



TUGAS AKHIR - SM141501

ANALISIS KUALITATIF PADA MODEL SIR DENGAN FUNGSI PENGOBATAN SATURASI

**FAZATIA AIDILA
NRP 1212 100 095**

**Dosen Pembimbing
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc**

**JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016**



FINAL PROJECT - SM141501

QUALITATIVE ANALYSIS OF SIR MODEL WITH SATURATED TREATMENT FUNCTION

**FAZATIA AIDILA
NRP 1211 100 081**

**Supervisor
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016**

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS KUALITATIF PADA MODEL SIR DENGAN FUNGSI PENGOBATAN SATURASI

QUALITATIVE ANALYSIS OF SIR MODEL WITH SATURATED TREATMENT FUNCTION

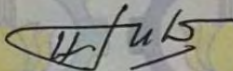
TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
Fazatia Aidila
NRP. 1212 100 095

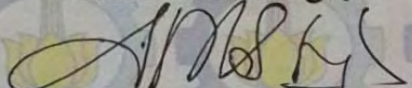
Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



Drs. Lukman Hanafi, M.Sc
NIP. 19640624 198803 1 001

Dosen Pembimbing I,



Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
NIP. 19640920 199002 1 002

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juni 2016

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan pada kehadiran Allah Swt. karena hanya dengan karunia rahmat, bimbingan, serta anugrah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **Analisis Kualitatif pada Model SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi.**

Dalam proses pembuatan Tugas Akhir ini, penulis mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT dan Ibu Dr. Dra Mardijah, MT selaku Ketua dan Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA-ITS yang telah memberi dukungan dan kemudahan pengurusan persyaratan-persyaratan selama penulis menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Drs. M. Setijo Winarko, M.Si. dan Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc. sebagai dosen pembimbing Tugas Akhir atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan pada penulis.
3. Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si, Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si dan Bapak M. Syifa'ul Mufid, S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan untuk perbaikan Tugas Akhir ini
4. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif S.Si, M.Si dan Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku Ketua dan Sekretaris Program Studi S1 Jurusan Matematika ITS yang telah memberi dukungan dan kemudahan pengurusan persyaratan-persyaratan selama penulis menyelesaikan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Alvida Mustika Rukmi, S.Si, M.Si selaku dosen wali penulis yang telah memberikan motivasi dan arahan akademik.
6. Bapak dan Ibu Dosen serta seluruh staf Tata Usaha dan Laboratorium Jurusan Matematika FMIPA-ITS.
7. Bapak Yasuhiro Takeuchi selaku narasumber jurnal yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan

informasi yang dibutuhkan penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir.

8. Keluarga tercinta terutama Bapak Yunus Budi Rahardjo dan Ibu Dini Andika, penulis ucapkan banyak terima kasih atas doa serta dukungan yang telah diberikan baik moral maupun material, serta Fahri Khalif Muslih dan Firial Aulia yang telah memberikan semangat dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
9. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang turut membantu dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyusunan laporan ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis memohon saran dan kritik sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak.

Surabaya, April 2016
Penulis

DAFTAR ISI

JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN.....	v
ABSTRAK.....	vii
<i>ABSTRACT</i>	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR TABEL.....	xix
DAFTAR SIMBOL.....	xxi
DAFTAR LAMPIRAN.....	xxiii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Penelitian Terkait.....	5
2.2 Model Epidemi.....	6
2.3 Bilangan Reproduksi Dasar.....	7
2.4 Titik Keseimbangan.....	8
2.5 Akar-akar Persamaan Karakteristik.....	9
2.6 Kestabilan Asimtotik Lokal.....	11
2.7 Linearisasi Sistem.....	11
2.8 Bifurkasi Mundur.....	13

2.9	Bifurkasi Hopf.....	14
2.10	Metode Numerik Runge-Kutta Orde 4.....	17
BAB III METODE PENELITIAN		19
3.1	Studi Literatur.....	19
3.2	Mengkaji Model Epidemi.....	19
3.3	Mencari Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	19
3.3.1	Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar.....	19
3.3.2	Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	20
3.4	Mencari Titik Keseimbangan Endemik.....	20
3.4.1	Menyelidiki Terjadinya Bifurkasi Mundur ...	20
3.4.2	Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik.....	20
3.5	Menyelidiki Eksistensi Bifurkasi Hopf.....	21
3.6	Membuat Simulasi	21
3.7	Kesimpulan dan Saran.....	21
3.8	Diagram Alir.....	21
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN		23
4.1	Model Epidemi SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi	23
4.2	Daerah Penyelesaian.....	26
4.3	Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	27
4.3.1	Bilangan Reproduksi Dasar.....	28
4.3.2	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	32
4.4	Titik Keseimbangan Endemik.....	33
4.4.1	Analisis Bifurkasi Mundur.....	42
4.4.2	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik.....	44
4.5	Analisis Bifurkasi Hopf.....	54
4.5.1	Eksistensi Bifurkasi Hopf.....	56
4.6.	Simulasi Numerik.....	84

BAB V PENUTUP	89
5.1 Kesimpulan.....	89
5.2 Saran.....	90
DAFTAR PUSTAKA	91
LAMPIRAN	93

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Kurva Bifurkasi Maju.....	14
Gambar 2.2	Kurva Bifurkasi Mundur.....	14
Gambar 3.1	Diagram Alir Penelitian.....	22
Gambar 4.1	Digram Kompartemen Model Epidemik SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi....	24
Gambar 4.2	Bifurkasi Mundur pada Model Epidemik SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi...	42
Gambar 4.3	Orbit Periodik Model Epidemik SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi	83
Gambar 4.4	Plot S dan I terhadap t pada Model Epidemik SIR yang dengan Fungsi Pengobatan Saturasi	83
Gambar 4.5	Grafik Kestabilan ketika $R_0 < 1, S =$ 1 , dan $I = 0.6$	86
Gambar 4.6	Grafik Kestabilan ketika $R_0 > 1, S =$ 1 , dan $I = 0.6$	87

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Model Epidemi.....	6
Tabel 2.2	Kriteria Kestabilan Titik Keseimbangan	10

DAFTAR SIMBOL

- S : populasi *Susceptible* (populasi yang rentan terhadap penyakit) pada saat t .
- I : populasi *Infected* (populasi yang terinfeksi penyakit) pada saat t .
- R : populasi *Recovered* (populasi individu yang telah sembuh dari penyakit) pada saat t .
- A : jumlah maksimal populasi pada saat tidak ada penyakit
- μ : laju kematian alami dari populasi
- k : koefisien transmisi penularan penyakit saat terjadi interaksi antara populasi *Susceptible* dan *Infected*
- r : laju pengobatan
- α : ukuran yang menyatakan dampak pengobatan tertunda pada individu yang terinfeksi
- R_0 : bilangan reproduksi dasar
- J : matriks Jacobian
- λ : nilai eigen
- R_c : titik optimum dari R_0

DAFTAR LAMPIRAN

A. Listing program Kurva Bifurkasi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan.....	93
B. Listing Program Bifurkasi Hopf.....	110

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan yang dibahas, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan dari tugas akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Penyakit campak, gondong, cacar, polio dan influenza merupakan penyakit menular yang berbahaya. Penyakit tersebut disebabkan oleh virus yang dapat menyebar melalui kontak langsung dengan penderita, udara, dan kotoran manusia [1]. Penyakit tersebut dinilai berbahaya karena dapat menyebabkan komplikasi, kelumpuhan, kerusakan saraf otak, dan kematian. Menurut World Health Organization (WHO) [2] sekitar 6000 orang di Indonesia meninggal dunia pada tahun 2012 karena terinfeksi penyakit menular, seperti polio, cacar, dan campak [2].

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika turut berperan dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit. Peranan tersebut berupa model matematika, yang merupakan hal penting dalam epidemiologi karena dapat memberikan pemahaman tentang mekanisme yang mendasari pengaruh penyebaran penyakit dan memberikan saran terhadap strategi pengendalian penyakit tersebut. Dalam tugas akhir ini, model matematika yang digunakan adalah model epidemik tipe SIR. Model epidemik tipe SIR telah dikenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Pada model epidemik tipe SIR, populasi dibagi menjadi tiga bagian, yaitu populasi yang rentan terhadap penyakit (*Susceptible*), populasi yang terinfeksi dan dapat sembuh dari penyakit (*Infected*), dan populasi yang telah sembuh dari penyakit (*Recovered*). Pada umumnya, model epidemik tipe SIR menggambarkan alur penyebaran penyakit melalui kontak langsung atau perantara lain. Pada sebagian kasus, terdapat penyakit yang dapat memasuki kondisi yakni dimana

penyakit menyebar pada suatu wilayah dalam kurun waktu yang lama [3].

Pengobatan merupakan salah satu metode untuk menghentikan penyebaran penyakit, akan tetapi dapat terjadi suatu keadaan dimana jumlah orang yang terinfeksi semakin bertambah dan sarana pengobatan terbatas, sehingga menyebabkan keterlambatan pengobatan. Dampak dari keterlambatan pengobatan dapat dinyatakan dalam fungsi pengobatan saturasi $T(I) = \frac{rI}{(a+I)}$, $r > 0, \alpha \geq 0$ dengan r laju pengobatan dan α ukuran sejauh mana dampak pengobatan tertunda pada individu yang terinfeksi [4].

Berdasarkan permasalahan tersebut, dalam Tugas Akhir ini penulis akan melakukan analisa pada model epidemik tipe SIR yang dipengaruhi fungsi pengobatan saturasi dengan menyelidiki adanya kestabilan, adanya bifurkasi mundur serta adanya bifurkasi Hopf. Penyelesaian numerik akan disajikan dalam bentuk simulasi untuk menggambarkan hasil analisis dari permasalahan model tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan dari penelitian ini adalah :

1. Bagaimana menentukan bilangan reproduksi dasar, kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan kesetimbangan endemik dari model dan adanya bifurkasi mundur serta menganalisa bifurkasi terutama bifurkasi Hopf?
2. Bagaimana interpretasi hasil analisis dari model epidemik tipe SIR dan penyelesaian numerik dari model menggunakan metode Runge-Kutta serta simulasinya?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada Tugas Akhir ini akan dibatasi pada model epidemik tipe SIR dengan fungsi pengobatan saturasi yang dinyatakan dengan $T(I) = \frac{rI}{(\alpha+I)}$.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Menentukan bilangan reproduksi dasar, kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan kesetimbangan endemik dari model dan adanya bifurkasi mundur serta menganalisa bifurkasi terutama bifurkasi Hopf.
2. Mengintepretasikan hasil analisis model epidemik tipe SIR dan penyelesaian numerik dari model tersebut serta simulasinya.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Mengetahui dinamika penyebaran penyakit model epidemik tipe SIR yang dipengaruhi fungsi pengobatan saturasi.
2. Diperoleh pengetahuan dalam mengintepetasikan hasil analisis dan simulasi pada model epidemik tipe SIR.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika dari penulisan penelitian ini adalah sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir ini yang meliputi latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan

masalah, tujuan, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang materi-materi yang mendukung Tugas Akhir ini, antara lain penelitian terkait, penyakit yang sesuai dengan model epidemi SIR, pengaruh pengobatan saturasi, sistem kompartemen, bilangan reproduksi dasar, kestabilan titik kesetimbangan, stabil asimtotis lokal, bifurkasi, dan metode Runge-Kutta.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dibahas tentang langkah – langkah dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan menguraikan bagaimana mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik beserta kestabilannya, bagaimana menentukan bilangan reproduksi dasar, analisis bifurkasi terutama bifurkasi mundur dan bifurkasi Hopf, serta penyelesaian numerik dengan metode Runge-Kutta orde 4 pada model epidemi menggunakan software *MATLAB* untuk mengetahui hubungan antara bilangan reproduksi dasar dan stabilitas titik kesetimbangan.

BAB V

PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai tinjauan pustaka yang menjadi dasar materi dalam penyusunan Tugas Akhir serta menunjang metode – metode yang digunakan dalam pembahasan tugas akhir ini.

2.1 Penelitian Terkait

Penelitian mengenai penyebaran penyakit menular tipe SIR sudah banyak dilakukan oleh penulis penulis lain. Zhang dan Liu membahas mengenai bifurkasi mundur pada model epidemik dengan fungsi pengobatan saturasi[4].

Lestari dalam Tugas Akhirnya membahas mengenai eksistensi bifurkasi mundur pada model penyebaran penyakit menular dengan vaksinasi [5]. Pada Tugas Akhir tersebut ditemukan adanya bifurkasi mundur pada saat $R_0 < 1$ karena terdapat dua titik setimbang endemik. Hal ini berarti penyakit menular tersebut belum dapat dihilangkan sehingga penanganannya bukan berupa pencegahan namun penyembuhan yang efektif.

Iswahyuni melakukan analisa kualitatif pada model epidemik tipe SIS dengan pengobatan[6]. Pada penelitian tersebut terjadi bifurkasi mundur pada saat $R_0 < 1$ yang menunjukkan bahwa pada saat $R_0 < 1$ kapasitas pengobatan yang diberikan kurang efektif sehingga menyebabkan masih ada individu yang terinfeksi dan penyakit akan menjadi endemik.

Musa dalam Tugas Akhirnya membahas mengenai analisa kestabilan dan bifurkasi mundur pada model infeksi virus hepatitis B dan C pada tubuh pasien[7]. Pada Tugas Akhir tersebut terjadi bifurkasi mundur pada saat $R_0 < 1$ yang menunjukkan bahwa transplantasi hati sebagai bentuk pengobatan ternyata kurang efektif dalam menghilangkan virus hepatitis dalam tubuh.

Penulisan Tugas Akhir ini selain melakukan analisis bifurkasi mundur (bifurkasi transkritikal dan bifurkasi *saddle node*) juga menganalisis adanya orbit periodik (bifurkasi Hopf) pada model SIR dengan fungsi pengobatan saturasi.

2.2 Model Epidemik

Model penyebaran penyakit atau yang dikenal sebagai model epidemi, pertama kali dikembangkan oleh Kermack dan McKendrick (1927) yaitu model SIR (*Susceptible-Infected-Removed*). Pada model epidemi SIR individu yang terinfeksi penyakit memperoleh kekebalan permanen dan sembuh dari penyakit tersebut. Selanjutnya model epidemi SIR dikembangkan menjadi model epidemi lain pada Tabel 2.1[13].

Tabel 2.1 Model Epidemi

Model	Keterangan
SIS (<i>Susceptible-Infected-Susceptible</i>)	Penyakit dapat sembuh namun tidak ada kekebalan setelah sembuh (masih rentan terhadap penyakit).
SIRS (<i>Susceptible-Infected-Removed -Susceptible</i>)	Penyakit dapat sembuh namun kekebalan bersifat sementara (masih rentan terhadap penyakit).
SEIR (<i>Susceptible-Exposed-Infected- Removed</i>)	Penyakit mengalami masa inkubasi dan memperoleh kekebalan permanen serta sembuh dari penyakit tersebut.
SEIRS (<i>Susceptible-Exposed-</i>	Penyakit mengalami masa inkubasi dan dapat sembuh, namun kekebalan bersifat

<i>Infected- Removed)</i>	sementara (masih rentan terhadap penyakit).
SEIV (<i>Susceptible-Exposed-Infected-Vaccinated</i>)	Penyakit mengalami masa inkubasi dan dapat dicegah dengan vaksinasi.

2.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan adalah Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*).

Bilangan Reproduksi Dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata individu infeksi sekunder akibat tertular individu infeksi primer yang berlangsung didalam populasi *Susceptible*, sehingga Bilangan Reproduksi Dasar merupakan bilangan rasional positif. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) merupakan suatu parameter yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Kondisi yang akan timbul adalah satu diantara tiga kemungkinan berikut.

- Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang dalam populasi.
- Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap dalam populasi.
- Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah dalam populasi

Bilangan Reproduksi Dasar dapat diperoleh dengan menentukan nilai eigen (nilai karakteristik) dari matriks Jacobian yang dihitung pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Pada model kompleks, suatu model mungkin mempunyai lebih dari satu Bilangan Reproduksi Dasar. Untuk kasus seperti ini, Bilangan Reproduksi Dasar didefinisikan sebagai nilai terbesar dari beberapa Bilangan Reproduksi Dasar [7].

2.4 Titik Keseimbangan

Pandang Persamaan differensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\quad (2.1)$$

Sebuah titik (\bar{x}_0, \bar{y}_0) merupakan titik keseimbangan dari Persamaan (2.1) jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan.

$$x(t) = \bar{x}_0$$

dan

$$y(t) = \bar{y}_0$$

adalah penyelesaian keseimbangan dari Persamaan (2.1) untuk semua t [8].

Dalam fenomena epidemiologi terdapat dua titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik. Titik keseimbangan bebas penyakit adalah titik yang diperoleh ketika model epidemik berada pada keadaan setimbang dengan tidak adanya penyebaran penyakit menular sedangkan titik keseimbangan endemik adalah titik yang diperoleh ketika model epidemik berada pada keadaan setimbang dengan adanya penyebaran penyakit.

2.5 Akar-Akar Persamaan Karakteristik

Diberikan definisi akar-akar Persamaan karakteristik sebagai berikut:

Definisi 2.1 [10]

Jika matriks J berukuran $n \times n$ maka vektor tak nol dinamakan vektor karakteristik dari J jika memenuhi

$$Jx = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ . Untuk suatu skalar λ disebut nilai karakteristik dari J dan x dikatakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai karakteristik matriks J yang berukuran $n \times n$, maka Persamaan $Jx = \lambda x$ dapat ditulis sebagai $(J - \lambda I)x = 0$ dan mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika $|J - \lambda I| = 0$.

Jika matriks didefinisikan dengan

$$J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dan

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka persamaan $Jx = \lambda x$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dan diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0 \quad (2.2)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

Dalam hal ini $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(J)$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(J)$ dan $\Delta = ((\text{Tr}(J))^2 - 4 \det(J))$ sehingga Persamaan (2.2) dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda^2 - \text{Tr}(J)\lambda + \det(J) = 0 \quad (2.3)$$

dan selanjutnya diperoleh kriteria kestabilan titik titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen, $Tr(J)$, $det(J)$ dan Δ pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Kriteria Kestabilan Titik Kesetimbangan [11]

Nilai Eigen	Kriteria $Tr(J)$, $det(J)$, dan Δ	Nama	Kestabilan
λ_1, λ_2 keduanya real $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	$Tr(J) > 0$ atau $Tr(J) < 0$ $det(J) > 0$ $\Delta \geq 0$	simpul	Stabil asimtotik jika semua nilai eigen bernilai negatif, Tidak stabil jika terdapat sedikitnya satu nilai eigen bernilai positif.
λ_1, λ_2 keduanya real $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$det(J) < 0$ $\Delta > 0$	sadel	Tidak stabil, karena terdapat sedikitnya satu nilai eigen yang bernilai positif.
$\lambda_1 = a + ib$ $\lambda_2 = a - ib$	$Tr(J) > 0$ atau $Tr(J) < 0$ $det(J) > 0$	spiral	Stabil asimtotik jika bagian real nilai eigen negatif, Tidak stabil jika bagian real nilai eigen positif.
$\lambda_1 = ib$ $\lambda_2 = -ib$	$Tr(J) = 0$ $det(J) = 0$ $\Delta \leq 0$	pusat	Stabil.

Stabil asimtotik lokal merupakan kriteria kestabilan titik kesetimbangan yang digunakan untuk menyelidiki dinamika penyebaran penyakit. Apabila pada suatu kasus tertentu di suatu daerah memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit stabil

asimtotik lokal maka penyakit dapat menghilang di daerah tersebut sedangkan jika di suatu daerah terdapat titik kesetimbangan endemik yang stabil asimtotik lokal maka penyakit dapat menetap di daerah tersebut dengan kata lain terjadi endemik di daerah tersebut.

2.6 Kestabilan Asimtotik Lokal

Kestabilan asimtotik lokal merupakan kestabilan dari sistem linear atau kestabilan dari linearisasi sistem tak linear. Kestabilan asimtotik lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem.

Teorema 2.1 [9]

Titik setimbang (\bar{x}_0, \bar{y}_0) stabil asimtotik jika dan hanya jika nilai karakteristik dari

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

2.7 Linearisasi Sistem

Linearisasi adalah proses hampiran Persamaan differensial non linear dengan bentuk linear. Tinjau kembali Persamaan (2.1) dimana f dan g nonlinear dan (\bar{x}_0, \bar{y}_0) adalah titik kesetimbangan dari Persamaan (2.1). setelah itu akan dicari pendekatan fungsi f dan g dengan menggunakan ekspansi deret Taylor disekitar titik (\bar{x}_0, \bar{y}_0) sebagai berikut

$$f(x, y) = f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)(y - y_0)$$

$$g(x, y) = g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)(y - y_0)$$

Karena (\bar{x}_0, \bar{y}_0) adalah titik kesetimbangan maka $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Oleh karena itu, sistem (2.1) dapat didekati sebagai sistem linear

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)(\Delta x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)(\Delta y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)(\Delta x) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)(\Delta y)$$

Sistem linear dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

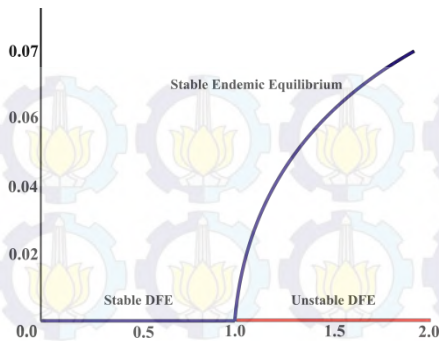
$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}^T = J \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

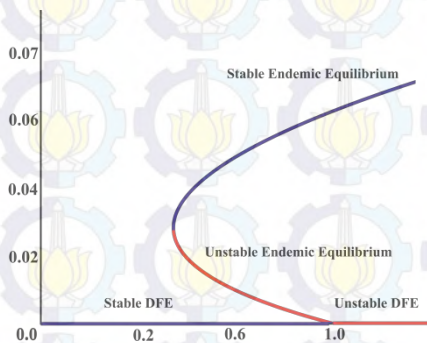
matriks J pada sistem linear tersebut adalah matriks Jacobian pada suatu titik kesetimbangan (x_0, y_0) .

2.8 Bifurkasi Mundur

Pada sistem dinamik non linear sering dijumpai kestabilan di sekitar titik kesetimbangan suatu sistem Persamaan yang mana membantu dalam analisis bifurkasi. Bifurkasi secara umum adalah perubahan kualitatif yang meliputi perubahan stabilitas titik kesetimbangan penyakit karena perubahan nilai-nilai parameter. Dalam epidemiologi, fenomena bifurkasi berhubungan dengan parameter ambang batas atau bilangan reproduksi dasar yang disimbolkan dengan (R_0). Terdapat dua jenis bifurkasi yaitu bifurkasi maju dan bifurkasi mundur. Eksistensi bifurkasi maju pada model penyebaran penyakit ditunjukkan oleh kurva bifurkasi pada Gambar 2.1. Kurva bifurkasi maju pada Gambar 2.1 pada saat $R_0 < 1$ tidak mempunyai titik kesetimbangan endemik (EEP) dan hanya mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit (DFE) yang stabil asimtotik dan ketika $R_0 > 1$ kurva mempunyai titik kesetimbangan endemik yang stabil asimtotik dan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil. Eksistensi bifurkasi mundur pada model penyebaran penyakit ditunjukkan oleh kurva bifurkasi pada Gambar 2.2. Kurva bifurkasi mundur mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit (DFE) yang stabil asimtotik dan titik kesetimbangan endemik (EEP) yang tidak stabil ketika $R_0 < 1$ selanjutnya ketika $R_0 > 1$ kurva mempunyai titik kesetimbangan endemik yang stabil asimtotik dan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil. Jika bifurkasi mundur terjadi maka penyakit belum menghilang meskipun $R_0 < 1$ [4].



