TUGAS AKHIR – SM 141501

KAJIAN TEORI IDEAL PERLUASAN SUBTRAKTIF PADA SEMIRING TERNARI

NUR QOMARIAH
NRP 1212 100 701

Dosen Pembimbing
Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si.

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017

FINAL PROJECT – SM 141501

ON SUBTRACTIVE EXTENSION OF IDEAL THEORY IN TERNARY SEMIRINGS

NUR QOMARIAH
NRP 1212 100 701

Supervisor
Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si.

Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Sciences
Sepuluh Nopember Intitute of Technology
Surabaya 2017

LEMBAR PENGESAHAN

KAJIAN TEORI IDEAL PERLUASAN SUBTRAKTIF PADA SEMIRING TERNARI

ON SUBTRACTIVE EXTENSION OF IDEAL THEORY IN TERNARY SEMIRINGS

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Studi Analisis dan Aljabar
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
NUR QOMARIAH
NRP. 1212 100 701

Menyetujui,
Dosen Pembimbing,

Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si.
NIP. 19761215 200312 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003
Surabaya, Januari 2017

KAJIAN TEORI IDEAL PERLUASAN SUBTRAKTIF PADA SEMIRING TERNARI

Nama : Nur Qomariah
NRP : 1212100701
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si.

ABSTRAK

Pembahasan mengenai teori ideal terus berkembang, salah satunya adalah teori ideal pada semiring ternari. Pada tugas akhir ini, dikaji mengenai karakteristik ideal-ideal pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ yaitu ideal utama, Q-ideal, ideal subtraktif, dan ideal perluasan subtraktif. Bentuk-bentuk ideal tersebut memiliki hubungan dengan bentuk-bentuk ideal pada semiring $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$. Selanjutnya dengan menggunakan keterkaitan antara ideal perluasan subtraktif dengan Q-ideal, maka juga dikaji mengenai ideal perluasan subtraktif terkecil pada semiring ternari. Selain itu, juga dikaji mengenai ideal prima pada semiring ternari terhadap semiring ternari faktor. Jika diberikan I adalah Q-ideal pada semiring ternari S dan P adalah ideal perluasan subtraktif dari I, maka P adalah ideal prima pada S jika dan hanya jika $P\ /\ I_{(Q\cap P)}$ adalah ideal prima pada $S\ /\ I_{(Q)}$.

Kata kunci : *semiring ternari, ideal perluasan subtraktif, semiring ternari faktor, ideal prima.*

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

ON SUBTRACTIVE EXTENSION OF IDEAL THEORY IN TERNARY SEMIRINGS

Name : Nur Qomariah
NRP : 1212100701
Department : Mathematics
Supervisors : Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si.

ABSTRACT

Discussion about ideal theory had been developed, such as ideals theory in ternary semiring. This final project discusses the characterization of ideals in ternary semiring $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ *such as principal ideal, Q-ideal, subtractive ideal, and subtractive extension of an ideal in ternary semiring. Characterization of this ideals having relation with characterization of ideals in semiring* $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$*. Further, with the relation between subtractive extension of a* Q*-ideal in a ternary semiring, smallest subtractive extension of an ideal in ternary semiring is obtained. And also the prime ideal in quotient ternary semiring is obtained. A subtractive extension* P *of a* Q*-ideal* I *in a ternary semiring* S *is a prime ideal if and only if* $P\ /\ I_{(Q\cap P)}$ *is a prime ideal in the quotient ternary semiring* $S\ /\ I_{(Q)}$.

Keywords*: ternary semiring, subtractive extension of an ideal, quotient ternary semiring, prime ideal.*

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmanirrohim

Alhamdulillah, puji syukur atas segala nikmat, rahmat dan hidayah yang Allah SWT berikan sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul :

"Kajian Teori Ideal Perluasan Subtraktif pada Semiring Ternari"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Sholawat serta salam senantiasa penulis curahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW, beserta para keluarga dan sahabatnya. Segala dukungan dan bantuan telah penulis dapatkan dari berbagai pihak sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT sebagai Ketua Jurusan Matematika FMIPA-ITS.
2. Ibu Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si sebagai dosen pembimbing sekaligus dosen wali penulis atas segala bimbingan, kesabaran dan motivasi selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik.
3. Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si, Ibu Soleha S.Si, M.Si, Bapak Drs. Komar Baihaqi, M.Si, Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si dan Bapak M. Syifa'ul Mufid, S.Si, M.Si selaku dosen penguji Tugas Akhir yang telah memberikan kritik dan saran yang bersifat membangun kepada penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si sebagai Kaprodi S1 Jurusan Matematika FMIPA ITS.
5. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku Sekprodi S1 Jurusan Matematika FMIPA ITS dan Mas Ali yang selalu memberikan informasi mengenai tugas akhir.

6. Semua pihak yang telah memberikan dukungan dan ilmu kepada penulis dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini masih mempunyai banyak kekurangan, untuk itu pula dalam kesempatan ini penulis meminta maaf sebesar-besarnya atas segala kekurangan yang ada. Kritik dan saran dari berbagai pihak yang bersifat membangun juga sangat diharapkan sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang.

Surabaya, Januari 2017

Penulis

UCAPAN TERIMA KASIH

Penyelesaian Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis yang yang telah mendukung dan memotivasi penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Kedua orang tua penulis yang selalu memberikan nasihat, motivasi, semangat, dan kasih sayang tanpa henti, serta doa dalam ibadah selama penulis menuntut ilmu.
2. Kakak dan Adik-adik penulis yang telah memberikan dukungan serta motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
3. Bapak dan ibu serta seluruh jajaran pegawai dan karyawan Kementrian Agama NKRI selaku pemberi beasiswa Program Beasiswa Santri Berprestasi sehingga penulis dapat menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
4. Bapak Agus Zainal Arifin M.Kom selaku pembina CSSMoRA ITS dan seluruh pengurus PBSB ITS, pihak BAAK, serta pihak BAUK ITS yang selalu memberikan berbagai nasihat, bimbingan dan motivasi selama penulis menempuh pendidikan di ITS.
5. Ahmad Fahrurrozi Mushofa yang telah memberikan dukungan, do’a, dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Sahabat penulis, Fauzul Muna Maulidiyah, Siti Nur Fatimah, dan Aula Zulfaizatul Aini yang saling memberikan dukungan dalam menuntut ilmu.
7. Teman-teman CSSMoRA ITS, Extension, asrama Pondok Pesantren Mahasiswi Muhyiddin dan teman-teman Matematika ITS Angkatan 2012 yang telah menjadi keluarga baru dan selalu mendukung penulis selama kuliah di ITS.
8. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu per satu, terima kasih telah membantu sampai Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

R	Himpunan yang memenuhi aksioma semiring
S	Himpunan yang memenuhi aksioma semiring ternari
I, P, A, A_i, Ji, L	Himpunan - himpunan yang memenuhi aksioma ideal, dengan $i = 1,2$
$\mathbb{Z}_0^+$	Himpunan bilangan bulat tak negatif
$\mathbb{Z}_0^-$	Himpunan bilangan bulat tak positif
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\tilde{A}, \bar{A}$	Suatu ideal dengan syarat khusus
$\emptyset$	Himpunan kosong
“$+$”	Operasi biner penjumlahan
“ $\cdot$ “	Operasi biner perkalian pada semiring dan terner pada semiring ternari
“$\oplus$”	Operasi biner penjumlahan khusus
“$\odot$”	Operasi biner perkalian khusus pada semiring dan terner pada semiring ternari
$\subseteq$	Himpunan bagian (subset)
$\cup$	Gabungan
$\cap$	Irisan
$\times$	Cross product
$\in$	Anggota dari (himpunan) atau elemen
$\notin$	Bukan anggota dari (himpunan) atau elemen
$\neq$	Tidak sama dengan
$A\ /\ I_{(Q \cap A)}$	Ideal A atas I
$S\ /\ I_{(Q)}$	Semiring S atas I (semiring ternari faktor)

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini, dijelaskan berbagai hal yang melatar-belakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu bagian dari ilmu matematika yang mempelajari tentang sifat dan struktur pada suatu himpunan. Struktur aljabar membahas tentang himpunan tak kosong dengan satu operasi biner atau lebih dan memenuhi aksioma tertentu. Salah satu struktur aljabar yang dipelajari adalah semiring. Konsep dari semiring diperkenalkan oleh H.S Vandiver pada tahun 1934 yang sebelumnya pada tahun 1932 Lehmer telah memperkenalkan adanya suatu operasi terner pada struktur aljabar. Pada tahun 1971, W.G Lister [1] memperkenalkan operasi terner pada ring yang kemudian disebut dengan ring ternari. Semiring pun mengalami perkembangan saat Dutta dan Kar [2] memperkenalkan macam-macam semiring ternari dan sifat-sifatnya pada tahun 2003.

Perbedaan antara semiring dan semiring ternari terletak pada banyaknya operasi yang berlaku. Semiring disertai dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(.)$, sedangkan pada semiring ternari memiliki dua operasi yaitu operasi biner terhadap penjumlahan $(+)$ dan operasi terner terhadap perkalian $(.)$. Semiring ternari merupakan bentuk perumuman dari konsep ring ternari. Semiring ternari merupakan suatu ring ternari yang salah satu syaratnya dihilangkan, yaitu invers terhadap operasi penjumlahan $(+)$. Selain itu, semiring ternari juga merupakan suatu semiring yang mengalami perkembangan dengan adanya suatu operasi terner terhadap perkalian $(.)$. Secara umum, semiring ternari bersifat asosiatif dan komutatif terhadap operasi biner $(+)$, memiliki identitas 0 terhadap operasi biner $(+)$, asosiatif terhadap operasi terner $(.)$, memiliki identitas 0 terhadap operasi terner $(.)$, serta distributif terhadap operasi terner $(+)$ dan $(.)$. Dengan demikian, jika terdapat suatu himpunan memenuhi syarat - syarat yang disebutkan sebelumnya, maka himpunan tersebut dinamakan semiring ternari.

