* simpul.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui dimensi partisi pada graf hasil operasi *comb* dua graf terhubung.
2. Mengetahui dimensi partisi bintang pada graf hasil operasi *comb* dua graf terhubung.
3. Menghubungkan antara dimensi partisi dan dimensi partisi bintang pada graf hasil operasi *comb* dua graf terhubung.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain:

1. Diperoleh hasil penelitian untukkontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup dimensi partisi dan dimensi partisi bintang pada graf.

2. Diperoleh hasil penelitian untuk memotivasi kepada pembaca untuk melakukan penelitian tentang dimensi partisi dan dimensi partisi bintang pada operasi graf yang lain atau dengan pengembangan konsep.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

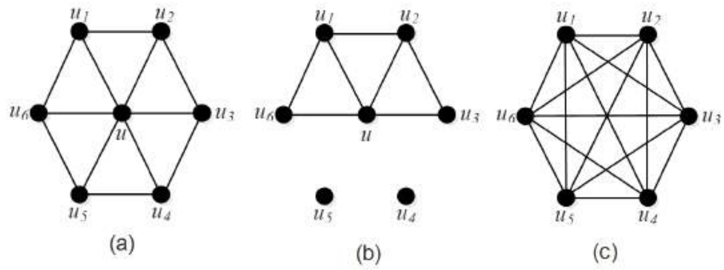
2.1 Terminologi Dasar Graf

2.1.1 Definisi Graf

Suatu graf G terdiri atas dua himpunan yaitu himpunan tak kosong $V(G)$ yang anggotanya terdiri dari simpul dan himpunan $E(G)$ yang mungkin kosong terdiri dari sisi, sedemikian sehingga setiap anggota e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurut dari simpul-simpul dalam $V(G)$, graf G dinotasikan $G = (V, E)$. Simpul pada graf dapat dilabeli dengan huruf, angka, atau dengan menggunakan huruf dan angka. Misalkan u dan v adalah simpul-simpul pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan simpul u dan v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dilambangkan dengan e. Banyak simpul pada graf G disebut *order* dari G dinotasikan $|G|$, sedangkan banyak sisi disebut *size* dari G dinotasikan $\| G \|$. Graf yang ordernya berhingga disebut graf berhingga.

Misalkan Graf G memiliki suatu jalan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G adalah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $Y = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ...v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), ..., e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G. Jika $v_0 \neq v_n$, maka jalan disebut jalan terbuka dan jika $v_0 = v_n$, maka jalan disebut jalan tertutup, simpul dan sisi mungkin diulang dalam suatu jalan. $Trail$ dalam graf G adalah suatu jalan di G dengan sifat tidak ada sisi yang diulang. Lintasan dalam graf G adalah suatu $trail$ di G dengan sifat tidak ada simpul yang ulang (Hartsfield dan Ringel, 1994).

Sebuah graf G dikatakan terhubung ($connected$) jika untuk setiap dua simpul u dan v yang berdeda di graf G maka terdapat lintasan yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Jarak antara simpul u dan v didefinisikan panjang lintasan terpendek antara simpul u dan v yang dinotasikan $d(u, v)$. Eksentrisitas ecc(v) pada sebuah simpul v dalam graf G adalah jarak terjauh dari simpul v ke setiap simpul di G. Diameter dari graf G didefinisikan jarak terjauh dari sebarang dua simpul di $V(G)$ atau suatu nilai $\max_{u,v \in G}\{d(u, v)\}$ yang dinotasikan dengan diam(G)=$\max_{u,v \in G}\{d(u, v)\}$. Jari-jari (*radius*) yang dinotasikan rad(G) dari graf



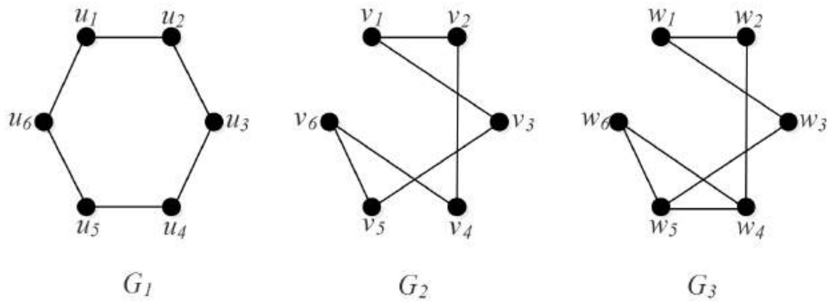
Gambar 2.1: (a) Graf Roda W_6, (b) Graf dengan 2 *Isolated Vertex*, (c) Graf Reguler 5

G adalah eksentrisitas minimum di antara simpul-simpul di G. Simpul v disebut simpul pusat jika ecc(v)=rad(G). Gambar 2.1 (a) merupakan graf terhubung, dengan jarak dari u_1 ke u_2 yaitu $d(u_1, u_2) = 1$ dan diam(G)= 2 merupakan jarak antara u_2 ke u_4.

Simpul u dikatakan bertetangga ($adjacent$) dengan simpul v jika terdapat sebuah sisi e diantara u dan v yaitu $e = uv$, atau dapat dinyatakan bahwa sisi e menempel ($incident$) dengan kedua simpul u dan v. Derajat (*degree*) pada setiap simpul didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang menempel pada simpul tersebut. Jika setiap simpul pada graf G mempunyai derajat sama dengan n maka graf G disebut graf reguler n, jika tidak maka graf tersebut dikatakan non reguler. Simpul v pada suatu graf G yang memiliki derajat 0 disebut *isolated vertex*, sedangkan sebuah simpul yang hanya mempunyai derajat satu disebut daun, simpul ujung atau *pendant*. Pada Gambar 2.1 (b) ditunjukkan contoh graf dengan 2 *isolated vertex* serta Gambar 2.1 (c) merupakan graf reguler 5.

2.1.2 Graf Isomorfik

Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling isomorfis (*Isomorphic Graph*). Graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis jika terdapat pemetaan satu-satu $f : V(G_1) \to V(G_2)$ yang menyajikan semua sifat ketetanggaan, yaitu $f(u)$ dan $f(v)$ pada G_2 bertetangga jika dan hanya jika u dan v bertetangga pada G_1. Dua graf yang isomorfik mempunyai matriks ketetanggaan yang sama. Jika sama maka kedua graf tersebut dikatakan isomorfis seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.2. Graf G_1 dan G_2 adalah dua graf yang isomorfis, sedangkan graf G_3 tidak isomorfis dengan G_1.



Gambar 2.2: Isomorfisma dalam Graf

2.2 Jenis-Jenis Graf

Graf-graf sederhana yang tergolong *well known graph* yang digunakan dalam penelitian ini meliputi graf lengkap, graf lintasan, graf lingkaran, dan graf bintang. Berikut definisi dari masing-masing graf tersebut.

2.2.1 Graf Lengkap

Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dinotasikan dengan K_n. Contoh graf Lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.3 (a).

2.2.2 Graf Lintasan

Graf Lintasan adalah graf sederhana yang kedua simpul ujung yang berderajat satu disebut *pendant*, sedangkan simpul yang lain berderajat dua. Graf lintasan dinotasikan dengan P_n. Contoh graf Lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.3 (b).

2.2.3 Graf Lingkaran

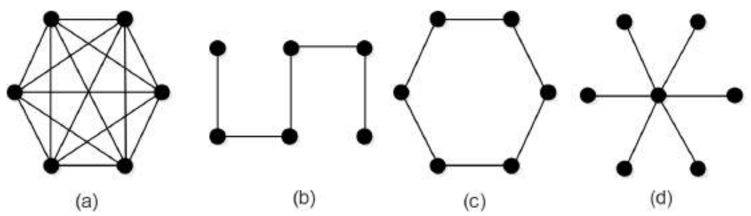
Graf Lingkaran adalah graf terhubung sederhana yang memiliki n simpul dan n sisi dengan setiap simpulnya berderajat dua. Graf Lingkaran dinotasikan dengan C_n dengan $n \geq 3$. Contoh graf Lingkaran dapat dilihat pada Gambar 2.3 (c).

2.2.4 Graf Bintang

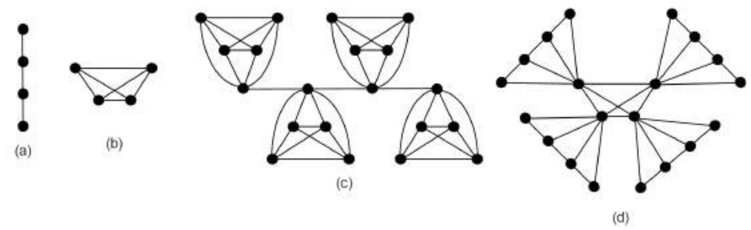
Graf Bintang $K_{1,n}$ adalah graf terhubung sederhana yang memiliki $n+1$ simpul dan n sisi. Satu simpul pada graf bintang disebut simpul pusat yang berderajat n, sedangkan simpul yang berderajat satu disebut $pendant$. Graf trivial dapat disebut pula sebagai graf bintang. Contoh graf Bintang dapat dilihat pada Gambar 2.3 (d).

2.3 Operasi Graf

Operasi antara dua graf merupakan salah satu cara untuk memperoleh bentuk graf-graf baru. Terdapat berbagai jenis operasi dalam graf, misalnya operasi *korona*



Gambar 2.3: (a) Graf Lengkap, (b) Graf Lintasan, (c) Graf Lingkaran, dan (d) Graf Bintang



Gambar 2.4: (a) Graf Lintasan P_4, (b) Graf Lengkap K_4, (c) Graf Hasil Operasi Korona $P_4 \odot K_4$, (d) Graf Hasil Operasi Korona $K_4 \odot P_4$

($\odot$) dan operasi *comb* ($\triangleright$).

2.3.1 Operasi Korona

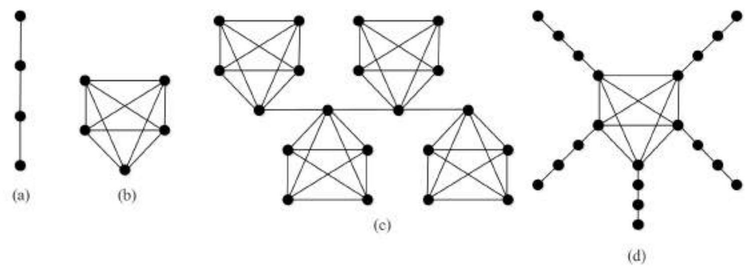
Harary dan Frunct dalam Yero dkk (2011) mendefinisikan operasi korona dari graf G dan graf H adalah sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|G|$ duplikat dari graf H yaitu H_i dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, |G|$ kemudian menghubungkan setiap simpul ke-i dari G ke setiap simpul di H_i.

Gambar 2.4 (c) dan (d) menunjukkan bahwa graf-graf hasil operasi korona bukan graf yang isomorfis, sehingga hasil dari operasi tersebut tidak bersifat komutatif.

2.3.2 Operasi Comb

Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan u adalah simpul di H. Operasi *comb* dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \triangleright H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu duplikat G dan $|G|$ duplikat dari H dan melekatkan simpul u dari masing masing graf H_i duplikat ke-i pada simpul ke-i dari graf G (Saputro dkk, 2013).

Gambar 2.5 (c) dan (d) menunjukkan bahwa graf-graf hasil operasi *comb* bukan graf yang isomorfis, sehingga hasil dari operasi tersebut tidak bersifat komutatif.



Gambar 2.5: (a) Graf Lintasan P_4, (b) Graf Lengkap K_5, (c) Graf Hasil Operasi Comb $P_4 \triangleright K_5$, (d) Graf Hasil Operasi Comb $K_5 \triangleright P_4$

2.4 Konsep Dimensi dalam Graf

2.4.1 Dimensi Metrik

Slater dalam Imran dkk (2012) menyebutkan suatu himpunan dengan sebutan *locating set* yang sering dikenal dengan himpunan pembeda (*resolving set*). Diberikan sebuah graf terhubung G. Misalkan dua simpul u dan v adalah simpul-simpul dari graf terhubung G. Jarak antara simpul u dan v didefinisikan sebagai lintasan terpendek dari simpul u ke v di G dan dinotasikan $d(u,v)$. Jika diberikan suatu himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\} \subseteq V(G)$ dari simpul-simpul dalam graf terhubung G dan simpul v di $V(G)$, maka representasi dari simpul v terhadap W adalah $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), ..., d(v,w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap simpul $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut sebagai himpunan pembeda dari $V(G)$. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum. Kardinalitas dari himpunan pembeda minimum disebut dimensi metrik dari graf G yang dinotasikan dim(G).

Permana dan Darmaji (2012) memberikan Lemma 2.1 untuk menentukan setiap anggota himpunan berbeda memiliki representasi yang berbeda.

Lemma 2.1 *Untuk setiap simpul u anggota himpunan pembeda W pasti memiliki representasi yang berbeda terhadap W*

Chartrand dkk (2000) memberikan Teorema 2.1 untuk menentukan dimensi metrik pada graf *well-known* yaitu graf lintasan P_n, graf lengkap K_n, graf lingkaran C_n dan graf pohon T.

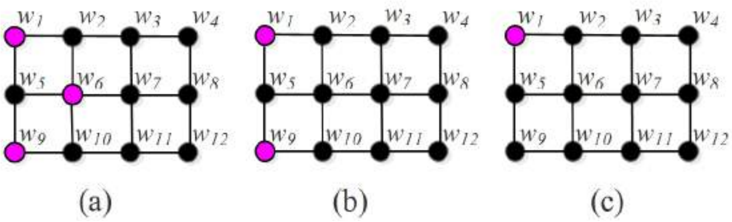
Teorema 2.1 *Misalkan G adalah sebuah graf terhubung dengan orde $n \geq 2$.*

(i.) dim(G) = 1 jika dan hanya jika $G = P_n$

(ii.) dim(G)=$n-1$ jika dan hanya jika $G = K_n$

(iii.) Untuk $n \geq 3$, dim(C_n)=2

(iv.) Untuk $n \geq 4$, dim(G)=n-2 jika dan hanya jika $G = K_{r,s}, (r, s \geq 1), G =$



Gambar 2.6: Konstruksi himpunan pembeda dari graf G: (a) $W_1 = \{w_1, w_6, w_9\}$, (b) $W_2 = \{w_1, w_9\}$ dan (c) $W_3 = \{w_1\}$

$K_r + \overline{K_s}, (r \geq 1, s \geq 2)$,*atau*$G = K_r + (K_1 \bigcup K_s), (r, s \geq 1)$
(v.) Jika T adalah graf pohon yang bukan lintasan maka dim(T)= $\partial(T) - ex(T)$, *dimana* $\partial(T)$ *menyatakan jumlah derajat terminal dari simpul utama* T*, dan ex(*T*) menyatakan jumlah simpul utama bagian luar* T*.*

Gambar 2.6 mengilustrasikan suatu himpunan terurut $W \subset V(G)$, $W_1 = \{w_1, w_6, w_9\}$ merupakan himpunan pembeda dari graf G karena memiliki representasi yang berbeda. Akan tetapi, W_1 bukan merupakan himpunan pembeda yang minimum, karena pada Gambar 2.6.(b) dapat ditunjukkan memiliki himpunan terurut $W_2 = \{w_1, w_9\}$ merupakan himpunan pembeda. Dapat dilihat pada Gambar 2.6.(c) memiliki himpunan terurut $W_3 = \{w_1\}$ bukanlah suatu himpunan pembeda, karena terdapat representasi $r(w_2|W_3) = r(w_5|W_3) = (1)$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa himpunan pembeda dari graf G memiliki kardinalitas sedikitnya 2. Misalkan suatu himpunan pembeda dari G dengan $|W_3| = 1$ sehingga diberikan $W_3 = \{w_1\}$ bukan himpunan pembeda dari G karena representasi W pada G menghasilkan representasi yang sama, yaitu $r(w_2|W_3) = r(w_5|W_3) = r(w_7|W_3) = r(w_6|W_3) = (1)$, kontradiksi dengan pemisalan W_3 sebagai himpunan pembeda. Jadi, $|W_3| \geq 2$. Dengan demikian, W_2 merupakan himpunan pembeda minimum dari graf G. Gambar 2.6.(b) memiliki $W_2 = \{w_1, w_9\}$ adalah himpunan pembeda dari G karena representasi dari semua simpul di G berbeda, yaitu:

$r(w_2|W_2) = (1,3)$	$r(w_6|W_2) = (2,2)$	$r(w_{10}|W_2) = (3,1)$
$r(w_3|W_2) = (2,4)$	$r(w_7|W_2) = (3,3)$	$r(w_{11}|W_2) = (4,2)$
$r(w_4|W_2) = (3,5)$	$r(w_8|W_2) = (4,4)$	$r(w_{12}|W_2) = (5,3)$
	$r(w_5|W_2) = (1,1)$	

Dari representasi di atas dapat diketahui bahwa representasi dari semua simpul terhadap W_2 berbeda. Jadi, W_2 merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimal yaitu 2. Sehingga dimensi metrik dari graf G adalah dim(G)= 2

2.4.2 Dimensi Partisi

Dimensi partisi dari sebuah graf G dikenalkan oleh Chartrand, Salehi dan Zhang (2000). Mereka mengelompokkan semua simpul di G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap simpul terhadap setiap kelas partisi tersebut. Misalkan $S \subset V(G)$ dengan simpul v di $V(G)$ sedemikian sehingga jarak antara simpul v dengan subhimpunsn S didefinisikan sebagai $d(v,S)$ =min$\{d(v,x)|x \in S\}$. Untuk urutan $k-$partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ dari $V(G)$ dan simpul $v \in V(G)$. Representasi dari $v \in V(G)$ terhadap Π adalah $k-$vektor $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), ..., d(v,S_k))$. Jika untuk setiap dua simpul berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$, maka Π disebut partisi pembeda dari $V(G)$. Partisi pembeda Π dengan kardinalitas minimum disebut partisi pembeda minimum dari G. Partisi pembeda minimum dari G disebut dimensi partisi yang dinotasikan dengan pd(G).

Chartrand, Salehi dan Zhang (2000) memberikan beberapa lemma dan teorema yang mendasari dalam menentukan dimensi partisi yang berkaitan dengan parameternya dan dimensi partisi dari graf asal dan graf hasil operasi.

Lemma 2.2 [*Chartrand, Salehi dan Zhang (2000)*]*Misalkan G suatu graf terhubung tak trivial. Misalkan Π suatu partisi pembeda dari G dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka u dan v berada dalam kelas partisi yang berbeda di Π.*

Teorema 2.2 [*Chartrand, Salehi dan Zhang (2000)*]*Misalkan G suatu graf terhubung tak trivial, maka pd(G)$\leq$ dim(G)$+1$*

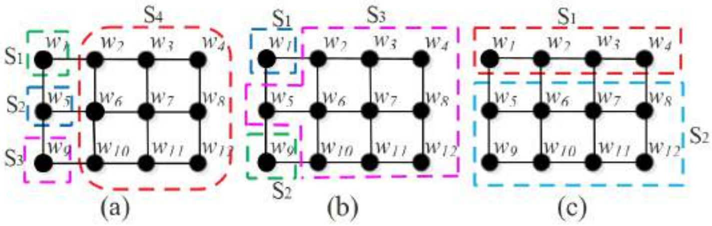
Teorema 2.3 [*Chartrand, Salehi dan Zhang (2000)*]*Misalkan G adalah graf terhubung dengan orde $n \geq 2$.*

(i.) pd(G) = 2 jika dan hanya jika $G = P_n$

(ii.) pd(G)=n jika dan hanya jika $G = K_n$

(iii.) Untuk $n \geq 4$, pd(G)=n-1 jika dan hanya jika $G = K_{r,s}, (r, s \geq 1), G = K_r + \overline{K_s}, (r \geq 1, s \geq 2), orG = K_r + (K_1 \bigcup K_s), (r, s \geq 1)$.

Misalkan G adalah graf terhubung yang diberikan pada Gambar 2.7. Gambar 2.7 mengilustrasikan suatu partisi pembeda terurut dari $V(G)$. Gambar 2.7.(a) menunjukkan bahwa $\Pi_1 = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ dengan $S_1 = \{w_1\}$, $S_2 = \{w_5\}$, $S_3 = \{w_9\}$, $S_4 = \{w_i; 1 \leq i \leq 12\} - \{w_1, w_5, w_9\}$ merupakan partisi pembeda dari graf G karena memiliki representasi yang berbeda. Akan tetapi, Π_1 bukan merupakan partisi pembeda yang minimum, karena pada Gambar 2.7.(b) dapat ditunjukkan memiliki himpunan terurut $\Pi_2 = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{w_1\}$,



Gambar 2.7: Konstruksi partisi pembeda dari graf G: (a) $\Pi_1 = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, (b) $\Pi_2 = \{S_1, S_2, S_3\}$ dan (c) $\Pi_3 = \{S_1, S_2\}$

$S_2 = \{w_9\}$, $S_3 = \{w_i; 1 \leq i \leq 12\} - \{w_1, w_9\}$ merupakan partisi pembeda. Dapat dilihat pada Gambar 2.7.(c) memiliki himpunan terurut $\Pi_3 = \{S_1, S_2\}$ dengan $S_1 = \{w_i; 1 \leq i \leq 4\}$, $S_2 = \{w_i; 5 \leq i \leq 12\}$ bukanlah suatu partisi pembeda, karena terdapat representasi $r(w_1|\Pi_3) = r(w_2|\Pi_3) = (0, 1)$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari graf G memiliki kardinalitas sedikitnya 3. Misalkan suatu partisi pembeda dari G dengan $|\Pi_3| = 2$ sehingga diberikan $\Pi_3 = \{S_1, S_2\}$ bukan partisi pembeda dari G karena representasi Π_3 pada G menghasilkan representasi yang sama, yaitu $r(w_1|\Pi_3) = r(w_2|\Pi_3) = r(w_3|\Pi_3) = r(w_4|\Pi_3) = (0, 1)$, kontradiksi dengan pemisalan Π_3 sebagai partisi pembeda. Jadi, $|\Pi_3| \geq 3$. Dengan demikian, Π_2 merupakan partisi pembeda minimum dari graf G. Gambar 2.7.(b) memiliki $\Pi_2 = \{S_1, S_2, S_3\}$ adalah partisi pembeda dari G karena representasi dari semua simpul di G berbeda, yaitu:

$$
\begin{array}{lll}
r(w_1|\Pi_2) = (0, 2, 1) & r(w_5|\Pi_2) = (1, 1, 0) & r(w_9|\Pi_2) = (2, 0, 1) \\
r(w_2|\Pi_2) = (1, 3, 0) & r(w_6|\Pi_2) = (2, 2, 0) & r(w_{10}|\Pi_2) = (3, 1, 0) \\
r(w_3|\Pi_2) = (2, 4, 0) & r(w_7|\Pi_2) = (3, 3, 0) & r(w_{11}|\Pi_2) = (4, 2, 0) \\
r(w_4|\Pi_2) = (3, 5, 0) & r(w_8|\Pi_2) = (4, 4, 0) & r(w_{12}|\Pi_2) = (5, 3, 0)
\end{array}
$$

Dari representasi diatas dapat diketahui bahwa representasi dari semua simpul terhadap Π_2 berbeda. Jadi, Π_2 merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas minimal yaitu 3. Sehingga dimensi partisi dari graf G adalah pd(G)= 3

2.4.3 Dimensi Partisi Bintang

Variasi lain dari dimensi partisi, yang disebutkan dalam Saenpholphat dan Zhang (2002) menjadi topik untuk diteliti yaitu partisi pembeda bintang, $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ adalah partisi pembeda yang harus memenuhi syarat-syarat tertentu. Pada tesis ini dibahas salah satu syarat yang harus dipenuhi pada partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ yaitu setiap kelas-kelas partisi S_i untuk $1 \leq i \leq k$ adalah sebuah subgraf bintang. Minimum k yang terdapat sebuah $k-$partisi pembeda bintang dari $V(G)$ disebut dimensi partisi bintang dari G, dinotasikan oleh spd(G).

Untuk variasi dimensi partisi didapatkan beberapa hasil dari Marinescu dkk (2010) menyatakan bahwa dimensi partisi bintan graf gir diperumum. Hasil yang diperoleh yakni untuk graf gir $J_{k,n}$ dengan $k \geq 2$ dan $n \geq 2$ didapatkan spd($J_{k,n}$)= 3 untuk $k = 2$ or 3 dan $n = 2$; spd($J_{k,n}$)= $\frac{kn}{3}$ untuk $k = 0(\text{mod } 3)$ dan $(k, n) \neq (3, 2)$; spd($J_{k,n}$)= $\lfloor\frac{k}{3}\rfloor n + 1$ untuk $k = 1(\text{mod } 3)$ dan $n \geq 3$ or $n = 2$ dan $k \geq 4$; spd($J_{k,n}$)= $\lfloor\frac{k}{3}\rfloor n + 1 + \lceil\frac{n}{2}\rceil$ untuk $k = 2(\text{mod } 3)$ dan $n \geq 4$ or $n = 2$ dan $k \geq 5$; spd($J_{k,n}$)= $3\lfloor\frac{k}{3}\rfloor + 2$ untuk $k = 2(\text{mod } 3)$ dan $n = 3$. Kemudian Marinescu dan Ghemeci (2012) kembali meneliti teori dimensi partisi bintang pada graf pohon. Dari penelitian ini diperoleh hasil bahwa dimensi partisi bintang graf pohon yakni spd(T)= $\sigma_b(T) - ex_b(T) + sp\,\underbrace{(T_{1\ldots1})}_{p}$, dengan σ_b merupakan jumlah derajat terkahir dari simpul mayor bercabang, ex_b merupakan banyaknya simpul mayor bercabang.

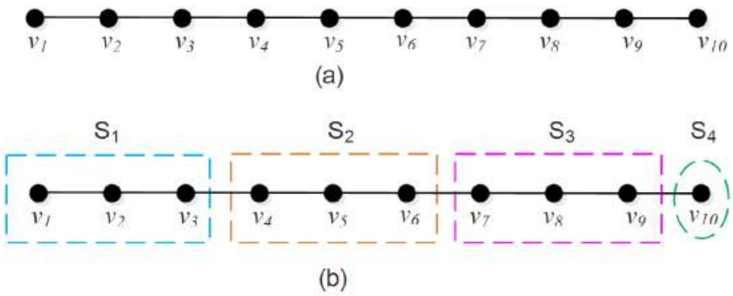
Diberikan graf lintasan (P_{10}) pada Gambar 2.8 (a) yang akan ditentukan dimensi partisi bintangnya. Misalakan $\Pi_S = \{S_1.S_2, S_3, S_4\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $S_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$, $S_3 = \{v_7, v_8, v_9\}$ dan $S_4 = \{v_{10}\}$ maka representasi $v \in V(G)$ terhadap Π sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
r(v_1|\Pi_S) &= (0, 3, 6, 9) & r(v_6|\Pi_S) &= (3, 0, 1, 4) \\
r(v_2|\Pi_S) &= (0, 2, 5, 8) & r(v_7|\Pi_S) &= (4, 1, 0, 3) \\
r(v_3|\Pi_S) &= (0.1.4.7) & r(v_8|\Pi_S) &= (5, 2, 0, 2) \\
r(v_4|\Pi_S) &= (1, 0, 3, 6) & r(v_9|\Pi_S) &= (6, 3, 0, 1) \\
r(v_5|\Pi_S) &= (2, 0, 2, 5) & r(v_{10}|\Pi_S) &= (7, 4, 1, 0)
\end{aligned}
$$

Jadi Π_S adalah partisi pembeda bintang dari G sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$ dan simpul-simpul pada kelas-kelas partisi S_i dengan $1 \leq i \leq 4$ menginduksi sebuah graf bintang. Kelas-kelas partisi S_1, S_2, S_3 menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan kelas partisi S_4 merupakan graf trivial yang juga merupakan graf bintang, sebagaimana terlihat pada gambar Gambar 2.8 (b).

Berdasarkan penjelasan di atas. Sehingga batas atas dimensi partisi bintang graf lintasan berorder 10 yaitu spd(P_{10})≤ 4

Pada graf Gambar 2.8 (a), misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $S_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$, $S_3 = \{v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$. Dapat ditunjukkan bahwa kelas partisi S_3 tidak menginduksi graf bintang sehingga $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3\}$ bukan partisi pembeda bintang maka batas batas bawah dari graf P_{10} yakni spd(P_{10})$\geq$



Gambar 2.8: (a) Graf Lintasan P_{10}, (b) Konstruksi partisi pembeda bintang dari graf P_{10}

4. Karena batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang P_{10} sama maka spd(P_{10})$=4$.

Dalam Marinescu dan Ghemeci (2012) menyatakan bahwa terdapat hubungan antara dimensi partisi dan dimensi partisi bintang graf terhubung sebagaimana dalam Teorema 2.4 sebagai berikut:

Teorema 2.4 *Untuk G adalah graf terhubung,*

a. Untuk sebarang dua bilangan bulat a dan b sedemikian sehingga $3 \leq a \leq b$*, terdapat graf G sedemikian sehingga* $pd(G) = a$ *dan* $spd(G) = b$

b. Untuk sebarang dua bilangan bulat a dan b sedemikian sehingga $3 \leq a \leq b$*, terdapat graf G sedemikian sehingga* $dim(G) = a$ *dan* $spd(G) = b$

2.4.4 Hasil-Hasil Penelitian Dimensi Partisi dan Dimensi Partisi Bintang

Pada Tabel 2.1 disajikan beberapa hasil penelitian mengenai dimensi partisi dan dimensi partisi bintang pada graf sederhana.

2.5 Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat dan Bilangan Modulo

Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $a \neq 0$, a habis membagi b (a *divides* b) atau biasanya ditulis $a|b$ jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sedemikian hingga $b = ac$.

Teorema 2.5 (Algoritma Pembagian) Misalkan m dan n adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $n > 0$. Jika m dibagi dengan n maka terdapat dua buah bilangan bulat unik q (*quotient*) dan r (*remainder*), sedemikian sehingga $m = nq + r$ dengan $0 \leq r < n$. Untuk selanjutnya secara berturut-turut q adan r disebut sebagai hasil dan sisa pembagian. (Subiono, 2015).

Tabel 2.1: Hasil Penelitian Dimensi Partisi dan Dimensi Partisi Bintang pada Graf Sederhana

Graf	**Dimensi Partisi**	**Keterangan**
Graf circulant $G \cong G(n, \pm\{1,2\})$	pd(G)= $3; n \geq 12$ $n \equiv 0(\text{mod}4)$	(Grigorious dkk, 2014)
$G \cong S(K_n)$	pd(G)= $2; n = 2$ pd(G)= $3; n \in [3,4]$ pd(G)= $4; n \in [5,8]$ pd(G)$\leq \lceil \frac{n}{2} \rceil; n \geq 9$	(Amrullah dkk, 2015)
$G \cong P_m \odot K_n$ $m \geq 2$dan $n \geq 4$	pd(G)= $n+1; m \leq n+2$ pd(G)= $n+2; m \leq n+3$	(Darmaji, 2011)
$G \cong P_m \odot K_{1,n}$ $m \geq 2$dan $n \geq 4$	pd(G)= $n; m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pd(G)= $n+1; m > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	(Darmaji, 2011)
$G \cong W_n^m$ $m \geq 1$dan $n \geq 1$	pd(G)= k $\lfloor k \rfloor \ni (k,n) \geq m$	(Darmaji, 2011)
$G \cong C_{m,n}$	pd(G)= 3; $n = 1$ dan $m \geq 3$, atau $n = 2$ dan $m \geq 2$ atau $n = 3$ dan $m \leq 3$	(Fredina dkk, 2015)
$G \cong B_{m,n}$	pd(G)= 3; $n \leq 2$ dan $3 \leq m \leq 7$, atau $n = 3$ dan $m \leq 6$ atau $n = 4$ dan $m \leq 2$	(Fredina dkk, 2015)
$G \cong C_{m,n}$	pd(G)= 4; $n = 3$ dan $m \geq 4$, atau $n = 4$ dan $m \leq 4$	(Arimbawa dkk, 2015)
Gir+anting $G \cong G'_{2n}; n \geq 2$	pd(G)= $3; 2 \leq n \leq 4$ pd(G)= $k; m > 4$	(Darmaji, 2011)
$G \cong C_m \odot K_n$ $m \geq 3$dan $n \geq 1$	pd(G)= $3; n = 1$ pd(G)= $p; n > 1$	(Yogi dkk, 2012)
Lintasan (P_n)	spd(P_n)= $\lceil \frac{n}{3} \rceil; n \geq 1$	(Marinescu dan Ghemeci, 2012)
Windmill (W_n^m) $m \geq 2$dan $n \geq 2$	spd(W_n^m)= $(n-1)m$	(Amalia, 2013)
Lingkaran (C_n)	pd(C_n)= $3; n \geq 3$	(Rodrguez-Velzquez dkk, 2013)

Selanjutnya didefinisikan kongrungen modulo dari suatu bilangan. Secara sederhana dikatakan $a \equiv b$ (mod n) jika dan hanya jika a dan b memiliki sisa yang sama apabila dibagi dengan m. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada definisi berikut ini.

Definisi 2.1 Misalkan $n > 0$ adalah sebarang bilangan bulat tetapi tetap. Untuk sebarang dua bilangan bulat a dan b adalah **kongruen mod** n ditulis $a \equiv b$ (mod n) jika $n|(a-b)$(Subiono, 2015).

Berikut ini ditunjukkan analisis mengenai *ceil* dari suatu bilangan yang kaitannya dengan bilangan modulo. Misal $m, n \in \mathbb{Z}^+$ dan $s \in \{0, 1, 2, ..., m\}$, didapatkan beberapa hasil berikut ini.

1. $n \equiv 0$ (mod m)
   $n \equiv 0$ (mod m) artinya $m|n$, sehingga terdapat $k \in Z^+$ sedemikian hingga $n = m \cdot k$ atau $k = \frac{n}{m}$. Dengan demikian didapatkan

$$\begin{aligned}\left\lceil \frac{n-s}{m} \right\rceil &= \left\lceil \frac{m \cdot k - s}{m} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{m(k-1) + m - s}{m} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{m(k-1)}{m} + \frac{m-s}{m} \right\rceil \\ &= \left\lceil k - 1 + \frac{m-s}{m} \right\rceil.\end{aligned}$$

   Karena $s \in \{0, 1, 2, ..., m\}$ maka $\frac{m-s}{m} = 0$ untuk $s = m$ dan $0 < \frac{m-s}{m} \leq 1$ untuk $0 \leq s \leq m-1$ sehingga didapatkan

$$\left\lceil \frac{n-s}{m} \right\rceil = \begin{cases} k & \text{jika } 0 \leq s \leq m-1 \\ k-1 & \text{jika } s = m \end{cases}$$

2. $n \equiv p$ (mod m) dengan $1 \leq p < m$
   $n \equiv p$ (mod m) artinya $m|n-p$, sehingga terdapat k tak negatif sedemikian $n - p = m \cdot k$ yang mengakibatkan $n = m \cdot k + p$ dan $k = \frac{n-p}{m}$. Dengan demikian didapatkan

$$\left\lceil \frac{n-s}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{m \cdot k + p - s}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{mk}{m} + \frac{p-s}{m} \right\rceil = \begin{cases} k+1 & \text{jika } 1 \leq p-s \leq m \\ k & \text{jika } -m < p-s \leq 0 \end{cases}$$

atau

$$\left\lceil \frac{n-s}{m} \right\rceil = \begin{cases} k+1 & \text{jika } s+1 \leq p \leq s+m \\ k & \text{jika } s-m < p \leq s \end{cases} = \begin{cases} k+1 & \text{jika } p-m \leq s \leq p-1 \\ k & \text{jika } p \leq s < m+p \end{cases}.$$

Karena $1 \leq p < m$ dan $s \in \{0, 1, ..., m\}$ maka

$$\left\lceil \frac{n-s}{m} \right\rceil = \begin{cases} k+1 & \text{jika } s+1 \leq p \leq m-1 \\ k & \text{jika } 1 < p \leq s \end{cases} = \begin{cases} k+1 & \text{jika } 0 \leq s \leq p-1 \\ k & \text{jika } p \leq s < m+1 \end{cases}.$$

Dalam Hartsfield dan Ringel (1994), terdapat cara lain untuk menuliskan hasil tanpa keterangan untuk dua kasus, gasal dan genap. Menggunakan simbol Gauss' untuk fungsi bilangan bulat terbesar

$$[x] = \text{bilangan bulat terbesar} \leq x$$

Notasi ini telah lama tidak digunakan, dan kita menggunakan notasi

$$\lfloor x \rfloor = \text{bilangan bulat terbesar} \leq x$$

Kita dapat menyebutkan $\lfloor x \rfloor$ sebagai simbol *floor*. Simbol $\lceil x \rceil$ didefinisikan sebagai

$$\lceil x \rceil = \text{bilangan bulat terkecil} \geq x$$

Notasi ini disebut simbol $ceiling$.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang akan digunakan atau dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian yang terdiri dari beberapa langkah berikut ini.

1. Pemahaman konsep dan studi literatur
   Pada tahap ini dilakukan pemahaman konsep dan studi literatur dari berbagai sumber mengenai dimensi partisi dan dimensi partisi bintang pada graf-graf hasil operasi *comb*.
2. Analisis dan Pembahasan
   a. Mengkonstruksi graf hasil operasi *comb* dari dua graf terhubung.
   b. Menentukan penamaan setiap simpul sedemikian sehingga simpulnya berbeda dan menghasilkan formulasi yang memetakan himpunan simpul dan himpunan sisi.
   c. Menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf hasil operasi *comb* dari kombinasi beberapa graf tersebut melalui partisi pembeda. Setelah itu, dapat ditentukan dimensi partisi dari batas atas dan batas bawah yang telah diperoleh.
   d. Menentukan partisi pembeda dari graf hasil operasi *comb*.
   e. Menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf hasil operasi *comb* melalui partisi pembeda bintang. Setelah itu, dapat ditentukan dimensi partisi bintang dari batas atas dan batas bawah yang telah diperoleh.
   f. Menentukan partisi pembeda bintang Π dari graf hasil operasi *comb*.
   g. Menganalisis dimensi partisi pada masing-masing graf hasil operasi *comb*.
   h. Menganalisis dimensi partisi bintang pada masing-masing graf hasil operasi *comb*.

i. Menentukan hubungan antara dimensi partisi dan dimensi partisi bintang dari masing-masing graf hasil operasi *comb*.

j. Mengevaluasi terhadap analisa dan pembahasan yang telah dikerjakan sehingga dapat diperoleh suatu simpulan.

3. Diseminasi hasil penelitian
   Tahap diseminasi hasil penelitian meliputi presentasi pada beberapa seminar international sebagai berikut:

   a. ”Distance in Graph 2016 (DiG16): A conference to celebrate the life and work of Mirka Miller” Ubud, Bali

   b. ”International Conference on Mathematics: Pure, Applied and Computation” Jurusan Matematika, ITS, Surabaya

   c. ”International Conference on Mathematics: Education, Theory and Application” Jurusan Matematika, UNS, Solo

   dan dipublikasi *paper* dalam prosiding atau jurnal internasional.

4. Penyusunan laporan
   Laporan penelitian ditulis dalam sebuah tesis dengan sistematika penulisan yang telah ditentukan, yang meliputi: bab 1. pendahuluan, bab 2. kajian pustaka dan dasar teori, bab 3. metoda penelitian, bab 4. hasil dan pembahasan, serta bab 5. simpulan dan saran.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Dimensi Partisi Graf Hasil Operasi *Comb* Dua Graf Terhubung

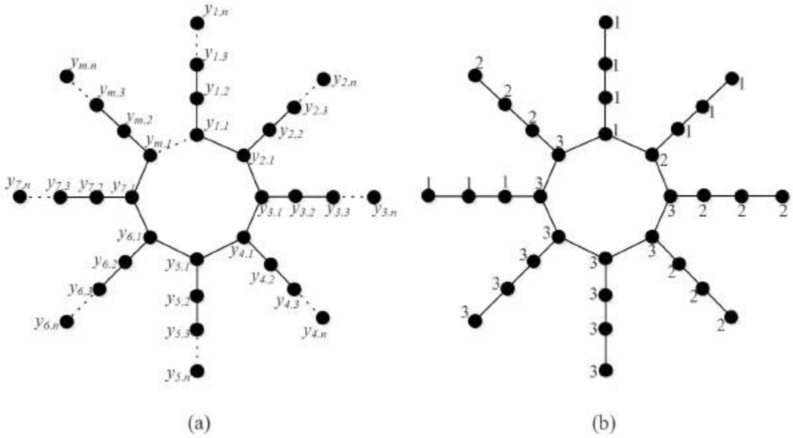
Subbab ini menjelaskan dimensi partisi pada graf hasil operasi *comb*. Dimensi partisi graf hasil operasi *comb* tidak dapat digeneralisasi untuk sebarang dua graf terhubung. Hal ini dikarenakan dimensi partisi pada masing-masing graf hasil operasi *comb* pasti berbeda, yaitu tergantung pada graf yang dioperasikan dan simpul yang dilekatkan.

Dalam penjelasan berikut ini ditunjukkan dimensi partisi graf hasil operasi *comb* antara dua graf terhubung diantaranya graf lingkaran C_n, graf lintasan P_n, dan graf lengkap K_n. Beberapa hasil operasi $comb$ dari tiga graf terhubung tersebut sebagai berikut graf hasil operasi $comb$ antara graf lingkaran C_m dan graf lintasan P_n, graf lintasan P_n dan graf lingkaran C_m, graf lengkap K_m dan graf lintasan P_n, graf lintasan P_n dan graf lengkap K_m, graf lengkap K_n dan graf lengkap K_m, graf lingkaran C_m dan graf lengkap K_n, graf lengkap K_n dan graf lingkaran C_m, graf lintasan P_n dan graf lintasan P_m dan graf lingkaran C_n dan graf lingkaran C_m.

4.1.1 Dimensi Partisi Graf Lingkaran Comb Graf Lintasan

Graf hasil operasi *comb* antara graf lingkaran C_m dengan graf lintasan P_n dihasilkan dari duplikat graf lintasan P_n sebanyak m simpul di graf lingkaran C_m meletakkan salah satu simpul ujung graf lintasan P_n pada setiap simpul graf lingkaran C_m. Dapat dikatakan bahwa graf $C_m \rhd_\delta P_n$ merupakan graf yang terdiri dari m kali graf Lintasan P_n. Sehingga memiliki himpunan simpul $V(C_m \rhd_\delta P_n) = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \rhd_\delta P_n) = \{y_{j,1}y_{j+1,1} | 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{1,1}y_{m,1}\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1\}$. Graf $C_m \rhd_\delta P_n$ memiliki nm buah simpul dan mn buah sisi. Graf $C_m \rhd_\delta P_n$ ditunjukkan pada Gambar 4.1 (a).

Pada subbab ini, akan dibahas dimensi partisi pada graf $C_m \rhd_\delta P_n$ dengan $m, n \in Z^+$. Jika $m = 2$ maka lingkaran C_2 merupakan graf lunar atau graf yang memiliki sisi ganda sehingga C_2 bukan graf sederhana dan jika $n = 1$ maka graf hasil operasi *comb* $C_m \rhd_\delta P_1$ isomorfik dengan lingkaran C_m, sedemikian sehingga order lingkaran C_m dan lintasan P_n masing-masing $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Dalam



Gambar 4.1: (a) Graf Hasil Operasi $C_m \triangleright_\delta P_n$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $C_8 \triangleright_\delta P_4$

menentukan dimensi partisi suatu graf $C_m \triangleright_\delta P_n$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$. Dimensi partisi mensyaratkan partisi pembeda Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.1. *Misalkan C_m adalah graf lingkaran order m dan P_n adalah graf lintasan order n dengan simpul pelekatan dari P_n yang berderajat satu. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, dimensi partisi graf hasil operasi comb $C_m \triangleright_\delta P_n$ adalah $pd(C_m \triangleright_\delta P_n) = 3$.*

Bukti: Misalkan graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ memiliki himpunan simpul $V(C_m \triangleright_\delta P_n) = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \triangleright_\delta P_n) = \{y_{j,1}y_{j+1,1} | 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{1,1}y_{m,1}\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1\}$. Jadi, kita akan menunjukkan bahwa dimensi partisi graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ adalah 3 untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, dikarenakan untuk $m = 3$ dan $n = 2$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, maka dapat diperoleh bentuk umum dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, sehingga dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ adalah 3 dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan.

Batas bawah dari dimensi partisi graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ dapat merujuk pada Teorema 2.3 (i) menyatakan bahwa $\text{pd}(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G isomorfik dengan lintasan P_n. Graf hasil operasi $comb$ $C_m \triangleright_\delta P_n$ tidak isomorfik dengan lintasan P_n, maka dapat dipastikan batas bawah dari dimensi partisi graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ adalah $pd(C_m \triangleright_\delta P_n) \geq 3$. Selanjutnya, untuk menentukan batas atas dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf

$C_m \triangleright_\delta P_n$ yang dapat dilihat pada Gambar 4.1 (b). Perhatikan enam kasus berikut:

Dalam kasus ini, untuk $m \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...\}$ dapat dipisah menjadi tiga kasus yaitu pertama untuk $m \in \{4, 6\}$, kedua untuk $m \in \{8, 12, 16, 20, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ dan ketiga untuk $m \in \{10, 14, 18, 22, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 2(\text{mod } 4)$.

Kasus 1: Untuk $m \in \{4, 6\}$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \triangleright_\delta P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Untuk $m = 4$, batas atas dimensi partisi dari graf $C_4 \triangleright_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_4 \triangleright_\delta P_n$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2,i} | 2 \leq i \leq n\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,i}, y_{4,i} | 2 \leq i \leq n\}$ dan $S_3 = \{y_{j,1} | 3 \leq j \leq 4\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_4 \triangleright_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_4 \triangleright_\delta P_n$ sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0, 1, 1)$ $\quad$ $r(y_{1,i}|\Pi) = (0, i, i)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1)$ $\quad$ $r(y_{2,i}|\Pi) = (0, i-1, i)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{3,1}|\Pi) = (2, 1, 0)$ $\quad$ $r(y_{3,i}|\Pi) = (i+1, 0, i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{4,1}|\Pi) = (1, 1, 0)$ $\quad$ $r(y_{4,i}|\Pi) = (i, 0, i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_4 \triangleright_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_4 \triangleright_\delta P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk $m = 4$.

Untuk $m = 6$, batas atas dimensi partisi dari graf $C_6 \triangleright_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_6 \triangleright_\delta P_n$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2,i} | 2 \leq i \leq n\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,i}, y_{4,i}, y_{6,i} | 2 \leq i \leq n\}$ dan $S_3 = \{y_{j,1}, y_{5,i} | 3 \leq j \leq 6, 2 \leq i \leq n\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_6 \triangleright_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_6 \triangleright_\delta P_n$ sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0, 1, 1)$ $\quad$ $r(y_{1,i}|\Pi) = (0, i, i)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1)$ $\quad$ $r(y_{2,i}|\Pi) = (0, i-1, i)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{3,1}|\Pi) = (2, 1, 0)$ $\quad$ $r(y_{3,i}|\Pi) = (i+1, 0, i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{4,1}|\Pi) = (3, 1, 0)$ $\quad$ $r(y_{4,i}|\Pi) = (i+2, 0, i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{5,1}|\Pi) = (2, 2, 0)$ $\quad$ $r(y_{5,i}|\Pi) = (i+1, i+1, 0)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{6,1}|\Pi) = (1,1,0)$ $\qquad$ $r(y_{6,i}|\Pi) = (i,0,i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_6 \triangleright_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_6 \triangleright_\delta P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk $m = 6$.

Kasus 2: Untuk $m \in \{8, 12, 16, 20, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \triangleright_\delta P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,i}|1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2,i}, y_{m-1,i}|2 \leq i \leq n\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,i}, y_{m,i}|2 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2h+2,i}|1 \leq h \leq \frac{m-6}{2}, 2 \leq i \leq n\}$ dan $S_3 = \{y_{j,1}|3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2h+3,i}|1 \leq h \leq \frac{m-6}{2}, 2 \leq i \leq n\} \cup \{y_{m-2,i}|2 \leq i \leq n\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk $m \equiv 0(\text{mod}4)$ dan $m \geq 8$, sebagai berikut:

$r(y_{2,1}|\Pi) = (1,0,1)$

$r(y_{3,1}|\Pi) = (2,1,0)$

$r(y_{m-1,1}|\Pi) = (1,2,0)$

$r(y_{m,1}|\Pi) = (1,1,0)$

$r(y_{2h,1}|\Pi) = (2h-1,1,0)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$

$r(y_{2h,1}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 1, 0)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$

$r(y_{1,i}|\Pi) = (0,i,i)$; jika $1 \leq i \leq n$

$r(y_{2,i}|\Pi) = (0,i-1,i)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{3,i}|\Pi) = (i+1,0,i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{m-2,i}|\Pi) = (i+1,i+2,0)$; jika $1 \leq i \leq n$

$r(y_{m-1,i}|\Pi) = (0,i+1,i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{m,i}|\Pi) = (i,0,i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{2h,i}|\Pi) = (2h+i-2,0,i-1)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$, $2 \leq i \leq n$

$r(y_{2h,i}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + i - 1, 0, i-1)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$, $2 \leq i \leq n$

$r(y_{2h+1,i}|\Pi) = (2h+i-1, i+1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor$, $1 \leq i \leq n$

$r(y_{2h+1,i}|\Pi) = (-2h+4\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + i + 2, i+1, 0)$; jika $\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + 1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor - 1$, $1 \leq i \leq n$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk $m \equiv 0(\text{mod}4)$ dan $m \geq 8$.

Kasus 3: Untuk $m \in \{10, 14, 18, 22, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \rhd_\delta P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2,i}, y_{m-1,i} | 2 \leq i \leq n\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,i}, y_{m,i} | 2 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2h+2,i} | 1 \leq h \leq \frac{m-6}{2}, 2 \leq i \leq n\}$ dan $S_3 = \{y_{j,1} | 3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2h+3,i} | 1 \leq h \leq \frac{m-6}{2}, 2 \leq i \leq n\} \cup \{y_{m-2,i} | 2 \leq i \leq n\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \rhd_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$ untuk $m \equiv 2(\text{mod}4)$ dan $m \geq 10$, sebagai berikut:

$r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1)$
$r(y_{3,1}|\Pi) = (2, 1, 0)$
$r(y_{m-1,1}|\Pi) = (1, 2, 0)$
$r(y_{m,1}|\Pi) = (1, 1, 0)$
$r(y_{2h,1}|\Pi) = (2h - 1, 1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$
$r(y_{2h,1}|\Pi) = (-2h + 4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 2, 1, 0)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$
$r(y_{1,i}|\Pi) = (0, i, i)$; jika $1 \leq i \leq n$
$r(y_{2,i}|\Pi) = (0, i - 1, i)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{3,i}|\Pi) = (i + 1, 0, i - 1)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{m-2,i}|\Pi) = (i + 1, i + 2, 0)$; jika $1 \leq i \leq n$
$r(y_{m-1,i}|\Pi) = (0, i + 1, i - 1)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{m,i}|\Pi) = (i, 0, i - 1)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{2h,i}|\Pi) = (2h + i - 2, 0, i - 1)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$, $2 \leq i \leq n$
$r(y_{2h,i}|\Pi) = (-2h + 4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + i + 1, 0, i - 1)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$, $2 \leq i \leq n$
$r(y_{2h+1,i}|\Pi) = (2h + i - 1, i + 1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor$, $1 \leq i \leq n$
$r(y_{2h+1,i}|\Pi) = (-2h + 4\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + i, i + 1, 0)$; jika $\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + 1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor - 1$, $1 \leq i \leq n$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk

$m \equiv 2(\text{mod}4)$ dan $m \geq 10$.

Dalam kasus ini, untuk $m \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...\}$ dapat dipisah menjadi tiga kasus yaitu pertama untuk $m \in \{3, 5\}$, kedua untuk $m \in \{7, 11, 15, 19, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 3(\text{mod } 4)$ dan ketiga untuk $m \in \{9, 13, 17, 21, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 1(\text{mod } 4)$.

Kasus 4: Untuk $m \in \{3, 5\}$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \rhd_\delta P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Untuk $m = 3$, batas atas dimensi partisi dari graf $C_3 \rhd_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_3 \rhd_\delta P_n$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2,i} | 2 \leq i \leq n\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,i} | 2 \leq i \leq n\}$ dan $S_3 = \{y_{3,1}\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_3 \rhd_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_3 \rhd_\delta P_n$ sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0, 1, 1)$ $\quad$ $r(y_{1,i}|\Pi) = (0, i, i)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1)$ $\quad$ $r(y_{2,i}|\Pi) = (0, i-1, i)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{3,1}|\Pi) = (1, 1, 0)$ $\quad$ $r(y_{3,i}|\Pi) = (i, 0, i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_3 \rhd_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_4 \rhd_\delta P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk $m = 3$.

Untuk $m = 5$, batas atas dimensi partisi dari graf $C_5 \rhd_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_5 \rhd_\delta P_n$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2,i} | 2 \leq i \leq n\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,i}, y_{5,i} | 2 \leq i \leq n\}$ dan $S_3 = \{y_{j,1}, y_{4,i} | 3 \leq j \leq 5, 2 \leq i \leq n\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_6 \rhd_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_5 \rhd_\delta P_n$ sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0, 1, 1)$ $\quad$ $r(y_{1,i}|\Pi) = (0, i, i)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1)$ $\quad$ $r(y_{2,i}|\Pi) = (0, i-1, i)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{3,1}|\Pi) = (2, 1, 0)$ $\quad$ $r(y_{3,i}|\Pi) = (i+1, 0, i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{4,1}|\Pi) = (2, 2, 0)$ $\quad$ $r(y_{4,i}|\Pi) = (i+1, i+1, 0)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{5,1}|\Pi) = (1, 1, 0)$ $\quad$ $r(y_{5,i}|\Pi) = (i, 0, i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_5 \triangleright_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_5 \triangleright_\delta P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk $m = 5$.

Kasus 5: Untuk $m \in \{7, 11, 15, 19, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 3(\text{mod } 4)$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \triangleright_\delta P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2,i} | 2 \leq i \leq n\}$, $S_2 = \{y_{2,1}\} \cup \{y_{3,i}, y_{m,i} | 2 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2h+2,i} | 1 \leq h \leq \frac{m-5}{2}, 2 \leq i \leq n\}$ dan $S_3 = \{y_{j,1} | 3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2h+3,i} | 1 \leq h \leq \frac{m-5}{2}, 2 \leq i \leq n\} \cup \{y_{m-1,i} | 2 \leq i \leq n\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk $m \equiv 3(\text{mod} 4)$ dan $m \geq 7$, sebagai berikut:

$r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1)$
$r(y_{3,1}|\Pi) = (2, 1, 0)$
$r(y_{m,1}|\Pi) = (1, 1, 0)$
$r(y_{2h}|\Pi) = (2h - 1, 1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$
$r(y_{2h}|\Pi) = (-2h + 4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 1, 0)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$
$r(y_{1,i}|\Pi) = (0, i, i)$; jika $1 \leq i \leq n$
$r(y_{2,i}|\Pi) = (0, i - 1, i)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{3,i}|\Pi) = (i + 1, 0, i - 1)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{m-1,i}|\Pi) = (i + 1, i + 1, 0)$; jika $1 \leq i \leq n$
$r(y_{m,i}|\Pi) = (i, 0, i - 1)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{2h,i}|\Pi) = (2h + i - 2, 0, i - 1)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$, $2 \leq i \leq n$
$r(y_{2h,i}|\Pi) = (-2h + 4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + i - 1, 0, i - 1)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$, $2 \leq i \leq n$
$r(y_{2h+1,i}|\Pi) = (2h + i - 1, i + 1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor$, $1 \leq i \leq n$
$r(y_{2h+1,i}|\Pi) = (-2h + 4\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + i + 2, i + 1, 0)$; jika $\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + 1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor$, $1 \leq i \leq n$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf tersebut. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk $m \equiv 3(\text{mod}4)$ dan $m \geq 7$.

Kasus 6: Untuk $m \in \{9, 13, 17, 21, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 1(\text{mod } 4)$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \rhd_\delta P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2,i} | 2 \leq i \leq n\}$, $S_2 = \{y_{2,1}\} \cup \{y_{3,i}, y_{m,i} | 2 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2h+2,i} | 1 \leq h \leq \frac{m-5}{2}, 2 \leq i \leq n\}$ dan $S_3 = \{y_{j,1} | 3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2h+3,i} | 1 \leq h \leq \frac{m-5}{2}, 2 \leq i \leq n\} \cup \{y_{m-1,i} | 2 \leq i \leq n\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \rhd_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$ untuk $m \equiv 1(\text{mod}4)$ dan $m \geq 9$, sebagai berikut:

$r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1)$

$r(y_{3,1}|\Pi) = (2, 1, 0)$

$r(y_{m,1}|\Pi) = (1, 1, 0)$

$r(y_{2h}|\Pi) = (2h-1, 1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$

$r(y_{2h}|\Pi) = (-2h + 4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 2, 1, 0)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$

$r(y_{1,i}|\Pi) = (0, i, i)$; jika $1 \leq i \leq n$

$r(y_{2,i}|\Pi) = (0, i-1, i)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{3,i}|\Pi) = (i+1, 0, i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{m-1,i}|\Pi) = (i+1, i+1, 0)$; jika $1 \leq i \leq n$

$r(y_{m,i}|\Pi) = (i, 0, i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{2h,i}|\Pi) = (2h+i-2, 0, i-1)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$, $2 \leq i \leq n$

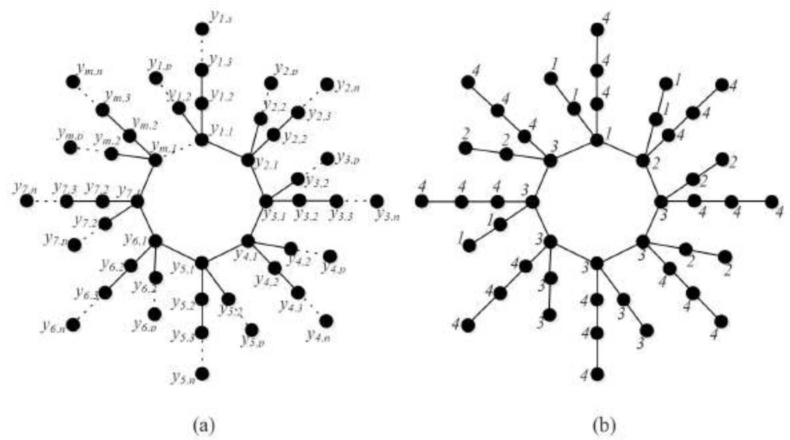
$r(y_{2h,i}|\Pi) = (-2h + 4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + i + 1, 0, i-1)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$, $2 \leq i \leq n$

$r(y_{2h+1,i}|\Pi) = (2h+i-1, i+1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor$, $1 \leq i \leq n$

$r(y_{2h+1,i}|\Pi) = (-2h + 4\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + i, i+1, 0)$; jika $\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + 1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor$, $1 \leq i \leq n$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf tersebut. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk $m \equiv 1(\text{mod}4)$ dan $m \geq 9$.