Gambar 2.1 Kurva Bifurkasi Maju



Gambar 2.2 Kurva Bifurkasi Mundur

2.9 Bifurkasi Hopf

Teori bifurkasi semakin berkembang dengan ditemukan bifurkasi Hopf. Bifurkasi Hopf terjadi apabila matriks Jacobinya mempunyai sebuah pasangan bilangan kompleks dengan nilai eigen bagian real bernilai nol dan nilai bagian imajiner tidak sama dengan nol. Bifurkasi Hopf digunakan untuk menentukan eksistensi lintasan tertutup yang mengelilingi orbit periodik (*limit cycle*) dari suatu sistem.

Definisi 2.2 [12]

Bifurkasi Hopf terjadi di sekitar titik setimbang dan parameter μ tertentu $\mu = \bar{\mu}$, dengan dua kondisi berikut ini dipenuhi pada titik setimbang yang terjadi bifurkasi Hopf yaitu :

- a. matriks Jacobi dari sistem autonomous non linear mempunyai dua nilai eigen kompleks

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \theta(\mu) \pm i\omega(\mu)$$

Dalam persekitaran dari $\bar{\mu}$ dan untuk $\mu = \bar{\mu}$ nilai eigen-nilai eigen ini adalah imajiner murni yaitu $\theta(\bar{\mu}) = 0$ dan $\omega(\bar{\mu}) \neq 0$

- b. nilai eigen – nilai eigen kompleks berlaku syarat transversal

$$\left. \frac{d\theta(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\bar{\mu}} \neq 0.$$

Sepasang dari nilai eigen–nilai eigen kompleks konjugat melintasi sumbu imajiner dan muncul sebuah atau lebih limit cycle

Teorema 2.2 [12]

Diberikan suatu sistem dinamik

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu) \end{aligned} \quad (2.4)$$

dimana μ merupakan parameter dengan $f(0,0,\mu) = 0$ dan $g(0,0,\mu) = 0$ andaikan syarat berikut terpenuhi

- a. Matriks Jacobian

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

yang dihitung pada titik kesetimbangan $(x, y) = (0,0)$ pada saat $\mu = 0$ mempunyai sepasang eigen value imajiner murni.

- b. Jika eigen value $\lambda(\mu) = a(\mu) \pm i\beta(\mu)$ dengan $a(0) = 0$ dan $\beta(0) \neq 0$ dari titik $(0,0)$ berlaku syarat transversal sebagai berikut

$$\frac{d}{d\mu}\{Re(\lambda(\mu))\}_{\mu=0} \neq 0. \quad (2.5)$$

Maka pada sistem dinamik (2.4) terjadi bifurkasi Hopf yang ditandai dengan munculnya orbit periodik (limit cycle). Stabilitas dari orbit periodik dicari dengan menggunakan rumus berikut

$$\Gamma = \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right) + \frac{1}{16D} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]$$

yang disebut indeks stabilitas dan dihitung pada titik $(0,0)$ dengan $\mu = 0$. Jika $\Gamma > 0$ orbit periodik tak stabil dan jika $\Gamma < 0$ maka orbit periodik stabil.

Berdasarkan teorema bifurkasi Hopf, langkah-langkah untuk mendapatkan bifurkasi Hopf sebagai berikut :

1. Menentukan semua titik tetap (titik kesetimbangan) dari sistem dinamik.
2. Menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian sistem yang dihitung pada setiap titik tetap.
3. Jika satu atau lebih titik kesetimbangan mempunyai sepasang eigen value kompleks, tentukan nilai bifurkasi $\mu = \dot{\mu}$ sehingga $\sigma(\dot{\mu}) = 0$, $\beta(\dot{\mu}) \neq 0$ dan juga hitung syarat transversal.
4. Sebelum menghitung indeks stabilitas akan dicari bentuk normal bifurkasi Hopf dengan mentransformasikan terlebih dahulu titik tetap ke titik $(0,0)$ sehingga sistem dinamik sekarang mempunyai titik tetap $(0,0)$.

Teorema 2.3 [13]

Diberikan ruang vektor

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (2.6)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

dengan f dan g berada pada C^1

Jika pada domain terhubung sederhana $D \subset \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ tidak identik dengan nol dan tidak merubah tanda, maka (2.6) tidak ada orbit tertutup. Pernyataan ini dikenal sebagai Kriteria Bendixon.

2.10 Metode Numerik Runge-Kutta orde 4

Metode Runge-Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler, dimana perhitungan penyelesaian dilakukan step demi step. Untuk fungsi Persamaan differensial:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dengan titik pendekatan awal (x_0, y_0) , berdasarkan metode Euler nilai fungsi penyelesaian diperoleh dengan:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf_n(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hg_n(x_n, y_n) \end{aligned} \quad (2.8)$$

h adalah step atau langkah waktu.

Selanjutnya dengan metode numerik Runge-Kutta orde empat digunakan empat nilai koefisien perbaikan k_1, k_2, k_3 dan k_4 pada Persamaan (2.8). Sehingga diperoleh nilai fungsi penyelesaian Persamaan differensial (2.7) sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

dengan

$$\begin{aligned} k_{1,x} &= hf(t_n, x_n) \\ k_{2,x} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$k_{3,x} = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,x}}{2})$$

$$k_{4,x} = hf(t_n + h, x_n + k_{3,x})$$

dan

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y})$$

dengan

$$k_{1,y} = hf(t_n, y_n)$$

$$k_{2,y} = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{1,y}}{2})$$

$$k_{3,y} = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{2,y}}{2})$$

$$k_{4,y} = hf(t_n + h, y_n + k_{3,y})$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Bab ini menguraikan metode yang digunakan dalam penelitian secara rinci. Metodologi penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian dapat berjalan sistematis.

3.1 Studi Literatur

Tahap ini merupakan tahap untuk melakukan identifikasi permasalahan, yaitu mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi bisa berupa Tugas Akhir, jurnal, buku, maupun artikel terkait.

3.2 Mengkaji Model Epidem

Untuk memahami penyebaran penyakit model epidemi SIR yang dipengaruhi fungsi pengobatan saturasi disusun asumsi-asumsi tertentu sehingga dapat dibuat model kompartemen dengan populasi *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered*.

3.3 Mencari Titik Ksetimbangan Bebas Penyakit

Pada tahap ini dibentuk model epidemi dalam keadaan setimbang ketika laju populasi masing masing adalah nol. Selanjutnya dari model epidemi tersebut dicari titik kesetimbangan ketika tidak ada penyebaran penyakit. Oleh karena itu ada model epidemi disubstitusikan $I = 0$ sedemikian hingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit.

3.3.1 Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar

Pada tahap ini ditentukan bilangan reproduksi dasar dari nilai eigen dari matriks Jacobian titik kesetimbangan penyakit. Oleh karena itu dilakukan pelinearan deret Taylor disekitar titik kesetimbangan bebas penyakit untuk memperoleh matriks Jacobian. Selanjutnya mensubstitusi nilai $I = 0$ matriks tersebut sedemikian hingga diperoleh akar persamaan karakteristik dan

nilai eigen. Bilangan reproduksi dasar didapat dari nilai eigen yang bertanda negatif.

3.3.2 Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Pada tahap ini diselidiki stabil atau tidaknya titik keseimbangan bebas penyakit yang dapat ditentukan dari nilai eigen yang telah diperoleh sebelumnya saat menentukan bilangan reproduksi dasar.

3.4 Mencari Titik Keseimbangan Endemik

Pada tahap ini dicari titik keseimbangan endemik dengan cara yang sama saat mencari titik keseimbangan bebas penyakit, yaitu dengan membentuk keadaan setimbang dari model epidemi dan selanjutnya mencari titik keseimbangan ketika ada penyebaran penyakit $I = I^* \neq 0$.

3.4.1 Menyelidiki Terjadinya Bifurkasi Mundur

Berdasarkan titik keseimbangan endemik yang diperoleh pada tahap sebelumnya, pada tahap ini dilakukan analisis banyaknya penyelesaian dari $f(I)$ dan R_0 yang mempengaruhi terjadinya bifurkasi terutama bifurkasi mundur.

3.4.2 Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik

Dalam menentukan kestabilan titik keseimbangan endemik awalnya dilakukan cara yang sama seperti saat mencari titik keseimbangan bebas penyakit yaitu mencari matriks Jacobian, akan tetapi pada tahap ini $I \neq 0$. Selanjutnya jika pada analisis kestabilan titik bebas penyakit secara langsung ditentukan berdasarkan nilai eigen, pada tahap ini analisis titik kestabilan endemik dilakukan berdasarkan *Determinan* dan *Trace* dari matriks jacobian yang berhubungan dengan nilai eigen.

3.5 Menyelidiki Eksistensi Bifurkasi Hopf

Berdasarkan titik kesetimbangan yang dicari pada tahap sebelumnya, selanjutnya pada tahap ini dilakukan analisis titik kesetimbangan yang mempunyai sepasang nilai eigen kompleks, sehingga dapat ditentukan syarat transversal dari model epidemi. Kemudian dicari bentuk normal bifurkasi Hopf dengan mentranslasikan (menggeser) terlebih dahulu titik kesetimbangan ke titik $(0,0)$ sehingga model epidemi sekarang mempunyai titik kesetimbangan $(0,0)$. Selanjutnya yang terakhir menghitung indeks stabilitas dari bentuk normal bifurkasi Hopf untuk menentukan jenis bifurkasi Hopf yang terjadi.

3.6 Membuat Simulasi

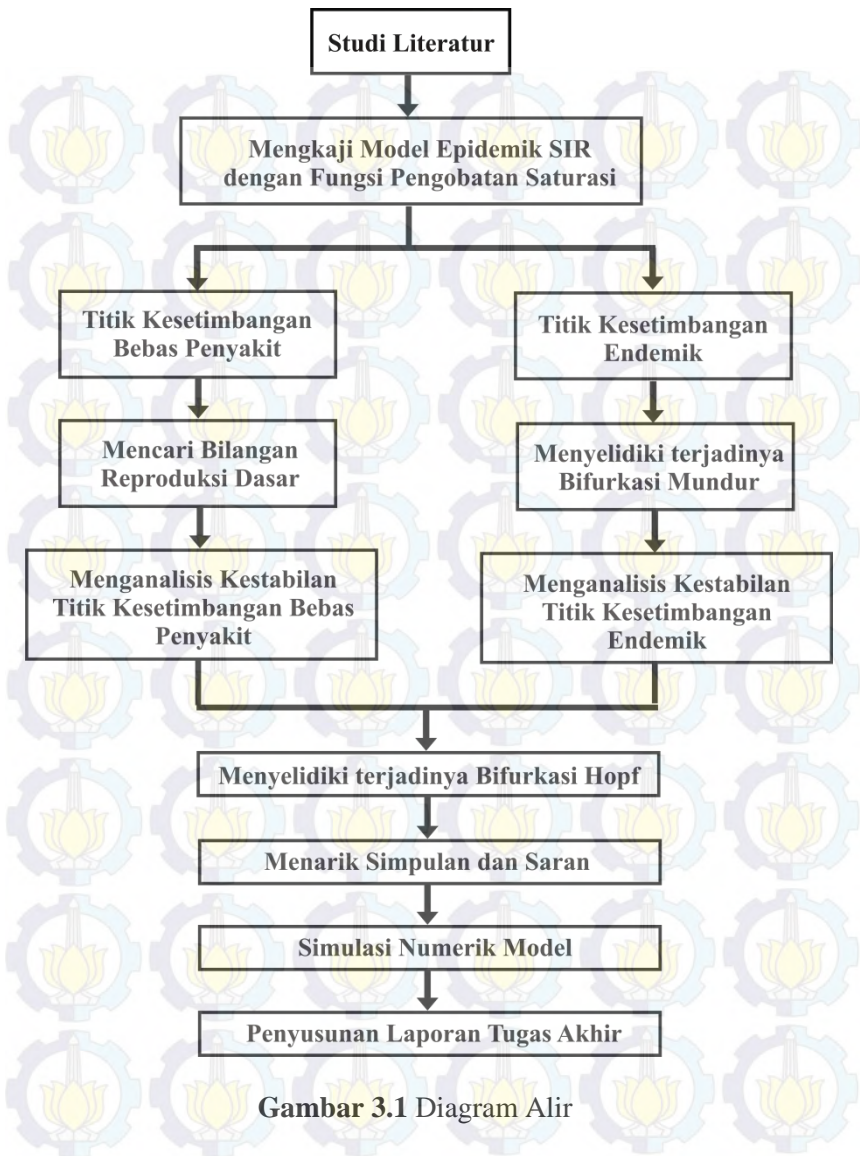
Pada tahap ini dilakukan penyelesaian numerik model epidemik SIR yang dipengaruhi fungsi pengobatan saturasi dengan metode numerik Runge Kutta orde 4 dan menggambarkan grafik kestabilan titik kesetimbangan menggunakan *software* MATLAB.

3.7 Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini dilakukan penarikan simpulan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan. Kemudian diberikan saran sebagai masukan dan perbaikan untuk penelitian berikutnya.

3.8 Diagram Alir

Pada Tahap ini disusun diagram alir pada **Gambar 3.1** sebagai langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan dari penelitian.



BAB IV

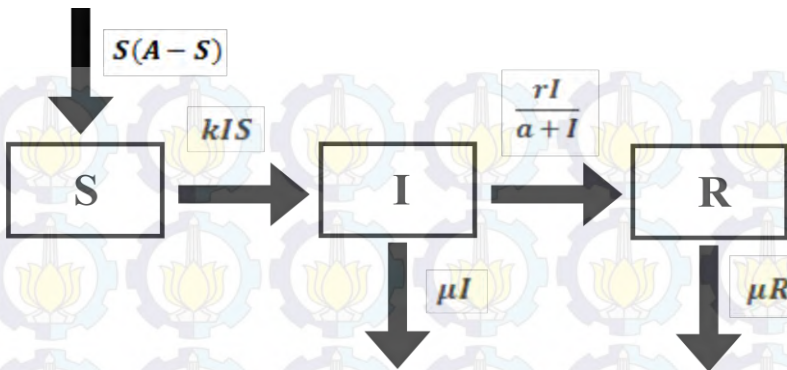
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai titik setimbang bebas penyakit, titik setimbang endemik, penentuan bilangan reproduksi dasar, penentuan kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan, serta analisis bifurkasi terutama bifurkasi mundur dan bifurkasi Hopf dari model epidemi SIR dengan fungsi pengobatan saturasi. Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian solusi numerik dari model dan mensimulasikannya dengan menggunakan MATLAB.

4.1 Model Epidemi SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi

Pada model epidemi SIR dengan fungsi pengobatan saturasi disusun asumsi- asumsi sebagai berikut :

- a. Populasi dibagi menjadi 3 bagian yaitu:
S adalah populasi *Susceptible* (populasi yang rentan terhadap penyakit) pada saat t .
I adalah populasi *Infected* (populasi yang terinfeksi penyakit) pada saat t .
R adalah populasi *Recovered* (populasi yang telah sembuh dari penyakit).
- b. A adalah jumlah maksimal populasi pada saat tidak ada penyakit dan μ adalah laju kematian alami dari populasi. dengan kondisi sebagai berikut $A > 0$ dan $\mu > 0$.
- c. kIS adalah laju besarnya populasi yang terinfeksi, dengan k adalah koefisien transmisi penularan penyakit saat terjadi interaksi antara populasi *Susceptible* dan *Infected*.
- d. $T(I) = \frac{rI}{\alpha + I}$ adalah fungsi pengobatan saturasi dengan r adalah laju pengobatan dan α adalah ukuran yang menyatakan dampak pengobatan yang tertunda pada individu yang terinfeksi.



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Epidemik SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi

Berdasarkan Diagram Kompartemen pada Gambar 4.1 diperoleh model epidemik sebagai berikut :

1. Besarnya laju populasi pada individu yang rentan terhadap penyakit (*Susceptible*) akan bertambah dengan adanya laju rekrutmen penyakit $S(A - S)$ yang masuk pada populasi, sedangkan laju populasi *Susceptible* akan menurun dengan adanya kejadian penularan penyakit kIS . Sehingga Persamaan untuk populasi S adalah

$$\frac{dS}{dt} = S(A - S) - kIS$$

2. Besarnya laju populasi pada individu yang terinfeksi penyakit dan dapat sembuh dari penyakit (*Infected*) akan bertambah dengan adanya kejadian penularan penyakit kIS . Laju populasi *Infected* akan menurun dengan adanya kematian alami pada populasi *Infected* μI dan besarnya fungsi pengobatan saturasi. Sehingga Persamaan untuk populasi I adalah

$$\frac{dI}{dt} = kIS - \mu I - \frac{rI}{a + I}$$

3. Besarnya laju populasi pada individu yang telah sembuh dari penyakit (*Recovered*) akan bertambah dengan besarnya fungsi pengobatan saturasi, sedangkan laju populasi *Recovered* akan menurun dengan adanya kematian alami pada populasi *Recovered* μR . Sehingga Persamaan untuk populasi R adalah

$$\frac{dR}{dt} = \frac{rI}{a+I} - \mu R$$

Dari penjelasan di atas maka Persamaan model epidemi dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = S(A - S) - kIS$$

$$\frac{dI}{dt} = kIS - \mu I - \frac{rI}{a+I} \quad (4.1)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{rI}{a+I} - \mu R$$

karena Persamaan pertama dan kedua dari (4.1) independen terhadap Persamaan ketiga sehingga Persamaan ketiga dapat diabaikan, maka Persamaan model epidemik dapat direduksi menjadi

$$\frac{dS}{dt} = S(A - S) - kIS$$

$$\frac{dI}{dt} = kIS - \mu I - \frac{rI}{a+I} \quad (4.2)$$

dengan kondisi awal

$$S(0) > 0, I(0) > 0$$

4.2 Daerah Penyelesaian

Akan ditunjukkan $S(t), I(t)$, dan $R(t)$ terbatas pada $[0, \infty)$. Didefinisikan $M_1 = \max \{A, S(0)\}$. $\frac{dS(t)}{dt} \leq S(t)(A - S(t))$ maka $S(t) \leq M_1$ untuk semua t , sehingga $S(t)$ memiliki daerah penyelesaiannya $0 \leq S(t) \leq M_1$. Misalkan $U(t) = S(t) + I(t) + R(t)$.

$$\dot{U}(t) = \dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t)$$

$$\dot{U}(t) = S(A - S) - kIS + kIS - \mu I - \frac{rI}{\alpha + I} + \frac{rI}{\alpha + I} - \mu R$$

$$\dot{U}(t) = S(A - S) - \mu I - \mu R$$

sehingga

$$\begin{aligned}\dot{U}(t) + \mu U(t) &= S(A - S) - \mu I - \mu R + \mu(S + I + R) \\ &= S(A - S) + \mu S\end{aligned}$$

Karena itu

$$\dot{U}(t) + \mu U(t) \leq (A + \mu)S \quad (4.3)$$

Dari (4.3) dilakukan perhitungan sebagai berikut

Misal:

$$\dot{U}(t) + \mu U(t) = (A + \mu)S$$

$$\frac{dU}{dt} + \mu U(t) = (A + \mu)S$$

$$\frac{dU}{dt} = (A + \mu)S - \mu U(t)$$

maka

$$\frac{dU}{(A + \mu)S - \mu U(t)} = dt$$

$$\int \frac{dU}{(A + \mu)S - \mu U(t)} = \int dt \quad (4.4)$$

Misal:

$$P = (A + \mu)S - \mu U(t) \quad (4.5)$$

maka

$$\frac{dP}{dU} = -\mu$$

$$dU = -\frac{1}{\mu} dP$$

Kemudian substitusi Persamaan (4.5) ke Persamaan (4.4) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\mu} \int \frac{dP}{P} &= \int dt \\
-\frac{1}{\mu} \ln|P| &= t + \ln|c_1| \\
\ln|P| &= -\mu t + \ln|C| \\
\ln \left| \frac{P}{C} \right| &= -\mu t \\
P &= C e^{-\mu t}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Substitusi Persamaan (4.6) ke Persamaan (4.5) sehingga didapatkan
 $(A + \mu)S - \mu U(t) = C e^{-\mu t}$

$$U(t) = \frac{(A+\mu)}{\mu} S - \frac{C}{\mu} e^{-\mu t}$$

Pada saat kondisi $t \rightarrow \infty$ maka

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(A+\mu)}{\mu} S - \frac{C}{\mu} e^{-\mu t} \\
&= \frac{(A+\mu)}{\mu} S
\end{aligned}$$

Berdasarkan (4.3) dan $U(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ dan $S(t) \leq M_1$ untuk semua t , maka diperoleh daerah penyelesaian sebagai berikut

$$0 \leq S(t) + I(t) + R(t) \leq \frac{(A+\mu)}{\mu} M_1$$

Jadi daerah penyelesaian yang mungkin untuk sistem (4.1) adalah

$$\Omega = \left\{ 0 \leq S(t) \leq M_1, 0 \leq S(t) + I(t) + R(t) \leq \frac{(A+\mu)}{\mu} M_1, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0 \right\}.$$

Karena kondisi awal bernilai positif maka Ω merupakan daerah invarian positif yang artinya semua penyelesaian berada di dalam Ω .

4.3 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik keseimbangan bebas penyakit $E(S_0, I_0)$ adalah titik yang diperoleh ketika model epidemi pada sistem Persamaan (4.2) berada pada keadaan setimbang dan keadaan dimana tidak terjadi penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi sehingga $I = I_0 = 0$.

Keadaan setimbang adalah keadaan dimana jumlah populasi *Susceptible* dan *Infected* tidak mengalami perubahan (tidak bertambah atau tidak berkurang) sehingga laju populasi *Susceptible* dan *Infected* sepanjang waktu adalah nol.

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0.$$

Dengan substitusi Persamaan (4.2) ke laju populasi S pada keadaan setimbang pada Persamaan di atas diperoleh S_0 sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

$$S(A - S) - kIS = 0$$

$$S(A - S) = 0$$

$$S_{0_1} = 0 \quad (4.7)$$

$$S_{0_2} = A \quad (4.8)$$

dan dari besarnya populasi S yang didapat pada Persamaan (4.7) dan (4.8) serta besarnya populasi I pada keadaan tidak adanya penyebaran penyakit menular yang sama dengan nol maka didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (S_0, I_0) = (0, 0).$$

dan

$$E_1 = (S_0, I_0) = (A, 0)$$

4.3.1 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan Reproduksi Dasar merupakan parameter untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit, R_0 adalah ambang batas dalam mengendalikan penyebaran penyakit. Bilangan Reproduksi dasar diperoleh dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian yang dihitung pada titik kesetimbangan bebas penyakit.