Telah banyak penelitian terdahulu mengenai konsep ideal pada semiring ternari. Dutta dan Kar [2] menyelidiki karakteristik dari ideal pada semiring ternari. S.Kar [4] melakukan penelitian tentang teori ideal pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^-$. Chaudhari dan Ingale [3] juga melakukan penelitian mengenai Q-ideal dan ideal subtraktif pada semiring ternari. Selain itu, Chaudhari dan Bonde [7] mengenalkan konsep ideal perluasan subtraktif pada semiring. Selanjutnya, Chaudhari dan Ingale [5] melakukan penelitian dengan mengembangkan konsep ideal perluasan subtraktif pada semiring ke dalam semiring ternari. Berawal dari penelitian Chaudhari dan Ingale inilah penulis mengajukan topik tugas akhir yaitu dengan melakukan kajian mengenai teori ideal perluasan subtraktif pada semiring ternari yang dirujuk dari penelitian Chaudari dan Ingale dengan judul "*Subtractive Extension of Ideals in Ternary Semirings*"[5]. Dalam pokok bahasan ini, akan dibahas lebih intensif mengenai ideal prima pada semiring ternari dan semiring ternari faktor.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, dibuatlah beberapa rumusan permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini, yaitu :

1. Bagaimana bentuk-bentuk ideal pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.
2. Bagaimana karakteristik ideal perluasan subtraktif terkecil pada semiring ternari.
3. Bagaimana hubungan ideal prima pada semiring ternari dengan semiring ternari faktor.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang diberikan dalam tugas akhir ini adalah bentuk ideal yang dibahas pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ meliputi ideal utama, Q-ideal, ideal subtraktif dan ideal perluasan subtraktif.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Mengetahui bentuk ideal utama, Q-ideal, ideal subtraktif dan ideal perluasan subtraktif pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.
2. Menyelidiki karakteristik ideal perluasan subtraktif terkecil pada semiring ternari serta memahami sifat-sifat yang berlaku di dalamnya.
3. Mengetahui hubungan ideal prima pada semiring ternari dengan semiring ternari faktor.

1.5 Manfaat

Hasil dari Tugas Akhir ini diharapkan memiliki manfaat sebagai berikut:

1. Sebagai tambahan wawasan pengetahuan dan referensi untuk penelitian selanjutnya mengenai teori ideal pada semiring ternari dan semiring ternari faktor.
2. Sebagai penerapan ilmu dari mata kuliah aljabar II.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam Tugas Akhir ini sebagai berikut:

BAB I	Pendahuluan, Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan.
BAB II	Tinjauan Pustaka, berisikan konsep-konsep dasar mengenai semiring, ideal pada semiring, semiring faktor, semiring ternari, ideal pada semiring ternari, jenis - jenis ideal pada semiring ternari dan bentuk - bentuknya, serta diberikan beberapa lemma, proposisi dan teorema mengenai ideal pada semiring ternari yang terkait dengan pembahasan tugas akhir ini.
BAB III	Metode Penelitian, Dalam bab ini dijelaskan tahapan - tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan tugas akhir. Tahapan - tahapan tersebut antara lain studi literatur, mengkaji bentuk-bentuk ideal pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, mengkaji ideal perluasan subtraktif terkecil pada semiring ternari, mengkaji hubungan antara ideal prima pada semiring ternari dengan semiring ternari faktor penarikan kesimpulan serta pembukuan.
BAB IV	Analisis Data dan Pembahasan, pada bagian dikaji mengenai bentuk ideal pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$. Pada sub bab ini, bagian yang dikaji adalah bentuk dari ideal utama, Q-ideal, ideal subtraktif dan ideal perluasan subtraktif pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$. Selanjutnya dikaji mengenai karakteristik ideal perluasan subtraktif terkecil pada semiring ternari. Kemudian yang terakhir yaitu dikaji mengenai hubungan ideal prima pada semiring ternari dengan semiring ternari faktor.

BAB V Penutup, berisi kesimpulan dan saran berdasarkan hasil analisis data dan pembahasan dari seluruh pengerjaan Tugas Akhir.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab tinjauan pustaka diberikan wawasan mengenai konsep dasar mengenai semiring, semiring ternari, ideal pada semiring ternari, jenis – jenis ideal pada semiring ternari, serta Lemma, Proposisi dan Teorema yang terkait dengan pembahasan pada tugas akhir ini.

2.1 Semiring

Konsep semiring pertama kali diperkenalkan oleh H.S. Vandiver pada tahun 1934. Semiring merupakan bentuk perumuman dari konsep ring yang salah satu syaratnya dihilangkan, yaitu invers pada operasi penjumlahan $(+)$. Semiring disertai dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(.)$.

Definisi 2.1.1[8]. *Himpunan tak kosong R terhadap dua operasi biner penjumlahan* $(+)$ *dan perkalian* $(.)$ *disebut semiring, apabila :*

a. *Bersifat asosiatif dan komutatif terhadap operasi biner pada penjumlahan* $(+)$.
b. *Terdapat elemen* $0 \in R$ *yang memenuhi* $r + 0 = 0 + r = r$ *dan* $r.0 = 0.r = 0$ *untuk sebarang* $r \in R$.
c. *Bersifat asosiatif terhadap operasi biner pada perkalian* $(.)$, *dan*
d. *Bersifat distributif terhadap dua operasi biner penjumlahan* $(+)$ *dan perkalian* $(.)$.

Jika himpunan tersebut juga bersifat komutatif terhadap operasi biner pada perkalian $(.)$, maka semiring tersebut dikatakan **semiring komutatif**.

Contoh 2.1.2. Himpunan $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ dan $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dalam operasi biner merupakan semiring.

2.2 Ideal pada Semiring

Pengertian ideal pada semiring diberikan dalam sebuah definisi berikut.

Definisi 2.2.1[7]. *I merupakan **ideal** pada semiring R jika untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in R$ memenuhi:*

a. $x + y \in I$; *dan*

b. $r.x,\ x.r \in I$.

Contoh 2.2.2. Himpunan $\langle 3 \rangle = \{3m \mid m \in \mathbb{Z}_0^+\}$ dan $\langle 3,4 \rangle = \{3m_1 + 4m_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_0^+\}$ merupakan ideal pada semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$. Sedangkan $\{0,2\}$ bukan merupakan ideal pada semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ sebab $0 + 0 = 0 \in \{0,2\}\ dan\ 0 + 2 = 2 + 0 = 2 \in \{0,2\}$ akan tetapi terdapat $2 + 2 = 4 \notin \{0,2\}$.

Suatu ideal pada semiring dikatakan ideal sejati apabila ideal tersebut merupakan subset sejati dari semiring tersebut. Selanjutnya diberikan definisi, dan teorema mengenai berbagai jenis ideal yang diperlukan dalam pembahasan Tugas Akhir ini, yaitu :

Definisi 2.2.3[7]. *Jika R adalah semiring dan untuk sebarang $x \in R$ yang dinotasikan $\langle x \rangle = \{nx \mid n \in R\}$, maka $\langle x \rangle$ dikatakan **ideal utama** dari R yang dibangun oleh x.*

Contoh 2.2.4. Himpunan $\langle 3 \rangle = \{3m \mid m \in \mathbb{Z}_0^+\}$ merupakan ideal utama pada semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$.

Definisi 2.2.5[7]. *Jika I adalah ideal pada semiring R, maka I dikatakan **Q-ideal** bila terdapat $Q \subseteq R$ yang memenuhi :*

a. $R = \bigcup\{q + I \mid q \in Q\}$,

b. *Jika* $q_1, q_2 \in Q$, *maka* $(q_1 + I) \cap (q_2 + I) \neq \emptyset$, $q_1 = q_2$.

Contoh 2.2.6. Ideal $\langle 2 \rangle$ pada semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ adalah Q-ideal dengan $Q = \{0,1\}$.

Definisi 2.2.7[8]. *Ideal* I *dinamakan* ***ideal subtraktif*** *pada semiring R jika* $x, x + y \in I$ *dan* $y \in R$, *maka* $y \in I$.

Contoh 2.2.8. Ideal $\langle 2 \rangle = \{2m | m \in \mathbb{Z}_0^+\}$ pada semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ adalah ideal subtraktif. Namun, ideal $\langle 2,3 \rangle = \{2m + 3n | m, n \in \mathbb{Z}_0^+\} = \mathbb{Z}_0^+ - \{1\}$ bukan merupakan ideal subtraktif pada semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ sebab $2 + 1 = 3 \in \langle 2,3 \rangle$ akan tetapi $1 \notin \langle 2,3 \rangle$.

Selanjutnya, berikut diberikan bentuk-bentuk ideal pada semiring $\mathbb{Z}_0^+$.

Teorema 2.2.9[8]. *Misalkan* I *adalah ideal pada semiring* $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ *maka pernyataan berikut ekivalen :*

a. I *adalah ideal utama*
b. I *adalah* Q*-ideal*
c. I *adalah ideal subtraktif*

Lemma 2.2.10[7]. *Misalkan* I *adalah ideal utama pada semiring* $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ *yang memenuhi* $I = J_1 \times J_2$ *dengan demikian:*

a. I *adalah ideal utama jika dan hanya jika* J_1 *dan* J_2 *adalah ideal utama pada semiring* $\mathbb{Z}_0^+$.
b. I *adalah* Q*-ideal jika dan hanya jika* J_1 *adalah* Q_1*-ideal dan* J_2 *adalah* Q_2*-ideal pada semiring* $\mathbb{Z}_0^+$ *dengan* $Q = Q_1 \times Q_2$.
c. I *adalah ideal subtraktif jika dan hanya jika* J_1 *dan* J_2 *adalah ideal subtraktif pada semiring* $\mathbb{Z}_0^+$.

Dari Lemma 2.2.10 diperoleh teorema berikut :

Teorema 2.2.11[7]. *Misalkan I adalah ideal pada semiring* $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, *maka pernyataan berikut ekivalen :*

a. *I adalah ideal utama*
b. *I adalah Q-ideal*
c. *I adalah ideal subtraktif*

Contoh 2.2.12. Misalkan himpunan $\langle 2\rangle$ dan $\langle 3\rangle$ adalah ideal pada semiring $\mathbb{Z}_0^+$, dengan $Q_1 = \{0,1\}$ dan $Q_2 = \{0,1,2\}$. Menurut Teorema 2.2.11 diperoleh :

a. $I = \langle 2\rangle \times \langle 3\rangle$ adalah ideal utama pada semiring $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ dan bentuknya adalah $I = \langle (2,3)\rangle$
b. $I = \langle 2\rangle \times \langle 3\rangle$ adalah Q-ideal pada semirig $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ dengan bentuk partisi $(q_1, q_2) + \langle 2\rangle \times \langle 3\rangle$ dimana $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$
c. $I = \langle 2\rangle \times \langle 3\rangle$ adalah ideal subtraktif pada semiring $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ dengan bentuk $I = \langle 2\rangle \times \langle 3\rangle = \{2k_1 + 3k_2 | k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0^+\}$.

2.3 Ideal Perluasan Subtraktif pada Semiring

Berikut diberikan sebuah lemma dan teorema mengenai ideal perluasan subtraktif terkecil dari suatu ideal pada semiring.

Lemma 2.3.1[7]. *Misalkan I dan A adalah ideal pada semiring* $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ *dengan* $I = J_1 \times J_2$, $A = A_1 \times A_2$ *dan* $I \subseteq A$. *Ideal A dikatakan ideal perluasan subtraktif dari I jika dan hanya jika* A_i *adalah ideal perluasan subtraktif dari* J_i *pada semiring* $\mathbb{Z}_0^+$ *dengan* $i = 1,2$.

