



ITS  
Institut  
Teknologi  
Sepuluh Nopember

# Hello!

I am Fazatia Aidila  
1212100095

I am here to give presentation as  
a requirement for my final project

Supervisor

Drs. M. Setijo Winarko, M.Si

Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

# M

Jurusan Matematika

Fakultas MIPA

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya 2016





Analisa Kualitatif  
pada Model SIR  
dengan Fungsi  
Pengobatan Saturasi



# PENDAHULUAN



## Latar Belakang

Campak, Gondong,  
Cacar, Polio,  
Influenza



Model Matematika



Keterlambatan  
Pengobatan



SIR

Analisa Kualitatif pada Model SIR dengan  
Fungsi Pengobatan Saturasi



## Rumusan Masalah

“

- ▣ Bagaimana menentukan bilangan reproduksi dasar, kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dari model dan adanya bifurkasi mundur serta menganalisa bifurkasi terutama bifurkasi Hopf?
- ▣ Bagaimana interpretasi hasil analisis dari model epidemik tipe SIR dan penyelesaian numerik dari model tersebut serta simulasinya



## Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada Tugas Akhir ini akan dibatasi pada model epidemi SIR dengan fungsi pengobatan saturasi yang dinyatakan dengan  $T(I) = \frac{rI}{\alpha + I}$



## Tujuan

1. Menentukan bilangan reproduksi dasar, kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan kesetimbangan endemik dari model dan adanya bifurkasi mundur serta menganalisa bifurkasi terutama bifurkasi Hopf

2. Menginterpretasikan hasil analisis model epidemi tipe SIR dan penyelesaian numerik dari model tersebut serta simulasinya



# Manfaat

1. Mengetahui dinamika penyebaran penyakit model epidemi tipe SIR yang dipengaruhi fungsi pengobatan saturasi

2. Diperoleh pengetahuan dalam menginterpretasikan hasil analisis dan simulasi pada model epidemi tipe SIR





# TINJAUAN PUSTAKA



## Penelitian Terkait

### Analisa Kualitatif pada Model SIS dengan Pengobatan (2013)

Pada penelitian tersebut terjadi bifurkasi mundur pada saat  $R_0 < 1$  yang menunjukkan bahwa pada saat  $R_0 < 1$  kapasitas pengobatan yang diberikan kurang efektif sehingga menyebabkan masih ada individu yang terinfeksi dan penyakit akan menjadi endemik

### Analisis Kestabilan dan Bifurkasi Mundur pada Model Infeksi Virus Hepatitis B dan C pada Tubuh Pasien (2015)

Pada Tugas Akhir tersebut terjadi bifurkasi mundur pada saat  $R_0 < 1$  yang menunjukkan bahwa transplantasi hati sebagai bentuk pengobatan ternyata kurang efektif dalam menghilangkan virus hepatitis dalam tubuh



# Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) merupakan suatu parameter yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Kondisi yang akan timbul sebagai berikut

- ▣ Jika  $R_0 < 1$ , maka penyakit akan menghilang dalam populasi
- ▣ Jika  $R_0 = 1$ , maka penyakit akan menetap dalam populasi
- ▣ Jika  $R_0 > 1$ , maka penyakit akan meningkat menjadi wabah dalam populasi



# Titik Keseimbangan

Pandang persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Sebuah titik  $(x_0, y_0)$  merupakan titik keseimbangan dari persamaan (2.1) jika memenuhi  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ . Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan.

$$x(t) = x_0$$

dan

$$y(t) = y_0$$

adalah penyelesaian keseimbangan dari persamaan (2.1) untuk semua  $t$ .



## Kestabilan Asimtotik Lokal

Kestabilan asimtotik lokal merupakan kestabilan dari sistem linear atau kestabilan dari linearisasi sistem tak linear. Kestabilan asimtotik lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem.



## Akar-akar Persamaan Karakteristik

Persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0 \quad (2.2)$$

Diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

Dalam hal ini  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(J)$ ,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(J)$  dan  $\Delta = (\text{Tr}(J))^2 - 4\det(J)$  sehingga persamaan (2.2) dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda^2 - \text{Tr}(J)\lambda + \det(J) = 0 \quad (2.3)$$