Sedangkan untuk mendapatkan matriks Jacobian dari model epidemi yang merupakan Persamaan yang tak linier, diperlukan pelinieran terlebih dahulu dengan menggunakan ekspansi deret Taylor, Sistem Persamaan (4.2) dapat ditulis

$$f(S_0, I_0) = S_0(A - S_0) - kI_0S_0$$

$$g(S_0, I_0) = kI_0S_0 - \mu I_0 - \frac{rI_0}{\alpha + I_0} \quad (4.9)$$

Pendekatan linier dilakukan disekitar titik setimbang bebas penyakit (S_0, I_0) , sehingga ekspansi deret Taylor dari sistem (4.9) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= f(S_0, I_0) + (S - S_0) \frac{\partial f}{\partial S} + (I - I_0) \frac{\partial f}{\partial I} + \dots \\ \frac{dI}{dt} &= g(S_0, I_0) + (S - S_0) \frac{\partial g}{\partial S} + (I - I_0) \frac{\partial g}{\partial I} + \dots \end{aligned}$$

dengan

$$f(S_0, I_0) = 0$$

$$g(S_0, I_0) = 0$$

selanjutnya didefinisikan

$$S - S_0 = a \Rightarrow \dot{S} = \dot{a}$$

$$I - I_0 = b \Rightarrow \dot{I} = \dot{b}$$

sehingga ekspansi deret Taylor mempunyai suku-suku linier adalah

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= a \frac{\partial f}{\partial S} + b \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{dI}{dt} &= a \frac{\partial g}{\partial S} + b \frac{\partial g}{\partial I} \end{aligned}$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

dan matriks Jacobian dari matriks diatas adalah

$$J(E) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

dengan

$$\frac{\partial f}{\partial S} = A - 2S - kI$$

$$\frac{\partial g}{\partial S} = kI$$

$$\frac{\partial f}{\partial I} = -kS$$

$$\frac{\partial g}{\partial I} = kS - \mu - \frac{r(\alpha+I)+rI}{(\alpha+I)^2}$$

maka matriks Jacobian (4.10) menjadi

$$J(E) = \begin{bmatrix} A - 2S - kI & -kS \\ kI & kS - \mu - \frac{r(\alpha+I)+rI}{(\alpha+I)^2} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Substitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (S_0, I_0) = (0,0)$ pada matriks Jacobian (4.11) didapat

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -\mu - \frac{r}{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Selanjutnya dicari Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menghitung $|J(E_0) - \lambda I| = 0$, berikut perhitungannya

$$\begin{aligned} |J(E_0) - \lambda I| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -\mu - \frac{r}{\alpha} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} A - \lambda & 0 \\ 0 & -\mu - \frac{r}{\alpha} - \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ (A - \lambda) \left(-\mu - \frac{r}{\alpha} - \lambda \right) &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari akar karakteristiknya sebagai berikut

$$\begin{aligned}\lambda_{1_{E_0}} &= A > 0 \\ \lambda_{2_{E_0}} &= -\left(\mu + \frac{r}{\alpha}\right) < 0\end{aligned}\quad (4.13)$$

Kemudian substitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (S_0, I_0) = (A, 0)$ pada matriks Jacobian (4.11) didapat

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -A & -kA \\ 0 & kA - \mu - \frac{r}{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Selanjutnya dicari Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menghitung $|J(E_1) - \lambda I| = 0$, berikut perhitungannya

$$\begin{aligned}|J(E_1) - \lambda I| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} -A & -kA \\ 0 & kA - \mu - \frac{r}{\alpha} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \begin{vmatrix} -A - \lambda & -kA \\ 0 & kA - \mu - \frac{r}{\alpha} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (-A - \lambda) \left(kA - \mu - \frac{r}{\alpha} - \lambda \right) &= 0\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari akar karakteristiknya sebagai berikut

$$\begin{aligned}\lambda_{1_{E_1}} &= -A < 0 \\ \lambda_{2_{E_1}} &= kA - \mu - \frac{r}{\alpha} \\ &= \mu + \frac{r}{\alpha} \left(\frac{kA}{\mu + \frac{r}{\alpha}} - 1 \right) \\ &= \mu + \frac{r}{\alpha} (R_0 - 1)\end{aligned}\quad (4.15)$$

$$\text{dengan } R_0 = \frac{kA}{\mu + \frac{r}{\alpha}} \quad (4.16)$$

4.3.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju penyebaran suatu penyakit. Pada sub bab ini dilakukan analisis kestabilan dari titik setimbang bebas penyakit.

Berdasarkan nilai eigen yang telah diperoleh pada Persamaan (4.13) $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$, maka kestabilan pada titik keseimbangan bebas penyakit E_0 tidak stabil (*saddle*).

Teorema 4.3.1. *Titik bebas penyakit E stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.*

Bukti :

Berdasarkan nilai eigen yang telah diperoleh pada Persamaan (4.15)

$$\lambda_{1E_1} < 0, \text{ dan}$$

$$\lambda_{2E_1} = \left(\mu + \frac{r}{\alpha} (R_0 - 1) \right) < 0$$

dari persamaan diatas, dapat dilihat $\lambda_{2E_1} < 0$ jika dan hanya jika $R_0 - 1 < 0$ dengan kata lain $R_0 < 1$. Hal ini membuktikan jika $R_0 < 1$ maka semua nilai eigen dari akar Persamaan karakteristik bernilai real negatif sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (A, 0)$ stabil asimtotik lokal, sebaliknya jika $R_0 > 1$ titik kesetimbangan E_1 tidak stabil.

4.4 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik $E^*(S^*, I^*)$ digunakan untuk menunjukkan adanya kemungkinan penyebaran penyakit. Karena pada keadaan endemik ada penyebaran penyakit maka populasi *Infected* $I = I^* \neq 0$.

Selanjutnya sama seperti pada sub bab 4.2, keadaan setimbang adalah keadaan dimana jumlah populasi *Susceptible* dan *Infected* tidak mengalami perubahan (tidak bertambah atau tidak berkurang) sehingga laju populasi *Susceptible* dan *Infected* sepanjang waktu adalah nol.

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0$$

Dengan substitusi model epidemi pada sistem Persamaan (4.2) ke Persamaan di atas maka Persamaan di atas menjadi

$$S(A - S) - KIS = 0 \quad (4.17)$$

$$kIS - \mu I - \frac{rI}{a+I} = 0 \quad (4.18)$$

selanjutnya akan dicari nilai I^* melalui Persamaan (4.17) sehingga didapat

$$I^* = \frac{A-S}{k} \quad (4.19)$$

kemudian mensubstitusikan besarnya populasi $I^* = \frac{A-S}{k}$ pada Persamaan (4.19) ke Persamaan (4.18) dengan kondisi $I^* \neq 0$

$$kIS - \mu I - \frac{rI}{a+I} = 0$$

$$k \left(\frac{A-S}{k} \right) S - \mu \left(\frac{A-S}{k} \right) - \frac{r \left(\frac{A-S}{k} \right)}{\alpha + \left(\frac{A-S}{k} \right)} = 0$$

$$S(A - S) - \frac{\mu}{k}(A - S) - \frac{r(A-S)}{\alpha k + (A-S)} = 0$$

$$\frac{S(A-S)(\alpha k + (A-S)) - \frac{\mu}{k}(A-S)(\alpha k + (A-S)) - r(A-S)}{\alpha k + (A-S)} = 0$$

$$(A - S)(S\alpha k + AS - S^2 - \mu\alpha - \frac{u}{k}A + \frac{u}{k}S - r) = 0$$

$$(A - S)(-1)(S^2 - (\alpha k + A + \frac{u}{k})S + \frac{u}{k}(\alpha k + A) + r) = 0$$

$$(S - A)(S^2 - (\alpha k + A + \frac{u}{k})S + \frac{u}{k}(\alpha k + A) + r) = 0$$

$$S^2 - (\alpha k + A + \frac{u}{k})S + \frac{u}{k}(\alpha k + A) + r = 0 \quad (4.20)$$

agar Persamaan (4.17) dan (4.18) mempunyai penyelesaian positif, yaitu $S, I > 0$ maka Persamaan (4.20) harus mempunyai penyelesaian positif.

Diskriminan dari Persamaan (4.20) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\alpha k + A + \frac{u}{k}\right)^2 - 4\left(\frac{u}{k}(\alpha k + A) + r\right) \\ \Delta &= \left((\alpha k + A) + \frac{u}{k}\right)^2 - 4\frac{u}{k}(\alpha k + A) - 4r \\ \Delta &= \left((\alpha k + A)^2 + 2(\alpha k + A)\frac{u}{k} + \left(\frac{u}{k}\right)^2\right) - 4\frac{u}{k}(\alpha k + A) - 4r \\ \Delta &= \left((\alpha k + A)^2 - 2(\alpha k + A)\frac{u}{k} + \left(\frac{u}{k}\right)^2\right) - 4r \\ \Delta &= \left(\alpha k + A - \frac{u}{k}\right)^2 - 4r \end{aligned} \quad (4.21)$$

karena $R_0 = \frac{kA}{\mu + \frac{r}{\alpha}}$, maka

$$\Delta = \left(\alpha k + R_0\left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) - \frac{u}{k}\right)^2 - 4r \quad (4.22)$$

Jika $\Delta \geq 0$, maka diperoleh $\left(\alpha k + R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) - \frac{u}{k}\right)^2 - 4r \geq 0$, sehingga

$$\alpha k + R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) - \frac{u}{k} \geq 2\sqrt{r}$$

$$R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) \geq -\alpha k + \frac{u}{k} + 2\sqrt{r}$$

$$R_0 \left(\frac{\mu\alpha+r}{\alpha k}\right) \geq -\alpha k + \frac{u}{k} + 2\sqrt{r}$$

$$R_0 \geq \left(-\alpha k + \frac{u}{k} + 2\sqrt{r}\right) \left(\frac{\alpha k}{\mu\alpha+r}\right)$$

$$R_0 \geq -\frac{\alpha^2 k^2}{\mu\alpha+r} + \frac{\mu\alpha}{\mu\alpha+r} + \frac{2\alpha k\sqrt{r}}{\mu\alpha+r}$$

$$R_0 \geq -\frac{\alpha^2 k^2}{\mu\alpha+r} + \frac{\mu\alpha+r-r}{\mu\alpha+r} + \frac{2\alpha k\sqrt{r}}{\mu\alpha+r}$$

$$R_0 \geq -\frac{\alpha^2 k^2}{\mu\alpha+r} + 1 - \frac{r}{\mu\alpha+r} + \frac{2\alpha k\sqrt{r}}{\mu\alpha+r}$$

$$R_0 \geq 1 - \frac{\alpha^2 k^2 + r}{\mu\alpha+r} + \frac{2\alpha k\sqrt{r}}{\mu\alpha+r} := p_0$$

atau

$$\alpha k + R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) - \frac{u}{k} \leq -2\sqrt{r}$$

$$R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) \leq -\alpha k + \frac{u}{k} - 2\sqrt{r}$$

$$R_0 \left(\frac{\mu\alpha+r}{\alpha k}\right) \leq -\alpha k + \frac{u}{k} - 2\sqrt{r}$$

$$R_0 \leq \left(-\alpha k + \frac{u}{k} - 2\sqrt{r}\right) \left(\frac{\alpha k}{\mu\alpha+r}\right)$$

$$R_0 \leq -\frac{\alpha^2 k^2}{\mu\alpha+r} + \frac{\mu\alpha}{\mu\alpha+r} - \frac{2\alpha k\sqrt{r}}{\mu\alpha+r}$$

$$R_0 \leq -\frac{\alpha^2 k^2}{\mu\alpha+r} + \frac{\mu\alpha+r-r}{\mu\alpha+r} - \frac{2\alpha k\sqrt{r}}{\mu\alpha+r}$$

$$R_0 \leq -\frac{\alpha^2 k^2}{\mu\alpha+r} + 1 - \frac{r}{\mu\alpha+r} - \frac{2\alpha k\sqrt{r}}{\mu\alpha+r}$$

$$R_0 \leq 1 - \frac{\alpha^2 k^2 + r}{\mu\alpha+r} - \frac{2\alpha k\sqrt{r}}{\mu\alpha+r}$$

Selanjutnya, Persamaan (4.20) tidak mempunyai penyelesaian positif jika $\left(\alpha k + A + \frac{u}{k}\right) \leq 0$, sedangkan jika $\left(\alpha k + A + \frac{u}{k}\right) > 0$, maka diperoleh

$$\left(\alpha k + A + \frac{u}{k}\right) > 0$$

$$\left(\alpha k + R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) + \frac{u}{k}\right) > 0$$

$$R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) > -\alpha k - \frac{u}{k}$$

$$R_0 > \left(-\alpha k - \frac{u}{k}\right) \left(\frac{\alpha k}{\mu\alpha+r}\right)$$

$$R_0 > -\frac{\alpha^2 k^2}{\mu\alpha+r} - \frac{\mu\alpha}{\mu\alpha+r}$$

$$R_0 > -\frac{\alpha^2 k^2}{\mu\alpha+r} - \frac{\mu\alpha+r-r}{\mu\alpha+r}$$

$$R_0 > -\frac{\alpha^2 k^2}{\mu\alpha+r} - 1 + \frac{r}{\mu\alpha+r}$$

$$R_0 > -1 - \frac{\alpha^2 k^2 - r}{\mu\alpha+r}$$

sehingga dari Persamaan (4.20) diperoleh

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\alpha k + A + \frac{u}{k} \right) > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow R_0 \geq 1 - \frac{\alpha^2 k^2 + r}{\mu \alpha + r} + \frac{2 \alpha k \sqrt{r}}{\mu \alpha + r} := p_0$$

Maka Persamaan (4.20) memiliki dua penyelesaian positif, yaitu

$$S_1 = \frac{\alpha k + A + \frac{u}{k} + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ dan } S_2 = \frac{\alpha k + A + \frac{u}{k} - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Kemudian tetapkan $I_i = \frac{A - S_i}{k}$ dan $E_i = (S_i, I_i)$ untuk $i = 1, 2$. E_i adalah titik kesetimbangan endemik dari model Persamaan (4.17) dan (4.18) dengan $S_i < A$. Jika $S_1 < A$, maka dengan mensubstitusi nilai S_1 diperoleh

$$\frac{\alpha k + A + \frac{u}{k} + \sqrt{\Delta}}{2} < A$$

$$\alpha k + A + \frac{u}{k} + \sqrt{\Delta} < 2A$$

$$-\sqrt{\Delta} > \alpha k - A + \frac{u}{k} \quad (4.23)$$

karena $\Delta \geq 0$, maka

$$R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k} \right) - \alpha k - \frac{u}{k} > 0$$

$$R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k} \right) > \alpha k + \frac{u}{k}$$

$$R_0 > \left(\alpha k + \frac{u}{k} \right) \left(\frac{\alpha k}{\mu \alpha + r} \right)$$

$$R_0 > \frac{\alpha^2 k^2}{\mu \alpha + r} + \frac{\mu \alpha}{\mu \alpha + r}$$

$$R_0 > \frac{\alpha^2 k^2}{\mu \alpha + r} + \frac{\mu \alpha + r - r}{\mu \alpha + r}$$

$$R_0 > \frac{\alpha^2 k^2}{\mu \alpha + r} + 1 - \frac{r}{\mu \alpha + r}$$

$$R_0 > 1 + \frac{\alpha^2 k^2 - r}{\mu \alpha + r} := p_1 \quad (4.24)$$

Selanjutnya dari Persamaan (4.23) diperoleh

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\Delta} < \alpha k - A + \frac{u}{k} \\ \Leftrightarrow & A - \alpha k - \frac{u}{k} > \sqrt{\Delta} \\ \Leftrightarrow & \left(A - \alpha k - \frac{u}{k}\right)^2 > \left(\alpha k + A - \frac{u}{k}\right)^2 - 4r \\ \Leftrightarrow & \left(R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) - \alpha k - \frac{u}{k}\right)^2 > \left(\alpha k + R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) - \frac{u}{k}\right)^2 - 4r \\ \Leftrightarrow & \left(R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) - \alpha k - \frac{u}{k}\right)^2 - \left(\alpha k + R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) - \frac{u}{k}\right)^2 > -4r \\ \Leftrightarrow & \left(R_0 \left(\frac{\mu \alpha + r}{\alpha k}\right) - \alpha k - \frac{u}{k} - \alpha k - R_0 \left(\frac{\mu \alpha + r}{\alpha k}\right) + \frac{u}{k}\right) \left(R_0 \left(\frac{\mu \alpha + r}{\alpha k}\right) - \right. \\ & \left. \alpha k - \frac{u}{k} + \alpha k + R_0 \left(\frac{\mu \alpha + r}{\alpha k}\right) - \frac{u}{k}\right) > -4r \\ \Leftrightarrow & (-2\alpha k) \left(2R_0 \left(\frac{\mu \alpha + r}{\alpha k}\right) - 2\frac{\mu}{k}\right) > -4r \\ \Leftrightarrow & (-4\alpha k) \left(R_0 \left(\frac{\mu \alpha + r}{\alpha k}\right) - \frac{\mu}{k}\right) > -4r \\ \Leftrightarrow & R_0 \left(\frac{\mu \alpha + r}{\alpha k}\right) - \frac{\mu}{k} < \frac{r}{\alpha k} \\ \Leftrightarrow & R_0 \left(\frac{\mu \alpha + r}{\alpha k}\right) < \frac{r}{\alpha k} + \frac{\mu}{k} \\ \Leftrightarrow & R_0 \left(\frac{\mu \alpha + r}{\alpha k}\right) < \frac{\mu \alpha + r}{\alpha k} \\ \Leftrightarrow & R_0 < 1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Oleh karena itu, $S_1 < A$ ada jika hanya jika Persamaan (4.24) dan (4.25) berlaku. Jika $R_0 \leq P_1$ atau $R_0 \geq p_2$, artinya $p_2 \leq R_0 \leq p_1$, maka diperoleh $S_1 \geq A$. Dengan pernyataan yang sama, jika $S_2 < A$ maka

$$\begin{aligned} \frac{\alpha k + A + \frac{u}{k} - \sqrt{\Delta}}{2} &< A \\ \alpha k + A + \frac{u}{k} - \sqrt{\Delta} &< 2A \\ \sqrt{\Delta} &> \alpha k - A + \frac{u}{k} \end{aligned} \quad (4.26)$$

karena $\Delta \geq 0$, maka

$$\alpha k - R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k} \right) + \frac{u}{k} < 0$$

$$R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k} \right) > \alpha k + \frac{u}{k}$$

$$R_0 > \left(\alpha k + \frac{u}{k} \right) \left(\frac{\alpha k}{\mu \alpha + r} \right)$$

$$R_0 > \frac{\alpha^2 k^2}{\mu \alpha + r} + \frac{\mu \alpha}{\mu \alpha + r}$$

$$R_0 > \frac{\alpha^2 k^2}{\mu \alpha + r} + \frac{\mu \alpha + r - r}{\mu \alpha + r}$$

$$R_0 > \frac{\alpha^2 k^2}{\mu \alpha + r} + 1 - \frac{r}{\mu \alpha + r}$$

$$R_0 > 1 + \frac{\alpha^2 k^2 - r}{\mu \alpha + r} := p_1$$

Selanjutnya dari Persamaan (4.26) diperoleh

$$\sqrt{\Delta} > \alpha k - A + \frac{u}{k}$$

$$\Leftrightarrow \alpha k - A + \frac{u}{k} < \sqrt{\Delta}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\alpha k - A + \frac{u}{k}\right)^2 < \left(\alpha k + A - \frac{u}{k}\right)^2 - 4r \\
&\Leftrightarrow \left(\alpha k - R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) + \frac{u}{k}\right)^2 < \left(\alpha k + R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) - \frac{u}{k}\right)^2 - 4r \\
&\Leftrightarrow \left(\alpha k - R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) + \frac{u}{k}\right)^2 - \left(\alpha k + R_0 \left(\frac{\mu}{k} + \frac{r}{\alpha k}\right) - \frac{u}{k}\right)^2 < -4r \\
&\Leftrightarrow \left(\alpha k - R_0 \left(\frac{\mu\alpha+r}{\alpha k}\right) + \frac{u}{k} - \alpha k - R_0 \left(\frac{\mu\alpha+r}{\alpha k}\right) + \frac{u}{k}\right) \left(\alpha k - R_0 \left(\frac{\mu\alpha+r}{\alpha k}\right) + \frac{u}{k} + \alpha k + R_0 \left(\frac{\mu\alpha+r}{\alpha k}\right) - \frac{u}{k}\right) < -4r \\
&\Leftrightarrow (2\alpha k) \left(-2R_0 \left(\frac{\mu\alpha+r}{\alpha k}\right) + 2\frac{\mu}{k}\right) < -4r \\
&\Leftrightarrow (4\alpha k) \left(-R_0 \left(\frac{\mu\alpha+r}{\alpha k}\right) + \frac{\mu}{k}\right) < -4r \\
&\Leftrightarrow -R_0 \left(\frac{\mu\alpha+r}{\alpha k}\right) + \frac{\mu}{k} < \frac{-r}{\alpha k} \\
&\Leftrightarrow R_0 \left(\frac{\mu\alpha+r}{\alpha k}\right) > \frac{r}{\alpha k} + \frac{\mu}{k} \\
&\Leftrightarrow R_0 \left(\frac{\mu\alpha+r}{\alpha k}\right) > \frac{\mu\alpha+r}{\alpha k} \\
&\Leftrightarrow R_0 > 1
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Sehingga $S_2 < A$ ada jika $R_0 > p_1$ atau $p_2 < R_0$.
Perhatikan bahwa $p_1 < 1$ jika hanya jika $\alpha k < \sqrt{r}$.

$$p_1 < 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\alpha^2 k^2 - r}{\mu\alpha + r} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2 k^2 - r}{\mu\alpha + r} < 0$$

karena $\mu\alpha + r \neq 0$, maka

$$\Leftrightarrow \alpha^2 k^2 - r < 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha k + \sqrt{r})(\alpha k - \sqrt{r}) < 0$$

karena $\alpha k + \sqrt{r} > 0$, maka

$$\Leftrightarrow (\alpha k - \sqrt{r}) < 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha k < \sqrt{r} \quad (4.28)$$

sehingga $\alpha k < \sqrt{r}$ ekuivalen dengan $p_1 < 1$.

