



TESIS - SM 142501

**APLIKASI PETRI NET DAN ALJABAR MAX-PLUS
PADA SISTEM JARINGAN KERETA API
DI JAWA TIMUR**

AHMAD AFIF

NRP. 1212 201 202

DOSEN PEMBIMBING

Dr. SUBIONO, M.Sc

PROGRAM MAGISTER

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2015



TESIS - SM 142501

APPLICATION OF PETRI NET AND MAX-PLUS ALGEBRA TO THE RAILWAY NETWORK SYSTEM IN EAST JAVA

AHMAD AFIF

NRP. 1212 201 202

SUPERVISOR

Dr. SUBIONO, M.Sc

PROGRAM OF MAGISTER

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCE

INSTITUTE TECHNOLOGY SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2015



APLIKASI PETRI NET DAN ALJABAR MAX-PLUS PADA SISTEM JARINGAN KERETA API DI JAWA TIMUR

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

AHMAD AFIF

NRP. 1212 201 202

Tanggal Ujian : 12 Januari 2015

Periode Wisuda : Maret 2015

Disetujui oleh Tim Penguji Tesis:

1. Dr. Subiono, M.Sc
NIP. 19570411 198403 1 001

(Pembimbing)

2. Dr. Mahmud Yunus, M.Si
NIP. 19620407 198703 1 005

(Penguji)

3. Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001

(Penguji)

4. Dr. Chairul Imron, MI.Komp
NIP. 19611115 198703 1 003

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana,



Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, MT
NIP. 19640405 199002 1001

APLIKASI PETRI NET DAN ALJABAR MAX-PLUS PADA SISTEM JARINGAN KERETA API DI JAWA TIMUR

Nama Mahasiswa : Ahmad Afif
NRP : 1212 201 202
Jurusan : Matematika FMIPA – ITS
Pembimbing : Dr. Subiono, M.Sc

ABSTRAK

Jaringan kereta api merupakan salah satu moda transportasi darat yang disukai oleh masyarakat, khususnya di Jawa Timur. Kapasitas orang dan barang di kereta api yang cukup besar dan biaya yang murah menyebabkan moda transportasi ini banyak disukai masyarakat untuk melakukan perjalanan keluarga maupun pekerjaan. Lintasan kereta api yang unik menyebabkan sistem jaringan kereta api memiliki kelemahan dalam proses pelayanan publik. Kurangnya pelayanan dari segi ketepatan waktu sering terjadi pada sistem transportasi kereta api. Hal ini disebabkan lintasan kereta api tidak bisa dilalui sekaligus oleh dua atau lebih kereta api sehingga terjadi saling tunggu di tiap stasiun. Penjadwalan yang tepat sangat diperlukan untuk mengurangi kelemahan kereta api dalam melayani ketepatan waktu kedatangan dan keberangkatan. Pada penelitian dibuat model dan analisis jaringan kereta api di Jawa Timur menggunakan petri net dan aljabar max-plus. Dari penelitian diperoleh model dan desain jadwal keberangkatan kereta api di Jawa Timur yang stabil dan realistik dengan periode keberangkatan setiap λ menit, dengan $93,625 \leq \lambda \leq 101,25$.

Kata kunci : aljabar max-plus, jadwal, kereta api, petrinet,.

APPLICATION OF PETRI NET AND MAX-PLUS ALGEBRA TO THE RAILWAY NETWORK SYSTEM IN EAST JAVA

Name : Ahmad Afif
NRP : 1212 201 202
Department : Mathematics FMIPA – ITS
Supervisor : Dr. Subiono, M.Sc

ABSTRACT

Railway network is one of the preferred modes of land transportation by the public, especially in East Java. Except the capacity of people and goods in a train was so large, the low cost also become a reason why this kind of transportation preferred by the society to do family trip or tour of duty. A unique railway crossing gives rise to the railway network to have weakness in the process of servicing the public. Lack of service in terms of timeliness is common in railway transport. This is due to the railway tracks that can't be passed at once by two or more trains resulting in mutual reception at each station. Proper scheduling is indispensable for reducing train weakness in serving timelines of arrival and departure. This research and analysis of the model railway network in East Java using petri net and max-plus algebra. This research and design of the model train departure schedule in East Java during the period of stable and realistic with departures every λ minutes, with $93,625 \leq \lambda \leq 101,25$.

Keyword : max-plus algebra, petri net, railway, schedule.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Robbil 'Alamiin, puji dan syukur penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan tesis yang berjudul **“APLIKASI PETRI NET DAN ALJABAR MAX-PLUS PADA SISTEM JARINGAN KERETA API DI JAWA TIMUR”** sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Magister Sains (M.Si) pada Program Pascasarjana Matematika FMIPA – ITS Surabaya. Sholawat dan salam tetap tercurahkan kepada Rosulullah Muhammad SAW yang telah menyebarkan agama Islam sehingga penulis dapat memeluk agama yang diridhloi Allah.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan tesis ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar – besarnya penulis sampaikan, terutama kepada :

1. Dr. Subiono, M.Sc selaku dosen pembimbing yang telah bersedia meluangkan pikiran dan waktunya hingga akhirnya penulis dapat menyelesaikan tesis ini.
2. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA – ITS Surabaya.
3. Dr. Imam Mukhlash, MT selaku dosen wali yang telah memberi arahan, nasihat, dan motivasi penulis selama masa perkuliahan.
4. Dr. Mahmud Yunus, M.Si, Subchan, Ph.D, Dr. Chairul Imron, MI.Komp selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan tesis ini.
5. Dosen Program Pascasarjana Matematika FMIPA – ITS Surabaya yang telah memberikan ilmunya selama penulis menjadi mahasiswa.
6. Ayah, Ibu (Almh), dan Umi' yang telah mengasuh dan menyayangi hingga penulis tumbuh seperti sekarang ini, serta mas, mbak, adik, dan saudara – saudara terima kasih doa - doanya.

7. Istri “Vertikasari” dan Anak “Hasan” yang telah memberi dorongan semangat, motivasi, keceriaan tanpa batas. Semoga Allah Memberkahi keluarga kami..
Amin..
8. Keluarga baru “Kediri” terima kasih telah menerima penulis apa adanya.
9. Mahasiswa angkatan 2012 semester genap terima kasih kebersamaannya.
10. Semua pihak yang tidak dapat dituliskan satu – persatu, yang telah membantu penulis dalam proses penulisan tesis ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penulisan tesis ini tidak lepas dari kesalahan atau kekurangan. Oleh sebab itu, saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan penulis.

Akhir kata, penulis berharap semoga tesis ini dapat memberikan manfaat dan sumbangan yang berarti di masa yang akan datang.

Surabaya, Januari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

	<i>Halaman</i>
HALAMAN JUDUL	
LEMBAR PENGESAHAN	i
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR NOTASI	xv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	2
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Asumsi	3
1.5 Tujuan	3
1.6 Manfaat	3
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Petri Net	5
2.1.1 Definisi dan Notasi Petri Net	5
2.1.2 Tanda dan Waktu Petri Net	6
2.1.3 Dinamika Petri Net	8
2.1.4 <i>Coverability Tree</i>	10
2.2 Aljabar Max-Plus	12
2.2.1 Definisi dan Notasi Aljabar Max-Plus	12
2.2.2 Vektor dan Matriks	13
2.2.3 Matriks dan Graf Berarah	14

2.2.4	Nilai Eigen dan Vektor Eigen	15
2.2.5	Algoritma Power	15
2.3	Aljabar Max-Plus Interval	21
2.3.1	Definisi dan Notasi Aljabar Max-Plus Interval	21
2.3.2	Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Interval	22
2.4	Sistem Jaringan Kereta Api	23
2.4.1	Model Sistem Jaringan Kereta Api di Jawa Timur	23
2.4.2	Jadwal Keberangkatan	24
2.4.3	Kestabilan Sistem	25
BAB 3	METODE PENELITIAN	27
3.1	Tahapan Penelitian	27
3.2	Digram Alir	28
BAB 4	HASIL DAN PEMBAHASAN	29
4.1	Sistem Jaringan Kereta Api di Jawa Timur	29
4.2	Graf Berarah	33
4.3	Aturan Sinkronisasi	39
4.4	Model Petri Net	44
4.5	Model Aljabar Max-Plus	50
4.6	Desain Penjadwalan	63
BAB 5	KESIMPULAN	81
5.1	Kesimpulan	81
5.2	Saran	81
	DAFTAR PUSTAKA	83
	LAMPIRAN	85

DAFTAR TABEL

	<i>Halaman</i>
Tabel 2.1 Jadwal Keberangkatan Kereta api	8
Tabel 2.2 Pendefinisian Variabel	19
Tabel 4.1 Jadwal Keberangkatan, Waktu Tempuh, dan Jumlah Kereta Api yang Beroperasi di Jalur 1: Surabaya – Madiun PP	34
Tabel 4.2 Jadwal Keberangkatan, Waktu Tempuh, dan Jumlah Kereta Api yang Beroperasi di Jalur 2 : Malang – Madiun PP	35
Tabel 4.3 Jadwal Keberangkatan, Waktu Tempuh, dan Jumlah Kereta Api yang Beroperasi di Jalur 3 : Surabaya – Cepu PP	35
Tabel 4.4 Jadwal Keberangkatan, Waktu Tempuh, dan Jumlah Kereta Api yang Beroperasi di Jalur 4 : Surabaya – Banyuwangi PP	36
Tabel 4.5 Jadwal Keberangkatan, Waktu Tempuh, dan Jumlah Kereta Api yang Beroperasi di Jalur 5 : Surabaya – Malang PP	37
Tabel 4.6 Pendefinisian Variabel pada Model Sistem Jaringan Kereta Api di Jawa Timur	43
Tabel 4.7 Elemen Matriks A_p yang tidak sama dengan ε atau ε	58
Tabel 4.8 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api di Jalur 1	69
Tabel 4.9 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api di Jalur 2	72
Tabel 4.10 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api di Jalur 3	74
Tabel 4.11 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api di Jalur 4	75
Tabel 4.12 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api di Jalur 5	76
Tabel 4.13 Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api di Jalur 1	77
Tabel 4.14 Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api di Jalur 2	78
Tabel 4.15 Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api di Jalur 3	78
Tabel 4.16 Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api di Jalur 4	79
Tabel 4.17 Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api di Jalur 5	79

DAFTAR GAMBAR

	<i>Halaman</i>
Gambar 2.1 Petri Net Sederhana	8
Gambar 2.2 Petri Net Sederhana Setelah Transisi t_0 di <i>fire</i>	9
Gambar 2.3 Petri Net Sederhana Setelah Transisi t_1 di- <i>fire</i>	9
Gambar 2.4 Keadaan Awal Petri Net	10
Gambar 2.5 <i>Coverability Tree</i> untuk Petri Net di Gambar 2.4	11
Gambar 2.6 Jalur Sistem Kereta Api	12
Gambar 3.1 Diagram Alir Tahapan Penelitian	28
Gambar 4.1 Graf Berarah Jalur Kereta Api di Jawa Timur	38
Gambar 4.2 Petri Net Sederhana untuk Satu Lintasan Kereta Api	45
Gambar 4.3 Petri Net Sederhana untuk Satu Lintasan Kereta Api Setelah transisi A dan B di <i>fire</i>	45
Gambar 4.4 Petri Net Untuk Kondisi Kereta Api menyusul dalam Satu lintasan	46
Gambar 4.5 Petri Net untuk Kondisi Kereta Api bersilangan dalam Satu Lintasan	46
Gambar 4.7 Petri Net Sistem Jaringan Kereta Api di Jawa timur	49

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Sistem transportasi merupakan bentuk sinkronisasi antara penumpang, barang, sarana dan prasarana guna terpenuhi perpindahan orang dan barang yang baik. Sistem transportasi dikatakan baik jika proses pergerakan penumpang dan barang dapat dicapai secara optimum dalam ruang dan waktu dengan berbagai faktor, yaitu faktor keamanan, kenyamanan, kelancaran, dan efisiensi atas waktu dan biaya (http://www.ircham.sttnas.ac.id/system_transportasi.doc).

Transportasi yang lebih dominan di daerah Sumatra dan Jawa adalah moda transportasi darat, sedangkan daerah Indonesia bagian timur atau lainnya moda transportasi yang dipilih adalah laut dan udara karena kondisi geografis daerah tersebut tidak mendukung untuk melakukan transportasi darat. Moda transportasi darat memiliki banyak jenis, diantaranya jalan raya, jalan rel, dll.

Kereta api adalah moda transportasi darat pada jalan rel yang sudah ada sejak tahun 1804 diperkenalkan oleh Richard Trevithick (http://id.wikipedia.org/wiki/Lokomotif_uap). Di Negara maju dan berkembang moda transportasi ini berkembang sangat pesat. Indonesia adalah salah satu Negara berkembang yang memanfaatkan jenis transportasi ini untuk menunjang aktifitas penduduknya yang padat. Kapasitas orang dan barang di kereta api yang cukup besar dan biaya yang murah menyebabkan moda transportasi ini banyak disukai masyarakat untuk melakukan perjalanan keluarga maupun pekerjaan. Jalur kereta api yang unik menyebabkan sistem jaringan kereta api memiliki kelemahan dalam proses pelayanan publik. Kurangnya pelayanan dari segi ketepatan waktu sering terjadi pada sistem transportasi kereta api. Hal ini disebabkan jalur kereta api tidak bisa dilalui sekaligus oleh dua atau lebih kereta api sehingga terjadi saling tunggu di tiap stasiun. Penjadwalan yang tepat sangat diperlukan untuk mengurangi kelemahan kereta api dalam melayani ketepatan waktu kedatangan dan keberangkatan.

Keberadaan jadwal kedatangan dan keberangkatan kereta api memegang peran penting dalam pemodelan sistem jaringan kereta api. Model yang dihasilkan digunakan untuk menganalisa kestabilan dan kerealistikan sistem jaringan tersebut. Sistem jaringan kereta api merupakan Sistem Event Diskrit yang dapat dimodelkan menggunakan petri net dan aljabar max-plus. Kemudahan petri net dan aljabar max-plus dalam menyelesaikan proses sinkronisasi yang menyebabkan penulis tertarik mengadakan penelitian ini. Proses sinkronisasi pada sistem jaringan kereta api digunakan penulis sebagai acuan desain penjadwalan kereta dan menganalisa dengan uji *coverability tree*, kerealistikan, dan kestabilan terhadap model sistem jaringan.

1.2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah

- a. Bagaimana model sistem jaringan Kereta api di Jawa Timur menggunakan petri net dan aljabar max-plus.
- b. Bagaimana menguji *coverability tree*, kerealistikan dan kestabilan terhadap model sistem jaringan.
- c. Bagaimana desain penjadwalan kereta api di Jawa Timur menggunakan aljabar max-plus.

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah

- a. Jaringan Kereta api yang diteliti adalah kereta api yang melayani rute di Jawa Timur, yaitu kereta api kelas Eksekutif, Bisnis, dan Ekonomi.
- b. Stasiun – stasiun di Jawa Timur, meliputi sebagian Daerah Operasi (DAOP) 4 (wilayah Semarang), Daerah Operasi (DAOP) 7 (wilayah Madiun), Daerah Operasi (DAOP) 8 (wilayah Surabaya), dan Daerah Operasi (DAOP) 9 (wilayah Jember).
- c. Waktu referensi yang digunakan penentuan distribusi jumlah kereta api dan jadwal keberangkatan dalam interval waktu tertentu.

1.4. Asumsi

Asumsi dalam penelitian ini adalah

- a. Kecepatan Kereta api dianggap tetap dalam interval waktu tertentu.
- b. Jadwal keberangkatan Kereta api periodik dengan periode T .
- c. Distribusi jumlah kereta api yang melintasi di setiap jalur dianggap tetap.
- d. Jenis kereta api yang digunakan dalam model tidak dibedakan.
- e. Kereta api berangkat sesuai jadwal yang ada dan tidak saling menyusul kereta api lain.

1.5. Tujuan

Tujuan dalam penelitian ini adalah

- a. Diperoleh model sistem jaringan Kereta api di Jawa Timur menggunakan petri net dan aljabar max-plus.
- b. Diperoleh hasil analisa uji *coverability tree*, kerealistikan dan kestabilan terhadap model sistem jaringan.
- c. Diperoleh desain penjadwalan kereta api di Jawa Timur menggunakan petri net dan aljabar max-plus.

1.6. Manfaat

Manfaat yang diperoleh dalam penelitian ini adalah

- a. Menambah khazanah ilmu pengetahuan aplikasi aljabar max-plus dan petri net pada sistem jaringan Kereta api di Jawa Timur.
- b. Diperoleh model dan desain penjadwalan keberangkatan kereta api guna meningkatkan kualitas pelayanan kepada publik.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa teori yang digunakan sebagai landasan pembahasan aplikasi petri net dan aljabar max-plus pada sistem jaringan kereta api di Jawa Timur. Teori tersebut meliputi empat hal utama, yaitu petri net, aljabar max-plus, aljabar max-plus interval, dan sistem jaringan kereta api.

2.1 Petri Net

Dalam bagian ini dibahas teori yang digunakan untuk membahas petri net. Pembahasan meliputi definisi dan notasi petri net, tanda dan waktu petri net, dinamika petri net, *coverability tree*.

2.1.1 Definisi dan Notasi Petri Net

Petri net dikembangkan pertama kali oleh C.A. Petri pada awal 1960-an. Petri net merupakan salah satu alat untuk memodelkan Sistem *Event* Diskrit. Pada Petri net *event* berkaitan dengan transisi. Agar suatu *event* dapat terjadi, beberapa keadaan harus terpenuhi terlebih dahulu. Keadaan pada petri net dinyatakan dengan *place*. *Place* dapat berfungsi sebagai masukan atau keluaran suatu transisi. *Place* sebagai masukan menyatakan keadaan yang harus dipenuhi agar transisi dapat terjadi. Setelah transisi terjadi maka keadaan akan berubah. *Place* yang menyatakan keadaan tersebut adalah keluaran dari transisi.

Definisi 2.1 (Adzikya, 2008)

Petri net adalah 4-tuple, (P, T, A, w) dengan

- i. P : himpunan berhingga *place*, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$,
- ii. T : himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$,
- iii. A : himpunan *arc*, $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$,
- iv. w : fungsi bobot, $w : A \rightarrow N_1^+$,

Petri net dapat digambarkan sebagai graf berarah. Node dari graf berupa *place* yang diambil dari himpunan *place* P atau transisi yang diambil dari himpunan transisi T . Pada petri net graf diperbolehkan menggunakan beberapa *arc* untuk menghubungkan dua *node* atau lebih dengan memberikan bobot ke setiap *arc* yang menyatakan jumlah *arc*. Struktur ini dikenal dengan struktur *multigraf*.