Berdasarkan uraian kasus 1 sampai kasus 6, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan 3. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$ adalah $pd(C_m \rhd_\delta P_n) \leq 3$. Dengan demikian,



Gambar 4.2: (a) Graf Hasil Operasi $C_m \triangleright_\Delta P_n$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $C_8 \triangleright_\Delta P_6$

diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $3 \leq pd(C_m \triangleright_\delta P_n) \leq 3$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ adalah $pd(C_m \triangleright_\delta P_n) = 3$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. □

Sekarang, akan dibahas dimensi partisi pada graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $n, m \in Z^+$ dan salah satu simpul $v \in P_n$ yang dilekatkan ke setiap simpul $u \in C_m$ dan simpul v mempunyai derajat sama dengan dua. Jika $m = 2$ maka graf C_2 merupakan graf yang memiliki sisi ganda sehingga C_2 bukan graf sederhana dan jika $n = 2$, graf P_2 merupakan graf lintasan dan setiap simpulnya tidak berderajat dua, sedemikian sehingga order lingkaran C_m dan lintasan P_n masing-masing $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ Graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ ditunjukkan pada Gambar 4.2 (a). Dalam menentukan dimensi partisi suatu graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$. Dimensi partisi mensyaratkan partisi pembeda Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.2. *Misalkan C_m adalah graf lingkaran order m dan P_n adalah graf lintasan order n dengan simpul pelekatan dari P_n yang berderajat dua. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, dimensi partisi graf hasil operasi comb $C_m \triangleright_\Delta P_n$ adalah*

$$pd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = \begin{cases} 3, & \textit{jika } m \in \{3, 4\} \\ 4, & \textit{jika } m \geq 5 \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ memiliki himpunan simpul $V(C_m \triangleright_\Delta P_n) = \{y_{j,k} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{j,l} | 1 \leq j \leq m, 2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \triangleright_\Delta P_n) = \{y_{j,1}y_{j+1,1} | 1 \leq$

$j \leq m-1\} \cup \{y_{1,1}y_{m,1}\} \cup \{y_{j,k}y_{j,k+1}|1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p-1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{j,l}y_{j,l+1}|1 \leq j \leq m, 2 \leq l \leq n-p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{j,1}y_{j,2}\}$. Akan ditunjukkan bahwa dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk m
$in\{3,4\},\ n \geq 3$ adalah 3 dan dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $m \geq 5,\ n \geq 3$ adalah 4 dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan.

Untuk menentukan batas atas dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ yang dapat dilihat pada Gambar 4.2 (b). Perhatikan dua kasus berikut:

Dalam kasus ini untuk $m \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...\}$ dapat dipisah menjadi tiga kasus yaitu pertama untuk $m \in \{4, 6\}$, kedua untuk $m \in \{8, 12, 16, 20, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ dan ketiga untuk $m \in \{10, 14, 18, 22, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 2(\text{mod } 4)$.

Kasus 1: Untuk $m \in \{4, 6\}$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \triangleright_\Delta P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Untuk $m = 4$, Batas bawah dari dimensi partisi graf $C_4 \triangleright_\Delta P_n$ dapat merujuk pada Teorema 2.3 (i) menyatakan bahwa $\text{pd}(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G isomorfik dengan lintasan P_n. Graf hasil operasi *comb* $C_4 \triangleright_\Delta P_n$ tidak isomorfik dengan lintasan P_n, maka dapat dipastikan batas bawah dari dimensi partisi graf $C_4 \triangleright_\Delta P_n$ adalah $pd(C_4 \triangleright_\Delta P_n) \geq 3$. Selanjutnya, batas atas dimensi partisi dari graf $C_4 \triangleright_\Delta P_n$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_4 \triangleright_\Delta P_n$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,k}|1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,k}, y_{4,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,l}|2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_3 = \{y_{j,1}|3 \leq j \leq 4\} \cup \{y_{1,l}y_{j,l}|3 \leq j \leq 4, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_4 \triangleright_\Delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Penulisan representasi setiap simpul dapat dinyatakan dalam bentuk lebih umum yang bergantung pada nilai n dan m. Dalam kasus ini, dapat dinyatakan dalam beberapa parameter yaitu nilai k, l yang bergantung pada nilai p dan jua nilai p bergantung pada nilai n. Sebagai ilustrasi, jika diambil nilai $n = 6$ maka nilai $2 \leq p \leq \lceil \frac{6}{2} \rceil = 3$. Nilai k bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq k \leq 2$ atau $k \in \{2\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq k \leq 3$ atau $k \in \{2, 3\}$. Nilai l bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq l \leq 6 - 2 + 1 = 5$ atau $l \in \{2, 3, 4, 5\}$ dan untuk $p = 3$ maka

$2 \leq l \leq 6-3+1 = 4$ atau $l \in \{2,3,4\}$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_4 \triangleright_{\Delta} P_n$ sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0,1,1)$ $\qquad$ $r(y_{3,1}|\Pi) = (2,1,0)$

$r(y_{2,1}|\Pi) = (1,0,1)$ $\qquad$ $r(y_{4,1}|\Pi) = (1,1,0)$

$r(y_{1,k}|\Pi) = (0,k,k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{2,k}|\Pi) = (0,k-1,k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{3,k}|\Pi) = (k+1,0,k-1)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{4,k}|\Pi) = (k,0,k-1)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ $r(y_{1,l}|\Pi) = (l-1,l,0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{2,l}|\Pi) = (l,0,l)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{3,l}|\Pi) = (l+1,l,0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{4,l}|\Pi) = (l,l,0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_4 \triangleright_{\Delta} P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_4 \triangleright_{\Delta} P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk $m = 4$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $C_4 \triangleright_{\Delta} P_n$ adalah $pd(C_4 \triangleright_{\Delta} P_n) \leq 3$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_4 \triangleright_{\Delta} P_n$ adalah $3 \leq pd(C_4 \triangleright_{\Delta} P_n) \leq 3$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_4 \triangleright_{\Delta} P_n$ adalah $pd(C_4 \triangleright_{\Delta} P_n) = 3$ untuk $m = 4$.

Untuk $m = 6$, batas atas dimensi partisi dari graf $C_6 \triangleright_{\Delta} P_n$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_6 \triangleright_{\Delta} P_n$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,k}|1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,k}, y_{4,k}, y_{6,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_3 = \{y_{j,1}, y_{5,k}|3 \leq j \leq 6, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ dan $S_4 = \{y_{j,l}|1 \leq j \leq 6, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_6 \triangleright_{\Delta} P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Penulisan representasi setiap simpul dapat dinyatakan dalam bentuk lebih umum yang bergantung pada nilai n dan m. Dalam kasus ini, dapat dinyatakan dalam beberapa parameter yaitu nilai k, l yang bergantung pada nilai p dan juga nilai p bergantung pada nilai n. Sebagai ilustrasi, jika diambil nilai $n = 6$ maka nilai $2 \leq p \leq \lceil \frac{6}{2} \rceil = 3$. Nilai k bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq k \leq 2$ atau $k \in \{2\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq k \leq 3$ atau $k \in \{2,3\}$. Nilai l bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq l \leq 6-2+1 = 5$ atau $l \in \{2,3,4,5\}$ dan untuk $p = 3$ maka

$2 \leq l \leq 6-3+1 = 4$ atau $l \in \{2,3,4\}$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_6 \rhd_\Delta P_n$ sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0,1,1,1)$ $r(y_{4,1}|\Pi) = (3,1,0,1)$
$r(y_{2,1}|\Pi) = (1,0,1,1)$ $r(y_{5,1}|\Pi) = (2,2,0,1)$
$r(y_{3,1}|\Pi) = (2,1,0,1)$ $r(y_{6,1}|\Pi) = (1,1,0,1)$
$r(y_{1,k}|\Pi) = (0,k,k,k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2,k}|\Pi) = (0,k-1,k,k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{3,k}|\Pi) = (k+1,0,k-1,k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{4,k}|\Pi) = (k+2,0,k-1,k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{5,k}|\Pi) = (k+1,k+1,0,k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{6,k}|\Pi) = (k,0,k-1,k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{1,l}|\Pi) = (l-1,l,l,0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2,l}|\Pi) = (l,l-1,l,0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{3,l}|\Pi) = (l+1,l,l-1,0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{4,l}|\Pi) = (l+2,l,l-1,0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{5,l}|\Pi) = (l+1,l+1,l-1,0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{6,l}|\Pi) = (l,l,l-1,0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_6 \rhd_\Delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_6 \rhd_\Delta P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 4$ untuk $m = 6$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $C_6 \rhd_\Delta P_n$ adalah $pd(C_6 \rhd_\Delta P_n) \leq 4$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_6 \rhd_\Delta P_n$, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari graf $C_6 \rhd_\Delta P_n$ memiliki kardinalitas kurang dari 4. Misalkan suatu partisi pembeda dari $C_6 \rhd_\Delta P_n$ dengan $|\Pi| = 3$ maka akan terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m = 6$ terdiri dari $6n$ buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{y_{1,k}|1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,k}, y_{4,k}, y_{6,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_3 = \{y_{j,1}, y_{5,k}|3 \leq j \leq 6, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{j,l}|1 \leq j \leq 6, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ maka dapat kita pilih sebarang simpul $y_{5,k}, y_{5,l} \in S_3; k = l, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ dan simpul $y_{5,k}, y_{5,l}$ memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1, S_2 misalkan $d(y_{5,k}, S_1) = d(y_{5,l}, S_1) = l+1$, $d(y_{5,k}, S_2) = d(y_{5,l}, S_2) = l+1$ untuk $l = k, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{5,k}|\Pi) = r(y_{5,l}|\Pi) = (l+1, l+1, 0)$ untuk $l = k, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ dikarenakan simpul $y_{5,k}$ dan $y_{5,l}$ terdapat dalam kelas partisi yang sama. Berdasarkan Lemma 2.2, simpul $y_{5,k}$ dan $y_{5,l}$ harus berada pada kelas partisi berbeda. Jadi, Π dengan $|\Pi| = 3$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan 3 bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_6 \rhd_\Delta P_n$ adalah $pd(C_6 \rhd_\Delta P_n) \geq 4$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_6 \rhd_\Delta P_n$ adalah $4 \leq pd(C_6 \rhd_\Delta P_n) \leq 4$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_6 \rhd_\Delta P_n$ adalah $pd(C_6 \rhd_\Delta P_n) = 4$ untuk $m = 6$.

Kasus 2: Untuk $m \in \{8, 12, 16, 20, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \rhd_\Delta P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sedemikian sehingga:

$S_1 = \{y_{1,k}|1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{m-1,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_2 = \{y_{2,1}, y_{m,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{3,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2h+2,k}|1 \leq h \leq \frac{m-6}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_3 = \{y_{j,1}|3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2h+3,k}|1 \leq h \leq \frac{m-6}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{m-2,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_4 = \{y_{j,l}|1 \leq j \leq m, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Penulisan representasi setiap simpul dapat dinyatakan dalam bentuk lebih umum yang bergantung pada nilai n dan m. Dalam kasus ini, dapat dinyatakan dalam beberapa parameter yaitu nilai k, l yang bergantung pada nilai p dan juga nilai p bergantung pada nilai n. Sebagai ilustrasi, jika diambil nilai $n = 6$ maka nilai $2 \leq p \leq \lceil \frac{6}{2} \rceil = 3$. Nilai k bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq k \leq 2$ atau $k \in \{2\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq k \leq 3$ atau $k \in \{2, 3\}$. Nilai l bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq l \leq 6 - 2 + 1 = 5$ atau $l \in \{2, 3, 4, 5\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq l \leq 6 - 3 + 1 = 4$ atau $l \in \{2, 3, 4\}$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ untuk $m \equiv 0(\text{mod}4)$ dan $m \geq 8$, sebagai berikut:

$r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1, 1)$

$r(y_{3,1}|\Pi) = (2, 1, 0, 1)$
$r(y_{m-1,1}|\Pi) = (1, 2, 0, 1)$
$r(y_{m,1}|\Pi) = (1, 1, 0, 1)$
$r(y_{2h,1}|\Pi) = (2h-1, 1, 0, 1)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$
$r(y_{2h,1}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 1, 0, 1)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$
$r(y_{1,k}|\Pi) = (0, k, k, k)$; jika $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2,k}|\Pi) = (0, k-1, k, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{3,k}|\Pi) = (k+1, 0, k-1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-2,k}|\Pi) = (k+1, k+2, 0, k)$; jika $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-1,k}|\Pi) = (0, k+1, k-1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m,k}|\Pi) = (k, 0, k-1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,k}|\Pi) = (2h+k-2, 0, k-1, k)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,k}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil+k-1, 0, k-1, k)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil+1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil-1$, $2 \leq k \leq p$, $2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,k}|\Pi) = (2h+k-1, k+1, 0, k)$; jika $2 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor$, $1 \leq k \leq p$, $2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,k}|\Pi) = (-2h+4\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor+k+2, k+1, 0, k)$; jika $\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor+1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor-1$, $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
$r(y_{1,l}|\Pi) = (l-1, l, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2,l}|\Pi) = (l, l-1, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{3,l}|\Pi) = (l+1, l, l-1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-2,l}|\Pi) = (l+1, l+2, l-1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-1,k}|\Pi) = (l, l+1, l-1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m,l}|\Pi) = (l, l, l-1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,l}|\Pi) = (2h+l-2, l, l-1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,l}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil+l-1, l, l-1, 0)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil+1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil-1$, $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,l}|\Pi) = (2h+l-1, l+1, l-1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor, 1 \leq l \leq n-p+1$, $2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,l}|\Pi) = (-2h+4\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor+l+2, l+1, l-1, 0)$; jika $\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor+1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor-1, 1 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 4$

untuk $m \equiv 0(\text{mod}4)$ dan $m \geq 8$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ adalah $pd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \leq 4$.

Kasus 3: Untuk $m \in \{10, 14, 18, 22, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \triangleright_\Delta P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sedemikian sehingga:

$S_1 = \{y_{1,k} | 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{m-1,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_2 = \{y_{2,1}, y_{m,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{3,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2h+2,k} | 1 \leq h \leq \frac{m-6}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_3 = \{y_{j,1} | 3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2h+3,k} | 1 \leq h \leq \frac{m-6}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{m-2,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_4 = \{y_{j,l} | 1 \leq j \leq m, \, 2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Penulisan representasi setiap simpul dapat dinyatakan dalam bentuk lebih umum yang bergantung pada nilai n dan m. Dalam kasus ini, dapat dinyatakan dalam beberapa parameter yaitu nilai k, l yang bergantung pada nilai p dan juga nilai p bergantung pada nilai n. Sebagai ilustrasi, jika diambil nilai $n = 6$ maka nilai $2 \leq p \leq \lceil \frac{6}{2} \rceil = 3$. Nilai k bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq k \leq 2$ atau $k \in \{2\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq k \leq 3$ atau $k \in \{2, 3\}$. Nilai l bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq l \leq 6 - 2 + 1 = 5$ atau $l \in \{2, 3, 4, 5\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq l \leq 6 - 3 + 1 = 4$ atau $l \in \{2, 3, 4\}$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $m \equiv 2(\text{mod}4)$ dan $m \geq 10$, sebagai berikut:

$r(y_{2,1} | \Pi) = (1, 0, 1, 1)$

$r(y_{3,1} | \Pi) = (2, 1, 0, 1)$

$r(y_{m-1,1} | \Pi) = (1, 2, 0, 1)$

$r(y_{m,1} | \Pi) = (1, 1, 0, 1)$

$r(y_{2h,1} | \Pi) = (2h - 1, 1, 0, 1)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$

$r(y_{2h,1} | \Pi) = (-2h + 4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 2, 1, 0, 1)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$

$r(y_{1,k} | \Pi) = (0, k, k, k)$; jika $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{2,k} | \Pi) = (0, k - 1, k, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{3,k}|\Pi) = (k+1, 0, k-1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-2,k}|\Pi) = (k+1, k+2, 0, k)$; jika $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-1,k}|\Pi) = (0, k+1, k-1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m,k}|\Pi) = (k, 0, k-1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,k}|\Pi) = (2h+k-2, 0, k-1, k)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,k}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + k+1, 0, k-1)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1,$ $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,k}|\Pi) = (2h+k-1, k+1, 0, k)$; jika $2 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor, 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,k}|\Pi) = (-2h+4\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + k, k+1, 0, k)$; jika $\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + 1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor - 1,$ $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
$r(y_{1,l}|\Pi) = (l-1, l, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2,l}|\Pi) = (l, l-1, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{3,l}|\Pi) = (l+1, l, l-1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-2,l}|\Pi) = (l+1, l+2, l-1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-1,k}|\Pi) = (l, l+1, l-1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m,l}|\Pi) = (l, l, l-1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,l}|\Pi) = (2h+l-2, l, l-1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,l}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + l+1, l, l-1, 0)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1,$ $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,l}|\Pi) = (2h+l-1, l+1, l-1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor, 1 \leq l \leq n-p+1,$ $2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,l}|\Pi) = (-2h+4\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + l, l+1, l-1, 0)$; jika $\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + 1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor - 1,$ $1 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 4$ untuk $m \equiv 0(\text{mod}4)$ dan $m \geq 10$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ adalah $pd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \leq 4$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$. Misalkan suatu partisi pembeda dari $C_m \triangleright_\Delta P_n$ dengan $|\Pi| = 3$ maka akan terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk m genap dan $m \geq 8$ terdiri dari satu buah *cycle* dan nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{\{y_{1,k}|1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil\} \cup \{y_{2,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil\} \cup \{y_{m-1,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{m,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil\} \cup \{y_{3,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil\} \cup \{y_{2h+2,k}|1 \leq h \leq \frac{m-6}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil\}$, $S_3 = \{y_{j,1}|3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2h+3,k}|1 \leq h \leq \frac{m-6}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil\} \cup \{y_{m-2,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil\} \cup \{y_{j,l}|1 \leq j \leq m, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil\}$ maka dapat kita pilih sebarang simpul $y_{j,k}, y_{j,l} \in S_3, k = l$ untuk $5 \leq j \leq m-2$ dengan j gasal dan simpul $y_{j,p}, y_{j,l}$ memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1, S_2 misalkan $d(y_{5,k}, S_1) = d(y_{5,l}, S_1) = l+3$, $d(y_{5,k}, S_2) = d(y_{5,l}, S_2) = l+1$ untuk $l = k, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{5,k}|\Pi) = r(y_{5,l}|\Pi) = (l+3, l+1, 0)$ untuk $l = k, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil$ dikarenakan simpul $y_{5,k}$ dan $y_{5,l}$ terdapat dalam kelas partisi yang sama. Berdasarkan Lemma 2.2, simpul $y_{5,k}$ dan $y_{5,l}$ harus berada pada kelas partisi berbeda. Jadi, Π dengan $|\Pi| = 3$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan 3 bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \rhd_\triangle P_n$ adalah $pd(C_m \rhd_\triangle P_n) \geq 4$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \rhd_\triangle P_n$ adalah $4 \leq pd(C_m \rhd_\triangle P_n) \leq 4$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_m \rhd_\triangle P_n$ adalah $pd(C_m \rhd_\triangle P_n) = 4$ untuk m genap dan $n \geq 2$.

Dalam kasus ini untuk $m \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...\}$ dapat dipisah menjadi tiga kasus yaitu pertama untuk $m \in \{3, 5\}$, kedua untuk $m \in \{7, 11, 15, 19, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 3 (\text{mod } 4)$ dan ketiga untuk $m \in \{9, 13, 17, 21, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 1 (\text{mod } 4)$.

Kasus 4: Untuk $m \in \{3, 5\}$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \rhd_\triangle P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Untuk $m = 3$, Batas bawah dari dimensi partisi graf $C_3 \rhd_\triangle P_n$ dapat merujuk pada Teorema 2.3 (i) menyatakan bahwa $\text{pd}(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G isomorfik dengan lintasan P_n. Graf hasil operasi *comb* $C_3 \rhd_\triangle P_n$ tidak isomorfik dengan lintasan P_n, maka dapat dipastikan batas bawah dari dimensi partisi graf $C_3 \rhd_\triangle P_n$ adalah $pd(C_3 \rhd_\triangle P_n) \geq 3$. Selanjutnya, batas atas dimensi partisi dari graf $C_3 \rhd_\triangle P_n$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_3 \triangleright_\triangle P_n$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,k} | 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, dan $S_3 = \{y_{3,1}, y_{j,l} | 1 \leq j \leq 3, 2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_3 \triangleright_\triangle P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Penulisan representasi setiap simpul dapat dinyatakan dalam bentuk lebih umum yang bergantung pada nilai n dan m. Dalam kasus ini, dapat dinyatakan dalam beberapa parameter yaitu nilai k, l yang bergantung pada nilai p dan juga nilai p bergantung pada nilai n. Sebagai ilustrasi, jika diambil nilai $n = 6$ maka nilai $2 \leq p \leq \lceil \frac{6}{2} \rceil = 3$. Nilai k bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq k \leq 2$ atau $k \in \{2\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq k \leq 3$ atau $k \in \{2, 3\}$. Nilai l bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq l \leq 6 - 2 + 1 = 5$ atau $l \in \{2, 3, 4, 5\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq l \leq 6 - 3 + 1 = 4$ atau $l \in \{2, 3, 4\}$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_3 \triangleright_\triangle P_n$ sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0, 1, 1)$ $\quad r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1)$ $\quad r(y_{3,1}|\Pi) = (1, 1, 0)$

$r(y_{1,k}|\Pi) = (0, k, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{2,k}|\Pi) = (0, k - 1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{3,k}|\Pi) = (k, 0, k - 1)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{1,l}|\Pi) = (l - 1, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{2,l}|\Pi) = (l, l - 1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{3,l}|\Pi) = (l, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_3 \triangleright_\triangle P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_3 \triangleright_\triangle P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk $m = 3$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $C_3 \triangleright_\triangle P_n$ adalah $pd(C_3 \triangleright_\triangle P_n) \leq 3$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_3 \triangleright_\triangle P_n$ adalah $3 \leq pd(C_3 \triangleright_\triangle P_n) \leq 3$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_3 \triangleright_\triangle P_n$ adalah $pd(C_3 \triangleright_\triangle P_n) = 3$ untuk $m = 3$.

Untuk $m = 5$, batas atas dimensi partisi dari graf $C_5 \triangleright_\triangle P_n$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_5 \triangleright_\triangle P_n$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,k} | 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,k}, y_{5,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_3 = \{y_{j,1}, y_{4,k} | 3 \leq j \leq 5, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ dan $S_4 = \{y_{j,l} | 1 \leq j \leq 5, 2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_5 \rhd_\triangle P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Penulisan representasi setiap simpul dapat dinyatakan dalam bentuk lebih umum yang bergantung pada nilai n dan m. Dalam kasus ini, dapat dinyatakan dalam beberapa parameter yaitu nilai k, l yang bergantung pada nilai p dan juga nilai p bergantung pada nilai n. Sebagai ilustrasi, jika diambil nilai $n = 6$ maka nilai $2 \leq p \leq \lceil \frac{6}{2} \rceil = 3$. Nilai k bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq k \leq 2$ atau $k \in \{2\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq k \leq 3$ atau $k \in \{2, 3\}$. Nilai l bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq l \leq 6 - 2 + 1 = 5$ atau $l \in \{2, 3, 4, 5\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq l \leq 6 - 3 + 1 = 4$ atau $l \in \{2, 3, 4\}$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_5 \rhd_\triangle P_n$ sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0, 1, 1, 1)$ $\quad r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1, 1)$ $\quad r(y_{3,1}|\Pi) = (2, 1, 0, 1)$
$r(y_{4,1}|\Pi) = (2, 2, 0, 1)$ $\quad r(y_{5,1}|\Pi) = (1, 1, 0, 1)$
$r(y_{1,k}|\Pi) = (0, k, k, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2,k}|\Pi) = (0, k - 1, k, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{3,k}|\Pi) = (k + 1, 0, k - 1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{4,k}|\Pi) = (k + 1, k + 1, 0, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{5,k}|\Pi) = (k, 0, k - 1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{1,l}|\Pi) = (l - 1, l, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2,l}|\Pi) = (l, l - 1, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{3,l}|\Pi) = (l + 1, l, l - 1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{4,l}|\Pi) = (l + 1, l + 1, l - 1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{5,l}|\Pi) = (l, l, l - 1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_5 \rhd_\triangle P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_5 \rhd_\triangle P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 4$ untuk $m = 5$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $C_5 \rhd_\triangle P_n$ adalah $pd(C_5 \rhd_\triangle P_n) \leq 4$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_5 \rhd_\triangle P_n$, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari graf $C_5 \rhd_\triangle P_n$ memiliki kardinalitas kurang dari 4. Misalkan suatu partisi pembeda dari $C_5 \rhd_\triangle P_n$ dengan $|\Pi| = 3$ maka akan terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m = 5$ terdiri dari satu buah *cycle* dan nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{y_{1,k}|1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,k}|2 \leq k \leq p, 2 \leq$

$p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{3,k}, y_{5,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_3 = \{y_{j,1}, y_{4,k} | 3 \leq j \leq 5, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{j,l} | 1 \leq j \leq 5, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ maka dapat kita pilih sebarang simpul $y_{4,k}, y_{4,l} \in S_3; k = l, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ dan simpul $y_{4,k}, y_{4,l}$ memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1, S_2 misalkan $d(y_{4,k}, S_1) = d(y_{4,l}, S_1) = l+1$, $d(y_{4,k}, S_2) = d(y_{4,l}, S_2) = l+1$ untuk $l = k, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{4,k}|\Pi) = r(y_{4,l}|\Pi) = (l+1, l+1, 0)$ untuk $l = k, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ dikarenakan simpul $y_{4,k}$ dan $y_{4,l}$ terdapat dalam kelas partisi yang sama. Berdasarkan Lemma 2.2, simpul $y_{4,k}$ dan $y_{4,l}$ harus berada pada kelas partisi berbeda. Jadi, Π dengan $|\Pi| = 3$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan 3 bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_5 \triangleright_{\Delta} P_n$ adalah $pd(C_5 \triangleright_{\Delta} P_n) \geq 4$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_5 \triangleright_{\Delta} P_n$ adalah $4 \leq pd(C_5 \triangleright_{\Delta} P_n) \leq 4$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_5 \triangleright_{\Delta} P_n$ adalah $pd(C_5 \triangleright_{\Delta} P_n) = 4$ untuk $m = 5$.

Kasus 5: Untuk $m \in \{7, 11, 15, 19, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 3 (\text{mod } 4)$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \triangleright_{\Delta} P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sedemikian sehingga:

$S_1 = \{y_{1,k} | 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_2 = \{y_{2,1}, y_{m,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{3,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2h+2,k} | 1 \leq h \leq \frac{m-5}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_3 = \{y_{j,1} | 3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2h+3,k} | 1 \leq h \leq \frac{m-5}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{m-1,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_4 = \{y_{j,l} | 1 \leq j \leq m, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \triangleright_{\Delta} P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Penulisan representasi setiap simpul dapat dinyatakan dalam bentuk lebih umum yang bergantung pada nilai n dan m. Dalam kasus ini, dapat dinyatakan dalam beberapa parameter yaitu nilai k, l yang bergantung pada nilai p dan juga nilai p bergantung pada nilai n. Sebagai ilustrasi, jika diambil nilai $n = 6$ maka nilai $2 \leq p \leq \lceil \frac{6}{2} \rceil = 3$. Nilai k bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq k \leq 2$ atau $k \in \{2\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq k \leq 3$ atau $k \in \{2, 3\}$. Nilai l bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq l \leq 6 - 2 + 1 = 5$ atau $l \in \{2, 3, 4, 5\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq l \leq 6 - 3 + 1 = 4$ atau $l \in \{2, 3, 4\}$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $m \equiv 3(\text{mod}4)$ dan $m \geq 7$, sebagai berikut:

$r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1, 1)$
$r(y_{3,1}|\Pi) = (2, 1, 0, 1)$
$r(y_{m,1}|\Pi) = (1, 1, 0, 1)$
$r(y_{2h}|\Pi) = (2h - 1, 1, 0, 1)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$
$r(y_{2h}|\Pi) = (-2h + 4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 1, 0, 1)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$
$r(y_{1,k}|\Pi) = (0, k, k, k)$; jika $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2,k}|\Pi) = (0, k - 1, k, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{3,k}|\Pi) = (k + 1, 0, k - 1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-1,k}|\Pi) = (k + 1, k + 1, 0, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m,k}|\Pi) = (k, 0, k - 1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,k}|\Pi) = (2h+k-2, 0, k-1, k)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,k}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil+k-1, 0, k-1, k)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil+1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil-1$, $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,k}|\Pi) = (2h + k - 1, k + 1, 0, k)$; jika $2 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor, 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,k}|\Pi) = (-2h+4\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor+k+2, k+1, 0, k)$; jika $\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor+1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor$, $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
$r(y_{1,l}|\Pi) = (l - 1, l, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2,l}|\Pi) = (l, l - 1, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{3,l}|\Pi) = (l + 1, l, l - 1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-1,k}|\Pi) = (l + 1, l + 1, l - 1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m,l}|\Pi) = (l, l, l - 1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,l}|\Pi) = (2h + l - 2, l, l - 1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,l}|\Pi) = (-2h + 4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + l - 1, l, l - 1, 0)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$, $2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,l}|\Pi) = (2h + l - 1, l + 1, l - 1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor, 1 \leq l \leq n - p + 1$, $2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,l}|\Pi) = (-2h + 4\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + l + 2, l + 1, l - 1, 0)$; jika $\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor + 1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor - 1, 1 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 4$ untuk $m \equiv 3(\text{mod}4)$ dan $m \geq 7$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ adalah $pd(C_m \rhd_\Delta P_n) \leq 4$.

Kasus 6: Untuk $m \in \{9, 13, 17, 21, ...\}$ dapat ditulis $m \equiv 1(\text{mod } 4)$ dibuktikan secara terpisah dari $m \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...\}$ karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(C_m \rhd_\Delta P_n)$ terhadap partisi pembeda Π. Berikut ini pembuktian selengkapnya:

Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sedemikian sehingga:

$S_1 = \{y_{1,k} | 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_2 = \{y_{2,1}, y_{m,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{3,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2h+2,k} | 1 \leq h \leq \frac{m-5}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_3 = \{y_{j,1} | 3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2h+3,k} | 1 \leq h \leq \frac{m-5}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{m-1,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

$S_4 = \{y_{j,l} | 1 \leq j \leq m, \ 2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$

akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Penulisan representasi setiap simpul dapat dinyatakan dalam bentuk lebih umum yang bergantung pada nilai n dan m. Dalam kasus ini, dapat dinyatakan dalam beberapa parameter yaitu nilai k, l yang bergantung pada nilai p dan juga nilai p bergantung pada nilai n. Sebagai ilustrasi, jika diambil nilai $n = 6$ maka nilai $2 \leq p \leq \lceil \frac{6}{2} \rceil = 3$. Nilai k bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq k \leq 2$ atau $k \in \{2\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq k \leq 3$ atau $k \in \{2, 3\}$. Nilai l bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq l \leq 6 - 2 + 1 = 5$ atau $l \in \{2, 3, 4, 5\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq l \leq 6 - 3 + 1 = 4$ atau $l \in \{2, 3, 4\}$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ untuk $m \equiv 1(\text{mod}4)$ dan $m \geq 9$, sebagai berikut:

$r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 0, 1, 1)$

$r(y_{3,1}|\Pi) = (2, 1, 0, 1)$

$r(y_{m,1}|\Pi) = (1, 1, 0, 1)$

$r(y_{2h}|\Pi) = (2h - 1, 1, 0, 1)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil$

$r(y_{2h}|\Pi) = (-2h + 4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 2, 1, 0, 1)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$

$r(y_{1,k}|\Pi) = (0, k, k, k)$; jika $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{2,k}|\Pi) = (0, k - 1, k, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{3,k}|\Pi) = (k+1, 0, k-1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-1,k}|\Pi) = (k+1, k+1, 0, k)$; jika $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m,k}|\Pi) = (k, 0, k-1, k)$; jika $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,k}|\Pi) = (2h+k-2, 0, k-1, k)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,k}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + k+1, 0, k-1, k)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$, $2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,k}|\Pi) = (2h+k-1, k+1, 0, k)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,k}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + k, k+1, 0, k)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor$, $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
$r(y_{1,l}|\Pi) = (l-1, l, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2,l}|\Pi) = (l, l-1, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{3,l}|\Pi) = (l+1, l, l-1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m-1,k}|\Pi) = (l+1, l+1, l-1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{m,l}|\Pi) = (l, l, l-1, 0)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,l}|\Pi) = (2h+l-2, l, l-1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h,l}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + l+1, l, l-1, 0)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{2} \rceil - 1$, $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,l}|\Pi) = (2h+l-1, l+1, l-1, 0)$; jika $2 \leq h \leq \lceil \frac{m-2}{4} \rceil, 1 \leq l \leq n-p+1$, $2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$
$r(y_{2h+1,l}|\Pi) = (-2h+4\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + l, l+1, l-1, 0)$; jika $\lceil \frac{m-2}{4} \rceil + 1 \leq h \leq \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor$, $1 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \triangleright_\triangle P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_m \triangleright_\triangle P_n$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 4$ untuk $m \equiv 1(\text{mod} 4)$ dan $m \geq 9$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\triangle P_n$ adalah $pd(C_m \triangleright_\triangle P_n) \leq 4$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\triangle P_n$, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari graf $C_m \triangleright_\triangle P_n$ memiliki kardinalitas kurang dari 4. Misalkan suatu partisi pembeda dari $C_m \triangleright_\triangle P_n$ dengan $|\Pi| = 3$ maka akan terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk m gasal dan $m \geq 7$ terdiri dari satu buah *cycle* dan nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{y_{1,k} | 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_2 = \{y_{2,1}, y_{m,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{3,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{2h+2,k} | 1 \leq h \leq \frac{m-5}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_3 = \{y_{j,1} | 3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2h+3,k} | 1 \leq h \leq \frac{m-5}{2}, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{m-1,k} | 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{j,l} | 1 \leq j \leq m, 2 \leq l \leq n - p + 1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ maka dapat kita pilih sebarang simpul $y_{j,k}, y_{j,l} \in S_3, k = l$ untuk $5 \leq j \leq m - 1$ dengan j gasal dan simpul $y_{j,k}, y_{j,l}$ memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1, S_2 misalkan $d(y_{5,k}, S_1) = d(y_{5,l}, S_1) = l + 3$, $d(y_{5,k}, S_2) = d(y_{5,l}, S_2) = l + 1$ untuk $l = k, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{5,k} | \Pi) = r(y_{5,l} | \Pi) = (l + 3, l + 1, 0)$ untuk $l = k, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ dikarenakan simpul $y_{5,k}$ dan $y_{5,l}$ terdapat dalam kelas partisi yang sama. Berdasarkan Lemma 2.2, simpul $y_{5,k}$ dan $y_{5,l}$ harus berada pada kelas partisi berbeda. Jadi, Π dengan $|\Pi| = 3$ bukan merupakan partisi pembeda.

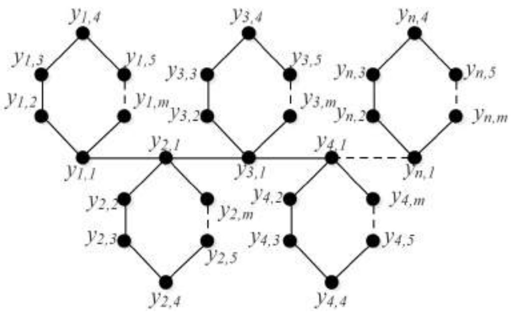
Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan 3 bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ adalah $pd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \geq 4$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ adalah $4 \leq pd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \leq 4$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ adalah $pd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = 4$ untuk m gasal dan $n \geq 7$.

Dari kedua kasus (1) sampai (6), didapatkan dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $m \in \{3, 4\},\ n \geq 3$ adalah 3 dan dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $m \geq 5,\ n \geq 3$ adalah 4. $\square$

4.1.2 Dimensi Partisi Graf Lintasan Comb Graf Lingkaran

Graf hasil operasi *comb* antara graf lintasan P_n dengan graf lingkaran C_m dihasilkan dari menduplikat graf lingkaran C_m sebanyak n simpul di graf lingtasan P_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf lingkaran C_m pada setiap simpul graf lintasan P_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $P_n \triangleright C_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali graf Lingkaran C_m. Graf $P_n \triangleright C_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright C_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright C_m) = \{y_{i,1} y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_{i,j} y_{i,j+1} | 1 \leq j \leq m - 1, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,m} y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$. Graf $P_n \triangleright C_m$ memiliki nm buah simpul dan $mn + n - 1$ buah sisi. Graf $P_n \triangleright C_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.3.

Pada subbab ini, akan dibahas dimensi partisi pada graf $P_n \triangleright C_m$ dengan



Gambar 4.3: Graf Hasil Operasi $P_n \triangleright C_m$

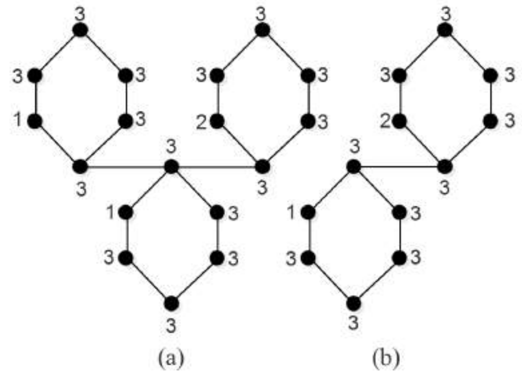
$m, n \in Z^+$. Jika $m = 2$ maka lingkaran C_2 merupakan graf lunar atau graf yang memiliki sisi ganda sehingga C_2 bukan graf sederhana dan jika $n = 1$ maka graf hasil operasi *comb* $P_1 \triangleright C_m$ isomorfik dengan lingkaran C_m, sedemikian sehingga order lingkaran C_m dan lintasan P_n masing-masing $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Dalam menentukan dimensi partisi suatu graf $P_n \triangleright C_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$. Dimensi partisi mensyaratkan partisi pembeda Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.3. *Misalkan P_n adalah graf lintasan order n dan C_m adalah graf lingkaran order m. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, dimensi partisi graf hasil operasi comb $P_n \triangleright C_m$ adalah sebagai berikut:*

$$pd(P_n \triangleright C_m) = \begin{cases} 3, & \textit{jika } m \textit{ genap dan } n \in \{2,3\} \\ & m \textit{ gasal dan } n = 2 \\ 4, & \textit{jika } m \textit{ genap dan } n \geq 4 \\ & m \textit{ gasal dan } n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $P_n \triangleright C_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright C_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright C_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq j \leq m-1, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,m}y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$. Jadi, kita akan menunjukkan bahwa dimensi partisi graf $C_m \triangleright P_n$ adalah 3 untuk m genap dan $n \in \{2, 3\}$ atau m gasal dan $n = 2$ dan dimensi partisi graf $C_m \triangleright P_n$ adalah 4 untuk m genap dan $n \geq 4$ atau m gasal dan $n \geq 3$. Untuk menunjukkan dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai m dibagi menjadi dua kasus yaitu kasus pertama untuk m genap, sedangkan kasus kedua untuk m gasal.

Kasus 1: Untuk m genap dan $n \in \{2, 3\}$.



Gambar 4.4: (a) Partisi Pembeda $P_3 \triangleright C_6$ (b) Partisi Pembeda $P_2 \triangleright C_6$

Dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ dengan mn buah simpul adalah 3 untuk m genap dan $n \in \{2, 3\}$, dikarenakan untuk $m = 4$ dan $n \in \{2, 3\}$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan $n \in \{2, 3\}$, sehingga dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ adalah 3 dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan.

Batas bawah dari dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ dapat merujuk pada Teorema 2.3 (i) menyatakan bahwa $\text{pd}(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G isomorfik dengan lintasan P_n. Graf hasil operasi *comb* $P_n \triangleright C_m$ tidak isomorfik dengan lintasan P_n, maka dapat dipastikan batas bawah dari dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ adalah $pd(P_n \triangleright C_m) \geq 3$. Selanjutnya, Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(P_n \triangleright C_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $P_n \triangleright C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.4. Misalkan Π adalah suatu partisi pembeda dari $V(P_n \triangleright C_m)$ dengan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga: $S_1 = \{y_{1,2}\}$, $S_2 = \{y_{2,2}\}$ dan $S_3 = \{y_{1,1}, y_{2,1}, y_{1,j}, y_{2,j} | 3 \leq j \leq m\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $P_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan $n = 2$, sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (1, 2, 0)$
$r(y_{2,1}|\Pi) = (2, 1, 0)$
$r(y_{1,2}|\Pi) = (0, 3, 1)$
$r(y_{1,j}|\Pi) = (j - 2, j + 1, 0)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$
$r(y_{1,j}|\Pi) = (-j + m + 2, -j + m + 3, 0)$; jika $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$
$r(y_{2,2}|\Pi) = (3, 0, 1)$
$r(y_{2,j}|\Pi) = (j + 1, j - 2, 0)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$
$r(y_{2,j}|\Pi) = (-j + m + 3, -j + m + 2, 0)$; jika $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$.

Representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan $n = 3$, sebagai berikut:
$r(y_{1,1}|\Pi) = (1, 3, 0)$
$r(y_{2,1}|\Pi) = (1, 2, 0)$
$r(y_{3,1}|\Pi) = (2, 1, 0)$
$r(y_{1,2}|\Pi) = (0, 4, 1)$
$r(y_{1,j}|\Pi) = (j - 2, j + 2, 0)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$
$r(y_{1,j}|\Pi) = (-j + m + 2, -j + m + 4, 0)$; jika $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$
$r(y_{2,2}\Pi) = (0, 3, 1)$
$r(y_{2,j}|\Pi) = (j - 2, j + 1, 0)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$
$r(y_{2,j}|\Pi) = (-j+m+2, -j+m+3, 0)$; jika $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$. $r(y_{3,2}|\Pi) = (3, 0, 1)$
$r(y_{3,j}|\Pi) = (j + 1, j - 2, 0)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$
$r(y_{3,j}|\Pi) = (-j + m + 3, -j + m + 2, 0)$; jika $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi, $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright C_m$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk m genap dan $n \in \{2, 3\}$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$ sehingga dapat ditulis $pd(P_n \triangleright C_m) \leq 3$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $3 \leq pd(P_n \triangleright C_m) \leq 3$. Jadi dimensi partisi $pd(P_n \triangleright C_m) = 3$ untuk m genap dan $n \in \{2, 3\}$.

Kasus 2: Untuk m gasal dan $n = 2$.
Dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ dengan mn buah simpul adalah 3 untuk m gasal dan $n = 2$, dikarenakan untuk $m = 3$ dan $n = 2$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan $n = 2$, sehingga dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ adalah 3 dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan.

Batas bawah dari dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ dapat merujuk pada Teorema 2.3 (i) menyatakan bahwa $\mathrm{pd}(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G isomorfik dengan lintasan P_n. Graf hasil operasi *comb* $P_n \triangleright C_m$ tidak isomorfik dengan lintasan P_n, maka dapat dipastikan batas bawah dari dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ adalah $pd(P_n \triangleright C_m) \geq 3$. Selanjutnya, Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(P_n \triangleright C_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $P_n \triangleright C_m$. Misalkan Π adalah suatu partisi pembeda dari $V(P_n \triangleright C_m)$

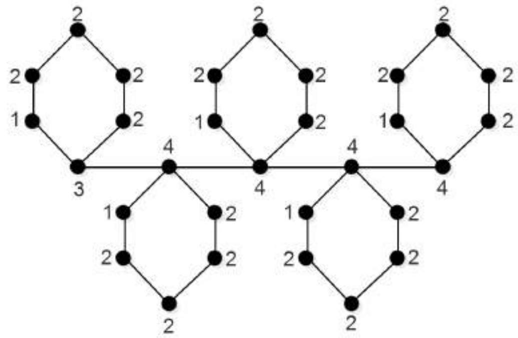
dengan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga: $S_1 = \{y_{1,2}\}$, $S_2 = \{y_{2,2}\}$ dan $S_3 = \{y_{1,1}, y_{2,1}, y_{1,j}, y_{2,j} | 3 \leq j \leq m\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $P_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan $n = 2$, sebagai berikut:
$r(y_{1,1}|\Pi) = (1, 2, 0)$
$r(y_{2,1}|\Pi) = (2, 1, 0)$
$r(y_{1,2}|\Pi) = (0, 3, 1)$
$r(y_{1,j}|\Pi) = (j - 2, j + 1, 0)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$
$r(y_{1,\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}|\Pi) = (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2, 0)$
$r(y_{1,j}|\Pi) = (-j + 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 3, -j + 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 4, 0)$; jika $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 3 \leq j \leq m$
$r(y_{2,2}|\Pi) = (3, 0, 1)$
$r(y_{2,j}|\Pi) = (j + 1, j - 2, 0)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$
$r(y_{2,\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}|\Pi) = (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, 0)$
$r(y_{2,j}|\Pi) = (-j + 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 4, -j + 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 3, 0)$; jika $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 3 \leq j \leq m$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi, $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright C_m$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 3$ untuk m gasal dan $n = 2$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$ sehingga dapat ditulis $pd(P_n \triangleright C_m) \leq 3$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $3 \leq pd(P_n \triangleright C_m) \leq 3$. Jadi dimensi partisi $pd(P_n \triangleright C_m) = 3$ untuk m gasal dan $n = 2$.

Kasus 3: Untuk m genap dan $n \geq 4$.
Dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ dengan mn buah simpul adalah 3 untuk m genap dan $n \geq 4$, dikarenakan untuk $m = 4$ dan $n = 4$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan $n \geq 4$, sehingga dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ adalah 4. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(P_n \triangleright C_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $P_n \triangleright C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.5.

Misalkan Π adalah suatu partisi pembeda dari $V(P_n \triangleright C_m)$ dengan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sedemikian sehingga: $S_1 = \{y_{i,2} | 1 \leq i \leq n\}$, $S_2 = \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq n,\ 3 \leq j \leq m\}$, $S_3 = \{y_{1,1}\}$ dan $S_4 = \{y_{i,1} | 2 \leq i \leq n\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $P_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π.



Gambar 4.5: Partisi Pembeda $P_5 \triangleright C_6$ Untuk m genap dan $n \geq 4$

Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan $n \geq 4$, sebagai berikut:
$r(y_{1,1}|\Pi) = (1, 1, 0, 1)$
$r(y_{i,1}|\Pi) = (1, 1, i-1, 0)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{1,2}\Pi) = (0, 1, 1, 2)$
$r(y_{1,j}|\Pi) = (j-2, 0, j-1, j)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$
$r(y_{1,\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+2}|\Pi) = (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor, 0, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$
$r(y_{1,j}|\Pi) = (-j+2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+2, 0, -j+2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1, -j+2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+2)$; jika $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+3 \leq j \leq m$
$r(y_{i,2}|\Pi) = (0, 1, i, 1)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{i,j}|\Pi) = (j-2, 0, j+i-2, j-1)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $2 \leq i \leq n$
$r(y_{i,\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+2}|\Pi) = (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor, 0, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i - 2, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1)$; jika $2 \leq i \leq n$
$r(y_{i,j}|\Pi) = (-j+2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+2, 0, -j+2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+i, -j+2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1)$; jika $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+3 \leq j \leq m$, $2 \leq i \leq n$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi, $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright C_m$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 4$ untuk m genap dan $n \geq 4$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$ sehingga dapat ditulis $pd(P_n \triangleright C_m) \leq 4$.

Selanjutnya, Untuk menentukan batas bawah dari dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$ didapatkan dengan Lemma 2.2. Sekarang mempertimbangkan bahwa partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright C_m$ mempunyai kardinalitas kurang dari 4. Misalkan suatu partisi pembeda dari $P_n \triangleright C_m$ dengan $|\Pi| = 3$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk m genap dan $n \geq 4$ terdiri dari n buah $cycle$ dan nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $P_n \triangleright C_m$ dengan

$m = 4$ dan $n = 4$, dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{y_{1,2}, y_{2,2}, y_{3,2}\}$, $S_2 = \{y_{4,2}\}$ dan $S_3 = V(P_n \triangleright C_m) - (S_1 \cup S_2)$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{1,1}|\Pi) = r(y_{3,3}|\Pi) = (1, 4, 0)$. Jadi, dapat diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π adalah 3 bukan merupakan partisi pembeda. Oleh sebab itu, batas bawah dari dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ adalah $pd(P_n \triangleright C_m) \geq 4$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dari dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ adalah $4 \leq pd(P_n \triangleright C_m) \leq 4$. Maka dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$ adalah $pd(P_n \triangleright C_m) = 4$ untuk m genap dan $n \geq 4$.

Kasus 4: Untuk m gasal dan $n \geq 3$.

Misalkan Π adalah suatu partisi pembeda dari $V(P_n \triangleright C_m)$ dengan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sedemikian sehingga: $S_1 = \{y_{i,2}|1 \leq i \leq n\}$, $S_2 = \{y_{i,j}|1 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq m\}$, $S_3 = \{y_{1,1}\}$ dan $S_4 = \{y_{i,1}|2 \leq i \leq n\}$, akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $P_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Berikut ini merupakan hasil observasi pada graf $P_n \triangleright C_m$. Simpul-simpul x_i dengan $1 \leq i \leq n$ dan $y_{i,j}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m-1$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan $n \geq 3$, sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (1, 1, 0, 1)$

$r(y_{i,1}|\Pi) = (1, 1, i-1, 0)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{1,2}|\Pi) = (0, 1, 1, 2)$

$r(y_{1,j}|\Pi) = (j-2, 0, j-1, j)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$

$r(y_{1,\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+2}\Pi) = (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor, 0, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)$

$r(y_{1,j}|\Pi) = (-j+2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+3, 0, -j+2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+2, -j+2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+3)$; jika $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+3 \leq j \leq m$

$r(y_{i,2}\Pi) = (0, 1, i, 1)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (j-2, 0, j+i-2, j-1)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $2 \leq i \leq n$

$r(y_{i,\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+2}\Pi) = (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor, 0, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i - 1, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (-j + 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 3, 0, -j + 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i + 1, -j + 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2)$; jika $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 3 \leq j \leq m$, $2 \leq i \leq n$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright C_m$. Jadi, kardinalitas dari partisi pembeda Π adalah $|\Pi| = 4$ untuk m gasal dan $n \geq 3$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan sebagai batas atas dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$ sehingga dapat ditulis $pd(P_n \triangleright C_m) \leq 4$.

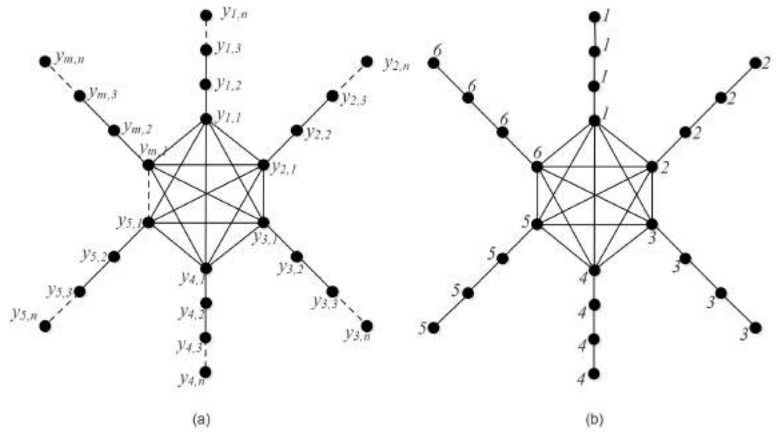
Selanjutnya, Untuk menentukan batas bawah dari dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$ didapatkan dengan Lemma 2.2. Sekarang mempertimbangkan bahwa partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright C_m$ mempunyai kardinalitas kurang dari 4. Misalkan suatu partisi pembeda dari $P_n \triangleright C_m$ dengan $|\Pi| = 3$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk m gasal dan $n \geq 3$ terdiri dari n buah $cycle$ dan nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $P_n \triangleright C_m$ dengan $m = 5$ dan $n = 3$, dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{y_{1,2}, y_{2,2}\}$, $S_2 = \{y_{3,2}\}$ dan $S_3 = V(P_n \triangleright C_m) - (S_1 \cup S_2)$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{1,5}|\Pi) = r(y_{2,4}|\Pi) = (2, 4, 0)$. Jadi, dapat diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π adalah 3 bukan merupakan partisi pembeda. Oleh sebab itu, batas bawah dari dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ adalah $pd(P_n \triangleright C_m) \geq 4$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dari dimensi partisi graf $P_n \triangleright C_m$ adalah $4 \leq pd(P_n \triangleright C_m) \leq 4$. Maka dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$ adalah $pd(P_n \triangleright C_m) = 4$ untuk m gasal dan $n \geq 3$. □

4.1.3 Dimensi Partisi Graf Lengkap Comb Graf Lintasan

Graf hasil operasi *comb* antara graf lengkap K_m dengan graf lintasan P_n dihasilkan dari menduplikat graf lintasan P_n sebanyak m simpul di graf lengkap K_m dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf lintasan P_n pada setiap simpul graf lengkap K_m, maka dapat dikatakan bahwa graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ merupakan graf yang terdiri dari m kali Lintasan P_n.sehingga memiliki himpunan simpul $V(K_m \triangleright_\delta P_n) = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_m \triangleright_\delta P_n) = \{y_{j,1}y_{j+k,1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq m - j\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n - 1\}$. Graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ memiliki nm buah simpul dan $\frac{m^2-m}{2} + m(n-1)$ buah sisi. Graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ ditunjukkan pada Gambar 4.6 (a).

Pada subbab ini, akan dibahas dimensi partisi pada graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ dengan $m, n \in Z^+$. Jika $m = 2$, graf K_2 isomorfik dengan graf lintasan P_2 dan jika $n = 1$ maka graf hasil operasi *comb* $K_m \triangleright_\delta P_1$ isomorfik dengan graf lengkap K_m sedemikian sehingga order dari graf lengkap K_m dan graf lintasan P_n masing-masing adalah $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Dalam menentukan dimensi partisi suatu graf $K_m \triangleright_\delta P_n$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$. Dimensi partisi mensyaratkan semua himpunan simpul elemen Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.



Gambar 4.6: (a) Graf Hasil Operasi $K_m \triangleright_\delta P_n$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $K_6 \triangleright_\delta P_4$

Teorema 4.4. *Misalkan K_m adalah graf lengkap order m dan P_n adalah graf lintasan order n dengan simpul pelekatan dari P_n yang berderajat satu. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, dimensi partisi graf hasil operasi comb $K_m \triangleright_\delta P_n$ adalah $pd(K_m \triangleright_\delta P_n) = m$.*

Bukti: Misalkan graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ memiliki himpunan simpul $V(K_m \triangleright_\delta P_n) = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_m \triangleright_\delta P_n) = \{y_{j,1}y_{j+k,1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq m-j\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1\}$. Dimensi partisi graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ dengan mn buah simpul adalah m untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, dikarenakan untuk $m = 4$ dan $n = 2$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, sehingga dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ adalah m dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan.

Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(K_m \triangleright_\delta P_n)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.6 (b). Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ sedemikian sehingga $S_j = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, sebagai berikut:

$$r(y_{j,i}|\Pi) = (\underbrace{i, ..., i}_{j-1}, 0, \underbrace{i, ..., i}_{m-j}); jika 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n$$

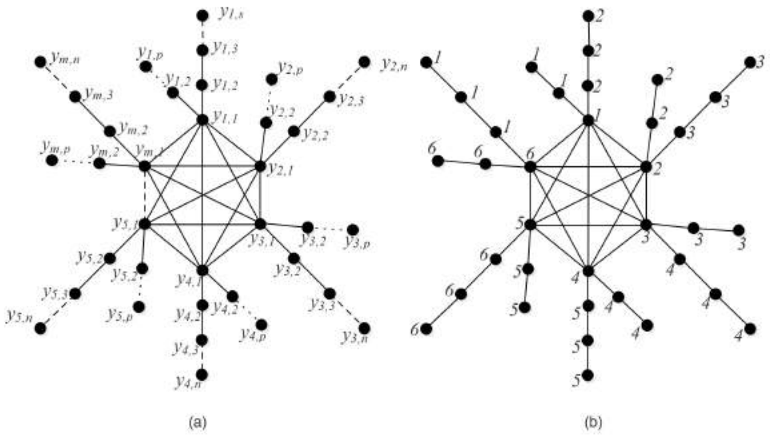
Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $K_m \rhd_\delta P_n$. Sehingga $|\Pi| = m$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π adalah m. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $K_m \rhd_\delta P_n$ adalah $pd(K_m \rhd_\delta P_n) \leq m$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \rhd_\delta C_m$ didapatkan dengan Lemma 2.2. Sekarang mempertimbangkan bahwa partisi pembeda dari graf $K_m \rhd_\delta P_n$ memiliki kardinalitas kurang dari m. Misalkan suatu partisi pembeda dari $K_m \rhd_\delta P_n$ dengan $|\Pi| = m - 1$ maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$ terdiri dari nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $K_m \rhd_\delta P_n$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m-1}\}$ dengan $S_j = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m-1, 1 \leq i \leq n\}$ dan $S_{m-1} = \{y_{m,i} | 1 \leq i \leq n\}$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{m,i}|\Pi) = r(y_{m-1,i}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, 0)$. Jadi Π dengan $|\Pi| = m - 1$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan $m - 1$ bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_m \rhd_\delta P_n$ adalah $pd(K_m \rhd_\delta P_n) \geq m$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $m \leq pd(K_m \rhd_\delta P_n) \leq m$. Jadi dimensi partisi dari graf $K_m \rhd_\delta P_n$ adalah $pd(K_m \rhd_\delta P_n) = m$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. $\square$

Sekarang, akan membahas dimensi partisi pada graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ dengan $m, n \in Z^+$ dan salah satu simpul $v \in P_n$ yang dilekatkan ke setiap simpul $u \in K_m$ dan simpul v mempunyai derajat sama dengan dua. Jika $m = 2$, graf K_2 isomorfik dengan graf lintasan P_2 dan jika $n = 2$ graf P_2 merupakan graf lintasan dan setiap simpulnya tidak berderajat dua sedemikian sehingga order dari graf lengkap K_m dan graf lintasan P_n masing-masing adalah $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ ditunjukkan pada Gambar 4.7 (a). Dalam menentukan dimensi partisi suatu graf $K_m \rhd_\Delta P_n$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_m \rhd_\Delta P_n$. Dimensi partisi mensyaratkan partisi pembeda Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.5. *Misalkan K_m adalah graf lengkap order m dan P_n adalah graf*



Gambar 4.7: (a) Graf Hasil Operasi $K_m \triangleright_\triangle P_n$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $K_6 \triangleright_\triangle P_6$

lintasan order n dengan simpul pelekatan dari P_n yang berderajat dua. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, dimensi partisi dari sebuah graf hasil operasi comb $K_m \triangleright_\triangle P_n$ adalah $pd(K_m \triangleright_\triangle P_n) = m$.