Oleh karena itu, titik kesetimbangan endemik E_1 dan E_2 tidak ada jika $R_0 < p_0$, melainkan jika $R_0 \geq p_0$ maka dapat disimpulkan

1. Jika $\alpha k < \sqrt{r}$ dan $R_0 < 1$, maka sistem Persamaan (4.2) memiliki dua titik kesetimbangan endemik $E_1 = (S_1, I_1)$ dan $E_2 = (S_2, I_2)$, dengan E_1 ada jika $p_1 < R_0 < 1$ dan E_2 ada jika $p_1 < R_0$.
2. Jika $\alpha k < \sqrt{r}$ dan $R_0 > 1$, maka sistem Persamaan (4.2) memiliki titik kesetimbangan endemik tunggal $E_2 = (S_2, I_2)$, dengan E_2 ada jika $p_1 < R_0$ atau $1 < R_0$ dan titik kesetimbangan endemik E_1 tidak ada karena $p_1 < R_0 < 1$ tidak berlaku.
3. Misalkan $\alpha k \geq \sqrt{r}$, maka $p_1 \geq 1$, sehingga titik kesetimbangan endemik E_1 tidak ada karena $p_1 < R_0 < 1$ tidak berlaku. Kemudian ketika $R_0 > 1$ terdapat titik kesetimbangan endemik tunggal $E_2 = (S_2, I_2)$ dengan E_2 ada jika $p_1 < R_0$ atau $1 < R_0$ dan tidak ada titik kesetimbangan endemik ketika $R_0 < 1$.

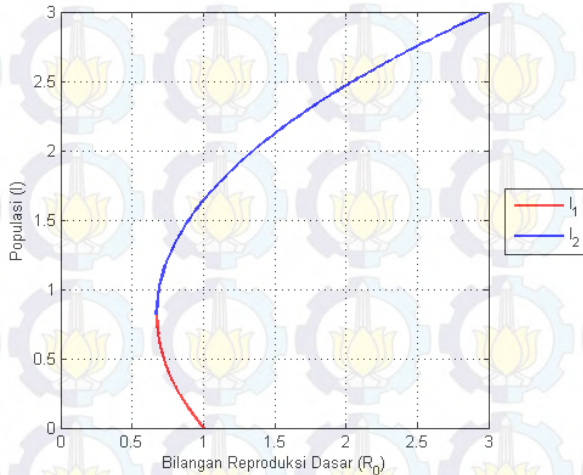
4.4.1 Analisis Bifurkasi Mundur

Pada sub bab ini akan diselidiki terjadinya bifurkasi mundur yang disebabkan adanya parameter tertentu yang mengakibatkan adanya titik kesetimbangan endemik ketika $R_0 < 1$. Kemudian menyajikannya dalam bentuk kurva menggunakan MATLAB.

Teorema 4.4.1 Pada sistem Persamaan (4.2) terjadi bifurkasi mundur dengan titik kesetimbangan endemik E_1 dan E_2 pada saat $R_0 < 1$ dan $\alpha k < \sqrt{r}$.

Bukti

Pada sub bab sebelumnya telah diketahui bahwa, jika $\alpha k < \sqrt{r}$ sistem Persamaan (4.2) memiliki dua titik kesetimbangan endemik E_1 dan E_2 pada saat $R_0 < 1$. Untuk $\alpha k < \sqrt{r}$ dapat digambarkan kurva bifurkasi seperti pada gambar 4.2.



Gambar 4.2 Bifurkasi Mundur pada Model Epidemi SIR yang dipengaruhi oleh fungsi pengobatan saturasi

Kurva bifurkasi pada Gambar 4.2 merupakan kurva terjadinya bifurkasi mundur pada epidemi SIR dengan pengaruh fungsi pengobatan saturasi menggunakan parameter yang berasal dari [14], $\alpha = 0.55, \mu = 0.2, r = 1.2, k = 0.8, A = 2$. Hal ini membuktikan bahwa terjadi bifurkasi mundur pada model epidemi ketika $R_0 = 1$. Selanjutnya terlihat adanya titik endemik yang stabil ketika $R_0 < 1$ pada kurva bifurkasi mundur pada Gambar 4.2. Hal ini menunjukkan bahwa ketika terjadi bifurkasi mundur, penyakit dapat menjadi endemik, sekalipun $R_0 < 1$. Sedangkan ketika $R_0 < R_c$ tidak terdapat titik endemik. Sehingga R_c dapat digunakan bilangan reproduksi dasar baru dalam mengendalikan penyebaran penyakit.

Berdasarkan Gambar 4.2, dapat dilihat bahwa terdapat dua titik kesetimbangan endemik pada interval nilai R_c ke R_0 yang didefinisikan dengan $R_0 = p_0$ sampai dengan $R_0 = 1$. Untuk menghitung nilai R_c , maka substitusikan nilai r, α, μ, k ke dalam $R_0 = p_0$, maka diperoleh

$$R_0 = 1 - \frac{\alpha^2 k^2 + r}{\alpha \mu + r} + \frac{2 \alpha k \sqrt{r}}{\alpha \mu + r}$$

$$R_0 = \frac{-\alpha^2 k^2 + \alpha \mu + r - r + 2 \alpha k \sqrt{r}}{\alpha \mu + r}$$

$$R_0 = \left(-\alpha k + \frac{\mu}{k} + 2\sqrt{r} \right) \left(\frac{\alpha k}{\alpha \mu + r} \right)$$

$$R_0 \left(\frac{\alpha \mu + r}{\alpha k} \right) = -\alpha k + \frac{\mu}{k} + 2\sqrt{r}$$

$$A + \alpha k - \frac{\mu}{k} = \sqrt{4r}$$

karena $\alpha k + \frac{\mu}{k} < A$ dan $R_0 < 1$, maka

$$A^c = \frac{\mu}{k} - \alpha k + \sqrt{4r} \quad (4.29)$$

sehingga didapat

$$R_c = \frac{kA^c}{\mu + \frac{r}{\alpha}} = p_0 \quad (4.30)$$

Selanjutnya, dengan menghitung $\frac{dR_c(\alpha)}{d\alpha} > 0$

$$\begin{aligned} \frac{dR_c(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d\left(\frac{kA^c}{\mu + \frac{r}{\alpha}}\right)}{d\alpha} \\ &= \frac{kA^c(\alpha\mu + r) - \alpha kA^c(\mu)}{(\alpha\mu + r)^2} \\ &= \frac{kA^c(r)}{(\alpha\mu + r)^2} > 0 \end{aligned}$$

dapat disimpulkan bahwa R_c merupakan fungsi naik yang bergantung dengan nilai parameter α . Dalam hal ini α merupakan ukuran yang menyatakan dampak pengobatan tertunda akibat keadaan saturasi pada individu yang terinfeksi. Oleh karena itu bifurkasi mundur terjadi apabila ada dampak yang besar dari pengobatan tertunda (pengaruh fungsi pengobatan saturasi).

4.4.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik

Untuk mengetahui laju penyebaran penyakit pada titik endemik dilakukan analisis kestabilan titik keseimbangan endemik. Pada sub bab (4.3.1), telah didapat matriks Jacobian

$$J(E) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial S} &= A - 2S - kI \\ \frac{\partial g}{\partial S} &= kI \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial I} = -kS$$

$$\frac{\partial g}{\partial I} = kS - \mu - \frac{r(\alpha+I)+rI}{(\alpha+I)^2}$$

maka matriks Jacobian menjadi

$$\begin{aligned} J(E) &= \begin{bmatrix} A - 2S - kI & -kS \\ kI & kS - \mu - \frac{r(\alpha+I)+rI}{(\alpha+I)^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - S - kI - S & -kS \\ kI & kS - \mu - \frac{r}{(\alpha+I)} + \frac{rI}{(\alpha+I)^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Persamaan (4.17) diperoleh

$$S(A - S) - kIS = 0$$

$$S(A - S) = kIS$$

$$(A - S) = kI$$

$$A - S - kI = 0 \quad (4.31)$$

dan berdasarkan Persamaan (4.18) diperoleh

$$kIS - \mu I - \frac{rI}{\alpha+I} = 0$$

$$\left(kS - \mu - \frac{r}{\alpha+I} \right) I = 0, \text{ karena } I \neq 0 \text{ maka}$$

$$kS - \mu - \frac{r}{\alpha+I} = 0 \quad (4.32)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.31) dan (4.32) pada matriks Jacobian maka matriks Jacobiannya menjadi

$$J(E) = \begin{bmatrix} -S & -kS \\ kI & \frac{rI}{(\alpha+I)^2} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

1. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik untuk $R_0 = R_c$

Ketika $R_0 = R_c$ maka Persamaan (4.2) memiliki titik kesetimbangan endemik $E_0 = (S_0, I_0)$ dimana

$$S_0 = \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k}}{2} \text{ dan } I_0 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k}}{2} \quad (4.34)$$

maka matriks Jacobian dari E_0

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -S_0 & -kS_0 \\ kI_0 & \frac{rI_0}{(\alpha + I_0)^2} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\det(J(E_0)) = S_0 I_0 \left(k^2 - \frac{r}{(\alpha + I_0)^2} \right) \quad (4.36)$$

karena $R_0 > p_0$ dan $I_0 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k}}{2k}$, maka

$$\begin{aligned} (\alpha + I_0)^2 &= \left(\alpha + \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k}}{2k} \right)^2 \\ &= \frac{\left(A + \alpha k - \frac{\mu}{k} \right)^2}{4k^2} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{r}{k^2}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \det(J(E_0)) &= S_0 I_0 \left(k^2 - \frac{r}{(\alpha + I_0)^2} \right) \\ &< S_0 I_0 \left(k^2 - \frac{r}{\frac{r}{k^2}} \right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

jadi diperoleh bahwa $\det(J(E_0)) < 0$ selanjutnya menggunakan Tabel 2.2 untuk menentukan kriteria kestabilan berdasarkan $\det(J(E))$ sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik E_0 tidak stabil (*saddle*).

2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik untuk $R_c < R_0 < 1$

Ketika $R_c < R_0 < 1$ maka Persamaan (4.2) memiliki dua titik kesetimbangan endemik $E_1 = (S_1, I_1)$ dan $E_2 = (S_2, I_2)$. Pada kestabilan titik kesetimbangan endemik $E_1 = (S_1, I_1)$ diketahui

$$S_1 = \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ dan } I_1 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k} \quad (4.37)$$

maka matriks Jacobian dari E_1

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -S_1 & -kS_1 \\ kI_1 & \frac{rI_1}{(\alpha + I_1)^2} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\det(J(E_1)) = S_1 I_1 \left(k^2 - \frac{r}{(\alpha + I_1)^2} \right) \quad (4.39)$$

karena $R_0 > p_0$ dan $I_1 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k}$, maka

$$\begin{aligned} (\alpha + I_1)^2 &= \left(\alpha + \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k} \right)^2 \\ &= \left(\frac{A + \alpha k - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k} \right)^2 \\ &< \frac{\left(A + \alpha k - \frac{\mu}{k} \right)^2}{4k^2} \\ &< \frac{r}{k^2} \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\det(J(E_1)) &= S_1 I_1 \left(k^2 - \frac{r}{(\alpha + I_1)^2} \right) \\ &< S_1 I_1 \left(k^2 - \frac{r}{\frac{r}{k^2}} \right) \\ &< 0\end{aligned}$$

jadi diperoleh bahwa $\det(J(E_1)) < 0$, selanjutnya menggunakan Tabel 2.2 untuk menentukan kriteria kestabilan berdasarkan $\det(J(E))$ sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik E_1 tidak stabil (*saddle*).

Kemudian pada kestabilan titik kesetimbangan endemik $E_2 = (S_2, I_2)$ diketahui

$$S_2 = \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{dan} \quad I_2 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \quad (4.40)$$

maka matriks Jacobian dari E_2

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -S_2 & -kS_2 \\ kI_2 & \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\det(J(E_2)) = S_2 I_2 \left(k^2 - \frac{r}{(\alpha + I_2)^2} \right) \quad (4.42)$$

karena $R_0 > p_0$ dan $I_2 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k}$, maka

$$(\alpha + I_2)^2 = \left(\alpha + \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right)^2$$

$$= \left(\frac{A + \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right)^2$$

$$> \frac{\left(A + \alpha k - \frac{\mu}{k} \right)^2}{4k^2}$$

$$> \frac{r}{k^2}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \det(J(E_2)) &= S_2 I_2 \left(k^2 - \frac{r}{(\alpha + I_2)^2} \right) \\ &> S_2 I_2 \left(k^2 - \frac{r}{k^2} \right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

jadi diperoleh bahwa $\det(J(E_2)) > 0$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik E_2 merupakan simpul atau spiral. Kemudian dengan menghitung

$$|J(E_2) - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -S_2 - \lambda & -kS_2 \\ kI_2 & \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \left(S_2 - \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} \right) \lambda - \frac{rS_2 I_2}{(\alpha + I_2)^2} - k^2 S_2 I_2 = 0$$

$$\lambda^2 + \left(S_2 - \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} \right) \lambda - \left(\frac{r}{(\alpha + I_2)^2} + k^2 \right) S_2 I_2 = 0$$

maka diperoleh

$$\text{tr}(J(E_2)) = \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} - S_2 \quad (4.43)$$

selanjutnya misalkan

$$(H_1) \Delta_{44} = [(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k > 0$$

dan didefinisikan

$$H \triangleq \frac{\alpha k^2}{k-1} - \frac{\mu}{k(k-1)} - \frac{\sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k}}{(k-1)}$$

maka kestabilan titik kesetimbangan endemik E_2 dinyatakan dalam teorema berikut

Teorema 4.4.2 misalkan $\alpha k < \sqrt{r}, p_1 < R_0 < 1$ dan (H_1) ada, maka untuk sistem Persamaan (4.2) mempunyai

1. E_2 stabil jika

$$(k-1)A - \mu + \alpha k \leq 0$$

atau

$$(k-1)A - \mu + \alpha k > 0$$

$$r < \frac{1}{4} \left[\left(A + \alpha k - \frac{\mu}{k} \right)^2 - H^2 \right]$$

2. E_2 tidak stabil jika

$$(k-1)A - \mu + \alpha k > 0$$

$$r > \frac{1}{4} \left[\left(A + \alpha k - \frac{\mu}{k} \right)^2 - H^2 \right]$$

Bukti

Berdasarkan Persamaan (4.2) diketahui $\frac{rI_2}{\alpha + I_2} = kS_2I_2 - \mu I_2$, maka

$$tr(J(E_2)) = \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} - S_2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{rI_2}{\alpha + I_2} \left[\frac{1}{\alpha + I_2} - \frac{S_2}{\frac{rI_2}{\alpha + I_2}} \right] \\
&= kS_2I_2 - \mu I_2 \left[\frac{1}{\alpha + I_2} - \frac{S_2}{kS_2I_2 - \mu I_2} \right] \\
&= \frac{1}{\alpha + I_2} [kS_2I_2 - \mu I_2 - S_2(\alpha + I_2)] \\
&= \frac{1}{\alpha + I_2} [kS_2I_2 - \mu I_2 - \alpha S_2 - S_2I_2] \\
&= \frac{1}{\alpha + I_2} [(k - 1)S_2I_2 - \mu I_2 - \alpha S_2] \quad (4.44)
\end{aligned}$$

sehingga $tr(J(E_2))$ bernilai negatif jika $k \leq 1$. Kemudian andaikan $k > 1$, maka akan dicari kondisi dimana $tr(J(E_2)) = 0$. Karena $S_2 = A - kI_2$, maka berdasarkan Persamaan (4.44) bahwa $tr(J(E_2)) = 0$ ekuivalen dengan

$$tr(J(E_2)) = 0$$

$$\frac{1}{\alpha + I_2} [(k - 1)S_2I_2 - \mu I_2 - \alpha S_2] = 0$$

$$\frac{1}{\alpha + I_2} [(k - 1)(A - kI_2)I_2 - \mu I_2 - \alpha(A - kI_2)] = 0$$

$$AkI_2 - AI_2 - k^2I_2^2 + kI_2^2 - \alpha A + \alpha kI_2 - \mu I_2 = 0$$

$$(1 - k)kI_2^2 + ((k - 1)A - \mu + \alpha k)I_2 - \alpha A = 0 \quad (4.45)$$

Dari Persamaan (4.45) diketahui penyelesaian dari $tr(J(E_2))$ merupakan himpunan kosong jika

$$(k - 1)A - \mu + \alpha k \leq 0 \quad (4.46)$$

dan jika

$$(k-1)A - \mu + \alpha k > 0 \quad (4.47)$$

maka dapat diperoleh

$$I_2 = \frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k] \pm \sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k}}{2k(k-1)} \quad (4.48)$$

$$I_2 = \left[\frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k]}{2k(k-1)} \right] \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha A(1-k)k}{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2}} \right] \quad (4.49)$$

karena $I_2 < \frac{A}{k}$, maka

$$I_2 = \left[\frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k]}{2k(k-1)} \right] \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha A(1-k)k}{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2}} \right] \quad (4.50)$$

selanjutnya, dengan menggunakan Persamaan H dan

mensubstitusikan $I_2 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k}$, maka Persamaan (4.50) menjadi

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left[\frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right] &= \\ \left[\frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k]}{2k(k-1)} \right] \left[1 - \sqrt{\frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k}{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2}} \right] &= \\ \Leftrightarrow \left[\frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right] &= \\ \left[\frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k]}{2k(k-1)} \right] \left[1 - \frac{\sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k}}{[(k-1)A - \mu + \alpha k]} \right] &= \\ \Leftrightarrow \left[\frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right] &= \left[\frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k]}{2k(k-1)} - \frac{\sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k}}{2k(k-1)} \right] \\ \Leftrightarrow \left[\frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right] &= \left[\frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k] - \sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k}}{2k(k-1)} \right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(k-1)\left(A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}\right)}{2k(k-1)} \right] - \left[\frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k] - \sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k}}{2k(k-1)} \right] = 0$$

karena $2k(k-1) \neq 0$, maka

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left[(k-1)\left(A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}\right) \right] - \left[[(k-1)A - \mu + \alpha k] - \sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[Ak - A - \alpha k^2 + \alpha k - \mu + \frac{\mu}{k} + (k-1)\sqrt{\Delta} \right] - \left[[Ak - A - \mu + \alpha k] - \sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow -\alpha k^2 + \frac{\mu}{k} + (k-1)\sqrt{\Delta} + \sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k} = 0 \\ &\Leftrightarrow (k-1)\sqrt{\Delta} = \alpha k^2 - \frac{\mu}{k} - \sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{\alpha k^2}{(k-1)} - \frac{\mu}{k(k-1)} - \frac{\sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k}}{(k-1)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = H \end{aligned} \quad (4.51)$$

dari Persamaan (4.21) diketahui bahwa $\Delta = \left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - 4r$, maka

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - 4r} = H$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - 4r = H^2 \\
&\Leftrightarrow 4r = \left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \\
&\Leftrightarrow r = \frac{1}{4} \left[\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right] \quad (4.52)
\end{aligned}$$

Sehingga, dapat dilihat bahwa (H_1) , Persamaan (4.47) dan (4.50) merupakan syarat perlu dan cukup agar $\text{tr}(J(E_2)) = 0$. Kemudian berdasarkan definisi $\text{tr}(J(E_2)) = 0$ bahwa Persamaan (4.46) berarti $\text{tr}(J(E_2)) < 0$. Oleh karena itu, E_2 stabil jika (4.46) ada. Kemudian $\text{tr}(J(E_2)) < 0$ jika $r < \frac{1}{4} \left[\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]$, dan $\text{tr}(J(E_2)) > 0$ jika $r > \frac{1}{4} \left[\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]$.

4.5 Analisis Bifurkasi Hopf

Salah satu perubahan kualitatif yang mengakibatkan terjadinya bifurkasi ialah muncul dan hilangnya orbit periodik dari suatu titik kesetimbangan (Bifurkasi Hopf). Pada sub bab ini akan dibahas tentang terjadinya bifurkasi Hopf.

Teorema 4.5.1. *Titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1(A, 0)$ stabil asimtotik global jika hanya jika $R_0 < 1$ dan $p_1 \geq 1$.*

Bukti

Pada bab 4.4 telah dibuktikan bahwa jika $\alpha k < \sqrt{r}$, maka sistem Persamaan (4.2) memiliki dua titik kesetimbangan endemik $E_1 = (S_1, I_1)$ dan $E_2 = (S_2, I_2)$ pada saat $R_0 < 1$. Dan jika $\alpha k \geq \sqrt{r}$, maka $p_1 \geq 1$, sehingga tidak mempunyai titik kesetimbangan endemik ketika $R_0 < 1$. Karena Ω merupakan daerah penyelesaian dan E_1 merupakan satu satunya titik kesetimbangan yang berada di

Ω , maka stabilitas lokal dari E_1 mengakibatkan setiap nilai populasi awal S dan I di Ω akan mendekati E_1 . Sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit E_1 stabil asimotis global.

Berdasarkan pembuktian **Teorema 4.5.1** ini dapat disimpulkan agar penyakit menghilang $R_0 < R_c$ atau R_0 harus sangat kecil. Berdasarkan besar $R_0 = \frac{kA}{\mu + \frac{r}{\alpha}}$ maka untuk mengendalikan penyakit agar berada di bawah keadaan endemik maka harus meminimalisir dampak pengobatan tertunda α dan meningkatkan laju pengobatan r .

Teorema 4.5.2. *Ketika $R_0 > 1$ dan $k \leq 1$ maka tidak terjadi limit cycle pada sistem Persamaan (4.2)*

Bukti

Dengan menggunakan **Teorema 2.3** akan diselidiki keberadaan limit cycle. Selanjutnya dimisalkan Persamaan-Persamaan pada sistem Persamaan (4.2) sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(S, I) &= S[(A - S) - kI] \\ g(S, I) &= I \left[kS - \mu - \frac{r}{\alpha + I} \right] \end{aligned}$$

dan didefinisikan fungsi Dulac

$$B = \frac{\alpha + I}{SI}$$

sehingga kita dapatkan

$$Bf = [(A - S) - kI] \left(\frac{\alpha + I}{SI} \right)$$

$$Bg = \left[kS - \mu - \frac{r}{\alpha + I} \right] \left(\frac{\alpha + I}{SI} \right)$$

$$\frac{\partial(Bf)}{\partial S} + \frac{\partial(Bg)}{\partial I} = k - 1 - \frac{\mu}{S} - \frac{\alpha}{I} \quad (4.53)$$

Karena $k \leq 1$ maka $k - 1 - \frac{\mu}{S} - \frac{\alpha}{I} < 0$, sehingga Persamaan (4.53) menjadi

$$\frac{\partial(Bf)}{\partial S} + \frac{\partial(Bg)}{\partial I} = k - 1 - \frac{\mu}{S} - \frac{\alpha}{I} < 0$$

Berdasarkan **Teorema 2.3**, karena $\frac{\partial(PD)}{\partial S} + \frac{\partial(QD)}{\partial S} \neq 0$, maka terbukti bahwa pada Persamaan (4.2) tidak terdapat limit cycle ketika $R_0 > 1$ dan $k \leq 1$.

4.5.1 Eksistensi Bifurkasi Hopf

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan sebelumnya model epidemi pada sistem Persamaan (4.2) tidak terdapat orbit periodik di sekitar E_1 karena E_1 selalu saddle. Oleh karena itu bifurkasi Hopf hanya dapat terjadi pada E_2 .