Representasi petri net secara grafik dinotasikan $I(t_j)$ dan $O(t_j)$ yang masing – masing menyatakan himpunan *place input* ke transisi t_j atau *upstream place* untuk transisi t_j dan himpunan *place output* dari transisi t_j atau *downstream place* untuk transisi t_j . Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut.

$$I(t_j) = \{p_i: (p_i, t_j) \in A\}$$

$$O(t_j) = \{p_i: (t_j, p_i) \in A\}$$

Notasi yang sama dapat digunakan untuk mendeskripsikan *input* dan *output* transisi untuk *place* p_i sebagai berikut.

$$I(p_i) = \{t_j: (t_j, p_i) \in A\}$$

$$O(p_i) = \{t_j: (p_i, t_j) \in A\}$$

Grafik petri net terdiri dari dua macam, yaitu lingkaran dan garis/persegi panjang. Lingkaran menyatakan *place* dan garis/persegi panjang menyatakan transisi. *Arc* disimbolkan dengan anak panah yang menghubungkan *place* p_i ke transisi t_j ditulis $p_i \in I(t_j)$. Jika bobot *arc* dari *place* p_i ke transisi t_j adalah k ditulis $w(p_i, t_j) = k$ maka terdapat k *arc* dari *place* p_i ke transisi t_j atau sebuah *arc* dengan bobot k .

2.1.2 Tanda dan Waktu Petri Net

Transisi pada petri net menyatakan *event* pada Sistem *Event* Diskrit dan *place* merepresentasikan kondisi agar *event* dapat terjadi. Token adalah sesuatu yang diletakkan di *place* yang menyatakan terpenuhi tidaknya suatu kondisi. Secara grafik token digambarkan dengan dot dan diletakkan di dalam *place*. Jika jumlah token lebih dari 5 maka dituliskan dengan angka.

Definisi 2.2 (Adzikya, 2008)

Penanda (*marking*) x pada petri net adalah fungsi $x: P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$.

Penanda dinyatakan dengan vektor yang berisi bilangan bulat taknegatif yang menyatakan jumlah token, yaitu : $x = [x(p_1), x(p_2), \dots, x(p_n)]^T$. Jumlah elemen x sama dengan banyak *place* petri net. Elemen ke- i pada vektor x merupakan jumlah token pada *place* p_i , $x(p_i) \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Jumlah token pada *place* adalah sebarang bilangan bulat taknegatif, tidak harus terbatas (*bounded*).

Definisi 2.3 (Adzikya, 2008)

Petri net bertanda (*marked*) adalah 5-tuple (P, T, A, w, x_0) dimana (P, T, A, w) adalah petri net dan x_0 adalah penanda awal.

Definisi 2.4 (Winarni, 2009)

Petri net dengan waktu (*timed petri net*) dikarakterisasi oleh P, T, A, w, x_0 dan \mathcal{T} dimana P adalah himpunan *place*, T adalah himpunan transisi, A adalah himpunan *arc*, w adalah bobot masing – masing *arc*, x_0 adalah keadaan awal token pada setiap *place* dan \mathcal{T} adalah vektor yang elemen – elemennya menunjukkan waktu yang diperlukan token berada dalam *place* sebelum *downstream* transisi *enabled*.

Selanjutnya, petri net bertanda dan petri net dengan waktu cukup disebut petri net. Keadaan (*state*) pada petri net didefinisikan penanda petri net.

Definisi 2.5 (Adzikya, 2008)

Keadaan (*state*) petri net bertanda adalah $X = [x(p_1), x(p_2), \dots, x(p_n)]^T$.

Ruang keadaan (*state place*) X pada petri net bertanda dengan n *place* didefinisikan oleh semua vektor berdimensi n dengan elemen – elemennya adalah bilangan bulat nonnegatif, sehingga $X = \{0, 1, 2, \dots\}^n$.

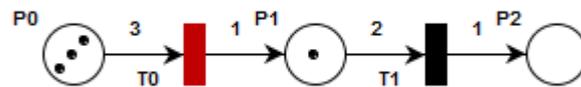
Jika semua keadaan yang diperlukan sudah terpenuhi maka transisi dapat terjadi. Dalam hal ini keadaan merupakan *place input* dari transisi. Bobot *arc* dari *place input* ke transisi menunjukkan jumlah token minimum di *place* agar transisi *enabled*. Jika semua *place input* mempunyai token lebih dari atau sama dengan jumlah token minimum yang dibutuhkan maka transisi *enabled*.

Definisi 2.6 (Adzikya, 2008)

Transisi $t_j \in T$ pada petri bertanda *enabled* jika

$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j), \forall p_i \in I(t_j).$$

Contoh 2.1



Gambar 2.1 Petri Net Sederhana

Gambar petri net sederhana diatas memiliki tiga *place* dan dua transisi. Himpunan *place* $P = \{p_0, p_1, p_2\}$, himpunan transisi $T = \{t_0, t_1\}$, himpunan *arc* $A = \{(p_0, t_0), (t_0, p_1), (p_1, t_1), (t_1, p_2)\}$, fungsi bobot $w(p_0, t_0) = 3$, $w(t_0, p_1) = 1$, $w(p_1, t_1) = 2$, dan $w(t_1, p_2) = 1$. Sedangkan penanda awal $x_0 = [3 \ 1 \ 0]$. Hasil simulasi memperlihatkan transisi t_0 berwarna merah mengartikan bahwa transisi tersebut *enabled* dan dapat di *fire* kerana $x(p_0) = 3 \geq w(p_0, t_0) = 3$, akan tetapi transisi t_1 tetap berwarna hitam mengartikan transisi tersebut tidak *enabled* dan tidak dapat di *fire* karena $x(p_1) = 1 \not\geq w(p_1, t_1) = 2$.

2.1.3 Dinamika Petri Net

Petri net digunakan untuk memodelkan sistem *event* diskrit, yang dilengkapi dengan mekanisme yang mirip dengan transisi keadaan (*state transition*) pada automata. Mekanisme ini berupa menjalankan token melewati jaringan (net) ketika transisi menjadi *enabled* dan proses ini mengubah keadaan petri net.

Hanya transisi *enabled* yang dapat di *fire*. Transisi di *fire* saat *event* yang dinyatakan oleh transisi terjadi. Berikut adalah proses yang terjadi pada saat pemfirean transisi. Semua token di *place input* dikurangi/diambil sebanyak bobot *arc* yang menghubungkannya. Sedangkan token di *place output* ditambah sebanyak bobot *arc* yang menghubungkannya.

Definisi 2.7 (Adzkiya, 2008)

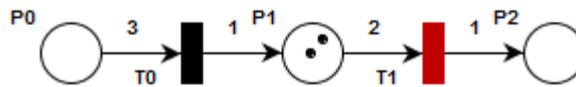
Fungsi perubahan keadaan pada petri net bertanda (P, T, A, w, x_0) yaitu $f: \{0, 1, 2, \dots\}^n \times T \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}^n$ terdefinisi untuk transisi $t_j \in T$ jika dan hanya jika

$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j), \forall p_i \in I(t_j).$$

Jika $f(x, t_j)$ terdefinisi maka ditulis $x' = f(x, t_j)$, dimana

$$x'(p_i) = x(p_i) - w(p_i, t_j) + w(t_j, p_i), i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Contoh 2.2



Gambar 2.2 Petri Net Sederhana Setelah Transisi t_0 di-*fire*

Berdasarkan Gambar 2.1 setelah transisi t_0 di *fire* keadaan petri net berubah, seperti ditunjukkan Gambar 2.2 yang memperlihatkan jumlah token pada *place* p_0 berubah menjadi kosong dan *place* p_1 menjadi dua. Sehingga transisi yang *enabled* juga berubah seiring dengan perubahan jumlah token pada *place input* masing – masing. Hal ini terlihat dari hasil simulasi menunjukkan transisi t_1 berwarna merah yang mengartikan transisi *enabled* dan dapat di *fire*.



Gambar 2.3 Petri Net Sederhana Setelah Transisi t_1 di-*fire*

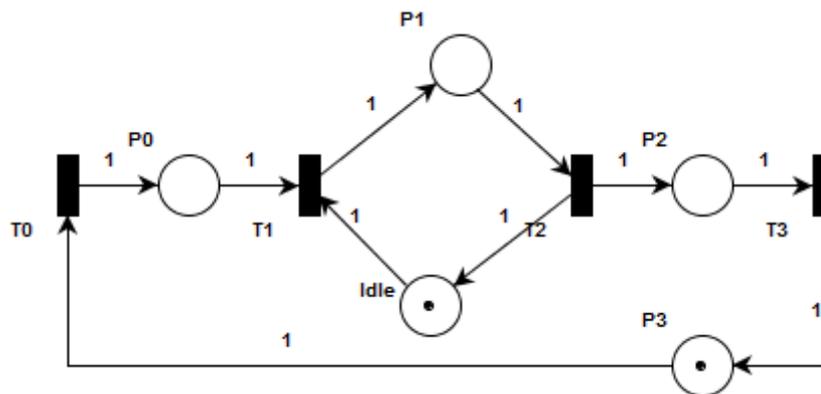
Hasil simulasi Gambar 2.1 setelah dilakukan beberapa kali pemfirean terlihat bahwa tidak ada transisi yang berwarna merah, seperti yang ditunjukkan Gambar 2.3. Hal ini berarti tidak ada transisi yang *enabled* dan dapat di *fire*. Keadaan seperti ini disebut keadaan *terminal* dan petri net mengalami *deadlock*.

2.1.4 Coverability Tree

Coverability tree merupakan teknik yang digunakan untuk menganalisis performa model dan menentukan kestabilannya.. Analisis yang dapat diselesaikan dengan menggunakan *coverability tree* antara lain keterbatasan (*boundedness*), konservasi (*conservation*), dan *coverability* keadaan.

Setiap *node* pada *coverability tree* menyatakan keadaan petri net. *Coverability tree* dapat dibangun dari petri net dengan keadaan awal. Keadaan awal petri net didefinisikan sebagai *node root*. Anak dari *node root* merupakan keadaan yang dapat dicapai dari keadaan awal dengan memfire sebuah transisi. Keadaan-keadaan ini dihubungkan ke *node root* dengan *edge*. Setiap *edge* pada *coverability tree* mempunyai bobot sebuah transisi yaitu transisi yang di *fire* untuk mencapai keadaan tersebut.

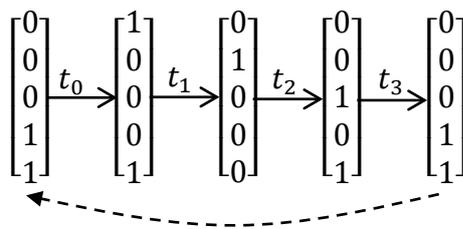
Contoh 2.3



Gambar 2.4 Keadaan Awal Petri Net

Petri net Gambar 2.4 memiliki lima *place* dan empat transisi. Himpunan *place* $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3, Idle\}$, himpunan transisi $T = \{t_0, t_1, t_2, t_3\}$, dan penanda awal $x_0 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$. Selanjutnya, dibangun *coverability tree* dari petri net di atas.

Tulis keadaan awal pada *coverability tree* sebagai *root*. Satu satunya transisi yang *enabled* pada keadaan ini adalah t_0 . Setelah transisi t_0 di *fire* keadaan petri net berubah menjadi $x_1 = [1\ 0\ 0\ 0\ 1]^T$. Tambahkan pada *coverability tree* keadaan x_1 sebagai anak dari keadaan awal dan hubungkan dengan anak panah dari x_0 ke x_1 . Pada anak panah dituliskan transisi yang di *fire*, dalam hal ini adalah t_0 . Kemudian pada keadaan x_1 hanya transisi t_1 yang dapat di *fire*. Keadaan menjadi $x_2 = [0\ 1\ 0\ 0\ 0]^T$ setelah t_1 di-*fire*. Tambahkan pada *coverability tree* keadaan x_2 sebagai anak dari keadaan x_1 dan hubungkan dengan anak panah dari x_1 ke x_2 . Pada anak panah dituliskan transisi yang di *fire*, yaitu t_1 . Kemudian pada keadaan x_2 hanya transisi t_2 yang dapat di *fire*. Keadaan menjadi $x_3 = [0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$ setelah t_2 di-*fire*. Tambahkan pada *coverability tree* keadaan x_3 sebagai anak dari keadaan x_2 dan hubungkan dengan anak panah dari x_2 ke x_3 . Pada anak panah dituliskan transisi yang di *fire*, yaitu t_2 . Kemudian pada keadaan x_3 hanya transisi t_3 yang dapat di *fire*. Keadaan menjadi $x_4 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$ setelah t_3 di *fire* yaitu sama dengan keadaan awal petri net. Tambahkan pada *coverability tree* keadaan x_4 sebagai anak dari keadaan x_3 dan hubungkan dengan anak panah dari x_3 ke x_4 . Pada anak panah dituliskan transisi yang di *fire*, yaitu t_3 . Hasil akhir *coverability tree* dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 *Coverability Tree* untuk Petri Net di Gambar 2.4

2.2 Aljabar Max-Plus

Dalam bagian ini dibahas teori yang digunakan untuk membahas aljabar max-plus. Pembahasan meliputi definisi dan notasi aljabar max-plus, vektor dan matriks, graf berarah, nilai eigen dan vektor eigen, dan algoritma power.

2.2.1 Definisi dan Notasi Aljabar Max-Plus

Sebelum membahas aljabar max-plus lebih mendalam diberikan definisi dan notasi dari aljabar max-plus sebagai berikut.

Definisi 2.8. (Subiono, 2000)

Diberikan $\mathbb{R}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan \mathbb{R} adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$. Pada \mathbb{R}_ε didefinisikan operasi berikut: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$,

$$x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x, y\} \text{ dan } x \otimes y \stackrel{\text{def}}{=} x + y.$$

Dimana operasi \oplus dibaca *o-plus* dan \otimes dibaca *o-times*. Selanjtnya, diberikan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring dengan elemen netral ε dan elemen satuan $e = 0$. Untuk mempermudah penulisan semiring $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ ditulis sebagai \mathbb{R}_{max} .

Pangkat dalam aljabar max-plus diperkenalkan dengan menggunakan sifat asosiatif dari operator \otimes .

Definisi 2.9 (Subiono, 2000)

Untuk $x \in \mathbb{R}_{max}$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ (\mathbb{N} adalah himpunan bilangan asli digabung dengan bilangan nol), didefinisikan

$$x^{\otimes n} = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } n = 0 \\ \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_n & , \text{ untuk } n \neq 0 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x^{\otimes n}$ dalam aljabar biasa dibaca sebagai

$$x^{\otimes n} = \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_n = n \times x.$$

Terinspirasi oleh pengertian pangkat diatas, dengan cara serupa pangkat dalam aljabar max-plus ditulis sebagai

$$x^{\otimes \alpha} = \alpha \times x, \quad \text{untuk } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2.2.2 Vektor dan Matriks

Himpunan matriks $n \times m$ dalam aljabar max-plus dinyatakan dalam $\mathbb{R}_{max}^{n \times m}$. Untuk $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 0$, didefinisikan $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$. Elemen dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$ pada baris ke- i dan kolom ke- j dinyatakan dengan $a_{i,j}$ untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Dalam hal ini matriks A ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

biasanya elemen $a_{i,j}$ juga dinotasikan sebagai

$$[A]_{i,j}, \quad i \in \underline{n}, j \in \underline{m}.$$

Penjumlahan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$ dinotasikan oleh $A \oplus B$ didefinisikan sebagai

$$[A \oplus B]_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\}$$

untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$.

Untuk $c \in \mathbb{R}_{max}$ dan matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$, perkalian skalar c dengan matriks A dinotasikan $c \otimes A$ didefinisikan sebagai

$$c \otimes a_{j,i} = c + a_{j,i}$$

untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$.

Untuk matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times p}$ dan $B \in \mathbb{R}_{max}^{p \times m}$, perkalian matriks $A \otimes B$ didefinisikan sebagai

$$[A \otimes B]_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^p a_{i,k} \otimes b_{k,j} = \max_{k \in \underline{p}} \{a_{i,k} + b_{k,j}\}$$

untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Perkalian ini serupa dalam perkalian matriks aljabar biasa dimana $+$ diganti dengan \max dan \times dengan $+$.

Untuk matriks persegi $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$, perkalian matriks pangkat A^k didefinisikan sebagai

$$A^k = A^{k-1} \otimes A$$

untuk $k \in \mathbb{N}$, dimana A^0 adalah matriks identitas yang memenuhi $(A^0)_{ij} = e$ jika $i = j$ dan $(A^0)_{ij} = \varepsilon$ jika $i \neq j$.

2.2.3 Matriks dan Graf Berarah

Misalkan matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$, suatu graf berarah dari matriks A adalah $G(A) = (E, V)$. Graf $G(A)$ mempunyai n titik, himpunan semua titik dari $G(A)$ dinyatakan oleh V . Suatu garis dari titik j ke titik i ada bila $a_{i,j} \neq \varepsilon$, garis ini dinotasikan oleh (j, i) . Himpunan semua garis dari graf $G(A)$ dinotasikan oleh E . Bobot dari garis (j, i) adalah nilai dari $a_{i,j}$ yang dinotasikan oleh $w(j, i) = a_{i,j} \in \mathbb{R}_{max}$. Bila $a_{i,j} = \varepsilon$, maka garis (j, i) tidak ada. Suatu barisan garis $(i_1, i_2), (i_3, i_4), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ dari suatu graf dinamakan suatu path. Suatu path dikatakan **elementer** bila tidak ada titik terjadi dua kali dalam path tersebut. Suatu sirkuit adalah **path elementer tertutup**, yaitu $(i_1, i_2), (i_3, i_4), \dots, (i_{l-1}, i_l)$. Bobot dari suatu path $p = (i_1, i_2), (i_3, i_4), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ dinotasikan oleh $|p|_w$ dan diberikan oleh

$$|p|_w = w(i_1, i_2) + w(i_3, i_4) + \dots + w(i_{l-1}, i_l) = (a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \dots + a_{i_l, i_{l-1}}),$$

sedangkan panjang dari path p atau banyaknya garis dalam path p dinotasikan oleh $|p|_l$. Bobot rata-rata dari path p adalah bobot dari p dibagi oleh banyaknya garis dalam path p , yaitu

$$\frac{|p|_w}{|p|_l} = \frac{(a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \dots + a_{i_l, i_{l-1}})}{(l-1)}$$

Sirkuit rata-rata adalah bobot rata-rata dari suatu sirkuit. Sebarang sirkuit dengan sirkuit rata-rata maksimum dinamakan **sirkuit kritis**. Suatu graf dikatakan *strongly connected* bila ada suatu path untuk setiap titik i ke setiap titik j . Bila graf $G(A)$ adalah *strongly connected*, maka matriks A juga dikatakan *irreducible* (taktereduksi).

2.2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Seperti halnya pada aljabar linier biasa, pada aljabar max-plus juga terdapat nilai eigen dan vektor eigen pada matriks persegi A . Berikut definisi tentang nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar max-plus.

