

# Analisis Kualitatif pada Model SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi

Fazatia Aidila, Mohammad Setijo Winarko dan Lukman Hanafi  
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)  
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia  
e-mail: setijo\_winarko@yahoo.com

**Abstrak**—Model epidemi SIR merupakan model yang menggambarkan penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi. Pada model SIR populasi dibagi menjadi tiga bagian, yaitu populasi yang rentan terhadap penyakit (*Susceptible*), populasi yang terinfeksi penyakit (*Infected*), dan populasi yang telah sembuh dari penyakit (*Recovered*). Tugas Akhir ini membahas tentang penyebaran penyakit model epidemi SIR yang dipengaruhi fungsi pengobatan saturasi dengan mencari titik kesetimbangan, kestabilan titik kesetimbangan, menentukan bilangan Reproduksi Dasar, analisis bifurkasi mundur dan bifurkasi Hopf. Hasil analisis menunjukkan bahwa terjadi bifurkasi mundur ketika  $R_0 = 1$  akibat adanya dampak keterlambatan pengobatan (adanya fungsi pengobatan saturasi) dan terjadi bifurkasi Hopf pada kasus tertentu yang ditandai dengan munculnya orbit periodik. Selanjutnya dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde empat pada penelitian ini diperoleh bahwa jika  $R_0 < 1$  titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_1$ ) stabil asimtotik lokal sedangkan jika  $R_0 > 1$  titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil asimtotik lokal.

**Kata Kunci**—Model epidemi, Fungsi Pengobatan Saturasi, Bifurkasi Mundur, Bifurkasi Hopf, Metode Runge-Kutta.

## I. PENDAHULUAN

Penyakit campak, gondong, cacar, polio dan influenza merupakan penyakit menular yang berbahaya. Penyakit tersebut disebabkan oleh virus yang dapat menyebar melalui kontak langsung dengan penderita, udara, dan kotoran manusia [1]. Penyakit tersebut dinilai berbahaya karena dapat menyebabkan komplikasi, kelumpuhan, kerusakan saraf otak, dan kematian. Menurut World Health Organization (WHO), sekitar 6000 orang di Indonesia meninggal dunia pada tahun 2012 karena terinfeksi penyakit menular, seperti polio, cacar, dan campak [2].

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika turut berperan dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit. Peranan tersebut berupa model matematika, yang merupakan hal penting dalam epidemiologi karena dapat memberikan pemahaman tentang mekanisme yang mendasari pengaruh penyebaran penyakit dan memberikan saran terhadap strategi pengendalian penyakit tersebut. Dalam tugas akhir ini, model matematika yang digunakan adalah model epidemi tipe SIR. Pada umumnya, model epidemi tipe SIR menggambarkan alur penyebaran penyakit melalui kontak langsung atau perantara lain. Pada sebagian kasus, terdapat penyakit yang dapat memasuki kondisi yakni dimana penyakit

menyebar pada suatu wilayah dalam kurun waktu yang lama [3].

Pengobatan merupakan salah satu metode untuk menghentikan penyebaran penyakit, akan tetapi dapat terjadi suatu keadaan dimana jumlah orang yang terinfeksi semakin besar dan sarana pengobatan terbatas, sehingga menyebabkan keterlambatan pengobatan. Dampak dari keterlambatan pengobatan dapat dinyatakan dalam fungsi pengobatan saturasi  $T(I) = \frac{rI}{(a+I)}$ ,  $r > 0$ ,  $a \geq 0$  dengan  $r$  laju pengobatan dan  $a$  ukuran sejauh mana dampak pengobatan tertunda pada individu yang terinfeksi [4].

Berdasarkan permasalahan tersebut, dalam Tugas Akhir ini penulis akan melakukan analisis pada model epidemi tipe SIR yang dipengaruhi fungsi pengobatan saturasi dengan menyelidiki adanya kestabilan, adanya bifurkasi mundur serta adanya bifurkasi Hopf. Penyelesaian numerik akan disajikan dalam bentuk simulasi untuk menggambarkan hasil analisis dari permasalahan model tersebut.

## II. METODOLOGI PENELITIAN

### A. Studi Literatur

Tahap ini merupakan tahap untuk melakukan identifikasi permasalahan, yaitu mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi bisa berupa tugas akhir, jurnal, buku, maupun artikel terkait.

### B. Tahap Mengkaji Model Epidemi SIR

Untuk memahami penyebaran penyakit model epidemi SIR yang dipengaruhi fungsi pengobatan saturasi disusun asumsi-asumsi tertentu sehingga dapat dibuat model kompartemen dengan populasi *Susceptible*, *Infected* dan *Recovered*.

### C. Tahap Mencari Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Pada tahap ini dibentuk model epidemi dalam keadaan setimbang ketika laju populasi masing masing adalah nol. Selanjutnya dari model epidemi tersebut dicari titik kesetimbangan ketika tidak ada penyebaran penyakit. Oleh karena itu ada model epidemi disubstitusikan  $I = 0$  sedemikian hingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit.

Pada tahap ini juga ditentukan Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian titik kesetimbangan bebas penyakit dan diselidiki kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit berdasarkan nilai  $R_0$ .