Teorema 4.4.3. *Misalkan $ak < \sqrt{r}$, $p_1 < R_0 < 1$. Maka pada sistem Persamaan (4.2) terjadi bifurkasi Hopf jika (H1), (4.47), (4.50) berlaku. Selanjutnya jika $\sigma < 0$ orbit periodik dari sistem Persamaan (4.2) stabil sehingga terjadi bifurkasi Hopf superkritikal. Dan jika $\sigma > 0$ orbit periodik dari sistem Persamaan (4.2) tidak stabil sehingga terjadi bifurkasi Hopf subkritikal*

Bukti

Bedasarkan sistem Persamaan (4.2)

$$\frac{dS}{dt} = S(A - S) - kIS$$

$$\frac{dI}{dt} = kIS - \mu I - \frac{r}{\alpha + I}$$

didapatkan salah satu titik kesetimbangan $E_2 = (S_2, I_2)$ dan matriks Jacobian E_2 diketahui pada persamaan (4.41) sebagai berikut

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -S_2 & -kS_2 \\ kI_2 & \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh perhitungan $|J(E_2) - \lambda I| = 0$ sebagai berikut

$$|J(E_2) - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -S_2 - \lambda & -kS_2 \\ kI_2 & \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \left(S_2 - \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2}\right)\lambda - \frac{rS_2I_2}{(\alpha + I_2)^2} - k^2S_2I_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \left(S_2 - \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2}\right)\lambda - \left(\frac{r}{(\alpha + I_2)^2} + k^2\right)S_2I_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda(tr(J(E_2))) + det(J(E_2)) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{(tr(J(E_2))) \pm \sqrt{(tr(J(E_2)))^2 - 4det(J(E_2))}}{2}$$

(4.54)

Menurut **Definisi 2.2** bifurkasi Hopf terjadi apabila matriks Jacobian mempunyai sepasang nilai eigen yang imajiner murni. Kedua nilai eigen imajiner murni jika dan hanya jika $tr(J(E_2)) = 0$. Sedangkan pada Persamaan (4.44) diketahui bahwa

$$tr(J(E_2)) = \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} - S_2$$

Pada sub bab 4.4.2 diketahui bahwa $tr(J(E_2)) = 0$ jika hanya jika (H_1) , Persamaan (4.47) dan (4.50) berlaku. Sehingga matriks Jacobian (4.41) mempunyai kedua nilai eigen imajiner murni. Kemudian berdasarkan Persamaan (4.54) jelas bahwa $Re(\bar{\lambda}(J(E_2))) = \frac{1}{2}(Tr(J(E_2)))$ sedemikian hingga di dapat

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{d}{dr} \left\{ Re \left(\bar{\lambda}(J(E_2)) \right) \right\} \right|_{r=\frac{1}{4} \left[\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]} \\
 & \left. \frac{d}{dr} \frac{1}{2} (Tr(J(E_2))) \right|_{r=\frac{1}{4} \left[\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]} \\
 & = \left. \frac{d}{dr} \frac{1}{2} \left(\frac{r I_2}{(\alpha + I_2)^2} - S_2 \right) \right|_{r=\frac{1}{4} \left[\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]} \\
 & = \left. \left[\left(\frac{I_2}{2(\alpha + I_2)^2} \frac{dr}{dr} \right) - \left(\frac{d}{dr} \frac{S_2}{2} \right) \right] \right|_{r=\frac{1}{4} \left[\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]} \\
 & = \frac{I_2}{2(\alpha + I_2)^2} \neq 0 \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

Dari pada Persamaan (4.55) diketahui bahwa

$$\left. \frac{d}{dr} \left\{ Re \left(\bar{\lambda}(J(E_2)) \right) \right\} \right|_{r=\frac{1}{4} \left[\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]} \neq 0$$

sehingga memenuhi syarat transversal pada **Definisi 2.2**. Jadi terjadi bifurkasi Hopf dari model epidemi pada sistem Persamaan (4.2) jika $Tr(J(E_2)) = 0$, sedemikian hingga nilai eigen Persamaan (4.54) menjadi

$$\bar{\lambda}(J(E_2)) = \pm i \sqrt{\det(J(E_2))},$$

dan dengan substitusi

$$\omega = \sqrt{\det(J(E_2))},$$

maka

$$\bar{\lambda}(J(E_2)) = \pm i\omega, \text{ dengan syarat } \omega > 0.$$

Selanjutnya diselidiki jenis bifurkasi Hopf yang terjadi subkritikal atau superkritikal dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menggeser (mentranslasi) titik kesetimbangan (S_2, I_2) ke titik $(0,0)$ dengan melakukan transformasi

$$x = S - S_2, \quad y = I - I_2 \text{ dan } d\tau = \frac{dt}{(\alpha + I + I_2)}.$$

- Pertama dilakukan transformasi $x = S - S_2$

Pada saat $x = S - S_2$ diperoleh $\frac{dx}{d\tau}$ sebagai berikut

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\frac{dx}{dt}}{(\alpha + y + I_2)} = \frac{dx}{dt} (\alpha + y + I_2) \text{ dengan}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = [S(A - S) - kIS] - [S_2(A - S_2) - kI_2S_2]$$

$$\frac{dx}{d\tau} = AS - S^2 - kIS - AS_2 + S_2^2 + kI_2S_2$$

dengan substitusi $x = S - S_2$ dan $y = I - I_2$ ke Persamaan di atas selanjutnya diperoleh

$$\frac{dx}{d\tau} = A(x + S_2) - (x + S_2)^2 - k(y + I_2)(x + S_2) - AS_2 + S_2^2 + kI_2S_2$$

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax + AS_2 - x^2 - 2xS_2 - S_2^2 - k(xy + S_2y + I_2x + S_2I_2) - AS_2 + S_2^2 + kI_2S_2$$

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax + AS_2 - x^2 - 2xS_2 - S_2^2 - kxy - kS_2y - kI_2x - kS_2I_2 - AS_2 + S_2^2 + kI_2S_2$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax - x^2 - 2xS_2 - kxy - kS_2y - kI_2x$$

$$\frac{dx}{dt} = (A - 2S_2 - kI_2)x - kS_2y - kxy - x^2$$

maka

$$\frac{dx}{d\tau} = (\alpha + y + I_2)[(A - 2S_2 - kI_2)x - kS_2y - kxy - x^2]$$

kemudian untuk memudahkan, maka dimisalkan $x = S, y = I$ dan $\tau = t$ sehingga diperoleh

$$\frac{dS}{dt} = (\alpha + I + I_2)[(A - 2S_2 - kI_2)S - kS_2I - kSI - S^2] \quad (4.56)$$

- Kedua dilakukan transformasi $y = I - I_2$

Pada saat $y = I - I_2$ diperoleh $\frac{dy}{d\tau}$ sebagai berikut

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\alpha + y + I_2} = \frac{dy}{dt}(\alpha + y + I_2), \text{ dengan}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left[kIS - \mu I - \frac{rI}{\alpha + I} \right] - \left[kI_2S_2 - \mu I_2 - \frac{rI_2}{\alpha + I_2} \right]$$

$$\frac{dy}{dt} = kIS - \mu I - \frac{rI}{\alpha + I} - kI_2S_2 + \mu I_2 + \frac{rI_2}{\alpha + I_2}$$

dengan substitusi $x = S - S_2$ dan $y = I - I_2$ ke Persamaan di atas selanjutnya diperoleh

$$\frac{dy}{dt} = k(y + I_2)(x + S_2) - \mu(y + I_2) - \frac{r(y + I_2)}{\alpha + (y + I_2)} - kI_2S_2 + \mu I_2 + \frac{rI_2}{\alpha + I_2}$$

$$\frac{dy}{dt} = k(xy + S_2y + I_2x + S_2I_2) - \mu y - \mu I_2 - \frac{ry}{\alpha + y + I_2} - \frac{rI_2}{\alpha + y + I_2} - kI_2S_2 + \mu I_2 + \frac{rI_2}{\alpha + I_2}$$

$$\frac{dy}{dt} = kxy + kS_2y + kI_2x + kS_2I_2 - \mu y - \mu I_2 - \frac{ry}{\alpha + y + I_2} - \frac{rI_2}{\alpha + y + I_2} - kI_2S_2 + \mu I_2 + \frac{rI_2}{\alpha + I_2}$$

$$\frac{dy}{dt} = kxy + kS_2y + kI_2x - \mu y - \frac{ry}{\alpha + y + I_2} - \frac{rI_2}{\alpha + y + I_2} + \frac{rI_2}{\alpha + I_2}$$

$$\frac{dy}{dt} = kxy + (kS_2 - u)y + kI_2x - \frac{ry}{\alpha + y + I_2} - \frac{rI_2}{\alpha + y + I_2} + \frac{rI_2}{\alpha + I_2}$$

maka

$$\frac{dy}{d\tau} = [kxy + (kS_2 - u)y + kI_2x](\alpha + y + I_2) - ry - rI_2 + \frac{rI_2(\alpha + y + I_2)}{\alpha + I_2}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = [kxy + (kS_2 - u)y + kI_2x](\alpha + y + I_2) - \frac{ry(\alpha + I_2)}{\alpha + I_2} - \frac{rI_2(\alpha + I_2)}{\alpha + I_2} + \frac{rI_2(\alpha + y + I_2)}{\alpha + I_2}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = [kxy + (kS_2 - u)y + kI_2x](\alpha + y + I_2) + \left[\frac{-r\alpha y - rI_2y - r\alpha I_2 - rI_2^2 + r\alpha I_2 + rI_2y + rI_2^2}{\alpha + I_2} \right]$$

$$\frac{dy}{d\tau} = [kxy + (kS_2 - u)y + kI_2x](\alpha + y + I_2) - \frac{r\alpha y}{\alpha + I_2}$$

kemudian untuk memudahkan, maka dimisalkan $x = S, y = I$ dan $\tau = t$ sehingga diperoleh

$$\frac{dl}{dt} = [kSI + (kS_2 - u)I + kI_2S](\alpha + I + I_2) - \frac{ral}{\alpha + I_2} \quad (4.57)$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (4.2) dan $\text{tr}(J(E_2)) = 0$, diperoleh

$$A - S_2 - kI_2 = 0, kS_2 - u - \frac{r}{\alpha + I_2} = 0, \text{ dan } rI_2 - S_2(\alpha + I_2)^2 = 0$$

sehingga Persamaan $\frac{dS}{dt}$ dan $\frac{dI}{dt}$ menjadi

$$\frac{dS}{dt} = (\alpha + I + I_2)[(A - 2S_2 - kI_2)S - kS_2I - kSI - S^2]$$

$$\frac{dS}{dt} = (\alpha + I + I_2)(A - 2S_2 - kI_2)S - (\alpha + I + I_2)kS_2I - (\alpha + I + I_2)kSI - (\alpha + I + I_2)S^2$$

$$\frac{dS}{dt} = (\alpha + I + I_2)(A - S_2 - kI_2 - S_2)S - (\alpha + I + I_2)kS_2I - (\alpha + I + I_2)kSI - (\alpha + I + I_2)S^2$$

$$\frac{dS}{dt} = (\alpha + I + I_2)(-S_2)S - (\alpha + I + I_2)kS_2I - (\alpha + I + I_2)kSI - (\alpha + I + I_2)S^2$$

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S_2S - S_2SI - S_2I_2S - k\alpha S_2I - kS_2I^2 - kS_2I_2I - k\alpha SI - kSI^2 - kI_2SI - \alpha S^2 - S^2I - I_2S^2$$

$$\frac{dS}{dt} = -S_2(\alpha + I_2)S - kS_2(\alpha + I_2)I - (k\alpha + kI_2 + S_2)SI - (\alpha + I_2)S^2 - kS_2I^2 - kSI^2 - S^2I$$

$$\frac{dS}{dt} = -S_2(\alpha + I_2)S - kS_2(\alpha + I_2)I - (k\alpha + A)SI - (\alpha + I_2)S^2 - kS_2I^2 - kSI^2 - S^2I \quad (4.58)$$

dan

$$\frac{dI}{dt} = [kSI + (kS_2 - u)I + kI_2S](\alpha + I + I_2) - \frac{ral}{\alpha + I_2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \left[kSI + \frac{r}{\alpha + I_2}I + kI_2S \right] (\alpha + I + I_2) - \frac{ral}{\alpha + I_2}$$

$$\frac{dI}{dt} = kSI(\alpha + I + I_2) + \frac{r}{\alpha + I_2}I(\alpha + I + I_2) + kI_2S(\alpha + I + I_2) - \frac{ral}{\alpha + I_2}$$

$$\frac{dI}{dt} = k\alpha SI + kSI^2 + kI_2SI + k\alpha I_2S + kI_2SI + kI_2^2S + \frac{ral}{\alpha + I_2} + \frac{rI^2}{\alpha + I_2} + \frac{rI_2I}{\alpha + I_2} - \frac{ral}{\alpha + I_2}$$

$$\frac{dI}{dt} = kI_2(\alpha + I_2)S + S_2(\alpha + I_2)I + k(\alpha + 2I_2)SI + \frac{rI^2}{\alpha + I_2} + kSI^2 \quad (4.59)$$

Kemudian membentuk Persamaan (4.58) dan (4.59) dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & -km \\ p & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

dengan

$$m = S_2(\alpha + I_2)$$

$$p = kI_2(\alpha + I_2)$$

$$g = -(k\alpha + A)SI - (\alpha + I_2)S^2 - kS_2I^2 - kSI^2 - S^2I$$

$$h = k(\alpha + 2I_2)SI + \frac{rI^2}{\alpha + I_2} + kSI^2$$

2. Mencari matriks Jacobian dari Persamaan (4.58) dan (4.59) dengan

$$(J(E_2)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial I} \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial I} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$(J(E_2)) = \begin{bmatrix} -m - (k\alpha + A)I - 2(\alpha + I_2)S - kI^2 - 2SI & p + k(\alpha + 2I_2)I + kSI^2 \\ -km - (k\alpha + A)S - 2kS_2I - 2kSI - S^2 & m + k(\alpha + 2I_2)S + \frac{2rI}{\alpha + I_2} + 2kSI \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Selanjutnya mensubstitusikan titik kesetimbangan yang baru $(S, I) = (0, 0)$ ke matriks Jacobian (4.61) sedemikian hingga

$$(J(E_2)) = \begin{bmatrix} -m & -km \\ p & m \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

3. Mencari eigen value dari matriks Jacobian (4.62) pada saat $Tr(J(E_2)) = 0$.

Sebelumnya sudah didefinisikan bahwa $\omega = \sqrt{\det(J(E_2))} > 0$.

Berdasarkan matriks Jacobian (4.62) diperoleh perhitungan nilai

eigen dengan $|J - \bar{\lambda}I| = 0$ sebagai berikut

$$|(J(E_2)) - \bar{\lambda}I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -m - \bar{\lambda} & -km \\ p & m - \bar{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

$$\bar{\lambda}^2 - m^2 + pkm = 0$$

$$\bar{\lambda}^2 + \det(J(E_2)) = 0$$

$$\bar{\lambda} = \pm i \sqrt{\det(J(E_2))}$$

$$\bar{\lambda} = \pm i\omega$$

Dengan nilai eigen dari matriks Jacobian (4.62) adalah $\bar{\lambda} = \pm i\omega$

4. Maka selanjutnya dibentuk vektor eigen sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -m - i\omega & -km \\ p & m - i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga didapat

$$(-m - i\omega)v_1 - kmv_2 = 0 \quad (4.63)$$

$$pv_1 + (m - i\omega)v_2 = 0$$

dengan memisalkan $v_2 = \frac{1}{\omega}$ maka dari Persamaan (4.63) diperoleh

$$pv_1 + (m - i\omega)\frac{1}{\omega} = 0$$

$$\Rightarrow pv_1 + \frac{m}{\omega} - i = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{m}{p\omega} + \frac{i}{p}$$

sehingga diperoleh vektor eigen sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{m}{p\omega} + \frac{i}{p} \\ \frac{1}{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{m}{p\omega} \\ \frac{1}{\omega} \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \frac{1}{p} \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{m}{p\omega} \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix}$$

serta

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} p & m \\ 0 & \omega \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya transformasi (S, I) sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{m}{p\omega} \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

sehingga

$$S = \frac{x}{p} - \frac{my}{p\omega} \text{ dan } I = \frac{y}{\omega} \quad (4.64)$$

dengan

$$\begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{m}{p\omega} \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

5. Selanjutnya merubah sistem dinamik dalam bentuk Persamaan (S,I) ke Persamaan (x,y) sebagai berikut

Berdasarkan matriks (4.60) sistem dinamik dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{ds}{dt} \\ \frac{dl}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & -km \\ p & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

dengan substitusi matriks (4.65) ke Persamaan di atas diperoleh

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{m}{p\omega} \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & -km \\ p & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{m}{p\omega} \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{m}{p\omega} \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{m}{p} & \frac{m^2}{p\omega} - \frac{km}{\omega} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{m}{p\omega} \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{m}{p\omega} \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{m}{p\omega} \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{m}{p} & \frac{m^2}{p\omega} - \frac{km}{\omega} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{m}{p\omega} \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & m \\ 0 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{m}{p} & \frac{m^2}{p\omega} - \frac{km}{\omega} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & m \\ 0 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m^2}{\omega} - \frac{pkm}{\omega} \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & m \\ 0 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gp + hm \\ \omega h \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

kemudian mencari bentuk normal Bifurkasi Hopf dari sistem Persamaan (4.2) dengan cara mensubstitusikan nilai g dan h ke matriks (4.66) dengan perhitungan sebagai berikut

- Perhitungan nilai gp

$$gp = [-(k\alpha + A)SI - (\alpha + I_2)S^2 - kS_2I^2 - kSI^2 - S^2I]p$$

$$gp = [-(k\alpha + A)\left(\frac{x}{p} - \frac{my}{p\omega}\right)\left(\frac{y}{\omega}\right) - (\alpha + I_2)\left(\frac{x}{p} - \frac{my}{p\omega}\right)^2 - kS_2\left(\frac{y}{\omega}\right)^2 - k\left(\frac{x}{p} - \frac{my}{p\omega}\right)\left(\frac{y}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{x}{p} - \frac{my}{p\omega}\right)^2\left(\frac{y}{\omega}\right)]p$$

$$gp = \left[-(k\alpha + A)\left(\frac{\omega xy}{p\omega^2} - \frac{my^2}{p\omega^2}\right) - (\alpha + I_2)\left(\frac{x^2}{p^2} - 2\frac{mxy}{p^2\omega} + \frac{m^2y^2}{p^2\omega^2}\right) - kS_2\left(\frac{y^2}{\omega^2}\right) - k\left(\frac{\omega xy^2}{p\omega^3} - \frac{my^3}{p\omega^3}\right) - \left(\frac{x^2y}{p^2\omega} - 2\frac{mxy^2}{p^2\omega^2} + \frac{m^2y^3}{p^2\omega^3}\right) \right]p$$

$$gp = \left[-\frac{(k\alpha + A)\omega xy}{p\omega^2} + \frac{(k\alpha + A)my^2}{p\omega^2} - \frac{(\alpha + I_2)x^2}{p^2} + \frac{2(\alpha + I_2)mxy}{p^2\omega} - \frac{(\alpha + I_2)m^2y^2}{p^2\omega^2} - \frac{kS_2y^2}{\omega^2} - \frac{k\omega xy^2}{p\omega^3} + \frac{kmy^3}{p\omega^3} - \frac{x^2y}{p^2\omega} + \frac{2mxy^2}{p^2\omega^2} - \frac{m^2y^3}{p^2\omega^3} \right]p$$

$$gp = \left[-\frac{(k\alpha + A)\omega xy}{\omega^2} + \frac{(k\alpha + A)my^2}{\omega^2} - \frac{(\alpha + I_2)x^2}{p} + \frac{2(\alpha + I_2)mxy}{p\omega} - \frac{(\alpha + I_2)m^2y^2}{p\omega^2} - \frac{kS_2py^2}{\omega^2} - \frac{k\omega xy^2}{\omega^3} + \frac{kmy^3}{\omega^3} - \frac{x^2y}{p\omega} + \frac{2mxy^2}{p\omega^2} - \frac{m^2y^3}{p\omega^3} \right]$$

$$gp = \left[\left(-\frac{(k\alpha+A)}{\omega} + \frac{2(\alpha+I_2)m}{p\omega} \right) xy + \left(\frac{(k\alpha+A)m}{\omega^2} - \frac{(\alpha+I_2)m^2}{p\omega^2} - \frac{kS_2p}{\omega^2} \right) y^2 - \frac{(\alpha+I_2)}{p} x^2 - \frac{1}{p\omega} x^2 y + \left(-\frac{k}{\omega^2} + \frac{2m}{p\omega^2} \right) xy^2 + \left(\frac{km}{\omega^3} - \frac{m^2}{p\omega^3} \right) y^3 \right]$$

- Perhitungan nilai hm

$$hm = \left[k(\alpha + 2I_2)SI + \frac{rI_2^2}{\alpha+I_2} + kSI^2 \right] m$$

$$hm = \left[k(\alpha + 2I_2) \left(\frac{x}{p} - \frac{my}{p\omega} \right) \left(\frac{y}{\omega} \right) + \frac{r}{\alpha+I_2} \left(\frac{y}{\omega} \right)^2 + k \left(\frac{x}{p} - \frac{my}{p\omega} \right) \left(\frac{y}{\omega} \right)^2 \right] m$$

$$hm = \left[k(\alpha + 2I_2) \left(\frac{\omega xy}{p\omega^2} - \frac{my^2}{p\omega^2} \right) + \frac{r}{\alpha+I_2} \left(\frac{y^2}{\omega^2} \right) + k \left(\frac{\omega xy^2}{p\omega^3} - \frac{my^3}{p\omega^3} \right) \right] m$$

$$hm = \left[\frac{k(\alpha+2I_2)\omega xy}{p\omega^2} - \frac{k(\alpha+2I_2)my^2}{p\omega^2} + \frac{rkI_2y^2}{p\omega^2} + \frac{k\omega xy^2}{p\omega^3} - \frac{kmy^3}{p\omega^3} \right] m$$

$$hm = \left[\frac{k(\alpha+2I_2)mxy}{p\omega} - \frac{k(\alpha+2I_2)m^2y^2}{p\omega^2} + \frac{rkI_2my^2}{p\omega^2} + \frac{k mxy^2}{p\omega^2} - \frac{k m^2y^3}{p\omega^3} \right]$$

$$hm = \left[\frac{k(\alpha+2I_2)m}{p\omega} xy + \left(-\frac{k(\alpha+2I_2)m^2}{p\omega^2} + \frac{rkI_2m}{p\omega^2} \right) y^2 + \frac{km}{p\omega^2} xy^2 - \frac{km^2}{p\omega^3} y^3 \right]$$