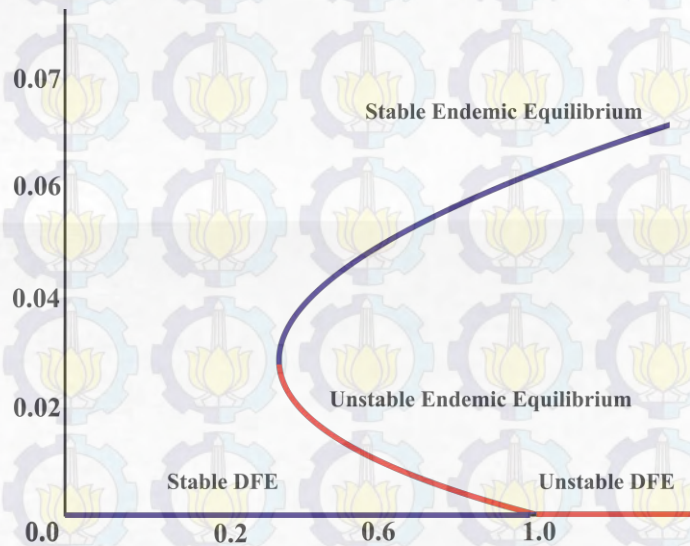


# Tabel Kriteria Kestabilan

Nilai Eigen	Kriteria $Tr(J)$ , $det(J)$ , dan $\Delta$	Nama	Kestabilan
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	$Tr(J) > 0$ atau $Tr(J) < 0$ $det(J) > 0$ $\Delta \geq 0$	simpul	Stabil asimtotis jika semua nilai eigen negatif, Tidak stabil jika semua nilai eigen positif.
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$det(J) < 0$ $\Delta > 0$	Sadel	Tidak stabil.
$\lambda_1 = a + ib$ $\lambda_2 = a - ib$	$Tr(J) > 0$ atau $Tr(J) < 0$ $det(J) > 0$	spiral	Stabil asimtotis jika bagian real nilai eigen negatif, Tidak stabil jika bagian real nilai eigen positif.
$\lambda_1 = ib$ $\lambda_2 = -ib$	$Tr(J) = 0$ $det(J) = 0$ $\Delta \leq 0$	Pusat	Stabil.



# Bifurkasi Mundur



Kurva Bifurkasi Mundur mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil serta 2 titik kesetimbangan endemik yang tidak stabil dan stabil ketika  $R_0 < 1$ . Sedangkan ketika  $R_0 > 1$  kurva mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil dan titik kesetimbangan endemik yang stabil.



# Bifurkasi Hopf

## Teorema 2.2

Diberikan suatu sistem dinamik

$$\dot{x} = f(x, y, \mu)$$

$$\dot{y} = g(x, y, \mu)$$

(2.4)

dimana  $\mu$  merupakan parameter dengan  $f(0,0,\mu) = 0$  dan  $g(0,0,\mu) = 0$   
andaikan syarat berikut terpenuhi

$$\text{Matriks Jacobian } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

yang dihitung pada titik kesetimbangan  $(x,y) = (0,0)$  pada saat  $\mu = 0$   
mempunyai sepasang eigen value imajiner murni.

Jika eigen value  $\lambda(\mu) = a(\mu) \pm i\beta(\mu)$  dengan  $a(0) = 0$  dan  $\beta(0) \neq 0$  dari titik  $(0,0)$  berlaku syarat transversal sebagai berikut

$$\frac{d}{d\mu} \{ \text{Re}(\lambda(\mu)) \}_{\mu=0} \neq 0 \quad (2.5)$$



# Indeks Stabilitas

Stabilitas dari orbit periodik dicari dengan menggunakan rumus berikut

$$\Gamma = \frac{1}{16} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right) + \frac{1}{16D} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]$$

yang disebut indeks stabilitas dan dihitung pada titik  $(0,0)$  dengan  $\mu = 0$ . Jika  $\Gamma > 0$  orbit periodik tak stabil dan jika  $\Gamma < 0$  maka orbit periodik stabil.



# Metode Runge Kutta

Persamaan diferensial (2.1)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

dapat diselesaikan dengan metode numerik Runge-Kutta, sehingga didapat penyelesaian numerik dalam bentuk persamaan (i) dan (ii) sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x}) \quad (i) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y}) \quad (ii)$$