Selanjutnya, diberikan proposisi mengenai ideal perluasan subtraktif terkecil pada semiring yang memiliki hubungan dengan semiring faktor.

Proposisi 2.3.2[7]. *Misalkan I adalah* ***Q-ideal*** *pada semiring R dan A adalah ideal pada semiring R dengan* $I \subseteq A$.
Didefinisikan :
$\widetilde{A} = \{x \in R | q + I \in R \,/\, I_{(Q)}\ dimana\ x \in q + I\ dan\ (q + I) \cap A \neq \emptyset\}$.
Himpunan $\widetilde{A}$ *yang merupakan subset dari R adalah ideal perluasan subtraktif terkecil dari I yang memuat A.*

Sebagai catatan untuk Proposisi 2.3.2, bila ideal A yang termuat pada $\widetilde{A}$ merupakan ideal perluasan subtraktif, dapat dikatakan bahwa $\widetilde{A} = A$. Demikian pula berlaku $\widetilde{A} = A$ bila ideal A merupakan ideal subtraktif dengan $I \subseteq A$. Namun, saat ideal A merupakan ideal sebarang pada semiring R, pernyataan sebelumnya belum tentu berlaku. Lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.3.3. Misalkan $I = \langle 3 \rangle = \{3m | m \in \mathbb{Z}_0^+\}$ dan $A = \langle 3{,}4 \rangle = \mathbb{Z}_0^+ - \{1{,}2{,}5\}$ adalah ideal pada semiring $R = \mathbb{Z}_0^+$. Jelas bahwa I merupakan Q-ideal pada semiring R dengan $Q = \{0, 1, 2\}$ dan $I \subseteq A$. Karena $3 \in I, 3 + 1 = 4 \in A$ dengan $1 \in R$, tetapi dalam hal ini $1 \notin A$, oleh karenanya dikatakan bahwa A bukanlah ideal perluasan subtraktif dari I. Selanjutnya, menurut Proposisi 2.3.2, diperoleh bentuk :

1. $I + 0 = I = \{3m | m \in \mathbb{Z}_0^+\}$
2. $I + 1 = \{3m + 1 | m \in \mathbb{Z}_0^+\}$
3. $I + 2 = \{3m + 2 | m \in \mathbb{Z}_0^+\}$

dan

1. $I + 0 \cap A = 3m \cap \langle 3{,}4 \rangle \neq \emptyset$, maka $I + 0 \subseteq \widetilde{A}$
2. $I + 1 \cap A = 3m + 1 \cap \langle 3{,}4 \rangle \neq \emptyset$, maka $I + 1 \subseteq \widetilde{A}$
3. $I + 2 \cap A = 3m + 2 \cap \langle 3{,}4 \rangle \neq \emptyset$, maka $I + 2 \subseteq \widetilde{A}$

Sehingga diperoleh $I + 0 \cup I + 1 \cup I + 2 = \mathbb{Z}_0^+$. Akibatnya $\widetilde{A} = \mathbb{Z}_0^+$, dan jelas bahwa $\widetilde{A}$ adalah ideal perluasan subtraktif dari I.

Teorema 2.3.4[7]. *Misalkan I adalah Q-ideal pada semiring R. Misalkan juga A dan B adalah ideal pada semiring R yang masing - masing memuat I, dengan demikian berlaku :*

a. *A adalah ideal perluasan subtraktif* $\Leftrightarrow A = \tilde{A}$;

b. $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$

c. $A \subseteq B \implies \tilde{A} \subseteq \tilde{B}$;

d. *Jika $A \cup B$ adalah ideal, maka* $(\widetilde{A \cup B}) = \tilde{A} \cup \tilde{B}$;

e. $(\widetilde{A \cap B}) \subseteq \tilde{A} \cap \tilde{B}$;
f. $A = B \Longrightarrow \tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A}/I_{(\tilde{A} \cap Q)} = \tilde{B}/I_{(\tilde{B} \cap Q)}$

Teorema 2.3.5[7]. *Misalkan I adalah Q-ideal dan P adalah ideal perluasan subtraktif dari I pada semiring R. Ideal P adalah ideal prima pada semiring R jika dan hanya jika ideal* $P / I_{(P \cap Q)}$ *merupakan ideal prima pada semiring* $R / I(Q)$.

Teorema 2.3.6[7]. *Misalkan R adalah semiring dengan elemen nol* q_0, *I adalah* Q*-ideal pada semiring* R. *Jika* $q_0 \in Q$, $q_0 + I$ *adalah elemen nol di* $R / I_{(Q)}$, *maka* $q_0 + I = I$.

2.4 Semiring Ternari

Semiring ternari merupakan bentuk perumuman dari konsep ring ternari. Selain itu, semiring ternari juga merupakan suatu semiring yang mengalami perkembangan dengan adanya suatu operasi terner terhadap perkalian $(.)$.

Definisi 2.4.1[5] *Himpunan tak kosong* S *terhadap dua operasi biner penjumlahan (+) dan operasi terner perkalian (.) disebut* ***semiring ternari****, jika untuk setiap* $a, b, c, d, e \in S$, *memenuhi:*

a. $(a + b) + c = a + (b + c)$
b. $a + b = b + a$
c. $(a.b.c).d.e = a.(b.c.d).e = a.b.(c.d.e)$
d. *Terdapat* $0 \in S$ *yang memenuhi* $a + 0 = 0 + a$, $a.b.0 = a.0.b = 0.a.b = 0$
e. $(a + b).c.d = a.c.d + b.c.d$
f. $a.(b + c).d = a.b.d + a.c.d$
g. $a.b.(c + d) = a.b.c + a.b.d$

Jika terdapat elemen $e \in S$ yang memenuhi $e.e.x = e.x.e = x.e.e = x, \forall x \in S$, maka e merupakan elemen identitas pada **semiring ternari.** Jika untuk setiap $a, b, c \in S$ memenuhi

$a.b.c = a.c.b = c.a.b,\ \forall a,b,c \in S,$ maka S dinamakan **semiring ternari komutatif**.

Dari definisi 2.4.1[5] diperoleh pernyataan bahwa setiap semiring adalah semiring ternari. Namun tidak berlaku sebaliknya.

Contoh 2.4.2. Semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ merupakan contoh semiring ternari, sedangkan semiring ternari $(\mathbb{Z}_0^-, +, \cdot)$ bukan merupakan semiring. Sebab jika $a, b \in \mathbb{Z}_0^-$ maka pada operasi biner perkalian $a.b \notin \mathbb{Z}_0^-$.

Berikut merupakan definisi mengenai ideal pada semiring ternari :

Definisi 2.4.3[5]. *I merupakan **ideal** pada semiring ternari S jika untuk setiap $a, b \in I$ dan $r, s \in S$ memenuhi:*

a. $a + b \in I$,

b. $r.s.a,\ r.a.s,\ a.r.s \in I$.

Selanjutnya, diberikan definisi dan lemma mengenai beberapa jenis ideal yang ada pada semiring ternari sebagai berikut :

Definisi 2.4.4[5]. *Jika S adalah semiring ternari dan untuk sebarang $x \in S$ yang dinotasikan $\langle x \rangle = \{mnx \mid m, n \in S\}$, maka $\langle x \rangle$ dikatakan **ideal utama** dari S yang dibangun oleh x.*

Contoh 2.4.5. Himpunan $\langle -3 \rangle = \{-3mn \mid m, n \in \mathbb{Z}_0^-\} = \{-3k | k \in \mathbb{Z}_0^+\}$ merupakan ideal utama pada semiring ternari $(\mathbb{Z}_0^-, +, \cdot)$.

Definisi 2.4.6[5,8]. *Ideal I dinamakan **ideal subtraktif** pada semiring (semiring ternari) S jika $x, x + y \in I$ dan $y \in S$, maka $y \in I$.*

Contoh 2.4.7. Ideal $\langle -2 \rangle$ pada semiring ternari $(\mathbb{Z}_0^-, +, \cdot)$ adalah ideal subtraktif. Namun, ideal $\langle -2, -3 \rangle = \{-2k_1 + -3k_2 | k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0^-\} = \{-2k_1 - 3k_2 | k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0^-\} = \mathbb{Z}_0^- - \{-1\}$ bukan merupakan ideal subtraktif pada semiring ternari $(\mathbb{Z}_0^-, +, \cdot)$ sebab $-2 + -1 = -2 - 1 = -3 \in \langle -2, -3 \rangle$ akan tetapi $-1 \notin \langle -2, -3 \rangle$.

Definisi 2.4.8[5]. *Misalkan I dan A masing masing adalah ideal pada semiring ternari S dengan $I \subseteq A$. Ideal A dikatakan* ***ideal perluasan subtraktif*** *dari I, jika untuk sebarang $x \in I$ dan $y \in S$ yang memenuhi $x + y \in A$, maka berakibat $y \in A$.*

Dari definisi ideal perluasan subtraktif diperoleh sebuah fakta bahwa setiap ideal subtraktif A yang memuat suatu ideal I pada semiring ternari S merupakan ideal perluasan subtraktif dari I. Namun konvers dari pernyataan tersebut belum tentu berlaku.

Definisi 2.4.9[5]. *Ideal I dinamakan* ***ideal prima*** *pada semiring ternari S jika untuk setiap $a, b, c \in S$ yang memenuhi $a.b.c \in I$, maka $a \in I$ atau $b \in I$ atau $c \in I$.*

Definisi 2.4.10[5]. *Ideal dinamakan* ***Q-ideal*** *pada semiring (semiring ternari) S jika terdapat himpunan bagian Q pada S sedemikian hingga :*

i) $S = \bigcup \{q + I : q \in Q\}$

ii) Jika $q_1, q_2 \in Q$, maka $(q_1 + I) \cap (q_2 + I) \neq \emptyset \Leftrightarrow q_1 = q_2$.

Contoh 2.4.11. Ideal $\langle -3 \rangle$ pada semiring ternari $(\mathbb{Z}_0^-, +, \cdot)$ adalah Q-ideal dengan $Q = \{0, -1, -2\}$.

Lemma 2.4.12[3]. *Misalkan I merupakan ideal dari semiring ternari S dengan $a, x \in S$ dan $r, s \in S$ sedemikian hingga $a + I \subseteq x + I$, maka:*

i) $a + r + I \subseteq x + r + I$

ii) $r.s.a + I \subseteq r.s.x + I$

iii)$r.a.s + I \subseteq r.x.s + I$
iv) $a.r.s + I \subseteq x.r.s + I$.

Lemma 2.4.13[3]. *Misalkan* I *merupakan Q-ideal dari semiring ternari* S. *Jika* $x \in S$, *maka terdapat* $q \in Q$ *sedemikian hingga* $x + I \subseteq q + I$. *Karenanya* $x = q + a$ *untuk beberapa* $a \in I$.