- Perhitungan nilai $gp + hm$

$$gp + hm = \left[\left(-\frac{(k\alpha+A)}{\omega} + \frac{2(\alpha+I_2)m}{p\omega} \right) xy + \left(\frac{(k\alpha+A)m}{\omega^2} - \frac{(\alpha+I_2)m^2}{p\omega^2} - \frac{kS_2p}{\omega^2} \right) y^2 - \frac{(\alpha+I_2)}{p} x^2 - \frac{1}{p\omega} x^2 y + \left(-\frac{k}{\omega^2} + \frac{2m}{p\omega^2} \right) xy^2 + \left(\frac{km}{\omega^3} - \frac{m^2}{p\omega^3} \right) y^3 \right]$$

$$\left(\frac{km}{\omega^3} - \frac{m^2}{p\omega^3}\right)y^3 \Big] + \left[\frac{k(\alpha+2I_2)m}{p\omega}xy + \left(-\frac{k(\alpha+2I_2)m^2}{p\omega^2} + \frac{rkI_2m}{p\omega^2}\right)y^2 + \frac{kmy^2}{p\omega^2} - \frac{km^2y^3}{p\omega^3}\right]$$

$$gp + hm = \left[\left(-\frac{(k\alpha+A)\omega}{\omega^2} + \frac{2(\alpha+I_2)m}{p\omega} + \frac{k(\alpha+2I_2)m}{p\omega}\right)xy + \left(\frac{(k\alpha+A)m}{\omega^2} - \frac{(\alpha+I_2)m^2}{p\omega^2} - \frac{kS_2p}{\omega^2} - \frac{k(\alpha+2I_2)m^2}{p\omega^2} + \frac{rkI_2m}{p\omega^2}\right)y^2 - \frac{(\alpha+I_2)}{p}x^2 - \frac{1}{p\omega}x^2y + \left(-\frac{k}{\omega^2} + \frac{2m}{p\omega^2} + \frac{km}{p\omega^2}\right)xy^2 + \left(\frac{km}{\omega^3} - \frac{m^2}{p\omega^3} - \frac{km^2}{p\omega^3}\right)y^3\right]$$

$$gp + hm = \left[\left(\frac{2m(\alpha+I_2)-p(k\alpha+A)-mk(\alpha+2I_2)}{p\omega}\right)xy + \left(\frac{pm(k\alpha+A)-kS_2p^2-(\alpha+I_2)m^2}{p\omega^2} - \frac{(k(\alpha+I_2)m^2+kI_2m^2-rkI_2m)}{p\omega^2}\right)y^2 - \frac{(\alpha+I_2)}{p}x^2 - \frac{1}{p\omega}x^2y + \left(\frac{2m-pk+mk}{p\omega^2}\right)xy^2 + \left(\frac{pkm-m^2-km^2}{p\omega^3}\right)y^3\right]$$

$$gp + hm = \left[\left(\frac{2m(\alpha+I_2)-p(k\alpha+A)-mk(\alpha+2I_2)}{p\omega}\right)xy + \left(\frac{pm(k\alpha+A)-kS_2p^2-(\alpha+I_2)m^2}{p\omega^2} - \frac{(k(\alpha+I_2)S_2(\alpha+I_2)m+kI_2m^2-kS_2(\alpha+I_2)^2m)}{p\omega^2}\right)y^2 - \frac{(\alpha+I_2)}{p}x^2 - \frac{1}{p\omega}x^2y + \left(\frac{2m-pk+mk}{p\omega^2}\right)xy^2 + \left(\frac{\omega^2-km^2}{p\omega^3}\right)y^3\right]$$

$$gp + hm = \left[\left(\frac{2m(\alpha+I_2)-p(k\alpha+A)-mk(\alpha+2I_2)}{p\omega}\right)xy + \right]$$

$$\left(\frac{pm(k\alpha+A)-kS_2p^2-(\alpha+I_2)m^2-kI_2m^2}{p\omega^2} \right) y^2 - \frac{(\alpha+I_2)}{p} x^2 - \frac{1}{p\omega} x^2 y + \left(\frac{2m-pk+mk}{p\omega^2} \right) xy^2 + \left(\frac{\omega^2-km^2}{p\omega^3} \right) y^3 \Big]$$

- Perhitungan nilai ωh

$$\omega h = \omega \left[k(\alpha + 2I_2)SI + \frac{rI^2}{\alpha+I_2} + kSI^2 \right]$$

$$\omega h = \omega \left[k(\alpha + 2I_2) \left(\frac{x}{p} - \frac{my}{p\omega} \right) \left(\frac{y}{\omega} \right) + \frac{r}{\alpha+I_2} \left(\frac{y}{\omega} \right)^2 + k \left(\frac{x}{p} - \frac{my}{p\omega} \right) \left(\frac{y}{\omega} \right)^2 \right]$$

$$\omega h = \omega \left[k(\alpha + 2I_2) \left(\frac{\omega xy}{p\omega^2} - \frac{my^2}{p\omega^2} \right) + \frac{r}{\alpha+I_2} \left(\frac{y^2}{\omega^2} \right) + k \left(\frac{\omega xy^2}{p\omega^3} - \frac{my^3}{p\omega^3} \right) \right]$$

$$\omega h = \omega \left[\frac{k(\alpha+2I_2)\omega xy}{p\omega^2} - \frac{k(\alpha+2I_2)my^2}{p\omega^2} + \frac{rkI_2y^2}{p\omega^2} + \frac{k\omega xy^2}{p\omega^3} - \frac{kmy^3}{p\omega^3} \right]$$

$$\omega h = \left[\frac{k(\alpha+2I_2)xy}{p} - \frac{k(\alpha+2I_2)my^2}{p\omega} + \frac{rkI_2y^2}{p\omega} + \frac{kxy^2}{p\omega} - \frac{kmy^3}{p\omega^2} \right]$$

$$\omega h = \left[\frac{k(\alpha+2I_2)xy}{p} - \frac{kI_2my^2}{p\omega} - \frac{k(\alpha+I_2)my^2}{p\omega} + \frac{rkI_2y^2}{p\omega} + \frac{kxy^2}{p\omega} - \frac{kmy^3}{p\omega^2} \right]$$

$$\omega h = \left[\frac{k(\alpha+2I_2)xy}{p} - \frac{kI_2my^2}{p\omega} - \frac{k(\alpha+I_2)S_2(\alpha+I_2)y^2}{p\omega} + \frac{kS_2(\alpha+I_2)^2y^2}{p\omega} + \frac{kxy^2}{p\omega} - \frac{kmy^3}{p\omega^2} \right]$$

$$\omega h = \left[\frac{k(\alpha+2I_2)}{p} xy - \frac{kmI_2}{p\omega} y^2 + \frac{k}{p\omega} xy^2 - \frac{km}{p\omega^2} y^3 \right]$$

maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Persamaan (4.67) merupakan bentuk normal Bifurkasi Hopf dari sistem Persamaan (4.2) yang mempunyai titik kesetimbangan baru yaitu $(x, y) = (0, 0)$ dan dapat dinyatakan dalam persamaan di bawah ini

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y + f(x, y) \quad (4.68)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x + g(x, y) \quad (4.69)$$

dengan

$$f(x, y) = \left[\left(\frac{2m(\alpha + I_2) - p(k\alpha + A) - mk(\alpha + 2I_2)}{p\omega} \right) xy + \left(\frac{pm(k\alpha + A) - kS_2p^2 - (\alpha + I_2)m^2 - kI_2m^2}{p\omega^2} \right) y^2 - \frac{(\alpha + I_2)}{p} x^2 - \frac{1}{p\omega} x^2 y + \left(\frac{2m - pk + mk}{p\omega^2} \right) xy^2 + \left(\frac{\omega^2 - km^2}{p\omega^3} \right) y^3 \right]$$

dan

$$g(x, y) = \left[\frac{k(\alpha + 2I_2)}{p} xy - \frac{kmI_2}{p\omega} y^2 + \frac{k}{p\omega} x y^2 - \frac{km}{p\omega^2} y^3 \right]$$

6. Menyelidiki jenis bifurkasi Hopf yang terjadi pada Persamaan (4.68) dan (4.69) menggunakan indeks stabilitas

$$\Gamma = \frac{1}{16} [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16\omega} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}] \Big|_{(0,0)}$$

Berdasarkan Persamaan (4.68) dan (4.69) diperoleh bahwa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = -2 \left(\frac{\alpha + I_2}{p} + \frac{y}{p\omega} \right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^3 x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2m(a + I_2) - p(ka + A) + mk(a + 2I_2)}{p\omega} - \frac{2}{p\omega} x + \frac{4m - 2pk + 2mk}{p\omega^2} y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y} = \frac{4m - 2pk + 2mk}{p\omega^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} &= 2 \left(\frac{pm(ka + A) - km^2 I_2 - kp^2 S_2 - (a + I_2)m^2}{p\omega^2} \right) + \frac{4m - 2pk + 2mk}{p\omega^2} x \\ &\quad + 6 \frac{\omega^2 - km^2}{p\omega^3} y \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x} = 0$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial^2 x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \left(\frac{k(a + 2I_2)}{p} \right) + 2 \left(\frac{k}{p\omega} \right) y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 y} = -2 \left(\frac{km I_2}{p\omega} \right) + 2 \left(\frac{k}{p\omega} \right) x - 6 \left(\frac{km}{p\omega^2} \right) y$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial^3 y} = -6 \left(\frac{km}{p\omega^2} \right)$$

dan

$$f_{xx} = \frac{-2(\alpha + I_2)}{p}$$

$$f_{xxx} = 0$$

$$f_{xy} = \frac{2m(a+I_2)-p(ka+A)+mk(a+2I_2)}{p\omega}$$

$$f_{xyy} = \frac{4m-2pk+2mk}{p\omega^2}$$

$$f_{yy} = 2 \left(\frac{pm(ka+A)-km^2I_2-kp^2S_2-(a+I_2)m^2}{p\omega^2} \right)$$

$$g_{xx} = 0$$

$$g_{xxy} = 0$$

$$g_{xy} = \frac{k(a+2I_2)}{p}$$

$$g_{yy} = -2 \left(\frac{kmI_2}{p\omega} \right)$$

$$g_{yyy} = -6 \left(\frac{km}{p\omega^2} \right)$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{1}{16} [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] \\ &= \frac{1}{16} \left[0 + \frac{4m-2pk+2mk}{p\omega^2} + 0 + -6 \left(\frac{km}{p\omega^2} \right) \right] \\ &= \frac{2m-pk-2mk}{8p\omega^2} \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{1}{16\omega} f_{xy} (f_{xx} + f_{yy}) \\ &= \frac{1}{16\omega} \left[\frac{2m(a+I_2)-p(ka+A)+mk(a+2I_2)}{p\omega} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{-2(\alpha+I_2)}{p} + 2 \left(\frac{pm(ka+A)-km^2I_2-kp^2S_2-(\alpha+I_2)m^2}{p\omega^2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{16\omega} \left[\frac{2m(\alpha+I_2)-p(ka+A)+mk(\alpha+2I_2)}{p\omega} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{-2\omega^2(\alpha+I_2)+2pm(ka+A)-2km^2I_2-2kp^2S_2-2(\alpha+I_2)m^2}{p\omega^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{16\omega} \left[\frac{-4m\omega^2(\alpha+I_2)^2+4pm^2(\alpha+I_2)(ka+A)-4km^3I_2(\alpha+I_2)}{p^2\omega^3} \right. \\
&\quad \frac{-4kmp^2S_2(\alpha+I_2)-4m^3(\alpha+I_2)^2+2p\omega^2(\alpha+I_2)(ka+A)}{p^2\omega^3} \\
&\quad \frac{-2mp^2(ka+A)^2+2km^2pI_2(ka+A)+2kp^3S_2(ka+A)}{p^2\omega^3} \\
&\quad \frac{+2m^2p(\alpha+I_2)(ka+A)-2km\omega^2(\alpha+I_2)(\alpha+2I_2)+2km^2p(\alpha+2I_2)(ka+a)}{p^2\omega^3} \\
&\quad \left. \frac{-2k^2m^3I_2(\alpha+2I_2)-2k^2mp^2S_2(\alpha+2I_2)-2km^3(\alpha+I_2)(\alpha+2I_2)}{p^2\omega^3} \right] \\
&= \frac{1}{16\omega} \left[\frac{(\alpha+I_2)^2(-4m\omega^2-4m^3)+(\alpha+I_2)(ka+A)(4pm^2+2p\omega^2+2m^2p)}{p^2\omega^3} \right. \\
&\quad \frac{+(\alpha+I_2)(-4km^3I_2-4kmp^2S_2)+(ka+A)(2km^2pI_2+2kp^3S_2)}{p^2\omega^3} \\
&\quad \frac{+(\alpha+I_2)(\alpha+2I_2)(-2km\omega^2-2km^3)+(\alpha+2I_2)(-2k^2m^3I_2-2k^2mp^2S_2)}{p^2\omega^3} \\
&\quad \left. \frac{-2mp^2(ka+A)^2+2km^2p(\alpha+2I_2)(ka+A)}{p^2\omega^3} \right] \\
&= \frac{1}{16\omega} \left[\frac{(\alpha+I_2)^2(-4km^2p)+(\alpha+I_2)(ka+A)(2kmp^2-4m^2p)}{p^2\omega^3} \right. \\
&\quad \frac{+(\alpha+I_2)(-4km^3I_2-4kmp^2S_2)+(ka+A)(2km^2pI_2+2kp^3S_2)}{p^2\omega^3} \\
&\quad \frac{+(\alpha+I_2)(\alpha+2I_2)(-2k^2m^2p)+(\alpha+2I_2)(-2k^2m^3I_2-2k^2mp^2S_2)}{p^2\omega^3} \\
&\quad \left. \frac{-2mp^2(ka+A)^2+2km^2p(\alpha+2I_2)(ka+A)}{p^2\omega^3} \right] \quad (4.71) \\
&\bullet - \frac{1}{16\omega} g_{xy} (g_{xx} + g_{yy}) \\
&= - \frac{1}{16\omega} \left(\frac{k(\alpha+2I_2)}{p} \right) \left[0 - 2 \left(\frac{kmI_2}{p\omega} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16\omega} \left[\frac{2k^2 m I_2 (a+2I_2)}{p^2 \omega} \right] \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{1}{16\omega} [-f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}] \\ &= \frac{1}{16\omega} \left[0 + 2 \left(\frac{pm(ka+A) - km^2 I_2 - kp^2 S_2 - (a+I_2)m^2}{p\omega^2} \right) \left(\frac{-2km I_2}{p\omega} \right) \right] \\ &= \frac{1}{16\omega} \left[\left(\frac{2pm(ka+A) - 2km^2 I_2 - 2kp^2 S_2 - 2(a+I_2)m^2}{p\omega^2} \right) \left(\frac{-2km I_2}{p\omega} \right) \right] \\ &= \frac{1}{16\omega} \left[\frac{(ka+A)(-4km^2 p I_2) + 4k^2 m^3 I_2^2 + 4k^2 m p^2 S_2 I_2}{p^2 \omega^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a+I_2)4km^3 I_2}{p^2 \omega^3} \right] \quad (4.73) \end{aligned}$$

dan dengan menjumlahkan Persamaan (4.71), (4.72), dan (4.73) diperoleh

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{1}{16\omega} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}] \\ &= \frac{1}{16\omega} \left[\frac{(a+I_2)^2(-4km^2 p) + (a+I_2)(ka+A)(2kmp^2 - 4m^2 p)}{p^2 \omega^3} \right. \\ &\quad \frac{+(a+I_2)(-4km^3 I_2 - 4kmp^2 S_2) + (ka+A)(2km^2 p I_2 + 2kp^3 S_2)}{p^2 \omega^3} \\ &\quad \frac{+(a+I_2)(a+2I_2)(-2k^2 m^2 p) + (a+2I_2)(-2k^2 m^3 I_2 - 2k^2 m p^2 S_2)}{p^2 \omega^3} \\ &\quad \frac{-2mp^2(ka+A)^2 + 2km^2 p(a+2I_2)(ka+A)}{p^2 \omega^3} + \frac{2k^2 m I_2(a+2I_2)}{p^2 \omega} \\ &\quad \left. + \frac{(ka+A)(-4km^2 p I_2) + 4k^2 m^3 I_2^2 + 4k^2 m p^2 S_2 I_2 + (a+I_2)4km^3 I_2}{p^2 \omega^3} \right] \\ &= \frac{1}{16\omega} \left[\frac{(a+I_2)^2(-4km^2 p) + (a+I_2)(ka+A)(2kmp^2 - 4m^2 p)}{p^2 \omega^3} \right. \\ &\quad \frac{+(a+I_2)(-4km^3 I_2 - 4kmp^2 S_2) + (ka+A)(2km^2 p I_2 + 2kp^3 S_2)}{p^2 \omega^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{+(a+I_2)(a+2I_2)(-2k^2m^2p)+(a+2I_2)(-2k^2m^3I_2-2k^2mp^2S_2)}{p^2\omega^3} \\
& - \frac{2mp^2(ka+A)^2+2km^2p(a+2I_2)(ka+A)+(a+2I_2)(2k^3m^2pI_2-2k^2m^3I_2)}{p^2\omega^3} \\
& + \frac{+(ka+A)(-4km^2pI_2)+4k^2m^3I_2^2+4k^2mp^2S_2I_2+(a+I_2)4km^3I_2}{p^2\omega^3} \Big] \\
& = \frac{1}{16\omega} \left[\frac{(a+I_2)^2(-4km^2p)+(a+I_2)(ka+A)(2kmp^2-4m^2p)}{p^2\omega^3} \right. \\
& + \frac{+(a+I_2)(-4kmp^2S_2)+(ka+A)(2km^2pI_2+2kp^3S_2)}{p^2\omega^3} \\
& + \frac{+(a+I_2)(a+2I_2)(-2k^2m^2p)+(a+2I_2)(2k^3m^2pI_2-4k^2m^3I_2-2k^2mp^2S_2)}{p^2\omega^3} \\
& - \frac{2mp^2(ka+A)^2+2km^2p(a+2I_2)(ka+A)+4k^2m^3I_2^2}{p^2\omega^3} \\
& \left. + \frac{4k^2mp^2S_2I_2}{p^2\omega^3} \right] \quad (4.74)
\end{aligned}$$

kemudian substitusi $m = S_2(a + I_2)$ dan $p = kI_2(a + I_2)$ ke Persamaan (4.70) dan (4.74) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{1}{16} [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] \\
& = \frac{2m-pk-2mk}{8p\omega^2} \\
& = \frac{2(S_2(a+I_2))-(kI_2(a+I_2))k-2k(S_2(a+I_2))}{8p\omega^2} \\
& = \frac{(a+I_2)[2S_2(1-k)-k^2I_2]}{8p\omega^2} \quad (4.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{1}{16\omega} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}] \\
& = \frac{1}{16\omega} \left[\frac{(a+I_2)^2(-4km^2p)+(a+I_2)(ka+A)(2kmp^2-4m^2p)}{p^2\omega^3} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{+(a+I_2)(-4kmp^2S_2)+(ka+A)(2km^2pI_2+2kp^3S_2)}{p^2\omega^3} \\
& \frac{+(a+I_2)(a+2I_2)(-2k^2m^2p)+(a+2I_2)(2k^3m^2pI_2-4k^2m^3I_2-2k^2mp^2S_2)}{p^2\omega^3} \\
& \frac{-2mp^2(ka+A)^2+2km^2p(a+2I_2)(ka+A)+4k^2m^3I_2^2}{p^2\omega^3} \\
& \left. \frac{+4k^2mp^2S_2I_2}{p^2\omega^3} \right] \\
= & \frac{1}{16\omega^3} \left[\frac{(a+I_2)^2(-4k(S_2(a+I_2))^2(kI_2(a+I_2)))+(a+I_2)(ka+A)}{p^2\omega^3} \right. \\
& \frac{(2k(S_2(a+I_2))(kI_2(a+I_2))^2-4(S_2(a+I_2))^2(kI_2(a+I_2)))}{p^2\omega^3} \\
& \frac{+(a+I_2)(-4k(S_2(a+I_2))(kI_2(a+I_2))^2S_2)}{p^2\omega^3} \\
& \frac{+(ka+A)(2k(S_2(a+I_2))^2(kI_2(a+I_2))I_2+2k(kI_2(a+I_2))^3S_2)}{p^2\omega^3} \\
& \frac{+(a+I_2)(a+2I_2)(-2k^2(S_2(a+I_2))^2(kI_2(a+I_2)))+(a+2I_2)}{p^2\omega^3} \\
& \frac{(2k^3(S_2(a+I_2))^2(kI_2(a+I_2))I_2-4k^2(S_2(a+I_2))^3I_2)}{p^2\omega^3} \\
& \frac{-2k^2(S_2(a+I_2))(kI_2(a+I_2))^2S_2-2(S_2(a+I_2))(kI_2(a+I_2))^2(ka+A)^2}{p^2\omega^3} \\
& \frac{+2k(S_2(a+I_2))^2(kI_2(a+I_2))(a+2I_2)(ka+A)}{p^2\omega^3} \\
& \left. \frac{+4k^2(S_2(a+I_2))^3I_2^2+4k^2(S_2(a+I_2))(kI_2(a+I_2))^2S_2I_2}{p^2\omega^3} \right] \\
= & \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)^2(-4k^2S_2^2I_2) + (a+I_2)(ka+A) \\
& (2k^3S_2I_2^2 - 4kS_2^2I_2) + (a+I_2)(-4k^3S_2^2I_2^2) + (ka+A) \\
& (-2k^2S_2^2I_2^2 + 2k^4S_2I_2^3) + (a+I_2)(a+2I_2)(-2k^3S_2^2I_2) \\
& + (a+2I_2)(-4k^2S_2^3I_2) + (ka+A)^2(-2k^2S_2I_2^2) \\
& + (a+2I_2)(ka+A)(2k^2S_2^2I_2) + 4k^2S_2^3I_2^2 + 4k^4S_2^2I_2^3] \\
= & \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)(-4ak^2S_2^2I_2 - 4k^2S_2^2I_2^2) + (ka+A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2ak^3S_2I_2^2 + 2k^3S_2I_2^3 - 4akS_2^2I_2 - 4kS_2^2I_2^2) \\
& + (a + I_2)(-4k^3S_2^2I_2^2) + (ka + A)(-2k^2S_2^2I_2^2 \\
& + 2k^4S_2I_2^3) + (a + I_2)(-2ak^3S_2^2I_2 - 4k^3S_2^2I_2^2) \\
& + (a + 2I_2)(-4k^2S_2^3I_2) + (ka + A)^2(-2k^2S_2I_2^2) \\
& + (ka + A)(2ak^2S_2^2I_2 + 4k^2S_2^2I_2^2) + 4k^2S_2^3I_2^2 + 4k^4S_2^2I_2^3] \\
& = \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(-2k^2S_2I_2^2)(2S_2(a + I_2)) + (2kS_2I_2) \\
& (-2kS_2(a + I_2)) + (-2k^2S_2I_2^2)((-ka - kI_2)(ka + A)) \\
& + (2kS_2I_2)((-2aS_2 - 2S_2I_2)(ka + A)) \\
& + (-2k^2S_2I_2^2)(2kS_2(a + I_2)) \\
& + (-2k^2S_2I_2^2)((S_2 - k^2I_2)(ka + A)) \\
& + (-2k^2S_2I_2^2)(2kS_2(a + I_2)) + (2kS_2I_2)(-ak^2S_2 \\
& (a + I_2)) + (2kS_2I_2)(-2kS_2^2(a + 2I_2)) \\
& + (-2k^2S_2I_2^2)((ka + S_2 + kI_2)(ka + A)) \\
& + (-2k^2S_2I_2^2)(-2S_2(ka + A)) + (2kS_2I_2)(akS_2) \\
& (ka + A) + (2kS_2I_2)(2kS_2^2I_2) + (-2k^2S_2I_2^2)(-2k^2S_2I_2)] \\
& = \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a + I_2)2S_2 + (ka + A)(-ka - kI_2) + \\
& + (a + I_2)2kS_2 + (ka + A)(S_2 - k^2I_2) + (a + I_2)2kS_2 \\
& + (ka + A)(ka + S_2 + kI_2) + (ka + A)(-2S_2) \\
& - 2k^2S_2I_2](-2k^2S_2I_2^2) + \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a + I_2)(-2kS_2) \\
& + (ka + A)(-2aS_2 - 2S_2I_2) + (a + I_2)(-ak^2S_2) \\
& + (a + 2I_2)(-2kS_2^2) + (ka + A)akS_2 \\
& + (2kS_2^2I_2)](2kS_2I_2) \\
& = \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a + I_2)S_2(4k + 2) - k^2I_2(ka + A) - 2k^2S_2I_2] \\
& (-2k^2S_2I_2^2) + \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a + I_2)(-2 - ak)kS_2 \\
& + (ka + A)S_2(-2a - 2I_2 + ak) - 2kS_2^2(a + 2I_2) \\
& + 2kS_2^2I_2](2kS_2I_2) \tag{4.76}
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk memperoleh indeks stabilitas (Γ) dari model epidemi SIR yang dipengaruhi oleh fungsi pengobatan saturasi dilakukan penjumlahan Persamaan (4.75) dan (4.76) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{1}{16} [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16\omega} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - \\
 &\quad g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}] \Big|_{(0,0)} \\
 &= \frac{(a+I_2)[2S_2(1-k)-k^2I_2]}{8p\omega^2} + \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)S_2(4k+2) \\
 &\quad -k^2I_2(ka+A) - 2k^2S_2I_2](-2k^2S_2I_2^2) \\
 &\quad + \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)(-2-ak)kS_2 \\
 &\quad + (ka+A)S_2(-2a-2I_2+ak) - 2kS_2^2(a+2I_2) \\
 &\quad + 2kS_2^2I_2](2kS_2I_2) \\
 &= \frac{(a+I_2)[2S_2(1-k)-k^2I_2]2p\omega^2}{16p^2\omega^4} + \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)S_2(4k+2) \\
 &\quad -k^2I_2(ka+A) - 2k^2S_2I_2](-2k^2S_2I_2^2) \\
 &\quad + \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)(-2-ak)kS_2 \\
 &\quad + (ka+A)S_2(-2a-2I_2+ak) - 2kS_2^2(a+2I_2) \\
 &\quad + 2kS_2^2I_2](2kS_2I_2) \quad (4.77)
 \end{aligned}$$