Bukti:Misalkan graf $K_m \triangleright_\triangle P_n$ memiliki himpunan simpul $V(K_m \triangleright_\triangle P_n) = \{y_{j,k} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{j,l} | 1 \leq j \leq m, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ dan himpunan sisi $E(K_m \triangleright_\triangle P_n) = \{y_{j,1}y_{j+r,1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq r \leq m-j\} \cup \{y_{j,k}y_{j,k+1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p-1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{j,l}y_{j,l+1} | 1 \leq j \leq m, 2 \leq l \leq n-p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{j,1}y_{j,2} | 1 \leq j \leq m\}$. Dimensi partisi graf $K_m \triangleright_\triangle P_n$ dengan mn buah simpul adalah m untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, dikarenakan untuk $m = 4$ dan $n = 3$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $K_m \triangleright_\triangle P_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, sehingga dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $K_m \triangleright_\triangle P_n$ adalah m dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan.

Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(K_m \triangleright_\triangle P_n)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $K_m \triangleright_\triangle P_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.7 (b). Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ sedemikian sehingga $S_j = \{y_{j,k} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_{j+1} = \{y_{j,l} | 1 \leq j \leq m-1, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ dan $S_1 = \{y_{m,l} | 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $K_m \triangleright_\triangle P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Penulisan representasi setiap simpul dapat dinyatakan dalam bentuk lebih umum yang bergantung pada nilai n dan m. Dalam kasus ini, dapat dinyatakan dalam beberapa parameter yaitu nilai k, l yang bergantung pada nilai p dan jua nilai p bergantung pada nilai n. Sebagai ilustrasi, jika diambil nilai $n = 6$ maka nilai $2 \leq p \leq \lceil \frac{6}{2} \rceil = 3$. Nilai k bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq k \leq 2$ atau $k \in \{2\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq k \leq 3$ atau $k \in \{2, 3\}$. Nilai l bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq l \leq 6-2+1 = 5$ atau $l \in \{2, 3, 4, 5\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq l \leq 6-3+1 = 4$ atau $l \in \{2, 3, 4\}$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, sebagai berikut:

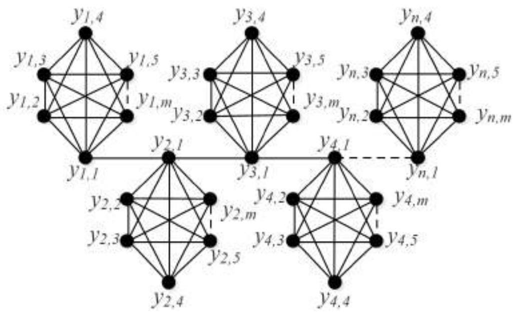
$r(y_{j,k}|\Pi) = (\underbrace{k, ..., k}_{j-1}, 0, \underbrace{k, ..., k}_{m-j})$; jika $1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{j,l}|\Pi) = (\underbrace{l, ..., l}_{j-1}, l-1, 0, \underbrace{l, ..., l}_{m-j-1})$; jika $1 \leq j \leq m,\ 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$r(y_{m,l}|\Pi) = (0, \underbrace{l, ..., l}_{m-2}, l-1)$; jika $2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$. Sehingga $|\Pi| = m$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π adalah m. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ adalah $pd(K_m \triangleright_\Delta P_n) \leq m$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright_\Delta C_m$ dapat mempertimbangkan bahwa partisi pembeda dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ memiliki kardinalitas kurang dari m. Misalkan suatu partisi pembeda dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ adalah $m - 1$ maka akan terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi koordinat yang sama. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ terdiri dari nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m-1}\}$ dengan $S_j = \{y_{j,k}|1 \leq j \leq m-1, 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_{j+1} = \{y_{j,l}|1 \leq j \leq m-2, 2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, $S_{m-1} = \{y_{m-1,l}|2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\} \cup \{y_{m,k}|1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ dan $S_1 = \{y_{m,l}|2 \leq l \leq n-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, maka dapat kita pilih sebarang simpul $y_{m-1,1}, y_{m,1} \in S_{m-1}$ dan simpul $y_{m-1,1}, y_{m,1}$ memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi $S_1, S_2, ..., S_{m-2}$ misalkan $d(y_{m,1}, S_1) = d(y_{m-1,1}, S_1) = 1, d(y_{m,1}, S_2) = d(y_{m-1,1}, S_2) = 1, ..., d(y_{m,1}, S_{m-2}) = d(y_{m-1,1}, S_{m-2}) = 1$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{m,1}|\Pi) = r(y_{m-1,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, 0)$ dikarenakan simpul $y_{m,1}$ dan $y_{m-1,1}$ terdapat dalam kelas partisi yang sama. Berdasarkan Lemma 2.2, simpul $y_{m,1}$ dan



Gambar 4.8: Graf Hasil Operasi $P_n \triangleright K_m$

$y_{m-1,1}$ harus berada pada kelas partisi berbeda. Jadi, Π dengan $|\Pi| = m - 1$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan $m - 1$ bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ adalah $pd(K_m \triangleright_\Delta P_n) \geq m$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $m \leq pd(K_m \triangleright_\Delta P_n) \leq m$. Jadi dimensi partisi dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ adalah $pd(K_m \triangleright_\Delta P_n) = m$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. $\square$

4.1.4 Dimensi Partisi Graf Lintasan Comb Graf Lengkap

Graf hasil operasi *comb* antara graf lintasan P_n dengan graf lengkap K_m dihasilkan dari menduplikat graf lengkap K_m sebanyak n simpul di graf lintasan P_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf lengkap K_m pada setiap simpul graf lintasan P_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $P_n \triangleright K_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali Lengkap K_m. Graf $P_n \triangleright K_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright K_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright K_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+k} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m-j\}$. Graf $P_n \triangleright K_m$ memiliki nm buah simpul dan $n(\frac{m^2-m}{2}) + (n-1)$ buah sisi. Graf $P_n \triangleright K_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.8.

Pada subbab ini, akan dibahas dimensi partisi pada graf $P_n \triangleright K_m$ dengan $m, n \in Z^+$. Jika $m = 2$, graf K_2 isomorfik dengan graf lintasan P_2 dan jika $n = 1$ maka graf hasil operasi *comb* $P_1 \triangleright K_m$ isomorfik dengan graf lengkap K_m sedemikian sehingga order dari graf lengkap K_m dan graf lintasan P_n masing-masing adalah $m \geq 3$ dan $n \geq 2$.. Dalam menentukan dimensi partisi suatu graf $P_n \triangleright K_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$. Dimensi partisi mensyaratkan semua himpunan simpul elemen Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.6. *Misalkan P_n adalah graf lintasan order n dan K_m adalah graf lengkap order m. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, dimensi partisi graf hasil operasi comb $P_n \triangleright K_m$ adalah*

$$pd(P_n \triangleright K_m) = \begin{cases} m, & \textit{jika } n \leq m \\ m+1, & \textit{jika } n > m \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $P_n \triangleright K_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright K_m) = \{y_{i,j}|1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright K_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1}|1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+k}|1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m-j\}$. Dimensi partisi graf $P_n \triangleright K_m$ dengan mn buah simpul adalah m jika $n \leq m$ dan $m+1$ jika $n > m$, dikarenakan untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ membentuk suatu pola sehingga dapat diperoleh bentuk umum dari graf $P_n \triangleright K_m$, maka dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $P_n \triangleright K_m$ adalah m dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan.

Kasus 1: Untuk $n = m$

Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(P_n \triangleright K_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $P_n \triangleright K_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.9. Untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n = m$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ sedemikian sehingga:

$S_{j-1} = \{y_{i,j}|i \neq j-1, 1 \leq i \leq n-2, 2 \leq j \leq m\}$

$S_j = \{y_{n-l,j+1}|2 \leq j \leq m-1, 0 \leq l \leq 1\}$

$S_m = \{y_{i,i+1}|1 \leq i \leq n-2\}$

$S_{m-1} = \{y_{i,1}|2 \leq i \leq n\}$

$S_m = \{y_{n-1,2}\}$

$S_1 = \{y_{1,1}, y_{n,2}\}$

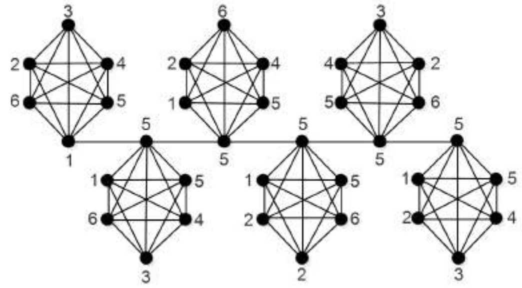
akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $P_n \triangleright K_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright K_m$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $m = n$, sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-1})$; jika $1 \leq j \leq m$

$r(y_{1,2}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-1}, 0)$; jika $1 \leq j \leq m$

$r(y_{1,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j+1})$; jika $3 \leq j \leq m$

$r(y_{i,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i-2}, 0, 1)$; jika $2 \leq i \leq n-2$



Gambar 4.9: Partisi Pembeda Graf $P_6 \triangleright K_6$

$r(y_{n-1,1}|\Pi) = (2, \underbrace{1, ..., 1}_{m-3}, 0, 1)$

$r(y_{n,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, 0, 2)$

$r(y_{n-1,j}|\Pi) = (3, \underbrace{1, ..., 1}_{j-3}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j+1})$; jika $3 \leq j \leq m$

$r(y_{n-1,2}|\Pi) = (3, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, 0)$

$r(y_{n,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j}, 3)$; jika $2 \leq j \leq m$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{i-j}}_{i-1}, 3, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i})$; jika $2 \leq i \leq n-2, 2 \leq j \leq i$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 3, \underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{j-i-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i-1}}_{m-i})$; jika $2 \leq i \leq n-2, i+2 \leq j \leq m$

$r(y_{i,i+1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 3, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i-1}, 0)$; jika $2 \leq i \leq n-2$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $P_n \triangleright K_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright K_m$. Sehingga $|\Pi| = m$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan m. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$ yaitu $pd(P_n \triangleright K_m) \leq m$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$ didapatkan dengan Lemma 2.2. Sekarang mempertimbangkan bahwa partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright K_m$ memiliki kardinalitas kurang dari m. Misalkan suatu partisi pembeda dari $P_n \triangleright K_m$ dengan $|\Pi| = m - 1$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $m = n$ terdiri dari nm buah simpul. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf

$P_n \triangleright K_m$ dengan $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $m = n$ memiliki himpunan kelas partisi yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m-1}\}$. Perhatikan pada Gambar 4.8 untuk sebuah subgraf berupa graf lengkap yang melekat pada simpul $y_{1,1}$ dapat ditentukan beberapa kasus pengelompokan kelas partisinya sebagai berikut:

a) Ambil $S_1 = \{y_{1,1}\}$, $S_j = \{y_{1,j} | 2 \leq j \leq m-2\}$, dan $S_{m-1} = \{y_{1,m-1}, y_{1,m}\}$. Dari kelas-kelas partisi tersebut, terdapat dua simpul yang berada dalam kelas partisi yang sama yaitu $y_{1,m-1}, y_{1,m} \in S_{m-1}$ dan simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m}$ tidak berada pada simpul-simpul backbone atau simpul pelekatan dari graf lengkap. Simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m}$ memiliki jarak ke simpul-simpul dari kelas partisi yang lain yaitu $d(y_{1,m-1}, u) = d(y_{1,m}, u) = 1$ dimana $u \in S \setminus \{y_{1,m-1}, y_{1,m}\}$. Oleh karena itu, terdapat sedikitnya dua simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m} \in S_{m-1}$ yang memiliki representasi yang sama sebagaimana $r(y_{1,m-1}|\Pi) = r(y_{1,m}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, 0)$ berakibat dua simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m}$ harus berada dalam partisi yang berbeda. Maka Π dengan $|\Pi| = m-1$ bukan merupakan partisi pembeda.

b) Misalkan $S_1 = \{y_{1,1},\}$ dan $S_{j-1} = \{y_{1,j} | 2 \leq j \leq m\}$. Dari kelas-kelas partisi tersebut, terdapat dua simpul yang berada dalam kelas partisi yang sama yaitu $y_{1,1}, y_{1,2} \in S_1$ dan simpul $y_{1,2}$ tidak berada pada simpul-simpul backbone atau simpul pelekatan dari graf lengkap. Simpul $y_{1,1}, y_{1,2}$ yang memiliki jarak ke simpul-simpul dari kelas partisi yang lain yaitu $d(y_{1,1}, u) = d(y_{1,2}, u) = 1$ dimana $u \in S \setminus \{y_{1,1}, y_{1,2}\}$. Oleh karena itu, terdapat sedikitnya dua simpul $y_{1,1}, y_{1,2} \in S_1$ yang memiliki representasi yang sama sebagaimana $r(y_{1,1}|\Pi) = r(y_{1,2}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2})$ berakibat dua simpul $y_{1,1}, y_{1,2}$ harus berada dalam partisi yang berbeda. Maka Π dengan $|\Pi| = m-1$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π adalah $m-1$ bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$ yaitu $pd(P_n \triangleright K_m) \geq m$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $m \leq pd(P_n \triangleright K_m) \leq m$. Jadi dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$ adalah $pd(P_n \triangleright K_m) = m$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $m = n$.

Kasus 2: Untuk $n < m$

Untuk $n = m-1$, menentukan batas atas dimensi partisi $pd(P_n \triangleright K_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $P_n \triangleright K_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.9. Untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n = m - 1$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ sedemikian sehingga:

$S_{j-1} = \{y_{i,j}|i \neq j-1, 1 \leq i \leq m-2, 2 \leq j \leq m\}$

$S_j = \{y_{m-1,j+1}|2 \leq j \leq m-1\}$

$S_m = \{y_{i,i+1}|1 \leq i \leq m-2\}$

$S_{m-1} = \{y_{i,1}|2 \leq i \leq m-1\}$

$S_m = \{y_{m-1,2}\}$

$S_1 = \{y_{1,1}\}$

akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $P_n \triangleright K_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright K_m$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n = m - 1$, sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-1})$; jika $1 \leq j \leq m$

$r(y_{1,2}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-1}, 0)$; jika $1 \leq j \leq m$

$r(y_{1,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j+1})$; jika $3 \leq j \leq m$

$r(y_{i,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i-2}, 0, 1)$; jika $2 \leq i \leq m-2$

$r(y_{m-1,1}|\Pi) = (2, \underbrace{1, ..., 1}_{m-3}, 0, 1)$

$r(y_{m-1,j}|\Pi) = (3, \underbrace{1, ..., 1}_{j-3}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j+1})$; jika $3 \leq j \leq m$

$r(y_{m-1,2}|\Pi) = (3, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, 0)$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{i-j}}_{i-1}, 3, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i})$; jika $2 \leq i \leq m-2$, $2 \leq j \leq i$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 3, \underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{j-i-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i-1}}_{m-i})$; jika $2 \leq i \leq m-2$, $i+2 \leq j \leq m$

$r(y_{i,i+1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 3, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i-1}, 0)$; jika $2 \leq i \leq m-2$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $P_n \triangleright K_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright K_m$. Sehingga $|\Pi| = m$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan m. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$ yaitu $pd(P_n \triangleright K_m) \leq m$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright$

C_m didapatkan dengan Lemma 2.2. Sekarang mempertimbangkan bahwa partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright K_m$ memiliki kardinalitas kurang dari m. Misalkan suatu partisi pembeda dari $P_n \triangleright K_m$ dengan $|\Pi| = m - 1$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n = m - 1$ terdiri dari nm buah simpul. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $P_n \triangleright K_m$ dengan $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n = m - 1$ memiliki himpunan kelas partisi yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m-1}\}$. Perhatikan pada Gambar 4.8 untuk sebuah subgraf berupa graf lengkap yang melekat pada simpul $y_{1,1}$ dapat ditentukan beberapa kasus pengelompokan kelas partisinya sebagai berikut:

a) Ambil $S_1 = \{y_{1,1}\}$, $S_j = \{y_{1,j}|2 \leq j \leq m-2\}$, dan $S_{m-1} = \{y_{1,m-1}, y_{1,m}\}$. Dari kelas-kelas partisi tersebut, terdapat dua simpul yang berada dalam kelas partisi yang sama yaitu $y_{1,m-1}, y_{1,m} \in S_{m-1}$ dan simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m}$ tidak berada pada simpul-simpul backbone atau simpul pelekatan dari graf lengkap. Simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m}$ memiliki jarak ke simpul-simpul dari kelas partisi yang lain yaitu $d(y_{1,m-1}, u) = d(y_{1,m}, u) = 1$ dimana $u \in S \setminus \{y_{1,m-1}, y_{1,m}\}$. Oleh karena itu, terdapat sedikitnya dua simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m} \in S_{m-1}$ yang memiliki representasi yang sama sebagaimana $r(y_{1,m-1}|\Pi) = r(y_{1,m}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, 0)$ berakibat dua simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m}$ harus berada dalam partisi yang berbeda. Maka Π dengan $|\Pi| = m - 1$ bukan merupakan partisi pembeda.

b) Misalkan $S_1 = \{y_{1,1},\}$ dan $S_{j-1} = \{y_{1,j}|2 \leq j \leq m\}$. Dari kelas-kelas partisi tersebut, terdapat dua simpul yang berada dalam kelas partisi yang sama yaitu $y_{1,1}, y_{1,2} \in S_1$ dan simpul $y_{1,2}$ tidak berada pada simpul-simpul backbone atau simpul pelekatan dari graf lengkap dan simpul $y_{1,2}$ tidak berada pada simpul-simpul backbone atau simpul pelekatan dari graf lengkap. Simpul $y_{1,1}, y_{1,2}$ yang memiliki jarak ke simpul-simpul dari kelas partisi yang lain yaitu $d(y_{1,1}, u) = d(y_{1,2}, u) = 1$ dimana $u \in S \setminus \{y_{1,1}, y_{1,2}\}$. Oleh karena itu, terdapat sedikitnya dua simpul $y_{1,1}, y_{1,2} \in S_1$ yang memiliki representasi yang sama sebagaimana $r(y_{1,1}|\Pi) = r(y_{1,2}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2})$ berakibat dua simpul $y_{1,1}, y_{1,2}$ harus berada dalam partisi yang berbeda. Maka Π dengan $|\Pi| = m - 1$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π adalah $m - 1$ bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$ yaitu $pd(P_n \triangleright K_m) \geq m$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $m \leq pd(P_n \rhd K_m) \leq m$. Jadi dimensi partisi dari graf $P_n \rhd K_m$ adalah $pd(P_n \rhd K_m) = m$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n = m - 1$.

Untuk $n = m - l$ dimana $2 \leq l \leq m - 2$, menentukan batas atas dimensi partisi $pd(P_n \rhd K_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $P_n \rhd K_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.9. Untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n = m - l$, $2 \leq l \leq m - 2$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ sedemikian sehingga:

$S_{j-1} = \{y_{i,j} | i \neq j - 1, 1 \leq i \leq m - l, 2 \leq l \leq m - 2, 2 \leq j \leq m\}$

$S_m = \{y_{i,i+1} | 1 \leq i \leq m - l, 2 \leq l \leq m - 2\}$

$S_{m-1} = \{y_{i,1} | 2 \leq i \leq m - l, 2 \leq l \leq m - 2\}$

$S_1 = \{y_{1,1}\}$

akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $P_n \rhd K_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \rhd K_m$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n = m - l$, $2 \leq l \leq m - 2$, sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-1})$; jika $1 \leq j \leq m$

$r(y_{1,2}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-1}, 0)$; jika $1 \leq j \leq m$

$r(y_{1,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j+1})$; jika $3 \leq j \leq m$

$r(y_{i,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i-2}, 0, 1)$; jika $2 \leq i \leq m - l, 2 \leq l \leq m - 2$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{i-j}}_{i-1}, 3, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i})$; jika $2 \leq i \leq m - l$, $2 \leq l \leq m - 2$, $2 \leq j \leq i$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 3, \underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{j-i-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i-1}}_{m-i})$; jika $2 \leq i \leq m - l$, $2 \leq l \leq m - 2$, $i + 2 \leq j \leq m$

$r(y_{i,i+1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 3, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i-1}, 0)$; jika $2 \leq i \leq m - l, 2 \leq l \leq m - 2$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $P_n \rhd K_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $P_n \rhd K_m$. Sehingga $|\Pi| = m$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan m. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$ yaitu $pd(P_n \triangleright K_m) \leq m$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$ didapatkan dengan Lemma 2.2. Sekarang mempertimbangkan bahwa partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright K_m$ memiliki kardinalitas kurang dari m. Misalkan suatu partisi pembeda dari $P_n \triangleright K_m$ dengan $|\Pi| = m-1$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n = m - l$, $2 \leq l \leq m - 2$ terdiri dari nm buah simpul. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $P_n \triangleright K_m$ dengan $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n = m-l$, $2 \leq l \leq m-2$ memiliki himpunan kelas partisi yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m-1}\}$. Perhatikan pada Gambar 4.8 untuk sebuah subgraf berupa graf lengkap yang melekat pada simpul $y_{1,1}$ dapat ditentukan beberapa kasus pengelompokan kelas partisinya sebagai berikut:

a) Ambil $S_1 = \{y_{1,1}\}$, $S_j = \{y_{1,j} | 2 \leq j \leq m-2\}$, dan $S_{m-1} = \{y_{1,m-1}, y_{1,m}\}$. Dari kelas-kelas partisi tersebut, terdapat dua simpul yang berada dalam kelas partisi yang sama yaitu $y_{1,m-1}, y_{1,m} \in S_{m-1}$ dan simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m}$ tidak berada pada simpul-simpul backbone atau simpul pelekatan dari graf lengkap. Simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m}$ memiliki jarak ke simpul-simpul dari kelas partisi yang lain yaitu $d(y_{1,m-1}, u) = d(y_{1,m}, u) = 1$ dimana $u \in S \setminus \{y_{1,m-1}, y_{1,m}\}$. Oleh karena itu, terdapat sedikitnya dua simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m} \in S_{m-1}$ yang memiliki representasi yang sama sebagaimana $r(y_{1,m-1}|\Pi) = r(y_{1,m}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, 0)$ berakibat dua simpul $y_{1,m-1}, y_{1,m}$ harus berada dalam partisi yang berbeda. Maka Π dengan $|\Pi| = m - 1$ bukan merupakan partisi pembeda.

b) Misalkan $S_1 = \{y_{1,1},\}$ dan $S_{j-1} = \{y_{1,j} | 2 \leq j \leq m\}$. Dari kelas-kelas partisi tersebut, terdapat dua simpul yang berada dalam kelas partisi yang sama yaitu $y_{1,1}, y_{1,2} \in S_1$ dan simpul $y_{1,2}$ tidak berada pada simpul-simpul backbone atau simpul pelekatan dari graf lengkap dan simpul $y_{1,2}$ tidak berada pada simpul-simpul backbone atau simpul pelekatan dari graf lengkap. Simpul $y_{1,1}, y_{1,2}$ yang memiliki jarak ke simpul-simpul dari kelas partisi yang lain yaitu $d(y_{1,1}, u) = d(y_{1,2}, u) = 1$ dimana $u \in S \setminus \{y_{1,1}, y_{1,2}\}$. Oleh karena itu, terdapat sedikitnya dua simpul $y_{1,1}, y_{1,2} \in S_1$ yang memiliki representasi yang sama sebagaimana $r(y_{1,1}|\Pi) = r(y_{1,2}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2})$ berakibat dua simpul $y_{1,1}, y_{1,2}$ harus berada dalam partisi yang berbeda. Maka

Π dengan $|\Pi| = m-1$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π adalah $m-1$ bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$ yaitu $pd(P_n \triangleright K_m) \geq m$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $m \leq pd(P_n \triangleright K_m) \leq m$. Jadi dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$ adalah $pd(P_n \triangleright K_m) = m$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n = m - l$, $2 \leq l \leq m-2$.

Kasus 3: Untuk $n > m$

Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(P_n \triangleright K_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $P_n \triangleright K_m$. Untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n > m$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m+1}\}$ sedemikian sehingga:

$S_j = \{y_{i,j} | 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$

$S_{j-1} = \{y_{l,j} | 2 \leq j \leq m\}$

$S_{m+1} = \{y_{1,1}\}$

akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $P_n \triangleright K_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright K_m$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n > m$, sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j}, i)$; jika $2 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq m$

$r(y_{i,1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-1}, i-1)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{1,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j}, 3, 1)$; jika $2 \leq j \leq m$

$r(y_{1,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-1}, 2, 0)$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $P_n \triangleright K_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m+1}\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright K_m$. Sehingga $|\Pi| = m+1$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan $m+1$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$ yaitu $pd(P_n \triangleright K_m) \leq m+1$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$ didapatkan dengan Lemma 2.2. Sekarang mempertimbangkan bahwa partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright K_m$ memiliki kardinalitas kurang dari $m+1$. Misalkan suatu partisi pembeda dari $P_n \triangleright K_m$ dengan $|\Pi| = m$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n > m$ terdiri dari nm buah simpul. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $P_n \triangleright K_m$ dengan $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n > m$ memiliki himpunan kelas partisi yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$. Perhatikan pada Gambar 4.8 untuk sebuah subgraf berupa graf lengkap yang melekat pada simpul $y_{i,1}$, $1 \leq i \leq n$ dapat ditentukan beberapa kasus pengelompokan kelas partisinya sebagai berikut:

a) Ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ dengan $S_j = \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Tanpa mengurangi keumuman, jika kita perhatikan kelas pastisi $S_1 = \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$, maka simpul-simpul di kelas partisi S_1 memiliki jarak yang sama terhadap simpul di subgraf lengkap $H_i \cong K_m$. Misalkan kita ambil dua simpul di kelas partisi S_1 yaitu $u, v \in S_1$ sehingga jarak antara u ke kelas partisi S_k, $2 \leq k \leq m$ adalah 1 dan juga berlaku untuk jarak v ke kelas partisi S_k, $2 \leq k \leq m$ adalah 1 sehingga didapatkan $d(u, S_k) = d(v, S_k) = 1$, $2 \leq k \leq m$. Oleh karena itu, terdapat sedikitnya dua simpul $u, v \in S_1$ yang memiliki representasi yang sama sebagaimana $r(u|\Pi) = r(v|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-1})$ berakibat dua simpul u, v harus berada dalam partisi yang berbeda dengan syarat salah satu dari simpul u, v merupakan simpul ujung dari subgraf P_n atau salah satu dari simpul u, v merupakan simpul ujung dari backbone graf $P_n \triangleright K_m$. Maka Π dengan $|\Pi| = m$ bukan merupakan partisi pembeda.

b) Ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ dengan $S_1 = \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,2} | 2 \leq i \leq n\}$, $S_j = \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq m\}$ dan $S_2 = \{y_{1,2}\}$. Tanpa mengurangi keumuman, jika kita perhatikan kelas pastisi $S_1 = \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,2} | 2 \leq i \leq n\}$, maka simpul-simpul di kelas partisi S_1 memiliki jarak yang sama terhadap simpul di subgraf lengkap $H_i \cong K_m$. Misalkan kita ambil dua simpul di kelas partisi S_1 yaitu $y_{i,2}, y_{i+1,1} \in S_1$, $2 \leq 2 \leq n-1$ sehingga jarak antara $y_{i,2}$ ke kelas partisi S_k, $3 \leq k \leq m$ adalah 1, jarak antara $y_{i,2}$ ke kelas partisi S_2 adalah 3 dan juga berlaku untuk jarak $y_{i+1,1}$ ke kelas partisi S_k, $3 \leq k \leq m$ adalah 1, jarak antara $y_{i+1,1}$ ke kelas partisi S_2 adalah 3. Sehingga didapatkan $d(y_{i,2}, S_k) = d(y_{i+1,1}, S_k) = 1$, $3 \leq k \leq m$ dan $d(y_{i,2}, S_2) = d(y_{i+1,1}, S_2) = 3$. Oleh karena itu, terdapat sedikitnya dua simpul $y_{i,2}, y_{i+1,1} \in S_1$ yang memiliki representasi yang sama sebagaimana $r(y_{i,2}|\Pi) = r(y_{i,2}|\Pi) = (0, 3, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2})$ berakibat dua simpul

$y_{i,2}, y_{i+1,1}$ harus berada dalam partisi yang berbeda. Maka Π dengan $|\Pi| = m$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π adalah m bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$ yaitu $pd(P_n \triangleright K_m) \geq m + 1$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $m + 1 \leq pd(P_n \triangleright K_m) \leq m + 1$. Jadi dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright K_m$ adalah $pd(P_n \triangleright K_m) = m + 1$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan $n > m$.

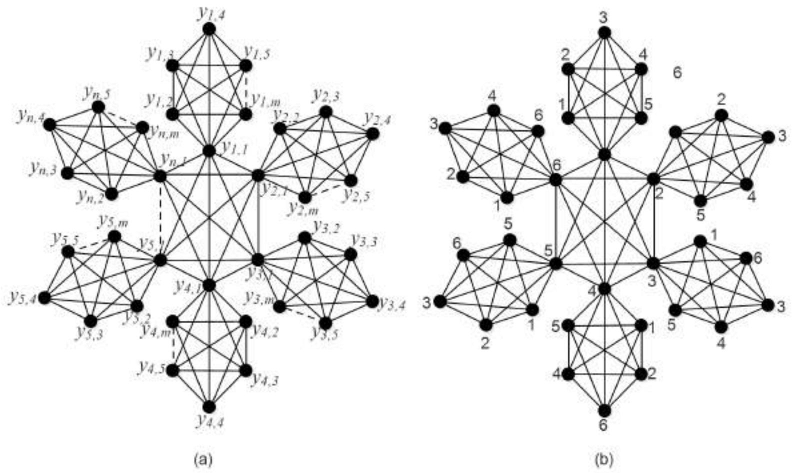
Berdasarkan empat kasus pembuktian di atas diketahui bahwa $pd(P_n \triangleright K_m) = m$ untuk $n = m$, $pd(P_n \triangleright K_m) = m$ untuk $n = m - 1$ dan $pd(P_n \triangleright K_m) = m$ untuk $n = m - l$ dimana $2 \leq l \leq m - 2$ sehingga dapat digabung menjadi $pd(P_n \triangleright K_m) = m$ untuk $n \leq m$ dan $pd(P_n \triangleright K_m) = m + 1$ untuk $n > m$. □

4.1.5 Dimensi Partisi Graf Lengkap Comb Graf Lengkap

Graf hasil operasi *comb* antara graf lengkap K_n dengan graf lengkap K_m dihasilkan dari menduplikat graf lengkap K_m sebanyak n simpul di graf lengkap K_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf lengkap K_m pada setiap simpul graf lengkap K_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $K_n \triangleright K_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali graf lengkap K_m yang memiliki himpunan simpul $V(K_n \triangleright K_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_n \triangleright K_m) = \{y_{i,1}y_{i+k,1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n - i\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+l} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq m - j\}$. Graf $K_n \triangleright K_m$ memiliki nm buah simpul dan $\frac{n^2+nm^2-n-mn}{2}$ buah sisi. Graf $K_n \triangleright K_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.10 (a).

Pada subbab ini, akan dibahas dimensi partisi pada graf $K_n \triangleright K_m$ dengan $m, n \in Z^+$. Jika $m = 2$, graf K_2 isomorfik dengan graf lintasan P_2 dan jika $n = 2$ maka graf K_2 isomorfik dengan graf lintasan P_2 sedemikian sehingga order dari graf lengkap K_m dan graf lengkap K_n masing-masing adalah $m \geq 3$ dan $n \geq 3$.. Dalam menentukan dimensi partisi suatu graf $K_n \triangleright K_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$. Dimensi partisi mensyaratkan semua himpunan simpul elemen Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.7. *Misalkan K_n adalah graf lengkap order n dan K_m adalah graf lengkap order m. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, dimensi partisi graf hasil operasi*



Gambar 4.10: (a) Graf Hasil Operasi $K_n \triangleright K_m$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $K_6 \triangleright K_6$

comb $K_n \triangleright K_m$ *adalah*

$$pd(K_n \triangleright K_m) = \begin{cases} n, & \textit{jika}\ m \leq n \\ m, & \textit{jika}\ m > n \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $K_n \triangleright K_m$ memiliki himpunan simpul $V(K_n \triangleright K_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_n \triangleright K_m) = \{y_{i,1}y_{i+k,1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-i\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+l} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq m-j\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi graf $K_n \triangleright K_m$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai m dibagi menjadi tiga kasus yaitu kasus pertama untuk $m < n$, kedua untuk $n = m$, sedangkan kasus ketiga untuk $m > n$.

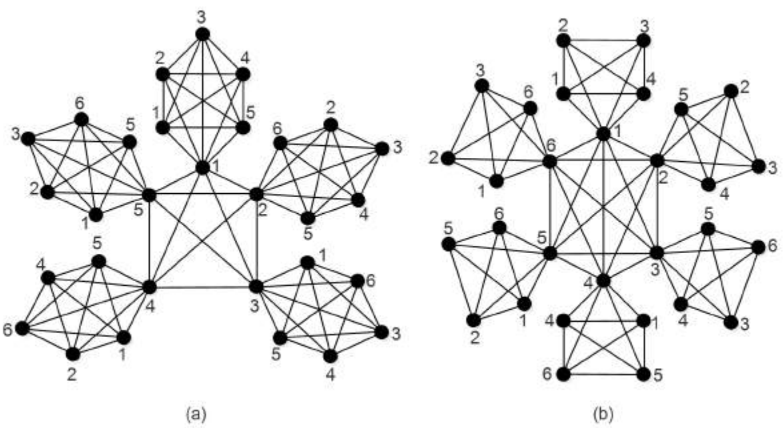
Kasus 1: Untuk $m < n$ dengan $m = n - l$, $1 \leq l \leq n - 3$

Dimensi partisi graf $K_n \triangleright K_m$ dengan mn buah simpul adalah n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, dikarenakan untuk $m = 5$ dan $n = 6$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $K_n \triangleright K_m$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $K_n \triangleright K_m$ adalah n dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(K_n \triangleright K_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $K_n \triangleright K_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.11 (b).

Misalkan Π adalah suatu partisi pembeda dari $V(K_n \triangleright K_m)$ dengan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ sedemikian sehingga:

$S_i = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$

$S_{n+i-l-2} = \{y_{i,i}; 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ 2 \leq i \leq l + 1\}$



Gambar 4.11: (a) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $K_5 \triangleright K_6$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $K_6 \triangleright K_5$

$S_{n+i-l-k-2} = \{y_{i,i-k}; 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ 3 \leq i \leq l+1,\ 1 \leq k \leq i-2\}$
$S_n = \{y_{i,i}; 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ l+2 \leq i \leq n-l\}$
$S_{n-k} = \{y_{i,i-k}; 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ l+2 \leq i \leq n-l,\ 1 \leq k \leq l\}$
$S_{j-1} = \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ 1 \leq k \leq l+1,\ 2 \leq j \leq n-l,\ j \neq i-k+1\}$
$S_n = \{y_{n-k+1,n-l}; 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ 1 \leq k \leq l\}$
$S_{n-k} = \{y_{n-k,n-l-r}; 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ 1 \leq k \leq l-1,\ 1 \leq r \leq k\}$
$S_{n+i-l-2} = \{y_{i,i}; \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 2 \leq i \leq n-l\}$
$S_{n+i-l-k-2} = \{y_{i,i-k}; \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 3 \leq i \leq n-l,\ 1 \leq k \leq i-2\}$
$S_{j-1} = \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n,\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 1 \leq k \leq l+1,\ 2 \leq j \leq n-l,\ j \neq i-k+1\}$
$S_{n-r} = \{y_{n-k,n-l-r}; \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 1 \leq k \leq n-l-2,\ 1 \leq r \leq k\}$
$S_n = \{y_{n-k+1,n-l}; n$ gasal, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 1 \leq k \leq l\}$
$S_n = \{y_{n-k+1,n-l}; n$ genap, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 1 \leq k \leq l-1\}$
$S_{i+k-1} = \{y_{i,k+1}; n$ genap, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 1 \leq k \leq n-l-1,\ n-l+1 \leq i \leq l+1\}$.

Dapat ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $K_n \triangleright K_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Berikut ini merupakan hasil observasi pada graf $K_n \triangleright K_m$. Simpul-simpul x_i dengan $1 \leq i \leq n$ dan $y_{i,j}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n-l-1$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_n \triangleright K_m$ untuk $m < n$, sebagai berikut:

$r(x_i|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i})$; jika $1 \leq i \leq n$

$r(y_{1,j}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{j-2}, 0, \underbrace{1,...,1}_{n-l-j}, \underbrace{2,...,2}_{l+1})$; jika $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ 2 \leq j \leq n-l$

$r(y_{i,i}|\Pi) = (\underbrace{2,...,2}_{i-1}, \underbrace{1,...,1}_{n-l-2}, 0, \underbrace{2,...,2}_{l})$; jika $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ 2 \leq i \leq l+1$

$r(y_{i,i-k}|\Pi) = (\underbrace{2,...,2}_{i-1}, \underbrace{1,...,1}_{i-k-1}, \underbrace{1,...,1}_{n-l-i-1}, 0, \underbrace{1,...,1}_{k}, \underbrace{2,...,2}_{l-i+2})$; jika $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ 3 \leq i \leq l+1,\ 1 \leq k \leq i-2$

$r(y_{i,i}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{i-l-2}, \underbrace{2,...,2}_{l+1}, \underbrace{1,...,1}_{n-i}, 0)$; jika $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ l+2 \leq i \leq n-l$

$r(y_{i,i-k-1}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{i-l-2}, \underbrace{2,...,2}_{l+1}, \underbrace{1,...,1}_{i-k-2}, \underbrace{1,...,1}_{n-l-i}, 0, \underbrace{1,...,1}_{k})$; jika $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ l+2 \leq i \leq n-l,\ 1 \leq k \leq l$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{2,...,2}_{i-1}, \underbrace{1,...,1}_{j-i-1}, 0, \underbrace{1,...,1}_{n+i-l-j-1}, \underbrace{2,...,2}_{l-i+2})$; jika $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ 1 \leq i \leq l+1,\ i+1 \leq j \leq n-l$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{i-l-2}, \underbrace{2,...,2}_{l+1}, \underbrace{1,...,1}_{j-i-1}, 0, \underbrace{1,...,1}_{n-j+1})$; jika $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ l+2 \leq i \leq n-l-1,\ i+1 \leq j \leq n-l$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{\underbrace{1,...,1}_{j-2}, 0, \underbrace{1,...,1}_{i-j-l-2}}_{i-l-1}, \underbrace{2,...,2}_{l+1}, \underbrace{1,...,1}_{n-i+1})$; jika $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ l+3 \leq i \leq n,\ 2 \leq j \leq i-l-1$

$r(y_{n-k+1,n-l}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{n-l-k-1}, \underbrace{2,...,2}_{l+1}, \underbrace{1,...,1}_{k-1}, 0)$; jika $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ 1 \leq k \leq l$

$r(y_{n-k,n-l-r-1}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{n-l-k-2}, \underbrace{2,...,2}_{l+1}, \underbrace{\underbrace{1,...,1}_{k-r}, 0, \underbrace{1,...,1}_{r}}_{k+1})$; jika $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,\ 1 \leq k \leq l-1,\ 1 \leq r \leq k$

$r(y_{i,i}|\Pi) = (\underbrace{2,...,2}_{i-1}, \underbrace{1,...,1}_{n-l-2}, 0, \underbrace{2,...,2}_{'l-i+2})$; jika $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 2 \leq i \leq n-l$

$r(y_{i,i-k}|\Pi) = (\underbrace{2,...,2}_{i-1}, \underbrace{1,...,1}_{i-k-2}, \underbrace{1,...,1}_{n-l-i}, 0, \underbrace{1,...,1}_{k}, \underbrace{2,...,2}_{l-i+2})$; jika $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 3 \leq i \leq n-l,\ 1 \leq k \leq i-2$

$r(y_{i,k+1}|\Pi) = (\underbrace{2,...,2}_{l}, \underbrace{1,...,1}_{\frac{n}{2}+k-l-1}, 0, \underbrace{1,...,1}_{n-k-l-1}, \underbrace{2,...,2}_{l-\frac{n}{2}+1})$; jika n genap, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ n-l+1 \leq i \leq l+1,\ 1 \leq k \leq n-l-1$

$r(y_{n-k+1,n-l}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{n-k-l-1}, \underbrace{2,...,2}_{l+1}, \underbrace{1,...,1}_{k-1}, 0)$; jika n genap, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 1 \leq k \leq l-1$

$r(y_{n-k+1,n-l}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{n-k-l-1}, \underbrace{2,...,2}_{l+1}, \underbrace{1,...,1}_{k-1}, 0)$; jika n gasal, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 1 \leq k \leq l$

$r(y_{n-k,n-l-1}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{n-k-l-2}, \underbrace{2,...,2}_{l+1}, \underbrace{\underbrace{1,...,1}_{k-r}, 0, \underbrace{1,...,1}_{r}}_{k+1})$; jika $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 1 \leq k \leq n-l-2,\ 1 \leq r \leq k$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{2,...,2}_{i-1}, \underbrace{1,...,1}_{j-i-1}, 0, \underbrace{1,...,1}_{n+i-j-l-1}, \underbrace{2,...,2}_{l-i+2})$; jika $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ 2 \leq i \leq n-l-1,\ i+1 \leq j \leq n-l$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{\underbrace{1,...,1}_{j-2}, 0, \underbrace{1,...,1}_{i-j-l-2}}_{i-l-1}, \underbrace{2,...,2}_{l+1}, \underbrace{1,...,1}_{n-i+1})$; jika $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq l \leq n-3,\ l+3 \leq i \leq n,\ 2 \leq j \leq i-l-1$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $K_n \triangleright K_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., s_n\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $K_n \triangleright K_m$. Sehingga $|\Pi| = n$.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan n. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan sebagai batas atas dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$ sehingga dapat ditulis $pd(K_n \triangleright K_m) \leq n$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari graf $K_n \triangleright K_m$ memiliki kardinalitas kurang dari n. Misalkan suatu partisi pembeda dari $K_n \triangleright K_m$ dengan $|\Pi| = n-1$ maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $K_n \triangleright K_m$ dengan $m < n$, dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n-1}\}$ dengan $S_i = \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n-1\}$, $S_{n-1} = \{y_{n,1}\}$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{n,1}|\Pi) = r(y_{n-1,1}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{n-2}, 0)$. Jadi Π dengan $|\Pi| = n-1$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, maka diperoleh Π dengan kardinalitas Π sama dengan $n-1$ bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$ adalah $pd(K_n \triangleright K_m) \geq n$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi $n \leq pd(K_n \triangleright K_m) \leq n$. Jadi, dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$ yaitu $pd(K_n \triangleright K_m) = n$ untuk $m < n$ dengan $m = n - l$ dan $1 \leq l \leq n-3$.

Kasus 2: Untuk $m = n$

Dimensi partisi graf $K_n \triangleright K_m$ dengan mn buah simpul adalah n untuk $m \geq 3$ dan

$n \geq 3$, dikarenakan untuk $m = 3$ dan $n = 3$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $K_n \triangleright K_m$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 3$ dan $m = n$, maka dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $K_n \triangleright K_m$ adalah n dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(K_n \triangleright K_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $K_n \triangleright K_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.10 (b).

Misalkan Π adalah suatu partisi pembeda dari $V(K_n \triangleright K_m)$ dengan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ sedemikian sehingga: $S_i = \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$, $S_{j-1} = \{y_{i,j} | j \neq i, 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq m\}$ dan $S_n = \{y_{i,j} | 2 \leq i \leq n, i = j\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $K_n \triangleright K_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Berikut ini merupakan hasil observasi pada graf $K_n \triangleright K_m$. Simpul-simpul x_i dengan $1 \leq i \leq n$ dan $y_{i,j}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m-1$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_n \triangleright K_m$ untuk $m = n$, sebagai berikut:

$r(y_{i,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i})$; jika $1 \leq i \leq n$

$r(y_{1,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j}, 2)$; jika $2 \leq j \leq m$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{i-j-1}}_{i-2}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i+1})$; jika $2 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq i-1$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-2}, 2, \underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{j-i-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j+1}}_{m-i+1})$; jika $2 \leq i \leq n$, $i+1 \leq j \leq m$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-2}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i}, 0)$; jika $2 \leq i \leq n, i = j$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $K_n \triangleright K_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., s_n\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $K_n \triangleright K_m$. Sehingga $|\Pi| = n$.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan n. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$ sehingga batas atas dapat ditulis $pd(K_n \triangleright K_m) \leq n$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$, sekarang mempertimbangkan bahwa partisi pembeda dari graf $K_n \triangleright K_m$ memiliki kardinalitas kurang dari n. Misalkan suatu partisi pembeda dari $K_n \triangleright K_m$ dengan $|\Pi| = n - 1$ maka akan terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk menunjukkan bahwa terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $K_n \rhd K_m$ dengan $m \geq 3$, $n \geq 3$ dan $n = m$, dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n-1}\}$ dengan $S_i = \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n-1\}$, $S_{n-1} = \{y_{n,1}\}$, $S_{j-1} = \{y_{i,j} | j \neq i, 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq m\}$ dan $S_{n-1} = \{y_{i,j} | 2 \leq i \leq n, i = j\}$ maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{n,1}|\Pi) = r(y_{n-1,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{n-2}, 0)$. Jadi Π dengan $|\Pi| = n-1$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, maka diperoleh Π dengan kardinalitas Π sama dengan $n-1$ bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \rhd K_m$ yang dapat ditulis $pd(K_n \rhd K_m) \geq n$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \rhd K_m$ adalah $n \leq pd(K_n \rhd K_m) \leq n$. Jadi, dimensi partisi dari graf $K_n \rhd K_m$ yaitu $pd(K_n \rhd K_m) = n$ untuk $m = n$.

Kasus 3: Untuk $m > n$

Dimensi partisi graf $K_n \rhd K_m$ dengan mn buah simpul adalah n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, dikarenakan untuk $m = 4$ dan $n = 3$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $K_n \rhd K_m$ untuk $m > n$, maka dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $K_n \rhd K_m$ adalah m dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(K_n \rhd K_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $K_n \rhd K_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.11 (a).

Misalkan Π adalah suatu partisi pembeda dari $V(K_n \rhd K_m)$ dengan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ sedemikian sehingga: $S_i = \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$, $S_{j-1} = \{y_{i,j} | j \neq i, 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq m\}$ dan $S_m = \{y_{i,j} | 2 \leq i \leq n-1, i = j\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $K_n \rhd K_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Berikut ini akan dilakukan observasi pada graf $K_n \rhd K_m$ dengan simpul-simpul $y_{i,j}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_n \rhd K_m$ untuk $m > n$, sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, 2)$

$r(y_{i,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-i})$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{1,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j}, 3)$; jika $2 \leq j \leq m$

$$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{\underbrace{1,...,1}_{j-2},0,\underbrace{1,...,1}_{i-j-1}}_{i-2},2,\underbrace{1,...,1}_{m-i+1}); \text{jika } 2 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq i-1$$

$$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{i-2},2,\underbrace{\underbrace{1,...,1}_{j-i-1},0,\underbrace{1,...,1}_{m-j+1}}_{m-i+1}); \text{jika } 2 \leq i \leq n, i+1 \leq j \leq m$$

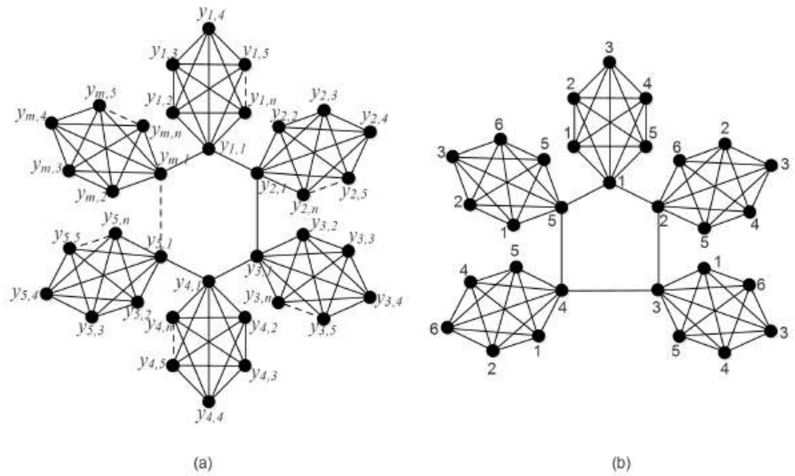
$$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{i-2},2,\underbrace{1,...,1}_{m-i},0); \text{jika } 2 \leq i \leq n, i = j$$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $K_n \triangleright K_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., s_m\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $K_n \triangleright K_m$. Sehingga $|\Pi| = m$.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan m. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$ yaitu $pd(K_n \triangleright K_m) \leq m$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari graf $K_n \triangleright K_m$ memiliki kardinalitas kurang dari m. Misalkan suatu partisi pembeda dari $K_n \triangleright K_m$ dengan $|\Pi| = m - 1$ maka akan terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk menunjukkan bahwa terdapat terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $K_n \triangleright K_m$ dengan $m \geq 3$, $n \geq 3$ dan $m > n$, dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m-1}\}$ dengan $S_i = \{y_{i,1}|1 \leq i \leq n\}$, $S_{j-1} = \{y_{i,j}|j \neq i, 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq m\}$ dan $S_{m-1} = \{y_{i,j}|2 \leq i \leq n\}, i = j$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{i,i}|\Pi) = r(y_{i,m}|\Pi) = (\underbrace{1,...,1}_{i-2},2,\underbrace{1,...,1}_{m-i-1},0)$. Jadi Π dengan $|\Pi| = m - 1$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, maka diperoleh Π dengan kardinalitas Π sama dengan $m - 1$ bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$ yang dapat ditulis $pd(K_n \triangleright K_m) \geq m$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$ adalah $m \leq pd(K_n \triangleright K_m) \leq m$. Jadi, dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright K_m$ yaitu $pd(K_n \triangleright K_m) = m$ untuk $m > n$. $\square$



Gambar 4.12: (a) Graf Hasil Operasi $C_m \triangleright K_n$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda $C_5 \triangleright K_6$

4.1.6 *Dimensi Partisi Graf Lingkaran Comb Graf Lengkap*

Graf hasil operasi *comb* antara graf lingkaran C_m dengan graf lengkap K_n dihasilkan dari menduplikat graf lengkap K_n sebanyak m simpul di graf lingkaran C_m dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf lengkap K_n pada setiap simpul graf lingkaran C_m, maka dapat dikatakan bahwa graf $C_m \triangleright K_n$ merupakan graf yang terdiri dari m kali graf lengkap K_n yang memiliki himpunan simpul $V(C_m \triangleright K_n) = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \triangleright K_n) = \{y_{j,1}y_{j+1,1} | 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{m,1}y_{1,1}\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+k} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-i\}$. Graf $C_m \triangleright K_n$ memiliki nm buah simpul dan $\frac{n^2m-mn+2m}{2}$ buah sisi. Graf $C_m \triangleright K_n$ ditunjukkan pada Gambar 4.12 (a).

Pada subbab ini, akan dibahas dimensi partisi pada graf $C_m \triangleright K_n$ dengan $m, n \in Z^+$. Jika $m = 2$, graf C_2 adalah graf lunar atau graf tidak sederhana yang memiliki sisi ganda dan jika $n = 2$, graf K_2 isomorfik dengan graf P_2 maka graf hasil operasi *comb* $C_m \triangleright K_2$ isomorfik dengan $C_m \triangleright P_2$ sedemikian sehingga order lingkaran C_m dan graf lengkap K_n masing-masing $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Dalam menentukan dimensi partisi suatu graf $C_m \triangleright K_n$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$. Dimensi partisi mensyaratkan semua himpunan simpul elemen Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.8. *Misalkan C_m adalah graf lingkaran order m dan K_n adalah graf lengkap order n. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, dimensi partisi graf hasil operasi comb*

$C_m \triangleright K_n$ *adalah*

$$pd(C_m \triangleright K_n) = \begin{cases} n, & \textit{jika } m \leq n \\ n+1, & \textit{jika } m > n \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $C_m \triangleright K_n$ memiliki himpunan simpul $V(C_m \triangleright K_n) = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \triangleright K_n) = \{y_{j,1}y_{j+1,1} | 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{m,1}y_{1,1}\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+k} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-i\}$. Dimensi partisi graf $C_m \triangleright K_n$ dengan mn buah simpul adalah n jika $m \leq n$ dan $n+1$ jika $m > n$, dikarenakan untuk $m = 3$ dan $n = 3$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $C_m \triangleright K_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $C_m \triangleright K_n$ adalah n dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan.

Kasus 1: Untuk $m < n$

Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(C_m \triangleright K_n)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_m \triangleright K_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.12 (b). Untuk $m < n$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ sedemikian sehingga $S_j = \{y_{j,1} | 1 \leq j \leq m\}$, $S_{i-1} = \{y_{j,i} | i \neq j, 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, $S_n = \{y_{j,j} | 2 \leq j \leq m\}$, akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \triangleright K_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Berikut ini akan dilakukan observasi pada graf $C_m \triangleright K_n$ dengan simpul-simpul $y_{j,i}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright K_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, sebagai berikut:

$r(y_{1,1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-2}, 2)$

$r(y_{j,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-j})$; jika $2 \leq j \leq m$

$r(y_{1,i}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i}, 3)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{j,i}|\Pi) = (\underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{i-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{j-i-1}}_{j-2}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{n-j+1})$; jika $2 \leq j \leq m$, $2 \leq i \leq j-1$

$r(y_{j,i}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 2, \underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{i-j-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i+1}}_{n-j+1})$; jika $2 \leq j \leq m$, $j+1 \leq i \leq n$

$r(y_{j,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{n-j}, 0)$; jika $2 \leq j \leq m$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \triangleright K_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_m \triangleright K_n$. Sehingga $|\Pi| = n$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan n. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ yang dapat ditulis $pd(C_m \triangleright K_n) \leq n$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari graf $C_m \triangleright K_n$ memiliki kardinalitas kurang dari n. Misalkan suatu partisi pembeda dari $C_m \triangleright K_n$ dengan $|\Pi| = n - 1$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m \geq 3$, $n \geq 3$ dan $m < n$ terdiri dari nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $C_m \triangleright K_n$ dengan $m \geq 3, n \geq 3$ dan $m < n$, dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n-1}\}$ dengan $S_j = \{y_{j,1} | 1 \leq j \leq m\}$, $S_{i-1} = \{y_{j,i} | i \neq j, 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $S_{n-1} = \{y_{j,j} | 2 \leq j \leq m - 1\}$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{j,j}|\Pi) = r(y_{j,n}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{n-j-1}, 0)$. Jadi Π dengan $|\Pi| = n - 1$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan $n - 1$ bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan sebagai batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ dapat ditulis $pd(C_m \triangleright K_n) \geq n$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ adalah $n \leq pd(C_m \triangleright K_n) \leq n$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ adalah $pd(C_m \triangleright K_n) = n$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 3$ dan $m < n$.

Kasus 2: Untuk $m = n$

Untuk menentuka batas atas dimensi partisi $pd(C_m \triangleright K_n)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_m \triangleright K_n$. Untuk $m \geq 3$, $n \geq 3$ dan $n = m$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ sedemikian sehingga $S_j = \{y_{j,1} | 1 \leq j \leq m\}$, $S_{i-1} = \{y_{j,i} | i \neq j, 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, $S_n = \{y_{j,j} | 2 \leq j \leq m\}$, akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \triangleright K_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Berikut ini akan dilakukan observasi pada graf $C_m \triangleright K_n$ dengan simpul-simpul $y_{j,i}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright K_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, sebagai berikut:

$r(y_{j,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-j})$; jika $1 \leq j \leq m$

$r(y_{1,i}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i}, 3)$; jika $2 \leq i \leq n$

$r(y_{j,i}|\Pi) = (\underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{i-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{j-i-1}}_{j-2}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{n-j+1})$; jika $2 \leq j \leq m$, $2 \leq i \leq j-1$

$r(y_{j,i}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 2, \underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{i-j-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i+1}}_{n-j+1})$; jika $2 \leq j \leq m$, $j+1 \leq i \leq n$

$r(y_{j,j}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{n-j}, 0)$; jika $2 \leq j \leq m$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \triangleright K_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_m \triangleright K_n$. Sehingga $|\Pi| = n$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan n. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ yang dapat ditulis $pd(C_m \triangleright K_n) \leq n$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari graf $C_m \triangleright K_n$ memiliki kardinalitas kurang dari n. Misalkan suatu partisi pembeda dari $C_m \triangleright K_n$ dengan $|\Pi| = n-1$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m \geq 3$, $n \geq 3$ dan $n = m$ terdiri dari nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $C_m \triangleright K_n$ dengan $m \geq 3$, $n \geq 3$ dan $n = m$, dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n-1}\}$ dengan $S_j = \{y_{j,1}|1 \leq j \leq m\}$, $S_{i-1} = \{y_{j,i}|i \neq j, 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $S_{n-1} = \{y_{j,j}|2 \leq j \leq m-1\}$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{j,j}|\Pi) = r(y_{j,n}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{n-j-1}, 0)$. Jadi Π dengan $|\Pi| = n-1$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan $n-1$ bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan sebagai batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ dapat ditulis $pd(C_m \triangleright K_n) \geq n$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ adalah $n \leq pd(C_m \triangleright K_n) \leq n$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ adalah $pd(C_m \triangleright K_n) = n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$.