Selanjutnya, berikut diberikan definisi mengenai semiring ternari faktor.

Definisi 2.4.14[3]. *Misalkan* I *adalah* Q*-ideal pada semiring ternari* S, *didefinisikan dengan operasi biner* $\oplus$ *dan operasi terner* $\odot$ *pada* $S/I_{(Q)} = \{q + I : q \in Q\}$ *berlaku :*

1. $(q_1 + I) \oplus (q_2 + I) = (q_3 + I)$ dimana $q_1 + q_2 + I \subseteq q_3 + I$ untuk setiap $(q_1 + I), (q_2 + I) \in S\ /\ I_{(Q)}$ dan $q_1, q_2, q_3 \in Q$, serta
2. $(q_1 + I) \odot (r + I) \odot (s + I) = (q_4 + I)$ dimana $q_1 rs + I \subseteq q_4 + I$ untuk setiap $(q_1 + I), (r + I), (s + I) \in S\ /\ I_{(Q)}$ dan $q_1, r, s \in Q$.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III
METODE PENELITIAN

Penulisan Tugas Akhir ini dilakukan dengan mengikuti metode penelitian sebagai berikut :

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini, akan dilakukan identifikasi permasalahan dengan mempelajari konsep mengenai definisi semiring ternari, ideal pada semiring ternari, dan bentuk – bentuk ideal pada semiring ternari. Konsep tersebut dipelajari lebih mendalam melalui buku – buku literatur dan paper.

3.2 Mengkaji Bentuk-bentuk Ideal pada Semiring Ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$

Pada tahap ini, akan dikaji mengenai bentuk ideal utama, Q-ideal, ideal subtraktif dan ideal perluasan subtraktif pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.

3.3 Mengkaji Ideal Perluasan Subtraktif Terkecil pada Semiring Ternari.

Dalam mengkaji ideal perluasan subtraktif terkecil pada semiring ternari yang selanjutnya dikaji mengenai sifat-sifat yang berlaku di dalamnya.

3.4 Mengkaji Hubungan Antara Ideal Prima pada Semiring Ternari dengan Semiring Ternari Faktor

Dalam tahap ini, dikaji mengenai ideal prima pada semiring ternari dengan semiring ternari faktor.

3.5 Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil-hasil yang diperoleh dari tahap-tahap sebelumnya dan pemberian saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

3.6Penyusunan Laporan Akhir

Dalam tahap ini dilakukan pembukuan yang merupakan penyusunan laporan akhir..

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai bentuk ideal pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, karakteristik ideal perluasan subtraktif terkecil pada semiring ternari dan hubungan ideal prima pada semiring ternari dengan semiring ternari faktor.

4.1 Bentuk Ideal pada Semiring Ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$

Dinotasikan $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+ = (\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ adalah semiring dengan penjumlahan dan perkalian pada operasi biner dan $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^- = (\mathbb{Z}_0^-, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_0^-, +, \cdot)$ merupakan semiring ternari dengan penjumlahan pada operasi biner dan perkalian pada operasi terner. Untuk sebarang $A \subseteq \mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ dengan $A^* = \{(n, m) : (-n, -m) \in A\}$.

Berikut merupakan bentuk ideal pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$:

Lemma 4.1.1. *Diberikan I merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, dengan demikian :*

(a) *I adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika I^* adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$*

(b) *I adalah Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika I^* adalah Q^*-ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$*

(c) *I adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika I^* adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$*

(d) *Jika $I \subseteq A$ adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, maka A adalah ideal perluasan subtraktif dari I pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika A^* adalah ideal perluasan subtraktif dari I^* pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$.*

Bukti :

(a) *I adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika I^* adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$*

$(\Rightarrow)$

Diketahui I adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$. Akan dibuktikan $I^* = \{(a,b)|(-a,-b) \in I\}$ adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$.

Bukti :

(1) Ambil $(a,b),(c,d) \in I^*$ artinya $(-a,-b),(-c,-d) \in I$. Karena I adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, maka :
$(-a,-b) + (-c,-d) = \big(-(a+c), -(b+d)\big) \in I$
Akibatnya
$(a+c, b+d) \in I^*$
Sehingga :
$(a+b) + (c+d) = (a+c, b+d) \in I^*$

(2) Ambil $(r_1, r_2) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ dan $(a,b) \in I^*$, artinya $(-r_1, -r_2), (-s_1, -s_2) \in \mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ dan $(-a,-b) \in I$. Karena I adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, maka :
$(-1,-1)(-r_1,-r_2)(-a,-b) = (-r_1 a, -r_2 b) \in I$
Akibatnya
$(r_1 a, r_2 b) \in I^*$
Sehingga :
$(r_1, r_2)(a,b) = (r_1 a, r_2 b) \in I^*$
Karena $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ bersifat komutatif, maka :
$(a,b)(r_1,r_2) = (ar_1, br_2) \in I^*$
Oleh karena (1) dan (2) memenuhi sifat ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, maka terbukti bahwa I^* adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$.

$(\Leftarrow)$

Diketahui $I^* = \{(a,b)|(-a,-b) \in I\}$ ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$. Akan dibuktikan I adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.

Bukti :

(1) Ambil $(-a,-b),(-c,-d) \in I$ artinya $(a,b),(c,d) \in I^*$. Karena I^* adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, maka :
$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \in I^*$
Akibatnya
$(-(a+c), -(b+d)) \in I$
Sehingga :
$(-a + (-b)) + (-c + (-d)) = (-(a+c), -(b+d)) \in I$

(2) Ambil $(-r_1, -r_2), (-s_1, -s_2) \in \mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ dan $(-a, -b) \in I$ artinya $(r_1, r_2), (s_1, s_2) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ dan $(a, b) \in I^*$. Karena I^* adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, maka :
$(r_1, r_2)(s_1, s_2)(a, b) = (r_1 s_1 a, r_2 s_2 b) \in I^*$
Akibatnya
$(-r_1 s_1 a, -r_2 s_2 b) \in I$
Sehingga :
$(-r_1, -r_2)(-s_1, -s_2)(-a, -b) = (-r_1 s_1 a, -r_2 s_2 b) \in I$
Karena $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ bersifat komutatif, maka :
$(-r_1, -r_2)(-a, -b)(-s_1, -s_2) = (-r_1 a s_1, -r_2 b s_2) \in I$
dan
$(-a, -b)(-r_1, -r_2)(-s_1, -s_2) = (-a r_1 s_1, -b r_2 s_2) \in I$
Oleh karena (1) dan (2) memenuhi sifat ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, maka terbukti bahwa I adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.

(b) *I adalah Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika I^* adalah Q^*-ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$*
$(\Rightarrow)$
Diketahui I adalah Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$. Akan dibuktikan I^* adalah Q^*-ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$.
Bukti :
(1) Karena I adalah Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, maka berlaku bahwa :
$\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^- = \bigcup\{(-q_1, -q_2) + I | (-q_1, -q_2) \in Q\}$
Akibatnya
$\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+ = \bigcup (q_1, q_2) + I^* | (q_1, q_2) \in Q^*\}$
(2) Ambil $(-q_1, -q_2), (-q_3, -q_4) \in Q$. Karena I adalah Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, maka berlaku bahwa :
$(-q_1, -q_2) + I \bigcap (-q_3, -q_4) + I \neq \emptyset \Leftrightarrow (-q_1, -q_2) = (-q_3, -q_4)$.
Akibatnya, untuk $(q_1, q_2), (q_3, q_4) \in Q^*$ maka :
$(q_1, q_2) + I \bigcap (q_3, q_4) + I^* \neq \emptyset \Leftrightarrow (q_1, q_2) = (q_3, q_4)$
Oleh karena (1) dan (2) memenuhi sifat Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, maka terbukti bahwa I^* adalah Q^*-ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$.

(⇐)
Diketahui I^*adalah Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$. Akan dibuktikan I adalah Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.
Bukti :
(1) Karena I^* adalah Q^*-ideal pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, maka berlaku bahwa :
$\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+ = \bigcup\{(q_1, q_2) + I | (q_1, q_2) \in Q^*\}$
Akibatnya
$\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^- = \bigcup(-q_1, -q_2) + I | (-q_1, -q_2) \in Q\}$
(2) Ambil $(q_1, q_2), (q_3, q_4) \in Q^*$. Karena I^* adalah Q^*-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, maka berlaku bahwa :
$\{(q_1, q_2) + I^*\} \cap \{(q_3, q_4) + I^*\} \neq \emptyset \Leftrightarrow (q_1, q_2) = (q_3, q_4)$.
Akibatnya, untuk $(-q_1, -q_2), (-q_3, -q_4) \in Q$ maka :
$\{(-q_1, -q_2) + I\} \cap \{(-q_3, -q_4) + I\} \neq \emptyset \Leftrightarrow (-q_1, -q_2) = (-q_3, -q_4)$
Oleh karena (1) dan (2) memenuhi sifat Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, maka terbukti bahwa I adalah Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.

(c) *I adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika I^* adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$*
(⇒)
Diketahui I adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$. Akan dibuktikan $I^* = \{(a, b) | (-a, -b) \in I\}$ adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$.
Bukti :
Ambil $(a, b), (a, b) + (r_1, r_2) \in I^*$ dan $(r_1, r_2) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ artinya $(-a, -b), (-(a + r_1), -(b + r_2)) \in I$ dan $(-r_1, -r_2) \in \mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.
Sehingga :
$\big(-(a + r_1), -(b + r_2)\big) = (-a, -b) + (-r_1, -r_2) \in I$
Karena I adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, maka $(-r_1, -r_2) \in I$. Akibatnya $(r_1, r_2) \in I^*$, sehingga terbukti bahwa I^* merupakan ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$.

$(\Leftarrow)$
Diketahui $I^* = \{(a,b)|(-a,-b) \in I\}$ adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$. Akan dibuktikan I adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.
Bukti :
Ambil$(-a,-b), (-a,-b) + (-r_1,-r_2) = (-(a+r_1), -(b+r_2)) \in I$ dan $(-r_1,-r_2) \in \mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ artinya $(a,b), (a+r_1, b+r_2) \in I^*$ dan $(r_1,r_2) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$.
Sehingga :
$(a+r_1, b+r_2) = (a,b) + (r_1,r_2) \in I^*$
Karena I^* adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, maka $(r_1,r_2) \in I^*$. Akibatnya $(-r_1,-r_2) \in I$, sehingga terbukti bahwa I merupakan ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.