- Perhitungan $\frac{(a+I_2)[2S_2(1-k)-k^2I_2]2p\omega^2}{16p^2\omega^4}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a+I_2)[2S_2(1-k)-k^2I_2]2(kmp^2-m^2)}{16p^2\omega^4} \\
 &= \frac{(a+I_2)[4k(S_2(a+I_2))(kI_2(a+I_2))^2S_2}{16p^2\omega^4} \\
 &\quad - 4k^2(S_2(a+I_2))(kI_2(a+I_2))^2S_2 - 2(S_2(a+I_2))^2(kI_2(a+I_2))S_2}{16p^2\omega^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{+2k(S_2(a+I_2))^2(kI_2(a+I_2))S_2-2k^3(S_2(a+I_2))(kI_2(a+I_2))^2I_2]}{16p^2\omega^4} \\
& \frac{+2k^2(S_2(a+I_2))^2(kI_2(a+I_2))I_2]}{16p^2\omega^4} \\
& = \frac{(a+I_2)^3[(a+I_2)4k^3S_2^2I_2^2+(a+I_2)(-4k^4S_2^2I_2^2)+(a+I_2)(-2k^3S_2^3I_2)}{16p^2\omega^4} \\
& \quad \frac{+(a+I_2)2k^2S_2^3I_2+(a+I_2)(-2k^5S_2I_2^3)+2k^3S_2^2I_2^2}{16p^2\omega^4} \\
& = \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)(-2kS_2+2k^2S_2+k^3I_2-kS_2)] \\
& \quad (-2k^2S_2I_2^2) + \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)(-2S_2^2+kS_2^2)](2kS_2I_2)
\end{aligned}$$

Maka Persamaan (4.77) menjadi

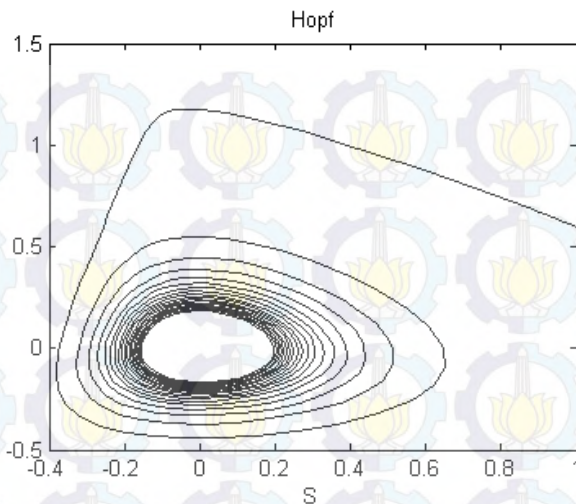
$$\begin{aligned}
& = \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)(-2kS_2+2k^2S_2+k^3I_2-kS_2)] \\
& \quad (-2k^2S_2I_2^2) + \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)(-2S_2^2+kS_2^2)](2kS_2I_2) \\
& \quad + \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)S_2(4k+2)-k^2I_2(ka+A) \\
& \quad -2k^2S_2I_2](-2k^2S_2I_2^2) + \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)(-2-ak)kS_2 \\
& \quad +(ka+A)S_2(-2a-2I_2+ak)-2kS_2^2(a+2I_2) \\
& \quad +2kS_2^2I_2](2kS_2I_2) \\
& = \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)(S_2(2k^2+k+2)+k^3I_2) \\
& \quad -k^2I_2(ka+A)-2k^2S_2I_2](-2k^2S_2I_2^2) \\
& \quad + \frac{(a+I_2)^3}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)(-2-ak+S_2)kS_2-2S_2^2) \\
& \quad +(ka+A)S_2(-2a-2I_2+ak)-2kS_2^2(a+2I_2) \\
& \quad +2kS_2^2I_2](2kS_2I_2) \\
& = \frac{2k(a+I_2)^3S_2I_2}{16p^2\omega^4} [(a+I_2)(S_2(2k^2+k+2)+k^3I_2) \\
& \quad -k^2I_2(ka+A)-2k^2S_2I_2](-kI_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2k(a+I_2)^3 S_2 I_2}{16p^2 \omega^4} [(a+I_2)(-2-ak+S_2)kS_2 - 2S_2^2 \\
& + (ka+A)S_2(-2a-2I_2+ak) - 2kS_2^2(a+2I_2) \\
& + 2kS_2^2 I_2] \\
\Gamma &= \frac{2k(a+I_2)^3 S_2 I_2}{16p^2 \omega^4} \sigma \quad (4.78)
\end{aligned}$$

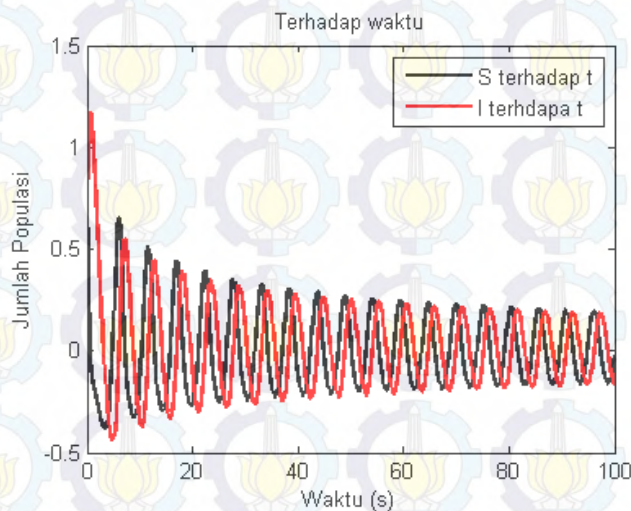
dengan

$$\begin{aligned}
\sigma &= \{[(a+I_2)(S_2(2k^2+k+2)+k^3 I_2) - k^2 I_2(ka + \\
& A) - 2k^2 S_2 I_2](-k I_2) + (a+I_2)(-2-ak+S_2)kS_2 - 2S_2^2 + \\
& (ka+A)S_2(-2a-2I_2+ak) - 2kS_2^2(a+2I_2) + 2kS_2^2 I_2 \}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.78) terbukti bahwa jika $\sigma < 0$ orbit periodik dari model epidemi pada sistem Persamaan (4.2) stabil sehingga terjadi bifurkasi Hopf superkritikal, sedangkan jika $\sigma > 0$ orbit periodik dari model epidemi pada sistem Persamaan (4.2) tidak stabil sehingga terjadi bifurkasi Hopf subkritikal. Selanjutnya diselidiki eksistensi bifurkasi Hopf pada model epidemi SIR yang dipengaruhi oleh fungsi pengobatan saturasi dengan parameter $A = 2.6, \mu = 0.2, k = 2, \alpha = 0.05, r = 0.11$.



Gambar 4.3 Orbit Periodik Model Epidemi SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi



Gambar 4.4 Plot S dan I terhadap t pada Model Epidemik SIR yang Dipengaruhi Fungsi Pengobatan Saturasi

Berdasarkan Gambar 4.3 terlihat adanya orbit periodik stabil dengan nilai $\sigma = -0.9891 < 0$, sehingga dapat disimpulkan terjadi bifurkasi Hopf superkritikal. Selanjutnya berdasarkan Gambar 4.4 terlihat jumlah populasi *Susceptible* dan *Infected*, secara terus menerus naik turun secara fluktuatif. Hal ini menunjukkan bahwa terjadi penyebaran penyakit secara terus menerus.

4.6 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini akan membahas bagaimana cara untuk memperoleh solusi numerik dari Persamaan model interaksi dinamis dan simulasi numeriknya. Hal ini bertujuan untuk memudahkan dalam menganalisa model.

Penyelesaian numerik yang digunakan adalah metode Runge-Kutta orde empat. Metode Runge-Kutta mencapai keakuratan dari suatu pendekatan Taylor tanpa memerlukan turunan-turunan tingkat tinggi. Metode Runge Kutta orde 4 adalah satu dari metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan Persamaan differensial. Metode ini mempunyai suatu galat pemotongan h^4 , dengan h merupakan langkah waktu (*step size*)

Sebelumnya dimisalkan nilai awal untuk sistem Persamaan (4.2)

$$S(t_0) = S_0$$

$$I(t_0) = I_0$$

dan dengan menggunakan Metode Runge-Kutta orde empat diperoleh integrasi numerik sebagai berikut:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{6}(k_{1,S} + 2k_{2,S} + 2k_{3,S} + k_{4,S})$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{6}(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I})$$

dengan

$$\begin{aligned}
 k_{1,s} &= hf(t_n, S_n, I_n) \\
 &= h(S_n(A - S_n) - kS_nI_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{1,I} &= hf(t_n, S_n, I_n) \\
 &= h\left(kS_nI_n - \mu I_n - \frac{rI_n}{a+I_n}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{2,s} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{1,s}}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right) \\
 &= h\left(\left(S_n + \frac{k_{1,s}}{2}\right)\left(A - \left(S_n + \frac{k_{1,s}}{2}\right)\right) - k\left(S_n + \frac{k_{1,s}}{2}\right)I_n\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{2,I} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{1,s}}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right) \\
 &= hf\left(k\left(S_n + \frac{k_{1,s}}{2}\right)\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right) - \mu\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right) - \frac{r\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right)}{a + \left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right)}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{3,s} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{2,s}}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right) \\
 &= h\left(\left(S_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right)\left(A - \left(S_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right)\right) - k\left(S_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right)\right. \\
 &\quad \left.\left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{3,I} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{2,s}}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right) \\
 &= h\left(k\left(S_n + \frac{k_{2,s}}{2}\right)\left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right) - \mu\left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right) - \frac{r\left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right)}{a + \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right)}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{4,s} &= hf(t_n, S_n + k_{3,s}, I_n + k_{3,I}) \\
 &= h\left((S_n + k_{3,s})(A - (S_n + k_{3,s})) - k(S_n + k_{3,s})\right. \\
 &\quad \left.(I_n + k_{3,I})\right)
 \end{aligned}$$

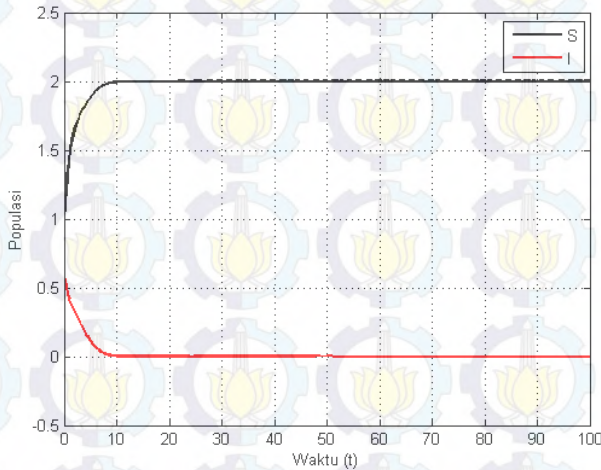
$$k_{4,I} = hf(t_n, S_n + k_{3,s}, I_n + k_{3,I})$$

$$= h \left(k(S_n + k_{3,s})(I_n + k_{3,I}) - \mu(I_n + k_{3,I}) - \frac{r(I_n + k_{3,I})}{a + (I_n + k_{3,I})} \right)$$

Selanjutnya dengan program MATLAB diselidiki hubungan antara bilangan reproduksi dasar (R_0) dengan kestabilan titik kesetimbangan sehingga diperoleh

1. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan ketika $R_0 < 1$

Dengan menggunakan parameter yang berasal dari [14], $A = 2, \mu = 0.2, k = 0.8, r = 1.2, \alpha = 0.55$ diperoleh $E_1 = (2, 0)$ dan $R_0 = 0.6718$. Selanjutnya melakukan simulasi dengan menggunakan parameter diatas dan dengan nilai awal dari populasi $S(0) = 1$ dan $I(0) = 0.6$ sehingga diperoleh



Gambar 4.5 Grafik Kestabilan ketika $R_0 < 1, S = 1$, dan $I = 0.6$

Laju Perubahan pada Populasi *Susceptible*

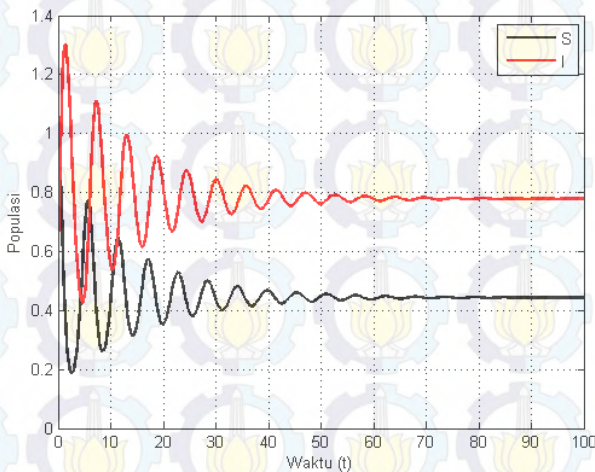
Berdasarkan Gambar 4.5 terlihat nilai awal populasi *Susceptible* sebesar 1 terus menaik hingga konstan pada nilai 2 seiring bertambahnya waktu (t)

Laju Perubahan pada Populasi *Infected*

Berdasarkan Gambar 4.5 terlihat nilai awal populasi *Infected* sebesar 0.6 terus menurun hingga konstan pada nilai 0 seiring bertambahnya waktu (t)

2. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan ketika $R_0 > 1$

Dengan menggunakan parameter yang berasal dari [14], $A = 2, \mu = 0.2, k = 2, r = 1.2, \alpha = 0.97$ diperoleh $E_1 = (2, 0)$ dan $R_0 = 2.7834$. Selanjutnya melakukan simulasi dengan menggunakan parameter diatas dan dengan nilai awal dari populasi $S(0) = 1$ dan $I(0) = 0.6$ sehingga diperoleh



Gambar 4.6 Grafik Kestabilan ketika $R_0 > 1, S = 1$, dan $I = 0.6$

Laju Perubahan pada Populasi *Susceptible*

Berdasarkan Gambar 4.6 terlihat nilai awal populasi *Susceptible* sebesar 1 terus mengalami naik turun hingga konstan pada nilai 0.4430 seiring bertambahnya waktu (t)

Laju Perubahan pada Populasi *Infected*

Berdasarkan Gambar 4.6 terlihat nilai awal populasi *Infected* sebesar 0.6 terus mengalami naik turun hingga konstan pada nilai 0.7780 seiring bertambahnya waktu (t)

Pada Gambar 4.5 kestabilan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit E_1 akan tetapi pada Gambar 4.6 terlihat bahwa kestabilan menuju titik kesetimbangan endemik $E = (0.4430 \ 0.7780)$. Hal ini membuktikan **Teorema 4.3.1** E_1 tidak stabil asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$ sehingga terdapat titik kesetimbangan endemik yang stabil yang menyebabkan penyakit berpotensi untuk menjadi endemik.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini diberikan kesimpulan sebagai hasil dari analisa model yang telah diperoleh dan saran sebagai pertimbangan dalam pengembangan atau penelitian lebih lanjut.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan keseluruhan hasil analisis dapat disimpulkan bahwa

1. Pada saat terjadi Bifurkasi Maju, Bilangan Reproduksi Dasar adalah

$$R_0 = \frac{kA}{\mu + \frac{\tau}{\alpha}}$$

dengan titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1 = (S_0, I_0) = (A, 0)$$

dan titik kesetimbangan endemik

$$E_2 = (S_2, I_2) = \left(\frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right).$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik ketika

$R_0 < 1$, dan tidak stabil ketika $R_0 > 1$

2. Pada saat terjadi Bifurkasi Mundur, Bilangan Reproduksi Dasar adalah

$$R_c = \frac{kA^c}{\mu + \frac{\tau}{\alpha}}$$

dengan titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1 = (S_0, I_0) = (A, 0)$$

dan titik kesetimbangan endemik sebagai berikut:

- Pada saat $R_0 = R_c$

$$E_0 = (S_0, I_0) = \left(\frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k}}{2}, \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k}}{2} \right)$$

yang merupakan titik pelana (*saddle point*) yang tidak stabil.

- Pada saat $R_c < R_0 < 1$

$$E_1 = (S_1, I_1) = \left(\frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right)$$

E_1 merupakan titik pelana (*saddle point*) yang tidak stabil,

$$E_2 = (S_2, I_2) = \left(\frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k} \right)$$

E_2 stabil jika $r < \frac{1}{4} \left[\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]$ dan tidak stabil

jika $r > \frac{1}{4} \left[\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]$.

3. Pada saat laju pengobatan $r = \frac{1}{4} \left[\left(\alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]$ terdapat sepasang nilai eigen yang imajiner murni yang menyebabkan adanya bifurkasi Hopf. Untuk $\sigma < 0$ terjadi bifurkasi Hopf superkritikal dan pada saat $\sigma > 0$ terjadi bifurkasi Hopf subkritikal.
4. Dengan metode Numerik Runge-Kutta orde 4 menggunakan *software* MATLAB diperoleh hasil sebagai berikut:
 - jika $R_0 < 1$, maka terjadi keadaan bebas penyakit karena kestabilan sistem menuju titik kesetimbangan bebas penyakit E_1 .
 - jika $R_0 > 1$, maka penyakit menjadi endemik karena kestabilan sistem menuju titik kesetimbangan endemik.