Kasus 3: Untuk $m > n$

Untuk m genap, menentukan batas atas dimensi partisi $pd(C_m \triangleright K_n)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_m \triangleright K_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.12 (b). Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n+1}\}$ sedemikian sehingga $S_n = \{y_{j,1} | 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{j,n} | 1 \leq j \leq 2\}$, $S_{i-1} = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq 2, 2 \leq i \leq n-1\}$, $S_{n+1} = \{y_{j,2} | 3 \leq j \leq m, j\text{gasal}\}$, $S_i = \{y_{j,i} | 3 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq m, j\text{gasal}\}$, $S_i = \{y_{j,i} | 2 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq m, j\text{genap}\}$, akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \triangleright K_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Berikut ini akan dilakukan observasi pada graf $C_m \triangleright K_n$ dengan simpul-simpul $y_{j,i}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright K_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ adalah berbeda. Untuk membuktikan, pandang bahwa simpul-simpul di graf $C_m \triangleright K_n$ dibedakan menjadi simpul dalam yang berada pada lingkaran C_m dan simpul daun yang berada pada subgraf $H_j \cong K_n$, perhatikan beberapa kondisi berikut ini:

a. Pandang setiap simpul $y_{j,1} \in V(C_m \triangleright K_n)$ merupakan simpul dalam di $C_m \triangleright K_n$ yang termuat dalam kelas partisi yang sama S_n, jika simpul-simpul $y_{j,1}$ memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1 maka representasi simpul $y_{j,1}$ terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul-simpul $y_{j,1}$ ke kelas partisi S_2 and S_{n+1}. Berakibat, representasi $r(y_{1,1}|\Pi) \neq ... \neq r(y_{m,1}|\Pi)$ sehingga simpul $y_{j,1}$ terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

b. Perhatikan setiap simpul-simpul daun di $j = 1, 2$ bahwa simpul-simpul tersebut $y_{j,n}$ di $C_m \triangleright K_n$. Misalkan simpul $y_{j,n} \in V(H_j \cong K_n)$ yang termuat dalam kelas partisi yang sama S_n, jika simpul-simpul $y_{j,n}$ memiliki jarak yang sama terhadap setiap kelas partisi $S_1, S_2, ..., S_{n-2}$ maka representasi simpul $y_{j,n}$ terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul-simpul $y_{j,n}$ ke kelas partisi S_{n+1}. Berakibat, representasi $r(y_{1,1}|\Pi) \neq r(y_{2,1}|\Pi) ... \neq r(y_{m-1,1}|\Pi) \neq r(y_{m,1}|\Pi)$ sehingga simpul $y_{j,n}$ terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

c. Perhatikan setiap simpul-simpul daun di $j = 1, 2$ dan $2 \leq i \leq n-1$ bahwa simpul-simpul tersebut $y_{j,i}$ di $C_m \triangleright K_n$. Simpul $y_{j,i}$ termasuk dalam kelas partisi singleton sehingga memiliki representasi simpul yang berbeda dan representasi simpul $y_{j,i}$ dibedakan oleh kelas partisi S_{n-2} dan S_{n+1}.

d. Setiap simpul daun $u, v \in V(H_j \cong K_n)$ dengan $3 \leq j \leq m$ dan simpul u, v termuat dalam kelas partisi singleton selain kelas partisi S_1. Jika setiap simpul u, v memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1 maka representasi simpul u, v terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul-simpul u, v ke kelas partisi S_2 and S_{n+1}. Berakibat, representasi $r(y_{3,i}|\Pi) \neq ... \neq r(y_{m,i}|\Pi)$ dengan $2 \leq i \leq n$ sehingga simpul u, v terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \triangleright K_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n+1}\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_m \triangleright K_n$. Sehingga $|\Pi| = n + 1$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan $n + 1$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ yang dapat ditulis $pd(C_m \triangleright K_n) \leq n + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$. Misalkan suatu partisi pembeda dari $C_m \triangleright K_n$ dengan $|\Pi| = n$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ terdiri dari nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $C_m \triangleright K_n$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Pandang simpul-simpul di kelas partisi S_{n+1} diganti menjadi kelas partisi S_n sehingga dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ dengan $S_n = \{y_{j,1}|1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{j,n}|1 \leq j \leq 2\} \cup \{y_{j,2}|3 \leq j \leq m, j\text{gasal}\}$, $S_{i-1} = \{y_{j,i}|1 \leq j \leq 2, 2 \leq i \leq n-1\}$, $S_i = \{y_{j,i}|3 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq m, j\text{gasal}\}$, $S_i = \{y_{j,i}|2 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq m, j\text{genap}\}$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{j,1}|\Pi) = r(y_{j,n}|\Pi) = (j, 3, \underbrace{1, ..., 1}_{n-3}, 0)$ untuk $1 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ dengan j gasal atau $r(y_{j,1}|\Pi) = r(y_{j,n}|\Pi) = (m-j+3, 3, \underbrace{1, ..., 1}_{n-3}, 0)$ untuk $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq j \leq m$ dengan j gasal. Jadi Π dengan $|\Pi| = n$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan n bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan sebagai batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ dapat ditulis $pd(C_m \triangleright K_n) \geq n + 1$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ adalah $n + 1 \leq pd(C_m \triangleright K_n) \leq n + 1$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ adalah $pd(C_m \triangleright K_n) = n + 1$ untuk m genap.

Untuk m gasal, menentukan batas atas dimensi partisi $pd(C_m \triangleright K_n)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_m \triangleright K_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.12 (b). Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n+1}\}$ sedemikian sehingga $S_n = \{y_{j,1}|1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{j,n}|1 \leq$

$j \leq 2\}$, $S_{i-1} = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq 2, 2 \leq i \leq n-1\}$, $S_{n+1} = \{y_{j,2} | 3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1, j \text{gasal}\} \cup \{y_{j,2} | \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m, j \text{genap}\}$, $S_i = \{y_{j,i} | 3 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1, j \text{gasal}\} \cup \{y_{j,i} | 3 \leq i \leq n, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m, j \text{genap}\}$ dan $S_i = \{y_{j,i} | 2 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1, j \text{genap}\} \cup \{y_{j,i} | 2 \leq i \leq n, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m, j \text{ gasal}\}$, akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_m \triangleright K_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Berikut ini akan dilakukan observasi pada graf $C_m \triangleright K_n$ dengan simpul-simpul $y_{j,i}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright K_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ adalah berbeda. Untuk membuktikan, pandang bahwa simpul-simpul di graf $C_m \triangleright K_n$ dibedakan menjadi simpul dalam yang berada pada lingkaran C_m dan simpul daun yang berada pada subgraf $H_j \cong K_n$, perhatikan beberapa kondisi berikut ini:

a. Pandang setiap simpul $y_{j,1} \in V(C_m \triangleright K_n)$ merupakan simpul dalam di $C_m \triangleright K_n$ yang termuat dalam kelas partisi yang sama S_n, jika simpul-simpul $y_{j,1}$ memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1 maka representasi simpul $y_{j,1}$ terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul-simpul $y_{j,1}$ ke kelas partisi S_2 and S_{n+1}. Berakibat, representasi $r(y_{1,1}|\Pi) \neq ... \neq r(y_{m,1}|\Pi)$ sehingga simpul $y_{j,1}$ terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

b. Perhatikan setiap simpul-simpul daun di $j = 1, 2$ bahwa simpul-simpul tersebut $y_{j,n}$ di $C_m \triangleright K_n$. Misalkan simpul $y_{j,n} \in V(H_j \cong K_n)$ yang termuat dalam kelas partisi yang sama S_n, jika simpul-simpul $y_{j,n}$ memiliki jarak yang sama terhadap setiap kelas partisi $S_1, S_2, ..., S_{n-2}$ maka representasi simpul $y_{j,n}$ terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul-simpul $y_{j,n}$ ke kelas partisi S_{n+1}. Berakibat, representasi $r(y_{1,1}|\Pi) \neq ... \neq r(y_{m,1}|\Pi)$ sehingga simpul $y_{j,n}$ terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

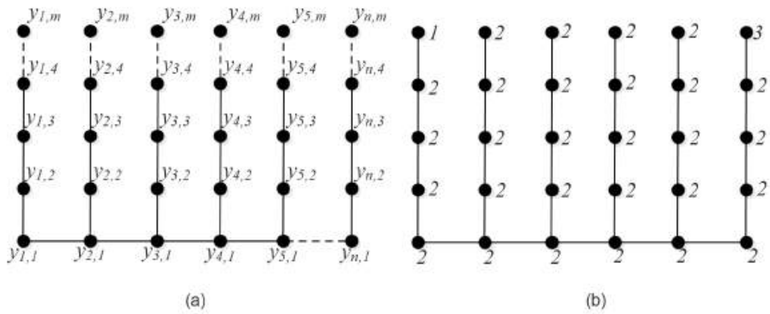
c. Perhatikan setiap simpul-simpul daun di $j = 1, 2$ dan $2 \leq i \leq n-1$ bahwa simpul-simpul tersebut $y_{j,i}$ di $C_m \triangleright K_n$. Simpul $y_{j,i}$ termasuk dalam kelas partisi singleton sehingga memiliki representasi simpul yang berbeda dan representasi simpul $y_{j,i}$ dibedakan oleh kelas partisi S_{n-2} dan S_{n+1}.

d. Setiap simpul daun $u, v \in V(H_j \cong K_n)$ dengan $3 \leq j \leq m$ dan simpul u, v termuat dalam kelas partisi singleton selain kelas partisi S_1. Jika setiap simpul u, v memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1 maka representasi simpul u, v terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul-simpul u, v ke kelas partisi S_2 and S_{n+1}. Berakibat, representasi $r(y_{3,i}|\Pi) \neq ... \neq r(y_{m,i}|\Pi)$ dengan $2 \leq i \leq n$ sehingga simpul u, v terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_m \triangleright K_n$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n+1}\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_m \triangleright K_n$. Sehingga $|\Pi| = n + 1$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan $n + 1$. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ yang dapat ditulis $pd(C_m \triangleright K_n) \leq n + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$. Misalkan suatu partisi pembeda dari $C_m \triangleright K_n$ dengan $|\Pi| = n$ sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ terdiri dari nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $C_m \triangleright K_n$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Pandang simpul-simpul di kelas partisi S_{n+1} diganti menjadi kelas partisi S_n sehingga dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ dengan $S_n = \{y_{j,1}|1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{j,n}|1 \leq j \leq 2\}$, $S_{i-1} = \{y_{j,i}|1 \leq j \leq 2, 2 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{j,2}|3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1, j\text{gasal}\} \cup \{y_{j,2}|\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m, j\text{genap}\}$, $S_i = \{y_{j,i}|3 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1, j\text{gasal}\} \cup \{y_{j,i}|3 \leq i \leq n, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m, j\text{genap}\}$ dan $S_i = \{y_{j,i}|2 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1, j\text{genap}\} \cup \{y_{j,i}|2 \leq i \leq n, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m, j\text{gasal}\}$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{j,1}|\Pi) = r(y_{j,n}|\Pi) = (j, 3, \underbrace{1, ..., 1}_{n-3}, 0)$ untuk $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ dengan j gasal atau $r(y_{j,1}|\Pi) = r(y_{j,n}|\Pi) = (m-j+3, 3, \underbrace{1, ..., 1}_{n-3}, 0)$ untuk $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq j \leq m$ dengan j genap. Jadi Π dengan $|\Pi| = n$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan n bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan sebagai batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ dapat ditulis $pd(C_m \triangleright K_n) \geq n + 1$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ adalah $n + 1 \leq pd(C_m \triangleright K_n) \leq n + 1$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_m \triangleright K_n$ adalah $pd(C_m \triangleright K_n) = n + 1$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. $\square$



Gambar 4.13: (a) Graf Hasil Operasi $P_n \rhd_\delta P_m$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda $P_6 \rhd_\delta P_5$

4.1.7 Dimensi Partisi Graf Lintasan Comb Graf Lintasan

Graf hasil operasi *comb* antara graf lintasan P_n dengan graf lintasan P_m dihasilkan dari menduplikat graf lintasan P_m sebanyak n simpul di graf lintasan P_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf lintasan P_m pada setiap simpul graf lintasan P_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $P_n \rhd_\delta P_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali graf lintasan P_m yang memiliki himpunan simpul $V(P_n \rhd_\delta P_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \rhd_\delta P_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$. Graf $P_n \rhd_\delta P_m$ memiliki nm buah simpul dan $nm - 1$ buah sisi. Graf $P_n \rhd_\delta P_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.13 (a).

Pada subbab ini, akan dibahas dimensi partisi pada graf $P_n \rhd_\delta P_m$ dengan $m, n \in Z^+$. Jika $n = 1$, graf P_1 adalah graf trivial maka graf hasil operasi *comb* $P_1 \rhd_\delta P_m$ isomorfik dengan lintasan P_m dan jika $m = 1$, graf P_1 adalah graf trivial maka graf hasil operasi *comb* $P_n \rhd_\delta P_1$ isomorfik dengan lintasan P_n sedemikian sehingga order lintasan P_n dan lintasan P_m masing masing $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Dalam menentukan dimensi partisi suatu graf $P_n \rhd_\delta P_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$. Dimensi partisi mensyaratkan semua himpunan simpul elemen Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.9. *Diberikan dua graf terhubung P_n dan P_m dengan masing-masing ordernya n dan m dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ dengan simpul pelekatan dari graf lintasan P_m berderajat satu, maka dimensi partisi graf hasil operasi comb $P_n \rhd_\delta P_m$ adalah*

$$pd(P_n \rhd_\delta P_m) = \begin{cases} 2, & \textit{jika } n = 2 \\ 3, & \textit{jika } n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright_\delta P_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright_\delta P_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai n dibagi menjadi dua kasus yaitu kasus pertama untuk $n = 2$, sedangkan kasus kedua untuk $n \geq 3$.

Kasus 1: Untuk $n = 2$ dan $m \geq 2$

Untuk $n = 2$ dan $m \geq 2$, graf $P_2 \triangleright_\delta P_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright_\delta P_m) = \{y_{1,1}, y_{1,2}\} \cup \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq 2, 2 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright_\delta P_m) = \{y_{1,1}y_{1,2}\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 2 \leq j \leq m-1\}$, maka simpul-simpul $y_{1,m}$ dan $y_{2,m}$ berderajat satu dan simpul $u \in V(P_2 \triangleright_\delta P_m) - \{y_{1,m}, y_{2,m}\}$ berderajat dua sehingga graf $P_2 \triangleright_\delta P_m$ isomorfik dengan graf lintasan P_{2m}.

Berdasarkan Teorema 2.3 (i) menyatakan bahwa dimensi partisi graf lintasan $pd(P_{2m}) = 2$. Dikarenakan graf $P_2 \triangleright_\delta P_m$ isomorfik dengan graf P_{2m} maka dimensi partisi dari graf $P_2 \triangleright_\delta P_m$ adalah $pd(P_2 \triangleright_\delta P_m) = 2$ untuk $m \geq 2$.

Kasus 2: Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$

Dimensi partisi graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ dengan mn buah simpul adalah 3 untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, dikarenakan untuk $m = 4$ dan $n = 3$ membentuk suatu pola sehingga dapat diperoleh bentuk umum dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ adalah 3 dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(P_n \triangleright_\delta P_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.13 (b).

Misalkan Π adalah suatu partisi pembeda dari $V(P_n \triangleright_\delta P_m)$ dengan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga: $S_1 = \{y_{1,m}\}$, $S_2 = \{y_{1,j} | 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{n,j} | 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{i,j} | 2 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ dan $S_3 = \{y_{n,m}\}$, akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Berikut ini akan dilakukan observasi pada graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ dengan simpul-simpul $y_{i,j}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, sebagai berikut:

$r(y_{i,1}|\Pi) = (m + i - 2, 0, m + n - i - 1)$; jika $1 \leq i \leq n$

$r(y_{1,m}|\Pi) = (0, 1, 2m + n - 3)$

$r(y_{n,m}|\Pi) = (2m + n - 3, 1, 0)$

$r(y_{1,j}|\Pi) = (m - j, 0, m + n + j - 3)$; jika $2 \leq j \leq m - 1$

$r(y_{n,j}|\Pi) = (m+n+j-3, 0, m-j)$; jika $2 \leq j \leq m-1$
$r(y_{i,j}|\Pi) = (m+j+i-3, 0, m+n+j-i-2)$; jika $2 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq m$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$. Sehingga $|\Pi| = 3$.

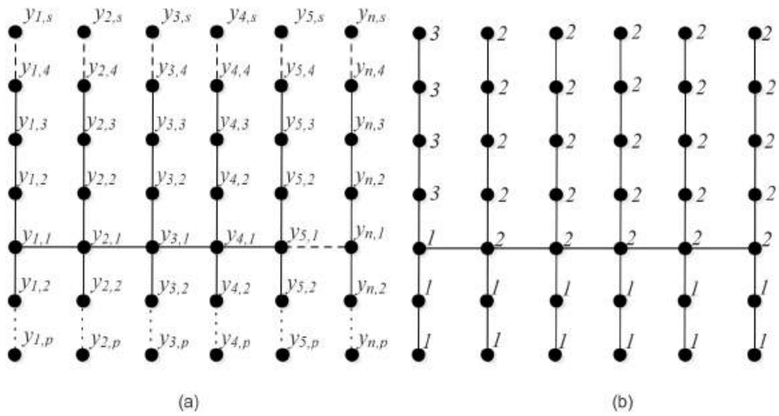
Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan 3. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan sebagai batas atas dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ sehingga dapat ditulis $pd(P_n \triangleright_\delta P_m) \leq 3$.

Batas bawah dari dimensi partisi graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ dapat merujuk pada Teorema 2.3 (i) menyatakan bahwa $\mathrm{pd}(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G isomorfik dengan lintasan P_n. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ graf hasil operasi $comb$ $P_n \triangleright_\delta P_m$ tidak isomorfik dengan lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$, yaitu $pd(P_n \triangleright_\delta P_m) \geq 3$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ adalah $3 \leq pd(P_n \triangleright_\delta P_m) \leq 3$. Jadi, dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ yaitu $pd(P_n \triangleright_\delta P_m) = 3$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. □

Sekarang, akan membahas dimensi partisi pada graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ dengan $m, n \in Z^+$ dan salah satu simpul $v \in P_m$ yang dilekatkan ke setiap simpul $u \in P_n$ dan simpul v mempunyai derajat sama dengan dua. Jika $n = 2$, graf P_2 merupakan lintsan dan setiap simpul di P_2 tidak berderajat dua dan jika $m = 2$, graf P_2 merupakan lintsan dan setiap simpul di P_2 tidak berderajat dua, sedemikian sehingga order lintsan P_n dan lintasan P_m masing-masing $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.14 (a). Dalam menentukan dimensi partisi suatu graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$. Dimensi partisi mensyaratkan partisi pembeda Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.10. *Misalkan P_n adalah graf lintasan order n dan P_m adalah graf lintasan order m dengan simpul pelekatan dari P_m yang berderajat dua. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, dimensi partisi graf hasil operasi comb $P_n \triangleright_\Delta P_m$ adalah $pd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = 3$.*

Bukti: Misalkan graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright_\Delta P_m) = \{y_{i,k}|1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\} \cup \{y_{i,l}|1 \leq i \leq n, 2 \leq l \leq m-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright_\Delta P_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1}|1 \leq i \leq$



Gambar 4.14: (a) Graf Hasil Operasi $P_n \triangleright_\triangle P_m$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda $P_6 \triangleright_\triangle P_7$

$n-1\} \cup \{y_{i,k}y_{i,k+1}|1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq p-1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\} \cup \{y_{i,l}y_{j,l+1}|1 \leq i \leq n, 2 \leq l \leq m-p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\} \cup \{y_{i,1}y_{i,2}|1 \leq i \leq n\}$. Dimensi partisi graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ dengan mn buah simpul adalah 3 untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, dikarenakan untuk $m = 3$ dan $n = 3$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$, maka dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ adalah m dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan.

Batas bawah dari dimensi partisi graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ dapat merujuk pada Teorema 2.3 (i) menyatakan bahwa $\text{pd}(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G isomorfik dengan lintasan P_n. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ graf hasil operasi $comb$ $P_n \triangleright_\triangle P_m$ tidak isomorfik dengan lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$, yaitu $pd(P_n \triangleright_\triangle P_m) \geq 3$. Selanjutnya, untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(P_n \triangleright_\triangle P_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.14 (b). Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga $S_i = \{y_{1,k}|1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\} \cup \{y_{i,k}|2 \leq i \leq n, 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\}$, $S_2 = \{y_{i,1}|2 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,l}|2 \leq i \leq n, 2 \leq l \leq m-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\}$ dan $S_3 = \{y_{i,l}|2 \leq l \leq m-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Penulisan representasi setiap simpul dapat dinyatakan dalam bentuk lebih umum yang bergantung pada nilai n dan m. Dalam kasus ini, dapat dinyatakan dalam beberapa parameter yaitu nilai k, l yang bergantung pada nilai p dan jua nilai p bergantung pada nilai n. Sebagai ilustrasi, jika diambil nilai $n = 6$ maka nilai $2 \leq p \leq \lceil \frac{6}{2} \rceil = 3$. Nilai k bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq k \leq 2$ atau $k \in \{2\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq k \leq 3$ atau $k \in \{2, 3\}$. Nilai l bergantung pada nilai p sedemikian sehingga jika $p = 2$ maka $2 \leq l \leq 6-2+1 = 5$ atau $l \in \{2, 3, 4, 5\}$ dan untuk $p = 3$ maka $2 \leq l \leq 6 - 3 + 1 = 4$ atau $l \in \{2, 3, 4\}$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, sebagai berikut:

$r(y_{1,k}|\Pi) = (0, k, k)$; jika $1 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$

$r(y_{i,k}|\Pi) = (0, k-1, i+k-1)$; jika $2 \leq i \leq n,\ 2 \leq k \leq p, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$

$r(y_{i,l}|\Pi) = (l, 0, i+l-1)$; jika $2 \leq i \leq n,\ 2 \leq l \leq m-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$

$r(y_{i,1}|\Pi) = (1, 0, i)$; jika $2 \leq i \leq n$

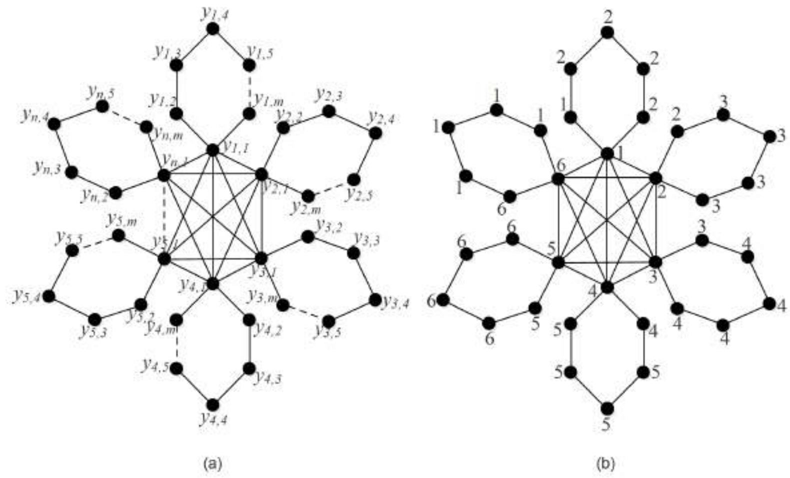
$r(y_{1,l}|\Pi) = (l-1, l, 0)$; jika $2 \leq l \leq m-p+1, 2 \leq p \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$. Sehingga $|\Pi| = 3$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π adalah 3. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ adalah $pd(P_n \triangleright_\Delta P_m) \leq 3$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $3 \leq pd(P_n \triangleright_\Delta P_m) \leq 3$. Jadi dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ adalah $pd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = 3$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. □

4.1.8 Dimensi Partisi Graf Lengkap Comb Graf Lingkaran

Graf hasil operasi *comb* antara graf lengkap K_n dengan graf lingkaran C_m dihasilkan dari menduplikat graf lingkaran C_m sebanyak n simpul di graf lengkap K_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf lingkaran C_m pada setiap simpul graf lengkap K_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $K_n \triangleright C_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali graf lingkaran C_m yang memiliki himpunan simpul $V(K_n \triangleright C_m) = \{y_{i,j}|1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_n \triangleright C_m) = \{y_{i,1}y_{i+k,1}|1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-i\} \cup \{y_{i,1}y_{i,m}|1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}|1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$. Graf $C_n \triangleright C_m$ memiliki nm buah simpul dan $\frac{n^2+2mn-n}{2}$ buah sisi. Graf $C_n \triangleright C_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.15 (a).

Pada subbab ini, akan dibahas dimensi partisi pada graf $K_n \triangleright C_m$ dengan $m, n \in Z^+$. Jika $m = 2$, graf C_2 adalah graf lunar atau graf tidak sederhana yang memiliki sisi ganda dan jika $n = 2$, graf K_2 isomorfik dengan graf lintasan P_2 maka graf hasil operasi *comb* $K_2 \triangleright C_m$ isomorfik dengan $P_2 \triangleright C_m$, sedemikian sehingga order



Gambar 4.15: (a) Graf Hasil Operasi $K_n \triangleright C_m$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda $K_6 \triangleright C_6$

graf lengkap K_n dan lingkaran C_m masing-masing $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Dalam menentukan dimensi partisi suatu graf $K_n \triangleright C_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright C_m$. Dimensi partisi mensyaratkan semua himpunan simpul elemen Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.11. *Diberikan dua graf terhubung K_n dan C_m dengan masing-masing ordernya n dan m dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka dimensi partisi graf hasil operasi comb $K_n \triangleright C_m$ adalah $pd(K_n \triangleright C_m) = n$*

Bukti: Misalkan graf $K_n \triangleright C_m$ memiliki himpunan simpul $V(K_n \triangleright C_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_n \triangleright C_m) = \{y_{i,1}y_{i+k,1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-i\} \cup \{y_{i,1}y_{i,m} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$. Dimensi partisi graf $K_n \triangleright C_m$ dengan mn buah simpul adalah n dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ dikarenakan untuk $n = 3$ dan $m = 6$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $K_n \triangleright C_m$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $K_n \triangleright C_m$ adalah n dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan.

Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(K_n \triangleright C_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $K_n \triangleright C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.15 (b). Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,1}, y_{1,2}, y_{n,j} | 3 \leq j \leq m\}$ dan $S_i = \{y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i-1,j} | 2 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq m\}$, akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $K_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Berikut ini akan dilakukan observasi pada graf $K_n \triangleright C_m$ dengan simpul-simpul $y_{i,j}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_n \triangleright C_m$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, sebagai berikut:

$r(y_{i,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i})$; jika $1 \leq i \leq n$

$r(y_{i,2}|\Pi) = (\underbrace{2, ..., 2}_{i-1}, 0, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{n-i-1})$; jika $1 \leq i \leq n-1$

$r(y_{n,2}|\Pi) = (1, 2, ..., 2, 0)$

$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{j, ..., j}_{i-1}, j-2, 0, \underbrace{j, ..., j}_{n-i-1})$; jika $1 \leq i \leq n-1$,$3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$

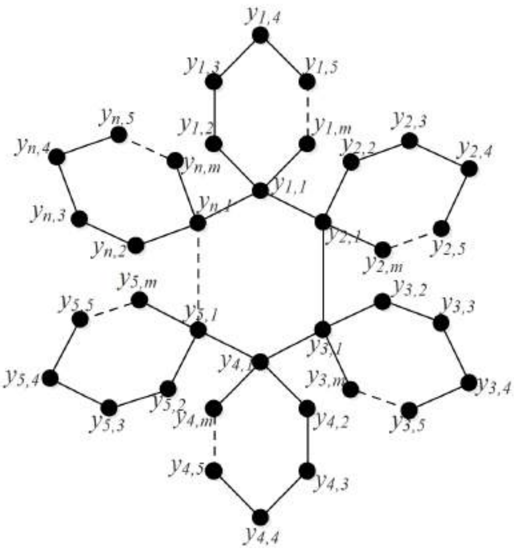
$r(y_{i,j}|\Pi) = (\underbrace{m-j+2, ..., m-j+2}_{i-1}, m-j+1, 0, \underbrace{m-j+2, ..., m-j+2}_{n-i-1})$; jika $1 \leq i \leq n-1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$

$r(y_{n,j}|\Pi) = (0, \underbrace{j, ..., j}_{n-2}, j-2)$; jika $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$

$r(y_{n,j}|\Pi) = (0, \underbrace{m-j+2, ..., m-j+2}_{n-2}, m-j+1)$; jika$\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $K_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $K_n \triangleright C_m$. Sehingga $|\Pi| = n$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan n. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright C_m$ yang dapat ditulis $pd(K_n \triangleright C_m) \leq n$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright C_m$, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari graf $K_n \triangleright C_m$ memiliki kardinalitas kurang dari n. Misalkan suatu partisi pembeda dari $K_n \triangleright C_m$ dengan $|\Pi| = n-1$ maka akan terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ terdiri dari nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan graf $K_n \triangleright C_m$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, dapat dipilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n-1}\}$ dengan $S_1 = \{y_{1,1}, y_{1,2}, y_{n,j}, y_{n-1,j} | 3 \leq j \leq m\}$, $S_i = \{y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i-1,j} | 2 \leq i \leq n-1, 3 \leq j \leq m\}$ dan $S_{n-1} = \{y_{n,1}, y_{n,2}\}$, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{n,1}|\Pi) = r(y_{n-1,1}|\Pi) = (\underbrace{1, ..., 1}_{n-2}, 0)$ dikarenakan simpul $y_{n,1}$ dan $y_{n-1,1}$ terdapat dalam kelas partisi yang sama dan memiliki jarak $d(y_{n,1}, S_i)$ dan $d(y_{n-1,1}, S_i)$ dengan $S_i \in \Pi$, $1 \leq i \leq k$. Berdasarkan Lemma 2.2, simpul $y_{n,1}$ dan $y_{n-1,1}$ harus berada pada kelas partisi berbeda. Jadi, Π dengan



,

Gambar 4.16: Graf Hasil Operasi $C_n \triangleright C_m$

$|\Pi| = n - 1$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan $n - 1$ bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan sebagai batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright C_m$ dapat ditulis $pd(K_n \triangleright C_m) \geq n$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright C_m$ adalah $n \leq pd(K_n \triangleright C_m) \leq n$. Jadi, dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright C_m$ yaitu $pd(K_n \triangleright C_m) = n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. $\square$

4.1.9 Dimensi Partisi Graf Lingkaran Comb Graf Lingkaran

Graf hasil operasi *comb* antara graf lingkaran C_n dengan graf lingkaran C_m dihasilkan dari menduplikat graf lingkaran C_m sebanyak n simpul di graf lingkaran C_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf lingkaran C_m pada setiap simpul graf lingkaran C_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $C_n \triangleright C_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali graf lingkaran C_m yang memiliki himpunan simpul $V(C_n \triangleright C_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m \, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_n \triangleright C_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{n,1}y_{1,1}\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq j \leq m-1, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,m}y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$. Graf $C_n \triangleright C_m$ memiliki nm buah simpul dan $n(m+1)$ buah sisi. Graf $C_n \triangleright C_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.16.

Pada subbab ini, akan dibahas dimensi partisi pada graf $C_n \triangleright C_m$ dengan $m, n \in Z^+$. Jika $m = 2$, graf C_2 adalah graf lunar atau graf tidak sederhana yang memiliki sisi ganda dan jika $n = 2$, graf C_2 adalah graf lunar atau graf tidak sederhana yang memiliki sisi ganda sedemikian sehingga order lingkaran C_n dan lingkaran C_m masing-masing $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Dalam menentukan dimensi partisi suatu graf, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$. Dimensi partisi mensyaratkan semua himpunan simpul elemen Π harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.12. *Diberikan dua graf terhubung C_n dan C_m dengan masing-masing ordernya n dan m dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka dimensi partisi graf hasil operasi comb $C_n \triangleright C_m$ adalah*

$$pd(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} 3, & \textit{jika } n = 3 \\ 4, & \textit{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $C_n \triangleright C_m$ memiliki himpunan simpul $V(C_n \triangleright C_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m \, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_n \triangleright C_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{n,1}y_{1,1}\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq j \leq m-1, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,m}y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi graf $C_n \triangleright C_m$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai n dibagi menjadi dua kasus yaitu kasus pertama untuk $n = 3$, sedangkan kasus kedua untuk $n \geq 4$.

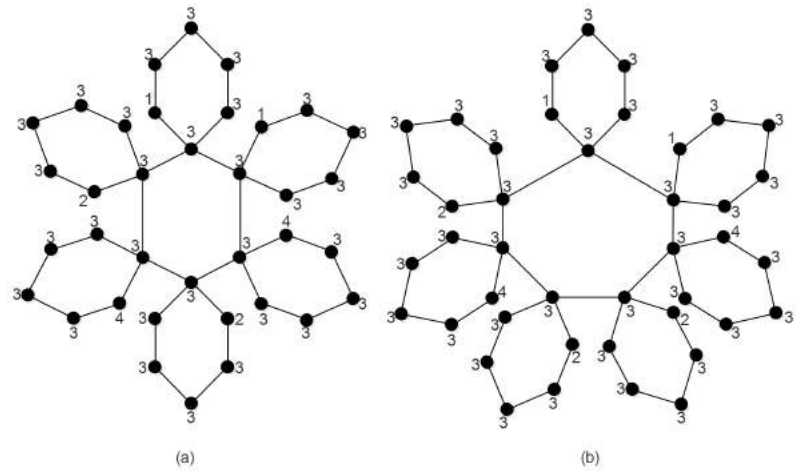
Kasus 1: Untuk $n = 3$ dan $m \geq 3$

Untuk $n = 3$ dan $m \geq 3$, graf $C_3 \triangleright C_m$ dan C_3 isomorfik K_3, maka graf $C_3 \triangleright C_m$ isomorfik dengan graf $K_3 \triangleright C_m$. Berdasarkan Teorema 4.11 menyatakan bahwa dimensi partisi graf $pd(K_3 \triangleright C_m) = 3$ untuk $m \geq 3$. Oleh karena itu, untuk $n = 3$ dan $m \geq 3$ graf $C_3 \triangleright C_m$ memiliki dimensi partisi yaitu $pd(C_3 \triangleright C_m) = 3$. Jadi terbukti bahwa dimensi partisi graf $C_3 \triangleright C_m$ adalah 3.

Kasus 2: Untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$

Dimensi partisi graf $C_n \triangleright C_m$ dengan mn buah simpul adalah 4 untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$, dikarenakan untuk $m = 3$ dan $n = 4$ membentuk suatu pola. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diperoleh bentuk umum dari graf $C_n \triangleright C_m$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$, maka dapat dibuktikan bahwa dimensi partisi graf $C_n \triangleright C_m$ adalah 4 dengan membentuk sebuah teorema dan dibuktikan. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi $pd(C_n \triangleright C_m)$ dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda Π pada graf $C_n \triangleright C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.17 (a). Perhatikan dua kasus berikut:

Untuk n genap dan $m \geq 3$. Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,2}, y_{2,2}\}$, $S_2 = \{y_{i,2} | 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap}\}$,



Gambar 4.17: (a) Konstruksi Partisi Pembeda $C_6 \triangleright C_6$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda $C_7 \triangleright C_6$

$S_3 = \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq n,\ 3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$ dan $S_4 = \{y_{i,2} | 3 \leq i \leq n,\ i$ gasal$\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Berikut ini akan dilakukan observasi pada graf $C_n \triangleright C_m$. Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_n \triangleright C_m$ untuk n genap adalah berbeda. Untuk membuktikan, pandang bahwa simpul-simpul di graf $C_n \triangleright C_m$ dibedakan menjadi simpul dalam yang berada pada lingkaran C_n dan simpul daun yang berada pada subgraf $H_i \cong C_m$, perhatikan beberapa kondisi berikut ini:

a. Pandang $u, v \in V(C_n \triangleright C_m)$ merupakan simpul dalam di $C_n \triangleright C_m$ yang termuat dalam kelas partisi yang sama S_3, jika simpul-simpul u, v memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1 yaitu $d(u, S_1) = d(v, S_1)$ maka representasi simpul u, v terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul-simpul u, v ke kelas partisi S_2 and S_4. Berakibat, representasi $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ sehingga simpul u, v terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

b. Perhatikan setiap simpul-simpul daun u, v di $C_n \triangleright C_m$. Misalkan simpul $u, v \in H_i \cong C_m$ yang termuat dalam kelas partisi yang sama S_3, jika simpul-simpul u, v memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1 yaitu $d(u, S_1) = d(v, S_1)$ maka representasi simpul u, v terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul-simpul u, v ke kelas partisi S_2 and S_4. Berakibat, representasi $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ sehingga simpul u, v terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

c. Untuk setiap simpul u, v di di simpul daun dan simpul u, v tidak berada pada kelas partisi S_3 maka representasi simpul u, v terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul u, v ke kelas partisi S_1. Berakibat, representasi $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ sehingga simpul u, v terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ merupakan partisi pembeda dari graf tersebut. Sehingga $|\Pi| = 4$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan 4. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$ yang dapat ditulis $pd(C_n \triangleright C_m) \leq 4$.

Selanjutnya, untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari graf $C_n \triangleright C_m$ memiliki kardinalitas kurang dari 4. Misalkan suatu partisi pembeda dari $C_n \triangleright C_m$ dengan $|\Pi| = 3$ maka akan terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk n genap dan $m \geq 3$ terdiri dari $n + 1$ buah *cycle* dan nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{y_{1,2}, y_{2,2}\}$, $S_2 = \{y_{i,2}|3 \leq i \leq n,\ i \text{ genap}\}$ dan $S_3 = V(C_m \triangleright C_n) - (S_1 \cup S_2)$ maka dapat kita pilih sebarang $y_{i,2}, y_{i,m} \in S_3$ untuk $3 \leq i \leq n$ dengan i gasal dan simpul $y_{i,2}, y_{i,m}$ memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1, S_2 misalkan $d(y_{i,2}, S_1) = d(y_{i,m}, S_1) = i$, $d(y_{i,2}, S_2) = d(y_{i,m}, S_2) = 3$ untuk $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$ dengan i gasal dan $d(y_{i,2}, S_1) = d(y_{i,m}, S_1) = n - i + 3$, $d(y_{i,2}, S_2) = d(y_{i,m}, S_2) = 3$ untuk $\frac{n}{2} + 2 \leq i \leq n$ dengan i gasal sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{i,2}|\Pi) = r(y_{i,m}|\Pi) = (i, 3, 0)$ untuk $3 \leq i \leq \frac{n}{2}+1$ dengan i gasal dan $r(y_{i,2}|\Pi) = r(y_{i,m}|\Pi) = (n - i + 3, 3, 0)$ untuk $\frac{n}{2} + 2 \leq i \leq n$ dengan i gasal. Jadi kardinalitas partisi pembeda adalah $|\Pi| = 3$ bukan merupakan partisi pembeda.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan 3 bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$ yang dapat ditulis $pd(C_n \triangleright C_m) \geq 4$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$ adalah $4 \leq pd(C_n \triangleright C_m) \leq 4$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$ adalah $pd(C_n \triangleright C_m) = 4$ untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$.

Untuk n gasal dan $m \geq 3$, Ambil partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sedemikian sehingga $S_1 = \{y_{1,2}, y_{2,2}\}$, $S_2 = \{y_{i,2}|1 \leq i \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1,\ i \text{ genap}\} \cup$

$\{y_{i,2}|\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \leq i \leq n,\ i$ gasal$\}$, $S_3 = \{y_{i,j}|1 \leq i \leq n,\ 3 \leq j \leq m\} \cup \{y_{i,1}|1 \leq i \leq n\}$ dan $S_4 = \{y_{i,2}|1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1,\ i$ gasal$\} \cup \{y_{i,2}|\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \leq i \leq n,\ i$ genap$\}$ akan ditunjukkan bahwa semua simpul di graf $C_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Hasil observasi pada graf $C_n \triangleright C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.17 (b). Dari hasil observasi, didapat representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_n \triangleright C_m$ untuk n gasal adalah berbeda. Untuk membuktikan, pandang bahwa simpul-simpul di graf $C_n \triangleright C_m$ dibedakan menjadi simpul dalam yang berada pada lingkaran C_n dan simpul daun yang berada pada subgraf $H_i \cong C_m$, perhatikan beberapa kondisi berikut ini:

a. Pandang $u, v \in V(C_n \triangleright C_m)$ merupakan simpul dalam di $C_n \triangleright C_m$ yang termuat dalam kelas partisi yang sama S_3, jika simpul-simpul u, v memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1 yaitu $d(u, S_1) = d(v, S_1)$ maka representasi simpul u, v terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul-simpul u, v ke kelas partisi S_2 and S_4. Berakibat, representasi $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ sehingga simpul u, v terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

b. Perhatikan setiap simpul-simpul daun u, v di $C_n \triangleright C_m$. Misalkan simpul $u, v \in H_i \cong C_m$ yang termuat dalam kelas partisi yang sama S_3, jika simpul-simpul u, v memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1 yaitu $d(u, S_1) = d(v, S_1)$ maka representasi simpul u, v terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul-simpul u, v ke kelas partisi S_2 and S_4. Berakibat, representasi $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ sehingga simpul u, v terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

c. Untuk setiap simpul u, v di di simpul daun dan simpul u, v tidak berada pada kelas partisi S_3 maka representasi simpul u, v terhadap Π dibedakan oleh jarak simpul u, v ke kelas partisi S_1. Berakibat, representasi $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ sehingga simpul u, v terhadap Π memiliki representasi simpul yang berbeda.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua simpul dari graf $C_n \triangleright C_m$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $C_n \triangleright C_m$. Sehingga $|\Pi| = 4$. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas Π sama dengan 4. Namun, Π belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas atas dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$ yang dapat ditulis $pd(C_n \triangleright C_m) \leq 4$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari graf $C_n \triangleright C_m$ memiliki kardinalitas kurang dari

4. Misalkan suatu partisi pembeda dari $C_n \triangleright C_m$ dengan $|\Pi| = 3$ maka akan terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Untuk n gasal dan $m \geq 3$ terdiri dari $n+1$ $cycle$ dan nm buah simpul, maka terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{y_{1,2}, y_{2,2}\}$, $S_2 = \{y_{i,2} | 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1,\ i \text{ genap}\} \cup \{y_{i,2} | \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \leq i \leq n,\ i \text{ gasal}\}$ dan $S_3 = V(C_m \triangleright P_n) - (S_1 \cup S_2)$ maka dapat kita pilih sebarang $y_{i,2}, y_{i,m} \in S_3$ untuk $3 \leq i \leq n$ dan simpul $y_{i,2}, y_{i,m}$ memiliki jarak yang sama terhadap kelas partisi S_1, S_2 misalkan $d(y_{i,2}, S_1) = d(y_{i,m}, S_1) = i$, $d(y_{i,2}, S_2) = d(y_{i,m}, S_2) = 3$ untuk $3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ dengan i gasal dan $d(y_{i,2}, S_1) = d(y_{i,m}, S_1) = n - i + 3$, $d(y_{i,2}, S_2) = d(y_{i,m}, S_2) = 3$ untuk $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \leq i \leq n$ dengan i genap sehingga terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama, yaitu $r(y_{i,2}|\Pi) = r(y_{i,m}|\Pi) = (i, 3, 0)$ untuk $3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ dengan i gasal dan $r(y_{i,2}|\Pi) = r(y_{i,m}|\Pi) = (n - i + 3, 3, 0)$ untuk $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \leq i \leq n$ dengan i genap. Jadi kardinalitas partisi pembeda adalah $|\Pi| = 3$ bukan merupakan partisi pembeda.

Oleh karena itu, diperoleh bahwa Π dengan kardinalitas Π sama dengan 3 bukan merupakan suatu partisi pembeda. Oleh sebab itu, dapat dikatakan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$ adalah $pd(C_n \triangleright C_m) \geq 4$. Dengan demikian, batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$ adalah $4 \leq pd(C_n \triangleright C_m) \leq 4$. Jadi, dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$ adalah $pd(C_n \triangleright C_m) = 4$ untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$. □

4.2 Dimensi Partisi Bintang Graf Hasil Operasi *Comb* Dua Graf Terhubung

Subbab ini menjelaskan dimensi partisi bintang pada graf hasil operasi *comb*. Dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* tidak dapat digeneralisasi untuk sebarang dua graf. Hal ini dikarenakan dimensi partisi bintang pada masing-masing graf hasil operasi *comb* pasti berbeda, yaitu tergantung pada graf yang dioperasikan dan simpul yang dilekatkan.

Dalam penjelasan berikut ini ditunjukkan dimensi partisi bintang pada operasi *comb* antara dua graf terhubung diantaranya graf lingkaran C_n, graf lintasan P_n, dan graf lengkap K_n. Beberapa hasil operasi $comb$ dari tiga graf terhubung tersebut sebagai berikut graf hasil operasi $comb$ antara graf lingkaran C_m dan graf lintasan P_n, graf lintasan P_n dan graf lingkaran C_m, graf lengkap K_m dan graf lintasan P_n, graf lintasan P_n dan graf lengkap K_m, graf lengkap K_n dan graf lengkap K_m, graf lingkaran C_m dan graf lengkap K_n, graf lengkap K_n dan graf lingkaran C_m, graf lintasan P_n dan graf lintasan P_m dan graf lingkaran C_n dan graf lingkaran C_m.

4.2.1 Dimensi Partisi Bintang Graf Lingkaran Comb Graf Lintasan

Graf hasil operasi comb antara graf lingkaran C_m dengan graf lintasan P_n dihasilkan dari menduplikat graf lintasan P_n sebanyak m simpul di graf lingkaran C_m dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf P_n pada setiap simpul graf C_m, maka dapat dikatakan bahwa graf $C_m \rhd_\delta P_n$ merupakan graf yang terdiri dari m kali Lintasan P_n. Sehingga graf $C_m \rhd_\delta P_n$ memiliki himpunan simpul $V(C_m \rhd_\delta P_n) = \{y_{j,i}|1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \rhd_\delta P_n) = \{y_{j,1}y_{j+1,1}|1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{1,1}y_{m,1}\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+1}|1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1\}$. Graf $C_m \rhd_\delta P_n$ memiliki nm buah simpul dan mn buah sisi. Graf $C_m \rhd_\delta P_n$ ditunjukkan pada Gambar 4.1 (a).

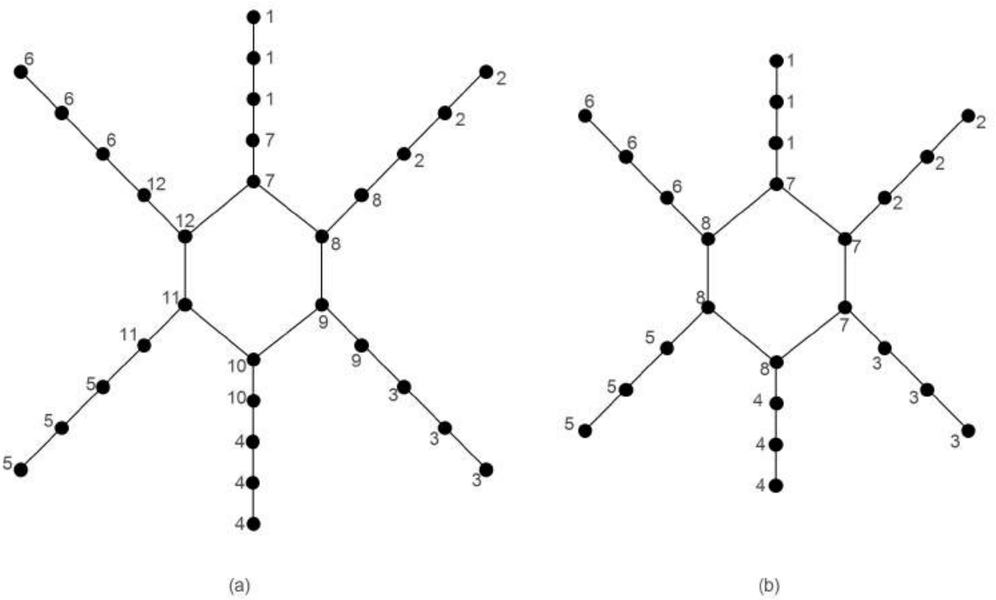
Pada subbab ini, akan dibahas dimensi partisi pada graf $C_m \rhd_\delta P_n$ dengan $m, n \in Z^+$. Untuk $m = 2$, graf C_2 adalah graf yang memiliki sisi ganda sehingga graf C_2 bukan graf sederhana dan untuk $n = 1$, graf P_1 merupakan graf trivial sehingga graf hasil *comb* $C_m \rhd_\delta P_1$ isomorfik dengan lingkaran C_m sedemikian sehingga order lingkaran C_m dan lintasan P_n masing-masing $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Dalam menentukan dimensi partisi bintang graf $C_m \rhd_\delta P_n$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.13. *Diberikan dua graf terhubung C_m dan P_n dengan masing-masing ordernya m dan n dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$ dan simpul pelekatan dari P_n yang berderajat satu, maka dimensi partisi bintang graf hasil operasi comb $C_m \rhd_\delta P_n$ adalah*

$$spd(C_m \rhd_\delta P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil, & \textit{jika } n \equiv 0(mod3),\ n \equiv 2(mod3) \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil, & \textit{jika } n \equiv 1(mod3) \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $C_m \rhd_\delta P_n$ memiliki himpunan simpul $V(C_m \rhd_\delta P_n) = \{y_{j,i}|1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \rhd_\delta P_n) = \{y_{j,1}y_{j+1,1}|1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{1,1}y_{m,1}\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+1}|1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $C_m \rhd_\delta P_n$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai n dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama jika $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, kasus kedua jika $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan kasus ketiga jika $n \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Kasus 1: Untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$



Gambar 4.18: (a) Konstruksi partisi pembeda bintang pada graf $C_6 \rhd_\delta P_5$, (b) Konstruksi partisi pembeda bintang pada graf $C_6 \rhd_\delta P_4$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})}\}$ dengan:

$$S_{\frac{n}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \frac{n}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k, 1 \leq j \leq m\}$$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n}{3}(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \rhd_\delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, adalah

Reprentasi simpul di graf $C_m \rhd_\delta P_n$ untuk m gasal sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-k}, b_{m-j})$; $u_s = i - 3s$, $t_r = 3r - (i-1)$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - k$, $1 \leq k \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq i \leq 3k$, m gasal.

$a = (z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^1_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z_2^1,$ $v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1})$; $z_s^1 = s + i - 2$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$ dan $1 \leq i \leq n$, $z_s^2 = 2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - s + i + 1$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq s \leq m$ dan $1 \leq i \leq n$, $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$, $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$.

$b = (z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z_m^2,$ $w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1})$; $z_s^1 = s + i - 2$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$ dan $1 \leq i \leq n$, $z_s^2 = 2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - s + i + 1$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq s \leq m$ dan $1 \leq i \leq n$, $v_l = z_s^1 + 3l$

dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m genap sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - k}, b_{m-j})$; $u_s = i - 3s$, $t_r = 3r - (i-1)$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - k$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(k-1)+1 \leq i \leq 3k$, m genap.
$a = (z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i - 1, x_1, ..., x_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $z_s^1 = s + i - 2$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ dan $1 \leq i \leq n$, $z_s^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - s + i$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq s \leq m$ dan $1 \leq i \leq n$, $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $x_h = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 3h + i - 1$ dengan $1 \leq h \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$b = (z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i - 1, x_1, ..., x_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $z_s^1 = s + i - 2$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ dan $1 \leq i \leq n$, $z_s^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - s + i$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq s \leq m$ dan $1 \leq i \leq n$, $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $x_h = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 3h + i - 1$ dengan $1 \leq h \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m(\frac{n}{3})$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \leq m(\frac{n}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m \triangleright_\delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n}{3})-1} = \{y_{m,i} | \frac{n}{3} - 1 \leq k \leq \frac{n}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \geq m(\frac{n}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n}{3}) \leq spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \leq m(\frac{n}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m(\frac{n}{3})$ untuk $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$.

Kasus 2: Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$

Simpul-simpul di graf $C_m \rhd_\delta P_n$ dibedakan menjadi simpul daun (*pendant*) merupakan simpul-simpul subgraf P_n dan simpul dalam merupakan simpul-simpul di subgraf lingkaran C_m. Untuk $n \equiv 1(mod\, 3)$, kelas partisi di simpul daun (*pendant*) terpisah dengan kelas partisi di simpul dalam sehingga terdapat tiga kasus untuk nilai m yaitu pertama untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, kedua untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

1. Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$ Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $C_m \rhd_\delta P_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.18 (b). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m}{3}}\}$ dengan:
   $S_{\frac{n-1}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \frac{n-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq i \leq 3k+1, 1 \leq j \leq m\}$
   $S_{m\frac{n-1}{3}+l} = \{y_{j,1} | 1 \leq l \leq \frac{m}{3}, 3(l-1)+1 \leq j \leq 3l\}$
   Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n-1}{3}(j-1)+k}$ dan $S_{m\frac{n-1}{3}+l}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \rhd_\delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:
   Reprentasi simpul di graf $C_m \rhd_\delta P_n$ untuk m gasal sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-k}, c_{m-j}, d)$; $u_s = i - 3s - 1$, $t_r = 3r - (i-2)$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - k$, $1 \leq k \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq i \leq 3k+1$, $1 \leq j \leq m$ dengan m gasal.
   $a = (z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^1_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1})$; $z_s^1 = s+i-1$ dan $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$ dan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $z_s^2 = 2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - s + i + 2$ dan $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq s \leq m$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $2 \leq i \leq n$.
   $c = (z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1})$; $z_s^1 = s+i-1$ dan $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $z_s^2 = 2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - s + i + 2$ dan $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq s \leq m$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $2 \leq i \leq n$.
   $d = (t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t_1^3, i-1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $t_f^1 = (i-1) + (1 + 3(p-1) - j) + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t_f^2 = (i-1)+(j-3(p-1)-1)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3f - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $t_f^3 = (i-1) + (j - 3(p-1) - 1) + 3f - 2$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$;

$t_f^4 = (i-1)+(1+3(p-1)-j)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3f$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq j \leq 3p$, $2 \leq i \leq n$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \rhd_\delta P_n$ untuk m gasal dengan $i = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{j,1}|\Pi_S) = (a_{j-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, c_{m-j}, d)$; $t_r = 1+3r$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $1 \leq j \leq m$ dengan m gasal.
$a = (z_{m-1}^2, t_1^2, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}^2, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1}^2, t_1^2, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}^2, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^1, t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}^1, ..., z_1^1,$ $t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}^1)$; $z_l^1 = l+1$ dan $t_r^1 = z_l^1 + 3r$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1$; $z_l^2 = m-l+1$ dan $t_r^2 = z_l^2 + 3r$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1 \leq l \leq m-1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$c = (z_1^1, t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}^1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^1, t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}^1, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1}^2, t_1^2, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}^2, ..., z_{m-1}^2,$ $t_1^2, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}^2)$; $z_l^1 = l+1$ dan $t_r^1 = z_l^1 + 3r$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1$; $z_l^2 = m-l+1$ dan $t_r^2 = z_l^2 + 3r$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1 \leq l \leq m-1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$d = (t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}^4, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^3, ..., t_1^3, 0, t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^1, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}^2, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}^2)$; $t_f^1 = (1+3(p-1)-j)+3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_f^2 = (j-3(p-1)-1)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3f-2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; $t_f^3 = (j-3(p-1)-1)+3f-2$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_f^4 = (1+3(p-1)-j)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3f$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq j \leq 3p$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \rhd_\delta P_n$ untuk m genap sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -k}, c_{m-j}, d)$; $u_s = i-3s-1$, $t_r = 3r-(i-2)$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - k$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq i \leq 3k+1$, $1 \leq j \leq m$ dengan m genap.
$a = (z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1}^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z_2^1,$ $v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z_s^1 = s+i-1$ dan $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ dan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z_s^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - s + i + 1$ dan $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq s \leq m$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $2 \leq i \leq n$.
$c = (z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1}^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z_m^2,$ $w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z_s^1 = s+i-1$ dan $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z_s^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - s + i + 1$ dan $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq s \leq m$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $2 \leq i \leq n$.

$d = (t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, ..., t^3_1, i-1, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $t^1_f = (i-1) + (1+3(p-1)-j) + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^2_f = (i-1) + (j-3(p-1)-1) + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3f - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $t^3_f = (i-1) + (j-3(p-1)-1) + 3f - 2$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^4_f = (i-1) + (1+3(p-1)-j) + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3f$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$;$t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + i - 3$ dengan $j = 3(p-1)+1$ dan $j = 3p$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + i - 2$ dengan $j = 3(p-1)+2$; $1 \leq p \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq j \leq 3p$, $2 \leq i \leq n$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m genap dengan $i = 1$ sebagai berikut:

$r(y_{j,1}|\Pi_S) = (a_{j-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, c_{m-j}, d)$; $t_r = 1 + 3r$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$, $1 \leq j \leq m$ dengan m genap.

$a = (z^2_{m-1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^1_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_1, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1})$; $z^1_l = l + 1$ dan $t^1_r = z^1_l + 3r$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $z^2_l = m - l + 1$ dan $t^2_r = z^2_l + 3r$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1 \leq l \leq m-1$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$.

$c = (z^1_1, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{m-1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1})$; $z^1_l = l + 1$ dan $t^1_r = z^1_l + 3r$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $z^2_l = m - l + 1$ dan $t^2_r = z^2_l + 3r$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1 \leq l \leq m-1$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$.