(d) *Jika $I \subseteq A$ adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, maka A adalah ideal perluasan subtraktif dari I pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika A^* adalah ideal perluasan subtraktif dari I^* pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$.*
$(\Rightarrow)$
Diketahui $I \subseteq A$, dimana I, A ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ dan A adalah ideal perluasan subtraktif dari I. Akan dibuktikan $A^* = \{(a,b)|(-a,-b) \in A\}$ adalah ideal perluasan subtraktif dari I^* pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$.
Bukti :
Ambil $(a,b) \in I^*$ dan $(a,b) + (r_1,r_2) = (a+r_1, b+r_2) \in A^*$ artinya $(-a,-b) \in I$ dan $\big(-(a+r_1), -(b+r_2)\big) \in A$.
Sehingga :
$(-a,-b) + (-r_1,-r_2) = \big(-(a+r_1), -(b+r_2)\big) \in A$
Karena A adalah ideal perluasan subtraktif pada I, maka $(-r_1,-r_2) \in A$. Dengan kata lain $(r_1,r_2) \in A^*$.
$(\Leftarrow)$
Diketahui $A^* = \{(a,b)|(-a,-b) \in A\}$ adalah ideal perluasan subtraktif dari I^* pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ dan $I \subseteq A$, dimana I, A ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$. Akan dibuktikan A adalah ideal perluasan subtraktif dari I.

Bukti :
Ambil $(-a,-b) \in I$ dan $(-a,-b)+(-r_1,-r_2) = (-(a+r_1),-(b+r_2)) \in A$ artinya $(a,b) \in I^*$ dan $(a+r_1,b+r_2) \in A^*$.
Sehingga :
$(a,b)+(r_1,r_2) = (a+r_1,b+r_2) \in A^*$
Karena A^* adalah ideal perluasan subtraktif pada I^*, maka $(r_1,r_2) \in A^*$. Dengan kata lain $(-r_1,-r_2) \in A$.

Berdasarkan Lemma 4.1.1 dan Lemma 2.2.10 maka diperoleh akibat sebagai berikut:

Akibat 4.1.2[5]. *Diberikan I subset dari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, dengan demikian :*
(a) *I adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika $I = J_1 \times J_2$ dimana J_1, J_2 adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^-$.*
(b) *I adalah ideal utama pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika $I = J_1 \times J_2$ dimana J_1, J_2 adalah ideal utama pada $\mathbb{Z}_0^-$.*
(c) *I adalah Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika $I = J_1 \times J_2$ dimana J_1, J_2 adalah Q_1, Q_2-ideal pada $\mathbb{Z}_0^-$ dengan $Q = Q_1 \times Q_2$.*
(d) *I adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ jika dan hanya jika $I = J_1 \times J_2$ dimana J_1, J_2 adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^-$.*

Dari Lemma 4.1.1, Akibat 4.1.2 dan Teorema 2.2.11 maka diperoleh :

Akibat 4.1.3[5]. *Diberikan I adalah ideal dari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$, maka pernyataan berikut ekivalen :*
(a) *I adalah ideal utama*
(b) *I adalah Q-ideal*
(c) *I adalah ideal subtraktif*

Berikut contoh mengenai ideal utama, Q-ideal dan ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.

Contoh 4.1.4 Misalkan himpunan $\langle -3 \rangle$ dan $\langle -4 \rangle$ merupakan ideal pada $\mathbb{Z}_0^-$, dimana $\langle -3 \rangle = \{-3m_1m_2 | m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_0^-\} = \{-3k_1 | k_1 \in \mathbb{Z}_0^+\}$ dan $\langle -4 \rangle = \{-4n_1n_2 | n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_0^-\} = \{-4k_2 | k_2 \in \mathbb{Z}_0^+\}$, dengan $Q_1 = \{0, -1, -2\}$ dan $Q_2 = \{0, -1, -2, -3\}$. Menurut Akibat 4.1.3 diperoleh :

a. $I = \langle -3 \rangle \times \langle -4 \rangle$ merupakan ideal utama pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ dengan bentuk $I = \langle (-3, -4) \rangle$
b. $I = \langle -3 \rangle \times \langle -4 \rangle$ merupakan Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ dengan bentuk partisi $(q_1, q_2) + \langle -3 \rangle \times \langle -4 \rangle$ dengan $q_1 \in Q_1$ dan $q_2 \in Q_2$
c. $I = \langle -3 \rangle \times \langle -4 \rangle$ adalah ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ dengan bentuk :

$$\begin{aligned} I &= \langle -3 \rangle \times \langle -4 \rangle \\ &= \{(m_1m_2(-3), n_1n_2(-4) | m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_0^-\} \\ &= \{(-3k_1, -4k_2 | k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0^+\} \end{aligned}$$

Selanjutnya, dari Lemma 4.1.1 (d) dan Lemma 2.3.1 maka diperoleh akibat :

Akibat 4.1.4[5]. *Diberikan $I \subseteq A$ adalah ideal pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$. Maka A adalah ideal perluasan subtraktif jika dan hanya jika $A = A_1 \times A_2$ dimana ideal A_i adalah ideal perluasan subtraktif dari $J_i (i = 1,2)$ pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^-$ dengan $I = J_1 \times J_2$.*

4.2 Ideal Perluasan Subtraktif Terkecil pada Semiring Ternari

Pada penelitian J.N Chaudhari dan K.J. Ingale [5] diperkenalkan bentuk ideal baru yaitu ideal perluasan subtraktif terkecil. Berikut diberikan beberapa notasi yang berkaitan dengan ideal perluasan subtraktif terkecil pada semiring ternari.

Diberikan I, A adalah ideal pada semiring ternari S yang memenuhi $I \subseteq A$, maka :

1. $\overline{A_I} = \{x \in S \mid x + i \in A$ untuk suatu $i \in I\}$ dinamakan tertutup dari A terhadap I.
2. $\widetilde{A} = \{x \in S \mid q + I \in S/I_{(Q)}$ dimana $x \in q + I$ dan $(q + I) \cap A \neq \emptyset\}$ dinamakan tertutup dari A terhadap $I_{(Q)}$ dengan I adalah Q-ideal pada S.
3. $\overline{A} = \{x \in S \mid x + y \in A$ untuk suatu $y \in A\}$ dinamakan k-tertutup dari A.

   Berikut diberikan sebagai contoh :

Contoh 4.2.1 Diberikan $I = \langle -4 \rangle = \{-4k \mid k \in \mathbb{Z}_0^+\}$ dan $A = \langle -2, -5 \rangle = \mathbb{Z}_0^- - \{-1, -3\}$ adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^-$.
Secara jelas bahwa $A \subseteq \overline{A_I}$. Perhatikan bahwa $-4 \in I$ sehingga :

i. $-1 + -4 = -1 - 4 = -5 \in A$, maka $-1 \in \overline{A_I}$
ii. $-3 + -4 = -3 - 4 = -7 \in A$, maka $-3 \in \overline{A_I}$

Sehingga diperoleh bahwa $\overline{A_I} \subseteq A$, dengan kata lain $\overline{A_I} = \mathbb{Z}_0^-$.

Contoh 4.2.2 Misalkan $I = \langle -3 \rangle = \{-3k | k \in \mathbb{Z}_0^+\}$ dan $A = \langle -3, -5 \rangle = \mathbb{Z}_0^- - \{-1, -2, -4, -7\}$ adalah ideal pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^-$, maka I adalah Q-ideal pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^-$ dengan $Q = \{0, -1, -2\}$ dan $I \subseteq A$. Sehingga berbentuk :

i. $I + 0 = I = \{-3k | k \in \mathbb{Z}_0^+\}$
ii. $I + -1 = I - 1 = \{-3k - 1 | k \in \mathbb{Z}_0^+\}$
iii. $I + -2 = I - 2 = \{-3k - 2 | k \in \mathbb{Z}_0^+\}$

dan

i. $I + 0 \cap A \neq \emptyset$, maka $I + 0 \subseteq \widetilde{A}$
ii. $I + -1 \cap A = I - 1 \cap A \neq \emptyset$, maka $I - 1 \subseteq \widetilde{A}$
iii. $I + -2 \cap A = I - 2 \cap A \neq \emptyset$, maka $I - 2 \subseteq \widetilde{A}$

Sehingga diperoleh, $I + 0 \cup I - 1 \cup I - 2 = \mathbb{Z}_0^- \subseteq \widetilde{A}$, maka $\widetilde{A} = \mathbb{Z}_0^-$.

Selanjutnya diberikan teorema mengenai ideal perluasan subtraktif berikut :

Teorema 4.2.3. *Diberikan $I \subseteq A$ adalah ideal pada semiring ternari S. Maka $\overline{A_I}$ adalah ideal perluasan subtraktif terkecil dari I yang memuat A.*

Bukti :

Untuk membuktikan $\overline{A_I}$ adalah ideal perluasan subtraktif terkecil pada I yang memuat A terdapat beberapa tahap, yaitu sebagai berikut :

1. Akan ditunjukkan bahwa $\overline{A_I}$ adalah ideal pada semiring ternari S. Maka :
   Ambil $x_1, x_2 \in \overline{A_I}$ dan $r, s \in S$, terdapat $i_1, i_2 \in I$. Sedemikian hingga :
   $x_1 + i_1,\ x_2 + i_2 \in A$
   Oleh karena $I \subseteq A$ adalah ideal pada semiring ternari S, maka :
   $(x_1 + x_2) + (i_1 + i_2) = x_1 + i_1 + x_2 + i_2 \in A$
   dimana $i_1 + i_2 \in I$. Mengakibatkan $x_1 + x_2 \in \overline{A_I}$. Dengan cara yang sama terdapat $i_1, i_2, i_3 \in I$ sehingga :
   $(r + i_1)(s + i_2)(x_1 + i_3) = (rs + ri_2 + i_1 s + i_1 i_2)(x_1 + i_3)$
   $= rsx_1 + rsi_3 + ri_2 x_1 + ri_2 i_3 + i_1 s x_1 + i_1 s i_3 + i_1 i_2 x_1 + i_1 i_2 i_3$
   Karena $rsi_3 + ri_2 x_1 + ri_2 i_3 + i_1 s x_1 + i_1 s i_3 + i_1 i_2 x_1 + i_1 i_2 i_3$ tertutup terhadap I, maka :
   $rsx_1 + rsi_3 + ri_2 x_1 + ri_2 i_3 + i_1 s x_1 + i_1 s i_3 + i_1 i_2 x_1 + i_1 i_2 i_3 \in A$
   Mengakibatkan $rsx_1 \in \overline{A_I}$. Karena semiring ternari bersifat komutatif maka $rx_1 s,\ x_1 sr \in \overline{A_I}$. Maka terbukti $\overline{A_I}$ merupakan ideal pada semiring ternari S.
2. Secara jelas diperoleh bahwa $A \subseteq \overline{A_I}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\overline{A_I}$ adalah ideal perluasan subtraktif pada I. Maka :
   Ambil $i \in I$, $x + i \in \overline{A_I}$, $x \in S$, terdapat $i' \in I$ sedemikian hingga $x + i + i' \in A$. Oleh karena $i + i' \in I$ dan $x \in \overline{A_I}$, maka terbukti $\overline{A_I}$ merupakan ideal perluasan subtraktif pada I.
3. Selanjutnya, misalkan J adalah ideal perluasan subtraktif pada I yang memuat A dan $x \in \overline{A_I}$, terdapat $i \in I$ sedemikian

hingga $x + i \in A \subseteq J$. Oleh karena J merupakan ideal perluasan subtraktif pada I maka dalam hal ini terlihat jelas bahwa $x \in J$, sehingga $\overline{A_I} \subseteq J$.