Definisi 2.10 (Subiono, 2000)

Diberikan matriks persegi $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. Jika $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ adalah skalar dan $v \in \mathbb{R}_{max}^n$ adalah vektor yang memuat sedikitnya satu elemen berhingga sedemikian hingga

$$A \otimes v = \lambda \otimes v$$

Maka λ disebut nilai eigen dan v adalah vektor eigen dari A .

Misalkan $C(A)$ adalah himpunan semua sirkuit elementer dalam $G(A)$ dan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ adalah matriks taktereduksi, maka terdapat dengan tunggal nilai eigen yang sama dengan bobot rata-rata maksimal sirkuit dalam $G(A)$ atau dapat ditulis

$$\lambda = \max_{p \in C(A)} \frac{|p|_w}{|p|_l}.$$

Dalam kasus ini, jika $C(A) = \emptyset$ maka $\lambda = \varepsilon$.

Hal ini menunjukkan bahwa nilai eigen dapat sama dengan ε . Sedangkan elemen-elemen vektor eigen dapat memuat sama dengan ε asalkan sedikitnya memuat satu elemen berhingga.

2.2.5 Algoritma Power

Algoritma *power* adalah salah satu algoritma yang digunakan menentukan nilai eigen dan vektor eigen dalam semiring max-plus. Algoritma ini dimulai dengan pemberian vektor awal $x(0) \neq \varepsilon 1$, ini artinya vektor awal $x(0)$ memuat sedikitnya satu elemen berhingga, dan selanjutnya dilakukan iterasi dari bentuk persamaan linier

$$x(k+1) = A \otimes x(k), \quad k \geq 0, \quad (2.1)$$

hingga diperoleh dua vektor $x(p), x(q) \in \mathbb{R}^n$ dan sebuah konstanta c , sedemikian hingga $x(p) = c \otimes x(q)$.

Berikut langkah – langkah algoritma *power* untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks A .

1. Ambil sebarang vektor awal $x(0) \neq \varepsilon 1$, dimana $\varepsilon 1$ adalah vektor yang hanya memuat elemen ε .
2. Iterasi persamaan (2.1) hingga ada bilangan bulat p, q dengan $p > q \geq 0$ dan bilangan real c , sedemikian hingga $x(p) = c \otimes x(q)$.
3. Hitung nilai eigen

$$\lambda = \frac{c}{p - q}.$$

4. Hitung vektor eigen

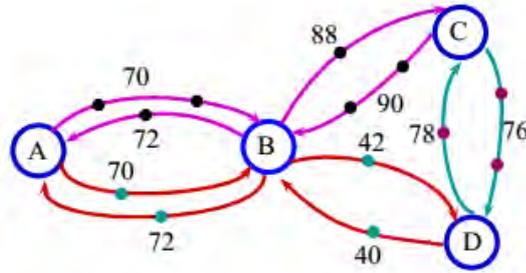
$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)).$$

Algoritma tersebut sudah diimplementasikan dengan *Scilab* dalam *Max Plus Toolbox*. Selanjutnya dalam pembahasan Bab 4 untuk memudahkan dalam penghitungan nilai eigen dan vektor eigen akan digunakan *Scilab* dan *Max-Plus Toolbox* tersebut.

Informasi mengenai nilai eigen dan vektor eigen dari matriks dapat digunakan untuk menyusun penjadwalan yang regular jika vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut dijadikan sebagai nilai awal maka akan terbentuk desain jadwal yang regular dengan periode jadwal sebesar nilai eigen. Penjadwalan yang dimaksudkan dalam penelitian ini adalah jadwal keberangkatan kereta api di Jawa Timur.

Contoh 2.4.

Misalkan diberikan model jaringan kereta api dengan 4 stasiun kereta A, B, C, dan D yang dihubungkan oleh 3 jalur, seperti ditunjukkan oleh Gambar 2.1. Jalur 1 adalah lintasan kereta api dari A ke B ke C, kembali lagi ke A. Jalur 2 adalah lintasan kereta api dari A ke B ke D, kembali lagi ke A. Sedangkan jalur 3 adalah lintasan kereta api dari C ke D kembali lagi ke C.



Gambar 2.6 Jalur Sistem Kereta Api

Bobot pada setiap busur merepresentasikan lama perjalanan tiap lintasan.

Akan didesain model untuk penjadwalan keberangkatan kereta dengan kriteria :

- i. Lama perjalanan tiap lintasan adalah tetap,
- ii. Frekuensi kereta di setiap lintasan adalah sama untuk menghasilkan jadwal dengan waktu keberangkatan yang teratur (regular),
- iii. Keberangkatan kereta di setiap stasiun menunggu kedatangan kereta dari lintasan lainnya untuk memungkinkan perpindahan penumpang antar kereta di masing-masing stasiun (penumpang berpindah ke kereta lain), dan
- iv. Keberangkatan kereta di masing-masing stasiun adalah sesegera mungkin.

Misalkan waktu perjalanan dan banyaknya kereta api pada masing-masing jalur pada saat jam 11.58 sebagai acuan waktu diberikan oleh Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Jadwal Keberangkatan Kereta api

Jalur	Dari	Tujuan	Jadwal berangkat	Lama perjalanan	Banyaknya kereta
1	A ₁	B ₁	50	70	2
1	B ₁	C ₁	10	88	1
1	C ₁	B ₁	47	90	2
1	B ₁	A ₁	25	72	1
2	A ₂	B ₂	17	70	1
2	B ₂	D ₁	30	42	1
2	D ₁	B ₂	20	40	1
2	B ₂	A ₂	2	72	1
3	C ₂	D ₂	45	76	2
3	D ₂	C ₂	25	78	1

Disini masing-masing A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 , C_2 dan D_2 bisa dianggap sebagai platform pada stasiun A, B, C dan D. Sedangkan aturan sinkronisasi diantara kereta api diberikan sebagai berikut:

Jalur I :

- i. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari A_1 menuju B_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari B_1 menuju A_1 .
- ii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari B_1 menuju C_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ (sebab ada 2 kereta api pada jalur lintasan dari A_1 menuju B_1) dari A_1 menuju B_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari D_1 menuju B_2 .
- iii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari C_1 menuju B_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari B_1 menuju C_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari D_2 menuju C_2 .
- iv. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari B_1 menuju A_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ (sebab ada 2 kereta pada jalur lintasan dari A_1 menuju B_1) dari A_1 menuju B_1 .

Jalur II :

- i. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari A_2 menuju B_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari B_2 menuju A_2 .
- ii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari B_2 menuju D_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari A_2 menuju B_2 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ (sebab ada 2 kereta api pada jalur lintasan dari C_1 menuju B_1) dari C_1 menuju B_1 .
- iii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari D_1 menuju B_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari B_2 menuju D_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ (sebab ada 2 kereta pada jalur lintasan dari C_2 menuju D_2) dari C_2 menuju D_2 .
- iv. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari B_2 menuju A_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari D_1 menuju B_2 .

Jalur III :

- i. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari C_2 menuju D_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari B_1 menuju C_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari D_2 menuju C_2 .
- ii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari D_2 menuju C_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari B_2 menuju D_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ (sebab ada 2 kereta pada jalur lintasan dari C_2 menuju D_2) dari C_2 menuju D_2 .

Selanjutnya dari informasi jadwal keberangkatan, lamanya waktu perjalanan dan posisi kereta api pada saat acuan waktu seperti yang telah ditentukan serta aturan sinkronisasi yang telah diberikan dibuat suatu model sistem jaringan kereta api. Berikut pendefinisian variabel pada model sistem jaringan kereta api.

Tabel 2.2 Pendefinisian variabel

Variabel	Definisi keberangkatan kereta api dari :
$x_1(k)$	A_1 ke B_1 pada saat ke- k
$x_2(k)$	B_1 ke C_1 pada saat ke- k
$x_3(k)$	C_1 ke B_1 pada saat ke- k
$x_4(k)$	B_1 ke A_1 pada saat ke- k
$x_5(k)$	A_2 ke B_2 pada saat ke- k
$x_6(k)$	B_2 ke D_1 pada saat ke- k
$x_7(k)$	D_1 ke B_2 pada saat ke- k
$x_8(k)$	B_2 ke A_2 pada saat ke- k
$x_9(k)$	C_2 ke D_2 pada saat ke- k
$x_{10}(k)$	D_2 ke C_2 pada saat ke- k
$x_{11}(k)$	A_1 ke B_1 pada saat ke- $(k - 1)$
$x_{12}(k)$	C_1 ke B_1 pada saat ke- $(k - 1)$
$x_{13}(k)$	C_2 ke D_2 pada saat ke- $(k - 1)$

Catatan: Total keseluruhan kereta api adalah 13, dimana variabel keadaan x_{11} , x_{12} dan x_{13} dinamakan variabel keadaan pembantu.

Berdasarkan aturan sinkronisasi yang telah dibuat dan berdasarkan Tabel 2.2 dapat dikonstruksi model sistem jaringan kereta api sebagai berikut.

Jalur I :

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_4(k) \otimes 72 \\x_2(k+1) &= x_7(k) \otimes 40 \oplus x_{11}(k) \otimes 70 \\x_3(k+1) &= x_2(k) \otimes 88 \oplus x_{10}(k) \otimes 78 \\x_4(k+1) &= x_{12}(k) \otimes 90\end{aligned}$$

Jalur II :

$$\begin{aligned}x_5(k+1) &= x_8(k) \otimes 72 \\x_6(k+1) &= x_5(k) \otimes 70 \oplus x_{12}(k) \otimes 90 \\x_7(k+1) &= x_6(k) \otimes 42 \oplus x_{13}(k) \otimes 76 \\x_8(k+1) &= x_7(k) \otimes 40\end{aligned}$$

Jalur III :

$$\begin{aligned}x_9(k+1) &= x_2(k) \otimes 88 \oplus x_{10}(k) \otimes 78 \\x_{10}(k+1) &= x_6(k) \otimes 42 \oplus x_{13}(k) \otimes 76\end{aligned}$$

Dengan membuat variabel pembantu $x_{11}(k) = x_1(k-1)$, $x_{12}(k) = x_3(k-1)$, dan $x_{13}(k) = x_9(k-1)$ sehingga dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned}x_{11}(k+1) &= x_1(k) \\x_{12}(k+1) &= x_3(k) \\x_{13}(k+1) &= x_9(k)\end{aligned}$$

Selanjutnya persamaan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk sistem matriks aljabar max-plus sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \\ x_7(k+1) \\ x_8(k+1) \\ x_9(k+1) \\ x_{10}(k+1) \\ x_{11}(k+1) \\ x_{12}(k+1) \\ x_{13}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 72 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 40 & \cdot & \cdot & \cdot & 70 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 88 & \cdot & 78 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 90 & \cdot \\ \cdot & 72 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 70 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 90 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 42 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 76 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 40 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 88 & \cdot & 78 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 42 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 76 \\ 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \\ x_7(k) \\ x_8(k) \\ x_9(k) \\ x_{10}(k) \\ x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \\ x_{13}(k) \end{bmatrix}$$

Dimana untuk alasan kemudahan notasi ε diganti dengan “.”. Interpretasi dari adanya variabel pembantu diatas dapat dipandang x_{11} sebagai waktu keberangkatan dari stasiun pembantu AB yang terletak pada jalur A_1 menuju B_1 , dengan lama perjalanan antara A_1 menuju AB sama dengan 0 dan lama perjalanan AB menuju B_1 sama dengan 70. Selanjutnya, variabel pembantu x_{12} dan x_{13} juga memiliki arti serupa dengan pada x_{11} .

Dari hasil *running* menggunakan program *Scilab* dan *Max-Plus Toolbox* untuk nilai eigen dan vektor eigen diperoleh $\lambda = 56$ dan vektor eigen $x = [764 \ 732 \ 770 \ 748 \ 748 \ 762 \ 748 \ 732 \ 770 \ 748 \ 708 \ 714 \ 714]^T$. Hasil nilai eigen menginterpretasikan periode keberangkatan kereta api di setiap stasiun asal adalah 56 menit sekali. Sedangkan keberangkatan awal di setiap stasiun berdasarkan vektor eigen. Sebagai contoh, hasil vektor eigen $[x]_{1,1} = 764$ ini merepresentasikan keberangkatan dari stasiun A menuju stasiun B pada jalur 1 adalah pukul 12:44. Selanjutnya, untuk keberangkatan awal kereta api di setiap stasiun dapat disusun berdasarkan acuan tersebut.

2.3 Aljabar Max-plus Interval

Aljabar max-plus interval merupakan perluasan aljabar max-plus biasa yang elemen - elemen matriks merupakan suatu interval batas bawah dan batas atas. Pembahasan meliputi definisi dan notasi aljabar max-plus interval, nilai eigen dan vektor eigen matriks interval.

2.3.1 Definisi dan Notasi Aljabar Max-plus Interval

Sebagai awal pembahasan diberikan definisi dan notasi aljabar max-plus interval sebagai berikut.

Definisi 2.11 (Fahim, 2013)

Didefinisikan sebagai $(\mathbb{R})_{max} = \{x = [\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \varepsilon \prec_m \underline{x} \prec_{-m} \bar{x}\} \cup \{[\varepsilon, \varepsilon]\}$.

Pada $I(\mathbb{R})_{max}$ operasi \oplus dan \otimes didefinisikan sebagai:

$$x \oplus y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$$

$$x \otimes y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}]$$

untuk setiap $x, y \in I(\mathbb{R})_{max}$.

Semiring idempotent komutatif $(I(\mathbb{R})_{max}, \oplus, \otimes)$ bukan merupakan semifield, karena tidak setiap elemen taknetralnya mempunyai invers. Elemen satuan, yaitu $\mathbf{0} = [0, 0]$ berupa bilangan real. Elemen taknetral yang mempunyai invers hanya bilangan real $x = [x, x]$, dengan $x \neq 0$. Sementara untuk $[\underline{x}, \bar{x}]$ dengan $\varepsilon <_m \underline{x} <_{-m} \bar{x}$ tidak mempunyai invers. Perhatikan untuk $[-\underline{x}, -\bar{x}]$, diperoleh bahwa

$$[\underline{x}, \bar{x}] \otimes [-\underline{x}, -\bar{x}] = [\underline{x} \otimes (-\underline{x}), \bar{x} \otimes (-\bar{x})],$$

Yang berupa interval dengan panjang $2\underline{x} - 2\bar{x}$. (Fahim, 2013)

Definisi 2.12 (Fahim, 2013)

Misalkan $I(\mathbb{R})_{max}^{n \times n}$ adalah himpunan matriks berukuran $n \times n$ pada aljabar max-plus interval. Matriks interval adalah himpunan matriks yang mempunyai nilai interval dan dituliskan sebagai $\mathbf{A} = (\underline{A}, \bar{A})$ dengan $\underline{A}, \bar{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dan $\underline{A} \leq \bar{A}$. Matriks \underline{A} disebut matriks batas bawah dan matriks \bar{A} disebut matriks batas atas matriks interval \mathbf{A} .

Operasi \oplus dan \otimes pada $I(\mathbb{R})_{max}$ dapat diperluas untuk operasi – operasi matriks pada aljabar max-plus interval.

2.3.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Interval

Seperti halnya pada matriks biasa pada matriks interval juga terdapat nilai eigen dan vektor eigen. Berikut diberikan definisi nilai eigen dan vektor eigen pada matriks interval persegi.

Definisi 2.13 (Cechlarova, 2005)

Suatu bilangan real λ adalah suatu *possible eigenvalue* dari suatu matriks interval \mathbf{A} jika λ merupakan nilai eigen dari minimal satu matriks $A \in \mathbf{A}$. Suatu bilangan

real λ adalah *universal eigenvalue* dari sebuah matriks interval \mathbf{A} jika λ merupakan nilai eigen dari setiap matriks $A \in \mathbf{A}$.

Definisi 2.14 (Cechlarova, 2005)

Suatu vektor $v \in \mathbb{R}_{max}^n$ adalah suatu *possible eigenvector* dari matriks interval \mathbf{A} jika ada $A \in \mathbf{A}$ sedemikian hingga $A \otimes v = \lambda(A) \otimes v$. Suatu vektor $v \in \mathbb{R}_{max}^n$ adalah sebuah *universal eigenvector* dari matriks interval \mathbf{A} jika $A \otimes v = \lambda(A) \otimes v$ untuk setiap matriks $A \in \mathbf{A}$.

2.4 Sistem Jaringan Kereta Api

Dalam bagian ini dibahas teori yang digunakan untuk membahas sistem jaringan kereta api. Pembahasan meliputi model sistem jaringan kereta api, jadwal keberangkatan, dan kestabilan sistem.

2.4.1 Model Sistem Jaringan Kereta api

Model sistem jaringan kereta api jika dikaitkan dengan realita jadwal keberangkatan kereta api yang sudah ada dapat dinyatakan dalam bentuk.

$$\begin{aligned} x(k + 1) &= A \otimes x(k) \oplus d(k + 1) \\ y(k) &= C \otimes x(k) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Vektor $x(k)$ adalah waktu keberangkatan yang ke- k dari semua kereta api, ditulis $x(k) = [x_1(k), \dots, x_n(k), x_{n+1}(k), \dots, x_{n+r}(k)]^T$, dengan $1, 2, \dots, n$ adalah keberangkatan yang sebenarnya dan $n + 1, n + 2, \dots, n + r$ adalah keadaan pembantu, yang diinterpretasikan sebagai keberangkatan bukan sebenarnya. Vektor $d(k)$ adalah jadwal keberangkatan kereta api yang ke- k . Keadaan awal adalah $x(0)$, meskipun keberangkatan kereta ke- 0 tidak mempunyai interpretasi yang jelas. Karena pengamatan hanya dapat dilakukan untuk x_1, \dots, x_n sehingga matriks $C = [\varepsilon_n \ \dots \ \varepsilon_{n \times r}]$. Jadi, $y(k)$ adalah keberangkatan kereta sebenarnya (Alfiah, 2011).

2.4.2 Jadwal Keberangkatan

Vektor $d(k) \in \mathbb{R}_{max}^n$ berisi jadwal keberangkatan semua kereta yang ke- k . Karena kereta api dijadwal berangkat modulo T , sehingga dalam aljabar max-plus diperoleh hubungan

$$d(k) = d(0) \otimes T^{\otimes k}$$

untuk setiap k . Persamaan diatas juga dapat ditulis

$$d(k) = d(0) + (k.T) \otimes \eta$$

dimana $\eta = [0, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}_{max}^n$, merupakan vektor satuan dalam aljabar max-plus. Jadi, dalam aljabar biasa ditulis sebagai

$$d(k) = (d_1(0) + (k.T), d_2(0) + (k.T), \dots, d_n(0) + (k.T))^T.$$

Jadwal keberangkatan dikatakan bermanfaat jika memungkinkan bagi suatu sistem untuk beroperasi menggunakan jadwal keberangkatan ini. Jadwal keberangkatan yang seperti ini disebut realistik.