dengan

$$k_{1,x} = hf(t_n, x_n)$$

$$k_{2,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right)$$

$$k_{3,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,x}}{2}\right)$$

$$k_{4,x} = hf(t_n + h, x_n + k_{3,x})$$

dengan

$$k_{1,y} = hf(t_n, y_n)$$

$$k_{2,y} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{1,y}}{2}\right)$$

$$k_{3,y} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{2,y}}{2}\right)$$

$$k_{4,y} = hf(t_n + h, y_n + k_{3,y})$$



# METODE PENELITIAN

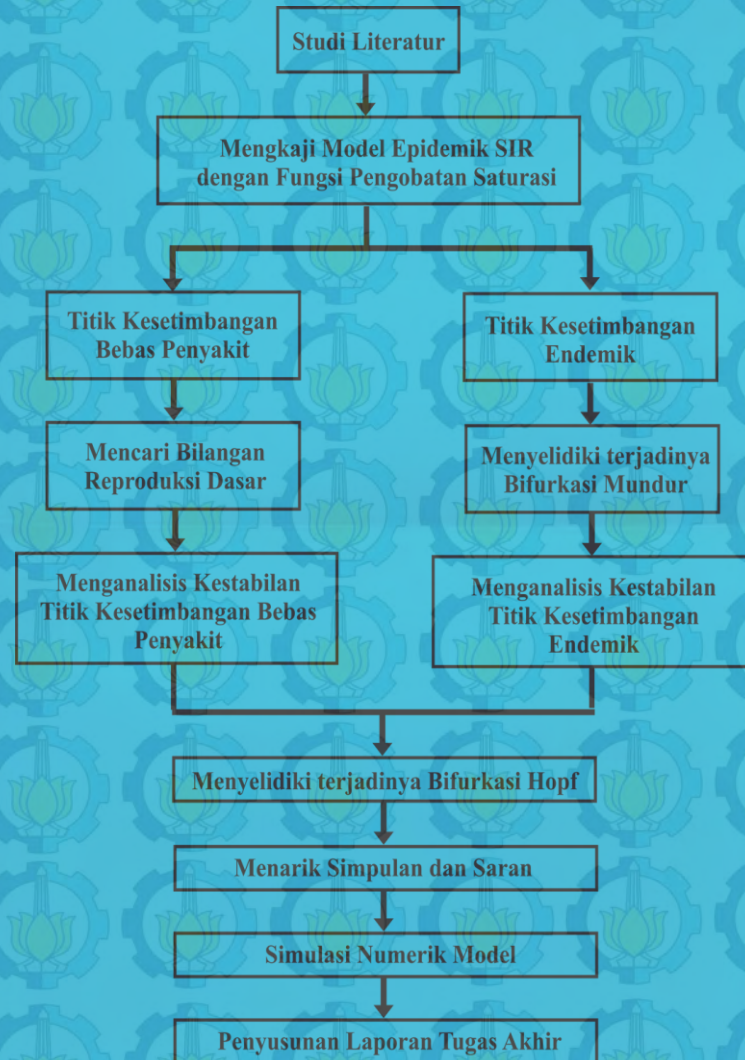


Diagram Alir

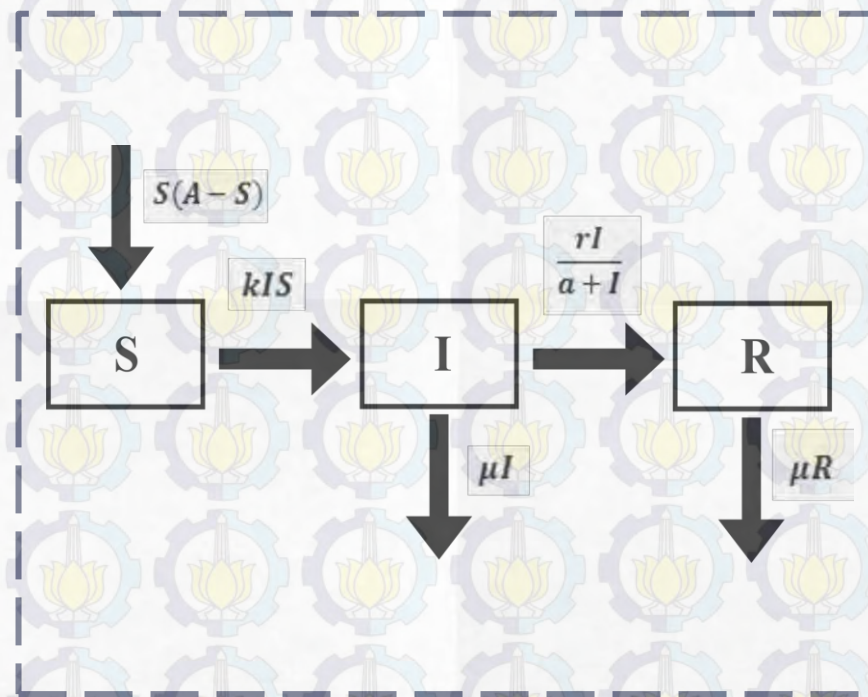




# ANALISIS DAN PEMBAHASAN



# Diagram Kompartemen





# Model Epidemi SIR dengan Fungsi Pengobatan Saturasi

Model epidemi SIR dengan fungsi pengobatan saturasi

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= S(A - S) - kIS \\ \frac{dI}{dt} &= kIS - \mu I - \frac{rI}{a+I} \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{rI}{a+I} - \mu R \end{aligned} \right\} (4.1)$$

Model epidemi setelah direduksi

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= S(A - S) - kIS \\ \frac{dI}{dt} &= kIS - \mu I - \frac{rI}{a+I} \end{aligned} \right\} (4.2)$$

dengan kondisi awal  
 $S(0) > 0, I(0) > 0$



## Daerah Penyelesaian

Daerah untuk sistem Persamaan (4.1) adalah

$$\Omega = \left\{ 0 \leq S(t) \leq M_1, 0 \leq S(t) + I(t) + R(t) \leq \frac{(A+\mu)}{\mu} M_1, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0 \right\}$$

karena kondisi awal bernilai positif maka  $\Omega$  merupakan daerah invarian positif yang artinya semua penyelesaian berada di dalam  $\Omega$ .



# Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit dan Bilangan Reproduksi Dasar

Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

$$E_1 = (S_0, I_0) = (A, 0)$$

Bilangan Reproduksi Dasar

$$R_0 = \frac{kA}{\mu + \frac{r}{\alpha}}$$



# Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Teorema 4.3.1

Titik bebas penyakit  $E_1$  stabil asimtotis lokal jika  $R_0 < 1$  dan tidak stabil jika  $R_0 > 1$ .

Bukti :

Berdasarkan nilai eigen yang telah diperoleh pada sistem (4.2)

$$\lambda_3 < 0, \text{ dan}$$

$$\lambda_4 < 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \mu + \frac{r}{\alpha} (R_0 - 1) \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow R_0 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow R_0 < 1$$

hal ini membuktikan jika  $R_0 < 1$  maka titik keseimbangan bebas penyakit  $E_1 = (A, 0)$  stabil asimtotis lokal, sebaliknya jika  $R_0 > 1$  titik keseimbangan  $E_1$  tidak stabil.