Dari pembahasan di atas, terbukti bahwa $\overline{A_I}$ merupakan ideal perluasan terkecil pada I yang memuat A.

Berdasarkan Teorema 4.2.3 diperoleh akibat berikut ini :

Akibat 4.2.4.[5] *Diberikan $I \subseteq A$ adalah ideal pada semiring ternari S. Dengan demikian :*
$\overline{A_I} = \bigcap\{J : J$ *adalah ideal perluasan subtraktif pada* I *yang memuat* $A\}$

Teorema 4.2.5. *Diberikan I, A, B adalah ideal pada semiring ternari S, sedemikian hingga $I \subseteq A, B$. Dengan demikian :*

(a) *A adalah ideal perluasan subtraktif pada $I \Leftrightarrow \overline{A_I} = A$*

(b) $\overline{(\overline{A_I})_I} = \overline{A_I}$.

(c) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A_I} \subseteq \overline{B_I}$.

(d) $\overline{(A \cap B)_I} = \overline{A_I} \cap \overline{B_I}$.

(e) *Jika A, B adalah ideal perluasan subtraktif pada I, maka $A \cap B$ adalah ideal perluasan subtraktif pada I*

(f) *Jika J adalah ideal pada semiring ternari S, sedemikian hingga $I \subseteq J \subseteq A$, maka $\overline{A_I} \subseteq \overline{A_J}$.*

Bukti :

(a) Dari Teorema 4.2.3, maka berlaku A adalah ideal perluasan subtraktif pada $I \Leftrightarrow \overline{A_I} = A$

(b) Dengan mengikuti Teorema 4.2.3 dan Teorema 4.2.5(a) , maka terbukti bahwa $\overline{(\overline{A_I})_I} = \overline{A_I}$.

(c) Diketahui bahwa $A \subseteq B$, akan dibuktikan bahwa $\overline{A_I} \subseteq \overline{B_I}$.

Bukti :

Ambil $x \in \overline{A_I}$, artinya $x + i \in A$ dengan $i \in I$. Oleh karena berlaku $A \subseteq B$, maka diperoleh $x + i \in B$ sehingga mengakibatkan $x \in \overline{B_I}$. Dengan demikian $\overline{A_I} \subseteq \overline{B_I}$.

(d) Akan dibuktikan $\overline{(A \cap B)_I} = \overline{A_I} \cap \overline{B_I}$.

Bukti :

Perhatikan bahwa $A \cap B \subseteq A$ dan $A \cap B \subseteq B$. Dengan mengikuti Teorema 4.2.5(c), maka diperoleh $\overline{(A \cap B)_I} \subseteq \overline{A_I}$ dan $\overline{(A \cap B)_I} \subseteq \overline{B_I}$. Sehingga diperoleh $\overline{(A \cap B)_I} \subseteq \overline{A_I} \cap \overline{B_I}$.
Selanjutnya ambil $x \in \overline{A_I} \cap \overline{B_I}$, dengan kata lain $x \in \overline{A_I}$ atau $x \in \overline{B_I}$. Sehingga $x + i \in A$ atau $x + i \in B$ dimana $i \in I$. Mengakibatkan $x + i \in A \cap B$. Maka diperoleh $x \in \overline{(A \cap B)_I}$.
Dengan demikian didapat $\overline{A_I} \cap \overline{B_I} \subseteq \overline{(A \cap B)_I}$
Dikarenakan $\overline{(A \cap B)_I} \subseteq \overline{A_I} \cap \overline{B_I}$ dan $\overline{A_I} \cap \overline{B_I} \subseteq \overline{(A \cap B)_I}$ maka terbukti bahwa $\overline{(A \cap B)_I} = \overline{A_I} \cap \overline{B_I}$.

(e) Dengan mengikuti Akibat 4.2.4 maka terbukti bahwa $A \cap B$ adalah ideal perluasan subtraktif pada I.

(f) Diketahui J adalah ideal pada semiring ternari S, sedemikian hingga $I \subseteq J \subseteq A$, maka akan dibuktikan bahwa $\overline{A_I} \subseteq \overline{A_J}$.
Bukti :
Ambil $x \in \overline{A_I}$, terdapat $i \in I$ sedemikian hingga $x + i \in A$. Telah diketahui sebelumnya bahwa J adalah ideal pada semiring ternari S yang memenuhi $I \subseteq J \subseteq A$ maka dalam hal ini terlihat bahwa $i \in J$, dengan $x + i \in A$. Dengan kata lain $x \in \overline{A_J}$. Sehingga terbukti bahwa $\overline{A_I} \subseteq \overline{A_J}$.

Dari Teorema 4.2.5 diperoleh akibat :

Akibat 4.2.6[5]. *Diberikan A, B adalah ideal pada semiring ternari S. Maka $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.*

Bukti :

Perhatikan bahwa $A \cap B \subseteq A$ atau $A \cap B \subseteq B$. Dengan menggunakan Teorema 4.2.5 (c), maka $\overline{A \cap B} = \overline{(A \cap B)_{(A \cap B)}} \subseteq \overline{A_{(A \cap B)}}$ atau $\overline{A \cap B} = \overline{(A \cap B)_{(A \cap B)}} \subseteq \overline{B_{(A \cap B)}}$.
Selanjutnya dengan mengikuti Teorema 4.2.5(f), maka diperoleh bahwa $\overline{A_{(A \cap B)}} \subseteq \overline{A_A} = \overline{A}$ atau $\overline{B_{(A \cap B)}} \subseteq \overline{B_B} = \overline{B}$. Akibatnya, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$ atau $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$. Dengan kata lain $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Selanjutnya diberikan lemma mengenai hubungan antara $\overline{A_I}$ dan $\widetilde{A}$.

Lemma 4.2.7. *Diberikan I adalah Q-ideal pada semiring ternari S dan A adalah ideal pada S dengan $I \subseteq A$. Maka $\overline{A_I} = \widetilde{A}$.*
Bukti :
Diketahui I adalah Q-ideal pada semiring ternari S dan A adalah ideal pada S yang memenuhi $I \subseteq A$. Akan dibuktikan bahwa $\overline{A_I} = \widetilde{A}$. Ambil $x \in \overline{A_I}$, terdapat $i_1 \in I$ sedemikian hingga $x + i_1 \in A$. Menurut Lemma 2.4.11 terdapat $q \in Q$, sedemikian hingga $x \in q + I$. Maka $x = q + i_2$ untuk $i_2 \in I$. Akibatnya $x + i_i = q + i_2 + i_1 \in q + I$, sehingga $(q + I) \cap A \neq \emptyset$. Oleh karena itu $x \in \widetilde{A}$, mengakibatkan $\overline{A_I} \subseteq \widetilde{A}$. Di sisi lain ambil $z \in \widetilde{A}$, terdapat $q + I \in S/I_{(Q)}$ sedemikian hingga $z \in q + I$ dan $(q + I) \cap A \neq \emptyset$. Akibatnya $z = q + i'$ untuk $i' \in I$. Karena $(q + I) \cap A \neq \emptyset$, maka terdapat $y = q + i'' \in (q + I) \cap A$ dimana $i'' \in I$. Oleh karena $i' \in I \subseteq A, q + i''$ dan A adalah ideal pada S, $z + i'' = q + i' + i'' \in A$ yang memenuhi $z \in \overline{A_I}$ maka $\widetilde{A} \subseteq \overline{A_I}$. Jadi terbukti bahwa $\overline{A_I} = \widetilde{A}$.

Contoh 4.2.8 Misalkan $I = \langle -8 \rangle \times \langle -2 \rangle$ dan $A = \langle -4 \rangle \times \langle -2, -3 \rangle$ adalah ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$. Menurut Akibat 4.1.2 dan Akibat 4.1.3, I adalah Q-ideal pada $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ dengan $Q = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7\} \times \{0, -1\}$ dan terlihat jelas bahwa $I \subseteq A$. Perhatikan bahwa $(-8, -2) \in I$, $(-8, -2) + (-4, -1) = (-12, -3) \in A$, akan tetapi $(-4, -1) \notin A$ sehingga A bukan ideal perluasan subtraktif dari I. Kemudian dari definisi $\widetilde{A}$, didapat bahwa $\widetilde{A} = \langle -4 \rangle \times \mathbb{Z}_0^-$, maka jelas bahwa $\widetilde{A}$ adalah ideal perluasan subtraktif terkecil dari I.

Dari Teorema 4.2.3 dan Lemma 4.2.7, maka diperoleh akibat :

Akibat 4.2.9[5]. *Diberikan I adalah Q-ideal pada semiring ternari S dan A adalah ideal pada S dengan $I \subseteq A$. Maka $\widetilde{A}$ adalah ideal perluasan subtraktif terkecil pada I yang memuat A.*
Lemma 4.2.10. *Diberikan I adalah Q-ideal pada semiring ternari S dan A adalah ideal pada S dengan $I \subseteq A$. Maka A*

adalah ideal perluasan subtraktif pada I jika dan hanya jika I adalah $Q \cap A$-ideal pada A.

Bukti :

($\Rightarrow$)

Diketahui bahwa A adalah ideal perluasan subtraktif pada I, maka akan dibuktikan bahwa I adalah $Q \cap A$-ideal pada A.

Bukti :

1. Ambil $a \in A$, telah diketahui sebelumnya bahwa I adalah Q-ideal pada semiring ternari S, dengan demikian secara tunggal terdapat $q \in Q$ yang memenuhi $a \in q + I$ sehingga berlaku $a = q + i$ untuk $i \in I$. Oleh karena A adalah ideal perluasan subtraktif pada I, maka diperoleh $q \in A$. Akibatnya $q \in Q \cap A$, sehingga diperoleh $A \subseteq \bigcup\{q + I : q \in Q \cap A\}$.
   Selanjutnya ambil sebarang $b \in \bigcup\{q + I : q \in Q \cap A\}$, artinya terdapat $q \in Q \cap A$ sedemikian hingga $b \in q + I$ sehingga $b = q + i$ untuk suatu $i \in I$. Oleh karena $q \in A$ dan $i \in I \subseteq A$ akibatnya $b = q + i \in A$. Jadi diperoleh $A = \bigcup\{q + I : q \in Q \cap A\}$.
2. Ambil sebarang $q_1, q_2 \in Q \cap A$. Dikarenakan I adalah Q-ideal pada semiring ternari S, maka dengan demikian berlaku $(q_1 + I) \cap (q_2 + I) \neq \emptyset \Leftrightarrow q_1 = q_2$.