#### D. Tahap Mencari Titik Kesetimbangan Endemik

Pada tahap ini dicari titik kesetimbangan endemik dengan cara yang sama saat mencari titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu dengan membentuk keadaan setimbang dari model epidemi dan selanjutnya mencari titik kesetimbangan ketika ada penyebaran penyakit  $I = I^* \neq 0$ .

Pada tahap ini juga dilakukan analisis bifurkasi mundur dan menentukan kestabilan titik kesetimbangan endemik.

#### E. Tahap Menyelidiki Eksistensi Bifurkasi Hopf

Berdasarkan titik kesetimbangan yang dicari pada tahap sebelumnya, pada tahap ini dilakukan analisis titik kesetimbangan yang mempunyai sepasang nilai eigen kompleks, sehingga dapat ditentukan syarat transversal dari model epidemi. Kemudian dicari bentuk normal bifurkasi Hopf dengan mentranslasikan (menggeser) terlebih dahulu titik kesetimbangan ke titik (0,0) sehingga model epidemi sekarang mempunyai titik kesetimbangan (0,0). Selanjutnya yang terakhir menghitung indeks stabilitas dari bentuk normal bifurkasi Hopf untuk menentukan jenis bifurkasi Hopf yang terjadi.

#### F. Tahap Simulasi Numerik Runge-Kutta Orde-4

Pada tahap ini dilakukan penyelesaian numerik model epidemi SIR yang dipengaruhi fungsi pengobatan saturasi dengan metode numerik Runge Kutta orde 4 dan menggambarkan grafik kestabilan titik kesetimbangan, menggunakan software MATLAB.

#### G. Tahap Kesimpulan dan Saran

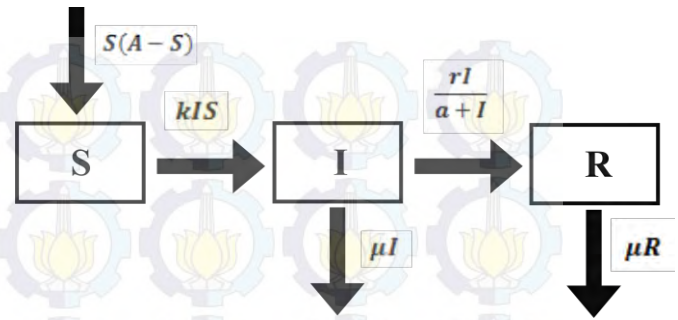
Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan. Kemudian diberikan saran sebagai masukan dan perbaikan untuk penelitian berikutnya.

### III. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

#### A. Model Epidemi SIR

Pada model epidemi SIR dengan fungsi pengobatan saturasi disusun asumsi- asumsi sebagai berikut :

1. Populasi dibagi menjadi 3 bagian yaitu:  
 $S$  adalah populasi *Susceptible* (populasi yang rentan terhadap penyakit) pada saat  $t$ .  
 $I$  adalah populasi *Infected* (populasi yang terinfeksi penyakit) pada saat  $t$ .  
 $R$  adalah populasi *Recovered* (populasi yang telah sembuh dari penyakit).
2.  $A$  adalah jumlah maksimal populasi pada saat tidak adapenyakit dan  $\mu$  adalah laju kematian alami dari populasi. dengan kondisi sebagai berikut  $A > 0$  dan  $\mu > 0$ .
3.  $kIS$  adalah laju besarnya populasi yang terinfeksi, dengan  $k$  adalah koefisien transmisi penularan penyakit saat terjadi interaksi antara populasi *Susceptible* dan *Infected*.  $T(I) = \frac{rI}{\alpha+I}$  adalah fungsi pengobatan saturasi dengan  $r$  adalah laju pengobatan dan  $\alpha$  adalah ukuran yang menyatakan dampak pengobatan yang tertunda pada individu yang terinfeksi.



Gambar 1. Diagram Kompartemen Model Epidemik SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi

Model dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= S(A - S) - kIS \\ \frac{dI}{dt} &= kIS - \mu I - \frac{rI}{\alpha+I} \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{rI}{\alpha+I} - \mu R \end{aligned} \quad (1)$$

karena Persamaan pertama dan kedua dari (1) independen terhadap Persamaan ketiga sehingga Persamaan ketiga dapat diabaikan, maka Persamaan model epidemi dapat direduksi menjadi

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= S(A - S) - kIS \\ \frac{dI}{dt} &= kIS - \mu I - \frac{rI}{\alpha+I} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

#### B. Daerah Penyelesaian

Didefinisikan  $M_1 = \max\{A, S(0)\}$ .  $\frac{dS(t)}{dt} \leq S(t)(A - S(t))$  maka  $S(t) \leq M_1$  untuk semua  $t$ , sehingga  $S(t)$  memiliki daerah penyelesaiannya  $0 \leq S(t) \leq M_1$ . Misalkan  $U(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ . Maka diperoleh daerah penyelesaian  $\Omega = \{0 \leq S(t) \leq M_1, 0 \leq S(t) + I(t) + R(t) \leq \frac{(A+\mu)}{\mu} M_1, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0\}$ . Karena kondisi awal bernilai positif maka  $\Omega$  merupakan daerah invarian positif yang artinya semua penyelesaian berada di dalam  $\Omega$ .