$d = (t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $t^1_f = (1+3(p-1)-j) + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^2_f = (j-3(p-1)-1) + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3f - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $t^3_f = (j-3(p-1)-1) + 3f - 2$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^4_f = (1+3(p-1)-j) + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3f$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$;$t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 2$ dengan $j = 3(p-1)+1$ dan $j = 3p$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$ dengan $j = 3(p-1)+2$; $1 \leq p \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq j \leq 3p$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m}{3}}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m\frac{n-1}{3} + \frac{m}{3}$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3} + \frac{m}{3}$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \leq m\frac{n-1}{3} + \frac{m}{3}$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam satu kelas partisi harus sebuah graf bintang $K_{1,2}$ sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3} + \frac{m}{3} - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang $K_{1,2}$. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m \triangleright_\delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m}{3}-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m}{3}-1} = \{y_{j,1}|\frac{m}{3} - 1 \leq l \leq \frac{m}{3}, 3(l-1)+1 \leq j \leq 3l\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3} + \frac{m}{3} - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \geq m\frac{n-1}{3} + \frac{m}{3}$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m\frac{n-1}{3} + \frac{m}{3} \leq spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \leq m\frac{n-1}{3} + \frac{m}{3}$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m\frac{n-1}{3} + \frac{m}{3}$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$.

2. Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m-1}{3}+1}\}$ dengan:
$S_{\frac{n-1}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i}|1 \leq k \leq \frac{n-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq i \leq 3k+1, 1 \leq j \leq m\}$
$S_{m\frac{n-1}{3}+l} = \{y_{j,1}|1 \leq l \leq \frac{m-1}{3}, 3(l-1)+1 \leq j \leq 3l\}$
$S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m-1}{3}+1} = \{y_{m,1}\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n-1}{3}(j-1)+k}$ dan $S_{m\frac{n-1}{3}+l}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m-1}{3}+1}$ merupakan kelas partisi singleton yang berisi sebuah simpul trivial yang juga merupakan graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \triangleright_\delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:
Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m gasal sebagai berikut:
$r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-k}, c_{m-j}, d)$; $u_s = i - 3s - 1$, $t_r = 3r - (i-2)$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - k$, $1 \leq k \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq i \leq 3k+1$, $1 \leq j \leq m$ dengan m gasal.
$a = (z^2_m, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^1_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_2,$

$v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z_s^1 = s + i - 1$ dan $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $2 \le s \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ dan $1 \le l \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z_s^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - s + i + 2$ dan $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le s \le m, 1 \le l \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1; 2 \le i \le n$.

$c = (z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z_s^1 = s + i - 1$ dan $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $2 \le s \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \le l \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z_s^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - s + i + 2$ dan $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le s \le m, 1 \le l \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1; 2 \le i \le n$.

$d = (t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}", t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, ..., t_1^3, i - 1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor})$; $t_f^1 = (i - 1) + (1 + 3(p - 1) - j) + 3f$ dengan $1 \le f \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_f^2 = (i-1)+(j-3(p-1)-1)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \le f \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_f^3 = (i - 1) + (j - 3(p - 1) - 1) + 3f - 2$ dengan $1 \le f \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_f^4 = (i-1)+(1+3(p-1)-j)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f+1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \le f \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = (i - 1) + j$ dengan $1 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = (i - 1) + m - j$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \le j \le m - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + i - 2$ dengan $j = 3(p - 1) + 1$ dan $j = 3(p-1)+2$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + i - 3$ dengan $j = 3p$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}" = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + i - 2$ dengan $j = 3(p - 1) + 2$ dan $j = 3p$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}" = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + i - 3$ dengan $j = 3(p - 1) + 1; 1 \le p \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor, 3(p - 1) + 1 \le j \le 3p, 2 \le i \le n$.

$d = (i, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, i - 1)$; $t_f^5 = i + 3f$ dengan $1 \le f \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_f^6 = (i-1)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le f \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $2 \le i \le n$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \rhd_\delta P_n$ untuk m gasal dengan $i = 1$ sebagai berikut:

$r(y_{j,1}|\Pi_S) = (a_{j-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, c_{m-j}, d)$; $t_r = 1 + 3r, 1 \le r \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $1 \le j \le m$ dengan m gasal.

$a = (z^2_{m-1}, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1}, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z_1^1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z_l^1 = l + 1$ dan $t_r^1 = z_l^1 + 3r$ dengan $1 \le l \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $1 \le r \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z_l^2 = m - l + 1$ dan $t_r^2 = z_l^2 + 3r$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \le l \le m - 1$, $1 \le r \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.

$c = (z_1^1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1}, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{m-1}, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z_l^1 = l + 1$ dan $t_r^1 = z_l^1 + 3r$ dengan $1 \le l \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $1 \le r \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z_l^2 = m - l + 1$ dan $t_r^2 = z_l^2 + 3r$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \le l \le m - 1$, $1 \le r \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.

$d = (t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}", t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, ..., t_1^3, 0, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ...,$

$t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor})$; $t^1_f = (1 + 3(p-1) - j) + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^2_f = (j - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t^3_f = (j - 3(p-1) - 1) + 3f - 2$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^4_f = (1 + 3(p-1) - j) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = j$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = m - j$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq j \leq m - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$ dengan $j = 3(p-1) + 1$ dan $j = 3(p-1) + 2$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 2$ dengan $j = 3p$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}" = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$ dengan $j = 3(p-1) + 2$ dan $j = 3p$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}" = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 2$ dengan $j = 3(p-1) + 1$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(p-1) + 1 \leq j \leq 3p$.
$d = (1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, 0)$; $t^5_f = 1 + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^6_f = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m genap sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - k}, c_{m-j}, d)$; $u_s = i - 3s - 1$, $t_r = 3r - (i-2)$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - k$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(k-1) + 2 \leq i \leq 3k + 1$, $1 \leq j \leq m$ dengan m genap.
$a = (z^2_m, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_2, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z^1_s = s + i - 1$ dan $v_l = z^1_s + 3l$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ dan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z^2_s = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - s + i + 1$ dan $w_l = z^2_s + 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq s \leq m$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $2 \leq i \leq n$.
$c = (z^1_2, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_m, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z^1_s = s + i - 1$ dan $v_l = z^1_s + 3l$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z^2_s = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - s + i + 1$ dan $w_l = z^2_s + 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq s \leq m$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $2 \leq i \leq n$.
$d = (t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^3_1, i-1, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $t^1_f = (i-1) + (1 + 3(p-1) - j) + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_f = (i-1) + (j - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t^3_f = (i-1) + (j - 3(p-1) - 1) + 3f - 2$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_f = (i-1) + (1 + 3(p-1) - j) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = (i-1) + j$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = (i-1) + m - j$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = (i-1) + m - j - 1$ dengan $j = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(p-1) + 1 \leq j \leq 3p$, $2 \leq i \leq n$.
$d = (i, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, i-1)$; $t^5_f = i + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^6_f = (i-1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $2 \leq i \leq n$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m genap dengan $i = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{j,1}|\Pi_S) = (a_{j-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, c_{m-j}, d)$; $t_r = 1 + 3r$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $1 \leq j \leq m$ dengan m genap.
$a = (z^2_{m-1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_1,$
$t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z^1_l = l + 1$ dan $t^1_r = z^1_l + 3r$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z^2_l = m - l + 1$ dan $t^2_r = z^2_l + 3r$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$c = (z^1_1, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{m-1},$
$t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z^1_l = l + 1$ dan $t^1_r = z^1_l + 3r$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z^2_l = m - l + 1$ dan $t^2_r = z^2_l + 3r$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$d = (t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$;
$t^1_f = (1 + 3(p - 1) - j) + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$;
$t^2_f = (j - 3(p - 1) - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$;
$t^3_f = (j - 3(p - 1) - 1) + 3f - 2$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$;
$t^4_f = (1 + 3(p - 1) - j) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$;
$t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = j$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = m - j$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m - 1$;
$t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = m - j - 1$ dengan $j = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(p - 1) + 1 \leq j \leq 3p$.
$d = (1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, 0)$; $t^5_f = 1 + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$;
$t^6_f = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3} + 1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \leq m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3} + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang $K_{1,n}$; $1 \leq n \leq 2$ sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang $K_{1,n}$; $1 \leq n \leq 2$. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m-1}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m-1}{3}} = \{y_{j,1} | l = \frac{m-1}{3}, 3(l-1)+1 \leq j \leq 3l\} \cup \{y_{m,1}\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \geq m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3} + 1 \leq spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \leq m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3} + 1$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$.

3. Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 2(\text{mod } 3)$ Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m-2}{3}+1}\}$ dengan:
$S_{\frac{n-1}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \frac{n-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq i \leq 3k+1, 1 \leq j \leq m\}$
$S_{m\frac{n-1}{3}+l} = \{y_{j,1} | 1 \leq l \leq \frac{m-2}{3}, 3(l-1)+1 \leq j \leq 3l\}$
$S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m-2}{3}+1} = \{y_{m-1,1}, y_{m,1}\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n-1}{3}(j-1)+k}$, $S_{m\frac{n-1}{3}+l}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m-2}{3}+1}$ merupakan kelas partisi yang menginduksi graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \triangleright_\delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 2(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:
Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m gasal sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-k}, c_{m-j}, d)$; $u_s = i - 3s - 1$, $t_r = 3r - (i-2)$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - k$, $1 \leq k \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq i \leq 3k+1$, $1 \leq j \leq m$ dengan m gasal.
$a = (z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^1_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1})$; $z_s^1 = s + i - 1$ dan $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$ dan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $z_s^2 = 2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - s + i + 2$ dan $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq s \leq m$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $2 \leq i \leq n$.
$c = (z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1})$; $z_s^1 = s + i - 1$ dan $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $z_s^2 = 2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - s + i + 2$ dan $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan

$\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq s \leq m, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1; 2 \leq i \leq n.$
$d = (t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}", t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^3_1, i - 1, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor}); t^1_f = (i-1) + (1 + 3(p-1) - j) + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_f = (i-1) + (j - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t^3_f = (i-1) + (j - 3(p-1) - 1) + 3f - 2$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_f = (i-1) + (1 + 3(p-1) - j) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = (i-1) + j$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = (i-1) + m - j$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m - 1$;$t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = (i-1) + m - j - 1$ dengan $j = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + i - 1$ dengan $j = 3(p-1) + 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + i$ dengan $j = 3(p-1) + 2$ dan $j = 3p$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}" = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + i - 1$ dengan $j = 3p$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}" = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + i$ dengan $j = 3(p-1) + 1$ dan $j = 3(p-1) + 2; 1 \leq p \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor, 3(p-1) + 1 \leq j \leq 3p, 2 \leq i \leq n.$
$d = (z^1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, i - 1)$; $z^1 = (i-1) + (1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - j) + 2$ dengan $n - 1 \leq j \leq n$; $t^5_f = z^1 + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^6_f = (i-1) + (j - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{l} \rfloor + i; 2 \leq i \leq n.$

Reprentasi simpul di graf $C_m \rhd_\delta P_n$ untuk m gasal dengan $i = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{j,1}|\Pi_S) = (a_{j-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, c_{m-j}, d); t_r = 1 + 3r, 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1,$ $1 \leq j \leq m$ dengan m gasal.
$a = (z^2_{m-1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_1,$ $t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $z^1_l = l + 1$ dan $t^1_r = z^1_l + 3r$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z^2_l = m - l + 1$ dan $t^2_r = z^2_l + 3r$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$c = (z^1_1, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{m-1},$ $t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $z^1_l = l + 1$ dan $t^1_r = z^1_l + 3r$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z^2_l = m - l + 1$ dan $t^2_r = z^2_l + 3r$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$d = (t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}", t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2}, ...,$ $t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor})$; $t^1_f = (1 + 3(p-1) - j) + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_f = (j - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t^3_f = (j - 3(p-1) - 1) + 3f - 2$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_f = (1 + 3(p-1) - j) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = j$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = m - j$ dengan

$\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m-1$;$t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = m - j - 1$ dengan $j = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ dengan $j = 3(p-1)+1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1$ dengan $j = 3(p-1)+2$ dan $j = 3p$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}" = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ dengan $j = 3p$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}" = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1$ dengan $j = 3(p-1)+1$ dan $j = 3(p-1)+2$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor, 3(p-1)+1 \leq j \leq 3p$.
$d = (z^1, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, 0)$; $z^1 = (1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - j) + 2$ dengan $n-1 \leq j \leq n$; $t_f^5 = z^1 + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_f^6 = (j - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{l} \rfloor + 1$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m genap sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - k}, c_{m-j}, d)$; $u_s = i - 3s - 1$, $t_r = 3r - (i-2)$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - k$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq i \leq 3k+1$, $1 \leq j \leq m$ dengan m genap.
$a = (z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $z_s^1 = s + i - 1$ dan $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ dan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z_s^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - s + i + 1$ dan $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq s \leq m, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1; 2 \leq i \leq n$.
$c = (z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $z_s^1 = s + i - 1$ dan $v_l = z_s^1 + 3l$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z_s^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - s + i + 1$ dan $w_l = z_s^2 + 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq s \leq m, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1; 2 \leq i \leq n$.
$d = (t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t_1^3, i-1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_f^1 = (i-1) + (1 + 3(p-1) - j) + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_f^2 = (i-1) + (j - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_f^3 = (i-1) + (j - 3(p-1) - 1) + 3f - 2$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_f^4 = (i-1) + (1 + 3(p-1) - j) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = (i-1) + j$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = (i-1) + m - j - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \leq j \leq m-1$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor, 3(p-1)+1 \leq j \leq 3p, 2 \leq i \leq n$.
$d = (z^1, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1},, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, i-1)$; $z^1 = (i-1) + (1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - j) + 2$ dengan $n-1 \leq j \leq n$; $t_f^5 = z^1 + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_f^6 = (i-1) + (j - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $2 \leq i \leq n$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m genap dengan $i = 1$ sebagai berikut:

$r(y_{j,1}|\Pi_S) = (a_{j-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, c_{m-j}, d)$; $t_r = 1 + 3r$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $1 \leq j \leq m$ dengan m genap.

$a = (z^2_{m-1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_1, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $z^1_l = l + 1$ dan $t^1_r = z^1_l + 3r$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z^2_l = m - l + 1$ dan $t^2_r = z^2_l + 3r$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.

$c = (z^1_1, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{m-1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $z^1_l = l + 1$ dan $t^1_r = z^1_l + 3r$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $z^2_l = m - l + 1$ dan $t^2_r = z^2_l + 3r$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.

$d = (t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t^1_f = (1 + 3(p-1) - j) + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_f = (j - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t^3_f = (j - 3(p-1) - 1) + 3f - 2$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_f = (1 + 3(p-1) - j) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = j$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} = m - j - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \leq j \leq m - 1$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(p-1) + 1 \leq j \leq 3p$.

$d = (z^1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, , t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, 0)$; $z^1 = (1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - j) + 2$ dengan $n - 1 \leq j \leq n$; $t^5_f = z^1 + 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^6_f = (j - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3f - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq f \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3} + 1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$ yaitu $spd(C_m \rhd_\delta P_n) \leq m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3} + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam satu kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3}}\}$

maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m-2}{3}} = \{y_{j,1} | l = \frac{m-2}{3}, 3(l-1)+1 \leq j \leq 3l\} \cup \{y_{m-1,1}, y_{m,1}\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \geq m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3} + 1 \leq spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \leq m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3} + 1$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Kasus 3: Untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.18 (a). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-2}{3}+m}\}$ dengan:

$S_{\frac{n-2}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \frac{n-2}{3}, 3(k-1)+3 \leq i \leq 3k+2, 1 \leq j \leq m\}$

$S_{m\frac{n-2}{3}+j} = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq 2\}$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n-2}{3}(j-1)+k}$ dan $S_{m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+j}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,n}$; $1 \leq n \leq 2$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \triangleright_\delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m gasal sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-k}, b_{m-j}, c)$; $u_s = i - 3s - 2$, $t_r = 3r - (i-3)$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - k$, $1 \leq k \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(k-1)+3 \leq i \leq 3k+2$, m gasal.

$a = (z^2_m, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^1_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_2, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1})$; $z^1_j = j + i$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$ dan $3 \leq i \leq n$, $z^2_j = 2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - j + i + 3$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$ dan $1 \leq i \leq n$, $v_l = z^1_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$, $w_l = z^2_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$.

$b = (z^1_2, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_m, w_1, ..., w_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1})$; $z^1_j = j + i$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$ dan $3 \leq i \leq n$, $z^2_j = 2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - j + i + 3$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$ dan $1 \leq i \leq n$, $v_l = z^1_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$, $w_l = z^2_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$.

$c = (t^2_m, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}, t^3_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, ..., t^3_2, i-2, t^3_2, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}, t^2_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2}, ..., t^2_m)$; $t^3_j = j + i - 2$

dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ dan $1 \leq i \leq n$, $t_j^2 = (i-1) + (2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 2)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m gasal dengan $i = 1$ sebagai berikut: $r(y_{j,1}|\Pi_S) = (a, 2, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, b)$; $t_r = 2 + 3r$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $z_j^1 = j + 1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $z_j^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $v_l = z_j^1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z_j^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$. m gasal.
$a = (z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $z_j^1 = j + 1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $z_j^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $v_l = z_j^1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z_j^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$b = (\underbrace{t_m^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, t^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, ..., t_1^2}_{j-1}, 0, \underbrace{t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, t^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, ..., t_m^1}_{m-j})$; $t_j^2 = j - 1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $t_j^1 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m gasal dengan $i = 2$ sebagai berikut: $r(y_{j,2}|\Pi_S) = (a, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, b)$; $t_r = 1 + 3r$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $z_j^1 = j + 2$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $z_j^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 4$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $v_l = z_j^1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z_j^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$. m gasal.
$a = (z_m^2, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., z_2^1, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $z_j^1 = j + 2$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $z_j^2 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 4$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $v_l = z_j^1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z_j^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$b = (\underbrace{t_m^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, t^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, ..., t_1^2}_{j-1}, 0, \underbrace{t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}, t^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}, ..., t_m^1}_{m-j})$; $t_j^2 = j$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $t_j^1 = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m genap sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - k}, b_{m-j}, c)$; $u_s = i - 3s - 2$, $t_r = 3r - (i - 3)$, $1 \leq s \leq k - 1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - k$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(k-1) + 3 \leq i \leq 3k + 2$, m genap.

$a = (z^2_m, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i + 1, x_1, ..., x_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_2, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z^1_j = j + i$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ dan $3 \leq i \leq n$, $z^2_j = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + i + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$ dan $3 \leq i \leq n$, $v_l = z^1_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z^2_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $x_h = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 3h + i + 1$ dengan $1 \leq h \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$b = (z^1_2, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i + 1, x_1, ..., x_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_m, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z^1_j = j + i$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ dan $3 \leq i \leq n$, $z^2_j = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + i + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$ dan $3 \leq i \leq n$, $v_l = z^1_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z^2_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $x_h = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 3h + i + 1$ dengan $1 \leq h \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$c = (t^2_m, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i - 1, t^3_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, ..., t^3_2, i - 2, t^3_2, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i - 1, t^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, ..., t^2_m)$; $t^3_j = j + i - 2$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ dan $3 \leq i \leq n$, $t^2_j = (i-1) + (2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 3)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m genap dengan $i = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{j,1}|\Pi_S) = (a, 2, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^1_2, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i + 1, x_1, ..., x_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_m, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, b)$; $t_r = 2 + 3r$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $z^1_j = j + 1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $z^2_j = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $v_l = z^1_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z^2_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, m genap.
$a = (z^2_m, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i + 1, x_1, ..., x_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_2, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z^1_j = j + 1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $z^2_j = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $v_l = z^1_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z^2_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$b = (\underbrace{t^1_m, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, t^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, ..., t^2_1}_{j-1}, 0, \underbrace{t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, t^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, ..., t^1_m}_{m-j})$; $t^2_j = j - 1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $t^1_j = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ untuk m genap dengan $i = 2$ sebagai berikut:
$r(y_{j,2}|\Pi_S) = (a, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^1_2, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i + 1, x_1, ..., x_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_m, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, b)$; $t_r = 1 + 3r$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $z^1_j = j + 2$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $z^2_j = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 4$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $v_l = z^1_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z^2_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, m genap.
$a = (z^2_m, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, w_1, ..., w_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + i +$

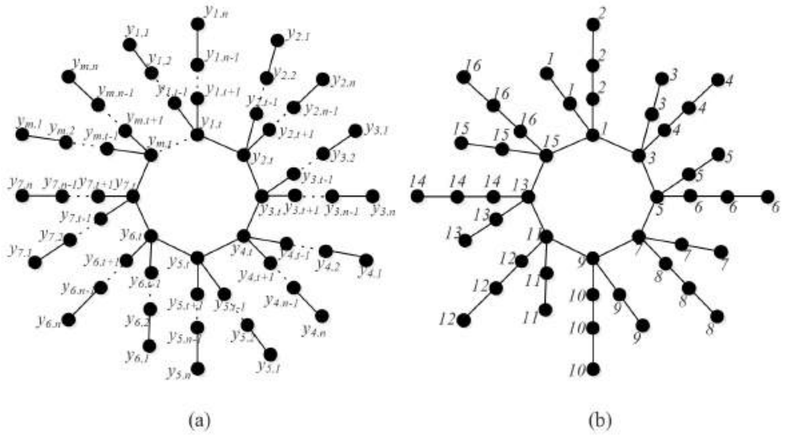
$1, x_1, ..., x_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_2, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1})$; $z^1_j = j + 2$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $z^2_j = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 4$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $v_l = z^1_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $w_l = z^2_j + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$.
$b = (\underbrace{t^1_m, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, t^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, ..., t^2_1}_{j-1}, 0, \underbrace{t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, t^1_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2}, ..., t^1_m}_{m-j})$; $t^2_j = j$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $t^1_j = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - j + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-2}{3}+m}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m\frac{n-2}{3} + m$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n+1}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \leq m(\frac{n+1}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam satu kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n+1}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m \triangleright_\delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n+1}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n+1}{3})-1} = \{y_{j,i} | m - 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq 2\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n+1}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \geq m(\frac{n+1}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n+1}{3}) \leq spd(C_m \triangleright_\delta P_n) \leq m(\frac{n+1}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m(\frac{n+1}{3})$ untuk $n \equiv 2 (\text{mod } 3)$. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 4.18 (b).

Berdasarkan ketiga kasus pembuktian di atas diketahui bahwa $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m(\frac{n}{3})$ untuk $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ dan $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m(\frac{n+1}{3})$ untuk $n \equiv 2 (\text{mod } 3)$ sehingga pada kedua nilai n tersebut dapat digabungkan sedemikian $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m\lceil \frac{n}{3} \rceil$. Sedangkan $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m\frac{n-1}{3} + \frac{m}{3}$ untuk $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0 (\text{mod } 3)$, $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 2 (\text{mod } 3)$ dapat ditulis $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil$. $\square$



Gambar 4.19: (a) Graf Hasil Operasi Comb $C_m \rhd_\Delta P_n$, (b) Konstruksi Partisi pembeda bintang pada graf $C_8 \rhd_\Delta P_6$

Sekarang, kita akan membahas dimensi partisi bintang pada graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ dengan $m, n \in Z^+$ dan salah satu simpul $v \in P_n$ yang dilekatkan ke setiap simpul $u \in C_m$ dan simpul v berderajat dua. Untuk $m = 2$, graf C_2 adalah graf lunar atau graf tidak sederhana yang memiliki sisi ganda dan untuk $n = 3$, partisi pembeda bintang Π_S membentuk pola khusus sedemikian sehingga order lingkaran C_m dan lintasan P_n masing-masing $m \geq 3$ dan $n \geq 4$. Graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ ditunjukkan pada Gambar 4.19 (a). Dalam menentukan dimensi partisi bintang suatu graf $C_m \rhd_\Delta P_n$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan partisi pembeda bintang Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Untuk $n = 3$, andaikan batas bawah dimensi partisi bintang yaitu $spd(C_m \rhd_\Delta P_3) \geq m(\frac{n}{3}) = m$. Berdasarkan Lemma 2.2, terdapat representasi simpul-simpul di $V(C_m \rhd_\Delta P_3)$ yakni $r(y_{j,1}|\Pi_S) = r(y_{j,3}|\Pi_S)$ untuk $1 \leq j \leq m$ berakibat simpul $y_{j,1}$ dan $y_{j,3}$ harus berada pada kelas partisi yang berbeda sehingga batas bawah dimensi partisi bintang:

$$spd(C_m \rhd_\Delta P_3) \geq \underbrace{(\frac{n}{3} + 1) + (\frac{n}{3} + 1) + ... + (\frac{n}{3} + 1)}_{m\ buah} = m(\frac{n}{3} + 1) = 2m$$

Jadi, batas bawah dimensi partisi bintang adalah $spd(C_m \rhd_\Delta P_3) \geq m(\frac{n}{3} + 1) = 2m$. Untuk menentukan batas atas, dapat dikonstruksi partisi pembeda bintang misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2m}\}$ dengan $S_j = \{y_{j,1}, y_{j,2}|1 \leq j \leq m\}$ dan $S_{m+j} = \{y_{j,3}|1 \leq j \leq m\}$ Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada S_j menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$ dan S_{m+j} merupakan kelas partisi yang memuat simpul trivial dapat juga disebut graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi koordinat setiap simpul $v \in V(C_m \rhd_\Delta P_3)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \rhd_\Delta P_3$ berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2m}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $2m$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = 2m$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_3$ yaitu $spd(C_m \rhd_\Delta P_3) \leq 2m$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $2m \leq spd(C_m \rhd_\Delta P_3) \leq 2m$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \rhd_\Delta P_3) = 2m$.

Teorema 4.14. *Misalkan C_m adalah graf lingkaran order m dan P_n adalah graf lintasan order n dengan simpul pelekatan dari P_n yang berderajat dua. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$, dimensi partisi bintang graf hasil operasi comb $C_m \rhd_\Delta P_n$ adalah*

$$spd(C_m \rhd_\Delta P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil, & \textit{jika } n \equiv 0(mod\ 3),\ n \equiv 2(mod\ 3) \\ & \textit{dan } n \equiv 1(mod\ 3),\ 1 < i < n, \\ & i \neq 1(mod\ 3) \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil, & \textit{jika } n \equiv 1(mod\ 3),\ 1 < i < n, \\ & i \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ memiliki himpunan simpul $V(C_m \rhd_\Delta P_n) = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \rhd_\Delta P_n) = \{y_{j,t}y_{j+1,t} | 1 \leq j \leq m-1, i = t, 2 \leq t \leq n-1\} \cup \{y_{1,t}y_{m,t}, i = t, 2 \leq t \leq n-1\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1\}$.Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai n dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama untuk $n \equiv 0$(mod 3), kasus kedua untuk $n \equiv 1$(mod 3), sedangkan kasus ketiga untuk $n \equiv 2$(mod 3).

Kasus 1: Untuk $n \equiv 0$(mod 3)

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.19 (b). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})}\}$ dengan:

$$S_{\frac{n}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \frac{n}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k, 1 \leq j \leq m, i = t, 2 \leq t \leq n-1\}$$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n}{3}(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \triangleright_\Delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ adalah berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m(\frac{n}{3})$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \leq m(\frac{n}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m \triangleright_\Delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n}{3})-1} = \{y_{m,i} | \frac{n}{3} - 1 \leq k \leq \frac{n}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \geq m(\frac{n}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n}{3}) \leq spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \leq m(\frac{n}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m(\frac{n}{3})$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$.

Kasus 2: Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dimana $1 < i < n, i \neq 1(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+m}\}$ dengan:

$S_{\frac{n-1}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \frac{n-1}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k, 1 \leq j \leq m, i = t, 2 \leq t \leq n-1\}$

$S_{\frac{n-1}{3}m+j} = \{y_{j,n} | 1 \leq j \leq m, i = t, 2 \leq t \leq n-1\}$ Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n}{3}(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{\frac{n-1}{3}m+j}$ merupakan kelas partisi singleton yang memuat sebuah graf trivial dapat disebut juga graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \triangleright_\Delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ adalah berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+m}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari

$m(\frac{n-1}{3})+m$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3})+m$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \rhd_\Delta P_n) \leq m(\frac{n+2}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n+2}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m \rhd_\Delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n+2}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n+2}{3})-1} = \{y_{m,i} | k = \frac{n-1}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k\} \cup \{y_{m,n}\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n+2}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \rhd_\Delta P_n) \geq m(\frac{n+2}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n+1}{3}) \leq spd(C_m \rhd_\Delta P_n) \leq m(\frac{n+2}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \rhd_\Delta P_n) = m(\frac{n+2}{3})$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dimana $1 < i < n, i \neq 1(\text{mod } 3)$.

Kasus 3: Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dimana $1 < i < n, i \equiv 1(\text{mod } 3)$

Simpul-simpul di graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ dibedakan menjadi simpul daun (*pendant*) merupakan simpul-simpul subgraf P_n dan simpul dalam merupakan simpul-simpul di subgraf lingkaran C_m. Untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$, kelas partisi di simpul daun (*pendant*) terpisah dengan kelas partisi di simpul dalam sehingga terdapat tiga kasus untuk nilai m yaitu pertama untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, kedua untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

1. Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$ Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3}+\frac{m}{3}}\}$ dengan:
   $S_{l(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq l, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k, 1 \leq j \leq m\}$
   $S_{ml+(\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - l)(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - l, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1, 3l+3(k-1)+2 \leq i \leq 3l+3k+1, 1 \leq j \leq m\}$
   $S_{m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+f} = \{y_{j,t} | 1 \leq f \leq \frac{m}{3}, 3(f-1)+1 \leq j \leq 3f, i = t = 3l+1, 1 \leq l \leq$

$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{l(j-1)+k}$, $S_{ml+(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - l)(j-1)+k}$ dan $S_{m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + f}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \rhd_\Delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+\frac{m}{3}}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m}{3}$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m}{3}$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \rhd_\Delta P_n) \leq m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m}{3}$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang $K_{1,2}$ sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m}{3} - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang $K_{1,2}$. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m \rhd_\Delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+\frac{m}{3}-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n-1}{3})+\frac{m}{3}-1} = \{y_{j,t} | \frac{m}{3} - 1 \leq f \leq \frac{m}{3}, 3(f-1)+1 \leq j \leq 3f, i = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m}{3} - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \rhd_\Delta P_n) \geq m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m}{3}$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m}{3} \leq spd(C_m \rhd_\Delta P_n) \leq m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m}{3}$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \rhd_\Delta P_n) = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m}{3}$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$.

2. Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+\frac{m-1}{3}+1}\}$ dengan:
$S_{l(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq l, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k, 1 \leq j \leq m\}$

$S_{ml+(\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-l)(j-1)+k} = \{y_{j,i}|1 \leq k \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - l, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1, 3l+3(k-1)+2 \leq i \leq 3l+3k+1, 1 \leq j \leq m\}$
$S_{m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+f} = \{y_{j,t}|1 \leq f \leq \frac{m-1}{3}, 3(f-1)+1 \leq j \leq 3f, i = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1\}$
$S_{m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+\frac{m-1}{3}+1} = \{y_{m,t}|i = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{l(j-1)+k}$, $S_{ml+(\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-l)(j-1)+k}$ dan $S_{m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+f}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+\frac{m-1}{3}+1}$ merupakan kelas partisi singleton yang memuat sebuah graf trivial dapat disebut juga graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \triangleright_\Delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+\frac{m-1}{3}+1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-1}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \leq m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-1}{3} + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam satu kelas partisi harus sebuah graf bintang $K_{1,n}$, $1 \leq n \leq 2$, sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-1}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang $K_{1,n}$, $1 \leq n \leq 2$. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+\frac{m-1}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n-1}{3})+\frac{m-1}{3}} = \{y_{j,t}|f = \frac{m-1}{3}, 3(f-1)+1 \leq j \leq 3f, i = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1\} \cup \{y_{m,t}|i = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-1}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \geq m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-1}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-1}{3} + 1 \leq spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \leq m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-1}{3} + 1$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-1}{3} + 1$ untuk

$n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$.

3. Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 2(\text{mod } 3)$ Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+\frac{m-2}{3}+1}\}$ dengan:
$S_{l(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq l, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k, 1 \leq j \leq m\}$
$S_{ml+(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - l)(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - l, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, 3l+3(k-1)+2 \leq i \leq 3l+3k+1, 1 \leq j \leq m\}$
$S_{m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + f} = \{y_{j,t} | 1 \leq f \leq \frac{m-2}{3}, 3(f-1)+1 \leq j \leq 3f, i = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\}$
$S_{m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \frac{m-2}{3}+1} = \{y_{m-1,t}, y_{m,t} | i = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{l(j-1)+k}$, $S_{ml+(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - l)(j-1)+k}$ dan $S_{m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + f}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \frac{m-2}{3}+1}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \triangleright_\Delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+\frac{m-2}{3}+1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-2}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-2}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \leq m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-2}{3} + 1$.

   Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright_\Delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam satu kelas partisi harus sebuah graf bintang $K_{1,n}$, $1 \leq n \leq 2$, sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-2}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang $K_{1,n}$, $1 \leq n \leq 2$. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m \triangleright_\Delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+\frac{m-2}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n-1}{3})+\frac{m-2}{3}} = \{y_{j,t} | f = \frac{m-1}{3}, 3(f-1)+1 \leq j \leq 3f, i = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\} \cup \{y_{m-1,t}, y_{m,t} | i = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas

$|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-1}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \rhd_\Delta P_n) \geq m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-2}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-2}{3} + 1 \leq spd(C_m \rhd_\Delta P_n) \leq m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-2}{3} + 1$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \rhd_\Delta P_n) = m(\frac{n-1}{3}) + \frac{m-2}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$.

Kasus 4: Untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$
Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-2}{3})+m}\}$ dengan:
$S_{\frac{n-2}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \frac{n-2}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k, 1 \leq j \leq m\}$
$S_{m\frac{n-2}{3}+j} = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m, n-1 \leq i \leq n\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n-2}{3}(j-1)+k}$ dan $S_{m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+j}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,n},\ 1 \leq n \leq 2$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \rhd_\Delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-2}{3})+m}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m(\frac{n-2}{3}) + m$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n-2}{3} + 1)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \rhd_\Delta P_n) \leq m(\frac{n+1}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n+1}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m \rhd_\Delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n+1}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n+1}{3})-1} = \{y_{m,i} | k = \frac{n-2}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k\} \cup \{y_{m,i} | n-1 \leq i \leq n\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n+1}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $C_m \rhd_\Delta P_n$ yaitu $spd(C_m \rhd_\Delta P_n) \geq m(\frac{n+1}{3})$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n+1}{3}) \leq spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \leq m(\frac{n+1}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m(\frac{n+1}{3})$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Berdasarkan ketiga kasus pembuktian di atas diketahui bahwa $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m(\frac{n}{3})$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m(\frac{n-1}{3} + 1)$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, $1 < i < n, i \neq 1(\text{mod } 3)$ dan $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m(\frac{n-2}{3} + 1)$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ sehingga pada ketiga nilai n tersebut dapat digabungkan sedemikian $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m\lceil \frac{n}{3} \rceil$. Sedangkan $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m\frac{n-1}{3} + \frac{m}{3}$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, $1 < i < n, i \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-1}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m\frac{n-1}{3} + \frac{m-2}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 2(\text{mod } 3)$ dapat ditulis $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil$. □

4.2.2 Dimensi Partisi Bintang Graf Lintasan Comb Graf Lingkaran

Graf hasil operasi *comb* antara graf lintasan P_n dengan graf lingkaran C_m dihasilkan dari menduplikat graf lingkaran C_m sebanyak n simpul di graf lintasan P_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf C_m pada setiap simpul graf P_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $P_n \triangleright C_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali Lingkaran C_m. Sehingga graf $P_n \triangleright C_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright C_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m \, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Pn \triangleright C_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq j \leq m-1, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,m}y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$. Graf $P_n \triangleright C_m$ memiliki nm buah simpul dan $mn + n - 1$ buah sisi. Graf $P_n \triangleright C_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.3.

Pada subbab ini, akan dibahas dimensi partisi pada graf $P_n \triangleright C_m$ dengan $m, n \in Z^+$. Untuk $n = 1$, graf P_1 merupakan graf trivial maka graf hasil operasi *comb* $P_1 \triangleright C_m$ isomorfik dengan lingkaran C_m dan untuk $m \leq 4$ graf $P_n \triangleright C_m$ membentuk pola khusus sedemikian sehingga order dari P_n dan C_m adalah $n \geq 2$ dan $m \geq 5$. Dalam menentukan dimensi partisi bintang graf $P_n \triangleright C_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \triangleright C_m$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan semua himpunan simpul elemen Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Untuk $m = 3$, andaikan batas bawah dimensi partisi bintang yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m}{3})$. Berdasarkan Lemma 2.2, terdapat representasi simpul-simpul di $V(P_n \triangleright C_m)$ yakni $r(y_{i,2}|\Pi_S) = r(y_{i,3})$ untuk $1 \leq i \leq n$ berakibat simpul $y_{i,2}$ dan $y_{i,3}$ harus berada pada kelas partisi yang berbeda sehingga batas bawah dimensi partisi bintang:

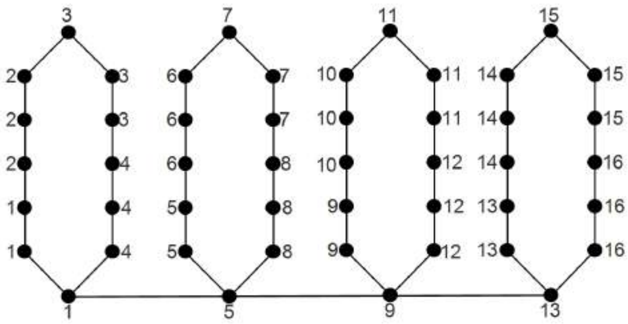
$$spd(P_n \triangleright C_m) \geq \underbrace{(\frac{m}{3}+1)+(\frac{m}{3}+1)+...+(\frac{m}{3}+1)}_{nbuah} = n(\frac{m}{3}+1)$$

Jadi, batas bawah dimensi partisi bintang adalah $spd(P_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m}{3}+1)$. Untuk menentukan batas atas, dapat dikonstruksi partisi pembeda bintang misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3}+1)}\}$ dengan $S_i = \{y_{i,1}, y_{i,2} | 1 \leq i \leq n\}$ dan $S_{n+i} = \{y_{i,3} | 1 \leq i \leq n\}$ Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada S_i menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$ dan S_{n+i} merupakan kelas partisi singleton yang memuat sebuah simpul trivial yang juga disebut graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk $m = 3$ berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3}+1)}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m}{3}+1)$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3}+1)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3}+1)$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m}{3}+1) \leq spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3}+1)$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m}{3}+1)$ untuk $m = 3$.

Untuk $m = 4$, andaikan batas bawah dimensi partisi bintang yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3})$. Berdasarkan Lemma 2.2, terdapat representasi simpul-simpul di $V(P_n \triangleright C_m)$ yakni $r(y_{i,2}|\Pi_S) = r(y_{i,4})$ untuk $1 \leq i \leq n$ berakibat simpul $y_{i,2}$ dan $y_{i,4}$ harus berada pada kelas partisi yang berbeda sehingga batas bawah dimensi partisi bintang:

$$spd(P_n \triangleright C_m) \geq \underbrace{(\frac{m-1}{3}+1)+(\frac{m-1}{3}+1)+...+(\frac{m-1}{3}+1)}_{n\ buah} = n(\frac{m-1}{3}+1)$$

Jadi, batas bawah dimensi partisi bintang adalah $spd(P_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}+1)$. Untuk menentukan batas atas, dapat dikonstruksi partisi pembeda bintang misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3}+1)}\}$ dengan $S_i = \{y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3} | 1 \leq i \leq n\}$ dan $S_{n+i} = \{y_{i,4} | 1 \leq i \leq n\}$ Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada S_{n+i} menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$ dan S_{n+i} merupakan kelas partisi singleton yang memuat sebuah simpul trivial yang juga disebut graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari



Gambar 4.20: Konstruksi Partisi Pembeda Bintang graf $P_4 \triangleright C_{12}$

hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk $m = 4$ berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3}+1)}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3} + 1)$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3} + 1)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3} + 1)$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3} + 1) \leq spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3} + 1)$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3} + 1)$ untuk $m = 4$.

Teorema 4.15. *Diberikan dua graf terhubung P_n dan C_m dengan masing-masing ordernya n dan m dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 2$, maka dimensi partisi bintang graf hasil operasi comb $P_n \triangleright C_m$ adalah*

$$spd(P_n \triangleright C_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil, & \textit{jika } m \equiv 0(mod\ 3),\ m \equiv 2(mod\ 3) \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \textit{jika } m \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $P_n \triangleright C_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright C_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright C_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq j \leq m-1, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,m}y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $P_n \triangleright C_m$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai m dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama jika $m \equiv 0$(mod 3), kasus kedua jika $m \equiv 1$(mod 3), sedangkan kasus ketiga jika $m \equiv 2$(mod 3).

Kasus 1: Untuk $m \equiv 0$(mod 3)

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $P_n \triangleright C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.20. Misalkan $\Pi_S =$

$\{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3})}\}$ dengan:

$$S_{\frac{m}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j}|1 \leq k \leq \frac{m}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k, 1 \leq i \leq n\}$$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m}{3}(i-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ dan $m \geq 5$, sebagai berikut:
$r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor}, t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i})$; $t^1_l = (1+3(k-1)-j)+3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1$; $t^2_l = (j-3(k-1)-1)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; $t^3_l = (j-3(k-1)-1)+3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1$; $t^4_l = (1+3(k-1)-j)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-2$ dengan $j = 3(k-1)+1$ atau $j = 3k$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1$ dengan $j = 3(k-1)+2$; m genap.
$c = (z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_j = j+(l-1)$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^1_j = m-j+2+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^5_s = z^1_l+3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1$; $t^6_s = z^1_l+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$.
$a = (z^2_{i-1}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_j = j+(l-1)$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^1_j = m-j+2+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^5_s = z^1_l+3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1$; $t^6_s = z^1_l+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$.

Reprentasi simpul di graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i})$; $t^1_l = (1+3(k-1)-j)+3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^2_l = (j-3(k-1)-1)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; $t^3_l = (j-3(k-1)-1)+3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^4_l = (1+3(k-1)-j)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; m gasal.

$c = (z_1^1, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z_j^1 = j + (l-1)$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $z_j^1 = m - j + 2 + (l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^5 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t_s^6 = z_l^1 + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.
$a = (z^2_{i-1}, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z_1^2, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z_j^1 = j + (l-1)$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z_j^1 = m - j + 2 + (l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^5 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t_s^6 = z_l^1 + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3})}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m}{3})$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $P_n \triangleright C_m$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{n}{m})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m}{3})-1} = \{y_{n,j} | \frac{m}{3} - 1 \leq k \leq \frac{m}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m)) \geq n(\frac{m}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m}{3}) \leq spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m}{3})$ untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$.

Kasus 2: Untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$

Simpul-simpul di graf $C_m \triangleright P_n$ dibedakan menjadi simpul daun (*pendant*) merupakan simpul-simpul subgraf C_m dan simpul dalam merupakan simpul-simpul di subgraf lintasan P_n. Untuk $m \equiv$ (mod 3), kelas partisi di simpul daun (*pendant*) terpisah dengan kelas partisi di simpul dalam sehingga terdapat tiga kasus untuk nilai n yaitu pertama untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, kedua untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$.

1. Untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$

   Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n}{3}}\}$ dengan:

   $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq i \leq 3k+1, 1 \leq i \leq n\}$
   $S_{n(\frac{m-1}{3})+l} = \{y_{i,1} | 1 \leq l \leq \frac{n}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$

   Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+l}$ menginduksi sebuah graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$, sebagai berikut:

   $r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i}, d)$; $t^1_l = (2+3(k-1)-j)+3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^2_l = (j-3(k-1)-2)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l-1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; $t^3_l = (j-3(k-1)-2)+3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^4_l = (2+3(k-1)-j)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l+1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; m genap.

   $c = (z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_l = j+1+(l-1)$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^1_l = m-j+3+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^5_s = z^1_l+3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^6_s = j+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}+1\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $3 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$ $t^6_s = m-j+2+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}+1\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$.

   $a = (z^2_{i-1}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^2_l = j+1+(l-1)$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^2_l = m-j+3+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^5_s = z^2_l+3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^6_s = j+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}+1\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $3 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$ $t^6_s = m-j+2+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}+1\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$.

   $d = (t^7_1, ..., t^7_{p-1}, t_j, t^8_1, ..., t^8_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-p})$; $t^8_f = (j-1)+(1+3(p-1)-i)+3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor-p$, $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$; $t^8_f = (m-j+1)+(1+3(p-1)-i)+3f$

dengan $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - p$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t_j = j-1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$; $t_j = m-j+1$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$ $t^7_f = j + (i-3(p-1)-1) + 3(p-f-1)$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$, $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$; $t^7_f = (m-j+2) + (i-3(p-1)-1) + 3(p-f-1)$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$.

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m genap dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i}, d)$; $t^1_l = 1+3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^2_l = 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; m genap.
$c = (z^1_1, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_l = l+1$ dengan $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^3_s = z^1_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^4_s = z^1_l + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.
$a = (z^2_1, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{i-1}, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^2_l = i-l+1$ dengan $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^3_s = z^2_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^4_s = z^2_l + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.
$d = (t^5_1, ..., t^5_{p-1}, t_j, t^6_1, ..., t^6_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-p})$; $t^6_f = (1+3(p-1)-i)+3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - p$; $t^5_f = (i-3(p-1)-1)+3(p-f-1)+1$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$.

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, ..., t^4_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},$
$t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i}, d)$; $t^1_l = (2+3(k-1)-j)+3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 2\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 2$ dengan $j = 3(k-1)+2$ atau $j = 3(k-1)+3$, $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$; $t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 2\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1$ dengan $j = 3k+1$, $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$; $t^3_l = (j-3(k-1)-2) + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $t^4_l = (j-3(k-1)-2)+3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 2\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1$ dengan $j = 3(k-1)+2$, $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$; $t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 2\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 2$ dengan $j = 3(k-1)+3$ atau $j = 3k+1$, $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$; $t^6_l = (2+3(k-1)-j) + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l + 1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$,

$3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; m gasal.
$c = (z_1^1, t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}^7, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^8, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}^8, ..., z_{n-i}^1, t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}^7, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^8, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}^8)$;
$z_l^1 = j+1+(l-1)$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $z_l^1 = m-j+3+(l-1)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^7 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1$; $t_s^8 = j+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$, $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$ $t_s^8 = m-j+2+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$.
$a = (z_{i-1}^2, t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}^7, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^8, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}^8, ..., z_1^2, t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}^7, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^8, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}^8)$;
$z_l^2 = j+1+(l-1)$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z_l^2 = m-j+3+(l-1)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^7 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1$; $t_s^8 = j+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$, $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$ $t_s^6 = m-j+2+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$.
$d = (t_1^9, ..., t_{p-1}^9, t_j, t_1^{10}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -p}^{10})$; $t_f^{10} = (j-1)+(1+3(p-1)-i)+3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor -p$, $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; $t_f^{10} = (m-j+1)+(1+3(p-1)-i)+3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor -p$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$; $t_j = j-1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; $t_j = m-j+1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$ $t_f^9 = j+(i-3(p-1)-1)+3(p-f-1)$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$, $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; $t_f^9 = (m-j+2)+(i-3(p-1)-1)+3(p-f-1)$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$.

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}^1, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^2, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}^2, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = 1+3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1$; $t_l^2 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3l-2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; m gasal.
$c = (z_1^1, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}^4, ..., z_{n-i}^1, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}^4)$;
$z_l^1 = l+1$ dengan $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^3 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1$; $t_s^4 = z_l^1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$.
$a = (z_1^2, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}^4, ..., z_{i-1}^2, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}^4)$;
$z_l^2 = i-l+1$ dengan $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^3 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1$; $t_s^4 = z_l^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$.
$d = (t_1^5, ..., t_{p-1}^5, 0, t_1^6, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -p}^6)$; $t_f^6 = (1+3(p-1)-i)+3f$

dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p$; $t_f^5 = (i-3(p-1)-1)+3(p-f-1)+1$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p, 1 \leq f \leq p-1$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n}{3}}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3} - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n}{3}-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n}{3}-1} = \{y_{i,1} | \frac{n}{3} - 1 \leq l \leq \frac{n}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \frac{m}{3} - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3} \leq spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$ untuk $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$, $m \equiv 0 (\text{mod } 3)$.

2. Untuk $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$

   Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1}\}$ dengan:

   $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1, 1 \leq i \leq n\}$
   $S_{n(\frac{m-1}{3})+l} = \{y_{i,1} | 1 \leq l \leq \frac{n-1}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$
   $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1} = \{y_{n,1}\}$
   Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k}$, $S_{n(\frac{m-1}{3})+l}$ mengin-

duksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1}$ merupakan kelas partisi singleton yang memuat sebuah simpul trivial yang juga merupakan graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi koordinat setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$, sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i}, d)$; $t^1_l = (2 + 3(k-1) - j) + 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^2_l = (j-3(k-1)-2)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l-1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; $t^3_l = (j-3(k-1)-2)+3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^4_l = (2+3(k-1)-j)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l+1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; m genap.

$c = (z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_l = j+1+(l-1)$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^1_l = m-j+3+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^5_s = z^1_l+3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^6_s = j+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}+1\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $3 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$ $t^6_s = m-j+2+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}+1\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$.

$a = (z^2_{i-1}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^2_l = j+1+(l-1)$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^2_l = m-j+3+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^5_s = z^2_l+3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^6_s = j+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}+1\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $3 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$ $t^6_s = m-j+2+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}+1\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$.

$d = (t^7_1, ..., t^7_{p-1}, t_j, t^8_1, ..., t^8_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-p+1})$; $t^8_f = (j-1)+(1+3(p-1)-i)+3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor-p+1$, $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$; $t^8_f = (m-j+1)+(1+3(p-1)-i)+3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor-p+1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$; $t_j = j-1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$; $t_j = m-j+1$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$ $t^7_f = j+(i-3(p-1)-1)+3(p-f-1)$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$, $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$; $t^7_f = (m-j+2)+(i-3(p-1)-1)+3(p-f-1)$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$.

$d = (t^9_1, ..., t^9_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}, t_j)$; $t^9_f = j+3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$,

$2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $t_f^9 = (m - j + 2) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$;$i = n$

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m genap dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^1, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}^2, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}^2, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_l^2 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m genap.
$c = (z_1^1, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}^4, ..., z_{n-i}^1, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}^4)$; $z_l^1 = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq n - i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^3 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_s^4 = z_l^1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (z_1^2, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}^4, ..., z_{i-1}^2, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}^4)$; $z_l^2 = i - l + 1$ dengan $1 \leq l \leq i - 1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^3 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_s^4 = z_l^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (t_1^5, ..., t_{p-1}^5, 0, t_1^6, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor-p+1}^6)$; $t_f^6 = (1 + 3(p - 1) - i) + 3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p - 1) + 1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1$; $t_f^5 = (i - 3(p - 1) - 1) + 3(p - f - 1) + 1$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p - 1) + 1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p - 1$.
$d = (t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}^7, 0)$; $t_f^7 = 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f + 1$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$;$i = n$

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}^6, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}^6, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^5, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor-1}^4, ..., t_1^4, 0, t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor-1}^1, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^2, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}^3, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = (2 + 3(k-1) - j) + 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k - 1) + 2 \leq j \leq 3k + 1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^2 = 2\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2$ dengan $j = 3(k - 1) + 2$ atau $j = 3(k - 1) + 3$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^2 = 2\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1$ dengan $j = 3k + 1$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$; $t_l^3 = (j - 3(k - 1) - 2) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k - 1) + 2 \leq j \leq 3k + 1$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_l^4 = (j - 3(k-1) - 2) + 3l - 2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^5 = 2\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1$ dengan $j = 3(k - 1) + 2$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^5 = 2\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2$ dengan $j = 3(k - 1) + 3$ atau $j = 3k + 1$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$; $t_l^6 = (2 + 3(k - 1) - j) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + 1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k - 1) + 2 \leq j \leq 3k + 1$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m gasal.
$c = (z_1^1, t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor-1}^7, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^8, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}^8, ..., z_{n-i}^1, t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor-1}^7, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^8, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}^8)$; $z_l^1 = j + 1 + (l - 1)$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq l \leq n - i$ dan $1 \leq i \leq n$;

$z_l^1 = m - j + 3 + (l-1)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $1 \le l \le n - i$ dan $1 \le i \le n$; $t_s^7 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \le s \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_s^8 = j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le s \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1, 2 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ $t_s^8 = m - j + 2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le s \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$.
$a = (z_{i-1}^2, t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^7, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^8, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^8, ..., z_1^2, t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^7, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^8, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^8)$;
$z_l^2 = j + 1 + (l-1)$ dengan $2 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \le l \le i - 1$ dan $1 \le i \le n$;
$z_l^2 = m - j + 3 + (l-1)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $1 \le l \le i - 1$ dan $1 \le i \le n$; $t_s^7 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \le s \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_s^8 = j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le s \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1, 3 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ $t_s^6 = m - j + 2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le s \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$.
$d = (t_1^9, ..., t_{p-1}^9, t_j, t_1^{10}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1}^{10})$; $t_f^{10} = (j-1) + (1 + 3(p-1) - i) + 3f$ dengan $1 \le p \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1) + 1 \le i \le 3p$, $1 \le f \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1$, $2 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $t_f^{10} = (m - j + 1) + (1 + 3(p-1) - i) + 3f$ dengan $1 \le p \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1) + 1 \le i \le 3p$, $1 \le f \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$; $t_j = j - 1$ dengan $2 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $t_j = m - j + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$; $t_f^9 = j + (i - 3(p-1) - 1) + 3(p - f - 1)$ dengan $1 \le p \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1) + 1 \le i \le 3p$, $1 \le f \le p - 1$, $2 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $t_f^9 = (m - j + 2) + (i - 3(p-1) - 1) + 3(p - f - 1)$ dengan $1 \le p \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1) + 1 \le i \le 3p$, $1 \le f \le p - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$.
$d = (t_1^{11}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}^{11}, t_j)$; $t_f^{11} = j + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f$ dengan $1 \le f \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $2 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $t_f^{11} = (m - j + 2) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f$ dengan $1 \le f \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$;$t_j = j - 1$ dengan $2 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $t_j = m - j + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$;$i = n$.

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^1, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^2, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^2, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = 1 + 3l$ dengan $1 \le l \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^2 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le l \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m gasal.
$c = (z_1^1, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4, ..., z_{n-i}^1, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4)$;
$z_l^1 = l + 1$ dengan $1 \le l \le n - i$ dan $1 \le i \le n$; $t_s^3 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \le s \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_s^4 = z_l^1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le s \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (z_1^2, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4, ..., z_{i-1}^2, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4)$;
$z_l^2 = i - l + 1$ dengan $1 \le l \le i - 1$ dan $1 \le i \le n$; $t_s^3 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \le s \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_s^4 = z_l^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le s \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$d = (t^5_1, ..., t^5_{p-1}, 0, t^6_1, ..., t^6_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p+1})$; $t^6_f = (1 + 3(p-1) - i) + 3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1$; $t^5_f = (i - 3(p-1) - 1) + 3(p - f - 1) + 1$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p, 1 \leq f \leq p-1$.
$d = (t^7_1, ..., t^7_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}, 0)$; $t^7_f = 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f + 1$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$;$i = n$

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam satu kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}} = \{y_{i,1} | l = \frac{n-1}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\} \cup \{y_{n,1}\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1 \leq spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1 (mod\ 3)$, $m \equiv 1(\text{mod } 3)$.

3. Untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$

   Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1}\}$ dengan:

   $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1, 1 \leq i \leq n\}$

$S_{n(\frac{m-1}{3})+l} = \{y_{i,1} | 1 \leq l \leq \frac{n-2}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$
$S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1} = \{y_{n-1,1} y_{n,1}\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+l}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1}$ merupakan kelas partisi yang menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright C_m$ untuk $n \equiv 2(mod\ 3)$, $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$, sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ...,$ $t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, c_{n-i}, d)$; $t^1_l = (2 + 3(k-1) - j) + 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_l = (j-3(k-1)-2)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3l-1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; $t^3_l = (j-3(k-1)-2)+3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_l = (2+3(k-1)-j)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3l+1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; m genap.
$c = (z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{n-i}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^1_l = j+1+(l-1)$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^1_l = m-j+3+(l-1)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^5_s = z^1_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^6_s = j+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$, $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; $t^6_s = m-j+2+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$.
$a = (z^2_{i-1}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^2_l = j+1+(l-1)$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^2_l = m-j+3+(l-1)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^5_s = z^2_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^6_s = j+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$, $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; $t^6_s = m-j+2+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$.
$d = (t^7_1, ..., t^7_{p-1}, t_j, t^8_1, ..., t^8_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -p+1})$; $t^8_f = (j-1)+(1+3(p-1)-i)+3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor -p+1$, $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; $t^8_f = (m-j+1)+(1+3(p-1)-i)+3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor -p+1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$; $t_j = j-1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; $t_j = m-j+1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$; $t^7_f = j+(i-3(p-1)-1)+3(p-f-1)$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$, $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; $t^7_f = (m-j+2)+(i-3(p-1)-1)+3(p-f-1)$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$,

$3(p-1)+1 \leq i \leq 3p, 1 \leq f \leq p-1, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m.$
$d = (t_1^9, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}^9, t_j); t_f^9 = j + (i - 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1, n-1 \leq i \leq n; t_f^9 = (m-j+2) + (i-3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $n-1 \leq i \leq n$; $t_j = j-1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $t_j = m-j+1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m genap dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^1, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}^2, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^2, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_l^2 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m genap.
$c = (z_1^1, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4, ..., z_{n-i}^1, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4)$; $z_l^1 = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq n - i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^3 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_s^4 = z_l^1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (z_1^2, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4, ..., z_{i-1}^2, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4)$; $z_l^2 = i - l + 1$ dengan $1 \leq l \leq i - 1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^3 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_s^4 = z_l^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (t_1^5, ..., t_{p-1}^5, 0, t_1^6, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1}^6)$; $t_f^6 = (1 + 3(p-1) - i) + 3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1$; $t_f^5 = (i - 3(p-1) - 1) + 3(p - f - 1) + 1$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p, 1 \leq f \leq p-1.$
$d = (t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}^7, 0)$; $t_f^7 = (i - 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f + 1$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $n-1 \leq i \leq n$

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^6, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}^6, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^5, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^4, ..., t_1^4, 0, t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^1, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^2,$
$t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^3, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = (2 + 3(k-1) - j) + 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1) + 2 \leq j \leq 3k + 1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^2 = 2\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2$ dengan $j = 3(k-1) + 2$ atau $j = 3(k-1) + 3$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^2 = 2\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1$ dengan $j = 3k + 1$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$; $t_l^3 = (j - 3(k-1) - 2) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1) + 2 \leq j \leq 3k + 1$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_l^4 = (j - 3(k-1) - 2) + 3l - 2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1) + 2 \leq j \leq 3k + 1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^5 = 2\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1$ dengan $j = 3(k-1) + 2$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^5 = 2\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2$ dengan $j = 3(k-1) + 3$ atau $j = 3k + 1$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$;

$t_l^6 = (2+3(k-1)-j)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l+1$ dengan $1 \le k \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \le j \le 3k+1$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1 \le l \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; m gasal.
$c = (z_1^1, t_1^7, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t_1^7, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$;
$z_l^1 = j+1+(l-1)$ dengan $2 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1 \le l \le n-i$ dan $1 \le i \le n$;
$z_l^1 = m-j+3+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \le j \le m$, $1 \le l \le n-i$ dan $1 \le i \le n$; $t_s^7 = z_l^1+3s$ dengan $1 \le s \le \lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1$; $t_s^8 = j+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le s \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $2 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$ $t_s^8 = m-j+2+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le s \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \le j \le m$.
$a = (z^2_{i-1}, t_1^7, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_1, t_1^7, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$;
$z_l^2 = j+1+(l-1)$ dengan $2 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1 \le l \le i-1$ dan $1 \le i \le n$;
$z_l^2 = m-j+3+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \le j \le m$, $1 \le l \le i-1$ dan $1 \le i \le n$; $t_s^7 = z_l^2+3s$ dengan $1 \le s \le \lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1$; $t_s^8 = j+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le s \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $3 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$ $t_s^6 = m-j+2+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3s-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le s \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \le j \le m$.
$d = (t_1^9, ..., t^9_{p-1}, t_j, t_1^{10}, ..., t^{10}_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-p+1})$; $t_f^{10} = (j-1)+(1+3(p-1)-i)+3f$ dengan $1 \le p \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \le i \le 3p$, $1 \le f \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor-p+1$, $2 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$; $t_f^{10} = (m-j+1)+(1+3(p-1)-i)+3f$ dengan $1 \le p \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \le i \le 3p$, $1 \le f \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor-p+1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \le j \le m$; $t_j = j-1$ dengan $2 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$; $t_j = m-j+1$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \le j \le m$; $t_f^9 = j+(i-3(p-1)-1)+3(p-f-1)$ dengan $1 \le p \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \le i \le 3p$, $1 \le f \le p-1$, $2 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$; $t_f^9 = (m-j+2)+(i-3(p-1)-1)+3(p-f-1)$ dengan $1 \le p \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \le i \le 3p$, $1 \le f \le p-1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \le j \le m$.
$d = (t_1^{11}, ..., t^{11}_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}, t_j)$; $t_f^{11} = (i-3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1)+j+3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-3f$ dengan $1 \le f \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $2 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $n-1 \le i \le n$; $t_f^{11} = (i-3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1)+(m-j+2)+3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-3f$ dengan $1 \le f \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \le j \le m$, $n-1 \le i \le n$; $t_j = j-1$ dengan $2 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$; $t_j = m-j+1$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \le j \le m$.

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dengan $j=1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = 1+3l$ dengan $1 \le l \le \lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1$; $t_l^2 = 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l-2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le l \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; m gasal.
$c = (z_1^1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$;

$z_l^1 = l+1$ dengan $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^3 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_s^4 = z_l^1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (z_1^2, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4, ..., z_{i-1}^2, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4)$;
$z_l^2 = i - l + 1$ dengan $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^3 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_s^4 = z_l^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (t_1^5, ..., t_{p-1}^5, 0, t_1^6, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1}^6)$; $t_f^6 = (1 + 3(p-1) - i) + 3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1$; $t_f^5 = (i - 3(p-1) - 1) + 3(p - f - 1) + 1$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p, 1 \leq f \leq p-1$.
$d = (t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}^7, 0)$; $t_f^7 = (i - 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f + 1$ dengan $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $n-1 \leq i \leq n$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam satu kelas partisi harus sebuah graf bintang $K_{1,n};\ 1 \leq n \leq 2$ sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang $K_{1,n};\ 1 \leq n \leq 2$. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3}} = \{y_{i,1} | l = \frac{n-2}{3}, 3(l-1) + 1 \leq i \leq 3l\} \cup \{y_{n,1}\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1 \leq spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$ untuk $n \equiv 2 (\text{mod } 3)$,

$m \equiv 1 (\text{mod } 3)$.

Kasus 3: Untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-2}{3})+n}\}$ dengan:
$S_{\frac{m-2}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-2}{3}, 3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2, 1 \leq i \leq n\}$
$S_{n(\frac{m-2}{3})+i} = \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-2}{3}(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n(\frac{m-2}{3})+i}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \rhd C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \rhd C_m$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1},$ $c_{n-i}, d)$; $t^1_l = (3+3(k-1)-j)+3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_l = (j-3(k-1)-3)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t^3_l = (j-3(k-1)-3)+3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_l = (3+3(k-1)-j)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + 2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m genap.
$c = (z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{n-i}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^1_l = j+2+(l-1)$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^1_l = m-j+4+(l-1)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^5_s = z^1_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^6_s = j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ $t^6_s = m-j+2+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$.
$a = (z^2_{i-1}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^2_l = j+2+(l-1)$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^2_l = m-j+4+(l-1)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^5_s = z^2_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^6_s = j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ $t^6_s = m-j+2+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$.
$d = (z^1_{i-1}, ..., z^1_1, z^3, z^2_1, ..., z^2_{n-i})$; $z^1_l = j+(l-1)$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^1_l = m-j+2+(l-1)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^2_l = j+(l-1)$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^2_l = m-j+2+(l-1)$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^3 = j-2$, $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z^3 = m-j+1$,

$\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$.

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m genap dengan $j = 1$ sebagai berikut: $r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 2, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, d)$; $t^1_l = 2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^2_l = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m genap.
$c = (z^1_1, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{n-i}, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z^1_l = 3 + (l - 1)$ dengan $1 \leq l \leq n - i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^3_s = z^1_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^4_s = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (z^2_{i-1}, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_1, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z^2_l = 3 + (l - 1)$ dengan $1 \leq l \leq n - i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^3_s = z^2_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^4_s = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (z^1_{i-1}, ..., z^1_1, 0, z^2_1, ..., z^2_{n-i})$; $z^1_l = l$ dengan $1 \leq l \leq i - 1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^2_l = l$ dengan $1 \leq l \leq i - 1$ dan $1 \leq i \leq n$.

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m genap dengan $j = 2$ sebagai berikut: $r(y_{i,2}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, d)$; $t^1_l = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^2_l = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m genap.
$c = (z^1_1, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{n-i}, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z^1_l = 4 + (l - 1)$ dengan $1 \leq l \leq n - i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^3_s = z^1_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^4_s = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (z^2_{i-1}, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_1, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z^2_l = 4 + (l - 1)$ dengan $1 \leq l \leq n - i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t^3_s = z^2_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^4_s = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (z^1_{i-1}, ..., z^1_1, 0, z^2_1, ..., z^2_{n-i})$; $z^1_l = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq i - 1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z^2_l = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq i - 1$ dan $1 \leq i \leq n$.

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2}, t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2}, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, d)$; $t^1_l = (3 + 3(k - 1) - j) + 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k - 1) + 3 \leq j \leq 3k$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ dengan $j = 3(k - 1) + 3$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$; $t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1$ dengan $j = 3(k - 1) + 4$ atau $j = 3k + 2$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$; $t^3_l = (j - 3(k - 1) - 3) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t^4_l = (j - 3(k-1) - 3) + 3l - 2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k - 1) + 3 \leq j \leq 3k + 2$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ dengan $j = 3k + 2$, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$; $t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1$ dengan $j = 3(k - 1) + 3$

atau $j = 3(k-1)+4$, $1 \le k \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$; $t_l^6 = (3+3(k-1)-j)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l + 2$ dengan $1 \le k \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+3 \le j \le 3k+2$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 2 \le l \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; m gasal.
$c = (z_1^1, t_1^7, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t_1^7, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z_l^1 = j+2+(l-1)$ dengan $3 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \le l \le n-i$ dan $1 \le i \le n$; $z_l^1 = m-j+4+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \le j \le m$, $1 \le l \le n-i$ dan $1 \le i \le n$; $t_s^7 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \le s \le \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t_s^8 = j + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le s \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$, $3 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$ $t_s^8 = m - j + 2 + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le s \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \le j \le m$.
$a = (z^2_{i-1}, t_1^7, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_1, t_1^7, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z_l^2 = j+2+(l-1)$ dengan $3 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \le l \le i-1$ dan $1 \le i \le n$; $z_l^2 = m-j+4+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \le j \le m$, $1 \le l \le i-1$ dan $1 \le i \le n$; $t_s^7 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \le s \le \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t_s^8 = j + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le s \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$, $3 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$ $t_s^6 = m - j + 2 + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le s \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \le j \le m$.
$d = (z^1_{i-1}, ..., z^1_1, z^3, z^2_1, ..., z^2_{n-i})$; $z_l^1 = j + (l-1)$ dengan $3 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \le l \le i-1$ dan $1 \le i \le n$; $z_l^1 = m-j+2+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \le j \le m$, $1 \le l \le i-1$ dan $1 \le i \le n$; $z_l^2 = j + (l-1)$ dengan $3 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \le l \le n-i$ dan $1 \le i \le n$; $z_l^2 = m-j+2+(l-1)$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \le j \le m$, $1 \le l \le n-i$ dan $1 \le i \le n$; $z^3 = j-2$, $3 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$; $z^3 = m-j+1$, $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \le j \le m$.

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 2, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = 2 + 3l$ dengan $1 \le l \le \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t_l^2 = 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le l \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; m genap.
$c = (z_1^1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z_l^1 = 3 + (l-1)$ dengan $1 \le l \le n-i$ dan $1 \le i \le n$; $t_s^3 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \le s \le \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t_s^4 = 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 1$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le s \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.
$a = (z^2_{i-1}, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z_l^2 = 3 + (l-1)$ dengan $1 \le l \le n-i$ dan $1 \le i \le n$; $t_s^3 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \le s \le \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t_s^4 = 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 1$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \le s \le \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.
$d = (z^1_{i-1}, ..., z^1_1, 0, z^2_1, ..., z^2_{n-i})$; $z_l^1 = l$ dengan $1 \le l \le i-1$ dan $1 \le i \le n$; $z_l^2 = l$ dengan $1 \le l \le i-1$ dan $1 \le i \le n$.

Representasi simpul graf $P_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dengan $j = 2$ sebagai berikut:

$r(y_{i,2}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t_l^2 = 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 1$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; m genap.
$c = (z_1^1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z_l^1 = 4 + (l-1)$ dengan $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^3 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t_s^4 = 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.
$a = (z^2_{i-1}, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z_1^2, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z_l^2 = 4 + (l-1)$ dengan $1 \leq l \leq n-i$ dan $1 \leq i \leq n$; $t_s^3 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t_s^4 = 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.
$d = (z^1_{i-1}, ..., z_1^1, 0, z_1^2, ..., z^2_{n-i})$; $z_l^1 = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$; $z_l^2 = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq i-1$ dan $1 \leq i \leq n$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-2}{3})+n}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-2}{3}) + n$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-2}{3} + 1) = n(\frac{m+1}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m+1}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam satu kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m+1}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m+1}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m+1}{3})-1} = \{y_{i,1}y_{i,m}|n - 1 \leq\leq n\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m+1}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m+1}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m+1}{3}) \leq spd(P_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m+1}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m+1}{3})$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Berdasarkan ketiga kasus pembuktian di atas diketahui bahwa $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m}{3})$ untuk $m = 3$ dan $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3} + 1)$ untuk $m = 4$ maka dapat ditulis $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\lfloor\frac{m}{3}\rfloor + 1)$ untuk $m \in \{3, 4\}$. Selanjutnya untuk $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m}{3})$ untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$ dan $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m+1}{3})$ untuk

$m \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$ sehingga pada kedua nilai m tersebut dapat digabungkan sedemikian $spd(P_n \triangleright C_m) = n\lceil \frac{m}{3} \rceil$. Sedangkan $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, $m \geq 5$ dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n+2}{3}$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, $m \geq 5$ dan $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $spd(P_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n+1}{3}$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, $m \geq 5$ dan $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dapat ditulis $spd(P_n \triangleright C_m) = n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil$. □

4.2.3 Dimensi Partisi Bintang Graf Lengkap Comb Graf Lintasan

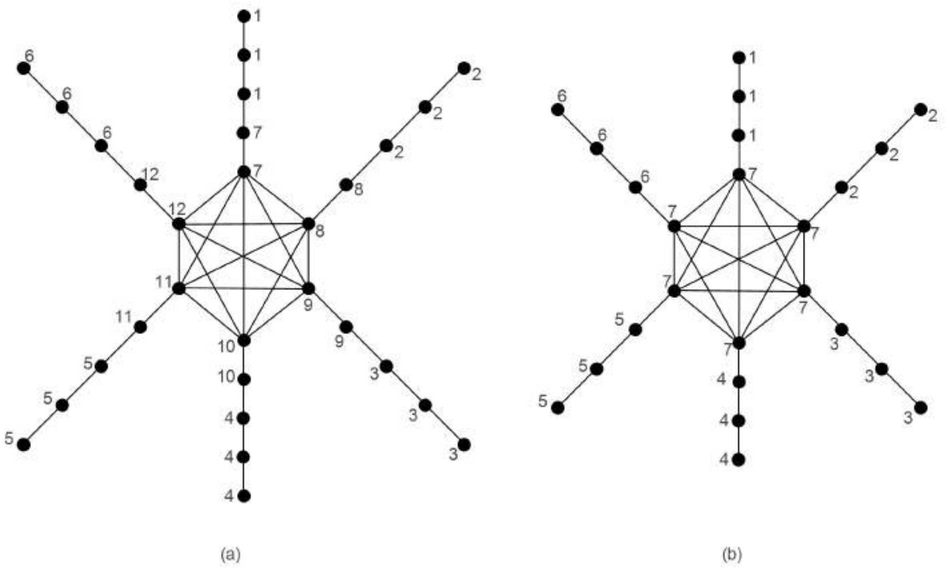
Graf hasil operasi *comb* antara graf lengkap K_m dengan graf lintasan P_n dihasilkan dari menduplikat graf lintasan P_n sebanyak m simpul di graf lengkap K_m dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf P_n pada setiap simpul graf K_m, maka dapat dikatakan bahwa graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ merupakan graf yang terdiri dari m kali Lintasan P_n. Sehingga graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ memiliki himpunan simpul $V(K_m \triangleright_\delta P_n) = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_m \triangleright_\delta P_n) = \{y_{j,1}y_{j+k,1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq m-j\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1\}$. Graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ memiliki nm buah simpul dan $\frac{m^2+2mn-3m}{2}$ buah sisi. Graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ ditunjukkan pada Gambar 4.6 (a).

Pada subbab ini, dibahas dimensi partisi bintang graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ dengan $m, n \in Z^+$. Untuk $n = 1$, graf P_1 merupakan graf trivial maka graf hasil operasi *comb* $K_m \triangleright_\delta P_1$ isomorfik dengan lingkaran K_m dan untuk $m = 2$, graf K_2 isomorfik dengan lintasan P_2 sehingga graf hasil operasi *comb* $K_2 \triangleright_\delta P_n$ isomorfik dengan $P_2 \triangleright_\delta P_n$ sedemikian sehingga order dari lintasan P_n dan graf lengkap K_m masing-masing adalah $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Dalam menentukan dimensi partisi bintang graf $K_m \triangleright_\delta P_n$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.16. *Diberikan dua graf terhubung K_m dan P_n dengan masing-masing ordernya m dan n dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, maka dimensi partisi bintang graf hasil operasi comb $K_m \triangleright_\delta P_n$ adalah*

$$spd(K_m \triangleright_\delta P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil, & \textit{jika } n \equiv 0(mod3) \textit{ dan } n \equiv 2(mod3) \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1, & \textit{jika } n \equiv 1(mod3) \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ memiliki himpunan simpul $V(K_m \triangleright_\delta P_n) = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_m \triangleright_\delta P_n) = \{y_{j,1}y_{j+k,1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq$



Gambar 4.21: (a) Konstruksi Partisi Pembeda Bintang graf $K_6 \triangleright_\delta P_5$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Bintang graf $K_6 \triangleright_\delta P_4$

$k \leq m-j\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+1} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai n dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama jika $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$, kasus kedua jika $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$, sedangkan kasus ketiga jika $n \equiv 2 (\text{mod } 3)$.

Kasus 1: Untuk $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})}\}$ dengan:

$$S_{\frac{n}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \frac{n}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k, 1 \leq j \leq m\}$$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n}{3}(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_m \triangleright_\delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ untuk $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$, sebagai berikut:

$r(y_{j,i}|\Pi_S) = (\underbrace{z, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}}_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -k},$

$\underbrace{z, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}}_{m-j})$; $u_s = i - 3s$ dan $t_r = 3r - (i-1)$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3k-1+1 \leq i \leq 3k$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - k$; $v_l = i + 3l$ dan $z = i$ dengan $1 \leq i \leq n$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $1 \leq j \leq m$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m(\frac{n}{3})$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(K_m \triangleright_\delta P_n) \leq m(\frac{n}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(K_m \triangleright_\delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n}{3})-1} = \{y_{m,i} | \frac{n}{3} - 1 \leq k \leq \frac{n}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(K_m \triangleright_\delta P_n) \geq m(\frac{n}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n}{3}) \leq spd(K_m \triangleright_\delta P_n) \leq m(\frac{n}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_m \triangleright_\delta P_n) = m(\frac{n}{3})$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$.

Kasus 2: Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.21 (b). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+1}\}$ dengan:

$S_{\frac{n-1}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \frac{n-1}{3}, 3(k-1)+3 \leq i \leq 3k+2, 1 \leq j \leq m\}$

$S_{m(\frac{n-1}{3})+1} = \{y_{j,1} | 1 \leq j \leq m\}$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n-1}{3}(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{m(\frac{n-1}{3}+1}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,m-1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_m \triangleright_\delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:

$r(y_{j,i}|\Pi_S) = (\underbrace{z, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}}_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-k},$

$\underbrace{z, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., z, v_1, ..., v_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}}_{m-j}, z^1)$; $u_s = i - 3s - 1$ dan $t_r = 3r - (i-2)$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor, 3k-1+2 \leq i \leq 3k+1, 1 \leq s \leq k-1, 1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - k$;

$v_l = i + 3l + 1$ dan $z = i + 1$ dan $z^1 = i - 1$ dengan $2 \leq i \leq n$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $1 \leq j \leq m$.

$r(y_{j,1}|\Pi_S) = (\underbrace{2, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., 2, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}}_{j-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1},$
$\underbrace{2, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., 2, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}}_{m-j}, 0)$; $u_s = 2 + 3s$ dan $t_r = 3r + 1$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1; 1 \leq j \leq m$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m(\frac{n-1}{3}) + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3}) + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(K_m \triangleright_\delta P_n) \leq m(\frac{n-1}{3}) + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3})$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(K_m \triangleright_\delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n-1}{3})} = \{y_{j,1}|1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{1,i}|2 \leq i \leq 4\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3})$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(K_m \triangleright_\delta P_n) \geq m(\frac{n-1}{3}) + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n-1}{3}) + 1 \leq spd(K_m \triangleright_\delta P_n) \leq m(\frac{n-1}{3}) + 1$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_m \triangleright_\delta P_n) = m(\frac{n-1}{3}) + 1$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$.

Kasus 3: Untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.21 (a). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-2}{3})+m}\}$ dengan:

$S_{\frac{n-2}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i}|1 \leq k \leq \frac{n-2}{3}, 3(k-1) + 3 \leq i \leq 3k + 2, 1 \leq j \leq m\}$

$S_{m(\frac{n-2}{3})+j} = \{y_{j,i}|1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq 2\}$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n-2}{3}(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{m(\frac{n-2}{3}+j}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_m \triangleright_\delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:

$r(y_{j,i}|\Pi_S) = (\underbrace{z, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}}_{j-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -k},$
$\underbrace{z, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., z, v_1, ..., v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}}_{m-j}, \underbrace{z^2, ..., z^2}_{j-1}, z^1, \underbrace{z^2, ..., z^2}_{m-j})$; $u_s = i - 3s - 2$ dan $t_r = 3r - (i-3)$ dengan $1 \le k \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3k - 1 + 3 \le i \le 3k + 2$, $1 \le s \le k - 1$, $1 \le r \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - k$; $v_l = i + 3l + 2$, $z = i + 2$, $z^1 = i - 2$ dan $z^2 = i$ dengan $3 \le i \le n$, $1 \le l \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $1 \le j \le m$.

$r(y_{j,1}|\Pi_S) = (\underbrace{3, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., 3, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}}_{j-1}, 2, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1},$
$\underbrace{3, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., 3, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}}_{m-j}, \underbrace{1, ..., 1}_{j-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j})$; $u_s = 3+3s$ dan $t_r = 3r+2$ dengan $1 \le s \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $1 \le r \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $1 \le j \le m$.

$r(y_{j,2}|\Pi_S) = (\underbrace{4, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., 4, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}}_{j-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1},$
$\underbrace{4, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., 4, u_1, ..., u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}}_{m-j}, \underbrace{2, ..., 2}_{j-1}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{m-j})$; $u_s = 4+3s$ dan $t_r = 3r+1$ dengan $1 \le s \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $1 \le r \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $1 \le j \le m$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-2}{3})+m}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m(\frac{n+1}{3})$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n+1}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ yaitu $spd(K_m \triangleright_\delta P_n) \le m(\frac{n+1}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n+1}{3})) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(K_m \triangleright_\delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-2}{3}+1)-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n+1}{3})-1} = \{y_{j,i}|m-1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq 2\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n+1}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $K_m \rhd_\delta P_n$ yaitu $spd(K_m \rhd_\delta P_n) \geq m(\frac{n+1}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n+1}{3}) \leq spd(K_m \rhd_\delta P_n) \leq m(\frac{n+1}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_m \rhd_\delta P_n) = m(\frac{n+1}{3})$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$.

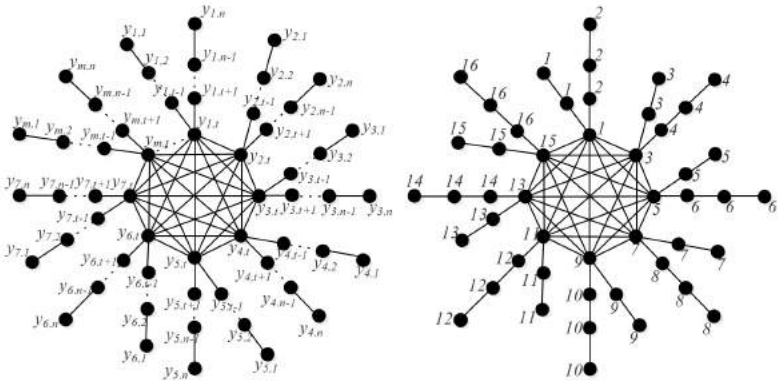
Berdasarkan ketiga kasus pembuktian di atas diketahui bahwa $spd(K_m \rhd_\delta P_n) = m(\frac{n}{3})$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $spd(K_m \rhd_\delta P_n) = m(\frac{n+1}{3})$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ sehingga pada kedua nilai n tersebut dapat digabungkan sedemikian $spd(K_m \rhd_\delta P_n) = m\lceil\frac{n}{3}\rceil$. Sedangkan $spd(K_m \rhd_\delta P_n) = m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor + 1$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$. □

Sekarang, kita akan membahas dimensi partisi bintang pada graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ dengan $m, n \in Z^+$ dan salah satu simpul $v \in P_n$ yang dilekatkan ke setiap simpul $u \in K_m$ dan simpul v mempunyai derajat sama dengan dua. Untuk $n = 2$, graf P_2 merupakan lintasan P_2 dan setiap simpulnya tidak berderajat dua dan untuk $m = 2$, graf K_2 isomorfik dengan lintasan P_2 sehingga graf hasil operasi *comb* $K_2 \rhd_\Delta P_n$ isomorfik dengan $P_2 \rhd_\Delta P_n$ dan untuk $n = 3$, partisi pembeda bintang membentuk pola khusus sedemikian sehingga order dari lintasan P_n dan graf lengkap K_m masing-masing adalah $m \geq 3$ dan $n \geq 4$. Graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ ditunjukkan pada Gambar 4.22 (a). Dalam menentukan dimensi partisi bintang suatu graf $K_m \rhd_\Delta P_n$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \rhd_\Delta P_n$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan partisi pembeda bintang Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Untuk $n = 3$, andaikan batas bawah dimensi partisi bintang yaitu $spd(K_m \rhd_\Delta P_3) \geq m(\frac{n}{3}) = m$. Berdasarkan Lemma 2.2, terdapat representasi simpul-simpul di $V(K_m \rhd_\Delta P_3)$ yakni $r(y_{j,1}|\Pi_S) = r(y_{j,3}|\Pi_S)$ untuk $1 \leq j \leq m$ berakibat simpul $y_{j,1}$ dan $y_{j,3}$ harus berada pada kelas partisi yang berbeda sehingga batas bawah dimensi partisi bintang:

$$spd(|\Pi_S) \geq \underbrace{(\frac{n}{3}+1) + (\frac{n}{3}+1) + ... + (\frac{n}{3}+1)}_{m\ buah} = m(\frac{n}{3}+1) = 2m$$

Jadi, batas bawah dimensi partisi bintang adalah $spd(K_m \rhd_\Delta P_3) \geq m(\frac{n}{3}+1) = 2m$. Untuk menentukan batas atas, dapat dikonstruksi partisi pembeda bintang misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2m}\}$ dengan $S_j = \{y_{j,1}, y_{j,2}|1 \leq j \leq m\}$ dan



(a) (b)

Gambar 4.22: (a) Graf Hasil Operasi Comb $K_m \rhd_\Delta P_n$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Bintang $K_8 \rhd_\Delta P_6$

$S_{m+j} = \{y_{j,3} | 1 \leq j \leq m\}$ Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada S_j menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$ dan S_{m+j} merupakan kelas partisi yang memuat simpul trivial dapat juga disebut graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi koordinat setiap simpul $v \in V(K_m \rhd_\Delta P_3)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_m \rhd_\Delta P_3$ berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2m}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $2m$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = 2m$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_m \rhd_\Delta P_3$ yaitu $spd(K_m \rhd_\Delta P_3) \leq 2m$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $2m \leq spd(K_m \rhd_\Delta P_3) \leq 2m$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_m \rhd_\Delta P_3) = 2m$.

Teorema 4.17. *Misalkan K_m adalah graf lengkap order m dan P_n adalah graf lintasan order n dengan simpul pelekatan dari P_n yang berderajat dua. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 4$, dimensi partisi bintang graf hasil operasi comb $K_m \rhd_\Delta P_n$ adalah*

$$spd(K_m \rhd_\Delta P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil, & \textit{jika } n \equiv 0(mod\ 3),\ n \equiv 2(mod\ 3) \\ & \textit{dan } n \equiv 1(mod\ 3),\ 1 < i < n, \\ & i \neq 1(mod\ 3) \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1, & \textit{jika } n \equiv 1(mod\ 3),\ 1 < i < n, \\ & i \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $K_m \rhd_\triangle P_n$ memiliki himpunan simpul $V(K_m \rhd_\triangle P_n) = \{y_{j,i}|1 \le j \le m,\ 1 \le i \le n\}$ dan himpunan sisi $E(K_m \rhd_\triangle P_n) = \{y_{j,t}y_{j+k,t}|1 \le j \le m, 1 \le k \le m-j, i = t, 2 \le t \le n-1\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+1}|1 \le j \le m, 1 \le i \le n-1\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $K_m \rhd_\triangle P_n$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai n dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, kasus kedua untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan kasus ketiga untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Kasus 1: Untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $K_m \rhd_\triangle P_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.22 (b). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})}\}$ dengan:

$$S_{\frac{n}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i}|1 \le k \le \frac{n}{3}, 3(k-1)+1 \le i \le 3k, 1 \le j \le m, i = t, 2 \le t \le n-1\}$$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n}{3}(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_m \rhd_\triangle P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_m \rhd_\triangle P_n$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ adalah berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m(\frac{n}{3})$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_m \rhd_\triangle P_n$ yaitu $spd(K_m \rhd_\triangle P_n) \le m(\frac{n}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \rhd_\triangle P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(K_m \rhd_\triangle P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n}{3})-1} = \{y_{m,i}|\frac{n}{3} - 1 \le k \le \frac{n}{3}, 3(k-1)+1 \le i \le 3k\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $K_m \rhd_\triangle P_n$ yaitu $spd(K_m \rhd_\triangle P_n) \ge m(\frac{n}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang

$m(\frac{n}{3}) \leq spd(K_m \triangleright_\Delta P_n) \leq m(\frac{n}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_m \triangleright_\Delta P_n) = m(\frac{n}{3})$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$.

Kasus 2: Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dimana $1 < i < n, i \neq 1(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+m}\}$ dengan:

$S_{\frac{n-1}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \leq k \leq \frac{n-1}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k, 1 \leq j \leq m, i = t, 2 \leq t \leq n-1\}$

$S_{\frac{n-1}{3}m+j} = \{y_{j,n} | 1 \leq j \leq m, i = t, 2 \leq t \leq n-1\}$ Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n}{3}(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{\frac{n-1}{3}m+j}$ merupakan kelas partisi singleton yang memuat sebuah simpul trivial dapat disebut juga graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_m \triangleright_\Delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ adalah berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-1}{3})+m}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m(\frac{n-1}{3})+m$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n-1}{3})+m$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ yaitu $spd(K_m \triangleright_\Delta P_n) \leq m(\frac{n+2}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(K_m \triangleright_\Delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n+2}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n+2}{3})-1} = \{y_{m,i} | k = \frac{n-1}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k\} \cup \{y_{m,n}\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n+2}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \triangleright_\Delta P_n$ yaitu $spd(K_m \triangleright_\Delta P_n) \geq m(\frac{n+2}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n+1}{3}) \leq spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) \leq m(\frac{n+2}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = m(\frac{n+2}{3})$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dimana $i1 < i < n, i \neq 1(\text{mod } 3)$.

Kasus 3: Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dimana $1 < i < n, i \equiv 1(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3}+1}\}$ dengan:

$S_{l(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \le k \le l, 1 \le l \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, 3(k-1)+1 \le i \le 3k, 1 \le j \le m\}$

$S_{ml+(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - l)(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \le k \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - l, 1 \le l \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, 3l+3(k-1)+2 \le i \le 3l+3k+1, 1 \le j \le m\}$

$S_{m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1} = \{y_{j,t} | 1 \le j \le M, i = t = 3l+1, 1 \le l \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\}$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{l(j-1)+k}$ dan $S_{ml+(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - l)(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + f}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,m}$.Dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_m \rhd_\Delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3}+1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m\frac{n-1}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ yaitu $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) \le m\frac{n-1}{3} + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(K_m \rhd_\Delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-1}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m\frac{n-1}{3}} = \{y_{j,t} | 1 \le j \le m, i = t = 3l+1, 1 \le l \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\} \cup \{y_{m,i} | k = l, 1 \le l \le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, 3(k-1)+1 \le i \le 3k\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m\frac{n-1}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ yaitu $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) \ge m\frac{n-1}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m\frac{n-1}{3} + 1 \le spd(K_m \rhd_\Delta P_n) \le m\frac{n-1}{3} + 1$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) = m\frac{n-1}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dimana $1 < i < n, i = 1(\text{mod } 3)$.

Kasus 4: Untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-2}{3}+m}\}$ dengan:

$S_{\frac{n-2}{3}(j-1)+k} = \{y_{j,i} | 1 \le k \le \frac{n-2}{3}, 3(k-1)+1 \le i \le 3k, 1 \le j \le m\}$

$S_{m\frac{n-2}{3}+j} = \{y_{j,i} | 1 \le j \le m, n-1 \le i \le n\}$

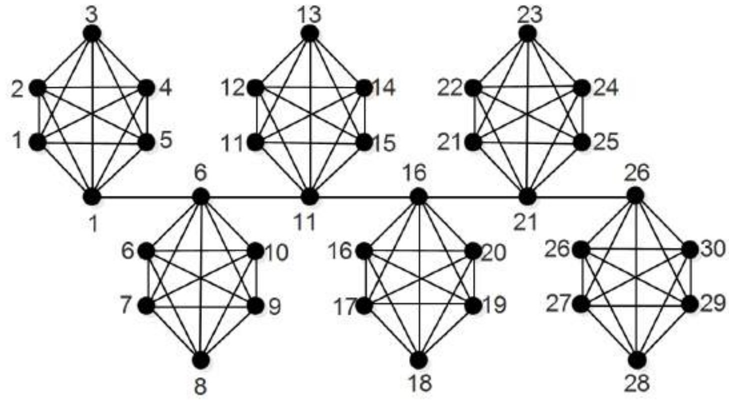
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{n-2}{3}(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+j}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_m \rhd_\Delta P_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m\frac{n-2}{3}+m}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m\frac{n-2}{3} + m$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(\frac{n-2}{3} + 1)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ yaitu $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) \leq m(\frac{n+1}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n-2}{3} + 1) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(K_m \rhd_\Delta P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(\frac{n-2}{3}+1)-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{m(\frac{n-2}{3}+1)-1} = \{y_{m,i} | k = \frac{n-2}{3}, 3(k-1)+1 \leq i \leq 3k\} \cup \{y_{m,i} | n-1 \leq i \leq n\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n-2}{3} + 1) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_m \rhd_\Delta P_n$ yaitu $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) \geq m(\frac{n-2}{3} + 1)$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(\frac{n-2}{3} + 1) \leq spd(K_m \rhd_\Delta P_n) \leq m(\frac{n-2}{3} + 1)$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) = m(\frac{n-2}{3} + 1)$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Berdasarkan ketiga kasus pembuktian di atas diketahui bahwa $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) = m(\frac{n}{3})$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) = m(\frac{n-1}{3} + 1)$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dimana $1 < i < n$, $i \neq 1(\text{mod } 3)$ dan $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) = m(\frac{n-2}{3} + 1)$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ sehingga pada ketiga nilai n tersebut dapat digabungkan sedemikian $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) = m\lceil\frac{n}{3}\rceil$. Sedangkan $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) = m\frac{n-1}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dimana $1 < i < n$, $i \equiv 1(\text{mod } 3)$ dapat ditulis $spd(K_m \rhd_\Delta P_n) = m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor + 1$. $\square$

4.2.4 Dimensi Partisi Bintang Graf Lintasan Comb Graf Lengkap

Graf hasil operasi *comb* antara graf lintasan P_n dengan graf lengkap K_m dihasilkan dari menduplikat graf lengkap K_m sebanyak n simpul di graf lintasan



Gambar 4.23: Konstruksi Partisi Pembeda Bintang graf $P_6 \triangleright K_6$

P_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf K_m pada setiap simpul graf P_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $P_n \triangleright K_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali graf lengkap K_m. Sehingga graf $P_n \triangleright K_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright K_m) = \{y_{i,j}|1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright K_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1}|1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+k}|1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m-j\}$. Graf $P_n \triangleright K_m$ memiliki nm buah simpul dan $\frac{m^2n-mn+2n-2}{2}$ buah sisi. Graf $P_n \triangleright K_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.8.

Pada subbab ini, dibahas dimensi partisi bintang graf $P_n \triangleright K_m$ dengan $m, n \in Z^+$. Untuk $n = 1$, graf P_1 merupakan graf trivial maka graf hasil operasi *comb* $P_1 \triangleright K_m$ isomorfik dengan lingkaran K_m dan untuk $m = 2$, graf K_2 isomorfik dengan lintasan P_2 sehingga graf hasil operasi *comb* $P_n \triangleright K_2$ isomorfik dengan $P_n \triangleright P_2$ sedemikian sehingga order dari lintasan P_n dan graf lengkap K_m masing-masing adalah $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Dalam menentukan dimensi partisi bintang graf $P_n \triangleright K_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright K_m$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.18. *Diberikan dua graf terhubung P_n dan K_m dengan masing-masing ordernya m dan n dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, maka dimensi partisi bintang dari graf hasil operasi comb $P_n \triangleright K_m$ adalah $spd(P_n \triangleright K_m) = n(m-1)$*

Bukti: Misalkan graf $P_n \triangleright K_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright K_m) = \{y_{i,j}|1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright K_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1}|1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+k}|1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m-j\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $P_n \triangleright K_m$ dengan mn buah simpul, maka pertama menentukan batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan

mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $P_n \triangleright K_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.23. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(m-1)}\}$ dengan:
$S_{(m-1)(i-1)+j-1} = \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq m\}$
$S_{(m-1)i-m+2} = \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada S_j dimana $(m-1)(i-1)+2 \leq j \leq (m-1)i$, $1 \leq i \leq n$ merupakan kelas partisi singleton yang berisi sebuah simpul trivial yang juga merupakan graf bintang, sedangkan $S_j = \{y_{i,1}, y_{i,2} | 1 \leq i \leq n\}$ merupakan kelas partisi yang menginduksi graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright K_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright K_m)$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (z_1^1, \underbrace{z_1^1+1, ..., z_1^1+1}_{m-2}, ..., z_{i-1}^1, \underbrace{z_{i-1}^1+1, ..., z_{i-1}^1+1}_{m-2}, \underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j}, z_1^2, \underbrace{z_1^2+1, ..., z_1^2+1}_{m-2}, ..., z_{n-i}^2, \underbrace{z_{n-i}^2+1, ..., z_{n-i}^2+1}_{m-2})$; $z_l^1 = 2+(l-1)$ dengan $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $z_l^2 = 2+(l-1)$ dengan $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$; $2 \leq j \leq m$.

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (z_1^3, \underbrace{z_1^3+1, ..., z_1^3+1}_{m-2}, ..., z_{i-1}^3, \underbrace{z_{i-1}^3+1, ..., z_{i-1}^3+1}_{m-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, z_1^4, \underbrace{z_1^4+1, ..., z_1^4+1}_{m-2}, ..., z_{n-i}^4, \underbrace{z_{n-i}^4+1, ..., z_{n-i}^4+1}_{m-2})$; $z_l^3 = 1+(l-1)$ dengan $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $z_l^4 = 1+(l-1)$ dengan $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(m-1)}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(m-1)$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(m-1)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright K_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright K_m) \leq n(m-1)$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright K_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(m-1)-1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \triangleright K_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(m-1)-1}\}$ maka ada dua kasus yaitu

a. Jika sebarang simpul $u, v \in V(P_n \triangleright K_m)$ dengan u, v tepat pada subgraf K_m maka berdasarkan Lemma 2.2 terdapat paling sedikit dua simpul memiliki representasi simpul terhadap Π_S yang sama. Misalkan kelas partisi $S_2 = \{y_{1,3}, y_{1,4}\}$, maka simpul $y_{1,3}$ dan $y_{1,4}$ memiliki jarak yang sama ke semua simpul di $V(P_n \triangleright K_m) - \{y_{1,3}, y_{1,4}\}$ atau dapat ditulis $d(y_{1,3}, w) = d(y_{1,4}, w)$ dimana $w \in V(P_n \triangleright K_m) - \{y_{1,3}, y_{1,4}\}$ berakibat $r(y_{1,3}|\Pi_S) = r(y_{1,4}|\Pi_S)$. Jadi Π_S dengan $|\Pi_S| = n(m-1) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang walaupun kelas partisi S_2 menginduksi graf bintang.

b. Jika kita ambil kelas partisi $S_{n(m-1)(n-2)+1} = \{y_{n-1,2}\}$, $S_{n(m-1)(n-1)+1} = \{y_{n,2}\}$, $S_{(m-1)(n-1)-m+2} = \{y_{n-1,1}\}$ dan $S_{(m-1)n-m+2} = \{y_{n,1}\}$ digabung menjadi satu partisi S' dan dapat dilihat bahwa kelas partisi S' tidak menginduksi sebuah graf bintang maka Π_S bukan merupakan partisi pembeda bintang walaupun kelas partisi S' memiliki representasi simpul terhadap Π_S berdeda.

Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(m-1) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $P_n \triangleright K_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright K_m) \geq n(m-1)$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(m-1) \leq spd(P_n \triangleright K_m) \leq n(m-1)$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright K_m) = n(m-1)$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. □

4.2.5 Dimensi Partisi Bintang Graf Lengkap Comb Graf Lengkap

Graf hasil operasi *comb* antara graf lengkap K_n dengan graf lengkap K_m dihasilkan dari menduplikat graf lengkap K_m sebanyak n simpul di graf lengkap K_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf K_m pada setiap simpul graf K_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $K_n \triangleright K_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali Lengkap K_m. Sehingga graf $K_n \triangleright K_m$ memiliki himpunan simpul $V(K_n \triangleright K_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_n \triangleright K_m) = \{y_{i,1}y_{i+k,1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-i\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+l} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq m-j\}$. Graf $K_n \triangleright K_m$ memiliki nm buah simpul dan $\frac{n^2+m^2-n-m}{2}$ buah sisi. Graf $K_n \triangleright K_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.10 (a).

Pada subbab ini, dibahas dimensi partisi bintang graf $K_n \triangleright K_m$ dengan $m, n \in Z^+$. Untuk $m = 2$, graf K_2 isomorfik dengan lintasan P_2 sehingga graf hasil operasi *comb* $K_n \triangleright K_2$ isomorfik dengan $K_n \triangleright P_2$ dan untuk $n = 2$, graf K_2 isomorfik dengan lintasan P_2 sehingga graf hasil operasi *comb* $K_2 \triangleright K_m$ isomorfik dengan $P_2 \triangleright K_m$ sedemikian sehingga order dari graf lengkap K_n dan graf lengkap K_m masing-masing adalah $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Dalam menentukan dimensi partisi bintang graf $K_n \triangleright K_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright K_m$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.19. *Diberikan dua graf terhubung K_n dan K_m dengan masing-masing ordernya m dan n dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka dimensi partisi bintang dari graf hasil operasi comb $K_n \triangleright K_m$ adalah $spd(K_n \triangleright K_m) = n(m-1)$*

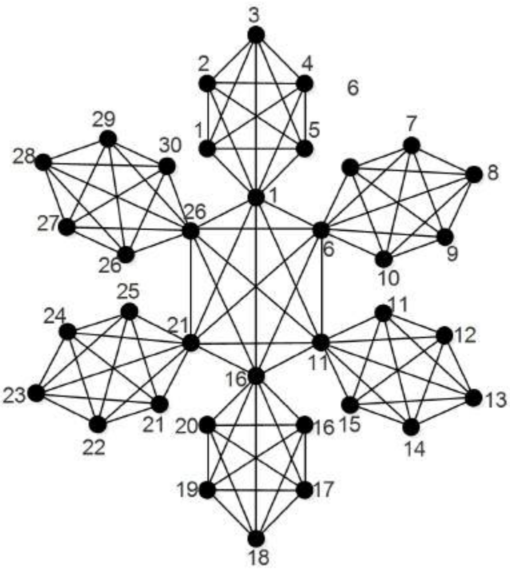
Bukti: Misalkan graf $K_n \triangleright K_m$ memiliki himpunan simpul $V(K_n \triangleright K_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_n \triangleright K_m) = \{y_{i,1}y_{i+k,1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-i\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+l} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq m-j\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $K_n \triangleright K_m$ dengan mn buah simpul, maka pertama menentukan batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $K_n \triangleright K_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.24. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(m-1)}\}$ dengan:
$S_{(m-1)(i-1)+j-1} = \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq m\}$
$S_{(m-1)i-m+2} = \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{(m-1)(i-1)+j-1}$ dimana $2 \leq j \leq m$ dan $1 \leq i \leq n$ merupakan kelas partisi singleton yang berisi sebuah simpul trivial yang juga merupkan graf bintang, sedangkan $S_j = \{y_{i,1}, y_{i,2} | 1 \leq i \leq n\}$ merupakan kelas partisi yang menginduksi graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_n \triangleright K_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_n \triangleright K_m)$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, sebagai berikut:

$$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (\underbrace{2, \underbrace{3, ..., 3}_{m-2}, ..., 2, \underbrace{3, ..., 3}_{m-2}}_{i-1}, \underbrace{1, ..., 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-j}, \underbrace{2, \underbrace{3, ..., 3}_{m-2}, ..., 2, \underbrace{3, ..., 3}_{m-2}}_{n-i});$$

$1 \leq i \leq n$ dan $2 \leq j \leq m$.

$$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (\underbrace{1, \underbrace{2, ..., 2}_{m-2}, ..., 1, \underbrace{2, ..., 2}_{m-2}}_{i-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, \underbrace{1, \underbrace{2, ..., 2}_{m-2}, ..., 1, \underbrace{2, ..., 2}_{m-2}}_{n-i}); 1 \leq i \leq n.$$

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(m-1)}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri



Gambar 4.24: Konstruksi Partisi Pembeda Bintang Graf $K_6 \triangleright K_6$

dari $n(m-1)$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(m-1)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright K_m$ yaitu $spd(K_n \triangleright K_m) \leq n(m-1)$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright K_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(m-1) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(K_n \triangleright K_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(m-1)-1}\}$ maka ada dua kasus yaitu

a. Jika sebarang simpul $u, v \in V(K_n \triangleright K_m)$ dengan u, v tepat pada subgraf K_m maka berdasarkan Lemma 2.2 terdapat paling sedikit dua simpul memiliki representasi simpul terhadap Π_S yang sama. Misalkan kelas partisi $S_2 = \{y_{1,3}, y_{1,4}\}$, simpul $y_{1,3}$ dan $y_{1,4}$ memiliki jarak yang sama ke semua simpul di $V(K_n \triangleright K_m) - \{y_{1,3}, y_{1,4}\}$ atau dapat ditulis $d(y_{1,3}, w) = d(y_{1,4}, w)$ dimana $w \in V(P_n \triangleright K_m) - \{y_{1,3}, y_{1,4}\}$ berakibat $r(y_{1,3}|\Pi_S) = r(y_{1,4}|\Pi_S)$. Jadi Π_S dengan $|\Pi_S| = n(m-1) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang walaupun kelas partisi S_2 menginduksi graf bintang.

b. Jika kita ambil kelas partisi $S_{n(m-1)(n-2)+1} = \{y_{n-1,2}\}$, $S_{n(m-1)(n-1)+1} =$

$\{y_{n,2}\}$, $S_{(m-1)(n-1)-m+2} = \{y_{n-1,1}\}$ dan $S_{(m-1)n-m+2} = \{y_{n,1}\}$ digabung menjadi satu partisi S' dan dapat dilihat bahwa kelas partisi S' tidak menginduksi sebuah graf bintang maka Π_S bukan merupakan partisi pembeda bintang walaupun kelas partisi S' memiliki representasi simpul terhadap Π_S berdeda.

Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(m-1) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright K_m)$ yaitu $spd(K_n \triangleright K_m)) \geq n(m-1)$.

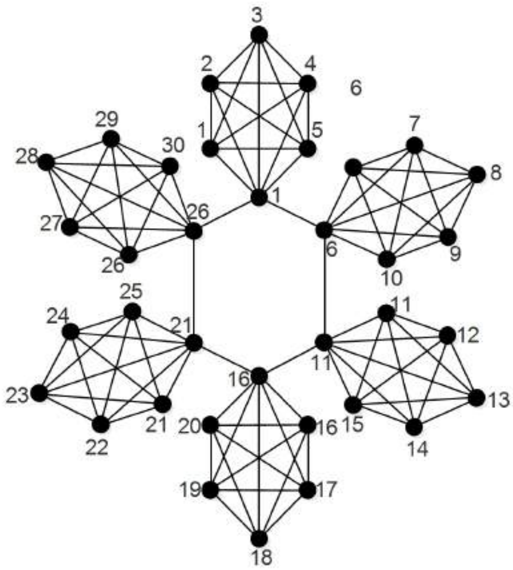
Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(m-1) \leq spd(K_n \triangleright K_m) \leq n(m-1)$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_n \triangleright K_m) = n(m-1)$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. □

4.2.6 Dimensi Partisi Bintang Graf Lingkaran Comb Graf Lengkap

Graf hasil opersi *comb* antara graf lingkaran C_m dengan graf lengkap K_n dihasilkan dari menduplikat graf lengkap K_n sebanyak m simpul di graf lingkaran C_m dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf K_n pada setiap simpul graf C_m, maka dapat dikatakan bahwa graf $C_m \triangleright K_n$ merupakan graf yang terdiri dari m kali graf lengkap K_n. Sehingga graf $C_m \triangleright K_n$ memiliki himpunan simpul $V(C_m \triangleright K_n) = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \triangleright K_n) = \{y_{j,1}y_{j+1,1} | 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{m,1}y_{1,1}\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+k} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-i\}$. Graf $C_m \triangleright K_n$ memiliki nm buah simpul dan $\frac{n^2m - mn + 2m}{2}$ buah sisi. Graf $C_m \triangleright K_n$ ditunjukkan pada Gambar 4.15 (a).

Pada subbab ini, dibahas dimensi partisi bintang graf $C_m \triangleright K_n$ dengan $m, n \in Z^+$. Untuk $m = 2$, graf C_2 merupakan graf yang memiliki sisi ganda sehingga C_2 bukan graf sederhana dan untuk $n = 2$, graf K_2 isomorfik dengan lintasan P_2 sehingga graf hasil operasi *comb* $C_m \triangleright K_2$ isomorfik dengan $C_m \triangleright P_2$ sedemikian sehingga order lingkaran dan graf lengkap masing-masing adalah $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Dalam menentukan dimensi partisi bintang graf $C_m \triangleright K_n$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright K_n$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.20. *Diberikan dua graf terhubung C_m dan K_n dengan masing-masing ordernya m dan n dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka dimensi partisi bintang dari graf hasil operasi comb $C_m \triangleright K_n$ adalah $spd(C_m \triangleright K_n) = m(n-1)$.*



Gambar 4.25: Konstruksi Partisi Pembeda Bintang Graf $C_6 \rhd K_6$

Bukti: Misalkan graf $C_m \rhd K_n$ memiliki himpunan simpul $V(C_m \rhd K_n) = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \rhd K_n) = \{y_{j,1}y_{j+1,1} | 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{m,1}y_{1,1}\} \cup \{y_{j,i}y_{j,i+k} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-i\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $C_m \rhd K_n$ dengan mn buah simpul, maka pertama menentukan batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $C_m \rhd K_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.25. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(n-1)}\}$ dengan:

$S_{(n-1)(j-1)+i-1} = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m, 2 \leq i \leq n\}$

$S_{(n-1)j-n+2} = \{y_{j,1} | 1 \leq j \leq m\}$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{(n-1)(j-1)+i-1}$ dimana $3 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$ merupakan kelas partisi singleton yang berisi sebuah simpul trivial yang juga merupakan graf bintang, sedangkan $S_{(n-1)(j-1)+1} \cup S_{(n-1)j-n+2}$ dimana $1 \leq j \leq m$ merupakan kelas partisi yang menginduksi graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_m \rhd K_n)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_m \rhd K_n)$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, sebagai berikut:

$r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, \underbrace{1, ..., 1}_{i-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i}, c_{m-j})$; $1 \leq j \leq m$ dan $2 \leq i \leq n$, m gasal.

$c = (z_1, \underbrace{z_1+1, ..., z_1+1}_{n-2}, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1}_{n-2}, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1},$

$\underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1}_{n-2}, ..., z_{m-1}, \underbrace{z_{m-1}+1, ..., z_{m-1}+1}_{n-2})$; $z_l = l+1$ dengan

$1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $z_l = m - l + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$.
$a = (z_{m-1}, \underbrace{z_{m-1}+1, ..., z_{m-1}+1}_{n-2}, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}, \underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1}_{n-2}, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor},$
$\underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1}_{n-2}, ..., z_1, \underbrace{z_1+1, ..., z_1+1}_{n-2})$; $z_l = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$;
$z_l = m - l + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright K_n$ untuk m gasal dengan $i = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{j,1}|\Pi_S) = (a_{j-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, c_{m-j})$; $1 \leq j \leq m$, m gasal.
$c = (z_1, \underbrace{z_1+1, ..., z_1+1}_{n-2}, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1}_{n-2}, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1},$
$\underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1}_{n-2}, ..., z_{m-1}, \underbrace{z_{m-1}+1, ..., z_{m-1}+1}_{n-2})$; $z_l = l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $z_l = m - l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$.
$a = (z_{m-1}, \underbrace{z_{m-1}+1, ..., z_{m-1}+1}_{n-2}, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}, \underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1}_{n-2}, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor},$
$\underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1}_{n-2}, ..., z_1, \underbrace{z_1+1, ..., z_1+1}_{n-2})$; $z_l = l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$;
$z_l = m - l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright K_n$ untuk m genap sebagai berikut: $r(y_{j,i}|\Pi_S) = (a_{j-1}, \underbrace{1, ..., 1}_{i-2}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i}, c_{m-j})$; $1 \leq j \leq m$ dan $2 \leq i \leq n$, m genap.
$c = (z_1, \underbrace{z_1+1, ..., z_1+1}_{n-2}, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1}_{n-2}, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1},$
$\underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1}_{n-2}, ..., z_{m-1}, \underbrace{z_{m-1}+1, ..., z_{m-1}+1}_{n-2})$; $z_l = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $z_l = m - l + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$.
$a = (z_{m-1}, \underbrace{z_{m-1}+1, ..., z_{m-1}+1}_{n-2}, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}, \underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1}_{n-2}, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor},$
$\underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1}_{n-2}, ..., z_1, \underbrace{z_1+1, ..., z_1+1}_{n-2})$; $z_l = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$;
$z_l = m - l + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m - 1$.

Reprentasi simpul di graf $C_m \triangleright K_n$ untuk m genap dengan $i = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{j,1}|\Pi_S) = (a_{j-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2}, c_{m-j})$; $1 \leq j \leq m$, m genap.

$c = (z_1, \underbrace{z_1+1, ..., z_1+1}_{n-2}, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1}_{n-2}, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1},$
$\underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1}_{n-2}, ..., z_{m-1}, \underbrace{z_{m-1}+1, ..., z_{m-1}+1}_{n-2})$; $z_l = l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $z_l = m-l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m-1$.
$a = (z_{m-1}, \underbrace{z_{m-1}+1, ..., z_{m-1}+1}_{n-2}, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}, \underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}+1}_{n-2}, z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor},$
$\underbrace{z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1, ..., z_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1}_{n-2}, ..., z_1, \underbrace{z_1+1, ..., z_1+1}_{n-2})$; $z_l = l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $z_l = m-l$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq l \leq m-1$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(n-1)}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $m(n-1)$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = m(n-1)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright K_n)$ yaitu $spd(C_m \triangleright K_n) \leq m(n-1)$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \triangleright K_n$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = m(n-1)-1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_m) \cup V(K_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{m(n-1)-1}\}$ maka ada dua kasus yaitu

a. Jika sebarang simpul $u, v \in V(C_m \triangleright K_n)$ dengan u, v tepat pada subgraf K_n maka berdasarkan Lemma 2.2 terdapat paling sedikit dua simpul memiliki representasi simpul terhadap Π_S yang sama. Misalkan kelas partisi $S_2 = \{y_{1,3}, y_{1,4}\}$, simpul $y_{1,3}$ dan $y_{1,4}$ memiliki jarak yang sama ke semua simpul di $V(C_m \triangleright K_n) - \{y_{1,3}, y_{1,4}\}$ atau dapat ditulis $d(y_{1,3}, w) = d(y_{1,4}, w)$ dimana $w \in V(C_m \triangleright K_n) - \{y_{1,3}, y_{1,4}\}$ berakibat $r(y_{1,3}|\Pi_S) = r(y_{1,4}|\Pi_S)$. Jadi Π_S dengan $|\Pi_S| = m(n-1)-1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang walaupun kelas partisi S_2 menginduksi graf bintang.

b. Jika kita ambil kelas partisi $S_{m(n-1)(m-2)+1} = \{y_{m-1,2}\}$, $S_{m(n-1)(m-1)+1} = \{y_{m,2}\}$, $S_{(n-1)(m-1)-n+2} = \{y_{m-1,1}\}$ dan $S_{(n-1)m-n+2} = \{y_{m,1}\}$ digabung menjadi satu partisi S' dan dapat dilihat bahwa kelas partisi S' tidak menginduksi sebuah graf bintang maka Π_S bukan merupakan partisi pembeda bintang walaupun kelas partisi S' memiliki representasi simpul terhadap Π_S berdeda.

Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(n-1) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_m \rhd K_n$ yaitu $spd(C_m \rhd K_n)) \geq m(n-1)$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $m(n-1) \leq spd(C_m \rhd K_n) \leq m(n-1)$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_m \rhd K_n) = m(n-1)$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. □

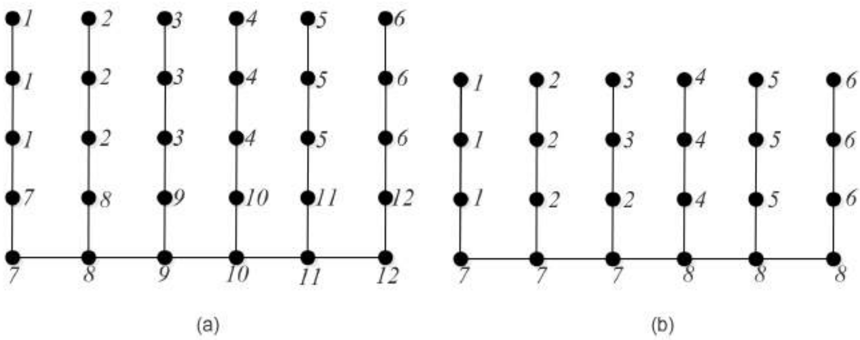
4.2.7 Dimensi Partisi Bintang Graf Lintasan Comb Graf Lintasan

Graf hasil operasi *comb* antara graf lintasan P_n dengan graf lintasan P_m dihasilkan dari menduplikat graf lintasan P_m sebanyak n simpul di graf lintasan P_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf P_m pada setiap simpul graf P_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $P_n \rhd_\delta P_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali Lintasan P_m. Sehingga graf $P_n \rhd_\delta P_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \rhd_\delta P_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \rhd_\delta P_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$. Graf $P_n \rhd_\delta P_m$ memiliki nm buah simpul dan $nm - 1$ buah sisi. Graf $P_n \rhd_\delta P_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.13 (a).