Oleh karena memenuhi 1. dan 2., maka terbukti bahwa I adalah $Q \cap A$-ideal pada A.

($\Leftarrow$)

Diketahui bahwa I adalah $Q \cap A$-ideal pada A, maka akan dibuktikan bahwa A adalah ideal perluasan subtraktif pada I.

Bukti :

Ambil $x \in I$ dan $x + y \in A$, dan $y \in S$, karena $x + y \in A$ dan I adalah $Q \cap A$-ideal pada A maka terdapat secara tunggal $q \in Q \cap A$ sedemikian hingga $x + y \in I + q$. Akibatnya, $I + x + y \subseteq I + q$. Oleh karena $x \in I$, maka $I + y \subseteq I + q$, sehingga $y = y + 0 \in y + I \subseteq I + q \subseteq A$. Sehingga terbukti bahwa A adalah ideal perluasan subtraktif dari I pada semiring ternari S.

4.3 Ideal pada Semiring Ternari Faktor

Hubungan keterkaitan antara ideal perluasan subtraktif dengan Q-ideal tidak hanya ada pada semiring ternari, namun juga dapat diperluas pada semiring ternari faktor. Berikut ini diberikan beberapa teorema yang menjelaskan hubungan ideal – ideal tersebut.

Teorema 4.3.1. *Diberikan $I \subseteq A$ adalah ideal pada semiring ternari S dan I adalah Q-ideal pada S. Dengan demikian pernyataan berikut ekivalen :*

(a) *A adalah perluasan subtraktif dari I*

(b) *I adalah $Q \cap A$-ideal dari A*

(c) *$A \,/\, I_{(Q \cap A)}$ adalah ideal pada semiring ternari $S \,/\, I_{(Q)}$.*

Bukti :

(a)⇒ (b)

Bukti menggunakan Lemma 4.2.7

(b)⇒ (c)

Akan ditunjukkan bahwa $A \,/\, I_{(Q \cap A)}$ adalah ideal pada semiring ternari $S \,/\, I_{(Q)}$.

Jelas bahwa $A \,/\, I_{(Q \cap A)} \subseteq S \,/\, I_{(Q)}$, dimana untuk sebarang $q + I \in A \,/\, I_{(Q \cap A)}$ dengan $q \in Q \cap A$ sehingga berakibat $q + I \in S \,/\, I_{(Q)}$ dengan $q \in Q$. Selanjutnya ambil $a_1 + I, a_2 + I \in A \,/\, I_{(Q \cap A)}$ dan $r + I, s + I \in S \,/\, I_{(Q)}$ dengan $a_1, a_2 \in Q \cap A$ dan $r, s \in Q$. Selanjutnya :

1. $(a_1 + I) \oplus (a_2 + I) = (a_3 + I)$ dimana $a_1 + a_2 + I \subseteq a_3 + I$ untuk suatu $a_3 \in Q$. Dengan demikian berlaku $a_1 + a_2 + i_1 = a_3 + i_2$ untuk suatu $i_1, i_2 \in I$. Sebagaimana diketahui bahwa A adalah ideal pada semiring ternari S dengan $I \subseteq A$, sehingga diperoleh $a_1 + a_2 + i_1 \in A$ dan berakibat $a_3 + i_2 \in A$. Telah diketahui juga sebelumnya bahwa I adalah $Q \cap A$-ideal, menurut Lemma 4.2.7 diperoleh bahwa A adalah ideal perluasan subtraktif dari I, sehingga dari $a_3 + i_2 \in A$ diperoleh $a_3 \in A$ dan berakibat

$a_3 \in Q \cap A$. Oleh karena itu $a_3 + I \in A \,/\, I_{(Q \cap A)}$ atau $(a_1 + I) \oplus (a_2 + I) \in A \,/\, I_{(Q \cap A)}$.

2. $(r + I) \odot (s + I) \odot (a_1 + I) = (a_4 + I)$ dimana $rsa_1 + I \subseteq a_4 + I$ untuk setiap $a_4 \in Q$. Dengan demikian berlaku $rsa_1 + i_3 = a_4 + i_4$ untuk setiap $i_3, i_4 \in I$. Oleh karena A adalah ideal pada semiring ternari S dengan $I \subseteq A$, sehingga diperoleh $rsa_1 + i_3 \in A$ berakibat $a_4 + i_4 \in A$. Selanjutnya, dikarenakan I adalah $Q \cap A$-ideal maka menurut Lemma 4.2.7 diperoleh bahwa A adalah ideal perluasan subtraktif dari I, sehingga melalui $a_4 + i_4 \in A$ diperoleh bahwa $a_4 \in A$ dan berakibat $a_4 \in Q \cap A$. Oleh karena itu $a_4 + I \in A \,/\, I_{(Q \cap A)}$ atau $(r + I) \odot (s + I) \odot (a_1 + I) \in A \,/\, I_{(Q \cap A)}$.

Karena memenuhi 1. dan 2., maka terbukti bahwa $A \,/\, I_{(Q \cap A)}$ adalah ideal pada semiring ternari $S \,/\, I_{(Q)}$.

(c)$\Rightarrow$ (a)

Akan ditunjukkan bahwa A adalah ideal perluasan subtraktif dari I. Ambil sebarang $x \in I, x + y \in A$ dan $y \in S$. Oleh karena setiap semiring adalah semiring ternari dan ideal perluasan subtraktif menggunakan operasi biner terhadap penjumlahan sehingga dengan menggunakan Teorema 2.3.6 diperoleh bahwa $x \in q_0 + I$ dimana $q_0 + I$ adalah elemen nol di $S \,/\, I_{(Q)}$. Menurut Definisi 2.4.13, terdapat secara tunggal $q_1 + I \in A \,/\, I_{(Q \cap A)}$ dan $q_2 + I \in S \,/\, I_{(Q)}$ yang memenuhi $x + y \in q_1 + I$ dan $y \in q_2 + I$. Di sisi lain, perhatikan bahwa $x + y \in (q_0 + I) \oplus (q_2 + I) = q_2 + I$ dimana $q_0 + q_2 + I \subseteq q_2 + I$. Oleh karena itu diperoleh bahwa $(q_1 + I) \cap (q_2 + I) \neq \emptyset$. Dikarenakan I adalah Q-ideal pada semiring ternari S, maka diperoleh $q_1 = q_2$ dimana $q_1, q_2 \in A$. Maka dengan demikian $y \in q_2 + I \subseteq A$ berakibat $y \in A$.

Sehingga terbukti bahwa A adalah ideal perluasan subtraktif dari I.

Teorema 4.3.2. *Diberikan I adalah Q-ideal pada semiring ternari S. Maka L adalah ideal pada $S \,/\, I_{(Q)}$ jika dan hanya jika* *terdapat A adalah ideal pada S sedemikian hingga A adalah ideal perluasan subtraktif dari I dan $A/I_{(Q\cap A)} = L$.*

Bukti :

($\Rightarrow$)

Diketahui L adalah ideal pada $S\ /\ I_{(Q)}$, maka akan ditunjukkan bahwa A adalah ideal perluasan subtraktif dari I dan $A/I_{(Q\cap A)} = L$.

Dinotasikan :

$A = \{x \in S | x + I \subseteq q + I \in L$ untuk suatu $q \in Q\}$

Terlihat jelas bahwa $A \subseteq S$, selanjutnya ambil sebarang $x, y \in A$ dan $r, s \in S$. Menurut Lemma 2.4.12 terdapat secara tunggal $q_1, q_2, q', q'' \in Q$ yang memenuhi $x + I \subseteq q_1 + I \in L, y + I \subseteq q_2 + I \in L$, $r + I \subseteq q' + I \in L$ dan $s + I \subseteq q'' + I \in L$. Oleh karena telah diketahui bahwa L adalah ideal pada $S\ /\ I_{(Q)}$, maka dengan demikian :

1. $(q_1 + I) \oplus (q_2 + I) = (q_3 + I) \in L$ dimana $q_1 + q_2 + I \subseteq q_3 + I$ untuk suatu $q_3 \in Q$. Dari $x + I \subseteq q_1 + I$ dan $y + I \subseteq q_2 + I$, diperoleh $x + I + y + I \subseteq q_1 + I + q_2 + I$. Dikarenakan I adalah ideal pada semiring ternari S maka didapat $x + y + I \subseteq q_1 + q_2 + I$. Selanjutnya perhatikan bahwa $x + y = x + y + 0 \in x + I + y + I$, sehingga diperoleh $x + y \in x + y + I \subseteq q_1 + q_2 + I \subseteq q_3 + I \in L$. Dengan demikian $x + y \in A$.
2. $(q' + I) \odot (q'' + I) \odot (q_1 + I) = (q_4 + I) \in L$ dimana $q'q''q_1 + I \subseteq q_4 + I$ untuk suatu $q_4 \in Q$. Oleh karena $r + I \subseteq q' + I$, $s + I \subseteq q'' + I$ dan $x + I \subseteq q_1 + I$, maka $(r + I)(s + I)(x + I) \subseteq (q' + I)(q'' + I)(q_1 + I)$. Dikarenakan I adalah ideal pada semiring ternari S, maka diperoleh $rsx + I \subseteq q'q''q_1 + I$. Oleh karena $rsx = rsx + 0 \in rsx + I$, sehingga $rsx \in rsx + I \subseteq q'q''q_1 + I \subseteq q_5 + I \in L$. Dengan demikian $rsx \in A$.

   Dengan menggunakan sifat komutatif, maka diperoleh bahwa $rxs, xrs \in A$.