5.2 Saran

Perlu dikembangkan penerapan dari model epidemi SIR dengan pengaruh fungsi pengobatan saturasi pada suatu kasus khusus di daerah tertentu untuk penelitian selanjutnya dengan menggunakan data primer agar dapat diketahui bagaimana pengaruh model epidemi SIR dengan fungsi pengobatan saturasi pada daerah tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Nugroho, Susilo. (2009). “pengaruh Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Epidemik SIR”. **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika Universitas Sebelas Maret.**
- [2] WHO(World Health Organization), *Country Health Profile*, <http://www.who.int/countries/idn/en/>. Diakses pada tanggal 4 September 2015, pukul 00.18 WIB.
- [3] Iktisholiyah. (2010). “Analisis Stabilitas dan Optimal Kontrol pada Model Epidemik Tipe SIR dengan Vaksinasi”. **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.**
- [4] Zhang,X,dkk. (2008). “Backward Bifurcation of an Epidemik Model with Saturated Treatment Function”. **Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol 340, No. 1, pp 433-443.**
- [5] Lestari, Intan P. (2012). “Eksistensi Bifurkasi Mundur pada Model Penyebaran Penyakit Menular dengan Vaksinasi”. **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.**
- [6] Iswahyuni, N. (2013). “Analisa Kualitatif pada Model Epidemik SIS dengan Pengobatan”. **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.**
- [7] Musa, M. (2015). “Analisis Kestabilan dan Bifurkasi Mundur pada Model Infeksi Virus Hepatitis B dan C pada Tubuh Pasien”. **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.**
- [8] Jordan, D. W and Smith P. 2007. “Nonlinier Ordinary Differential Equations”. **NewYork: Oxford University Press.**
- [9] Subiono. 2013. Sistem Linear dan Kontrol Optimal. Surabaya. **Subiono Jurusan Matematika ITS Surabaya.**

- [10] Anton, H. dan Rorres, C. 2005. "*Elementary Linear Algebra 9th edition*". **John Wiley & Sons, Inc.**
- [11] Nara. (2014). "Analisa Kualitatif pada Model Penyakit Parasitosis". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.**
- [12] Wiggins, S. (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer.
- [13] Hirsch, M. (2004). "Diffrential Equations Dynamical Systems and an Introduction to Chaos". **California: Academic Press.**
- [14] Wang, J,dkk. (2011). "Qualitative and Bifurcation Analysis Using an SIR Model with a Saturated Treatment Function". **Journal of Mathematicaland Computer Modelling, Vol 55, pp 710-722.**

LAMPIRAN A

Listing Program Kurva Bifurkasi dan Kestabilan titik Kesetimbangan

- M File dengan judul **GUI1.m**

```
function varargout = GUI1(varargin)
% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',
    mfilename, ...
    'gui_Singleton',
    gui_Singleton, ...
    'gui_OpeningFcn',
    @GUI1_OpeningFcn, ...
    'gui_OutputFcn',
    @GUI1_OutputFcn, ...
    'gui_LayoutFcn', [] ,
    ...
    'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback =
    str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] =
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT
% --- Executes just before GUI1 is made
visible.
function GUI1_OpeningFcn(hObject, eventdata,
handles, varargin)
% This function has no output args, see
OutputFcn.
% hObject    handle to figure
```

Lanjutan Lampiran A

```

% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)
% varargin command line arguments to GUI1
(see VARARGIN)
% Choose default command line output for
GUI1
handles.output = hObject;
% Update handles structure
guidata(hObject, handles);
% UIWAIT makes GUI1 wait for user response
(see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);
% --- Outputs from this function are
returned to the command line.
function varargout = GUI1_OutputFcn(hObject,
eventdata, handles)
% varargout cell array for returning output
args (see VARARGOUT);
% hObject handle to figure
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)
% Get default command line output from
handles structure
varargout{1} = handles.output;
% --- Executes on button press in run.
function run_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject handle to run (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)
global R

```

Lanjutan Lampiran A

```

S=str2double(get(handles.S0,'String'));
I=str2double(get(handles.I0,'String'));
t=str2double(get(handles.time,'String'));
X=[S I];
ti=[0 t];

A=str2double(get(handles.p_A,'string'));
mu=str2double(get(handles.p_miu,'string'));
r=str2double(get(handles.p_r,'string'));
alpha=str2double(get(handles.p_alfa,'string')
);
k=str2double(get(handles.p_K,'string'));

[T H]=ode45(@ODEguil,ti,X);

pilih=get(handles.popmenu,'value');
switch pilih
case 1

case 2
    cla(handles.axes1);
    legend('0');
    axes(handles.axes1);
    plot(T,H(:,1),'b','LineWidth',2);
    hold on
    plot(T,H(:,2),'r','LineWidth',2);
    legend('S','I');
    ylabel('Populasi');
    xlabel('Waktu (s)');
    grid on
case 3
    cla(handles.axes1);
    legend('0');
    a=k^2;
    b=alpha*k^2-k*A+mu;
    C_bintang = (mu*alpha)+r;

```

Lanjutan Lampiran A

```

%Nilai R0
R = (k*A)/(mu+(r/alpha));
c=C_bintang*(1-R);

%Nilai Rc
Ac=(mu/k)-(alpha*k)+sqrt(4*r);
r_0=(k*Ac)/(mu+(r/alpha));
R_0=r_0:(1-r_0)/100:1;
if (R<1)
    for i=1:1:101
        c=C_bintang*(1-R_0(i));
        I_1(i)=(-b-sqrt(b^(2)-
4*a*c))/(2*a);
        I_2(i)=(-b+sqrt(b^(2)-
4*a*c))/(2*a);
    end
    plot(R_0,I_1,'r','LineWidth',2);

    R_a=r_0:(3-1)/100:3;
    for i=1:1:length(R_a)
        c=C_bintang*(1-R_a(i));
        I_2(i)=(-b+sqrt(b^(2)-
4*a*c))/(2*a);
    end
else
    R_a=r_0:(3-1)/100:3;
    for i=1:1:length(R_a)
        c=C_bintang*(1-R_a(i));
        I_2(i)=((-b+sqrt(b^(2)-
4*a*c))/(2*a));
    end
end

hold on
plot(R_a,I_2,'b','LineWidth',2);

```


Lanjutan Lampiran A

```

hold off
xlabel('Bilangan Reproduksi Dasar
(R_0)')
ylabel('Populasi (I)')
legend('I_1','I_2',20,'location','eastoutsid
e');

grid on
axis([r_0-
1,R_a(101)+2,0,I_2(101)]);
axis([0 3 0 3]);

end
Sumber : Dona M. (2015)

```

```

% --- Executes on button press in reset.
function reset_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to reset (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)
set(handles.S0,'String','');
set(handles.I0,'String','');
set(handles.time,'String','');
set(handles.p_A,'string','');
set(handles.p_miu,'string','');
set(handles.p_r,'string','');
set(handles.p_alfa,'string','');
set(handles.p_K,'string','');
set(handles.popmenu,'Value',1);
set(handles.nilai_R0,'string','');
cla(handles.axes1);
legend('0');

% --- Executes on button press in exit.
function exit_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to exit (see GCBO)

```

Lanjutan Lampiran A

```
% eventdata reserved - to be defined in
clear a;
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)
close;

% --- Executes on selection change in
popmenu.
function popmenu_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject handle to popmenu (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: contents =
cellstr(get(hObject,'String')) returns
popmenu contents as cell array
% contents{get(hObject,'Value')}
returns selected item from popmenu

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function popmenu_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject handle to popmenu (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: popupmenu controls usually have a
white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
```

Lanjutan Lampiran A

```

if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function nilai_R0_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to nilai_R0 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of nilai_R0 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of nilai_R0 as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function nilai_R0_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to nilai_R0 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

Lanjutan Lampiran A

```

function p_miu_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to p_miu (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of p_miu as text
%           str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of p_miu as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function p_miu_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to p_miu (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%           See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function p_alfa_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to p_alfa (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB

```


Lanjutan Lampiran A

```
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of p_alfa as text
%          str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of p_alfa as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function p_alfa_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject      handle to p_alfa (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%          See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function p_r_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to p_r (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)
```

Lanjutan Lampiran A

```
% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of p_r as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of p_r as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function p_r_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to p_r (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function p_A_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to p_A (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of p_A as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of p_A as a double
```

Lanjutan Lampiran A

```
% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function p_A_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to p_A (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function p_K_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to p_K (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of p_K as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of p_K as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
```

Lanjutan Lampiran A

```

function p_K_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to p_K (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function S0_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to S0 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of S0 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of S0 as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function S0_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to S0 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB

```


Lanjutan Lampiran A

```
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function I0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to I0 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of I0 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of I0 as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function I0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to I0 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
```

Lanjutan Lampiran A

```

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in HIT_R0.
function HIT_R0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject handle to HIT_R0 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)
global R
set(handles.nilai_R0,'String',R);

function time_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject handle to time (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of time as text
% str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of time as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function time_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)

```

Lanjutan Lampiran A

```
% hObject    handle to time (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

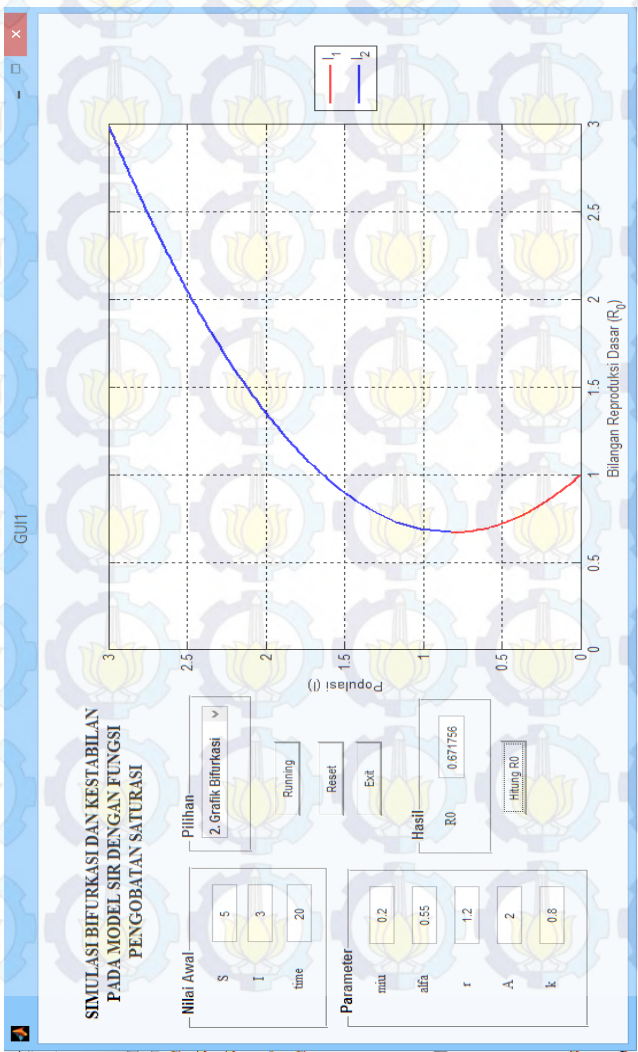
- M File dengan judul **AziODE.m**

```
function dx=AziODE(t,x)
dx=zeros(2,1);

dx(1)=x(1)*(A-x(1))-k*x(2)*x(1);
dx(2)=k*x(2)*x(1)-miu*x(2)-
((r*x(2))/alfa+x(2));
end
```

Lanjutan Lampiran A

- Tampilan Program Bifurkasi Mundur



Lanjutan Lampiran A

- Tampilan Program Kestabilan Titik Keseimbangan



LAMPIRAN B

Listing Program Bifurkasi Hopf

- M File dengan judul **GUI2.m**

```
function varargout = GUI2(varargin)
% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',
    mfilename, ...
    'gui_Singleton',
    gui_Singleton, ...
    'gui_OpeningFcn',
    @GUI2_OpeningFcn, ...
    'gui_OutputFcn',
    @GUI2_OutputFcn, ...
    'gui_LayoutFcn', [],
    ...
    'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback =
    str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] =
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT

% --- Executes just before GUI2 is made
visible.
function GUI2_OpeningFcn(hObject, eventdata,
handles, varargin)
```

Lanjutan Lampiran B

```
% This function has no output args, see
OutputFcn.
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and user
data (see GUIDATA)
% varargin    command line arguments to GUI2
(see VARARGIN)

% Choose default command line output for
GUI2
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes GUI2 wait for user response
(see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);

% --- Outputs from this function are
returned to the command line.
function varargout = GUI2_OutputFcn(hObject,
eventdata, handles)
% varargout  cell array for returning output
args (see VARARGOUT);
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Get default command line output from
handles structure
varargout{1} = handles.output;
```

Lanjutan Lampiran B

```

% --- Executes on button press in RUN.
function RUN_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to RUN (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)
S=str2double(get(handles.S_awal,'String'));
I=str2double(get(handles.I_awal,'String'));
t=str2double(get(handles.t_awal,'String'));

options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-
4 1e-4]);
[T X] = ode45(@SIR_Model,[0 t],[S
I],options);

pilih=get(handles.popmenu,'Value');
switch pilih
case 1
case 2
    cla(handles.axes1);
    legend('0');
    title('0');
    axes(handles.axes1);
    plot(X(:,1),X(:,2));
    hold on
    title('Hopf');
    xlabel('S');
    ylabel('I');
case 3
    cla(handles.axes1);
    legend('0');
    title('0');
    plot(T,X(:,1),'b',T,X(:,2),'r');
    hold on
    title('Grafik HOPF Terhadap waktu');

```


Lanjutan Lampiran B

```

        xlabel('Waktu (s)');
%Waktu=Time
        ylabel('Jumlah Populasi');
%Jumlah Populasi=Population
        legend('S','I');
end
Sumber : Dona M. (2015)

% --- Executes on button press in RESET.
function RESET_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to RESET (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)
set(handles.S_awal,'String','');
set(handles.I_awal,'String','');
set(handles.t_awal,'String','');
set(handles.input_A,'string','');
set(handles.input_miu,'string','');
set(handles.input_r,'string','');
set(handles.input_alfa,'string','');
set(handles.input_K,'string','');
set(handles.popmenu,'Value',1);
set(handles.out_sigma,'string','');
cla(handles.axes1);
        legend('0');
        title('');

% --- Executes on button press in
pushbutton3.
function pushbutton3_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject      handle to pushbutton3 (see
GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB

```

Lanjutan Lampiran B

```

% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)
close;

function out_sigma_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject      handle to out_sigma (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of out_sigma as text
%           str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of out_sigma as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function out_sigma_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject      handle to out_sigma (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%           See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

Lanjutan Lampiran B

```
function input_miu_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to input_miu (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of input_miu as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of input_miu as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function input_miu_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to input_miu (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function input_alfa_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to input_alfa (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
```

Lanjutan Lampiran B

```

% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of input_alfa as text
%          str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of input_alfa as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function input_alfa_CreateFcn(hObject,
 eventdata, handles)
% hObject      handle to input_alfa (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%          See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function input_r_Callback(hObject,
 eventdata, handles)
% hObject      handle to input_r (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

```


Lanjutan Lampiran B

```
% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of input_r as text
%       str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of input_r as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function input_r_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to input_r (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function input_A_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to input_A (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of input_A as text
%       str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of input_A as a double
```

Lanjutan Lampiran B

```

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function input_A_CreateFcn(hObject,
 eventdata, handles)
% hObject    handle to input_A (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function input_K_Callback(hObject,
 eventdata, handles)
% hObject    handle to input_K (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of input_K as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of input_K as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function input_K_CreateFcn(hObject,
 eventdata, handles)
% hObject    handle to input_K (see GCBO)

```

Lanjutan Lampiran B

```
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function S_awal_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject handle to S_awal (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of S_awal as text
% str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of S_awal as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function S_awal_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject handle to S_awal (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles empty - handles not created
until after all CreateFcns called
```

Lanjutan Lampiran B

```
% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%      See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function I_awal_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to I_awal (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of I_awal as text
%      str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of I_awal as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function I_awal_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject      handle to I_awal (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%      See ISPC and COMPUTER.
```


Lanjutan Lampiran B

```

if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function t_awal_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to t_awal (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of t_awal as text
%          str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of t_awal as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function t_awal_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to t_awal (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%          See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

Lanjutan Lampiran B

```

% --- Executes on selection change in
popmenu.
function popmenu_Callback(hObject,
 eventdata, handles)
% hObject    handle to popmenu (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: contents =
cellstr(get(hObject,'String')) returns
popmenu contents as cell array
%          contents{get(hObject,'Value')}
returns selected item from popmenu

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function popmenu_CreateFcn(hObject,
 eventdata, handles)
% hObject    handle to popmenu (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: popupmenu controls usually have a
white background on Windows.
%          See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

Lanjutan Lampiran B

- M File dengan judul **SIR_model.m**

```
function xdot=SIR_Model(t,x)
xdot = zeros(2,1);

% Value of R0
R_0 = (k*A)/(mu+(r/alpha))

%I equation
a=k^2
b=(alpha*(k^2))-((k*A)+mu)
C_bintang = (mu*alpha)+r
c=C_bintang*(1-R_0);

I_2 = (-b+sqrt((b^2)-(4*a*c)))/(2*a)
%Value of I_2
S_2 = A-(I_2*k)
%Value of S_2

m=S_2*(alpha+I_2)
p=k*I_2*(alpha+I_2)

J = [-S_2 -k*S_2; k*I_2
r*I_2/((alpha*I_2)^2)] %Jacobian Matrix E2
(Endemic)
N = det(J)
%Determinan Matrix E2 (Endemic)
w = sqrt(N)

f = (((2*m*(alpha+I_2))-
(p*(k*alpha+A)))+(m*k*(alpha+2*I_2)))/(p*w))*
x(1)*x(2)+...
(((p*m*(k*alpha+A))-(k*S_2*(p^2))-
((alpha+I_2)*(m^2))-
(k*I_2*(m^2)))/p*(w^2))*(x(2)^2)-...
```

Lanjutan Lampiran B

```

((alpha+I_2)/p)*(x(1)^2)-
(1/(p*w))*(x(1)^2)*x(2)+((2*m-
p*k+m*k)/(p*(w^2)))*x(1)*(x(2)^2)+...
((w^2-k*(m^2))/(p*(w^3)))*(x(2)^3);

g=((k*(alpha+2*I_2))/p)*x(1)*x(2)-
((k*m*I_2)/(p*w))*x(2)^2+(k/(p*w))*x(1)*x(2)
^2 - ...
(k*m/(p*(w^2)))*x(2)^3;

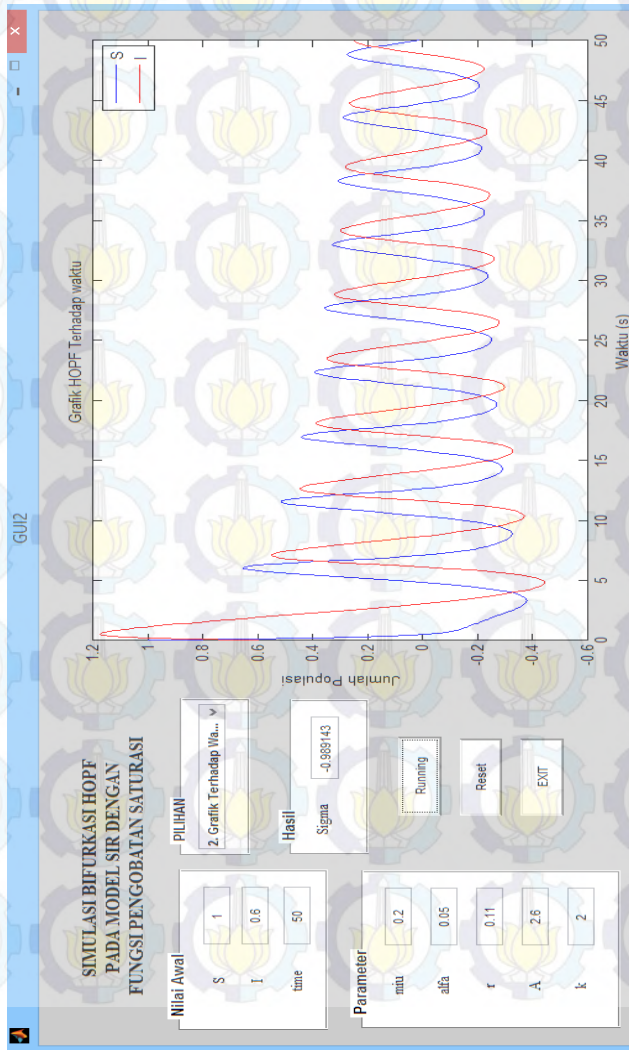
sigma=((2*k*((alpha+I_2)^3)*S_2*I_2)/16*(p^2
)*(w^4))*((alpha+I_2)*(S_2*(2*(k^2)+k+2)+(k^
3)*I_2)-(k^2)*I_2*(k*alpha+A)-
2*(k^2)*S_2*I_2)*(-k*I_2)+...
((2*k*((alpha+I_2)^3)*S_2*I_2)/16*(p^2)*(w^4
))*((alpha+I_2)*(k*S_2*(-2-alpha*k+S_2)-
2*(S_2^2)))+(k*alpha+A)*S_2*(-2*alpha-
2*I_2+alpha*k)-...
2*k*(S_2^2)*(alpha+2*I_2)+2*k*(S_2^2)*I_2);
sigma

xdot(1) = -w*x(2)+f; %xdot
xdot(2) = w*x(1)+g; %ydot

```

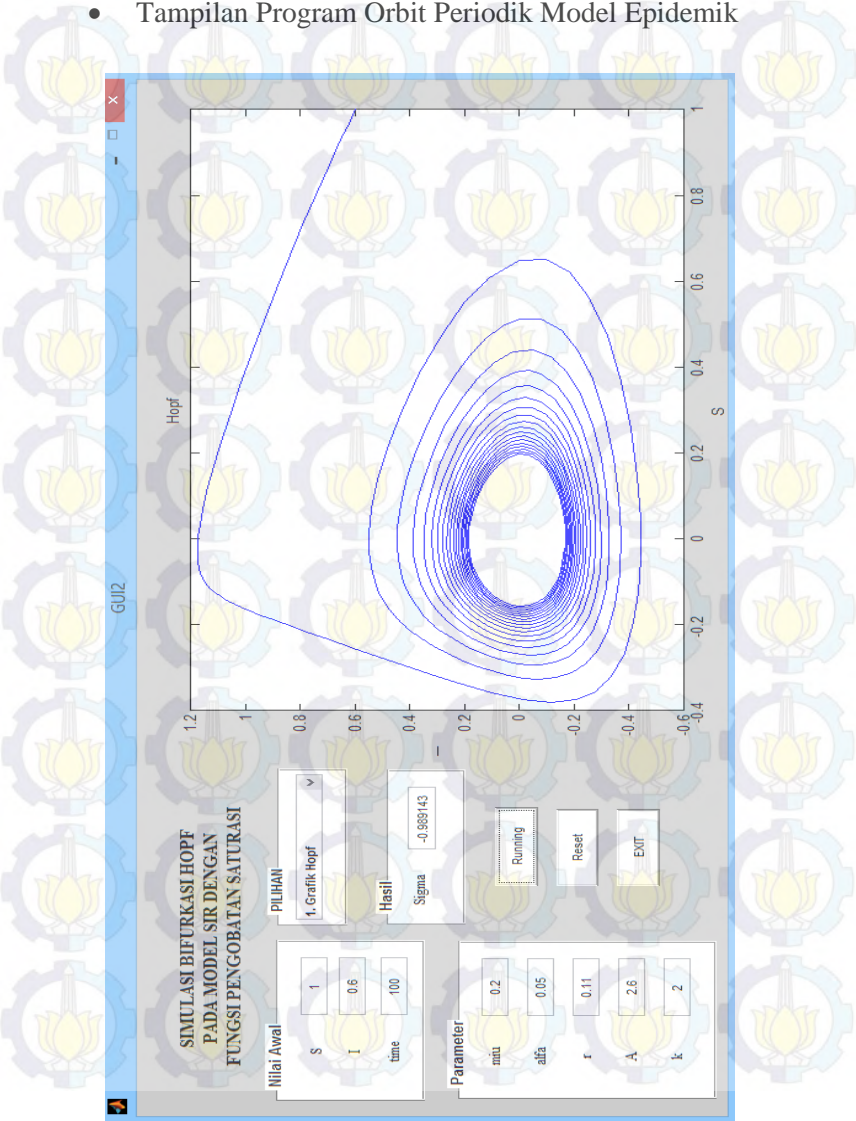

Lanjutan Lampiran B

- Tampilan Program Plot S dan I terhadap t .

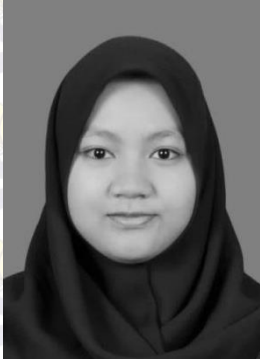


Lanjutan Lampiran B

- Tampilan Program Orbit Periodik Model Epidemik



BIODATA PENULIS



Fazatia Aidila atau yang biasa disapa Azi lahir di Jakarta, 28 November 1994. Penulis menempuh pendidikan di SD Negeri Cipinang 01 Jakarta, SMP Negeri 92 Jakarta, dan SMA Negeri 12 Jakarta. Penulis yang menyukai olahraga air ini diterima di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2012. Di Jurusan Matematika ITS ini, Penulis mengambil rumpun mata kuliah matematika terapan, yang terdiri dari Pemodelan Matematika dan Simulasi serta Riset Operasi dan Pengolahan Data. Penulis juga aktif dalam mengikuti organisasi, seperti di Himpunan Matematika ITS (HIMATIKA ITS) sebagai staff Hublu dan juga Dewan Perwakilan Mahasiswa FMIPA ITS (DPM FMIPA ITS) sebagai Komisi Kontrol. Tidak hanya itu, Penulis juga aktif berperan dalam beberapa kegiatan kepanitian, seperti Olimpiade Matematika ITS (OMITS), Pemilu ITS 2013, dan kegiatan lainnya.

Apabila ingin memberikan saran, kritik, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini, bisa melalui email fzt.aidila@gmail.com.