# Titik Kesetimbangan Endemik

Titik Kesetimbangan Endemik

Berdasarkan Persamaan (4.2) diperoleh

$$S^2 - \left(\alpha k + A + \frac{u}{k}\right)S + \frac{u}{k}(\alpha k + A) + r = 0 \quad (4.20)$$

dengan

$$R_0 \geq 1 - \frac{\alpha^2 k^2 + r}{\mu \alpha + r} + \frac{2\alpha k \sqrt{r}}{\mu \alpha + r} := p_0$$

diperoleh penyelesaian positif dari (4.20)

$$S_1 = \frac{\alpha k + A + \frac{u}{k} + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{dan} \quad S_2 = \frac{\alpha k + A + \frac{u}{k} - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Selanjutnya jika  $S_1 < A$  maka

$$R_0 > 1 + \frac{\alpha^2 k^2 - r}{\mu \alpha + r} := p_1 \quad \text{dan} \quad R_0 < 1$$

dan jika  $S_2 < A$  maka

$$R_0 > 1 + \frac{\alpha^2 k^2 - r}{\mu \alpha + r} := p_1 \quad \text{atau} \quad R_0 > 1$$



# Titik Kesetimbangan Endemik

Perhatikan bahwa  $\alpha k < \sqrt{r}$  ekuivalen dengan  $p_1 < 1$ .

Sehingga ketika  $R_0 \geq p_0$ , dapat disimpulkan

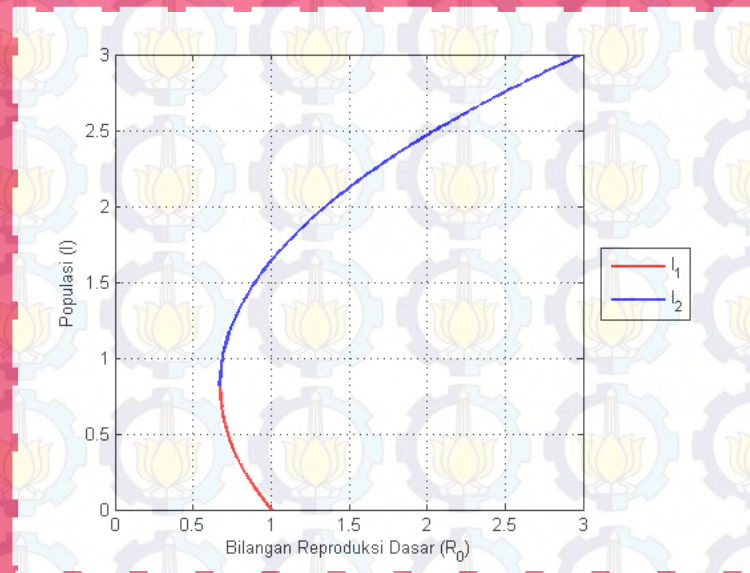
- ▣ Jika  $\alpha k < \sqrt{r}$ , maka sistem (4.2) memiliki dua titik kesetimbangan endemik  $E_1 = (S_1, I_1)$  dan  $E_2 = (S_2, I_2)$  pada saat  $R_0 < 1$ .
- ▣ Jika  $\alpha k < \sqrt{r}$ , maka sistem (4.2) memiliki titik kesetimbangan endemik tunggal  $E_2 = (S_2, I_2)$  pada saat  $R_0 > 1$ , dan titik kesetimbangan endemik  $E_1$  tidak ada karena  $p_1 < R_0 < 1$  tidak berlaku.
- ▣ Misalkan  $\alpha k \geq \sqrt{r}$ , maka  $p_1 \geq 1$ , sehingga titik kesetimbangan endemik  $E_1$  tidak ada. Kemudian ketika  $R_0 > 1$  terdapat titik kesetimbangan endemik tunggal  $E_2 = (S_2, I_2)$  dan tidak ada titik kesetimbangan endemik ketika  $R_0 < 1$ .



# Bifurkasi Mundur

Teorema 4.4.1

Pada sistem Persamaan (4.2) terjadi bifurkasi mundur dengan titik kesetimbangan endemik  $E_1$  dan  $E_2$  pada saat  $R_0 < 1$  dan  $\alpha k < \sqrt{r}$





# Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

▣ Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik untuk  $R_0 = R_c$

$$E_0 = (S_0, I_0) = \left( \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k}}{2}, \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k}}{2} \right)$$

diperoleh  $\det(J(E_0)) < 0$  sehingga  $E_0$  tidak stabil (saddle)

▣ Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik untuk  $R_c < R_0 < 1$

$$E_1 = (S_1, I_1) = \left( \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k} \right)$$

diperoleh  $\det(J(E_1)) < 0$  sehingga  $E_1$  tidak stabil (saddle)

$$E_2 = (S_2, I_2) = \left( \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right)$$

diperoleh  $\det(J(E_2)) > 0$  sehingga  $E_2$  merupakan simpul atau spiral.