Oleh karena memenuhi $x + y \in A$ dan $rsx, rxs, xrs \in A$ untuk sebarang $x, y \in A$ dan $r, s \in S$ maka diperoleh bahwa A adalah ideal pada semiring ternari S.
Selanjutnya ambil sebarang $a \in I$. Menurut Teorema 2.3.6 diperoleh bahwa $a \in q_0 + I \in L$ dengan $q_0 + I$ adalah elemen nol pada ideal L. Sehingga $a \in A$ dan berakibat $I \subseteq A$. Kemudian ambil sebarang $x \in I, x + y \in A$ dan $y \in S$. Dengan menggunakan Teorema 2.3.6, $x \in q_0 + I$ dengan $q_0 + I$ adalah elemen nol di $S \,/\, I_{(Q)}$. Karena $x + y \in A$, maka didapat $x + y \in x + y + I \subseteq q_6 + I \in L$. Selanjutnya karena $y \in S$, maka menurut Lemma 2.4.12 diperoleh bahwa $y = y + 0 \in y + I \subseteq q_7 + I$ untuk suatu $q_7 \in Q$. Perhatikan bahwa $x + y \in (q_0 + I) \bigoplus (q_7 + I) = (q_7 + I) \in L$ dimana $(q_6 + I) \bigcap (q_7 + I) \neq \emptyset$ dan $q_6 = q_7$. Dengan demikian $y \in q_7 + I = q_6 + I \in L$ dan mengakibatkan $y \in A$. Sehingga terbukti bahwa A adalah ideal perluasan subtraktif dari I.
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $A/I_{(Q \cap A)} = L$. Didefinisikan bahwa $A/I_{(Q \cap A)} = \{x + I | x \in Q \cap A\}$. Ambil sebarang $x + I \in A/I_{(Q \cap A)}$ dimana $x \in Q \cap A \subseteq A$, maka dengan demikian $x \in x + I \subseteq q_8 + I \in L$ untuk suatu $q_8 \in Q$. Akibatnya $A/I_{(Q \cap A)} \subseteq L$. Di sisi lain, ambil sebarang $q_9 + I \in L$ untuk suatu $q_9 \in Q$, akan ditunjukkan $q_9 + I \in A/I_{(Q \cap A)}$. Oleh karena $q_9 \in S$ dan $q_9 + I \subseteq q_9 + I \in L$, maka $q \in A$, akibatnya $q \in Q \cap A$ sehingga $q_9 + I \in A/I_{(Q \cap A)}$. Dengan kata lain terbukti bahwa $A/I_{(Q \cap A)} = L$.

($\Leftarrow$)
Akan ditunjukkan bahwa L adalah ideal pada $S/I_{(Q)}$. Oleh karena A adalah ideal perluasan subtraktif dari I dan berlaku bahwa $A/I_{(Q \cap A)} = L$, maka menurut Teorema 4.3.1, diperoleh bahwa L adalah ideal pada $S/I_{(Q)}$.

Teorema 4.3.3. *Diberikan S adalah semiring ternari, I adalah Q-ideal pada S dan P adalah ideal perluasan subtraktif dari I,* *maka P adalah ideal prima pada S jika dan hanya jika $P \,/\, I_{(Q\cap P)}$ adalah ideal prima pada $S \,/\, I_{(Q)}$.*

Bukti :

($\Rightarrow$)

Diketahui bahwa P adalah ideal prima pada S. Akan ditunjukkan bahwa ideal $P \,/\, I_{(Q\cap P)}$ adalah ideal prima pada $S \,/\, I_{(Q)}$. Ambil sebarang $q_1+I, q_2+I, q_3+I \in S/I_{(Q)}$ dengan $q_1, q_2, q_3 \in Q$, yang memenuhi $(q_1+I)\odot(q_2+I)\odot(q_3+I) = (q_4+I) \in P \,/\, I_{(Q\cap P)}$ untuk suatu $q_4 \in Q\cap P$ adalah elemen tunggal, sedemikian hingga $q_1q_2q_3 + i_1 = q_4 + i_2 \in P,$ untuk suatu $i_1, i_2 \in I$. Dikarenakan ideal P adalah ideal perluasan subtraktif dari I dan $q_1q_2q_3 + i_1 \in P$ maka diperoleh $q_1q_2q_3 \in P$. Selanjutnya, oleh karena ideal P adalah ideal prima pada semiring ternari S, maka diperoleh $q_1 \in P$ atau $q_2 \in P$ atau $q_3 \in P$. Oleh karena itu $q_1 \in Q\cap P$ atau $q_2 \in Q\cap P$ atau $q_3 \in Q\cap P$ dan diperoleh bahwa $q_1 + I \in P \,/\, I_{(Q\cap P)}$ atau $q_2 + I \in P \,/\, I_{(Q\cap P)}$ atau $q_3 + I \in P \,/\, I_{(Q\cap P)}$. Dengan demikian terbukti bahwa ideal $P \,/\, I_{(Q\cap P)}$ adalah ideal prima pada semiring ternari $S \,/\, I_{(Q)}$.

($\Leftarrow$)

Akan ditunjukkan bahwa ideal P adalah ideal prima pada semiring ternari S. Ambil sebarang $abc \in P$ dimana $a, b, c \in S$. Telah diketahui bahwa I adalah Q-ideal pada semiring ternari S, dengan demikian terdapat secara tunggal $q_1, q_2, q_3, q_4 \in Q$ yang memenuhi $a \in q_1 + I$, $b \in q_2 + I$ dan $c \in q_3 + I$ dan $abc \in (q_1+I)\odot(q_2+I)\odot(q_3+I) = (q_4+I)$ dimana $q_1q_2q_3 + I \subseteq q_4 + I$. Oleh karena $abc \in q_4 + I$, maka berlaku $abc = q_4 + i$ untuk suatu $i \in I$. Selanjutnya, oleh karena $abc \in P$, maka diperoleh $q_4 + i \in P$ untuk suatu $i \in I$. Telah diketahui sebelumnya bahwa P adalah ideal perluasan subtraktif dari I, maka diperoleh bahwa $q_4 \in P$, sehingga $q_4 \in Q\cap P$ dan berakibat $q_4 + I \in P \,/\, I_{(Q\cap P)}$. Dikarenakan ideal $P \,/\, I_{(Q\cap P)}$ adalah ideal prima pada semiring ternari $S \,/\, I_{(Q)}$, maka $(q_1+I)\odot(q_2+I)\odot(q_3+I) = (q_4+I) \in P \,/\, I_{(Q\cap P)}$.

Dengan demikian, diperoleh $a \in q_1 + I \in P \;/\; I_{(Q \cap P)}$ atau $b \in q_2 + I \in P \;/\; I_{(Q \cap P)}$ atau $c \in q_3 + I \in P \;/\; I_{(Q \cap P)}$ dimana $q_1, q_2, q_3 \in \; Q \cap P$. Sehingga berlaku bahwa $a = q_1 + i_1$ atau $b = q_2 + i_2$ atau $c = q_3 + i_3$ untuk suatu $i_1, i_2 i_3 \in I$. Di sisi lain, oleh karena ideal P adalah ideal pada semiring ternari S maka diperoleh$q_1 + i_1 \in P$ atau $q_2 + i_2 \in P$ atau $q_3 + i_3 \in P$. Akibatnya, $a \in P$ atau $b \in P$ atau $c \in P$. Sehingga terbukti bahwa ideal P adalah ideal prima pada semiring ternari S.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB V
PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan serta saran yang diberikan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

Dari analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Bentuk-bentuk ideal pada semiring ternari $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$ yaitu :
   a. Terdapat hubungan antara bentuk ideal, ideal utama, Q-ideal, dan ideal subtraktif pada $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ dengan $\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-$.
   b. Bentuk dari ideal utama, Q-ideal, ideal subtraktif, dan ideal perluasan subtraktif pada semiring ternari adalah ekivalen.
2. Karakteristik mengenai ideal perluasan subtraktif terkecil pada semiring ternari yaitu:
   a. Jika $I \subseteq A$ adalah ideal pada semiring ternari S, maka $\overline{A_I}$ adalah ideal perluasan subtraktif terkecil dari I yang memuat A.
   b. Jika I adalah Q-ideal pada semiring ternari S dan A adalah ideal pada S dengan $I \subseteq A$, maka $\overline{A_I} = \widetilde{A}$.
3. Jika I adalah Q-ideal pada semiring ternari S dan P adalah ideal perluasan subtraktif dari I, maka P adalah ideal prima pada S jika dan hanya jika $P \;/\; I_{(Q \cap P)}$ adalah ideal prima pada $S \;/\; I_{(Q)}$.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini hanya membahas tentang semiring ternari faktor pada ideal prima. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar penelitian selanjutnya bisa melakukan pembahasan terhadap ideal semiprima, prima lemah, primari dan primari lemah, ataupun terhadap bentuk ideal pada semiring ternari lainnya.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR PUSTAKA

[1] W.G. Lister. (1971). “Ternary Rings”. **Transactions of The American Mathematical Society Vol. 154**, Hal.37-55.

[2] T.K. Dutta, S. Kar. (2003). ”On Regular Ternary Semirings”. **Advances in Algebra Proceedings of The ICM Satellite Conference in Algebra and Related Topics, World Scientific**, Hal. 343-355.

[3] J.N. Chaudhari, K.J. Ingale. (2011). “On Partioning and Subtractive Ideals of Ternary Semirings”. **Kyungpook Math. Journal 51(1)**, Hal.69-76.

[4] S. Kar. (2011). “Ideal Theory in The Ternary Semirings $\mathbb{Z}_0^-$”. **Bull. Malays. Math. Scientific. Society (2) 34 (1)**, Hal.69-77.

[5] J.N Chaudhari, K.J. Ingale. (2016). “Subtractive Extension of Ideals in Ternary Semirings”. **Thai Journal of Mathematics**.

[6] T.K. Dutta, S. Kar (2005). “On Prime Ideals and Prime Radical of Ternary Semirings”. **Bull. Calcutta Math. Society. (5) 97**, Hal.445-454.

[7] J.N Chaudhari, D.R Bonde (2014). “Ideal Theory in Quotient Semirings”. **Thai Journal of Mathematics Vol. 12 (1)**, Hal.95-101.

[8] Atani, S.E. (2007). “The Ideal Theory in Quotient of Commutative Semirings”. **Glasnik Matematicki Vol. 42(62)**, Hal. 301-308.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama lengkap Nur Qomariah. Penulis dilahirkan di Jember pada tanggal 02 Juli 1994 dan merupakan anak kedua dari 5 bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal di MI Annidham, MTs Annidham, dan MA Darus Sholah. Setelah lulus dari MA, penulis melanjutkan studi di Matematika ITS melalui Jalur Kerjasama dengan Kementerian Agama NKRI, yaitu penerima beasiswa PBSB tahun 2012-2016. Pada masa perkuliahan penulis mengambil bidang matematika analisis dan aljabar untuk bidang yang diminati.

Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif mengikuti kegiatan organisasi intra kampus yaitu HIMATIKA ITS sebagai staf Departemen Perekonomian pada periode 2013-2014 dan staf Departemen Kewirausahaan pada periode 2014-2015, LDJ Matematika (Ibnu Muqlah) sebagai staf Departemen Syiar pada periode 2013-2014 dan 2014-2015. Selain itu, penulis juga aktif mengikuti organisasi ekstra kampus yaitu PMII Sepuluh Nopember sebagai staf Bidang II Pengabdian Masyarakat pada periode 2014-2015, CSSMoRA ITS sebagai staf Departemen Dedikasi dan Kesejahteraan Mahasantri pada periode 2013-2014, sebagai staf Departemen Hubungan Luar pada periode 2014-2015, dan sebagai Sekretaris & Bendahara Departemen Hubungan Luar pada periode 2015-2016.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari kekurangan. Oleh karena itu, kritik, saran, atau pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *email* ke nur.qomariah27@gmail.com.