#### C. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit  $E(S_0, I_0)$  adalah titik yang diperoleh ketika model epidemi pada sistem (2) berada pada keadaan setimbang dan tidak terjadi penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi sehingga  $I = I_0 = 0$ . Titik kesetimbangan model dapat diperoleh dengan

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0$$

Berdasarkan sistem (2) didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit adalah

$$E_1 = (S_0, I_0) = (A, 0).$$

#### 1. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) merupakan suatu parameter yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit.

$$R_0 = \frac{kA}{\mu + \alpha} \quad (3)$$

#### 2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

##### Teorema 1

Titik bebas penyakit  $E$  stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$  dan tidak stabil jika  $R_0 > 1$ .

**Bukti :**

Berdasarkan nilai eigen yang telah diperoleh pada sistem (2)

$$\lambda_{1_{E_1}} < 0, \text{ dan}$$

$$\lambda_{2_{E_1}} = \left( \mu + \frac{r}{\alpha}(R_0 - 1) \right) < 0$$

dari persamaan diatas, dapat dilihat  $\lambda_{2_{E_1}} < 0$  jika dan hanya jika  $R_0 - 1 < 0$  dengan kata lain  $R_0 < 1$ . Hal ini membuktikan jika  $R_0 < 1$  maka semua nilai eigen dari akar Persamaan karakteristik bernilai real negatif sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1 = (A, 0)$  stabil asimtotik lokal, sebaliknya jika  $R_0 > 1$  titik kesetimbangan  $E_1$  tidak stabil.

**D. Titik Kesetimbangan Endemik**

Titik kesetimbangan endemik  $E^*(S, I)$  digunakan untuk menunjukkan adanya kemungkinan penyebaran penyakit. Karena pada keadaan endemik ada penyebaran penyakit maka populasi  $Infected I = I^* \neq 0$ . Titik Kesetimbangan Endemik dapat diperoleh dengan

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0$$

sedemikian hingga

$$S(A - S) - kIS = 0 \quad (4)$$

$$kIS - \mu I - \frac{rI}{a+I} = 0 \quad (5)$$

dari (4) diperoleh  $I^* = \frac{A-S}{k}$ , kemudian substitusi  $I^*$  ke (5) diperoleh

$$S^2 - \left( \alpha k + A + \frac{\mu}{k} \right) S + \frac{\mu}{k} (\alpha k + A) + r = 0 \quad (6)$$

dengan

$$R_0 \geq 1 - \frac{\alpha^2 k^2 + r}{\mu \alpha + r} + \frac{2\alpha k \sqrt{r}}{\mu \alpha + r} := p_0$$

Dan dari (6) diperoleh penyelesaian positif

$$S_1 = \frac{\alpha k + A + \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ dan } S_2 = \frac{\alpha k + A + \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Selanjutnya jika  $S_1 < A$  maka

$$R_0 > 1 + \frac{\alpha^2 k^2 - r}{\mu \alpha + r} := p_1 \text{ dan } R_0 < 1$$

dan jika  $S_2 < A$  maka

$$R_0 > 1 + \frac{\alpha^2 k^2 - r}{\mu \alpha + r} := p_1 \text{ atau } R_0 > 1$$

Perhatikan bahwa  $\alpha k < \sqrt{r}$  ekuivalen dengan  $p_1 < 1$ .

Sehingga ketika  $R_0 \geq p_0$ , dapat disimpulkan

- Jika  $\alpha k < \sqrt{r}$  dan  $R_0 < 1$ , maka sistem (2) memiliki dua titik kesetimbangan endemik  $E_1 = (S_1, I_1)$  dan  $E_2 = (S_2, I_2)$ .
- Jika  $\alpha k < \sqrt{r}$  dan  $R_0 > 1$ , maka sistem (2) memiliki titik kesetimbangan endemik tunggal  $E_2 = (S_2, I_2)$ , dan titik kesetimbangan endemik  $E_1$  tidak ada karena  $p_1 < R_0 < 1$  tidak berlaku.
- Misalkan  $\alpha k \geq \sqrt{r}$ , maka  $p_1 \geq 1$ , sehingga titik kesetimbangan endemik  $E_1$  tidak ada. Kemudian ketika  $R_0 > 1$  terdapat titik kesetimbangan endemik tunggal  $E_2 = (S_2, I_2)$  dan tidak ada titik kesetimbangan endemik ketika  $R_0 < 1$ .

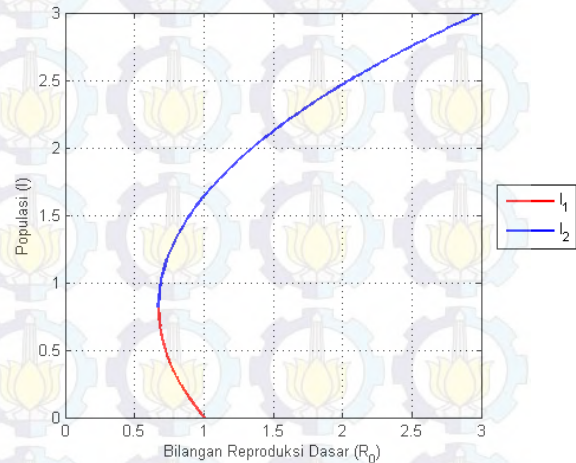
**1. Analisis Bifurkasi Mundur**

Bifurkasi mundur terjadi disebabkan oleh adanya parameter tertentu yang mengakibatkan adanya titik kesetimbangan endemik ketika  $R_0 < 1$ .