Kemudian didapat  $\text{tr}(J(E_2)) = \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} - S_2$



# Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

selanjutnya misalkan

$$(H_1) \Delta_{44} = [(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k > 0$$

dan didefinisikan

$$H \triangleq \frac{\alpha k^2}{k-1} - \frac{\mu}{k(k-1)} - \frac{\sqrt{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2 + 4\alpha A(1-k)k}}{(k-1)}$$

maka kestabilan titik kesetimbangan endemik  $E_2$  dinyatakan dalam teorema berikut

*Teorema 4.4.2* misalkan

$\alpha k < \sqrt{r}$ ,  $p_1 < R_0 < 1$  dan  $(H_1)$  ada, maka untuk sistem Persamaan (4.2) mempunyai

▣  $E_2$  stabil jika

$$(k-1)A - \mu + \alpha k \leq 0$$

atau

$$(k-1)A - \mu + \alpha k > 0$$

$$r < \frac{1}{4} \left[ \left( A + \alpha k - \frac{\mu}{k} \right)^2 - H^2 \right]$$

▣  $E_2$  tidak stabil jika

$$(k-1)A - \mu + \alpha k > 0$$

$$r > \frac{1}{4} \left[ \left( A + \alpha k - \frac{\mu}{k} \right)^2 - H^2 \right]$$



# Bifurkasi Hopf

## Teorema 4.4.3

Misalkan  $\alpha k < \sqrt{r}$ ,  $p_1 < R_0 < 1$ . Maka pada sistem (4.2) terjadi bifurkasi Hopf jika (H1),  $(k-1)A - \mu + \alpha k > 0$ , dan

$I_2 = \left[ \frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k]}{2k(k-1)} \right] \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha A(1-k)k}{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2}} \right]$  berlaku Selanjutnya jika  $\sigma < 0$  orbit periodik dari sistem (4.2) stabil sehingga terjadi bifurkasi Hopf superkritikal. Dan jika  $\sigma > 0$ , orbit periodik dari sistem (4.2) tidak stabil sehingga terjadi bifurkasi Hopf subkritikal.



# Bifurkasi Hopf

**Bukti**

Bedasarkan sistem (4.2)

$$\frac{ds}{dt} = S(A - S) - kIS$$

$$\frac{dI}{dt} = kIS - \mu I - \frac{r}{\alpha + I}$$

didapatkan salah satu titik kesetimbangan  $E_2 = (S_2, I_2)$  dan matriks Jacobian  $E_2$  diketahui sebagai berikut

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -S_2 & -kS_2 \\ kI_2 & \frac{rI_2}{(\alpha + I_2)^2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\text{tr}(J(E_2)) \pm \sqrt{(\text{tr}(J(E_2))^2 - 4\det(J(E_2)))})}{2}$$



# Bifurkasi Hopf

Bifurkasi Hopf terjadi apabila matriks Jacobian mempunyai sepasang nilai eigen yang imajiner murni. Kedua nilai eigen imajiner murni jika dan hanya jika  $\text{tr}(J(E_2)) = 0$ . Pada pembahasan sebelumnya diketahui bahwa  $\text{tr}(J(E_2)) = 0$  jika dan hanya jika  $(H_1)$ ,  $(k-1)A - \mu + \alpha k > 0$ , dan

$I_2 = \left[ \frac{[(k-1)A - \mu + \alpha k]}{2k(k-1)} \right] \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha A(1-k)k}{[(k-1)A - \mu + \alpha k]^2}} \right]$  berlaku. Maka terjadi

bifurkasi Hopf dengan syarat transversal

$$\left. \frac{d}{dr} \left\{ \text{Re} \left( \bar{\lambda}(J(E_2)) \right) \right\} \right|_{r=\frac{1}{4} \left[ \left( \alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]} = \frac{I_2}{2(\alpha + I_2)^2} \neq 0$$



## Bifurkasi Hopf

Selanjutnya ditentukan bentuk normal bifurkasi Hopf dengan melakukan translasi titik kesetimbangan  $(S_2, I_2)$  ke titik  $(0,0)$  dengan melakukan transformasi  $x = S - S_2$ ,  $y = I - I_2$  dan  $d\tau = \frac{dt}{(\alpha + y + I_2)}$ , sehingga diperoleh

$$\frac{dx}{d\tau} = (\alpha + y + I_2)[(A - 2S_2 - kI_2)x - kS_2y - kxy - x^2]$$

$$\frac{dy}{d\tau} = [kxy + (kS_2 - u)y + kI_2x](\alpha + y + I_2) - \frac{r\alpha y}{\alpha + I_2}$$

Kemudian untuk memudahkan, maka dimisalkan  $x = S$ ,  $y = I$  dan  $\tau = t$ , didapat

$$\frac{dS}{dt} = (\alpha + I + I_2)[(A - 2S_2 - kI_2)S - kS_2I - kSI - S^2]$$

$$\frac{dI}{dt} = [kSI + (kS_2 - u)I + kI_2S](\alpha + I + I_2) - \frac{r\alpha I}{\alpha + I_2}$$



## Bifurkasi Hopf

Berdasarkan Persamaan (4.2) dan  $\text{tr}(J(E_2)) = 0$ , diperoleh

$$A - S_2 - kI_2 = 0, \quad kS_2 - u - \frac{r}{\alpha + I_2} = 0, \quad \text{dan} \quad rI_2 - S_2(\alpha + I_2)^2 = 0$$

sehingga persamaan  $\frac{dS}{dt}$  dan  $\frac{dI}{dt}$  menjadi

$$\frac{dS}{dt} = -S_2(\alpha + I_2)S - kS_2(\alpha + I_2)I - (k\alpha + A)SI - (\alpha + I_2)S^2 - kS_2I^2 - kSI^2 - S^2I \quad (4.58)$$

$$\frac{dI}{dt} = kI_2(\alpha + I_2)S + S_2(\alpha + I_2)I + k(\alpha + 2I_2)SI + \frac{rI^2}{\alpha + I_2} + kSI^2 \quad (4.59)$$