Definisi 2.15 (Alfiah, 2011)

Jadwal keberangkatan d adalah realistik jika untuk setiap $k \geq 0$

$$A \otimes d(k) \leq d(k + 1).$$

Dikatakan suatu sistem adalah realistik jika sistem tersebut mempunyai suatu jadwal keberangkatan kereta api yang realistik.

Definisi 2.16 (Alfiah, 2011)

Vektor keterlambatan $z(k)$ untuk $k \geq 0$ didefinisikan sebagai

$$z(k) = x(k) - d(k)$$

Keterlambatan terbesar pada keberangkatan yang ke- k dinotasikan sebagai

$$\|z(k)\|_{\oplus} = \bigoplus_{i=0}^n z_i(k).$$

Berikut ini diberikan suatu teorema yang menyatakan bahwa keterlambatan dari beberapa kereta api tidak akan menyebabkan meningkatnya vektor keterlambatan.

Teorema 2.17 (Alfiah, 2011)

Untuk setiap kondisi awal $x(0)$ dalam suatu sistem dengan jadwal keberangkatan yang realistis, maksimum keterlambatan tidak akan meningkat, yaitu untuk setiap $k \geq 0$

$$\|z(k + 1)\|_{\oplus} \leq \|z(k)\|_{\oplus}.$$

2.4.3 Kestabilan sistem

Kestabilan sangat diperlukan untuk menguji suatu model sistem yang telah dibuat stabil atau tidak. Berikut diberikan definisi dan teorema untuk menguji kestabilan sistem.

Definisi 2.18 (Alfiah, 2011)

Suatu sistem dengan jadwal keberangkatan dikatakan stabil jika setiap keterlambatan keberangkatan awal sudah tidak terjadi lagi setelah beberapa keberangkatan berikutnya. Dengan kata lain, untuk semua x_0 ada suatu $k(x_0) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\|z(k)\|_{\oplus} = 0$ untuk setiap $k \geq k(x_0)$.

Selanjutnya diberikan suatu teorema yang memberikan syarat perlu dan cukup suatu sistem stabil.

Teorema 2.19 (Alfiah, 2011)

Sistem adalah stabil bila dan hanya bila $\lambda < T$. Dimana λ adalah nilai eigen dari matriks A .

BAB 3

METODE PENELITIAN

3.1. Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini adalah

1. Pengumpulan Data

Tahap ini dilakukan pengumpulan data dan penggalian sumber informasi yang berkaitan dengan penelitian ini, meliputi denah rute jalur kereta api, banyaknya kereta api yang beroperasi, jadwal waktu kedatangan dan keberangkatan kereta api di setiap stasiun.

2. Penyusunan Graf Berarah

Tahap ini dilakukan penyusunan graf berarah dari rute jalur kereta api di Jawa Timur dimana *node* menyatakan stasiun dan bobot *arc* menyatakan waktu tempuh antar stasiun.

3. Pembentukan dan Analisis Model.

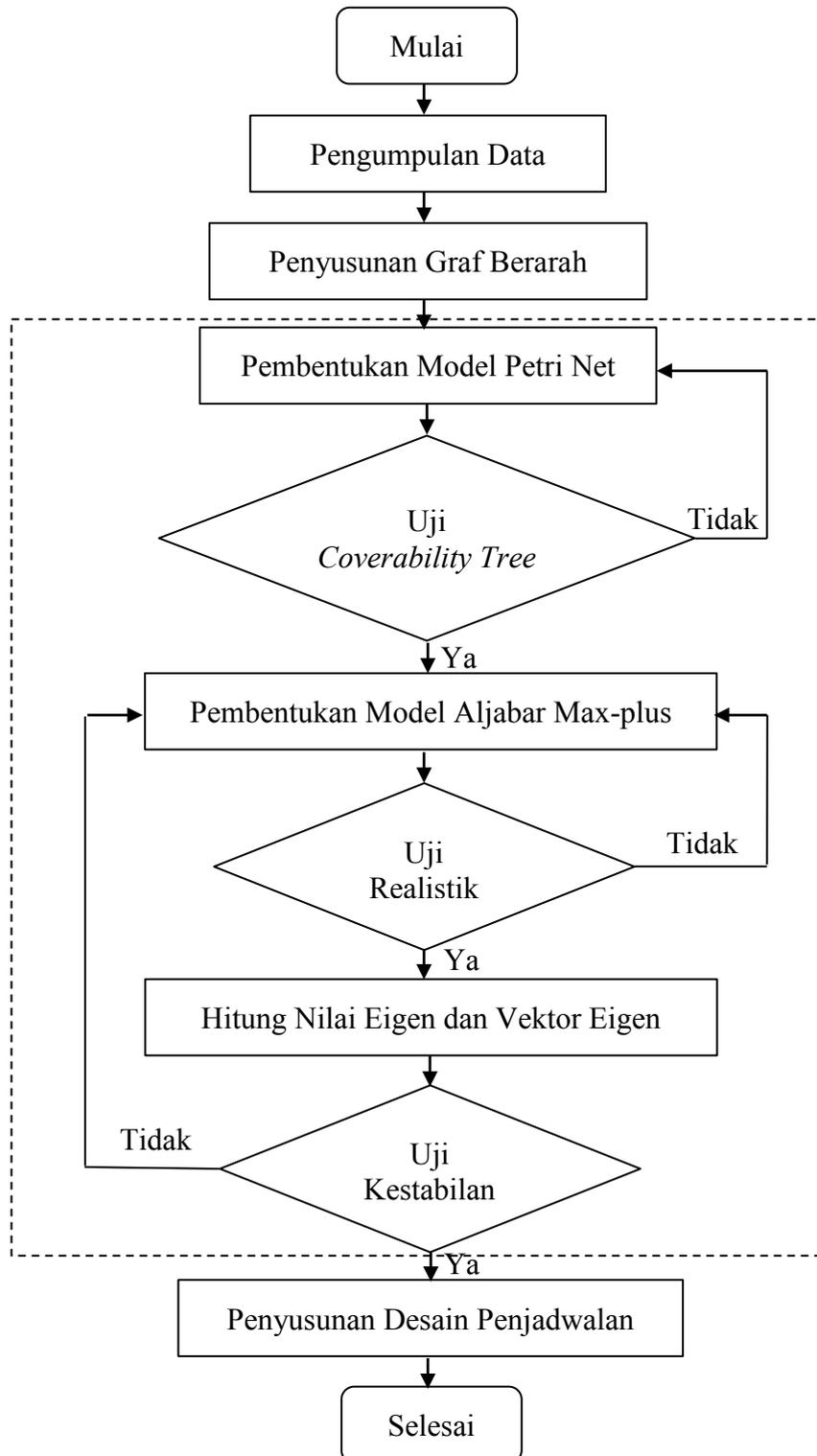
Tahap ini dilakukan pembentukan model petri net dan aljabar max-plus, kemudian di analisa dengan menguji *coverability tree*, kerealistikan, dan kestabilan terhadap model sistem jaringan.

4. Penyusunan Desain Penjadwalan

Tahap ini dilakukan penyusunan desain penjadwalan dari hasil perhitungan nilai eigen dan vektor eigen, kemudian dibandingkan dengan realita jadwal keberangkatan sebenarnya.

3.2 Diagram Alir

Diagram alir penelitian ini adalah



Gambar 3.1 Diagram Alir Tahapan Penelitian

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai aplikasi petri net dan aljabar max-plus pada sistem jaringan kereta api di Jawa Timur. Aplikasi yang dibahas dimulai dengan penyajian data – data pendukung yang diperlukan untuk pembentukan model. Model dihasilkan dalam bentuk petri net yang merepresentasikan kondisi sistem jaringan kereta api di Jawa Timur. Selanjutnya, dari model petri net dimodelkan menggunakan aljabar max-plus untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen dengan menggunakan aljabar max-plus. Hasil dari nilai eigen dan vektor eigen ini yang digunakan untuk menyusun desain jadwal kereta api di Jawa Timur. Sedangkan analisa yang dapat dilakukan dengan menguji *coverability tree*, kerealistikan, dan kestabilan model sistem jaringan kereta api di Jawa Timur.

4.1. Sistem Jaringan Kereta api di Jawa Timur

Sistem jaringan kereta api di Jawa Timur mempunyai 5 jalur, yaitu : jalur Surabaya – Madiun PP, jalur Malang – Madiun PP, jalur Surabaya – Cepu PP, jalur Surabaya – Banyuwangi PP, dan jalur Surabaya – Malang PP. Jalur Surabaya – Madiun PP merupakan lintas daerah operasi (DAOP) VIII Surabaya dan daerah operasi (DAOP) VII Madiun. Daerah operasi (DAOP) VIII Surabaya meliputi stasiun Gubeng (SGU) – Mojokerto (MR) dan daerah operasi (DAOP) VII Madiun meliputi stasiun Curahmalang (CM) – Madiun (MD). Jalur Malang – Madiun PP merupakan lintas daerah operasi (DAOP) VIII Surabaya dan daerah operasi (DAOP) VII Madiun. Daerah operasi (DAOP) VIII Surabaya meliputi stasiun Malang (ML) – Blitar (BL) dan daerah operasi (DAOP) VII Madiun meliputi stasiun Rejotangan (RJ) – Madiun (MD). Jalur Surabaya – Cepu PP merupakan lintas daerah operasi (DAOP) VIII Surabaya dan daerah operasi (DAOP) IV Semarang. Daerah operasi (DAOP) VIII Surabaya meliputi stasiun Surabaya Pasarturi (SBI) – Kapas (KPS) dan daerah operasi (DAOP) IV Semarang meliputi stasiun Bojonegoro (BJ) – Cepu (CP). Jalur Gubeng – Banyuwangi PP merupakan lintas daerah operasi (DAOP) VIII Surabaya dan

daerah operasi (DAOP) IX Jember. Daerah operasi (DAOP) VIII Surabaya meliputi stasiun Gubeng (SGU) – Bangil (BG) dan daerah operasi (DAOP) IX Jember meliputi stasiun Pasuruan (PS) – Banyuwangi (BW). Jalur Surabaya – Malang PP merupakan daerah operasi (DAOP) VIII Surabaya.

Penyajian data – data pendukung pada sistem jaringan kereta api di Jawa Timur diperoleh dari Grafik Perjalanan Kereta Api (GEPEKA) PT. KAI tahun 2013 – 2014, meliputi : stasiun antara, jadwal kedatangan dan keberangkatan kereta api di stasiun antara. Berikut data – data penunjang pada sistem jaringan kereta api di Jawa Timur.

1. PT KAI DAOP IV Semarang

- i. Jadwal kedatangan dan keberangkatan kereta api di setiap stasiun.
(Lampiran 1)
- ii. Stasiun lintas di Daerah Operasi IV Semarang
Stasiun Bojonegoro (BJ), Stasiun Kalitidu (KTL), Stasiun Tobo (TB),
Stasiun Cepu (CP).

2. PT KAI DAOP VII Madiun

- i. Jadwal kedatangan dan keberangkatan kereta api di setiap stasiun.
(Lampiran 1)
- ii. Stasiun lintas di Daerah Operasi VII Madiun
 - a. Jalur kereta api Madiun – Kertosono
Stasiun Madiun (MD), Stasiun Babadan (BBD), Stasiun Caruban (CRB), Stasiun Saradan (SRD), Stasiun Wilangan (WLG), Stasiun Bagor (BGR), **Stasiun Nganjuk (NJK)**, Stasiun Sukomoro (SKM), Stasiun Baron (BRN), **Stasiun Kertosono (KTS)**,
 - b. Jalur kereta api Kertosono – Wonokromo
Stasiun Kertosono (KTS), Stasiun Sembung (SMB), **Stasiun Jombang (JG)**, Stasiun Peterongan (PTR), Stasiun Sumobito (SBO), Stasiun Curahmalang (CRM).
 - c. Jalur kereta api Kertosono – Bangil
Stasiun Kertosono (KTS), Stasiun Purwoasri (PWA), Stasiun Papar (PPR), Stasiun Minggiran (MGN), Stasiun Susuhan (SS), **Stasiun Kediri (KD)**, Stasiun Ngadiluwih (NDL), Stasiun Kras (KRS),

Stasiun Ngujang (NJG), **Stasiun Tulungagung (TA)**, Stasiun Sumbergempol (SBL), Stasiun Ngunut (NT), Stasiun Rejotangan (RJ).

3. PT KAI DAOP VIII Surabaya

i. Jadwal kedatangan dan keberangkatan kereta api di setiap stasiun. (Lampiran 1)

ii. Stasiun lintas di Daerah Operasi VIII Surabaya

a. Jalur kereta api Surabaya Pasarturi – Cepu

Stasiun Surabaya Pasarturi (SBI), Stasiun Tandes (TES), Stasiun Kandangan (KDA), Stasiun Benowo (BNW), Stasiun Cerme (CME), Stasiun Duduk (DD), **Stasiun Lamongan (LMG)**, Stasiun Sumlaran (SLR), Stasiun Pucuk (PC), Stasiun Gembong (GEB), **Stasiun Babat (BBT)**, Stasiun Bowerno (BWO), Stasiun Sumberrejo (SRJ), Stasiun Kapas (KPS).

b. Jalur kereta Surabaya Kota – Kertosono

Stasiun Surabaya Kota (SB), **Stasiun Gubeng (SGU)**, Stasiun Wonokromo (WO), Stasiun Sepanjang (SPJ), Stasiun Boharan (BH), Stasiun Krian (KRN), Stasiun Tarik (TRK), **Stasiun Mojokerto (MR)**.

c. Jalur Wonokromo – Bangil

Stasiun Wonokromo (WO), Stasiun Waru (WR), Stasiun Gedangan (GDG), Stasiun Sidoarjo (SDA), Stasiun Tanggulangin (TGA), Stasiun Porong (PR), **Stasiun Bangil (BG)**.

d. Jalur Bangil – Blitar

Stasiun Bangil (BG), Stasiun Wonokerto (WN), Stasiun Sukorejo (SKJ), Stasiun Sengon (SN), Stasiun Lawang (LW), Stasiun Singosari (SGS), Stasiun Blimbing (BMG), **Stasiun Malang (ML)**, Stasiun Malang Kotalama (MLK), Stasiun Pakisaji (PSI), Stasiun Kepanjen (KPJ), Stasiun Ngebruk (NB), Stasiun Sumberpucung (SBP), Stasiun Pogajih (PGJ), Stasiun Kesamben (KSB), Stasiun Wlingi (WG), Stasiun Talun (TAL), Stasiun Garum (GRM), **Stasiun Blitar (BL)**.

4. PT KAI DAOP IX Jember

- i. Jadwal kedatangan dan keberangkatan kereta api di setiap stasiun. (Lampiran 1)
- ii. Stasiun lintas di Daerah Operasi VIII Surabaya
 - a. Jalur kereta api Bangil – Banyuwangi
Stasiun Pasuruan (PS), Stasiun Rejoso (RO), Stasiun Grati (GI), Stasiun Bayeman (BYM), **Stasiun Probolinggo (PB)**, Stasiun Leces (LEC), Stasiun Malasan (MLS), Stasiun Ranuyoso (RN), Stasiun Klakah (KK), Stasiun Randuagung (RDA), Stasiun Jatiroto (JTR), Stasiun Tanggul (TGL), Stasiun Bangsalsari (BSS), Stasiun Rambipuji (RBP), Stasiun Mangli (MI), **Stasiun Jember (JR)**, Stasiun Arjasa (AJ), Stasiun Kotok (KTK), Stasiun Kalisat (KLT), Stasiun Ledokombo (LDO), Stasiun Sempolan (SPL), Stasiun Garahan (GRH), Stasiun Mrawan (MRW), Stasiun Kalibaru (KBR), Stasiun Glenmore (GLM), Stasiun Sumberwadung (SWD), Stasiun Kalisetail (KSL), Stasiun Temuguruh (TGR), Stasiun Singojuruh (SGJ), Stasiun Rogojampi (RGP), Stasiun Karangasem (KNE), Stasiun Argopuro (AGO), **Stasiun Banyuwangi (BW)**.

Diantara stasiun – stasiun tersebut terdapat stasiun transfer, yaitu stasiun yang memungkinkan penumpang berpindah dari suatu jalur ke jalur lain, dan memungkinkan penumpang untuk berpindah dari suatu kelas kereta api ke kelas kereta api lain. Kereta api kelas Eksekutif dan Bisnis hanya singgah di stasiun – stasiun tertentu (stasiun yang dicetak tebal), sedangkan kereta api kelas Ekonomi singgah di setiap stasiun. Oleh karena itu, penentuan stasiun transfer harus merupakan stasiun yang dapat disinggahi oleh semua kelas kereta api, yaitu Eksekutif, Bisnis, dan Ekonomi.

Berdasarkan ketentuan di atas, jalur 1 terdapat 6 stasiun transfer, yaitu stasiun Madiun (MD), stasiun Nganjuk (NJK), stasiun Kertosono (KTS), stasiun Jombang (JG), stasiun Mojokerto (MR), dan stasiun Gubeng (SGU). Jalur 2 terdapat 7 stasiun transfer, yaitu stasiun Madiun (MD), stasiun Nganjuk (NJK), stasiun Kertosono (KTS), stasiun Kediri (KD), stasiun Tulungagung (TA), stasiun

Blitar (BL), dan stasiun Malang (ML). Jalur 3 terdapat 5 stasiun transfer, yaitu stasiun Cepu (CP), stasiun Bojonegoro (BJ), stasiun Babat (BBT), stasiun Lamongan (LMG), dan stasiun Surabaya Pasarturi (SBI). Jalur 4 terdapat 5 stasiun transfer, yaitu stasiun Banyuwangi (BW), stasiun Jember (JR), stasiun Probolinggo (PB), stasiun Bangil (BG), dan stasiun Gubeng (SGU). Jalur 5 terdapat 3 stasiun, yaitu stasiun Gubeng (SGU), stasiun Bangil (BG), dan stasiun Malang (ML).

4.2. Graf Berarah

Dalam penyusunan graf berarah dibutuhkan data – data berupa waktu tempuh antar stasiun sebagai bobot antar *vertex*. Untuk menentukan waktu tempuh antar stasiun didasarkan pada waktu tempuh semua kereta api yang beroperasi setiap hari dalam bentuk interval waktu, dimana penentuan batas bawah adalah waktu tempuh tercepat sedangkan batas atas adalah waktu tempuh rata – rata pada setiap lintasan. Sedangkan penentuan jadwal keberangkatan diperoleh dari keberangkatan kereta api pertama dan terakhir dari waktu acuan masing – masing di setiap lintasan setelah di konversi dalam satuan menit. Waktu tempuh dan jadwal keberangkatan kereta api dinyatakan dalam bentuk interval dalam satuan menit. Selain waktu tempuh, juga perlu diperhatikan waktu perpindahan penumpang dan waktu tunggu kereta api lain. Waktu perpindahan penumpang dan waktu tunggu kereta api dalam kereta api yang sama dianggap nol, karena penumpang tidak mengalami perpindahan dan kereta api tidak menunggu kereta lain. Sedangkan perpindahan penumpang dan waktu tunggu kereta api yang berbeda diperkirakan seminimal mungkin.