**Teorema 2**

Pada sistem (2) terjadi bifurkasi mundur dengan titik kesetimbangan endemik  $E_1$  dan  $E_2$  pada saat  $R_0 < 1$  dan  $\alpha k < \sqrt{r}$ .

Pada pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa, jika  $\alpha k < \sqrt{r}$  sistem (2) memiliki dua titik kesetimbangan endemik  $E_1$  dan  $E_2$  pada saat  $R_0 < 1$ . Untuk  $\alpha k < \sqrt{r}$  dapat digambarkan kurva bifurkasi seperti pada gambar 2.



Gambar 2. Bifurkasi Mundur pada Model Epidemik SIR yang dipengaruhi oleh fungsi pengobatan saturasi

Kurva bifurkasi pada Gambar 2 merupakan kurva terjadinya bifurkasi mundur pada epidemi SIR dengan pengaruh fungsi pengobatan saturasi menggunakan parameter yang berasal dari [5],  $\alpha = 0.55, \mu = 0.2, r = 1.2, k = 0.8, A = 2$ . Hal ini membuktikan bahwa terjadi bifurkasi mundur pada model epidemi ketika  $R_0 = 1$  dan terdapat titik endemik yang stabil, hal ini menunjukan bahwa ketika terjadi bifurkasi mundur, penyakit dapat menjadi endemik, sekalipun  $R_0 < 1$ . Sedangkan ketika  $R_0 < R_c$  tidak terdapat titik endemik. Sehingga  $R_c$  dapat digunakan sebagai bilangan reproduksi dasar baru dalam mengendalikan penyebaran penyakit.

$$R_c = \frac{kA^c}{\mu + \alpha} = p_0 \quad (7)$$

dengan

$$A^c = \frac{\mu}{k} - \alpha k + \sqrt{4r}.$$

**2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik**

Untuk mengetahui laju penyebaran penyakit pada titik endemik dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik.

- Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik untuk  $R_0 = R_c$

Ketika  $R_0 = R_c$  maka (2) memiliki titik kesetimbangan endemik  $E_0 = (S_0, I_0)$  dimana

$$S_0 = \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k}}{2} \text{ dan } I_0 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k}}{2}$$

maka matriks Jacobian dari  $E_0$  adalah

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -S_0 & -kS_0 \\ kI_0 & \frac{rI_0}{(\alpha+I_0)^2} \end{bmatrix}$$

kemudian, diperoleh

$$\begin{aligned} \det(J(E_0)) &= S_0 I_0 \left( k^2 - \frac{r}{(\alpha+I_0)^2} \right) \\ &< S_0 I_0 \left( k^2 - \frac{r}{k^2} \right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik  $E_0$  tidak stabil (*saddle*).

b. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik untuk  $R_c < R_0 < 1$

Ketika  $R_c < R_0 < 1$  maka (2) memiliki dua titik kesetimbangan endemik  $E_1 = (S_1, I_1)$  dan  $E_2 = (S_2, I_2)$ . Pada kestabilan titik kesetimbangan endemik  $E_1 = (S_1, I_1)$  diketahui

$$S_1 = \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ dan } I_1 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k}$$

maka matriks Jacobian dari  $E_1$  adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -S_1 & -kS_1 \\ kI_1 & \frac{rI_1}{(\alpha+I_1)^2} \end{bmatrix}$$

dan

$$\det(J(E_1)) = S_1 I_1 \left( k^2 - \frac{r}{(\alpha+I_1)^2} \right)$$

karena  $R_0 > p_0$  dan  $I_1 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k}$ , maka

$$\begin{aligned} (\alpha + I_1)^2 &= \left( \alpha + \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k} \right)^2 \\ &= \left( \frac{A + \alpha k - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k} \right)^2 \\ &< \frac{(A + \alpha k - \frac{\mu}{k})^2}{4k^2} \\ &< \frac{r}{k^2} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa  $\det(J(E_1)) < 0$ , maka titik kesetimbangan endemik  $E_1$  tidak stabil (*saddle*).