## Bifurkasi Hopf

Kemudian membentuk persamaan (4.58) dan (4.59) dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{ds}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & -km \\ p & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

dengan

$$m = S_2(\alpha + I_2)$$

$$p = kI_2(\alpha + I_2)$$

$$g = -(k\alpha + A)SI - (\alpha + I_2)S^2 - kS_2I^2 - kSI^2 - S^2I$$

$$h = k(\alpha + 2I_2)SI + \frac{rI^2}{\alpha + I_2} + kSI^2$$



## Bifurkasi Hopf

Selanjutnya dengan mencari matriks Jacobian dari persamaan (4.58) dan (4.59) dan substitusi titik kesetimbangan  $(0,0)$  diperoleh matriks Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} -m & -km \\ p & m \end{bmatrix}$$

dari matriks Jacobian di atas diperoleh nilai persamaan karakteristik

$$\bar{\lambda}^2 - m^2 + pkm = 0$$

$$\bar{\lambda}^2 + \det(J(E_2)) = 0$$

$$\bar{\lambda} = \pm i \sqrt{\det(J(E_2))} = \pm i\omega$$

dengan permisalan

$$\omega = \sqrt{\det(J(E_2))}$$



# Bifurkasi Hopf

Berikutnya dengan substitusi

$$S = \frac{x}{p} - \frac{my}{p\omega} \text{ dan } I = \frac{y}{\omega}$$

ke matriks (4.60) maka matriksnya menjadi

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

dan bentuk Normal Bifurkasi Hopf sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y + f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x + g(x, y)$$

dengan

$$f(x, y)$$

$$= \left[ \frac{(2m(\alpha + I_2) - p(k\alpha + A) - mk(\alpha + 2I_2))}{p\omega} \right] xy +$$

$$\left[ \frac{pm(k\alpha + A) - kS_2p^2 - (\alpha + I_2)m^2 - kI_2m^2}{p\omega^2} \right] y^2 - \frac{(\alpha + I_2)}{p} x^2 -$$

$$\frac{1}{p\omega} x^2 y + \left[ \frac{2m - pk + mk}{p\omega^2} \right] xy^2 + \left[ \frac{\omega^2 - km^2}{p\omega^3} \right] y^3$$

dan

$$g(x, y) = \left[ \frac{k(\alpha + 2I_2)}{p} \right] xy - \frac{kmI_2}{p\omega} y^2 + \frac{k}{p\omega} xy^2 - \frac{km}{p\omega^2} y^3$$



# Bifurkasi Hopf

Untuk menyelidiki jenis bifurkasi Hopf yang terjadi menggunakan indeks stabilitas

$$\Gamma = \frac{1}{16} [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16\omega} [f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}] \Big|_{(0,0)}$$

dan diperoleh

$$\Gamma = \frac{2k(a+I_2)^3 S_2 I_2}{16p^2 \omega^4} \sigma$$

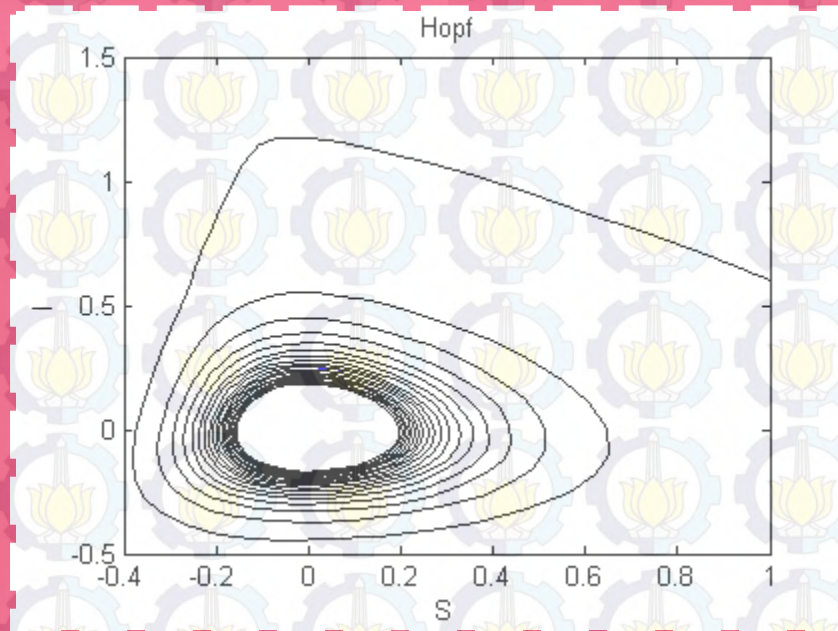
dengan

$$\sigma = [(a + I_2)(S_2(2k^2 + k + 2) + k^3 I_2) - k^2 I_2(ka + A) - 2k^2 S_2 I_2](-k I_2) + (a + I_2)(-2 - ak + S_2)k S_2 - 2S_2^2 + (ka + A)S_2(-2a - 2I_2 + ak) - 2kS_2^2(a + 2I_2) + 2kS_2^2 I_2$$



## Bifurkasi Hopf

Berdasarkan Gambar dengan parameter  $A = 2.6, \mu = 0.2, k = 2, a = 0.05, r = 0.11$  terlihat adanya orbit periodik stabil dengan nilai  $\Gamma = -0.9891 < 0$ , sehingga dapat disimpulkan terjadi bifurkasi Hopf superkritikal.