Data waktu tempuh antar stasiun kereta api di Jawa Timur diperoleh dari Grafik Perjalanan Kereta Api (GEPEKA) PT. KAI 2013 – 2014. Dalam penelitian ini jumlah kereta api yang beroperasi pada setiap lintasan ditentukan dengan menggunakan dua waktu acuan, yaitu pukul 5:00 – 8:00 WIB dan pukul 10:00 – 13:00 WIB. Waktu acuan pukul 5:00 – 8:00 WIB digunakan untuk menentukan jumlah kereta api yang beroperasi di setiap jalur menuju Surabaya dengan jadwal keberangkatan kereta api pukul 3:00 – 9:00 WIB dan waktu acuan pukul 10:00 – 13:00 WIB digunakan untuk menentukan jumlah kereta api yang beroperasi di

setiap jalur meninggalkan Surabaya dengan jadwal keberangkatan kereta api pukul 9:00 – 15:00 WIB. Selanjutnya, jadwal keberangkatan kereta api di asumsikan beroperasi dengan suatu jadwal keberangkatan secara periodik dengan periode 360 menit. Berikut ini diberikan Tabel 4.1 s/d 4.5 jadwal keberangkatan, waktu tempuh, dan jumlah kereta api yang beroperasi di setiap jalur di Jawa Timur.

Tabel 4.1 Jalur 1: Surabaya – Madiun PP

Dari	Tujuan	Interval Jadwal Keberangkatan	Interval Waktu Tempuh	Jumlah KA
Madiun	Nganjuk	[25,125]	$t_1 = [39,48]$	1
Nganjuk	Kertosono	[24,197]	$t_2 = [17,22]$	2
Kertosono	Jombang	[42,235]	$t_3 = [14,19]$	3
Jombang	Mojokerto	[60,256]	$t_4 = [19,29]$	3
Mojokerto	Gubeng	[83,306]	$t_5 = [33,52]$	4
Gubeng	Mojokerto	[20,285]	$t_6 = [40,53]$	2
Mojokerto	Jombang	[33,337]	$t_7 = [22,31]$	3
Jombang	Kertosono	[2,321]	$t_8 = [14,18]$	3
Kertosono	Nganjuk	[16,345]	$t_9 = [17,21]$	1
Nganjuk	Madiun	[37,284]	$t_{10} = [39,45]$	2

Berdasarkan Tabel 4.1 jadwal keberangkatan kereta api dari stasiun Madiun menuju stasiun Nganjuk pada jalur 1 pada pukul 3:00 – 9:00 WIB dimulai pukul 3:25 hingga berakhir pukul 5:05 dengan waktu tempuh tercepat 39 menit dan waktu tempuh rata – rata 48 menit pada setiap harinya dan jumlah kereta api yang beroperasi pada pukul 5:00 – 8:00 WIB ada satu kereta api. Sedangkan, jadwal keberangkatan kereta api dari stasiun Gubeng menuju stasiun Mojokerto pada pukul 9:00 – 15:00 WIB dimulai pukul 9:20 hingga berakhir pukul 13:45 dengan waktu tempuh tercepat 40 menit dan waktu tempuh rata – rata 53 menit pada setiap harinya dan jumlah kereta api yang beroperasi pada pukul 10:00 – 13.00 WIB ada dua kereta api. Selanjutnya, penjelasan pada setiap lintasan juga berlaku aturan tersebut.

Tabel 4.2 Jalur 2 : Malang – Madiun PP

Dari	Tujuan	Interval Jadwal Keberangkatan	Interval Waktu Tempuh	Jumlah KA
Madiun	Nganjuk	[75,275]	$t_{11} = [40,44]$	2
Nganjuk	Kertosono	[5,318]	$t_{12} = [18,25]$	2
Kertosono	Kediri	[1,356]	$t_{13} = [32,36]$	3
Kediri	T. Agung	[12,294]	$t_{14} = [35,42]$	1
T. Agung	Blitar	[51,349]	$t_{15} = [42,49]$	1
Blitar	Malang	[21,290]	$t_{16} = [108,134]$	3
Malang	Blitar	[83,304]	$t_{17} = [117,132]$	1
Blitar	T. Agung	[62,343]	$t_{18} = [42,49]$	2
T. Agung	Kediri	[106,343]	$t_{19} = [38,42]$	2
Kediri	Kertosono	[145,330]	$t_{20} = [29,34]$	3
Kertosono	Nganjuk	[174,330]	$t_{21} = [21,23]$	2
Nganjuk	Madiun	[195,351]	$t_{21} = [38,44]$	2

Berdasarkan Tabel 4.2 jadwal keberangkatan kereta api dari stasiun Madiun menuju stasiun Nganjuk pada jalur 2 pada pukul 3:00 – 9:00 WIB dimulai pukul 4:15 hingga berakhir pukul 7:35 dengan waktu tempuh tercepat 40 menit dan waktu tempuh rata – rata 44 menit pada setiap harinya dan jumlah kereta api yang beroperasi pada pukul 5:00 – 8:00 WIB ada dua kereta api. Sedangkan, jadwal keberangkatan kereta api dari stasiun Malang menuju stasiun Blitar pada pukul 9:00 – 15:00 WIB dimulai pukul 10:23 hingga berakhir pukul 14:04 dengan waktu tempuh tercepat 117 menit dan waktu tempuh rata – rata 132 menit pada setiap harinya dan jumlah kereta api yang beroperasi pada pukul 10:00 – 13.00 WIB ada satu kereta api.

Tabel 4.3 Jalur 3 : Surabaya – Cepu PP

Dari	Tujuan	Interval Jadwal Keberangkatan	Interval Waktu Tempuh	Jumlah KA
Cepu	Bojonegoro	[63,232]	$t_{23} = [31,37]$	3
Bojonegoro	Babat	[100,269]	$t_{24} = [25,33]$	3
Babat	Lamongan	[128,297]	$t_{25} = [20,29]$	4
Lamongan	Pasarturi	[30,360]	$t_{26} = [24,45]$	4
Pasarturi	Lamongan	[55,315]	$t_{27} = [38,50]$	1
Lamongan	Babat	[78,116]	$t_{28} = [20,29]$	2
Babat	Bojonegoro	[6,154]	$t_{29} = [26,37]$	2
Bojonegoro	Cepu	[32,154]	$t_{30} = [27,33]$	1

Berdasarkan Tabel 4.3 jadwal keberangkatan kereta api dari stasiun Cepu menuju stasiun Bojonegoro pada pukul 3:00 – 9:00 WIB dimulai pukul 4:03 hingga berakhir pukul 6:52 dengan waktu tempuh tercepat 31 menit dan waktu tempuh rata – rata 37 menit pada setiap harinya dan jumlah kereta api yang beroperasi pada pukul 5:00 – 8:00 WIB ada tiga kereta api. Sedangkan, jadwal keberangkatan kereta api dari stasiun Surabaya Pasarturi menuju stasiun Lamongan pada pukul 9:00 – 15:00 WIB dimulai pukul 9:30 hingga berakhir pukul 15:00 dengan waktu tempuh tercepat 40 menit dan waktu tempuh rata – rata 53 menit pada setiap harinya dan jumlah kereta api yang beroperasi pada pukul 10:00 – 13.00 WIB ada satu kereta api.

Tabel 4.4 Jalur 4 : Surabaya – Banyuwangi PP

Dari	Tujuan	Interval Jadwal Keberangkatan	Interval Waktu Tempuh	Jumlah KA
Banyuwangi	Jember	[135,330]	$t_{31} = [160,175]$	1
Jember	Probolinggo	[130,305]	$t_{32} = [103,112]$	1
Probolinggo	Bangil	[0,353]	$t_{33} = [65,68]$	1
Bangil	Gubeng	[30,298]	$t_{34} = [49,50]$	1
Gubeng	Bangil	[0,295]	$t_{35} = [55,56]$	1
Bangil	Probolinggo	[55,355]	$t_{36} = [66,69]$	1
Probolinggo	Jember	[126,360]	$t_{37} = [100,115]$	1
Jember	Banyuwangi	[245,360]	$t_{38} = [151,165]$	1

Berdasarkan Tabel 4.4 jadwal keberangkatan kereta api dari stasiun Banyuwangi menuju stasiun Jember pada pukul 3:00 – 9:00 WIB dimulai pukul 5:15 hingga berakhir pukul 8:30 dengan waktu tempuh tercepat 160 menit dan waktu tempuh rata – rata 175 menit pada setiap harinya dan jumlah kereta api yang beroperasi pada pukul 5:00 – 8:00 WIB ada satu kereta api. Sedangkan, jadwal keberangkatan kereta api dari stasiun Gubeng menuju stasiun Bangil pada jalur 4 pada pukul 9:00 – 15:00 WIB dimulai pukul 9:00 hingga berakhir pukul 13:55 dengan waktu tempuh tercepat 55 menit dan waktu tempuh rata – rata 56 menit pada setiap harinya dan jumlah kereta api yang beroperasi pada pukul 10:00 – 13.00 WIB ada satu kereta api.

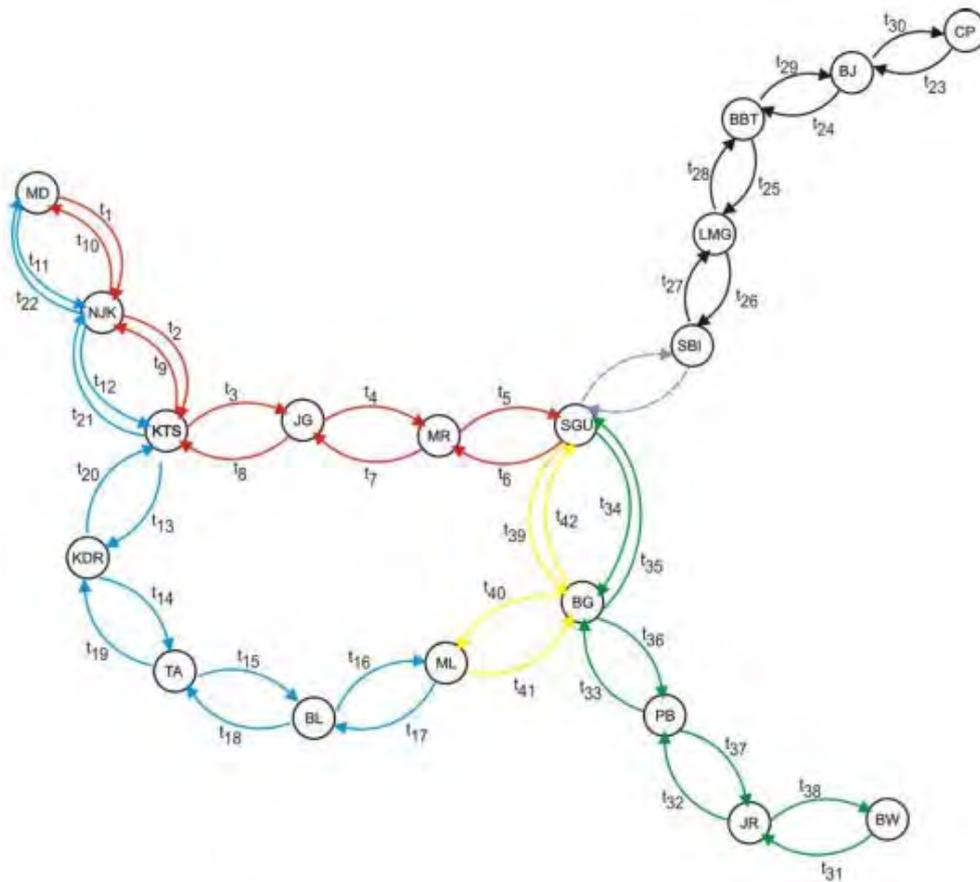
Tabel 4.5 Jalur 5 : Surabaya – Malang PP

Dari	Tujuan	Interval Jadwal Keberangkatan	Interval Waktu Tempuh	Jumlah kereta
Gubeng	Bangil	[120,340]	$t_{39} = [48,53]$	2
Bangil	Malang	[170,199]	$t_{40} = [63,75]$	1
Malang	Bangil	[80,220]	$t_{41} = [68,76]$	2
Bangil	Gubeng	[178,315]	$t_{42} = [45,52]$	2

Berdasarkan Tabel 4.5 jadwal keberangkatan kereta api dari stasiun Malang menuju stasiun Bangil pada pukul 3:00 – 9:00 WIB dimulai pukul 4:20 hingga berakhir pukul 6:40 dengan waktu tempuh tercepat 68 menit dan waktu tempuh rata – rata 76 menit pada setiap harinya dan jumlah kereta api yang beroperasi pada pukul 5:00 – 8:00 WIB ada dua kereta api. Sedangkan, jadwal keberangkatan kereta api dari stasiun Gubeng menuju stasiun Bangil pada pukul 9:00 – 15:00 WIB dimulai pukul 11:00 hingga berakhir pukul 14:40 dengan waktu tempuh tercepat 48 menit dan waktu tempuh rata – rata 53 m enit pada setiap harinya dan jumlah kereta api yang beroperasi pada pukul 10:00 – 13.00 WIB ada dua kereta api.

Dari data yang diperoleh dapat digambarkan graf berarah dengan bobot setiap *edge (arc)* adalah waktu tempuh dan *vertex – vertexnya* menyatakan stasiun transfer. Gambar dari graf dapat dilihat pada Gambar 4.1.

Graf pada Gambar 4.1, *edge* warna merah menyatakan jalur 1, *edge* biru muda menyatakan jalur 2, *edge* warna hitam menyatakan jalur 3, *edge* warna hijau menyatakan jalur 4, *edge* warna kuning menyatakan jalur 5, sedangkan *edge* warna ungu menyatakan perpindahan penumpang dari Stasiun Gubeng (SGU) menuju stasiun Surabaya Pasarturi (SBI) atau sebaliknya. Selanjutnya, nilai dari bobot-bobot pada tiap – tiap jalur dilabelkan dengan t_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, 42$ sedangkan waktu tempuh dari stasiun Gubeng menuju stasiun Surabaya Pasarturi diberikan interval waktu [10,15] menit. Pelabelan bobot pada setiap *edge* lebih lengkapnya dapat dilihat dari Tabel 4.1 s/d 4.5.



Keterangan :

Warna arc

SGU – MD : Jalur 1

ML – MD : Jalur 2

SBI – CP : Jalur 3

SGU – BW : Jalur 4

SGU – ML : Jalur 5

SGU – SBI : Integrasi jalur

Node

SGU : Gubeng

SBI : Pasarturi

MR : Mojokerto

JG : Jombang

KTS : Kertosono

NJK : Nganjuk

MD : Madiun

KDR : Kediri

TA : Tulungagung

BL : Blitar

ML : Malang

LMG : Lamongan

BBT : Babat

BJ : Bojonegoro

CP : Cepu

BG : Bangil

PB : Probolinggo

JR : Jember

BW : Banyuwangi

Gambar 4.1 Graf Berarah Jalur Kereta Api di Jawa Timur

4.3. Aturan Sinkronisasi

Sebelum melakukan penyusunan model sistem jaringan kereta api di Jawa Timur terlebih dahulu ditentukan aturan sinkronisasi. Hal ini dimaksudkan untuk menjamin penumpang dapat berpindah dari kereta api yang berbeda dan menjamin keamanan dalam satu jalur tidak terdapat dua kereta api secara bersamaan. Berikut aturan sinkronisasi diantara kereta api berdasarkan beberapa jalur diberikan sebagai berikut.

Jalur 1 :

- i. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari MD_1 menuju NJK_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari NJK_1 menuju MD_1 .
- ii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari NJK_1 menuju KTS_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari MD_1 menuju NJK_1 .
- iii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari KTS_1 menuju JG harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari NJK_1 menuju KTS_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari KD menuju KTS_2 .
- iv. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari JG menuju MR harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari KTS_1 menuju JG.
- v. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari MR menuju SGU_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari JG menuju MR.
- vi. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari SGU_1 menuju MR harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 3)$ dari MR menuju SGU_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari BG_1 menuju SGU_2 .
- vii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari MR menuju JG harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari SGU_1 menuju MR.

- viii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari JG menuju KTS_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari MR menuju JG.
- ix. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari KTS_1 menuju NJK_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari JG menuju KTS_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari NJK_2 menuju KTS_2 .
- x. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari NJK_1 menuju MD_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari KTS_1 menuju NJK_1 .

Jalur 2 :

- i. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari MD_2 menuju NJK_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari NJK_2 menuju MD_2 .
- ii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari NJK_2 menuju KTS_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari MD_2 menuju NJK_2 .
- iii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari KTS_2 menuju KD harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari NJK_2 menuju KTS_2 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari JG menuju KTS_1 .
- iv. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari KD menuju TA harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari KTS_2 menuju KD.
- v. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari TA menuju BL harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari KD menuju TA.
- vi. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari BL menuju ML_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari TA menuju BL.
- vii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari ML_1 menuju BL harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari BL menuju ML_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari BG_2 menuju ML_2 .

- viii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari BL menuju TA harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari ML_1 menuju BL.
- ix. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari TA menuju KD harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari BL menuju TA.
- x. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari KD menuju KTS_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari TA menuju KD.
- xi. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari KTS_2 menuju NJK_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari KD menuju KTS_2 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari NJK_1 menuju KTS_2 .
- xii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari NJK_2 menuju MD_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari KTS_2 menuju NJK_2 .

Jalur 3 :

- i. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari CP menuju BJ harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari BJ menuju CP.
- ii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari BJ menuju BBT harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari BJ menuju BBT.
- iii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari BBT menuju LMG harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari CP menuju LMG.
- iv. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari LMG menuju SBI harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 3)$ dari BBT menuju LMG.
- v. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari SBI menuju LMG harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 3)$ dari LMG menuju SBI dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari BG_2 menuju SGU_4 ditambah [10,15] menit.

- vi. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari LMG menuju BBT harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari SBI menuju LMG.
- vii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari BBT menuju BJ harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari LMG menuju BBT.
- viii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari BJ menuju CP harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari BBT menuju BJ.

Jalur 4 :

- i. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari BW menuju JR harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari JR menuju BW.
- ii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari JR menuju PB harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari PB menuju BG_1 .
- iii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari BG_1 menuju SGU_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari PB menuju BG_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari SGU_4 menuju BG_2 .
- iv. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari SGU_2 menuju BG_1 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari BG_1 menuju SGU_2 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari MR menuju SBY_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 3)$ dari MR menuju SGU_1 .
- v. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari BG_1 menuju PB harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari SGU_2 menuju BG_1 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari ML_2 menuju BG_2 .
- vi. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari PB menuju JR harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari BG_1 menuju PB.
- vii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari JR menuju BW harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari PB menuju JR.