Kemudian pada kestabilan titik kesetimbangan endemik  $E_2 = (S_2, I_2)$  diketahui

$$S_2 = \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ dan } I_2 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k}$$

Maka matriks Jacobian dari  $E_2$  adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -S_2 & -kS_2 \\ kI_2 & \frac{rI_2}{(\alpha+I_2)^2} \end{bmatrix}$$

dan

$$\det(J(E_2)) = S_2 I_2 \left( k^2 - \frac{r}{(\alpha+I_2)^2} \right)$$

dengan cara yang sama diperoleh bahwa  $\det(J(E_2)) > 0$ , maka titik kesetimbangan endemik  $E_2$  merupakan simpul atau spiral. Kemudian diperoleh

$$\text{tr}(J(E_2)) = \frac{rI_2}{(\alpha+I_2)^2} - S_2$$

selanjutnya misalkan

$$(H_1) \Delta_{44} = [(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k > 0$$

dan didefinisikan

$$H \triangleq \frac{\alpha k^2}{k-1} - \frac{\mu}{k(k-1)} - \frac{\sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k}}{(k-1)}$$

maka kestabilan titik kesetimbangan endemik  $E_2$  dinyatakan dalam teorema berikut

### Teorema 3

Misalkan  $\alpha k < \sqrt{r}$ ,  $p_1 < R_0 < 1$  dan  $(H_1)$  ada, maka untuk sistem (2) mempunyai

1.  $E_2$  stabil jika

$$(k-1)A - \mu + \alpha k \leq 0$$

atau

$$(k-1)A - \mu + \alpha k > 0$$

$$r < \frac{1}{4} \left[ \left( A + \alpha k - \frac{\mu}{k} \right)^2 - H^2 \right]$$

2.  $E_2$  tidak stabil jika

$$(k-1)A - \mu + \alpha k > 0$$

$$r < \frac{1}{4} \left[ \left( A + \alpha k - \frac{\mu}{k} \right)^2 - H^2 \right]$$

### Bukti

Berdasarkan (2) diketahui  $\frac{rI_2}{\alpha+I_2} = kS_2I_2 - \mu I_2$ , maka

$$\text{tr}(J(E_2)) = \frac{1}{\alpha+I_2} [(k-1)S_2I_2 - \mu I_2 - \alpha S_2] \quad (8)$$

Karena  $S_2 = A - kI_2$ , maka berdasarkan (8) bahwa  $\text{tr}(J(E_2)) = 0$  ekuivalen dengan

$$(1-k)kI_2^2 + ((k-1)A - \mu + \alpha k)I_2 - \alpha A = 0 \quad (9)$$

dari (9) diketahui penyelesaian dari  $\text{tr}(J(E_2))$  merupakan himpunan kosong jika

$$(k-1)A - \mu + \alpha k \leq 0 \quad (10)$$

dan jika

$$(k-1)A - \mu + \alpha k > 0 \quad (11)$$

maka dapat diperoleh

$$I_2 = \left[ \frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k]}{2k(k-1)} \right] \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha A(1-k)k}{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2}} \right] \quad (12)$$

karena  $I_2 < \frac{A}{k}$ , maka

$$I_2 = \left[ \frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k]}{2k(k-1)} \right] \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha A(1-k)k}{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2}} \right] \quad (13)$$

selanjutnya, dengan menggunakan Persamaan  $H$  dan mensubstitusikan  $I_2 = \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k}$ , maka (13) menjadi

$$r = \frac{1}{4} \left[ \left( \alpha k + A - \frac{\mu}{k} \right)^2 - H^2 \right]$$

sehingga, dapat dilihat bahwa  $(H_1)$ , (11) dan (13) merupakan syarat perlu dan cukup agar  $\text{tr}(J(E_2)) = 0$ . Kemudian berdasarkan definisi  $\text{tr}(J(E_2)) = 0$  bahwa (10) berarti  $\text{tr}(J(E_2)) < 0$ . Oleh karena itu,  $E_2$  stabil jika (10) ada.

Kemudian  $\text{tr}(J(E_2)) < 0$  jika  $r < \frac{1}{4} \left[ \left( \alpha k + A - \frac{\mu}{k} \right)^2 - H^2 \right]$ ,

dan  $\text{tr}(J(E_2)) > 0$  jika  $r > \frac{1}{4} \left[ \left( \alpha k + A - \frac{\mu}{k} \right)^2 - H^2 \right]$ .

### E. Analisis Bifurkasi Hopf

#### Teorema 4

Misalkan  $\alpha k < \sqrt{r}$ ,  $p_1 < R_0 < 1$ . Maka pada sistem (2) terjadi bifurkasi Hopf jika  $(H_1)$ , (11), (13) berlaku. Selanjutnya jika  $\sigma < 0$  orbit periodik dari sistem (2) stabil sehingga terjadi bifurkasi Hopf superkritikal. Dan jika  $\sigma > 0$ , orbit periodik dari sistem (2) tidak stabil sehingga terjadi bifurkasi Hopf subkritikal.