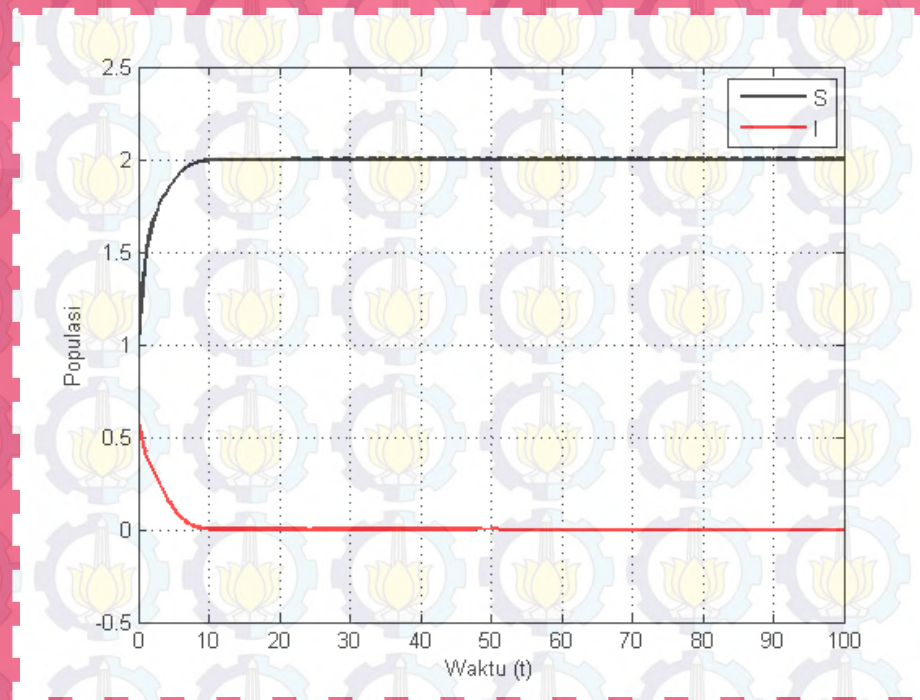




# Simulasi Numerik

Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan ketika  $R_0 < 1$ .

$$A = 2, \mu = 0.2, k = 0.8, a = 0.55, r = 1.2$$

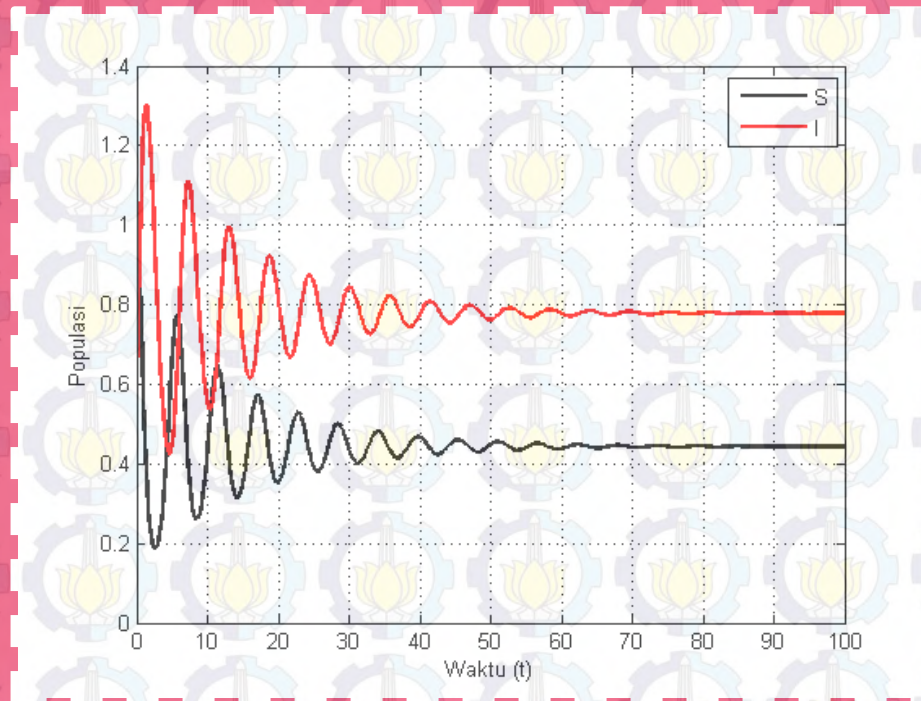




# Simulasi Numerik

Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan ketika  $R_0 > 1$ .

$$A = 2, \mu = 0.2, k = 2, a = 0.9, r = 0.25$$







# KE SIMPULAN



## KESIMPULAN

▣ Pada saat terjadi Bifurkasi Maju, Bilangan Reproduksi Dasar adalah

$$R_0 = \frac{kA}{\mu + \frac{r}{\alpha}}$$

dengan titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1 = (S_0, I_0) = (A, 0)$$

dan titik kesetimbangan endemik yang stabil

$$E_2 = (S_2, I_2) = \left( \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik ketika  $R_0 < 1$ , dan tidak stabil ketika  $R_0 > 1$ .