Jalur 5 :

- i. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari SGU_3 menuju BG_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari BG_2 menuju SGU_3 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 3)$ dari LMG menuju SBI ditambah $[10,15]$ menit.
- ii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari BG_2 menuju ML_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari SGU_3 menuju BG_2 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari PB menuju BG_1 .
- iii. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari ML_2 menuju BG_2 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari BG_2 menuju ML_2 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 2)$ dari BG menuju ML_1 .
- iv. Keberangkatan kereta api ke- $(k + 1)$ dari BG_2 menuju SGU_3 harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- $(k - 1)$ dari ML_2 menuju BG_2 dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat ke- k dari SGU_2 menuju BG_1 .

Selanjutnya dari informasi jadwal keberangkatan dan lamanya waktu perjalanan serta aturan sinkronisasi yang telah diberikan dibuat suatu model sistem jaringan kereta api di Jawa Timur. Berikut ini diberikan pendefinisian variabel pada model sistem jaringan kereta api di Jawa Timur.

Tabel 4.6 Pendefinisian Variabel

Var.	Definisi Keberangkatan Kereta Api dari :	Var.	Definisi Keberangkatan Kereta Api dari :
$x_1(k)$	MD_1 ke NJK_1 pada saat ke- k	$x_{22}(k)$	NJK_2 ke MD_2 pada saat ke- k
$x_2(k)$	NJK_1 ke KTS_1 pada saat ke- k	$x_{23}(k)$	CP ke BJ pada saat ke- k
$x_3(k)$	KTS_1 ke JG pada saat ke- k	$x_{24}(k)$	BJ ke BBT pada saat ke- k
$x_4(k)$	JG ke MR pada saat ke- k	$x_{25}(k)$	BBT ke LMG pada saat ke- k
$x_5(k)$	MR ke SBY_1 pada saat ke- k	$x_{26}(k)$	LMG ke SBI pada saat ke- k
$x_6(k)$	SBY_1 ke MR pada saat ke- k	$x_{27}(k)$	SBI ke LMG pada saat ke- k
$x_7(k)$	MR ke JG pada saat ke- k	$x_{28}(k)$	LMG ke BBT pada saat ke- k
$x_8(k)$	JG ke KTS_1 pada saat ke- k	$x_{29}(k)$	BBT ke BJ pada saat ke- k

Tabel 4.6 Pendefinisian Variabel (Lanjutan)

Var.	Definisi Keberangkatan Kereta Api dari :	Var.	Definisi Keberangkatan Kereta Api dari :
$x_9(k)$	KTS_1 ke NJK_1 pada saat ke- k	$x_{30}(k)$	BJ ke CP pada saat ke- k
$x_{10}(k)$	NJK_1 ke MD_1 pada saat ke- k	$x_{31}(k)$	BW ke JR pada saat ke- k
$x_{11}(k)$	MD_2 ke NJK_2 pada saat ke- k	$x_{32}(k)$	JR ke PB pada saat ke- k
$x_{12}(k)$	NJK_2 ke KTS_2 pada saat ke- k	$x_{33}(k)$	PB ke BG_1 pada saat ke- k
$x_{13}(k)$	KTS_2 ke KD pada saat ke- k	$x_{34}(k)$	BG_1 ke SGU_2 pada saat ke- k
$x_{14}(k)$	KD ke TA pada saat ke- k	$x_{35}(k)$	SGU_2 ke BG_1 pada saat ke- k
$x_{15}(k)$	TA ke BL pada saat ke- k	$x_{36}(k)$	BG_1 ke PB pada saat ke- k
$x_{16}(k)$	BL ke ML_1 pada saat ke- k	$x_{37}(k)$	PB ke JR pada saat ke- k
$x_{17}(k)$	ML_1 ke BL pada saat ke- k	$x_{38}(k)$	JR ke BW pada saat ke- k
$x_{18}(k)$	BL ke TA pada saat ke- k	$x_{39}(k)$	SGU_3 ke BG_2 pada saat ke- k
$x_{19}(k)$	TA ke KD pada saat ke- k	$x_{40}(k)$	BG_2 ke ML_2 pada saat ke- k
$x_{20}(k)$	KD ke KTS_2 pada saat ke- k	$x_{41}(k)$	ML_2 ke BG_2 pada saat ke- k
$x_{21}(k)$	KTS_2 ke NJK_2 pada saat ke- k	$x_{42}(k)$	BG_2 ke SGU_3 pada saat ke- k

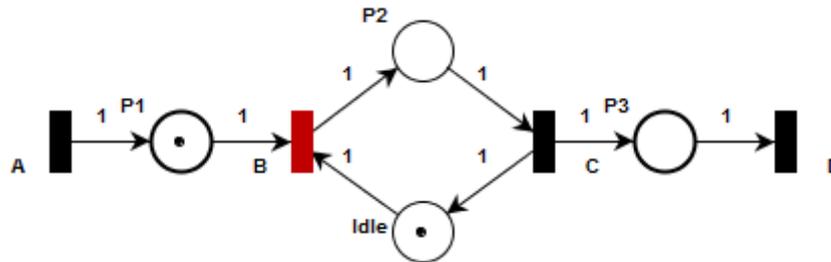
4.4. Model Petri Net

Penyusunan model petri net pada sebuah sistem jaringan kereta api yang pertama dilakukan adalah menentukan *place* dan transisi. *Place* pada petri net merupakan variabel keadaan, dimana kondisi kereta api dapat dijalankan menuju stasiun berikutnya. Jaringan kereta api memiliki sifat yaitu dalam satu lintasan antar stasiun tidak diperkenankan terdapat dua kereta api sekaligus, baik menyusul maupun bersilangan. Sehingga diperlukan aturan yang membuat kondisi tersebut terpenuhi, yaitu kondisi lintasan dalam keadaan kosong kereta dan ada kereta. Selanjutnya, menentukan transisi yang dibutuhkan. Karena *place* merupakan kondisi perjalanan kereta api sehingga transisi yang sesuai dengan model ini adalah representasi setiap stasiun.

Penentuan keadaan awal petri net berkaitan dengan jumlah *token* pada setiap *place*. *Place* yang mempunyai token berarti pada lintasan terdapat kereta api diantara stasiun dan sebaliknya jika *place* tidak mempunyai *token* berarti pada lintasan kereta api tidak terdapat kereta api diantara stasiun.

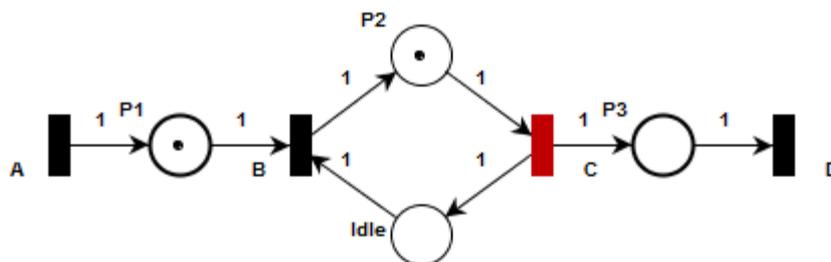
Transisi *A*, *B*, *C* dan *D* menyatakan keberangkatan awal di setiap stasiun, transisi ini akan *enable* dan dapat di *fire* jika kondisi terpenuhi, yaitu jika terdapat kereta api atau *token* pada lintasan atau *place* sebelumnya dan tidak terdapat kereta api atau *token* pada lintasan *place* setelahnya. *Place* P_1 , P_2 , dan P_3

merupakan lintasan kereta api antar stasiun, sedangkan *place Idle* merupakan kondisi tambahan yang menyatakan kondisi lintasan sedang ada kereta api atau tidak ada kereta api.



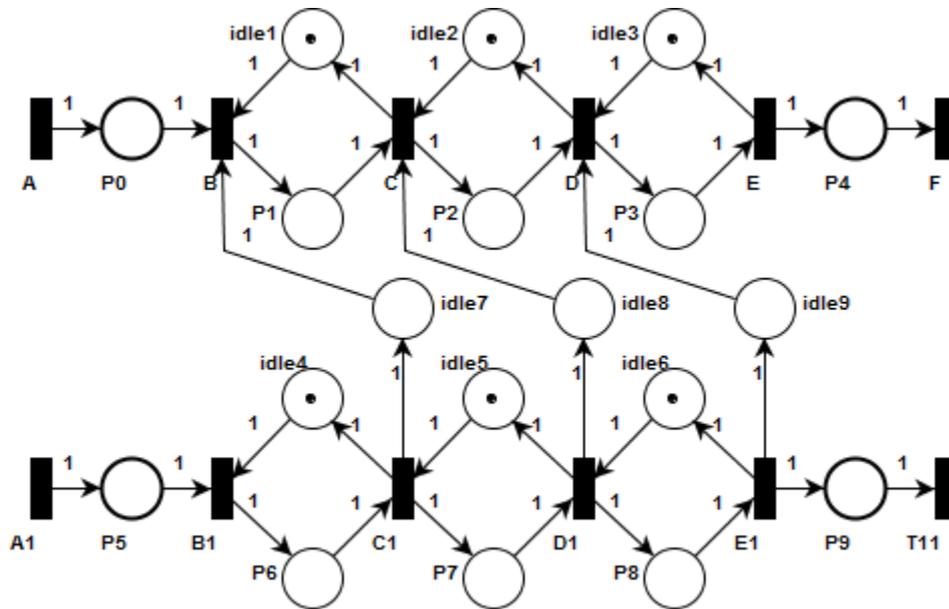
Gambar 4.2 Petri Net Sederhana Untuk Satu Lintasan Kereta Api.

Petri net pada Gambar 4.2 lintasan kereta api yang dipakai adalah lintasan antara stasiun *A* dan *B* hal ini ditunjukkan oleh *place P₁* terdapat sebuah *token*. Transisi *B* adalah satu – satunya transisi yang *enable* yang dapat di *fire* karena terpenuhi kondisi dari *place* masukan yaitu *P₁* dan *Idle*. Selanjutnya, setelah transisi *B* di *fire* maka token pada *place P₁* akan pindah ke *place P₂* dan token pada *place Idle* akan kosong dan jika transisi *A* di *fire* maka *place P₁* akan terisi token kembali sebagaimana terlihat pada Gambar 4.3. Hal ini merepresentasikan lintasan antara stasiun *B* dan *C* terdapat kereta api dan tidak dapat dimasuki kereta api lain meskipun pada lintasan *A* dan *B* terdapat sebuah kereta api.

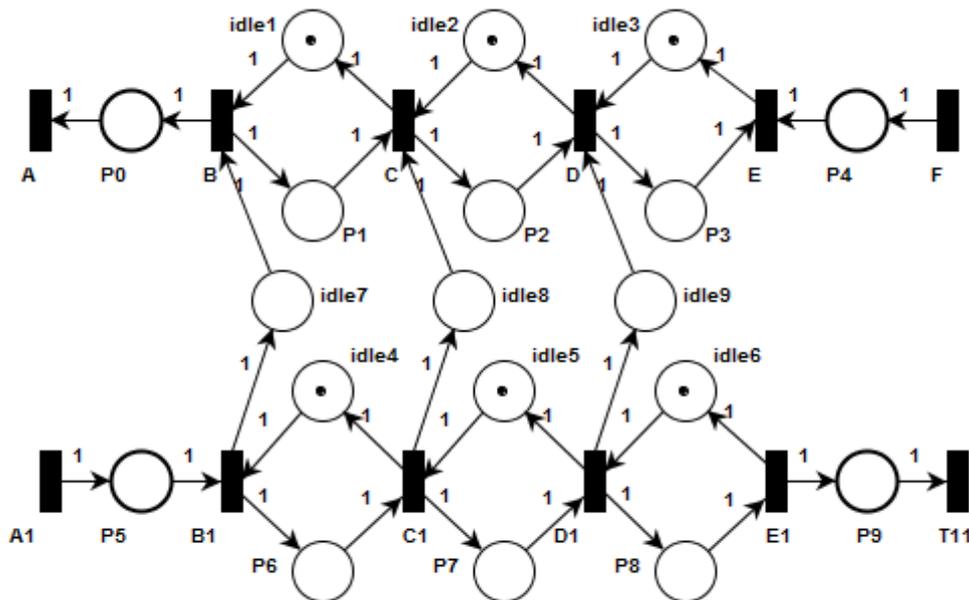


Gambar 4.3 Petri Net Sederhana untuk Satu Lintasan Kereta Api
Setelah transisi *A* dan transisi *B* di *Fire*

Setelah diberikan model petri net sederhana pada jaringan kereta api, selanjutnya Gambar 4.4 dan Gambar 4.5 dibuat model petri net jaringan kereta api untuk kondisi kereta api menyusul dan bersilangan pada satu lintasan kereta api.



Gambar 4.4 Petri Net untuk Kondisi Kereta Api Menyusul dalam Satu Lintasan



Gambar 4.5 Petri Net Untuk Kondisi Kereta Api Bersilangan dalam Satu Lintasan

Berikutnya, bersumber dari graf berarah dan aturan sinkronisasi yang telah diberikan pada subbab 4.2 s/d 4.3 maka disusun model petri net sistem jaringan kereta api di Jawa Timur sebagai berikut.

Pertama, disusun Petri net untuk setiap jalur, kemudian disinkronisasi berdasarkan aturan sinkronisasi di atas. Petri net yang disusun dimaksudkan untuk menggambarkan sinkronisasi antar keberangkatan kereta api di setiap jalur. Berdasarkan definisi petri net variabel – variabel yang dipakai sebagai berikut.

Himpunan berhingga *place*, $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{53}\}$, dengan jumlah token pada masing – masing *place* p_1, p_2, \dots, p_{42} menunjukkan jumlah distribusi kereta api pada masing – masing lintasan yang bersesuaian, sedangkan token pada $p_{43}, p_{44}, \dots, p_{53}$ tidak menunjukkan jumlah kereta api, akan tetapi dimaksudkan untuk membantu menyesuaikan permasalahan ini.

Himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_{42}\}$. Transisi menunjukkan *event* keberangkatan kereta api di setiap stasiun. Berikutnya, masing – masing notasi t transisi diganti dengan x , yaitu $T = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{42}\}$. Hal ini bertujuan supaya sesuai dengan Tabel 4.6 pendefinisian variabel dan penyusunan model aljabar max-plus.

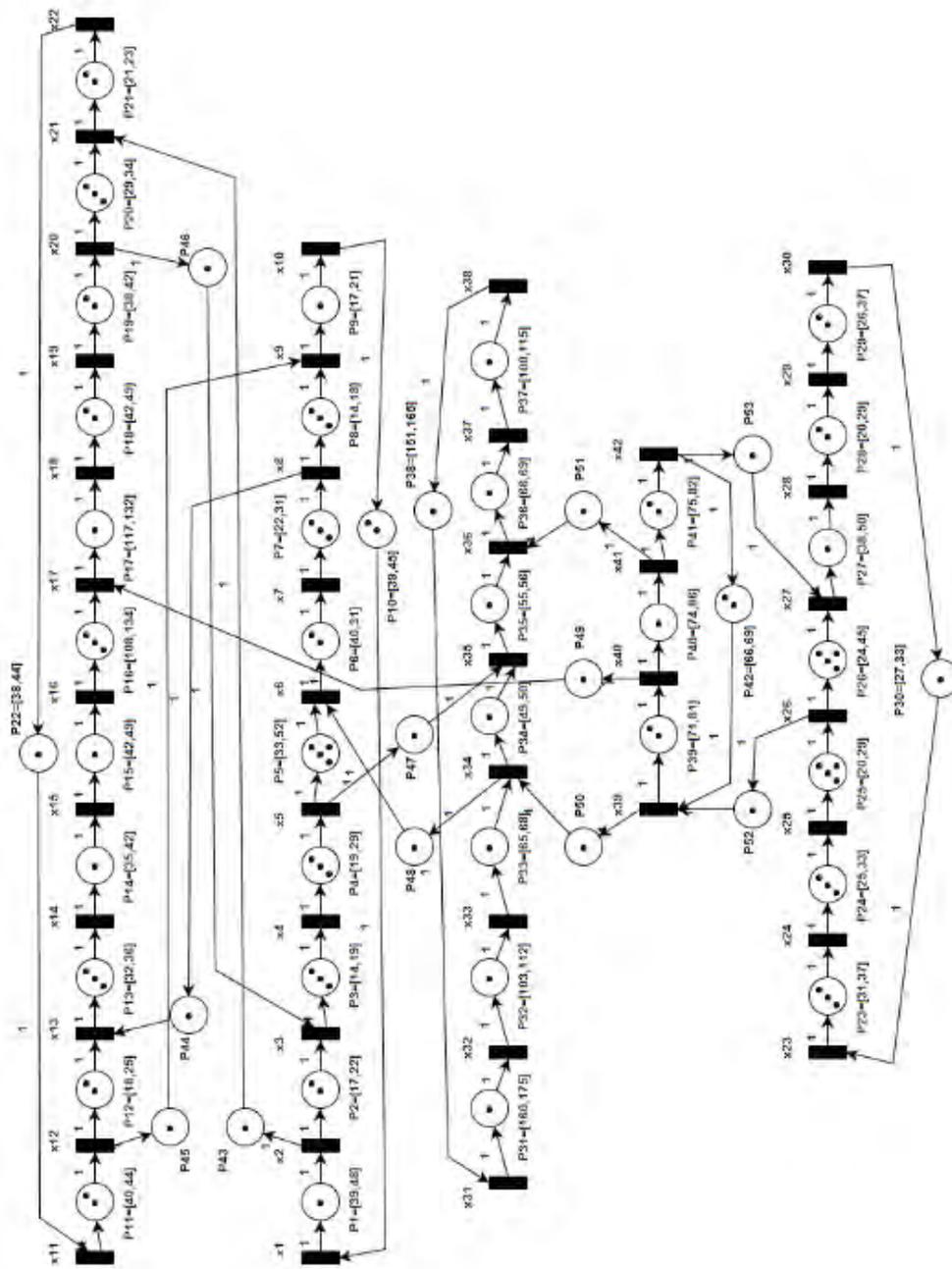
Himpunan *arc*, $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$, yaitu $A = \{(x_1, p_1), (p_1, x_2), (x_2, p_2), (p_2, x_3), (x_2, p_{43}), (p_{43}, x_{21}), (x_3, p_3), (p_3, x_4), (x_4, p_4), (p_4, x_5), (x_5, p_5), (p_5, x_6), (x_5, p_{47}), (p_{47}, x_{35}), (x_6, p_6), (p_6, x_7), (x_7, p_7), (p_7, x_8), (x_8, p_8), (p_8, x_9), (x_8, p_{44}), (p_{44}, x_{13}), (x_9, p_9), (p_9, x_{10}), (x_{10}, p_{10}), (p_{10}, x_1), (x_{11}, p_{11}), (p_{11}, x_{12}), (x_{12}, p_{12}), (p_{12}, x_{13}), (x_{12}, p_{45}), (p_{45}, x_9), (x_{13}, p_{13}), (p_{13}, x_{14}), (x_{14}, p_{14}), (p_{14}, x_{15}), (x_{15}, p_{15}), (p_{15}, x_{16}), (x_{16}, p_{16}), (p_{16}, x_{17}), (x_{17}, p_{17}), (p_{17}, x_{18}), (x_{18}, p_{18}), (p_{18}, x_{19}), (x_{19}, p_{19}), (p_{19}, x_{20}), (x_{20}, p_{20}), (p_{20}, x_{21}), (x_{20}, p_{46}), (p_{46}, x_3), (x_{21}, p_{21}), (p_{21}, x_{22}), (x_{22}, p_{22}), (p_{22}, x_{11}), (x_{23}, p_{23}), (p_{23}, x_{24}), (x_{24}, p_{24}), (p_{24}, x_{25}), (x_{25}, p_{25}), (p_{25}, x_{26}), (x_{26}, p_{26}), (p_{26}, x_{27}), (x_{26}, p_{52}), (p_{52}, x_{33}), (x_{27}, p_{27}), (p_{27}, x_{28}), (x_{28}, p_{28}), (p_{28}, x_{29}), (x_{29}, p_{29}), (p_{29}, x_{30}), (x_{30}, p_{30}), (p_{30}, x_{23}), (x_{31}, p_{31}), (p_{31}, x_{23}), (x_{32}, p_{32}), (p_{32}, x_{33}), (x_{33}, p_{33}), (p_{33}, x_{34}), (x_{34}, p_{34}), (p_{34}, x_{35}), (x_{34}, p_{48}), (p_{48}, x_6), (x_{35}, p_{35}), (p_{36}, x_{37}), (x_{37}, p_{37}), (p_{37}, x_{38}), (x_{38}, p_{38}), (p_{38}, x_{31}), (x_{39}, p_{39}), (p_{39}, x_{40}), (x_{39}, p_{50}), (p_{50}, x_{34}), (x_{40}, p_{40}), (p_{40}, x_{41}), (x_{40}, p_{49}), (p_{49}, x_{17}), (x_{41}, p_{41}), (p_{41}, x_{42}), (x_{41}, p_{51}), (p_{51}, x_{36}), (x_{42}, p_{42}), (p_{42}, x_{39}), (x_{42}, p_{53}), (p_{53}, x_{27})\}$.