### Bukti

Berdasarkan sistem (2)

$$\frac{dS}{dt} = S(A - S) - kIS$$

$$\frac{dl}{dt} = kIS - \mu l - \frac{r}{\alpha + l}$$

didapatkan salah satu titik kesetimbangan  $E_2 = (S_2, I_2)$  dan matriks Jacobian  $E_2$  diketahui sebagai berikut

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -S_2 & -kS_2 \\ kI_2 & \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\text{tr}(J(E_2)) \pm \sqrt{(\text{tr}(J(E_2))^2 - 4\det(J(E_2)))})}{2}$$

Bifurkasi Hopf terjadi apabila matriks Jacobian mempunyai sepasang nilai eigen yang imajiner murni. Kedua nilai eigen imajiner murni jika dan hanya jika  $\text{tr}(J(E_2)) = 0$ . Pada pembahasan sebelumnya diketahui bahwa  $\text{tr}(J(E_2)) = 0$  jika hanya jika  $(H_1)$ , (11) dan (10) berlaku. Maka terjadi bifurkasi Hopf dengan syarat transversal

$$\frac{d}{dr} \left\{ \text{Re} \left( \lambda(J(E_2)) \right) \right\} \Big|_{r=\frac{1}{4} \left[ (\alpha k + A - \frac{u}{k})^2 - H^2 \right]} = \frac{I_2}{2(\alpha + I_2)^2} \neq 0$$

Selanjutnya ditentukan bentuk normal bifurkasi Hopf dengan melakukan translasi titik kesetimbangan  $(S_2, I_2)$  ke titik  $(0,0)$  dengan melakukan transformasi  $x = S - S_2$ ,  $y = I - I_2$  dan  $d\tau = \frac{dt}{(\alpha + I + I_2)}$ , sehingga diperoleh

$$\frac{dx}{d\tau} = (\alpha + I + I_2) \left[ (A - 2S_2 - kI_2)x - kS_2y - kxy - x^2 \right]$$

$$\frac{dy}{d\tau} = [kxy + (kS_2 - u)y + kI_2x](\alpha + I + I_2) - \frac{ray}{\alpha + I_2}$$

Kemudian untuk memudahkan, maka dimisalkan  $x = S$ ,  $y = I$  dan  $\tau = t$ , didapat

$$\frac{dS}{dt} = (\alpha + I + I_2) \left[ (A - 2S_2 - kI_2)S - kS_2I - kSI - S^2 \right]$$

$$\frac{dI}{dt} = [kSI + (kS_2 - u)I + kI_2S](\alpha + I + I_2) - \frac{r\alpha I}{\alpha + I_2}$$

Berdasarkan (2) dan  $\text{tr}(J(E_2)) = 0$ , diperoleh

$$A - S_2 - kI_2 = 0, kS_2 - u - \frac{r}{\alpha + I_2} = 0, \text{ dan}$$

$$rI_2 - S_2(\alpha + I_2)^2 = 0$$

sehingga persamaan  $\frac{dS}{dt}$  dan  $\frac{dI}{dt}$  menjadi

$$\frac{dS}{dt} = -S_2(\alpha + I_2)S - kS_2(\alpha + I_2)I - (k\alpha + A)SI - (\alpha + I_2)S^2 - kS_2I^2 - kSI^2 - S^2I \quad (14)$$

$$\frac{dI}{dt} = kI_2(\alpha + I_2)S + S_2(\alpha + I_2)I + k(\alpha + 2I_2)SI + \frac{rI^2}{\alpha + I_2} + kSI^2 \quad (15)$$

Kemudian membentuk persamaan (14) dan (15) dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & -km \\ p & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \quad (16)$$

dengan

$$m = S_2(\alpha + I_2)$$

$$p = kI_2(\alpha + I_2)$$

$$g = -(k\alpha + A)SI - (\alpha + I_2)S^2 - kS_2I^2 - kSI^2 - S^2I$$

$$h = k(\alpha + 2I_2)SI + \frac{rI^2}{\alpha + I_2} + kSI^2$$

Selanjutnya dengan mencari matriks Jacobian dari persamaan (14) dan (15) dan substitusi titik kesetimbangan  $(0,0)$  diperoleh matriks Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} -m & -km \\ p & m \end{bmatrix}$$

dari matriks Jacobian di atas diperoleh nilai persamaan karakteristik

$$\bar{\lambda}^2 - m^2 + pkm = 0$$

$$\bar{\lambda}^2 + \det(J(E_2)) = 0$$

$$\bar{\lambda} = \pm i \sqrt{\det(J(E_2))} = \pm i\omega$$

dengan permisalan

$$\omega = \sqrt{\det(J(E_2))}$$

Berikutnya dengan substitusi

$$S = \frac{x}{p} - \frac{my}{p\omega} \text{ dan } I = \frac{y}{\omega}$$

ke matriks (16) maka matriksnya menjadi

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

dan bentuk Normal Bifurkasi Hopf sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y + f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x + g(x, y)$$

dengan

$$f(x, y) = \left[ \left( \frac{2m(\alpha + I_2) - p(k\alpha + A) - mk(\alpha + 2I_2)}{p\omega} \right) xy + \left( \frac{pm(k\alpha + A) - kS_2p^2 - (\alpha + I_2)m^2 - kI_2m^2}{p\omega^2} \right) y^2 - \frac{(\alpha + I_2)}{p} x^2 - \frac{1}{p\omega} x^2y + \left( \frac{2m - pk + mk}{p\omega^2} \right) xy^2 + \left( \frac{\omega^2 - km^2}{p\omega^3} \right) y^3 \right]$$

$$\text{dan } g(x, y) = \left[ \frac{k(\alpha + 2I_2)}{p} xy - \frac{kmI_2}{p\omega} y^2 + \frac{k}{p\omega} xy^2 - \frac{km}{p\omega^2} y^3 \right]$$