# KESIMPULAN

- ▣ Pada saat terjadi Bifurkasi Mundur,  
Bilangan Reproduksi Dasar adalah

$$R_c = \frac{kA^c}{\mu + \frac{r}{\alpha}}$$

dengan titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1 = (S_0, I_0) = (A, 0)$$

dan titik kesetimbangan endemik sebagai berikut:

Pada saat  $R_0 = R_c$

$$E_0 = (S_0, I_0) = \left( \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k}}{2}, \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k}}{2} \right)$$

yang merupakan titik pelana (*saddle point*) yang tidak stabil.

Pada saat  $R_c < R_0 < 1$

$$E_1 = (S_1, I_1) = \left( \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2k} \right)$$

$E_1$  merupakan titik pelana (*saddle point*) yang tidak stabil,

$$E_2 = (S_2, I_2) = \left( \frac{A + \alpha k + \frac{\mu}{k} - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{A - \alpha k - \frac{\mu}{k} + \sqrt{\Delta}}{2k} \right)$$

$E_2$  stabil jika

$$r < \frac{1}{4} \left[ \left( \alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right] \text{ dan tidak}$$

$$\text{stabil jika } r > \frac{1}{4} \left[ \left( \alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right].$$



## KESIMPULAN

- ▣ Pada saat laju pengobatan  $r = \frac{1}{4} \left[ \left( \alpha k + A - \frac{u}{k} \right)^2 - H^2 \right]$  terdapat sepasang nilai eigen yang imajiner murni yang menyebabkan adanya bifurkasi Hopf. Untuk  $\sigma < 0$  terjadi bifurkasi Hopf superkritikal dan pada saat  $\sigma > 0$  terjadi bifurkasi Hopf subkritikal.
- ▣ Dengan metode Numerik Runge-Kutta orde 4 menggunakan software MATLAB diperoleh hasil bahwa jika  $R_0 < 1$ , maka terjadi keadaan bebas penyakit karena kestabilan sistem menuju titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1$ . Kemudian jika  $R_0 > 1$ , maka penyakit menjadi endemik karena kestabilan sistem menuju titik kesetimbangan endemik.



# Daftar Pustaka

- [1] Nugroho, Susilo. (2009). "pengaruh Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Epidemik SIR". Tugas Akhir SI Jurusan Matematika unversitas Sebelas Maret.
- [2] WHO(World Health Organization), *Country Health Profile*, <http://www.who.int/countries/idn/en/>. Diakses pada tanggal 4 September 2015, pukul 00.18 WIB.
- [3] Iktisholiyah. (2010). "Analisis Stabilitas dan Optimal Kontrol pada Model Epidemik Tipe SIR dengan Vaksinasi". Tugas Akhir SI Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [4] Zhang,X,dkk. (2008). "Backward Bifurcation of an Epidemik Model with Saturated Treatment Function". *Journal of Mathematical Analysis and Application*, Vol 340, No. 1, pp 433-443.
- [5] Lestari, Intan P. (2012). "Eksistensi Bifurkasi Mundur pada Model Penyebaran Penyakit Menular dengan Vaksinasi". Tugas Akhir SI Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [6] Isnahyuni, N. (2013). "Analisa Kualitatif pada Model Epidemik SIS dengan Pengobatan". Tugas Akhir SI Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [7] Musa, M. (2015). "Analisis Kestabilan dan Bifurkasi Mundur pada Model Infeksi Virus Hepatitis B dan C pada Tubuh Pasien". Tugas Akhir SI Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [8] Jordan, D. W and Smith P. 2007. "Nonlinier Ordinary Differential Equations". NewYork: oxford university Press.



# Daftar Pustaka

- [9] Subiono. 2013. Sistem Linear dan Kontrol Optimal. Surabaya. Subiono Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [10] Anton H, Korres C. 2005. *Elementary Linear Algebra 9<sup>th</sup> edition*. John Wiley & Sons, Inc.
- [11] Nara. (2014). "Analisa Kualitatif pada Model Penyakit Parasitosis". Tugas Akhir SI Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [12] Castilo, C. dan Chavez. (2004). "Dynamical Models of Tuberculosis and Their Applications".
- [13] Zulminarni. (2007). "Analisa Kualitatif pada Model Penyakit Parasitosis". Tugas Akhir SI Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [14] Novitasari, Y. (2009). "Menunjukkan Eksistensi Orbit Periodik dari Sistem dinamik dengan menggunakan Bifurkasi Hopf". Tugas Akhir SI Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [15] Hirsch, M. (2004). "Differential Equations Dynamical Systems and an Introduction to Chaos".
- [16] Wang, Jdkk. (2011). "Qualitative and Bifurcation Analysis using an SIR Model with a Saturated Treatment Function". *Journal of Mathematical and Computer Modelling*, Vol 55, pp 710-722.



The image features a repeating pattern of a logo consisting of a yellow lotus flower inside a blue gear. The logo is arranged in a grid. In the center of the grid, the word "Thanks!" is written in a red, cursive font. A solid black oval encircles the text, and several dashed black arrows point from the text towards the surrounding logos, suggesting a connection or flow between the message and the pattern.

Thanks!