Fungsi bobot, $w: A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$, yaitu semua *arc* dalam himpunan A mempunyai bobot 1. Hal ini menunjukkan lintasan kereta api hanya bisa dilewati oleh satu kereta api.

Penanda awal, yaitu $x_0 = [1\ 2\ 3\ 3\ 4\ 2\ 3\ 3\ 1\ 2\ 2\ 2\ 3\ 1\ 1\ 3\ 1\ 2\ 2\ 3\ 2\ 1\ 3\ 3\ 4\ 4\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2]$, menunjukkan jumlah token awal untuk setiap p_1, p_2, \dots, p_{42} . Hal ini disesuaikan dengan distribusi jumlah kereta api yang beroperasi di setiap lintasan di Jawa Timur.

\mathcal{T} adalah vektor yang elemen – elemennya menunjukkan waktu tempuh antar stasiun transfer. Waktu tempuh tersebut disertakan pada setiap *place*, dimana τ_i disertakan pada *place* p_i , untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 42$. Sedangkan waktu tempuh τ_{52} dan τ_{53} yang disertakan *place* p_{52} dan p_{53} menunjukkan waktu tempuh perjalanan yang bersesuaian ditambah waktu tempuh perjalanan dari stasiun Gubeng menuju stasiun Surabaya Pasarturi. Waktu tempuh perjalanan dari kedua stasiun tersebut di asumsikan dalam interval waktu $[10,15]$ menit.

Simulasi model petri net dilakukan dengan memfire salah satu transisi. Sebagai contoh pemfirean x_3 berarti *event* keberangkatan kereta api dari stasiun Kertosono menuju stasiun Jombang. Keberangkatan kereta api tersebut harus menunggu kedatangan kereta api yang berangkat dari stasiun Nganjuk menuju stasiun Kertosono (x_2) dan menunggu kedatangan kereta api yang berangkat dari stasiun Kediri menuju stasiun Kertosono (x_{20}), dalam petri net digambarkan dengan *place* p_2 dan p_{20} menjadi *upstream place* untuk transisi x_3 atau direpresentasikan dengan *arc* (p_2, x_3) dan (p_{46}, x_3) . Karena yang ditunggu di stasiun Kertosono pada dasarnya adalah penumpang kereta api yang berasal dari stasiun Nganjuk dan stasiun Kediri dan kereta api tetap berada pada jalurnya masing – masing maka *place* p_2 dan p_{46} juga menjadi *downstream place* untuk transisi x_2 dan x_{20} atau direpresentasikan dengan *arc* (x_2, p_2) dan (x_{20}, p_{46}) . Hal ini juga berlaku untuk transisi – transisi yang lain, sesuai aturan sinkronisasi yang telah ditentukan. Akan tetapi, simulasi model petri net ini pemfirean belum memperhitungkan waktu yang tertera dalam setiap *place*, karena waktu yang disertakan hanya berfungsi sebagai keterangan waktu tempuh kereta api di masing – masing lintasan.



Gambar 4.6 Petri Net Sistem Jaringan Kereta Api di Jawa Timur

Analisis model petri net yang dilakukan mengenai *boundedness*, yaitu untuk mengetahui kestabilan model petri net tersebut. Petri net dimana *place* mempunyai token tak hingga disebut tak terbatas (*unbounded*) dan *place* yang mempunyai token kurang dari atau sama dengan nilai tertentu disebut terbatas (*bounded*). Jika jumlah token pada satu atau lebih *place* bertambah menuju takhingga maka model petri net dikatakan tidak stabil atau dengan kata lain model petri net dikatakan stabil jika setiap *place* mempunyai jumlah token berhingga. Analisis *boundedness* dapat dilakukan dengan *coverability tree*, namun karena model petri net pada Gambar 4.6 relatif kompleks, sehingga tidak efektif jika dilakukan secara manual, maka analisis *boundedness* dilakukan dengan *Scilab* dan *Petri Net Toolbox*.

```
-->petri=readpipe('E:\ThesisQ\FINAL\petrinet\final.xml')
-->ispetrinetbounded(petri)
ans =
     T
```

Jadi, model petri net pada Gambar 4.6 merupakan terbatas (*bounded*) dan stabil.

4.5. Model Aljabar Max-Plus

Model Aljabar max-plus pada sistem jaringan kereta api di Jawa Timur dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus d(k+1) \\y(k) &= C \otimes x(k) \\x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{4.1}$$

dengan vektor $x(k)$ adalah waktu keberangkatan yang ke- k dari semua kereta api, vektor $d(k)$ adalah jadwal keberangkatan kereta api yang ke- k , dan $x(0)$ adalah keadaan awal.

Berdasarkan data pada Tabel 4.1 s/d 4.5, Tabel Pendefinisian Variabel 4.6, dan model petri net maka dapat disusun model aljabar max-plus untuk tiap – tiap jalur pada sistem jaringan kereta api di Jawa Timur sebelum sinkronisasi adalah sebagai berikut.

- **Jalur 1 :**

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= t_{10} \otimes x_{10}(k-1) \oplus d_1(k+1) \\
 x_2(k+1) &= t_1 \otimes x_1(k) \oplus d_2(k+1) \\
 x_3(k+1) &= t_2 \otimes x_2(k-1) \oplus d_3(k+1) \\
 x_4(k+1) &= t_3 \otimes x_3(k-2) \oplus d_4(k+1) \\
 x_5(k+1) &= t_4 \otimes x_4(k-2) \oplus d_5(k+1) \\
 x_6(k+1) &= t_5 \otimes x_5(k-3) \oplus d_6(k+1) \\
 x_7(k+1) &= t_6 \otimes x_6(k-1) \oplus d_7(k+1) \\
 x_8(k+1) &= t_7 \otimes x_7(k-2) \oplus d_8(k+1) \\
 x_9(k+1) &= t_8 \otimes x_8(k-2) \oplus d_9(k+1) \\
 x_{10}(k+1) &= t_9 \otimes x_9(k) \oplus d_{10}(k+1)
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

- **Jalur 2 :**

$$\begin{aligned}
 x_{11}(k+1) &= t_{22} \otimes x_{22}(k) \oplus d_{11}(k+1) \\
 x_{12}(k+1) &= t_{11} \otimes x_{11}(k-1) \oplus d_{12}(k+1) \\
 x_{13}(k+1) &= t_{12} \otimes x_{12}(k-1) \oplus d_{13}(k+1) \\
 x_{14}(k+1) &= t_{13} \otimes x_{13}(k-2) \oplus d_{14}(k+1) \\
 x_{15}(k+1) &= t_{14} \otimes x_{14}(k) \oplus d_{15}(k+1) \\
 x_{16}(k+1) &= t_{15} \otimes x_{15}(k) \oplus d_{16}(k+1) \\
 x_{17}(k+1) &= t_{16} \otimes x_{16}(k-2) \oplus d_{17}(k+1) \\
 x_{18}(k+1) &= t_{17} \otimes x_{17}(k) \oplus d_{18}(k+1) \\
 x_{19}(k+1) &= t_{18} \otimes x_{18}(k-1) \oplus d_{19}(k+1) \\
 x_{20}(k+1) &= t_{19} \otimes x_{19}(k-1) \oplus d_{20}(k+1) \\
 x_{21}(k+1) &= t_{20} \otimes x_{20}(k-2) \oplus d_{21}(k+1) \\
 x_{22}(k+1) &= t_{21} \otimes x_{21}(k-1) \oplus d_{22}(k+1)
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

- **Jalur 3 :**

$$\begin{aligned}
 x_{23}(k+1) &= t_{30} \otimes x_{30}(k) \oplus d_{23}(k+1) \\
 x_{24}(k+1) &= t_{23} \otimes x_{23}(k-2) \oplus d_{24}(k+1) \\
 x_{25}(k+1) &= t_{24} \otimes x_{24}(k-2) \oplus d_{25}(k+1) \\
 x_{26}(k+1) &= t_{25} \otimes x_{25}(k-3) \oplus d_{26}(k+1) \\
 x_{27}(k+1) &= t_{26} \otimes x_{26}(k-3) \oplus d_{27}(k+1) \\
 x_{28}(k+1) &= t_{27} \otimes x_{27}(k) \oplus d_{28}(k+1) \\
 x_{29}(k+1) &= t_{28} \otimes x_{28}(k-1) \oplus d_{29}(k+1) \\
 x_{30}(k+1) &= t_{29} \otimes x_{29}(k-1) \oplus d_{30}(k+1)
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

- **Jalur 4 :**

$$\begin{aligned}
 x_{31}(k+1) &= t_{38} \otimes x_{38}(k) \oplus d_{31}(k+1) \\
 x_{32}(k+1) &= t_{31} \otimes x_{31}(k) \oplus d_{32}(k+1) \\
 x_{33}(k+1) &= t_{32} \otimes x_{32}(k) \oplus d_{33}(k+1) \\
 x_{34}(k+1) &= t_{33} \otimes x_{33}(k) \oplus d_{34}(k+1) \\
 x_{35}(k+1) &= t_{34} \otimes x_{34}(k) \oplus d_{35}(k+1) \\
 x_{36}(k+1) &= t_{35} \otimes x_{35}(k) \oplus d_{36}(k+1) \\
 x_{37}(k+1) &= t_{36} \otimes x_{36}(k) \oplus d_{37}(k+1) \\
 x_{38}(k+1) &= t_{37} \otimes x_{37}(k) \oplus d_{38}(k+1)
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

- **Jalur 5 :**

$$\begin{aligned}
 x_{39}(k+1) &= t_{42} \otimes x_{42}(k-1) \oplus d_{39}(k+1) \\
 x_{40}(k+1) &= t_{39} \otimes x_{39}(k-1) \oplus d_{40}(k+1) \\
 x_{41}(k+1) &= t_{40} \otimes x_{40}(k) \oplus d_{41}(k+1) \\
 x_{42}(k+1) &= t_{41} \otimes x_{41}(k-1) \oplus d_{42}(k+1)
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Selanjutnya, substitusi nilai t_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, 42$ ke model dari jalur 1, 2, 3, 4, dan 5 dan diberikan aturan sinkronisasi maka diperoleh model dari jalur kereta api di Jawa Timur sebagai berikut.

- **Jalur 1 :**

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= [39,45] \otimes x_{10}(k-1) \oplus d_1(k+1) \\
x_2(k+1) &= [39,48] \otimes x_1(k) \oplus d_2(k+1) \\
x_3(k+1) &= [17,22] \otimes x_2(k-1) \oplus [29,34] \otimes x_{20}(k-2) \\
&\quad \oplus d_3(k+1) \\
x_4(k+1) &= [14,19] \otimes x_3(k-2) \oplus d_4(k+1) \\
x_5(k+1) &= [19,29] \otimes x_4(k-2) \oplus d_5(k+1) \\
x_6(k+1) &= [33,52] \otimes x_5(k-3) \oplus [49,50] \otimes x_{34}(k) \\
&\quad \oplus d_6(k+1) \\
x_7(k+1) &= [40,53] \otimes x_6(k-1) \oplus d_7(k+1) \\
x_8(k+1) &= [22,31] \otimes x_7(k-2) \oplus d_8(k+1) \\
x_9(k+1) &= [14,18] \otimes x_8(k-2) \oplus d_9(k+1) \\
x_{10}(k+1) &= [17,21] \otimes x_9(k) \oplus d_{10}(k+1)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

- **Jalur 2 :**

$$\begin{aligned}
x_{11}(k+1) &= [38,44] \otimes x_{22}(k) \oplus d_{11}(k+1) \\
x_{12}(k+1) &= [40,44] \otimes x_{11}(k-1) \oplus d_{12}(k+1) \\
x_{13}(k+1) &= [18,25] \otimes x_{12}(k-1) \oplus [14,18] \otimes x_8(k-2) \\
&\quad \oplus d_{13}(k+1) \\
x_{14}(k+1) &= [32,36] \otimes x_{13}(k-2) \oplus d_{14}(k+1) \\
x_{15}(k+1) &= [35,42] \otimes x_{14}(k) \oplus d_{15}(k+1) \\
x_{16}(k+1) &= [42,49] \otimes x_{15}(k) \oplus d_{16}(k+1) \\
x_{17}(k+1) &= [108,134] \otimes x_{16}(k-2) \\
&\quad \oplus [74,86] \otimes x_{40}(k) \oplus d_{17}(k+1) \\
x_{18}(k+1) &= [117,132] \otimes x_{17}(k) \oplus d_{18}(k+1) \\
x_{19}(k+1) &= [42,49] \otimes x_{18}(k-1) \oplus d_{19}(k+1) \\
x_{20}(k+1) &= [38,42] \otimes x_{19}(k-1) \oplus d_{20}(k+1) \\
x_{21}(k+1) &= [29,34] \otimes x_{20}(k-2) \oplus [17,22] \otimes x_2(k-1) \\
&\quad \oplus d_{21}(k+1) \\
x_{22}(k+1) &= [21,23] \otimes x_{21}(k-1) \oplus d_{22}(k+1)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

- **Jalur 3 :**

$$\begin{aligned}
x_{23}(k+1) &= [27,33] \otimes x_{30}(k) \oplus d_{23}(k+1) \\
x_{24}(k+1) &= [31,37] \otimes x_{23}(k-2) \oplus d_{24}(k+1) \\
x_{25}(k+1) &= [25,33] \otimes x_{24}(k-2) \oplus d_{25}(k+1) \\
x_{26}(k+1) &= [20,29] \otimes x_{25}(k-3) \oplus d_{26}(k+1) \\
x_{27}(k+1) &= [24,45] \otimes x_{26}(k-3) \oplus [66,69] \oplus [10,15] \\
&\quad \otimes x_{26}(k-3) \oplus d_{27}(k+1) \\
x_{28}(k+1) &= [38,50] \otimes x_{27}(k) \oplus d_{28}(k+1) \\
x_{29}(k+1) &= [20,29] \otimes x_{28}(k-1) \oplus d_{29}(k+1) \\
x_{30}(k+1) &= [26,37] \otimes x_{29}(k-1) \oplus d_{30}(k+1)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

- **Jalur 4 :**

$$\begin{aligned}
x_{31}(k+1) &= [151,165] \otimes x_{38}(k) \oplus d_{31}(k+1) \\
x_{32}(k+1) &= [160,175] \otimes x_{31}(k) \oplus d_{32}(k+1) \\
x_{33}(k+1) &= [103,112] \otimes x_{32}(k) \oplus d_{33}(k+1) \\
x_{34}(k+1) &= [65,68] \otimes x_{33}(k) \oplus [71,81] \otimes x_{39}(k-1) \\
&\quad \oplus d_{34}(k+1) \\
x_{35}(k+1) &= [49,50] \otimes x_{34}(k) \oplus [33,52] \otimes x_5(k-3) \\
&\quad \oplus d_{35}(k+1) \\
x_{36}(k+1) &= [55,56] \otimes x_{35}(k) \oplus [75,82] \otimes x_{41}(k-1) \\
&\quad \oplus d_{36}(k+1) \\
x_{37}(k+1) &= [66,69] \otimes x_{36}(k) \oplus d_{37}(k+1) \\
x_{38}(k+1) &= [100,115] \otimes x_{37}(k) \oplus d_{38}(k+1)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

- **Jalur 5 :**

$$\begin{aligned}
x_{39}(k+1) &= [66,69] \otimes x_{42}(k-1) \\
&\quad \oplus [24,45] \oplus [10,15] \otimes x_{39}(k-1) \oplus d_{39}(k+1) \\
x_{40}(k+1) &= [71,81] \otimes x_{39}(k-1) \oplus [65,68] \otimes x_{33}(k) \\
&\quad \oplus d_{40}(k+1) \\
x_{41}(k+1) &= [74,86] \otimes x_{40}(k) \oplus [108,134] \otimes x_{16}(k-2) \\
&\quad \oplus d_{41}(k+1) \\
x_{42}(k+1) &= [74,82] \otimes x_{41}(k-1) \oplus [55,56] \otimes x_{35}(k) \\
&\quad \oplus d_{42}(k+1)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Selanjutnya, dari Persamaan (4.7) s/d (4.11) diatas dapat dinyatakan dalam bentuk sistem matriks aljabar max-plus berikut :

$$x(k+1) = \bigoplus_{p=1}^M (A_p \otimes x(k+1-p)) \oplus d(k+1) \quad (4.12)$$

dengan A_p adalah matriks berukuran $n \times n$, dan n adalah jumlah variabel atau jumlah transisi dalam petrinet. Matriks A_p adalah matriks yang berkaitan dengan $x(k+1-p)$. M adalah jumlah kereta api atau jumlah token maksimum pada setiap *place*. Berdasarkan Tabel 4.1 s/d 4.7 dan Gambar 4.6, jumlah variabel adalah 42 variabel dan jumlah maksimum kereta api yang beroperasi diantara semua lintasan adalah 4 kereta api, maka $n = 42$ dan $M = 4$. Sehingga diperoleh 4 buah matriks A_p dengan $p = \{1,2,3,4\}$ dan masing – masing berukuran 42×42 .