Untuk menyelidiki jenis bifurkasi Hopf yang terjadi menggunakan indeks stabilitas

$$\Gamma = \frac{1}{16} [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyx}] + \frac{1}{16\omega} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}] \Big|_{(0,0)}$$

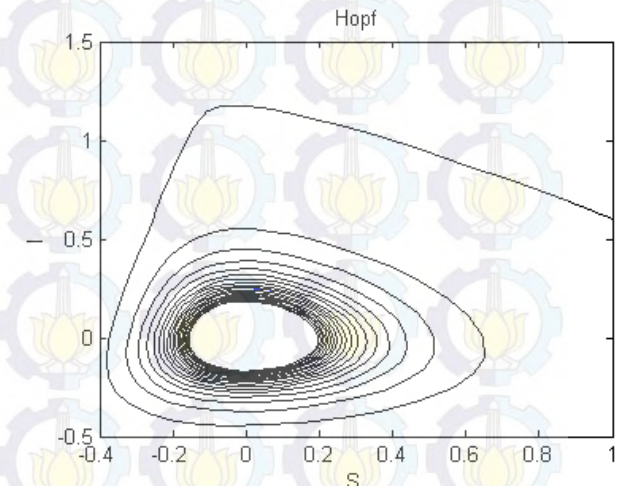
dan diperoleh

$$\Gamma = \frac{2k(\alpha + I_2)^3 S_2 I_2 \sigma}{16p^2 \omega^4} \sigma \quad (17)$$

dengan

$$\sigma = \{ [(a + I_2)(S_2(2k^2 + k + 2) + k^3 I_2) - k^2 I_2(k\alpha + A) - 2k^2 S_2 I_2](-kI_2) + (a + I_2)(-2 - ak + S_2)kS_2 - 2S_2^2 + (k\alpha + A)S_2(-2\alpha - 2I_2 + ak) - 2kS_2^2(\alpha + 2I_2) + 2kS_2^2 I_2 \}$$

Selanjutnya diselidiki eksistensi bifurkasi Hopf pada model epidemi SIR yang dipengaruhi oleh fungsi pengobatan saturasi dengan parameter  $A = 2.6, \mu = 0.2, k = 2, \alpha = 0.05, r = 0.11$  [5].

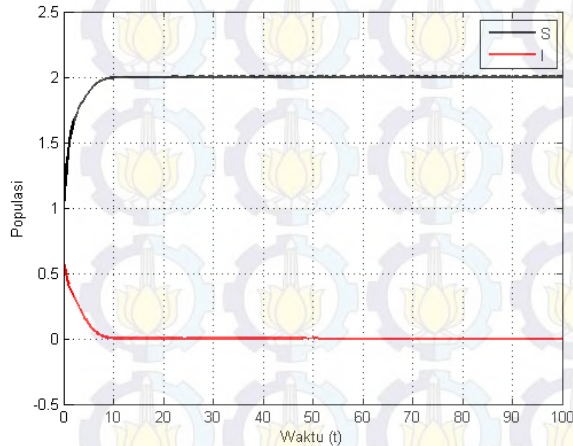


Gambar 3. Orbit Periodik Model Epidemi SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi

Berdasarkan Gambar 3 terlihat adanya orbit periodik stabil dengan nilai  $\sigma = -0.9891 < 0$ , sehingga dapat disimpulkan terjadi bifurkasi Hopf Superkritikal.

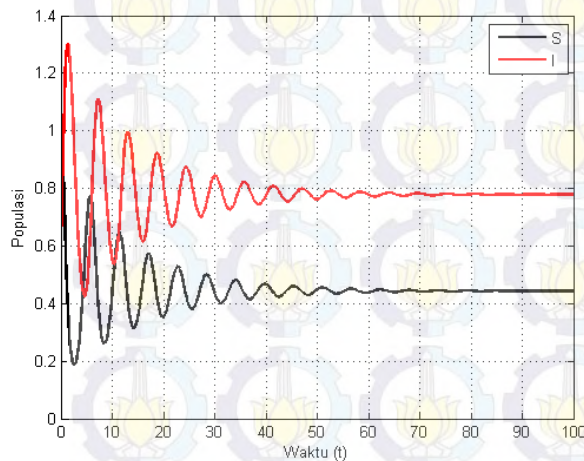
#### F. Tahap Simulasi Numerik Runge-Kutta orde-4

##### 1. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan ketika $R_0 < 1$



Gambar 4 Grafik Kestabilan ketika  $R_0 < 1, S = 1$ , dan  $I = 0.6$

##### 2. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan ketika $R_0 > 1$



Gambar 5 Grafik Kestabilan ketika  $R_0 > 1, S = 1$ , dan  $I = 0.6$

Pada Gambar 4 kestabilan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1$ , akan tetapi pada Gambar 5 terlihat bahwa kestabilan menuju titik kesetimbangan endemik  $E = (0.4430, 0.7780)$ . Hal ini membuktikan **Teorema 1** bahwa  $E_1$  tidak stabil asimtotik lokal ketika  $R_0 > 1$  sehingga terdapat titik kesetimbangan endemik yang stabil yang menyebabkan penyakit berpotensi untuk menjadi endemik.