Pada subbab ini, dibahas dimensi partisi graf $P_n \rhd_\delta P_m$ dengan $m, n \in Z^+$. Untuk $n = 2$, graf hasil operasi *comb* $P_2 \rhd_\delta P_m$ isomrorfik dengan lintasan P_{2m} dan untuk $m = 1$, graf P_1 adalah graf trivial sehingga graf hasil operasi *comb* $P_n \rhd_\delta P_1$ isomrorfik dengan lintasan P_n sedemikian sehingga order lintasan P_n dan lintasan P_m masing-masing adalah $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Dalam menentukan dimensi partisi bintang graf $P_n \rhd_\delta P_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Teorema 4.21. *Diberikan dua graf terhubung P_n dan P_m dengan masing-masing ordernya n dan m dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ dengan simpul pelekatan P_m yang berderajat satu, maka dimensi partisi bintang graf hasil operasi comb $P_n \rhd_\delta P_m$ adalah*

$$spd(P_n \rhd_\delta P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil, & \textit{jika } m \equiv 0 (mod\ 3) \textit{ dan } m \equiv 2 (mod\ 3) \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \textit{jika } m \equiv 1 (mod\ 3) \end{cases}$$



Gambar 4.26: (a) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $P_6 \rhd_\delta P_5$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $P_6 \rhd_\delta P_4$

Bukti: Misalkan graf $P_n \rhd_\delta P_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \rhd_\delta P_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \rhd_\delta P_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $P_n \rhd_\delta P_m$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai m dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, kasus kedua untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan kasus ketiga untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Kasus 1: Untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3})}\}$ dengan:

$$S_{\frac{m}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k, 1 \leq i \leq n\}$$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m}{3}(i-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \rhd_\delta P_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$) untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - k}, c_{n-i})$; $u_s = j - 3s$ dan $t_r = 3r - (j-1)$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - k$.

$c = (z_1^1, t_2^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor}, ..., z^1_{n-i}, t^1_2, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor})$; $z_l^1 = j + (l-1)$ dengan $1 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^1 = z_l^1 + 3s$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$.

$a = (z_(i-1)^2, t_2^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor}, ..., z_1^2, t_2^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor})$; $z_l^2 = j + (l-1)$ dengan $1 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^2 = z_l^2 + 3s$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3})}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m}{3})$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$ yaitu $spd(P_n \rhd_\delta P_m) \leq n(\frac{m}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \rhd_\delta P_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{n}{m})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m}{3})-1} = \{y_{n,j} | \frac{m}{3} - 1 \leq k \leq \frac{m}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$ yaitu $spd(P_n \rhd_\delta P_m)) \geq n(\frac{m}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m}{3}) \leq spd(P_n \rhd_\delta P_m) \leq n(\frac{m}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \rhd_\delta P_m) = n(\frac{m}{3})$ untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$.

Kasus 2: Untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$

Simpul-simpul di graf $P_n \rhd_\delta P_m$ dibedakan menjadi simpul daun (*pendant*) merupakan simpul-simpul subgraf P_m dan simpul dalam merupakan simpul-simpul di subgraf lintasan P_n. Untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, kelas partisi di simpul daun (*pendant*) terpisah dengan kelas partisi di simpul dalam sehingga terdapat tiga kasus untuk nilai m yaitu pertama untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, kedua untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$.

1. Untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$

   Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $P_n \rhd_\delta P_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.26 (b). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n}{3}}\}$ dengan:

   $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq i \leq 3k+1, 1 \leq i \leq n\}$

   $S_{n(\frac{m-1}{3})+l} = \{y_{i,1} | 1 \leq l \leq \frac{n}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$

   Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+l}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \rhd_\delta P_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - k}, c_{n-i}, d)$; $u_s = j - 3s - 1$ dan $t_r = 3r - (j-2)$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - k$.

$c = (z_1^1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{n-i}, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_l^1 = j + (l-1) + 1$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^1 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$a = (z_(i-1)^2, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z_1^2, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_l^2 = j + (l-1) + 1$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^2 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$d = (t_1^4, ..., t^4_{p-1}, j-1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p})$; $t_f^3 = (j-1) + (1 + 3(p-1) - i) + 3f$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p$; $t_f^4 = j + (i - 3(p-1) - 1) + 3(p-f-1)$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$.

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, d)$; $t_l = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$c = (z_1^1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{n-i}, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_l^1 = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^1 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$a = (z_(1)^2, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{i-1}, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_l^2 = i - l + 1$ dengan $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^2 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$d = (t_1^4, ..., t^4_{p-1}, 0, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p})$; $t_f^3 = (1 + 3(p-1) - i) + 3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p$; $t_f^4 = (i - 3(p-1) - 1) + 3(p-f-1) + 1$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$ yaitu $spd(P_n \rhd_\delta P_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3} - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n}{3}-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n}{3}-1} = \{y_{i,1} | \frac{n}{3} - 1 \leq l \leq \frac{n}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor + \frac{m}{3} - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3} \leq spd(P_n \triangleright_\delta P_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$.

2. Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$
Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1}\}$ dengan:
$S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1, 1 \leq i \leq n\}$
$S_{n(\frac{m-1}{3})+l} = \{y_{i,1} | 1 \leq l \leq \frac{n-1}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$
$S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1} = \{y_{n,1}\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k}$, $S_{n(\frac{m-1}{3})+l}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1}$ merupakan kelas partisi singleton yang berisi sebuah simpul trivial yang juga merupakan graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright_\delta P_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-k}, c_{n-i}, d)$; $u_s = j - 3s - 1$ dan $t_r = 3r - (j-2)$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - k$.
$c = (z_1^1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z_l^1 = j + (l-1) + 1$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^1 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.

$a = (z_(1)^2, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{i-1}, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z_l^2 = j + (l-1) + 1$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^2 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (t_1^4, ..., t^4_{p-1}, j-1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -p+1})$; $t_f^3 = (j-1) + (1 + 3(p-1) - i) + 3f$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p$; $t_f^4 = j + (i - 3(p-1) - 1) + 3(p-f-1)$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$.
$d = (t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}, j-1)$; $t_f^5 = j + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$; $i = n$.

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, c_{n-i}, d)$; $t_l = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$c = (z_1^1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{n-i}, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z_l^1 = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^1 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (z_(1)^2, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{i-1}, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z_l^2 = i - l + 1$ dengan $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^2 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (t_1^4, ..., t^4_{p-1}, 0, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -p+1})$; $t_f^3 = (1 + 3(p-1) - i) + 3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1$; $t_f^4 = (i - 3(p-1) - 1) + 3(p-f-1) + 1$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$.
$d = (t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}, 0)$; $t_f^5 = 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f + 1$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$; $i = n$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$ yaitu $spd(P_n \rhd_\delta P_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-

simpul dari $V(P_n \triangleright_\delta P_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}} = \{y_{i,1}|l = \frac{n-1}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\} \cup \{y_{n,1}\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1 \leq spd(P_n \triangleright_\delta P_m) \leq n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$.

3. Untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1}\}$ dengan:
$S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j}|1 \leq k \leq \frac{m-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1, 1 \leq i \leq n\}$
$S_{n(\frac{m-1}{3})+l} = \{y_{i,1}|1 \leq l \leq \frac{n-2}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$
$S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1} = \{y_{n-1,1}, y_{n,1}\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+l}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright_\delta P_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-k}, c_{n-i}, d)$; $u_s = j - 3s - 1$ dan $t_r = 3r - (j-2)$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - k$.
$c = (z_1^1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{n-i}, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z_l^1 = j + (l-1) + 1$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^1 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.
$a = (z_(1)^2, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{i-1}, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z_l^2 = j + (l-1) + 1$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^2 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.
$d = (t_1^4, ..., t^4_{p-1}, j-1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-p+1})$; $t_f^3 = (j-1) + (1 + 3(p-1) - i) + 3f$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - p$; $t_f^4 = j + (i - 3(p-1) - 1) + 3(p-f-1)$ dengan $2 \leq j \leq m$, $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq p-1$.

$d = (t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}, j-1)$; $t^5_f = (i - 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1) + j + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f$ dengan $2 \leq j \leq m, 1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor; n-1 \leq i \leq n$.

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, c_{n-i}, d)$; $t_l = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$c = (z_1^1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{n-i}, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^1_l = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq n - i, 1 \leq i \leq n$; $t^1_s = z^1_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (z_(1)^2, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{i-1}, t^2_1, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^2_l = i - l + 1$ dengan $1 \leq l \leq i - 1, 1 \leq i \leq n$; $t^2_s = z^2_l + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (t_1^4, ..., t^4_{p-1}, 0, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1})$; $t^3_f = (1 + 3(p-1) - i) + 3f$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$, $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - p + 1$; $t^4_f = (i - 3(p-1) - 1) + 3(p - f - 1) + 1$ dengan $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p, 1 \leq f \leq p - 1$.
$d = (t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}, 0)$; $t^5_f = (i - 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1) + j + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3f + 1$ dengan $2 \leq j \leq m, 1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor; i = n$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$ yaitu $spd(P_n \rhd_\delta P_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \rhd_\delta P_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}} = \{y_{i,1} | l = \frac{n-2}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\} \cup \{y_{n,1}\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$

yaitu $spd(P_n \rhd_\delta P_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1 \leq spd(P_n \rhd_\delta P_m) \leq n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \rhd_\delta P_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$.

Kasus 3: Untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $P_n \rhd_\delta P_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.26 (a). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-2}{3})+n}\}$ dengan:

$S_{\frac{m-2}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-2}{3}, 3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2, 1 \leq i \leq n\}$

$S_{n(\frac{m-2}{3})+i} = \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2\}$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-2}{3}(i-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n(\frac{m-2}{3})+i}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \rhd_\delta P_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \rhd_\delta P_m$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, u_1, ..., u_{k-1}, 0, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - k}, c_{n-i})$; $u_s = j - 3s - 2$ dan $t_r = 3r - (j-3)$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2$, $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - k$.

$c = (z_1^1, t_2^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor}, ..., z^1_{n-i}, t^1_2, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor})$; $z_l^1 = j + (l-1) + 2$ dengan $3 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^1 = z_l^1 + 3s$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$.

$a = (z(i-1)^2, t_2^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor}, ..., z_1^2, t_2^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor})$; $z_l^2 = j + (l-1) + 2$ dengan $3 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^2 = z_l^2 + 3s$ dengan $2 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$.

$d = (t^4_{i-1}, ..., t^4_1, z^3_1, t^3_1, ..., t^3_{n-i})$; $t^3_l = j + (l-1)$ dengan $3 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$; $t^4_l = j + (l-1)$ dengan $3 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $z^3_1 = j-2$ dengan $3 \leq j \leq m$.

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 2, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, d)$; $t_l = 2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$c = (z_1^1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{n-i}, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_l^1 = 3+(l-1)$ dengan $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^1 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$a = (z(i-1)^2, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z_1^2, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_l^2 = 3 + (l-1)$ dengan $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^2 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$d = (z^3_{i-1}, ..., z^3_1, 0, z^4_1, ..., z^4_{n-i})$; $z^3_l = l$ dengan $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $z^4_l = l$ dengan $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$.

$r(y_{i,2}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, c_{n-i}, d)$; $t_l = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$c = (z_1^1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{n-i}, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z_l^1 = 4+(l-1)$ dengan $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^1 = z_l^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (z_(i-1)^2, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z_1^2, t_1^2, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z_l^2 = 4 + (l-1)$ dengan $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $t_s^2 = z_l^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (z^3_{i-1}, ..., z^3_1, 0, z^4_1, ..., z^4_{n-i})$; $z_l^3 = l + 1$ dengan $1 \leq l \leq i-1$, $1 \leq i \leq n$; $z_l^4 = l+1$ dengan $1 \leq l \leq n-i$, $1 \leq i \leq n$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-2}{3})+n}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-2}{3}) + n$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-2}{3} + 1) = n(\frac{m+1}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\delta C_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) \leq n(\frac{m+1}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m+1}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \triangleright_\delta P_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m+1}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m+1}{3})-1} = \{y_{i,1}, y_{i,m} | n-1 \leq \leq n\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m+1}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\delta P_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) \geq n(\frac{m+1}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m+1}{3}) \leq spd(P_n \triangleright_\delta P_m) \leq n(\frac{m+1}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) = n(\frac{m+1}{3})$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Berdasarkan ketiga kasus pembuktian di atas diketahui bahwa $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) = n(\frac{m}{3})$ untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) = n(\frac{m+1}{3})$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$ sehingga pada kedua nilai m tersebut dapat digabungkan sedemikian $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) = n\lceil \frac{m}{3} \rceil$. Sedangkan $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n+2}{3}$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n+1}{3}$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan

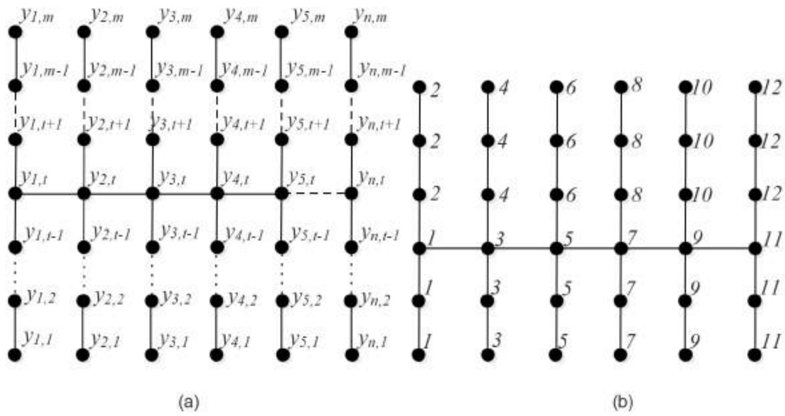
$n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dapat ditulis $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) = n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil$. $\square$

Sekarang, kita akan membahas dimensi partisi bintang pada graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ dengan $m, n \in Z^+$ dan salah satu simpul $v \in P_m$ yang dilekatkan ke setiap simpul $u \in P_n$ dan simpul v mempunyai derajat sama dengan dua. Untuk $n = 1$, graf hasil operasi *comb* $P_1 \triangleright_\Delta P_m$ isomrorfik dengan lintasan P_m dan untuk $m = 3$, graf hasil operasi *comb* membentuk pola khusus sedemikian sehingga order lintasan P_n dan lintasan P_m masing-masing adalah $n \geq 2$ dan $m \geq 4$. Graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.27 (a). Dalam menentukan dimensi partisi bintang suatu graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan partisi pembeda bintang Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Untuk $m = 3$, andaikan batas bawah dimensi partisi bintang yaitu $spd(P_n \triangleright_\Delta P_3) \geq n(\frac{m}{3}) = n$. Berdasarkan Lemma 2.2, terdapat representasi simpul-simpul di $V(P_n \triangleright_\Delta P_3)$ yakni $r(y_{i,1}|\Pi_S) = r(y_{i,3}|\Pi_S)$ untuk $1 \leq i \leq n$ berakibat simpul $y_{i,1}$ dan $y_{i,3}$ harus berada pada kelas partisi yang berbeda sehingga batas bawah dimensi partisi bintang:

$$spd(P_n \triangleright_\Delta P_3) \geq \underbrace{(\frac{m}{3}+1) + (\frac{m}{3}+1) + ... + (\frac{m}{3}+1)}_{n\ buah} = n(\frac{m}{3}+1) = 2n$$

Jadi, batas bawah dimensi partisi bintang adalah $spd(P_n \triangleright_\Delta P_3) \geq n(\frac{m}{3}+1) = 2n$. Untuk menentukan batas atas, dapat dikonstruksi partisi pembeda bintang misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2n}\}$ dengan $S_i = \{y_{i,1}, y_{i,2}|1 \leq i \leq n\}$ dan $S_{n+i} = \{y_{i,3}|1 \leq i \leq n\}$ Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada S_i menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$ dan S_{n+i} merupakan kelas partisi yang memuat simpul trivial dapat juga disebut graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi koordinat setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright_\Delta P_3)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_3$ berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2n}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $2n$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = 2n$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_3$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\Delta P_3) \leq 2m$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $2n \leq spd(P_n \triangleright_\Delta P_3) \leq 2n$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright_\Delta P_3) = 2n$.



Gambar 4.27: (a) Graf Hasil Operasi Comb $P_n \triangleright_\Delta P_m$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Bintang $P_6 \triangleright_\Delta P_6$

Teorema 4.22. *Misalkan P_n adalah graf lintasan order n dan P_m adalah graf lintasan order m dengan simpul pelekatan dari P_m yang berderajat dua. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 4$, dimensi partisi bintang dari sebuah graf hasil operasi comb $P_n \triangleright_\Delta P_m$ adalah*

$$spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil, & \textit{jika } m \equiv 0(mod\ 3),\ m \equiv 2(mod\ 3) \\ & \textit{dan } m \equiv 1(mod\ 3),\ 1 < j < m, \\ & j \neq 1(mod\ 3) \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \textit{jika } m \equiv 1(mod\ 3),\ 1 < j < m, \\ & j \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ memiliki himpunan simpul $V(P_n \triangleright_\Delta P_m) = \{y_{i,j}|1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright_\Delta P_m) = \{y_{i,t}y_{i+1,t}|1 \leq i \leq n-1, j = t, 2 \leq t \leq m-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}|1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai m dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, kasus kedua untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan kasus ketiga untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Kasus 1: Untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.27 (b). Misalkan

$\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3})}\}$ dengan:

$$S_{\frac{m}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k, 1 \leq i \leq n, j = t, 2 \leq t \leq m-1\}$$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m}{3}(i-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright_\triangle P_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ untuk $n \equiv 0(mod\ 3)$ adalah berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3})}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m}{3})$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\triangle P_m) \leq n(\frac{m}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \triangleright_\triangle P_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m}{3})-1} = \{y_{n,j} | \frac{m}{3} - 1 \leq k \leq \frac{m}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\triangle P_m) \geq n(\frac{m}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m}{3}) \leq spd(P_n \triangleright_\triangle P_m) \leq n(\frac{m}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright_\triangle P_m) = n(\frac{m}{3})$ untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$.

Kasus 2: Untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dimana $1 < j < m, j \neq 1(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+n}\}$ dengan:

$S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-1}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k, 1 \leq i \leq n, j = t, 2 \leq t \leq m-1\}$

$S_{\frac{m-1}{3}n+i} = \{y_{i,m} | 1 \leq i \leq n, j = t, 2 \leq t \leq m-1\}$ Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m}{3}(i-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{\frac{m-1}{3}n+i}$ merupakan kelas partisi singleton yang memuat sebuah simpul trivial dapat disebut juga graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright_\Delta P_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$ adalah berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+n}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}) + n$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + n$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) \leq n(\frac{m+2}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \triangleright_\Delta P_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m+2}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m+2}{3})-1} = \{y_{n,j} | k = \frac{m-1}{3}, 3(k-1) + 1 \leq j \leq 3k\} \cup \{y_{n,m}\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m+2}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) \geq n(\frac{m+2}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m+1}{3}) \leq spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) \leq n(\frac{m+2}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = n(\frac{m+2}{3})$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dimana $1 < j < m, j \neq 1(\text{mod } 3)$.

Kasus 3: Untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dimana $1 < j < m, j \equiv 1(\text{mod } 3)$

Simpul-simpul di graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ dibedakan menjadi simpul daun (*pendant*) merupakan simpul-simpul subgraf P_m dan simpul dalam merupakan simpul-simpul di subgraf lintasan P_n. Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, kelas partisi di simpul daun (*pendant*) terpisah dengan kelas partisi di simpul dalam sehingga terdapat tiga kasus untuk nilai m yaitu pertama untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, kedua untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \equiv 2(\text{mod } 3)$.

1. Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 0(\text{mod } 3)$

   Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n}{3}}\}$ dengan:
   $S_{l(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq l, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1, 3(k-1) + 1 \leq j \leq 3k, 1 \leq$

$i \leq n\}$
$S_{nl+(\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - l)(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - l, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1, 3l + 3(k - 1) + 2 \leq j \leq 3l + 3k + 1, 1 \leq i \leq n\}$
$S_{n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + f} = \{y_{i,t} | 1 \leq f \leq \frac{n}{3}, 3(f-1) + 1 \leq i \leq 3f, j = t = 3l + 1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{l(i-1)+k}$, $S_{nl+(\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - l)(i-1)+k}$ dan $S_{n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + f}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \rhd_\Delta P_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \rhd_\Delta P_m$ untuk $m \equiv 1(mod\, 3)$ dan $n \equiv 0(mod\, 3)$. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n}{3}}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n\frac{m-1}{3} + \frac{n}{3}$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n\frac{m-1}{3} + \frac{n}{3}$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\Delta P_m$ yaitu $spd(P_n \rhd_\Delta P_m) \leq n\frac{m-1}{3} + \frac{n}{3}$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\Delta P_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang $K_{1,2}$ sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n\frac{m-1}{3} + \frac{n}{3} - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang $K_{1,2}$. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \rhd_\Delta P_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n}{3}-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n}{3}-1} = \{y_{i,t} | \frac{n}{3} - 1 \leq f \leq \frac{n}{3}, 3(f-1) + 1 \leq i \leq 3f, j = t = 3l + 1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n\frac{m-1}{3} + \frac{n}{3} - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $P_n \rhd_\Delta P_m$ yaitu $spd(P_n \rhd_\Delta P_m) \geq n\frac{m-1}{3} + \frac{n}{3}$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n\frac{m-1}{3} + \frac{n}{3} \leq spd(P_n \rhd_\Delta P_m) \leq n\frac{m-1}{3} + \frac{n}{3}$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \rhd_\Delta P_m) = n\frac{m-1}{3} + \frac{n}{3}$ untuk $m \equiv 1(mod\, 3)$ dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$.

2. Untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan

$\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n-1}{3}+1}\}$ dengan:
$S_{l(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq l, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k, 1 \leq i \leq n\}$
$S_{nl+(\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - l)(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - l, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1, 3l+3(k-1)+2 \leq j \leq 3l+3k+1, 1 \leq i \leq n\}$
$S_{n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + f} = \{y_{i,t} | 1 \leq f \leq \frac{n-1}{3}, 3(f-1)+1 \leq i \leq 3f, j = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1\}$
$S_{n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \frac{n-1}{3}+1} = \{y_{n,t} | j = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{l(i-1)+k}$, $S_{nl+(\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - l)(i-1)+k}$ dan $S_{n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + f}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \frac{n-1}{3}+1}$ merupakan kelas partisi singleton yang memuat sebuah graf trivial dapat disebut juga graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright_\Delta P_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$ dan $m \equiv 1(mod\ 3)$. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n-1}{3}+1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n\frac{m-1}{3} + \frac{n-1}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n\frac{m-1}{3} + \frac{n-1}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) \leq n\frac{m-1}{3} + \frac{n-1}{3} + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam satu kelas partisi harus sebuah graf bintang, sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n\frac{m-1}{3} + \frac{n-1}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \triangleright_\Delta P_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n-1}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n-1}{3}} = \{y_{i,t} | f = \frac{n-1}{3}, 3(f-1)+1 \leq i \leq 3f, j = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1\} \cup \{y_{n,t} | j = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n\frac{m-1}{3} + \frac{n-1}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) \geq n\frac{m-1}{3} + \frac{n-1}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n\frac{m-1}{3}+\frac{n-1}{3}+1 \leq spd(P_n \triangleright_\triangle P_m) \leq n\frac{m-1}{3}+\frac{n-1}{3}+1$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright_\triangle P_m) = n\frac{m-1}{3}+\frac{n-1}{3}+1$ untuk $m \equiv 1(mod\ 3)$ dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$.

3. Untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \equiv 2(\text{mod } 3)$

   Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n-2}{3}+1}\}$ dengan:

   $S_{l(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq l, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k, 1 \leq i \leq n\}$

   $S_{nl+(\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - l)(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - l, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1, 3l+3(k-1)+2 \leq j \leq 3l+3k+1, 1 \leq i \leq n\}$

   $S_{n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + f} = \{y_{i,t} | 1 \leq f \leq \frac{n-2}{3}, 3(f-1)+1 \leq i \leq 3f, j = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1\}$

   $S_{n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \frac{n-2}{3}+1} = \{y_{n-1,t}, y_{n,t} | j = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1\}$

   Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{l(i-1)+k}$, $S_{nl+(\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - l)(i-1)+k}$ dan $S_{n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + f}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \frac{n-2}{3}+1}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \triangleright_\triangle P_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$ dan $m \equiv 1(mod\ 3)$. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n-2}{3}+1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n\frac{m-1}{3}+\frac{n-2}{3}+1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n\frac{m-1}{3}+\frac{n-2}{3}+1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\triangle P_m) \leq n\frac{m-1}{3}+\frac{n-2}{3}+1$.

   Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\triangle P_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang, sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n\frac{m-1}{3}+\frac{n-2}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \triangleright_\triangle P_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n-2}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n\frac{m-1}{3}+\frac{n-2}{3}} = \{y_{i,t}|f = \frac{n-1}{3}, 3(f-1)+1 \leq i \leq 3f, j = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1\} \cup \{y_{n-1,t}, y_{n,t}|j = t = 3l+1, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n\frac{m-1}{3} + \frac{n-1}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\Delta P_m$ yaitu $spd(P_n \rhd_\Delta P_m) \geq n\frac{m-1}{3} + \frac{n-2}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n\frac{m-1}{3} + \frac{n-2}{3} + 1 \leq spd(P_n \rhd_\Delta P_m) \leq n\frac{m-1}{3} + \frac{n-2}{3} + 1$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \rhd_\Delta P_m) = n\frac{m-1}{3} + \frac{n-2}{3} + 1$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$.

Kasus 3: Untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n\frac{m-2}{3}+n}\}$ dengan:

$S_{\frac{m-2}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j}|1 \leq k \leq \frac{m-2}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k, 1 \leq i \leq n\}$

$S_{n\frac{m-2}{3}+i} = \{y_{i,j}|1 \leq i \leq n, m-1 \leq j \leq m\}$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-2}{3}(i-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n\lfloor\frac{m}{3}\rfloor+i}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(P_n \rhd_\Delta P_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $P_n \rhd_\Delta P_m$ untuk $m \equiv 2(mod\ 3)$. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n\frac{m-2}{3}+n}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n\frac{m-2}{3} + n$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-2}{3} + 1)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\Delta P_m$ yaitu $spd(P_n \rhd_\Delta P_m) \leq n(\frac{m+1}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $P_n \rhd_\Delta P_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-2}{3} + 1) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(P_n \rhd_\Delta P_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-2}{3}+1)-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m-2}{3}+1)-1} = \{y_{n,j}|k = \frac{m-2}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k\} \cup \{y_{n,j}|m-1 \leq j \leq m\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-2}{3}+1)-1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $P_n \triangleright_\Delta P_m$ yaitu $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) \geq n(\frac{m-2}{3}+1)$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-2}{3}+1) \leq spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) \leq n(\frac{m-2}{3}+1)$, maka dimensi partisi bintang $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = n(\frac{m-2}{3}+1)$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Berdasarkan ketiga kasus pembuktian di atas diketahui bahwa $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = n(\frac{m}{3})$ untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = n(\frac{m-1}{3}+1)$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, $1 < j < m, j \neq 1(\text{mod } 3)$ dan $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = n(\frac{m-2}{3}+1)$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$ sehingga pada ketiga nilai n tersebut dapat digabungkan sedemikian $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = n\lceil\frac{m}{3}\rceil$. Sedangkan $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = n\frac{m-1}{3}+\frac{n}{3}$ untuk $m \equiv 1(mod\ 3)$, $1 < j < m, j \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = n\frac{m-1}{3}+\frac{n-1}{3}+1$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \equiv 1(mod\ 3)$ dan $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = n\frac{m-1}{3}+\frac{n-2}{3}+1$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \equiv 2(mod\ 3)$ dapat ditulis $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = n\lfloor\frac{m}{3}\rfloor + \lceil\frac{n}{3}\rceil$. $\square$

4.2.8 Dimensi Partisi Bintang Graf Lengkap Comb Graf Lingkaran

Graf hasil operasi *comb* antara graf lengkap K_n dengan graf lingkaran C_m dihasilkan dari menduplikat graf lingkaran C_m sebanyak n simpul di graf lengkap K_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf C_m pada setiap simpul graf K_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $K_n \triangleright C_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali graf lingkaran C_m. Sehingga graf $K_n \triangleright C_m$ memiliki himpunan simpul $V(K_n \triangleright C_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_n \triangleright C_m) = \{y_{i,1}y_{i+k,1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-i\} \cup \{y_{i,1}y_{i,m} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$. Graf $K_n \triangleright C_m$ memiliki nm buah simpul dan $\frac{n^2+2mn-n}{2}$ buah sisi. Graf $K_n \triangleright C_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.15 (a).

Pada subbab ini, dibahas dimensi partisi graf $K_n \triangleright C_m$ dengan $m, n \in Z^+$. Untuk $n = 2$, graf K_2 isomorfik dengan lintasan P_2 maka graf hasil operasi *comb* $K_2 \triangleright C_m$ isomrorfik dengan lintasan $P_2 \triangleright C_m$ dan untuk $m \in \{3, 4\}$, partisi pembeda bintang membentuk pola khusus sedemikian sehingga order graf lengkap K_n dan lingkaran C_m masing-masing adalah $n \geq 3$ dan $m \geq 5$. Dalam menentukan dimensi partisi bintang graf $K_n \triangleright C_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_n \triangleright C_m$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Untuk $m = 3$, andaikan batas bawah dimensi partisi bintang yaitu $spd(K_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m}{3})$. Berdasarkan Lemma 2.2, terdapat representasi koordinat simpul-simpul di $V(K_n \triangleright C_m)$ yakni $r(y_{i,2}|\Pi_S) = r(y_{i,3})$ untuk $1 \leq i \leq n$ berakibat simpul

$y_{i,2}$ dan $y_{i,3}$ harus berada pada kelas partisi yang berbeda sehingga batas bawah dimensi partisi bintang:

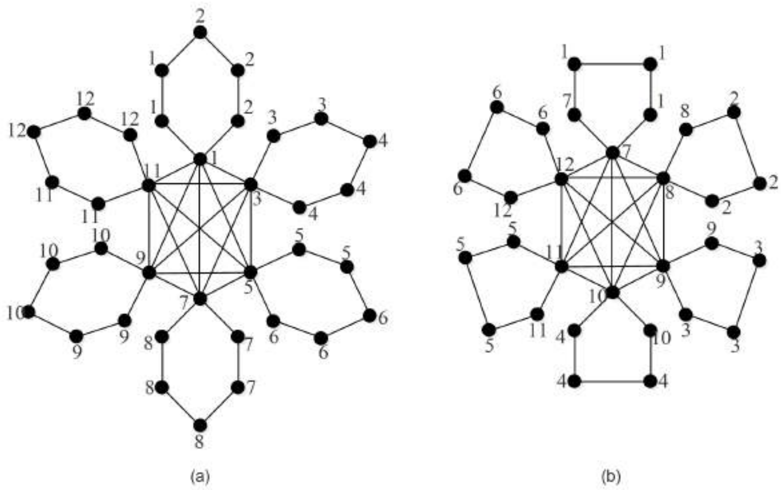
$$spd(K_n \triangleright C_m) \geq \underbrace{(\frac{m}{3}+1)+(\frac{m}{3}+1)+...+(\frac{m}{3}+1)}_{nbuah} = n(\frac{m}{3}+1)$$

Jadi, batas bawah dimensi partisi bintang adalah $spd(K_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m}{3}+1)$. Untuk menentukan batas atas, dapat dikonstruksi partisi pembeda bintang misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3}+1)}\}$ dengan $S_i = \{y_{i,1}, y_{i,2} | 1 \leq i \leq n\}$ dan $S_{n+i} = \{y_{i,3} | 1 \leq i \leq n\}$ Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada S_i menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$ dan simpul-simpul pada S_{n+i} merupakan kelas partisi singleton yang memuat simpul trivial yang juga graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_n \triangleright C_m)$ untuk $m = 3$ berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3}+1)}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m}{3}+1)$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3}+1)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright C_m)$ yaitu $spd(K_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3}+1)$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m}{3}+1) \leq spd(K_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3}+1)$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_n \triangleright C_m) = n(\frac{m}{3}+1)$ untuk $m = 3$.

Untuk $m = 4$, andaikan batas bawah dimensi partisi bintang yaitu $spd(K_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + 1$. Berdasarkan Lemma 2.2, terdapat representasi simpul-simpul di $V(K_n \triangleright C_m)$ yakni $r(y_{i,2}|\Pi_S) = r(y_{i,4})$ untuk $1 \leq i \leq n$ berakibat simpul $y_{i,2}$ dan $y_{i,4}$ harus berada pada kelas partisi yang berbeda sehingga batas bawah dimensi partisi bintang:

$$spd(K_n \triangleright C_m) \geq \underbrace{(\frac{m-1}{3}+1)+(\frac{m-1}{3}+1)+...+(\frac{m-1}{3}+1)}_{n\ buah} = n(\frac{m-1}{3}+1)$$

Jadi, batas bawah dimensi partisi bintang adalah $spd(K_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}+1)$. Untuk menentukan batas atas, dapat dikonstruksi partisi pembeda bintang misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3}+1)}\}$ dengan $S_i = \{y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3} | 1 \leq i \leq n\}$ dan $S_{n+i} = \{y_{i,4} | 1 \leq i \leq n\}$ Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada S_i menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan simpul-simpul pada S_{n+i} merupakan kelas



Gambar 4.28: (a) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $K_6 \triangleright C_6$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $K_6 \triangleright C_5$

partisi singleton yang memuat simpul trivial yang juga graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_n \triangleright C_m$ untuk $m = 4$ berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3}+1)}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3} + 1)$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}+)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(K_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3} + 1)$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3} + 1) \leq spd(K_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3} + 1)$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3} + 1)$ untuk $m = 4$.

Teorema 4.23. *Diberikan dua graf terhubung K_n dan C_m dengan masing-masing ordernya n dan m dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 3$, maka dimensi partisi bintang graf hasil operasi comb $K_n \triangleright C_m$ adalah*

$$spd(K_n \triangleright C_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil, & \textit{jika } m \equiv 0 (mod\ 3),\ m \equiv 2 (mod\ 3) \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 1, & \textit{jika } m \equiv 1 (mod\ 3) \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $K_n \triangleright C_m$ memiliki himpunan simpul $V(K_n \triangleright C_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(K_n \triangleright C_m) = \{y_{i,1}y_{i+k,1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n - i\} \cup \{y_{i,1}y_{i,m} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m - 1\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $K_n \triangleright C_m$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai m dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, kasus kedua untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan kasus ketiga untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Kasus 1: Untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $K_n \triangleright C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.28 (a). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3})}\}$ dengan:

$$S_{\frac{m}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k, 1 \leq i \leq n\}$$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m}{3}(i-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_n \triangleright C_m$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^1_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i})$; $t^1_l = (1 + 3(k-1) - j) + 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^2_l = (j - 3(k-1) - 1) + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; m gasal.
$c = (z^1_j, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_j, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_j = j$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$; $z^1_j = m - j + 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t^3_s = z^1_j + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^4_s = z^1_l + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.
$a = (z^2_j, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_j, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^2_j = j$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$; $z^2_j = m - j + 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t^3_s = z^2_j + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^4_s = z^2_l + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.

Reprentasi simpul di graf $K_n \triangleright C_m$ untuk m genap sebagai berikut: $r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, ..., t^1_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i})$; $t^1_l = (1 + 3(k-1) - j) + 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k, 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^2_l = (j - 3(k-1) - 1) + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1$ dengan $j = 3(k-1)+1$ dan $j = 3k$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 2$ dengan $j = 3(k-1)+2$; m genap.
$c = (z^1_j, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_j, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ...,$

$t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_j = j$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$; $z^1_j = m-j+2$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$; $t^3_s = z^1_j + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^4_s = z^1_j + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = z^1_j + 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 2$.
$a = (z^2_j, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_j, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ...,$ $t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^2_j = j$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$; $z^2_j = m-j+2$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2 \leq j \leq m$; $t^3_s = z^2_j + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^4_s = z^2_j + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3s - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq s \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = z^2_j + 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 2$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3})}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m}{3})$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(K_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(K_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{n}{m})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m}{3})-1} = \{y_{n,j} | \frac{m}{3} - 1 \leq k \leq \frac{m}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3})-1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(K_n \triangleright C_m)) \geq n(\frac{m}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m}{3}) \leq spd(K_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_n \triangleright C_m) = n(\frac{m}{3})$ untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$.

Kasus 2: Untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+1}\}$ dengan:

$S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1, 1 \leq i \leq n\}$

$S_{n(\frac{m-1}{3})+1} = \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+1}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,n-1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S.

Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_n \triangleright C_m$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, c_{n-i}, x_j)$; $t^1_l = (2+3(k-1)-j)+3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_l = (j-3(k-1)-2)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3l-1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; $t^3_l = (j-3(k-1)-2)+3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_l = (2+3(k-1)-j)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3l+1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; $x_j = j-1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; $x_j = m-j+1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; m genap.
$c = (z^1_j, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_j, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^1_j = j+1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; $z^1_j = m-j+3$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$; $t^5_s = z^1_j + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^6_s = z^1_j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$.
$a = (z^2_j, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_j, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^2_j = j+1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor +1$; $z^2_j = m-j+3$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor +2 \leq j \leq m$; $t^5_s = z^2_j + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^6_s = z^2_j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3s-3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$.

Representasi simpul graf $K_n \triangleright C_m$ untuk m genap dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, c_{n-i}, 0)$; $t^3_l = 1+3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_l = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3l-2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; m genap.
$c = (2, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., 2, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $t^1_l = 2+3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_l = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3l-1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$.
$a = (2, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., 2, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $t^1_l = 2+3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_l = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3l-1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$.

Representasi simpul graf $K_n \triangleright C_m$ untuk m gasal sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t'_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, c_{n-i}, x_j)$; $t^1_l = (2+3(k-1)-j)+3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_l = (j-3(k-1)-2)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3l-1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; $t^3_l = (j-3(k-1)-2)+3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1$; $t^4_l = (2+3(k-1)-j)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -3l+1$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1$

dengan $j = 3(k-1)+2$ dan $j = 3(k-1)+3$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 2$ dengan $j = 3k+1$;$t'_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$ dengan $j = 3(k-1)+2$; $t'_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 2$ dengan $j = 3(k-1)+3$ dan $j = 3k+1$; $x_j = j-1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $x_j = m-j+1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; m gasal.

$c = (z_j^1, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z_j^1, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_j^1 = j+1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z_j^1 = m-j+3$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t_s^5 = z_j^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_s^6 = z_j^1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$a = (z_j^2, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z_j^2, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_j^2 = j+1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z_j^2 = m-j+3$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t_s^5 = z_j^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_s^6 = z_j^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

Representasi simpul graf $K_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, 0)$; $t_l^3 = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m gasal.

$c = (2, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., 2, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_l^1 = 2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$a = (2, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., 2, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_l^1 = 2+3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}) + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(K_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang $K_{1,n}$; $1 \leq n \leq 2$ sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3})$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang $K_{1,n}$; $1 \leq n \leq 2$. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(K_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m-1}{3})} = \{y_{n,j} | m-1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3})$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(K_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3}) + 1 \leq spd(K_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + 1$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + 1$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$.

Kasus 3: Untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $K_n \triangleright C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.28 (b). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-2}{3})+n}\}$ dengan:

$S_{\frac{m-2}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-2}{3}, 3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2, 1 \leq i \leq n\}$

$S_{n(\frac{m-2}{3})+i} = \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2\}$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-2}{3}(j-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n(\frac{m-2}{3})+i}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(K_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $K_n \triangleright C_m$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:

$r(y_{i,j} | \Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +2}, t'_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +2}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, c_{n-i}, d)$; $t^1_l = (3+3(k-1)-j)+3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_l = (j-3(k-1)-3)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t^3_l = (j-3(k-1)-3)+3l-2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_l = (3+3(k-1)-j)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + 2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 2 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ dengan $j = 3(k-1)+3$ dan $j = 3(k-1)+4$; $t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1$ dengan $j = 3k+2$;$t'_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ dengan $j = 3(k-1)+3$; $t'_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1} = 3\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1$ dengan $j = 3(k-1)+4$ dan $j = 3k+2$; m gasal.

$c = (z^1_j, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_j, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^1_j = j+2$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z^1_j = m-j+4$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t^5_s = z^1_j + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^6_s = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

$a = (z^2_j, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_j, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^2_j = j+2$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z^2_j = m-j+4$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$;

$t_s^5 = z_j^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_s^6 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (\underbrace{z_j^1, ..., z_j^1}_{i-1}, z_j, \underbrace{z_j^1, ..., z_j^1}_{n-i})$; $z_j^1 = j$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z_j^1 = m - j + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $z_j = j - 2$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z_j^1 = m - j + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $1 \leq i \leq n$.

Representasi simpul graf $K_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 2, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, d)$; $t_l = 2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m gasal.
$c = (3, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., 3, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_l^1 = 3 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (3, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., 3, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_l^1 = 3 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i})$; $1 \leq i \leq n$.

Representasi simpul graf $K_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dengan $j = 2$ sebagai berikut:
$r(y_{i,2}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, d)$; $t_l = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m gasal.
$c = (4, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., 4, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_l^1 = 4 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (4, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., 4, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_l^1 = 4 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (\underbrace{2, ..., 2}_{i-1}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{n-i})$; $1 \leq i \leq n$.

Representasi simpul graf $K_n \triangleright C_m$ untuk m genap sebagai berikut: $r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t_1^3, 0, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = (3 + 3(k-1) - j) + 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1) + 3 \leq j \leq 3k + 2$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_l^2 = (j - 3(k-1) - 3) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1) + 3 \leq j \leq 3k + 2$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t_l^3 = (j - 3(k-1) - 3) + 3l - 2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1) + 3 \leq j \leq 3k + 2$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_l^4 = (3 + 3(k-1) - j) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + 2$ dengan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1) + 3 \leq j \leq 3k + 2$, $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m genap.

$c = (z_j^1, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z_j^1, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_j^1 = j + 2$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z_j^1 = m - j + 4$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t_s^5 = z_j^1 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_s^6 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (z_j^2, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z_j^2, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_j^2 = j + 2$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z_j^2 = m - j + 4$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t_s^5 = z_j^2 + 3s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_s^6 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3s + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq s \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (\underbrace{z_j^1, ..., z_j^1}_{i-1}, z_j, \underbrace{z_j^1, ..., z_j^1}_{n-i})$; $z_j^1 = j$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z_j^1 = m - j + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $z_j = j - 2$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z_j^1 = m - j + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $1 \leq i \leq n$.

Representasi simpul graf $K_n \triangleright C_m$ untuk m genap dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 2, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, d)$; $t_l = 2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m genap.
$c = (3, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., 3, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_l^1 = 3 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (3, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., 3, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_l^1 = 3 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (\underbrace{1, ..., 1}_{i-1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{n-i})$; $1 \leq i \leq n$.

Representasi simpul graf $K_n \triangleright C_m$ untuk m genap dengan $j = 2$ sebagai berikut:
$r(y_{i,2}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 1, t_1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, d)$; $t_l = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; m gasal.
$c = (4, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., 4, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_l^1 = 4 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$a = (4, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., 4, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_l^1 = 4 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
$d = (\underbrace{2, ..., 2}_{i-1}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{n-i})$; $1 \leq i \leq n$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-2}{3})+n}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-2}{3}) + n$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| =$

$n(\frac{m-2}{3}+1) = n(\frac{m+1}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(K_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m+1}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam satu kelas partisi harus sebuah graf bintang $K_{1,n};\ 1 \leq n \leq 2$ sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m+1}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang $K_{1,n};\ 1 \leq n \leq 2$. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(K_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m+1}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m+1}{3})-1} = \{y_{i,1}, y_{i,m}|n - 1 \leq i \leq n\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m+1}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $K_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(K_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m+1}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m+1}{3}) \leq spd(K_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m+1}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(K_n \triangleright C_m) = n(\frac{m+1}{3})$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Berdasarkan ketiga kasus pembuktian di atas diketahui bahwa untuk $spd(K_n \triangleright C_m) = n(\frac{m}{3})$ untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$ dan $spd(K_n \triangleright C_m) = n(\frac{m+1}{3})$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$ sehingga pada kedua nilai m tersebut dapat digabungkan sedemikian $spd(K_n \triangleright C_m) = n\lceil\frac{m}{3}\rceil$. Sedangkan $spd(K_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + 1$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dapat ditulis $spd(P_n \triangleright C_m) = n\lfloor\frac{m}{3}\rfloor + 1$. □

4.2.9 Dimensi Partisi Bintang Graf Lingkaran Comb Graf Lingkaran

Graf hasil operasi *comb* antara graf lingkaran C_n dengan graf lingkaran C_m dihasilkan dari menduplikat graf lingkaran C_m sebanyak n simpul di graf lingkaran C_n dengan meletakkan salah satu simpul ujung graf C_m pada setiap simpul graf C_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $C_n \triangleright C_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali Lingkaran C_m. Sehingga graf $C_n \triangleright C_m$ memiliki himpunan simpul $V(C_n \triangleright C_m) = \{y_{i,j}|1 \leq j \leq m\, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_n \triangleright C_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1}|1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{n,1}y_{1,1}\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}|1 \leq j \leq m-1, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,m}y_{i,1}|1 \leq i \leq n\}$. Graf $C_n \triangleright C_m$ memiliki nm buah simpul dan $n(m+1)$ buah sisi. Graf $P_n \triangleright C_m$ ditunjukkan pada Gambar 4.16.

Pada subbab ini, dibahas dimensi partisi bintang graf $C_n \triangleright C_m$ dengan $m, n \in$

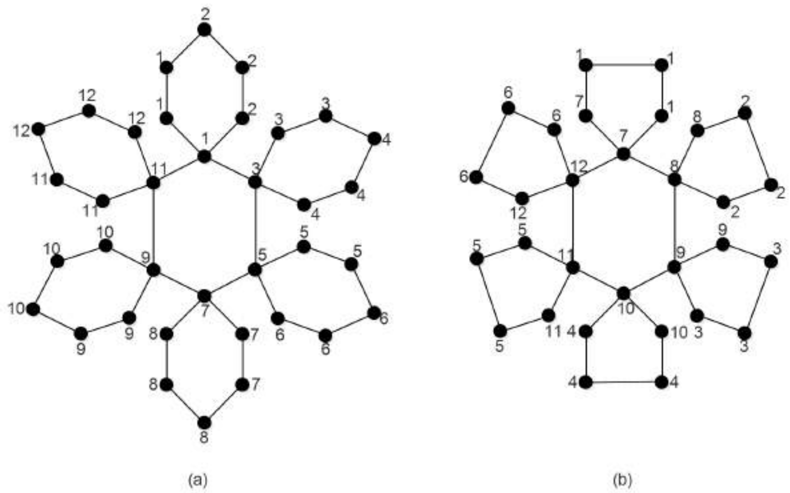
Z^+. Untuk $n = 2$, graf C_2 adalah graf yang mempunyai sisi ganda sehingga C_2 bukan graf sederhana dan untuk $m \in \{3, 4\}$,partisi pembeda bintang membentuk pola khusus sedemikian sehingga order lingkaran C_n dan lingkaran C_m masing-masing adalah $n \geq 3$ dan $m \geq 5$. Dalam menentukan dimensi partisi bintang graf $C_n \triangleright C_m$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright C_m$. Dimensi partisi bintang mensyaratkan Π_S harus mempunyai kardinalitas yang minimum.

Untuk $m = 3$, andaikan batas bawah dimensi partisi bintang yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m}{3})$. Berdasarkan Lemma 2.2, terdapat representasi simpul-simpul di $V(C_n \triangleright C_m)$ yakni $r(y_{i,2}|\Pi_S) = r(y_{i,3})$ untuk $1 \leq i \leq n$ berakibat simpul $y_{i,2}$ dan $y_{i,3}$ harus berada pada kelas partisi yang berbeda sehingga batas bawah dimensi partisi bintang:

$$spd(C_n \triangleright C_m) \geq \underbrace{(\frac{m}{3} + 1) + (\frac{m}{3} + 1) + ... + (\frac{m}{3} + 1)}_{nbuah} = n(\frac{m}{3} + 1)$$

Jadi, batas bawah dimensi partisi bintang adalah $spd(C_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m}{3} + 1)$. Untuk menentukan batas atas, dapat dikonstruksi partisi pembeda bintang misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3}+1)}\}$ dengan $S_i = \{y_{i,1}, y_{i,2}|1 \leq i \leq n\}$ dan $S_{n+i} = \{y_{i,3}|1 \leq i \leq n\}$ Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada S_i menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$ dan S_{n+i} merupakan kelas partisi yang memuat simpul trivial dapat juga disebut graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi koordinat setiap simpul $v \in V(C_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_n \triangleright C_m$ untuk $m = 3$ berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3}+1)}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m}{3} + 1)$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3} + 1)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3} + 1)$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m}{3} + 1) \leq spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3} + 1)$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_n \triangleright C_m) = n(\frac{m}{3} + 1)$ untuk $m = 3$.

Untuk $m = 4$, andaikan batas bawah dimensi partisi bintang yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Berdasarkan Lemma 2.2, terdapat representasi simpul-simpul di $V(C_n \triangleright C_m)$ yakni $r(y_{i,2}|\Pi_S) = r(y_{i,4})$ untuk $1 \leq i \leq n$ berakibat simpul



Gambar 4.29: (a) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $C_6 \triangleright C_6$, (b) Konstruksi Partisi Pembeda Graf $C_6 \triangleright C_5$

$y_{i,2}$ dan $y_{i,4}$ harus berada pada kelas partisi yang berbeda sehingga batas bawah dimensi partisi bintang:

$$spd(C_n \triangleright C_m) \geq \underbrace{(\frac{m-1}{3}+1)+(\frac{m-1}{3}+1)+...+(\frac{m-1}{3}+1)}_{n\ buah} = n(\frac{m-1}{3}+1)$$

Jadi, batas bawah dimensi partisi bintang adalah $spd(C_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}+1)$. Untuk menentukan batas atas, dapat dikonstruksi partisi pembeda bintang misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3}+1)}\}$ dengan $S_i = \{y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3} | 1 \leq i \leq n\}$ dan $S_{n+i} = \{y_{i,4} | 1 \leq i \leq n\}$. Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada kelas partisi S_i menginduksi graf bintang $K_{1,2}$ dan kelas partisi S_{n+i} memuat sebuah simpul trivial yang juga graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_n \triangleright C_m$ untuk $m = 4$ berbeda. Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3}+1)}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}+1)$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}+1)$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}+1)$. Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3}+1) \leq spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}+1)$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}+1)$ untuk $m = 4$.

Teorema 4.24. *Diberikan dua graf terhubung C_n dan C_m dengan masing-masing ordernya n dan m dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 3$, maka dimensi partisi bintang graf hasil operasi comb $C_n \rhd C_m$ adalah*

$$spd(C_n \rhd C_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil, & \textit{jika } m \equiv 0(mod\ 3),\ m \equiv 2(mod\ 3) \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \textit{jika } m \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf $C_n \rhd C_m$ memiliki himpunan simpul $V(C_n \rhd C_m) = \{y_{i,j} | 1 \leq j \leq m\, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_n \rhd C_m) = \{y_{i,1}y_{i+1,1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{n,1}y_{1,1}\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1} | 1 \leq j \leq m-1, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,m}y_{i,1} | 1 \leq i \leq n\}$. Untuk menunjukkan dimensi partisi bintang graf $C_n \rhd C_m$ dengan mn buah simpul, maka untuk masing-masing nilai m dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, kasus kedua untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan kasus ketiga untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Kasus 1: Untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $C_n \rhd C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.29 (a). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3})}\}$ dengan:

$$S_{\frac{m}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m}{3}, 3(k-1)+1 \leq j \leq 3k, 1 \leq i \leq n\}$$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m}{3}(i-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$. Maka dapat ditunjukkan representasi koordinat setiap simpul $v \in V(C_n \rhd C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_n \rhd C_m$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, c_{n-i})$; $t^1_l = (1 + 3(k-1) - j) + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_l = (j - 3(k-1) - 1) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t^3_l = (j-3(k-1)-1)+3l-2$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_l = (1+3(k-1)-j)+3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1)+1 \leq j \leq 3k$, $1 \leq i \leq n$, m gasal.

Representasi c_{n-i} untuk m gasal sebagai berikut:
$c = (z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, z^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor +1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^8_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^8_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{n-1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^8_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^8_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^1_s = (j-1) + s$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z^1_s = m - j + 1 + s$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t^5_l = z^1_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$;

$t^6_l = z^1_s + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $z^2_s = (j-1) + n - s$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $z^2_s = (m-j+1) + n + s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t^7_l = z^2_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^8_l = z^2_s + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $1 \leq i \leq n$.

Representasi a_{i-1} untuk m gasal sebagai berikut:

$a = (z^2_{n-1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, z^1_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$;
$z^1_s = (j-1) + s$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \leq s \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $z^1_s = m - j + 1 + s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $t^5_l = z^1_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^6_l = z^1_s + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $z^2_s = (j-1) + n - s$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $z^2_s = (m-j+1) + n + s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t^7_l = z^2_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^8_l = z^2_s + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $1 \leq i \leq n$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i})$; $t^1_l = (1 + 3(k-1) - j) + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^2_l = (j - 3(k-1) - 1) + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $t^3_l = (j - 3(k-1) - 1) + 3l - 2$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^4_l = (1 + 3(k-1) - j) + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 2$ dengan $j = 3(k-1) + 1$ dan $j = 3k$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$ dengan $j = 3(k-1) + 2$; $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1) + 1 \leq j \leq 3k$, $1 \leq i \leq n$, m genap.

Representasi c_{n-i} untuk m gasal sebagai berikut:

$c = (z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, z^2_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{n-1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_s = (j-1) + s$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \leq s \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $z^1_s = m - j + 1 + s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $t^5_l = z^1_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^6_l = z^1_s + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $z^2_s = (j-1) + n - s$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $z^2_s = (m-j+1) + n + s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t^7_l = z^2_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^8_l = z^2_s + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $1 \leq i \leq n$.

Representasi a_{i-1} untuk m gasal sebagai berikut:

$a = (z^2_{n-1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, z^1_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$;
$z^1_s = (j-1) + s$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \leq s \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $z^1_s = m - j + 1 + s$

dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^5 = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^6 = z_s^1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $z_s^2 = (j-1) + n - s$ dengan $1 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $z_s^2 = (m-j+1) + n + s$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t_l^7 = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^8 = z_s^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $1 \leq i \leq n$.

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m}{3})}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m}{3})$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{n}{m})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m}{3})-1} = \{y_{n,j} | \frac{m}{3} - 1 \leq k \leq \frac{m}{3}, 3(k-1) + 1 \leq j \leq 3\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m(\frac{n}{3} - 1)$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m)) \geq n(\frac{m}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m}{3}) \leq spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_n \triangleright C_m) = n(\frac{m}{3})$ untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$.

Kasus 2: Untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$

Simpul-simpul di graf $C_n \triangleright C_m$ dibedakan menjadi simpul daun (*pendant*) merupakan simpul-simpul subgraf C_m dan simpul dalam merupakan simpul-simpul di subgraf lingkaran C_n. Untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, kelas partisi di simpul daun (*pendant*) terpisah dengan kelas partisi di simpul dalam sehingga terdapat tiga kasus untuk nilai m yaitu pertama untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, kedua untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, sedangkan untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$.

1. Untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan

$\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n}{3}}\}$ dengan:
$S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq i \leq 3k+1, 1 \leq i \leq n\}$
$S_{n(\frac{m-1}{3})+l} = \{y_{i,1} | 1 \leq l \leq \frac{n}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+l}$ menginduksi sebuah graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_n \triangleright C_m$ untuk $n \equiv 0(mod\ 3)$, $m \equiv 1$(mod 3) dan $m \geq 5$, sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m gasal dan n gasal.
Representasi b untuk m gasal dan n gasal sebagai berikut:
$b = (t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}", t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},$
$t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $t^1_l = (2+3(k-1)-j)+3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^2_l = (j-3(k-1)-2)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 1$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$ dengan $j = 3(k-1)+2$ dan $j = 3(k-1)+3$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 2$ dengan $j = 3k+1$; $t^3_l = (j-3(k-1)-2)+3l-2$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^4_l = (2+3(k-1)-j)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l + 1$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}" = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$ dengan $j = 3(k-1)+3$ dan $j = 3k+1$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}" = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor + 1$ dengan $j = 3(k-1)+2$, $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$; $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1$.
Representasi c_{n-i} untuk m gasal dan n gasal sebagai berikut:
$c = (z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1},$
$z^2_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{n-1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$;
$z^1_s = j+s$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1 \leq s \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $z^1_s = (m-j+2)+s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $t^5_l = z^1_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^6_l = z^1_s + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $z^2_s = j+n-s$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $z^2_s = (m-j+2)+n-s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t^7_l = z^2_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^8_l = z^2_s + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$.
Representasi a_{i-1} untuk m gasal dan n gasal sebagai berikut:
$a = (z^2_{n-1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ...,$
$t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, z^1_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ...,$
$t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_s = j+s$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$, $1 \leq s \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $z^1_s = (m-j+2)+s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $t^5_l = z^1_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor - 1$; $t^6_l = z^1_s + 3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor - 1$; $z^2_s = j+n-s$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$,

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $z_s^2 = (m-j+2)+n-s$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t_l^7 = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^8 = z_s^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
Representasi d untuk m gasal dan n gasal sebagai berikut:
$d = (t^{12}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., t^{12}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1}, t^{11}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, ..., t^{11}_1, z^3, t^9_1, ..., t^9_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, t^{10}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1}, ..., t^{10}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $z^3 = j-1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z^3 = m-j+1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t_r^9 = z^3 + (1+3(p-1)-i) + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t_r^{10} = z^3 + (i-3(p-1)-1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r - 2$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_r^{11} = z^3 + (i-3(p-1)-1) + 3r - 2$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t_s^{12} = z^3 + (1+3(p-1)-i) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m gasal dan n gasal.
Representasi b untuk m gasal dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$b = (1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $t_l^1 = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^2 = j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.
Representasi c_{n-i} untuk m gasal dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$c = (z_1^1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, z^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{n-1}, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_s^1 = 1 + s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^3 = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = z_s^1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $z_s^2 = n - s + 1$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t_l^5 = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^6 = z_s^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$
Representasi a_{i-1} untuk m gasal dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$a = (z^2_{n-1}, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, z^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z_1^1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$; $z_s^1 = 1 + s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^3 = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = z_s^1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $z_s^2 = n - s + 1$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t_l^5 = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^6 = z_s^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$
Representasi d untuk m gasal dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$d = (t^{10}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., t^{10}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1}, t^9_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, ..., t^{11}_1, 0, t_1^7, ..., t^7_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, t^8_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1}, ..., t^8_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $t_r^7 = (1+3(p-1)-i) + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t_r^8 = (i-3(p-1)-1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r - 2$

dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor+1\le r\le\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1$; $t^9_r=(i-3(p-1)-1)+3r-2$ dengan $1\le r\le\lfloor\frac{n}{6}\rfloor$; $t^{10}_s=1+3(p-1)-i)+3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-3r$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor+1\le r\le\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1$, $1\le p\le\lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1)+1\le i\le 3p$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n gasal sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S)=(a_{i-1},b,c_{n-i},d)$; $1\le i\le n$, m genap dan n gasal.
Representasi b untuk m genap dan n gasal sebagai berikut:
$b=(t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1},...,t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1},t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},...,t^3_1,0,t^1_1,...,t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1},...,t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $t^1_l=(2+3(k-1)-j)+3l$ dengan $1\le l\le\lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^2_l=(j-3(k-1)-2)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l-1$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1\le l\le\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; $t^3_l=(j-3(k-1)-2)+3l-2$ dengan $1\le l\le\lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^4_l=(2+3(k-1)-j)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l+1$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1\le l\le\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$, $1\le k\le\lfloor\frac{m}{3}\rfloor$; $1\le k\le\lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+2\le j\le 3k+1$.
Representasi c_{n-i} untuk m genap dan n gasal sebagai berikut:
$c=(z^1_1,t^5_1,...,t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1},...,t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1},...,z^1_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor},t^5_1,...,t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1},...,t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1},$ $z^2_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1},t^7_1,...,t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1},...,t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1},...,z^2_{n-1},t^7_1,...,t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1},...,t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_s=j+s$ dengan $2\le j\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1\le s\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $z^1_s=(m-j+2)+s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2\le j\le m$, $1\le s\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $t^5_l=z^1_s+3l$ dengan $1\le l\le\lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^6_l=z^1_s+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l-3$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1\le l\le\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; $z^2_s=j+n-s$ dengan $2\le j\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1\le s\le n-1$; $z^2_s=(m-j+2)+n-s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2\le j\le m$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1\le s\le n-1$; $t^7_l=z^2_s+3l$ dengan $1\le l\le\lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^8_l=z^2_s+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l-3$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1\le l\le\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$.
Representasi a_{i-1} untuk m genap dan n gasal sebagai berikut:
$a=(z^2_{n-1},t^7_1,...,t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1},...,t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1},...,z^2_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1},t^7_1,...,t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1},...,$ $t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1},z^1_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor},t^5_1,...,t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1},...,t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1},...,z^1_1,t^5_1,...,t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor},t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1},...,$ $t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_s=j+s$ dengan $2\le j\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1\le s\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $z^1_s=(m-j+2)+s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2\le j\le m$, $1\le s\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $t^5_l=z^1_s+3l$ dengan $1\le l\le\lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^6_l=z^1_s+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l-3$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1\le l\le\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; $z^2_s=j+n-s$ dengan $2\le j\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1\le s\le n-1$; $z^2_s=(m-j+2)+n-s$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2\le j\le m$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1\le s\le n-1$; $t^7_l=z^2_s+3l$ dengan $1\le l\le\lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^8_l=z^2_s+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l-3$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1\le l\le\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$.
(Representasi d untuk m genap dan n gasal sama dengan representasi d untuk m gasal dan n gasal)

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m genap dan n gasal.

Representasi b untuk m genap dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:

$b = (1, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1})$; $t_l^1 = 1 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_l^2 = 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$.

Representasi c_{n-i} untuk m genap dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:

$c = (z_1^1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}, z^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}, ..., z^2_{n-1}, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1})$; $z_s^1 = 1 + s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^3 = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_l^4 = z_s^1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $z_s^2 = n - s + 1$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n - 1$; $t_l^5 = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_l^6 = z_s^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$

Representasi a_{i-1} untuk m genap dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:

$a = (z^2_{n-1}, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}, z^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1}, ..., z_1^1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor+1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor-1})$; $z_s^1 = 1 + s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^3 = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_l^4 = z_s^1 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $z_s^2 = n - s + 1$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n - 1$; $t_l^5 = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t_l^6 = z_s^2 + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$

(Representasi d untuk m genap dan n gasal sama dengan representasi d untuk m gasal dan n gasal dengan $j = 1$).

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan n genap sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m gasal dan n genap.

(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n gasal).

$d = (t^{12}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor-1}, ..., t^{12}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor+1}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, t^{11}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor-1}, ..., t_1^{11}, z^3, t_1^9, ..., t^9_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor-1}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, t^{10}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor+1}, ..., t^{10}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor-1})$; $z^3 = j - 1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z^3 = m - j + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t_r^9 = z^3 + (1 + 3(p-1) - i) + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1$; $t_r^{10} = z^3 + (i - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r - 2$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_r^{11} = z^3 + (i - 3(p-1) - 1) + 3r - 2$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1$; $t_s^{12} = z^3 + (1 + 3(p-1) - i) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} = z^3 + 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1$ dengan $i = 3(p-1) + 2$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} = z^3 + 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 2$ dengan $i = 3(p-1) + 1$ dan $j = 3p$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1) + 1 \leq i \leq 3p$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan n genap dengan $j = 1$ sebagai berikut:

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m gasal dan n genap.

(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n gasal dengan $j = 1$).

$d = (t^{10}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}, ..., t^{10}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, t^{9}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1}, ..., t^{9}_{1}, z^3, t^{7}_{1}, ..., t^{7}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, t^{8}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1}, ..., t^{8}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1})$; $t^7_r = (1 + 3(p-1) - i) + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1$; $t^8_r = (i - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r - 2$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t^9_r = (i - 3(p-1) - 1) + 3r - 2$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1$; $t^{10}_s = (1 + 3(p-1) - i) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1$ dengan $i = 3(p-1) + 2$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 2$ dengan $i = 3(p-1) + 1$ dan $j = 3p$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1) + 1 \leq i \leq 3p$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n genap sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m genap dan n genap.

(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n gasal).

(Representasi d untuk m genap dan n genap sama dengan representasi d untuk m gasal dan n genap).

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n genap dengan $j = 1$ sebagai berikut:

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m genap dan n genap.

(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n gasal dengan $j = 1$).

(Representasi d untuk m genap dan n genap sama dengan representasi d untuk m gasal dan n genap dengan $j = 1$).

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf

$C_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam satu kelas partisi harus sebuah graf bintang $K_{1,n};\ 1 \leq n \leq 2$ sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3} - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang $K_{1,n};\ 1 \leq n \leq 2$. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n}{3}-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n}{3}-1} = \{y_{i,1} | \frac{n}{3} - 1 \leq l \leq \frac{n}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = m\lfloor\frac{n}{3}\rfloor + \frac{m}{3} - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3} \leq spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$ untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$, $m \equiv 0(\text{mod } 3)$.

2. Untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$

   Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1}\}$ dengan:

   $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1, 1 \leq i \leq n\}$
   $S_{n(\frac{m-1}{3})+l} = \{y_{i,1} | 1 \leq l \leq \frac{n-1}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$
   $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1} = \{y_{n,1}\}$

   Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k}$, $S_{n(\frac{m-1}{3})+l}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1}$ merupakan kelas partisi singleton yang berisi sebuah simpul trivial yang juga merupakan graf bintang. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_n \triangleright C_m$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$, sebagai berikut:

   $r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m gasal dan n gasal.

   (Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n gasal sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan n gasal).

$d = (t^{12}_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., t^{12}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor+1}, t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}, t^{11}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor-1}, ..., t^{11}_1, z^3, t^9_1, ..., t^9_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}, t^{10}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor+1}, ..., t^{10}_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor})$; $z^3 = j - 1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$; $z^3 = m - j + 1$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t^9_r = z^3 + (1 + 3(p-1) - i) + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$; $t^{10}_r = z^3 + (i - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 3r - 1$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor} = z^3 + 3\lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$ dengan $i = 3(p-1) + 1$ dan $i = 3(p-1) + 2$; $t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor} = z^3 + 3\lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 2$ dengan $i = 3p$; $t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} = z^3 + i$ dengan $1 \leq i \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} = z^3 + n - i$ dengan $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 \leq i \leq n-1$; $t^{11}_r = z^3 + (i - 3(p-1) - 1) + 3r - 2$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$; $t^{12}_s = z^3 + (1 + 3(p-1) - i) + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 3r + 1$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}" = z^3 + 3\lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$ dengan $i = 3(p-1) + 2$ dan $i = 3p$; $t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}" = z^3 + 3\lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 2$ dengan $i = 3(p-1) + 1$; $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1) + 1 \leq i \leq 3p$.

$d = (z^3_1, t^{13}_1, ..., t^{13}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor-1}, t^{14}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}, ..., t^{14}_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^3_2)$; $z^3_1 = j$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$; $z^3_1 = m - j + 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t^{13}_r = z^3_1 + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$; $z^3_2 = j - 1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$; $z^3_2 = m - j + 1$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t^{14}_r = z^3_2 + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 3r - 2$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$, untuk $i = n$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m gasal dan n gasal.

(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n gasal sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan n gasal dengan $j = 1$).

$d = (t^{10}_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., t^{10}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor+1}, t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}, t^9_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor-1}, ..., t^9_1, 0, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}, t^8_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor+1}, ..., t^8_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor})$; $t^7_r = (1 + 3(p-1) - i) + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$; $t^8_r = (i - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 3r - 1$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$ dengan $i = 3(p-1) + 1$ dan $i = 3(p-1) + 2$; $t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor} = 3\lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 2$ dengan $i = 3p$; $t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} = i$ dengan $1 \leq i \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} = n - i$ dengan $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1 \leq i \leq n-1$; $t^9_r = (i - 3(p-1) - 1) + 3r - 2$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$; $t^{10}_s = (1 + 3(p-1) - i) + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 3r + 1$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}" = 3\lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$ dengan $i = 3(p-1) + 2$ dan $i = 3p$; $t_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}" = 3\lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 2$ dengan $i = 3(p-1) + 1$; $1 \leq p \leq \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$,

$3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$.
$d = (1, t_1^{13}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor -1}^{13}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}^{14}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}^{14}, 0)$; $t_r^{13} = 1 + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1$; $t_r^{14} = 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r - 2$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, untuk $i = n$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n gasal sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m genap dan n gasal.
(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n gasal sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan m genap dan $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ dan n gasal).
(Representasi d untuk m genap dan $n$gasal sama dengan representasi d untuk $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan n gasal).

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m genap dan n gasal.
(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n gasal sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan m genap dan $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ dan n gasal dengan $j = 1$).
(Representasi d untuk m genap dan n gasal sama dengan representasi d untuk $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan n gasal dengan $j = 1$).

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan n genap sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m gasal dan n genap.
(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ dan n gasal).
$d = (t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}^{12}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}^{12}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}^{11}, ..., t_1^{11}, z^3, t_1^9, ..., t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}^{9}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}^{10}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}^{10}, t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor})$; $z^3 = j - 1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z^3 = m - j + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t_r^9 = z^3 + (1 + 3(p-1) - i) + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t_r^{10} = z^3 + (i - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r - 1$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} = z^3 + i$ dengan $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} = z^3 + n - i - 1$ dengan $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} = z^3 + n - i$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \leq i \leq n - 1$; $t_r^{11} = z^3 + (i - 3(p-1) - 1) + 3r - 2$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t_s^{12} = z^3 + (1 + 3(p-1) - i) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r + 1$ dengan

$\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1; 1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor, 3(p-1)+1 \leq i \leq 3p.$
$d = (z_1^3, t_1^{13}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}^{13}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor+1}^{14}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor-1}^{14}, z_2^3)$; $z_1^3 = j$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z_1^3 = m - j + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t_r^{13} = z_1^3 + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $z_2^3 = j - 1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z_2^3 = m - j + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t_r^{14} = z_2^3 + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r - 2$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, untuk $i = n$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan n genap dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m gasal dan n genap.
(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan n gasal dengan $j = 1$).
$d = (t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor-1}^{10}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor+1}^{10}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}^{9}, ..., t_1^9, 0, t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}^{7}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor+1}^{8}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor-1}^{8}, t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor})$; $t_r^7 = (1+3(p-1)-i)+3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t_r^8 = (i-3(p-1)-1)+3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor-3r-1$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} = i$ dengan $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} = n - i - 1$ dengan $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} = n - i$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \leq i \leq n - 1$; $t_r^9 = (i - 3(p-1) - 1) + 3r - 2$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t_s^{10} = (1 + 3(p-1) - i) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r + 1$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1; 1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor, 3(p-1)+1 \leq i \leq 3p.$
$d = (1, t_1^{13}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}^{13}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor+1}^{14}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor-1}^{14}, 0)$; $t_r^{13} = 1 + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t_r^{14} = 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r - 2$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, untuk $i = n$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n genap sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m genap dan n genap.
(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m genap dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan n gasal).
(Representasi d untuk m genap dan n genap sama dengan representasi d untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan n genap).

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n genap dengan $j = 1$ sebagai berikut:

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m genap dan n genap.

(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m genap dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan n gasal dengan $j = 1$).

(Representasi d untuk m genap dan n genap sama dengan representasi d untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan n genap dengan $j = 1$).

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}+1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang $K_{1,n}$; $1 \leq n \leq 2$ sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang $K_{1,n}$; $1 \leq n \leq 2$. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-1}{3}} = \{y_{i,1}|l = \frac{n-1}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\} \cup \{y_{n,1}\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1 \leq spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-1}{3} + 1$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$.

3. Untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang. Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1}\}$ dengan:

$S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-1}{3}, 3(k-1)+2 \leq j \leq 3k+1, 1 \leq i \leq n\}$
$S_{n(\frac{m-1}{3})+l} = \{y_{i,1} | 1 \leq l \leq \frac{n-2}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\}$
$S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1} = \{y_{n-1,1} y_{n,1}\}$
Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-1}{3}(i-1)+k}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+l}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_n \triangleright C_m$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$, $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$, sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m gasal dan n gasal.
(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n gasal sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan n gasal).
$d = (t^{12}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., t^{12}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +2}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}, t^{11}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, ..., t^{11}_{1}, z^3, t^9_1, ..., t^9_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}, t^{10}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +2}, ..., t^{10}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor})$; $z^3 = j-1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z^3 = m-j+1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t^9_r = z^3 + (1 + 3(p-1) - i) + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t^{10}_r = z^3 + (i - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} = z^3 + 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ dengan $i = 3(p-1)+1$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1} = z^3 + 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1$ dengan $i = 3(p-1)+2$ dan $i = 3p$; $t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor +1} = z^3 + i$ dengan $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor +1} = z^3 + n - i - 1$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq n-2$; $t^{11}_r = z^3 + (i - 3(p-1) - 1) + 3r - 2$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t^{12}_s = z^3 + (1 + 3(p-1) - i) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r + 2$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}" = z^3 + 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ dengan $i = 3p$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}" = z^3 + 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1$ dengan $i = 3(p-1)+1$ dan $i = 3(p-1)+2$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor, 3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$.
$d = (z^3_1, t^{13}_1, ..., t^{13}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor -1}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, t^{14}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}, ..., t^{14}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, z^3_2)$; $z^3_1 = (j-1) + (1 + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - i) + 2$ dengan $n-1 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z^3_1 = m - j + 2 + (1 + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - i) + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t^{13}_r = z^3_1 + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1$; $z^3_2 = j-1$ dengan $2 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z^3_2 = m-j+1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t^{14}_r = z^3_2 + +(i - 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r - 2$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 + z^3_2$, untuk $n-1 \leq i \leq n$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m gasal dan n gasal.
(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n gasal sama dengan repre-

sentasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan n gasal dengan $j = 1$).

$d = (t^{10}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, ..., t^{10}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +2}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}, t^{9}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, ..., t^{9}_{1}, z^{3}, t^{7}_{1}, ..., t^{7}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}, t^{9}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +2}, ..., t^{9}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor})$; $t^{7}_{r} = (1 + 3(p-1) - i) + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t^{8}_{r} = (i - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ dengan $i = 3(p-1)+1$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1} = 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1$ dengan $i = 3(p-1)+2$ dan $i = 3p$; $t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor +1} = i$ dengan $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor +1} = n - i - 1$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq n-2$; $t^{9}_{r} = (i - 3(p-1) - 1) + 3r - 2$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$; $t^{10}_{s} = (1 + 3(p-1) - i) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r + 2$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}" = 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ dengan $i = 3p$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}" = 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1$ dengan $i = 3(p-1)+1$ dan $i = 3(p-1)+2$; $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $3(p-1)+1 \leq i \leq 3p$.

$d = (z^{3}_{1}, t^{11}_{1}, ..., t^{11}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor -1}, t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}, t^{12}_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor +1}, ..., t^{12}_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor -1}, 0)$; $z^{3}_{1} = (1 + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - i) + 2$ dengan $n - 1 \leq i \leq n$; $t^{11}_{r} = z^{3}_{1} + 3r$ dengan $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1$; $t^{12}_{r} = (i - 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1) + 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3r - 2$ dengan $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$; $t_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} = 3\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1$, untuk $n - 1 \leq i \leq n$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n gasal sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m genap dan n gasal.
(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n gasal sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m genap dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan n gasal).
(Representasi d untuk m genap dan n gasal sama dengan representasi d untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan n gasal).

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n gasal dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m genap dan n gasal.
(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n gasal sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m genap dan $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan n gasal dengan $j = 1$).
(Representasi d untuk m genap dan n gasal sama dengan representasi d untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan n gasal dengan $j = 1$).

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan n genap sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \le i \le n$, m gasal dan n genap.

(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ dan n gasal).

$d = (t^{12}_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., t^{12}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor+1}, t^{11}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}, ..., t^{11}_{1}, z^3, t^9_1, ..., t^9_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}, t^{10}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor+1}, ..., t^{10}_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor})$; $z^3 = j - 1$ dengan $2 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$; $z^3 = m - j + 1$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \le j \le m$; $t^9_r = z^3 + (1 + 3(p-1) - i) + 3r$ dengan $1 \le r \le \lfloor\frac{n}{6}\rfloor$; $t^{10}_r = z^3 + (i - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 3r$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor + 1 \le r \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} = z^3 + i$ dengan $1 \le i \le \lfloor\frac{n}{2}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} = z^3 + n - i$ dengan $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor \le i \le n-2$; $t^{11}_r = z^3 + (i - 3(p-1) - 1) + 3r - 2$ dengan $1 \le r \le \lfloor\frac{n}{6}\rfloor$; $t^{12}_s = z^3 + (1 + 3(p-1) - i) + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 3r + 2$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor + 1 \le r \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $1 \le p \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1) + 1 \le i \le 3p$.

$d = (z^3_1, t^{13}_1, ..., t^{13}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor-1}, t^{14}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}, ..., t^{14}_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^3_2)$; $z^3_1 = (j-1) + (1 + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - i) + 2$ dengan $n - 1 \le i \le n$, $2 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$; $z^3_1 = m - j + 1 + (1 + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - i) + 2$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \le j \le m$; $t^{13}_r = z^3_1 + 3r$ dengan $1 \le r \le \lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$; $z^3_2 = j - 1$ dengan $2 \le j \le \lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 1$; $z^3_2 = m - j + 1$ dengan $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + 2 \le j \le m$; $t^{14}_r = z^3_2 + +(i - 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1) + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 3r - 2$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor \le r \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$, untuk $n - 1 \le i \le n$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dan n genap dengan $j = 1$ sebagai berikut:

$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \le i \le n$, m gasal dan n genap.

(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m gasal dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ dan n gasal dengan $j = 1$).

$d = (t^{10}_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, ..., t^{10}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor+1}, t^9_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}, ..., t^9_1, z^3, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}, t^8_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor+1}, ..., t^8_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor})$; $t^7_r = (1 + 3(p-1) - i) + 3r$ dengan $1 \le r \le \lfloor\frac{n}{6}\rfloor$; $t^8_r = (i - 3(p-1) - 1) + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 3r$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor + 1 \le r \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} = i$ dengan $1 \le i \le \lfloor\frac{n}{2}\rfloor - 1$; $t_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor} = n - i$ dengan $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor \le i \le n - 2$; $t^9_r = (i - 3(p-1) - 1) + 3r - 2$ dengan $1 \le r \le \lfloor\frac{n}{6}\rfloor$; $t^{10}_s = (1 + 3(p-1) - i) + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 3r + 2$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor + 1 \le r \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$; $1 \le p \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $3(p-1) + 1 \le i \le 3p$.

$d = (z^3_1, t^{13}_1, ..., t^{13}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor-1}, t^{14}_{\lfloor\frac{n}{6}\rfloor}, ..., t^{14}_{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor-1}, z^3_2)$; $z^3_1 = (1 + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - i) + 2$ dengan $n - 1 \le i \le n$; $t^{11}_r = z^3_1 + 3r$ dengan $1 \le r \le \lfloor\frac{n}{6}\rfloor - 1$; $t^{12}_r = (i - 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1) + 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 3r - 2$ dengan $\lfloor\frac{n}{6}\rfloor \le r \le \lfloor\frac{n}{3}\rfloor - 1$, untuk

$n-1 \leq i \leq n$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n genap sebagai berikut:
$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m genap dan n genap.
(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan m genap dan $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ dan n gasal).
(Representasi d untuk m genap dan n genap sama dengan representasi d untuk $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 2 (\text{mod } 3)$ dan n genap).

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dan n genap dengan $j = 1$ sebagai berikut:
$r(y_{i,1}|\Pi_S) = (a_{i-1}, b, c_{n-i}, d)$; $1 \leq i \leq n$, m genap dan n genap.
(Representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk m genap dan n genap sama dengan representasi a_{i-1}, b, c_{n-i} untuk $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan m genap dan $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ dan n gasal dengan $j = 1$).
(Representasi d untuk m genap dan n genap sama dengan representasi d untuk $m \equiv 1 (\text{mod } 3)$ dan m gasal dan $n \equiv 2 (\text{mod } 3)$ dan n genap dengan $j = 1$).

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3}$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam salah satu kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S =$

$\{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}} = \{y_{i,1} | l = \frac{n-2}{3}, 3(l-1)+1 \leq i \leq 3l\} \cup \{y_{n,1}\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3}$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1 \leq spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m-1}{3})+\frac{n-2}{3}+1$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_n \triangleright C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n-2}{3} + 1$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$, $m \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$.

Kasus 3: Untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$

Batas atas dimensi partisi bintang dapat diperoleh dengan mengkonstruksi partisi pembeda bintang graf $C_n \triangleright C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.29 (b). Misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-2}{3})+n}\}$ dengan:

$S_{\frac{m-2}{3}(i-1)+k} = \{y_{i,j} | 1 \leq k \leq \frac{m-2}{3}, 3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2, 1 \leq i \leq n\}$

$S_{n(\frac{m-2}{3})+i} = \{y_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2\}$

Dengan dilihat bahwa simpul-simpul pada $S_{\frac{m-2}{3}(i-1)+k}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,2}$ dan $S_{n(\frac{m-2}{3})+i}$ menginduksi sebuah graf bintang $K_{1,1}$. Maka dapat ditunjukkan representasi setiap simpul $v \in V(C_n \triangleright C_m)$ berbeda terhadap Π_S. Dari hasil observasi diperoleh representasi setiap simpul-simpul dari graf $C_n \triangleright C_m$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$, sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., t^4_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+2}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}", t^3_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}, t^2_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+2}, ..., t^2_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, c_{n-i}, d)$; $t^1_l = (3+3(k-1)-j)+3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^2_l = (j-3(k-1)-3)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+2 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor$ dengan $j = 3(k-1)+3$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1} = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1$ dengan $j = 3(k-1)+4$ dan $j = 3k+2$; $t^3_l = (j-3(k-1)-3)+3l-2$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{6}\rfloor$; $t^4_l = (3+3(k-1)-j)+3\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-3l+2$ dengan $\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+2 \leq l \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}" = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor$ dengan $j = 3k+2$; $t_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1}" = 3\lfloor\frac{m}{6}\rfloor+1$ dengan $j = 3(k-1)+3$ dan $j = 3(k-1)+4$, $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$; $1 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{3}\rfloor$, $3(k-1)+3 \leq j \leq 3k+2$, $1 \leq i \leq n$, m gasal.

Representasi c_{n-i} untuk m gasal sebagai berikut:

$c = (z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^1_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^6_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^6_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, z^2_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1}, ..., z^2_{n-1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor-1}, t^8_{\lfloor\frac{m}{6}\rfloor}, ..., t^8_{\lfloor\frac{m}{3}\rfloor-1})$; $z^1_s = (j+1)+s$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$, $1 \leq s \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $z^1_s = (m-j+3)+s$

dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $1 \le s \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^5 = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \le s \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^6 = (j+s) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le l \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $3 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \le s \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^6 = (m-j+s+2) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le l \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $1 \le s \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z_s^2 = (j+1) + n - s$ dengan $3 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \le s \le n-1$; $z_s^2 = (m-j+3) + n - s$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \le s \le n-1$; $t_l^7 = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \le l \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^8 = (j+n-s) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le l \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $3 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \le s \le n-1$; $t_l^8 = (m-j+n-s+2) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le l \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \le s \le n-1$.

Representasi a_{i-1} untuk m gasal sebagai berikut:

$a = (z_{n-1}^2, t_1^7, ..., t^7_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^8_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^8_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, t_1^7, ..., t^7_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^8_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^8_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, z^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z_1^1, t_1^5, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1})$;

$z_s^1 = (j+1) + s$ dengan $3 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \le s \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z_s^1 = (m-j+3) + s$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $1 \le s \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^5 = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \le s \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^6 = (j+s) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le l \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $3 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \le s \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^6 = (m-j+s+2) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le l \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $1 \le s \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z_s^2 = (j+1) + n - s$ dengan $3 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \le s \le n-1$; $z_s^2 = (m-j+3) + n - s$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \le s \le n-1$; $t_l^7 = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \le l \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^8 = (j+n-s) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le l \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $3 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \le s \le n-1$; $t_l^8 = (m-j+n-s+2) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le l \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \le s \le n-1$.

Representasi d untuk m gasal sebagai berikut:

$d = (t^{10}_{n-1}, ..., t^{10}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, t^9_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, ..., t_1^9, z^3, t_1^9, ..., t^9_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t^{10}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, ..., t^{10}_{n-1})$; $z^3 = j - 2$ dengan $3 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z^3 = m - j + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$; $t_s^9 = j + s - 1$ dengan $3 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \le s \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_s^9 = m - j + s + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $1 \le s \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_s^{10} = j + n - s - 1$ dengan $3 \le j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \le s \le n-1$; $t_s^{10} = m + n - j - s + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \le j \le m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \le s \le n-1$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m gasal dengan $j \in \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, 3-j, t_1^1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = (3-j) + 3l$ dengan $1 \le l \le \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^2 = j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \le l \le \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $1 \le i \le n$, $1 \le j \le 2$, m gasal.

Representasi c_{n-i} untuk m gasal dengan $j \in \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$c = (z_1^1, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t_1^3, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}, z^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1},$

$t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{n-1}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^1_s = (1+j)+s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t^3_l = z^1_s + 3l$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^4_l = j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z^2_s = n - s + (1+j)$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t^5_l = z^2_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^6_l = n - s + j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $1 \leq j \leq 2$.

Representasi a_{i-1} untuk m gasal dengan $j \in \{1,2\}$ sebagai berikut:

$a = (z^2_{n-1}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor +1}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, z^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_1, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$;

$z^1_s = (1+j)+s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t^3_l = z^1_s + 3l$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^4_l = j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z^2_s = n - s + (1+j)$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t^5_l = z^2_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^6_l = n - s + j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $1 \leq j \leq 2$.

Representasi d untuk m gasal dengan $j \in \{1,2\}$ sebagai berikut:

$d = (t^8_{n-1}, ..., t^8_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor +1}, t^7_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, ..., t^7_1, 0, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t^8_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor +1}, ..., t^8_{n-1})$; $t^7_s = s + (j-1)$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t^8_s = n - s + (j-1)$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $1 \leq j \leq 2$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^3_1, 0, t^1_1, ..., t^1_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, t^2_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor +1}, ..., t^2_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, c_{n-i}, d)$; $t^1_l = (3 + 3(k-1) - j) + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^2_l = (j - 3(k-1) - 3) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $t^3_l = (j - 3(k-1) - 3) + 3l - 2$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$; $t^4_l = (3 + 3(k-1) - j) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, $3(k-1) + 3 \leq j \leq 3k+2$, $1 \leq i \leq n$ dan m genap.

Representasi c_{n-i} untuk m genap sebagai berikut:

$c = (z^1_1, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, z^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor +1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^8_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^8_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{n-1}, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^8_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^8_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1})$; $z^1_s = (j+1)+s$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z^1_s = (m - j + 3) + s$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t^5_l = z^1_s + 3l$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^6_l = (j+s) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t^6_l = (m - j + s + 2) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z^2_s = (j+1) + n - s$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $z^2_s = (m - j + 3) + n - s$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t^7_l = z^2_s + 3l$ dengan

$1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^8 = (j+n-s) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t_l^8 = (m-j+n-s+2) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n - 1$.

Representasi a_{i-1} untuk m genap sebagai berikut:

$a = (z_{n-1}^2, t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^7, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^8, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^8, ..., z_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^2, t_1^7, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^7, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^8, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^8,$ $z_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^1, t_1^5, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^5, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^6, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^6, ..., z_1^1, t_1^5, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^5, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^6, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^6)$; $z_s^1 = (j+1) + s$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z_s^1 = (m-j+3) + s$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^5 = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^6 = (j+s) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^6 = (m-j+s+2) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z_s^2 = (j+1) + n - s$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $z_s^2 = (m-j+3) + n - s$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n - 1$; $t_l^7 = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^8 = (j+n-s) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t_l^8 = (m-j+n-s+2) + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 2$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n - 1$.

Representasi d untuk m genap sebagai berikut:

$d = (t_{n-1}^{10}, ..., t_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{10}, t_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^9, ..., t_1^9, z^3, t_1^9, ..., t_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^9, t_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{10}, ..., t_{n-1}^{10})$; $z^3 = j - 2$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$; $z^3 = m - j + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$; $t_s^9 = j + s - 1$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_s^9 = m - j + s + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_s^{10} = j + n - s - 1$ dengan $3 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n - 1$; $t_s^{10} = m + n - j - s + 1$ dengan $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq j \leq m$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n - 1$.

Representasi simpul graf $C_n \triangleright C_m$ untuk m genap dengan $j \in \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$r(y_{i,j}|\Pi_S) = (a_{i-1}, (3-j), t_1^1, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^1, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^2, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^2, c_{n-i}, d)$; $t_l^1 = (3-j) + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^2 = j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$; $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq 2$, m genap.

Representasi c_{n-i} untuk m genap dengan $j \in \{1, 2\}$ sebagai berikut:

$c = (z_1^1, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4, ..., z_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^1, t_1^3, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^3, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^4, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^4,$ $z_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^2, t_1^5, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^5, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^6, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^6, ..., z_{n-1}^2, t_1^5, ..., t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1}^5, t_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}^6, ..., t_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1}^6)$; $z_s^1 = (j+1) + s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t_l^3 = z_s^1 + 3l$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^4 = j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z_s^2 = n - s + (j+1)$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n - 1$; $t_l^5 = z_s^2 + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t_l^6 = n - s + j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$,

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1; 1 \leq j \leq 2.$

Representasi a_{i-1} untuk m genap dengan $j \in \{1,2\}$ sebagai berikut:

$a = (z^2_{n-1}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor +1}, t^5_1, ..., t^5_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^6_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^6_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1},$
$z^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1}, ..., z^1_1, t^3_1, ..., t^3_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor -1}, t^4_{\lfloor \frac{m}{6} \rfloor}, ..., t^4_{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor -1});$
$z^1_s = (j+1) + s$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t^3_l = z^1_s + 3l$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^4_l = j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l + s - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $z^2_s = n - s + (j+1)$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1$; $t^5_l = z^2_s + 3l$ dengan $1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{6} \rfloor - 1$; $t^6_l = n - s + j + 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 3l - 3$ dengan $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor \leq l \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1; 1 \leq j \leq 2.$

Representasi d untuk m genap dengan $j \in \{1,2\}$ sebagai berikut:

$d = (t^8_{n-1}, ..., t^8_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor +1}, t^7_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, ..., t^7_1, 0, t^7_1, ..., t^7_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, t^8_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor +1}, ..., t^8_{n-1})$; $t^7_s = s + (j-1)$ dengan $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $t^8_s = n - s + (j-1)$ dengan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq s \leq n-1; 1 \leq j \leq 2.$

Jadi $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m-2}{3})+n}\}$ adalah partisi pembeda bintang yang terdiri dari $n(\frac{m-2}{3}) + n$ kelas partisi. Sehingga kardinalitas dari Π_S adalah $|\Pi_S| = n(\frac{m-2}{3} + 1) = n(\frac{m+1}{3})$. Akan tetapi, Π_S belum tentu mempunyai kardinalitas minimum. Jadi dapat ditentukan batas atas dimensi partisi bintang dari graf $P_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m+1}{3})$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ dapat diperoleh dengan Lemma 2.2. Selain itu, dengan mempertimbangkan bahwa graf yang diinduksi oleh simpul-simpul dalam setiap kelas partisi harus sebuah graf bintang sehingga dapat ditunjukkan bahwa jika Π_S mempunyai kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m+1}{3}) - 1$, maka pasti terdapat sedikitnya satu kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang. Perhatikan bahwa simpul-simpul dalam kelas partisi Π_S merupakan simpul-simpul dari $V(C_n \triangleright C_m)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\Pi_S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{n(\frac{m+1}{3})-1}\}$ maka terdapat kelas partisi yang tidak menginduksi graf bintang yaitu $S_{n(\frac{m+1}{3})-1} = \{y_{i,1}y_{i,m} | n-1 \leq\leq n\}$. Sehingga diperoleh bahwa Π_S dengan kardinalitas $|\Pi_S| = n(\frac{m+1}{3}) - 1$ bukan merupakan partisi pembeda bintang. Jadi dapat ditentukan batas bawah dimensi pasrtisi bintang dari graf $C_n \triangleright C_m$ yaitu $spd(C_n \triangleright C_m) \geq n(\frac{m+1}{3})$.

Dengan demikian, diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang $n(\frac{m+1}{3}) \leq spd(C_n \triangleright C_m) \leq n(\frac{m+1}{3})$, maka dimensi partisi bintang $spd(C_n \triangleright C_m) = n(\frac{m+1}{3})$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Berdasarkan ketiga kasus pembuktian di atas diketahui bahwa untuk $spd(C_n \triangleright C_m) = n(\frac{m}{3})$ untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \geq 5$ dan $spd(C_n \triangleright C_m) = n(\frac{m+1}{3})$

untuk $m \equiv 2 (\bmod 3)$ sehingga pada kedua nilai m tersebut dapat digabungkan sedemikian $spd(C_n \rhd C_m) = n\lceil \frac{m}{3} \rceil$. Sedangkan $spd(C_n \rhd C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n}{3}$ untuk $m \equiv 1 (\bmod 3)$, $m \geq 5$ dan $n \equiv 0 (\bmod 3)$, $spd(C_n \rhd C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n+2}{3}$ untuk $m \equiv 1 (\bmod 3)$, $m \geq 5$ dan $m \equiv 1 (\bmod 3)$, $m \geq 5$ dan $spd(C_n \rhd C_m) = n(\frac{m-1}{3}) + \frac{n+1}{3}$ untuk $m \equiv 1 (\bmod 3)$, $m \geq 5$ dan $n \equiv 2 (\bmod 3)$ dapat ditulis $spd(C_n \rhd C_m) = n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil$. □

4.3 Hubungan antara Dimensi Partisi dan Dimensi Partisi Bintang pada Graf Hasil Operasi *Comb* Dua Graf Terhubung

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada subbab 4.1 sampai 4.2, dapat dituliskan kembali hasil mengenai dimensi partisi dan dimensi partisi bintang untuk masing-masing graf hasil operasi *comb* seperti pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2.

Dari kedua tabel tersebut dapat dilihat bahwa dapat disimpulkan hubungan antara dimensi partisi dengan dimensi partisi bintang pada graf hasil operasi *comb*. Secara umum, terdapat hubungan antara dimensi partisi dengan dimensi partisi bintang sebagaimana dapat ditunjukkan dengan mengambil Teorema 4.1 menunjukkan bahwa $pd(C_m \rhd_\delta P_n) = 3$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan Teorema 4.13 menunjukkan bahwa $spd(C_m \rhd_\delta P_n) = m\lceil \frac{n}{3} \rceil$ untuk $n \equiv 0 (\bmod 3)$, $n \equiv 2 (\bmod 3)$ dan $spd(C_m \rhd_\delta P_n) = m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ untuk $n \equiv 1 (\bmod 3)$ dan untuk kasus khususnya sebagai berikut:

- Untuk $m = 3$ dan $n = 2$ didapat $pd(C_3 \rhd_\delta P_2) = 3$ dan $spd(C_3 \rhd_\delta P_2) = 3$ sehingga dapat ditunjukkan bahwa $pd(C_3 \rhd_\delta P_2) = spd(C_3 \rhd_\delta P_2) = 3$

- Untuk $m = 4$ dan $n = 2$ didapat $pd(C_4 \rhd_\delta P_2) = 3$ dan $spd(C_4 \rhd_\delta P_2) = 4$ sehingga dapat ditunjukkan bahwa $pd(C_3 \rhd_\delta P_2) < spd(C_3 \rhd_\delta P_2) = 4$

- Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$ dapat ditunjukkan bahwa $pd(C_m \rhd_\delta P_n) \leq spd(C_m \rhd_\delta P_n)$

Untuk graf hasil operasi *comb* selain $C_m \rhd_\delta P_n$ dapat ditunjukkan bahwa nilai dimensi partisi graf hasil operasi *comb* lebih kecil dari nilai dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb*. Sehingga untuk graf G dan H didapatkan bahwa $pd(G \rhd H) \leq spd(G \rhd H)$.

Dalam Teorema 2.4 merujuk dari Marinescu dan Ghemeci (2012) menyatakan bahwa terdapat hubungan antara dimensi partisi dan dimensi partisi bintang graf

Tabel 4.1: Ringkasan Dimensi Partisi pada Graf Hasil Operasi *Comb* Dua Graf Terhubung

No	Graf	Dimensi Partisi
1.	$C_m \triangleright_\delta P_n$	Untuk simpul graf Lintasan P_n yang dilekatkan berderajat satu maka $pd(C_m \triangleright -\delta P_n) = 3$
2.	$C_m \triangleright_\Delta P_n$	Untuk simpul graf Lintasan P_n yang dilekatkan berderajat dua maka $pd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } m \in \{3,4\} \\ 4, & \text{jika } m \geq 5 \end{cases}$
3.	$P_n \triangleright C_m$	$pd(P_n \triangleright C_m) = \begin{cases} 3, & \text{jika } m \text{ genap dan } n \in \{2,3\} \\ & m \text{ gasal dan } n = 2 \\ 4, & \text{jika } m \text{ genap dan } n \geq 4 \\ & m \text{ gasal dan } n \geq 3 \end{cases}$
4.	$K_m \triangleright_\delta P_n$	Untuk simpul graf Lintasan P_n yang dilekatkan berderajat satu maka $pd(K_m \triangleright_\delta P_n) = m$
5.	$K_m \triangleright_\Delta P_n$	Untuk simpul graf Lintasan P_n yang dilekatkan berderajat dua maka $pd(K_m \triangleright_\Delta P_n) = m$
6.	$P_n \triangleright K_m$	$pd(P_n \triangleright K_m) = \begin{cases} m, & \text{jika } n \leq m \\ m+1, & \text{jika } n > m \end{cases}$
7.	$K_n \triangleright K_m$	$pd(K_n \triangleright K_m) = \begin{cases} n, & \text{jika } m \leq n \\ m, & \text{jika } m > n \end{cases}$
8.	$P_n \triangleright_\delta P_m$	Untuk simpul graf Lintasan P_m yang dilekatkan berderajat satu maka $pd(P_n \triangleright_\delta P_m) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 2 \\ 3, & \text{jika } n \geq 3 \end{cases}$
9.	$P_n \triangleright_\Delta P_m$	Untuk simpul graf Lintasan P_m yang dilekatkan berderajat dua maka $pd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = 3$
10.	$C_m \triangleright K_n$	$pd(C_m \triangleright K_n) = \begin{cases} n, & \text{jika } m \leq n \\ n+1, & \text{jika } m > n \end{cases}$
11.	$K_n \triangleright C_m$	$pd(K_n \triangleright C_m) = n$
12.	$C_n \triangleright C_m$	$pd(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 3 \\ 4, & \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$

Tabel 4.2: Ringkasan Dimensi Partisi Bintang pada Graf Hasil Operasi *Comb* Dua Graf Terhubung

No	Graf	Dimensi Partisi Bintang
1.	$C_m \triangleright_\delta P_n$	Untuk simpul graf Lintasan P_n yang dilekatkan berderajat satu maka $spd(C_m \triangleright_\delta P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{jika } n \equiv 0(\text{mod}3), n \equiv 2(\text{mod}3) \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil, & \text{jika } n \equiv 1(\text{mod}3) \end{cases}$
2.	$C_m \triangleright_\Delta P_n$	Untuk simpul graf Lintasan P_n yang dilekatkan berderajat dua maka $spd(C_m \triangleright_\Delta P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{jika } n \equiv 0(\text{mod } 3), n \equiv 2(\text{mod } 3) \\ & \text{dan } n \equiv 1(\text{mod } 3), 1 < i < n, \\ & i \neq 1(\text{mod } 3) \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil, & \text{jika } n \equiv 1(\text{mod } 3), 1 < i < n, \\ & i \equiv 1(\text{mod } 3) \end{cases}$
3.	$P_n \triangleright C_m$	$spd(P_n \triangleright C_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil, & \text{jika } m \equiv 0(\text{mod } 3), m \equiv 2(\text{mod } 3) \\ & \text{dan } m \geq 5 \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{jika } m \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } m \geq 5 \end{cases}$
4.	$K_m \triangleright_\delta P_n$	Untuk simpul graf Lintasan P_n yang dilekatkan berderajat satu maka $spd(K_m \triangleright_\delta P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{jika } n \equiv 0(\text{mod}3) \text{ dan } n \equiv 2(\text{mod}3) \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1, & \text{jika } n \equiv 1(\text{mod}3) \end{cases}$
5.	$K_m \triangleright_\Delta P_n$	Untuk simpul graf Lintasan P_n yang dilekatkan berderajat dua maka $spd(K_m \triangleright_\Delta P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{jika } n \equiv 0(\text{mod } 3), n \equiv 2(\text{mod } 3) \\ & \text{dan } n \equiv 1(\text{mod } 3), 1 < i < n, \\ & i \neq 1(\text{mod } 3) \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1, & \text{jika } n \equiv 1(\text{mod } 3), 1 < i < n, \\ & i \equiv 1(\text{mod } 3) \end{cases}$
6.	$P_n \triangleright K_m$	$spd(P_n \triangleright K_m) = spd(K_n \triangleright K_m) = n(m-1)$
7.	$P_n \triangleright_\delta P_m$	Untuk simpul graf Lintasan P_m yang dilekatkan berderajat satu maka $spd(P_n \triangleright_\delta P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil, & \text{jika } m \equiv 0(\text{mod } 3) \text{ dan } m \equiv 2(\text{mod } 3) \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{jika } m \equiv 1(\text{mod } 3) \end{cases}$
8.	$P_n \triangleright_\Delta P_m$	Untuk simpul graf Lintasan P_m yang dilekatkan berderajat dua maka $spd(P_n \triangleright_\Delta P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil, & \text{jika } m \equiv 0(\text{mod } 3), m \equiv 2(\text{mod } 3) \\ & \text{dan } m \equiv 1(\text{mod } 3), 1 < j < m, \\ & j \neq 1(\text{mod } 3) \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{jika } m \equiv 1(\text{mod } 3), 1 < j < m, \\ & j \equiv 1(\text{mod } 3) \end{cases}$
9.	$C_m \triangleright K_n$	$spd(C_m \triangleright K_n) = m(n-1)$
10.	$K_n \triangleright C_m$	$spd(K_n \triangleright C_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil, & \text{jika } m \equiv 0(\text{mod } 3), m \equiv 2(\text{mod } 3) \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 1, & \text{jika } m \equiv 1(\text{mod } 3) \end{cases}$
11.	$C_n \triangleright C_m$	$spd(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil, & \text{jika } m \equiv 0(\text{mod } 3), m \equiv 2(\text{mod } 3) \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{jika } m \equiv 1(\text{mod } 3) \end{cases}$

terhubung G yaitu $3 \leq pd(G) \leq spd(G)$ sehingga didapatkan suatu Akibat 4.1 sebagai berikut:

Akibat 4.1. *Misalkan G dan H adalah graf terhubung, $G \triangleright H$ adalah graf hasil operasi comb G dan H. Maka, dimensi partisi dan dimensi partisi bintang graf terhubung adalah*

$$2 \leq pd(G \triangleright H) \leq spd(G \triangleright H)$$

BAB V
SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Penelitian dalam tesis ini telah memberikan kontribusi dalam bidang dimensi pastisi dan dimensi partisi bintang sebuah graf terhubung G. Tesis ini memberikan hasil baru, seperti graf hasil operasi *comb* antara dua graf terhubung.

Dimensi partisi graf hasil operasi *comb* $F \cong G \rhd H$ adalah 2 jika $F \cong P_n \rhd_\delta P_m$ untuk $n = 2$ dan simpul pelekatan graf lintasan P_m berderajat satu. Selanjutnya, dimensi partisi graf hasil operasi *comb* $F \cong G \rhd H$ adalah 3 jika $F \cong C_m \rhd_\delta P_n$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_n berderajat satu, jika $F \cong C_m \rhd_\Delta P_n$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_n berderajat dua dan $m \in \{3, 4\}$, jika $F \cong P_n \rhd C_m$ dengan m genap dan $n \in \{2, 3\}$ atau m gasal dan $n = 2$, jika $F \cong P_n \rhd_\delta P_m$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_m berderajat satu dengan $n \geq 3$, jika $F \cong C_n \rhd C_m$ dengan $n = 3$ dan jika $F \cong P_n \rhd_\Delta P_m$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_m berderajat dua. Dimensi partisi graf hasil operasi *comb* $F \cong G \rhd H$ adalah 4 jika $F \cong C_m \rhd_\Delta P_n$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_n berderajat dua untuk $m \geq 5$, jika $F \cong P_n \rhd C_m$ dengan m genap dan $n \geq 4$ atau m gasal dan $n \geq 3$ dan jika $F \cong C_n \rhd C_m$ dengan $n \geq 4$.

Demikian juga untuk dimensi partisi graf hasil operasi *comb* $F \cong G \rhd H$ adalah n, jika $F \cong K_n \rhd K_m$ untuk $m \leq n$, jika $F \cong C_m \rhd K_n$ untuk $m \leq n$ dan jika $F \cong K_n \rhd C_m$. Dimensi partisi graf hasil operasi *comb* $F \cong G \rhd H$ adalah m, jika $F \cong K_n \rhd K_m$ untuk $m > n$, jika $F \cong K_m \rhd P_n$ dan jika $F \cong P_n \rhd K_m$ untuk $n \leq m$. Selanjutnya, dimensi partisi graf hasil operasi *comb* $P_n \rhd K_m$, adalah $m + 1$ jika $n > m$ dan dimensi partisi graf hasil operasi *comb* $C_m \rhd K_n$, adalah $n + 1$ jika $m > n$.

Kami juga memperoleh dimensi partisi bintang $G \rhd H$ untuk graf G dan H, meliputi graf lengkap, graf lintasan dan graf lingkaran. Dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* $F \cong G \rhd H$ adalah $m\lceil \frac{n}{3} \rceil$, jika $F \cong C_m \rhd_\delta P_n$ atau $K_m \rhd_\delta P_n$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_n berderajat satu untuk $n \equiv 0(\text{mod}3)$ atau $n \equiv 2(\text{mod}3)$ dan $m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ jika $F \cong C_m \rhd_\delta P_n$ atau $K_m \rhd_\delta P_n$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_n berderajat satu untuk $n \equiv 1(\text{mod}3)$. Dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* $F \cong G \triangleright H$ adalah $n\lceil \frac{m}{3} \rceil$, jika $F \cong P_n \triangleright C_m$, $K_n \triangleright C_m$ dan $C_n \triangleright C_m$ dengan $m \equiv 0(\text{mod}3)$ atau $m \equiv 2(\text{mod}3)$, $m \geq 5$ dan $n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil$ jika $F \cong P_n \triangleright C_m$ atau $C_n \triangleright C_m$ untuk $m \equiv 1(\text{mod}3)$ dengan $m \geq 5$ dan $n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 1$ jika $F \cong K_n \triangleright C_m$ untuk $m \equiv 1(\text{mod}3)$ dengan $m \geq 5$. Kemudian, didapatkan dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* $F \cong G \triangleright H$ adalah $n\lceil \frac{m}{3} \rceil$, jika $F \cong P_n \triangleright_\delta P_m$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_m berderajat satu untuk $n \equiv 0(\text{mod}3)$ atau $n \equiv 2(\text{mod}3)$ dan $n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil$ jika $F \cong P_n \triangleright_\delta P_m$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_m berderajat satu untuk $n \equiv 1(\text{mod}3)$.

Selanjutnya, dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* $F \cong G \triangleright H$ adalah $n(m-1)$, jika $F \cong K_n \triangleright K_m$ untuk $n, m \geq 3$ atau $F \cong P_n \triangleright K_m$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$. dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* $F \cong G \triangleright H$ adalah $m(n-1)$, jika $F \cong C_m \triangleright K_n$ untuk $n, m \geq 3$. Demikian juga, kami juga mendapatkan dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* $F \cong G \triangleright H$ adalah $m\lceil \frac{n}{3} \rceil$, jika $F \cong C_m \triangleright_\Delta P_n$ atau $K_m \triangleright_\Delta P_n$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_n berderajat dua untuk $n \equiv 0(\text{mod}3)$, $n \equiv 2(\text{mod}3)$ dan $n \equiv 1(\text{mod}3)$ untuk $1 < i < n$ dengan $i \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ jika $F \cong C_m \triangleright_\Delta P_n$ atau $K_m \triangleright_\Delta P_n$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_n berderajat dua untuk $n \equiv 1(\text{mod}3)$ untuk $1 < i < n$ dengan $i \neq 1(\text{mod } 3)$. Dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* $F \cong G \triangleright H$ adalah $n\lceil \frac{m}{3} \rceil$, jika $F \cong P_n \triangleright_\Delta P_m$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_m berderajat dua untuk $m \equiv 0(\text{mod}3)$, $m \equiv 2(\text{mod}3)$ dan $m \equiv 1(\text{mod}3)$ untuk $1 < j < m$ dengan $j \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil$ jika $F \cong P_n \triangleright_\Delta P_m$ dengan simpul pelekatan graf lintasan P_m berderajat dua untuk $m \equiv 1(\text{mod}3)$ untuk $1 < j < m$ dengan $j \neq 1(\text{mod } 3)$.

Kami telah mendapatkan batas bawah dan batas atas dimensi partisi $G \triangleright H$ untuk graf G dan H, meliputi graf lengkap, graf lintasan dan graf lingkaran. Kami menyatakannya dalam dimensi partisi $G \triangleright H$ yaitu $\max\{pd(G), pd(H)\} \leq pd(G \triangleright H) \leq pd(G) + pd(H)$ dan didapatkan suatu relasi antara dimensi partisi dan dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* dua graf terhubung G dan H adalah $2 \leq pd(G \triangleright H) \leq spd(G \triangleright H)$

5.2 Saran

Pada penelitian ini dimensi partisi dan dimensi partisi bintang terdapat masalah terbuka yang dapat digunakan sebagai titik tolak penelitian dalam bidang dimensi partisi dan dimensi partisi bintang dari suatu graf terhubung:

a. Menentukan dimensi partisi graf hasil operasi *comb* $G \triangleright H$ untuk sebarang graf G dan H.

b. Menentukan dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* $G \triangleright H$ untuk sebarang graf G dan H.

c. Menentukan dimensi partisi pada graf hasil operasi *comb* $G \triangleright H$ untuk graf dasar yang tidak sederhana misal graf tak terhubung, graf yang memiliki loop, graf yang bersisi ganda dan graf berarah.

d. Menentukan dimensi partisi bintang pada graf hasil operasi *comb* $G \triangleright H$ untuk graf dasar yang tidak sederhana misal graf tak terhubung, graf yang memiliki loop, graf yang bersisi ganda dan graf berarah.

e. Membuktian batas atas dan batas bawah dimensi partisi graf hasil operasi *comb* dua graf terhubung G dan H untuk sebarang graf yaitu max$\{pd(G), pd(H)\} \leq pd(G \triangleright H) \leq pd(G) + pd(H)$.

f. Menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* $G \triangleright H$ untuk sebarang graf G dan H.

g. Menentukan relasi antara dimensi partisi bintang graf G dan H dengan dimensi partisi bintang graf hasil operasi *comb* $G \triangleright H$.

DAFTAR PUSTAKA

Amalia, R. (2013). *Dimensi Partisi Bintang pada Graf Kincir yang Diperumum*. Tesis. Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS). Surabaya.

Amrullah, Baskoro, E.T., Simanjuntak, R. dan Uttunggadewa, S. (2015). "The Partition Dimension of a Subdivision of a Complete Graph". *Procedia Computer Science* **74**, 53-59.

Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M., dan Oellermann, O. (2000). "Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph". *Discrete Appl. Math.*No.105, 99-113.

Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P. (2000). "The Partition Dimension of a Graph". *Aequationes Math.* No. 59, 45-54.

Darmaji. (2011). *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung*. Disertasi. Jurusan Matematika FMIPA ITB.

Fredina, K.Q., dan Baskoro, E.T. (2015). "Partition Dimension of Some Families of Trees", *Procedia Computer Science*, **74**, 60-66.

Grigorious, C., Stephen, S., Rajan, B., Miller, M. dan William, A. (2014). "On the partition dimension of a class of circulant graphs", Information Processing Letters, **114**, **7**, 353-356.

Hartsfield, N., dan Ringel, G. (1994). *Pearls in Graph Theory*. Academic Press. United Kingdom.

Haryeni, D.O., dan Baskoro, E.T. (2015). "Partition Dimension of Some Classes of Homogenous Disconnected Graphs". *Procedia Computer Science*,**74**, 73-78.

Imran, M., Baig, A. Q., Bokhary, S. A. U. H., dan Javaid, I. (2012). "On the metric dimension of circulant graphs". Applied Mathematics Letters, 25(3), 320-325.

K., Ida Bagus Kade Puja Arimbawa, dan Baskoro, E.T. (2015). Partition Dimension of Some Classes of Trees, *Procedia Computer Science*, **74**, 67-72.

Khuller, S., dan Raghavachari, B. (1996). "Landmark in Graph". *Discrete Appl. Math*. No.70, 217-229.

Marinescu, R., dan Ghemeci. (2012). "On Star Partition Dimension of Trees". *Math. Reports 14(64)*. No.2, 161-173.

Marinescu, R., Ghemeci, dan Tomescu, I. (2010). "On Star Partition Dimension of The Generalized Gear Graph". *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 53(101)*. No.3, 261-268.

Permana, A.B., dan Darmaji (2012). "Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu". *Jurnal Teknik Pomits*, Vol.1, No.1, 1-4.

Rodrguez-Velzquez, J., Yero, I.G. dan Fernau, H. (2013). "On the partition dimension of unicyclic graphs", arXiv:1111.3513v2 [math.CO], 1-13.

Saenpholphat, V., dan Zhang, P. (2002). "Connected Partition Dimension of a Graphs". *Discussiones Mathematicae Graph Theory*. **22**. 305-323.

Saputro, S. W., Mardiana, N., dan Purwasi, I.A. (2013). "The Metric Dimension of Comb Product Graph". *Graph Theory Conference in Honor of Egawa 60th Birthday*.

Subiono. (2015). *Aljabar: Sebagai suatu Fondasi Matematika* Versi 1.0.0, Modul Mata Kuliah Aljabar.

Yero, I.G., dan Rodrguez-Velzquez, J. (2010). "A note on the partition dimension of Cartesian product graphs", *Applied Mathematics and Computation*, (217),**7**, 3571-3574.

Yero, I. G., Kuziak, D., dan Rodrguez-Velazquez, J. A. (2011). "On the metric dimension of corona product graphs". Computers and Mathematics with Applications, 61(9), 2793-2798.

Yogi, Suhud, dan Mudjiati. (2012). "Dimensi Partisi Pada Graf Hasil Korona $C_m \odot K_m$". *Jurnal:Teknik ITS*. No.1, Vol.1

BIOGRAFI PENULIS

Penulis bernama Ridho Alfarisi, lahir di Jember, 07 November 1994, merupakan putra terakhir dari tiga bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di MI Bustanul Ulum 13 Pakis (1999-2005), SMPN 2 Rambipuji (2005-2008) dan SMAN Rambipuji (2008-2011). Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi ke Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember melalui jalur SNMPTN Tulis 2011 hingga akhirnya dinyatakan lulus pada bulan Desember 2014 dan mendapat predikat *Cum Laude*. Kemudian penulis melanjutkan studi magister di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Bidang minat yang ditekuni penulis selama studi baik S1 maupun S2 adalah Teori Graf. Untuk kritik dan saran yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui e-mail: alfarisi38@gmail.com