#### IV. KESIMPULAN

Berdasarkan keseluruhan hasil analisis dapat disimpulkan bahwa

1. Pada saat terjadi Bifurkasi Maju, Bilangan Reproduksi Dasar adalah

$$R_0 = \frac{kA}{\mu + \frac{\tau}{\alpha}}$$

dengan titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1 = (S_0, I_0) = (A, 0)$$

dan titik kesetimbangan endemik yang stabil

$$E_2 = (S_2, I_2) = \left( \frac{A + ak + \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{A - ak - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik ketika  $R_0 < 1$ , dan tidak stabil ketika  $R_0 > 1$ .

2. Pada saat terjadi Bifurkasi Mundur, Bilangan Reproduksi Dasar adalah

$$R_c = \frac{kA^c}{\mu + \frac{\tau}{\alpha}}$$

dengan titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1 = (S_0, I_0) = (A, 0)$$

dan titik kesetimbangan endemik sebagai berikut:

- a. Pada saat  $R_0 = R_c$

$$E_0 = (S_0, I_0) = \left( \frac{A + ak + \frac{\mu}{k}}{2}, \frac{A - ak - \frac{\mu}{k}}{2} \right)$$

yang merupakan titik pelana (*saddle point*) yang tidak stabil.

- b. Pada saat  $R_c < R_0 < 1$

$$E_1 = (S_1, I_1) = \left( \frac{A + ak + \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{A - ak - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k} \right)$$

$E_1$  merupakan titik pelana (*saddle point*) yang tidak stabil,

$$E_2 = (S_2, I_2) = \left( \frac{A + ak + \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{A - ak - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right)$$

$E_2$  stabil jika  $r < \frac{1}{4} \left[ \left( \alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]$  dan tidak stabil jika  $r > \frac{1}{4} \left[ \left( \alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]$ .

3. Pada saat laju pengobatan  $r = \frac{1}{4} \left[ \left( \alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]$  terdapat sepasang nilai eigen yang imajiner murni yang menyebabkan adanya bifurkasi Hopf. Untuk  $\sigma < 0$  terjadi bifurkasi Hopf superkritikal dan pada saat  $\sigma > 0$  terjadi bifurkasi Hopf subkritikal.
4. Dengan metode Numerik Runge-Kutta orde 4 menggunakan software MATLAB diperoleh hasil bahwa jika  $R_0 < 1$ , maka terjadi keadaan bebas penyakit karena kestabilan sistem menuju titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1$ . Kemudian jika  $R_0 > 1$ , maka penyakit menjadi endemik karena kestabilan sistem menuju titik kesetimbangan endemik.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Nugroho, Susilo. (2009). "pengaruh Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Epidemi SIR". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika Universitas Sebelas Maret**.
- [2] WHO (World Health Organization), *Country Health Profile*, <http://www.who.int/countries/idn/en/>. Diakses pada tanggal 4 September 2015, pukul 00.18 WIB.
- [3] Iktisholiyah. (2010). "Analisis Stabilitas dan Optimal Kontrol pada Model Epidemi Tipe SIR dengan Vaksinasi". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya**.
- [4] Zhang, X., dkk. (2008). "Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Saturated Treatment Function". **Journal of Mathematical Analysis and Application**, Vol 340, No. 1, pp 433-443.
- [5] Wang, J., dkk. (2011). "Qualitative and Bifurcation Analysis Using an SIR Model with a Saturated Treatment Function". **Journal of Mathematical and Computer Modelling**, Vol 55, pp 710-722.
- [6] Lestari, Intan P. (2012). "Eksistensi Bifurkasi Mundur pada Model Penyebaran Penyakit Menular dengan Vaksinasi". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya**.

- [7] Iswahyuni, N. (2013). "Analisis Kualitatif pada Model Epidemi SIS dengan Pengobatan". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.**
- [8] Musa, M. (2015). "Analisis Kestabilan dan Bifurkasi Mundur pada Model Infeksi Virus Hepatitis B dan C pada Tubuh Pasien". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.**
- [9] Jordan, D. W and Smith P. 2007. "Nonlinear Ordinary Differential Equations". **NewYork: Oxford University Press.**
- [10] Subiono. 2013. Sistem Linear dan Kontrol Optimal. Surabaya. **Subiono Jurusan Matematika ITS Surabaya.**
- [10] Anton, H. dan Rorres, C. 2005. "*Elementary Linear Algebra 9<sup>th</sup> edition*". **John Wiley & Sons, Inc.**
- [11] Nara. (2014). "Analisis Kualitatif pada Model Penyakit Parasitosis". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.**
- [12] Wiggins, S. (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer.
- [13] Hirsch, M. (2004). "Differential Equations Dynamical Systems and an Introduction to Chaos". **California: Academic Press.**
- [14] Wang, J,dkk. (2011). "Qualitative and Bifurcation Analysis Using an SIR Model with a Saturated Treatment Function". **Journal of Mathematical and Computer Modelling, Vol 55, pp 710-722.**