Sistem pada Persamaan (4.1) diperoleh dengan mendefinisikan vektor $\tilde{x}(k)$ yang berdimensi $(n.M)$, yaitu

$$\tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k+1-M) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

atau dapat ditulis secara lengkap sebagai berikut.

$$\tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \\ x_1(k-1) \\ \vdots \\ x_n(k-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_1(k+1-M) \\ \vdots \\ x_n(k+1-M) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

dan vektor $\tilde{d}(k)$ yang berdimensi $(n.M)$

$$\tilde{d}(k) = \begin{bmatrix} d(k) \\ d(k-1) \\ \vdots \\ d(k+1-M) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

atau dapat ditulis secara lengkap sebagai berikut.

$$\tilde{d}(k) = \begin{bmatrix} d_1(k) \\ \vdots \\ d_n(k) \\ d_1(k-1) \\ \vdots \\ d_n(k-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ d_1(k+1-M) \\ \vdots \\ d_n(k+1-M) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Sehingga Model (4.7) s/d (4.11) dapat dinyatakan dalam bentuk umum model aljabar max-plus pada Persamaan (4.1) sebagai

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A} \otimes \tilde{x}(k) \oplus \tilde{d}(k+1) \quad (4.17)$$

dengan matriks \tilde{A} berukuran $(n.M) \times (n.M)$, yaitu

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_{M-1} & A_M \\ I_{max} & \mathcal{E} & \mathcal{E} & \cdots & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & I_{max} & \mathcal{E} & \cdots & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} & I_{max} & \cdots & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} & \mathcal{E} & \cdots & I_{max} & \mathcal{E} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

dengan I_{max} adalah matriks identitas berukuran $n \times n$ dengan elemen diagonalnya sama dengan $e = 0$ dan elemen lainnya sama dengan $\varepsilon = -\infty$. Sedangkan \mathcal{E} adalah matriks berukuran $n \times n$ yang semua elemennya sama dengan ε . Adapun yang dimaksud dengan vektor $\tilde{x}(k)$ dan $\tilde{d}(k)$ pada Persamaan (4.17) adalah vektor pada masing – masing Persamaan (4.14) dan Persamaan (4.16).

Dalam penelitian ini, vektor $\tilde{x}(k)$ dan $\tilde{d}(k)$ keduanya berdimensi 168 dan matriks \tilde{A} berukuran 168×168 , yaitu :

$$\tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_{42}(k) \\ x_1(k-1) \\ \vdots \\ x_{42}(k-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_1(k+1-M) \\ \vdots \\ x(k+1-M) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\tilde{d}(k) = \begin{bmatrix} d_1(k) \\ \vdots \\ d_n(k) \\ d_1(k-1) \\ \vdots \\ d_n(k-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ d_1(k+1-M) \\ \vdots \\ d_n(k+1-M) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

dan

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ I_{max} & \mathcal{E} & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & I_{max} & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} & I_{max} & \mathcal{E} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

dimana matriks A_1 bersesuaian dengan keberangkatan kereta api yang ke- k , matriks A_2 bersesuaian dengan keberangkatan kereta api yang ke- $(k-1)$, dan seterusnya hingga A_4 bersesuaian dengan keberangkatan kereta api yang ke- $(k-3)$. Namun karena ukuran matriks \tilde{A} relatif besar yaitu 168×168 sehingga tidak memungkinkan untuk menuliskan elemen – elemen matriks \tilde{A} dalam satu matriks. Untuk memudahkan penulisan, elemen – elemen matriks A_p yang tidak sama dengan \mathcal{E} , disajikan dalam Tabel 4.7 berikut.

Tabel 4.7 Elemen Matriks A_p yang tidak sama dengan ε atau ε .

Matriks A_1 yang berkaitan dengan $x(k)$		
Baris	Kolom	Entri
2	1	[39,48]
6	34	[49,50]
10	9	[17,21]
11	22	[38,44]
15	14	[35,42]
16	15	[42,49]
17	40	[74,86]
18	17	[117,132]
23	30	[27,33]
28	27	[38,50]
31	38	[151,163]
32	31	[160,175]
33	32	[103,112]
34	33	[65,68]
35	34	[49,50]
36	35	[55,56]
37	36	[66,69]
38	37	[100,115]
40	33	[65,68]
41	40	[74,86]
42	35	[55,56]
Matriks A_2 yang berkaitan dengan $x(k-1)$		
Baris	Kolom	Entri
1	10	[39,45]
3	2	[17,22]
7	6	[40,53]
9	12	[18,25]
12	11	[40,44]
13	12	[18,25]
19	18	[42,49]

20	19	[38,42]
21	2	[17,22]
22	21	[21,23]
27	42	[66,69]
29	28	[20,29]
30	29	[26,37]
34	39	[71,81]
36	41	[75,81]
39	42	[66,69]
40	39	[71,81]
42	41	[75,82]
Matriks A_3 yang berkaitan dengan $x(k-2)$		
Baris	Kolom	Entri
3	20	[29,34]
4	3	[14,19]
5	4	[19,29]
8	7	[22,31]
9	8	[14,18]
13	8	[14,18]
14	13	[32,36]
17	16	[108,134]
21	20	[29,34]
24	23	[31,37]
25	24	[25,33]
41	16	[108,134]
Matriks A_4 yang berkaitan dengan $x(k-3)$		
Baris	Kolom	Entri
6	5	[33,52]
26	25	[20,29]
27	26	[24,50]
35	5	[33,52]
39	26	[24,50]

Matriks \tilde{A} pada persamaan (4.20) merupakan matriks interval dengan $\underline{\tilde{A}}$ matriks batas bawah dan $\overline{\tilde{A}}$ matriks batas atas. Jadwal keberangkatan kereta api ke- k yang ditunjukkan vektor $\tilde{d}(k)$ juga merupakan matriks interval, $\underline{\tilde{d}}(k)$ jadwal keberangkatan paling awal dan $\overline{\tilde{d}}(k)$ jadwal keberangkatan paling akhir dalam periode tertentu.

Selanjutnya, diuji kerealistikan jadwal keberangkatan kereta api berdasarkan Definsi 2.16, yaitu $\tilde{A} \otimes \tilde{d}(k) \leq \tilde{d}(k+1)$.

$$\tilde{A} \otimes \tilde{d}(k) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ I_{max} & \mathcal{E} & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & I_{max} & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} & I_{max} & \mathcal{E} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} d_1(k) \\ \vdots \\ d_n(k) \\ d_1(k-1) \\ \vdots \\ d_n(k-1) \\ \vdots \\ d_1(k+1-M) \\ \vdots \\ d_n(k+1-M) \end{bmatrix}$$

$$=$$

[-644,-391] + 360.(k + 1)	[-679,-501] + 360.(k + 1)
[-296,-157] + 360.(k + 1)	[-525,-367] + 360.(k + 1)
[-679,-501] + 360.(k + 1)	[-301,-173] + 360.(k + 1)
[-1024,-826] + 360.(k + 1)	[-986,-811] + 360.(k + 1)
[-1001,-795] + 360.(k + 1)	[-955,-778] + 360.(k + 1)
[-281,-12] + 360.(k + 1)	[-1292,-1114] + 360.(k + 1)
[-660,-382] + 360.(k + 1)	[-476,-336] + 360.(k + 1)
[-1025,-712] + 360.(k + 1)	[-267,5] + 360.(k + 1)
[-697,-377] + 360.(k + 1)	[-622,-575] + 360.(k + 1)
[-327,6] + 360.(k + 1)	[-688,-529] + 360.(k + 1)
[-127,35] + 360.(k + 1)	[36,165] + 360.(k + 1)
[-605,-401] + 360.(k + 1)	[-65,145] + 360.(k + 1)
[-697,-377] + 360.(k + 1)	[-127,57] + 360.(k + 1)
[-1047,-688] + 360.(k + 1)	[-295,61] + 360.(k + 1)
[-313,-24] + 360.(k + 1)	[-281,-12] + 360.(k + 1)
[-267,38] + 360.(k + 1)	[-305,-9] + 360.(k + 1)
[-269,-75] + 360.(k + 1)	[-239,64] + 360.(k + 1)
[-160,76] + 360.(k + 1)	[-134,115] + 360.(k + 1)
[-616,-328] + 360.(k + 1)	[-476,-336] + 360.(k + 1)
[-576,335] + 360.(k + 1)	[-295,61] + 360.(k + 1)

$[-269,-75] + 360.(k + 1)$	$[-328,-30] + 360.(k + 1)$
$[-305,-9] + 360.(k + 1)$	$[-225,-55] + 360.(k + 1)$
$[-335,205] + 360.(k + 1)$	$[-230,-7] + 360.(k + 1)$
$[-336,-163] + 360.(k + 1)$	$[-360,-62] + 360.(k + 1)$
$[-318,-125] + 360.(k + 1)$	$[-330,-65] + 360.(k + 1)$
$[-300,-104] + 360.(k + 1)$	$[-360,-5] + 360.(k + 1)$
$[-277,-54] + 360.(k + 1)$	$[-305,0] + 360.(k + 1)$
$[-340,-75] + 360.(k + 1)$	$[-234,0] + 360.(k + 1)$
$[-327,-23] + 360.(k + 1)$	$[-115,0] + 360.(k + 1)$
$[-358,-39] + 360.(k + 1)$	$[-240,-20] + 360.(k + 1)$
$[-344,-15] + 360.(k + 1)$	$[-343,-161] + 360.(k + 1)$
$[-323,-76] + 360.(k + 1)$	$[-280,-140] + 360.(k + 1)$
$[-285,-85] + 360.(k + 1)$	$[-182,-45] + 360.(k + 1)$
$[-355,-42] + 360.(k + 1)$	$[-695,-565] + 360.(k + 1)$
$[-359,-4] + 360.(k + 1)$	$[-696,-523] + 360.(k + 1)$
$[-348,-66] + 360.(k + 1)$	$[-678,-485] + 360.(k + 1)$
$[-309,-11] + 360.(k + 1)$	$[-660,-464] + 360.(k + 1)$
$[-339,-70] + 360.(k + 1)$	$[-637,-414] + 360.(k + 1)$
$[-277,-56] + 360.(k + 1)$	$[-700,-435] + 360.(k + 1)$
$[-298,-17] + 360.(k + 1)$	$[-687,-383] + 360.(k + 1)$
$[-254,-17] + 360.(k + 1)$	$[-718,-399] + 360.(k + 1)$
$[-215,-30] + 360.(k + 1)$	$[-704,-375] + 360.(k + 1)$
$[-186,-30] + 360.(k + 1)$	$[-683,-436] + 360.(k + 1)$
$[-165,-9] + 360.(k + 1)$	$[-645,-445] + 360.(k + 1)$
$[-297,-128] + 360.(k + 1)$	$[-715,-402] + 360.(k + 1)$
$[-260,-91] + 360.(k + 1)$	$[-719,-364] + 360.(k + 1)$
$[-232,63] + 360.(k + 1)$	$[-708,-426] + 360.(k + 1)$
$[-345,-38] + 360.(k + 1)$	$[-669,-371] + 360.(k + 1)$
$[-305,-45] + 360.(k + 1)$	$[-699,-430] + 360.(k + 1)$
$[-282,-244] + 360.(k + 1)$	$[-637,-416] + 360.(k + 1)$
$[-354,-206] + 360.(k + 1)$	$[-658,-377] + 360.(k + 1)$

$[-614, -377] + 360.(k + 1)$	$[-1078, -759] + 360.(k + 1)$
$[-575, -390] + 360.(k + 1)$	$[-1064, -735] + 360.(k + 1)$
$[-546, -390] + 360.(k + 1)$	$[-1043, -796] + 360.(k + 1)$
$[-525, -369] + 360.(k + 1)$	$[-1005, -805] + 360.(k + 1)$
$[-657, -488] + 360.(k + 1)$	$[-1075, -762] + 360.(k + 1)$
$[-620, -451] + 360.(k + 1)$	$[-1079, -724] + 360.(k + 1)$
$[-592, -423] + 360.(k + 1)$	$[-1068, -786] + 360.(k + 1)$
$[-705, -398] + 360.(k + 1)$	$[-1029, -731] + 360.(k + 1)$
$[-665, -405] + 360.(k + 1)$	$[-1059, -790] + 360.(k + 1)$
$[-642, -604] + 360.(k + 1)$	$[-997, -776] + 360.(k + 1)$
$[-714, -566] + 360.(k + 1)$	$[-1018, -737] + 360.(k + 1)$
$[-688, -566] + 360.(k + 1)$	$[-974, -737] + 360.(k + 1)$
$[-585, -390] + 360.(k + 1)$	$[-935, -750] + 360.(k + 1)$
$[-590, -415] + 360.(k + 1)$	$[-906, -750] + 360.(k + 1)$
$[-720, -367] + 360.(k + 1)$	$[-885, -729] + 360.(k + 1)$
$[-690, -422] + 360.(k + 1)$	$[-1017, -848] + 360.(k + 1)$
$[-720, -425] + 360.(k + 1)$	$[-980, -811] + 360.(k + 1)$
$[-665, -365] + 360.(k + 1)$	$[-952, -783] + 360.(k + 1)$
$[-594, -360] + 360.(k + 1)$	$[-1065, -758] + 360.(k + 1)$
$[-475, -360] + 360.(k + 1)$	$[-1025, -765] + 360.(k + 1)$
$[-600, -380] + 360.(k + 1)$	$[-1002, -964] + 360.(k + 1)$
$[-703, -521] + 360.(k + 1)$	$[-1074, -926] + 360.(k + 1)$
$[-640, -500] + 360.(k + 1)$	$[-1048, -926] + 360.(k + 1)$
$[-542, -405] + 360.(k + 1)$	$[-945, -750] + 360.(k + 1)$
$[-1055, -925] + 360.(k + 1)$	$[-950, -775] + 360.(k + 1)$
$[-1056, -883] + 360.(k + 1)$	$[-1080, -727] + 360.(k + 1)$
$[-1038, -845] + 360.(k + 1)$	$[-1050, -782] + 360.(k + 1)$
$[-1020, -824] + 360.(k + 1)$	$[-1080, -785] + 360.(k + 1)$
$[-997, -774] + 360.(k + 1)$	$[-1025, -725] + 360.(k + 1)$
$[-1060, -795] + 360.(k + 1)$	$[-954, -720] + 360.(k + 1)$
$[-1047, -743] + 360.(k + 1)$	$[-835, -720] + 360.(k + 1)$

4.6. Desain Penjadwalan

Penyusunan desain penjadwalan kereta api di Jawa Timur menggunakan informasi mengenai nilai eigen dan vektor eigen dari matriks \tilde{A} pada Persamaan (4.1). Nilai eigen dan vektor eigen dapat ditentukan dengan algoritma *power*. Dalam penelitian ini untuk membantu menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks \tilde{A} digunakan bantuan aplikasi program *Scilab* dan fungsi – fungsi yang terdapat pada *Maxplus Toolbox*.

Dengan menggunakan *Scilab* dan *Maxplus Toolbox* diperoleh nilai eigen $\lambda(\underline{\tilde{A}})$ dan $\lambda(\overline{\tilde{A}})$ dan vektor eigen matriks $\underline{\tilde{A}}$ dan $\overline{\tilde{A}}$, yaitu :

```
-->[1,v,d] = maxplusmaxalgol(Abawah)
```

```
d =
```

```
8.
```

```
v =
```

2351.625	3003.375	3089.625	2123.75
2297.	2751.5	3294.125	3180.875
2751.5	2585.25	3274.5	3204.25
2484.625	2638.875	3210.875	3059.
2222.75	2389.	2258.	2909.75
3249.5	2133.125	2203.375	2657.875
3102.25	1778.625	2657.875	2491.625
2843.375	3089.625	2391.	2545.25
2576.5	3034.	2129.125	2295.375
2499.875	2866.75	3155.875	2039.5
2529.625	2705.5	3008.625	1685.
2382.375	3247.	2749.75	2996.
2576.5	3313.375	2482.875	2940.375
2327.625	3322.75	2406.25	2773.125
2269.	3294.125	2436.	2611.875
2217.375	3249.5	2288.75	3153.375
3274.5	3210.875	2482.875	3219.75
3297.875	3183.25	2234.	3229.125
3152.625	3189.625	2175.375	3200.5

3155.875	2030.125	2902.375	2722.5
3117.25	3087.25	3106.875	2470.625
3089.625	3110.625	3087.25	2304.375
3096.	2965.375	3023.625	2358.
2996.	2816.125	2070.75	2108.125
3200.5	2564.25	2016.125	1852.25
3180.875	2398.	2470.625	1497.75
3117.25	2451.625	2203.75	2808.75
2164.375	2201.75	1941.875	2753.125
2109.75	1945.875	2968.625	2585.875
2564.25	1591.375	2821.375	2424.625
2297.375	2902.375	2562.5	2966.125
2035.5	2846.75	2295.625	3032.5
3062.25	2679.5	2219.	3041.875
2915.	2518.25	2248.75	3013.25
2656.125	3059.75	2101.5	2968.625
2389.25	3126.125	2295.625	2930.
2312.625	3135.5	2046.75	2902.375
2342.375	3106.875	1988.125	2908.75
2195.125	3062.25	1936.5	2808.75
2389.25	3023.625	2993.625	3013.25
2140.375	2996.	3017.	2993.625
2081.75	3002.375	2871.75	2930

l =
93.625

-->[l,v,d] = maxplusmaxalgol(Aatas)

d =
8.

v =

2574.25	2443.5	2812.	2812.
2521.	3520.	2731.75	2544.25
3003.	3370.5	2766.25	2485.
2718.25	3097.75	2607.75	2432.75

3556.	2710.75	2371.75	317.5
3586.75	2630.5	2318.5	3272.25
3433.25	2665.	2800.5	3240.
3272.75	2506.5	2515.75	3253.75
3003.	2710.75	2241.	3138.75
2823.5	2443.	3317.5	3368.75
2882.75	2383.75	3168.	3353.5
2616.	2331.5	2895.25	3272.25
2345.25	3454.75	2609.5	2270.5
1969.25	3485.5	2529.25	2217.25
3341.25	3332.	2563.75	2699.25
3290.	3171.5	2405.25	2414.5
3116.5	2901.75	2609.5	2139.75
2951.	2722.25	2341.75	3216.25
3520.	2781.5	2282.5	3066.75
3593.75	2514.75	2230.25	2794.
3604.5	2244.	3353.5	2508.25
3571.25	1868.	3384.25	2428.
3520.	3240.	3230.75	2462.5
3474.75	3188.75	3070.25	2304.
3442.5	3015.25	2800.5	2508.25
3456.25	2849.75	2621.	2240.5
3341.25	3418.75	2680.25	2181.25
3571.25	3492.5	2413.5	2129.
3556.	3503.25	2142.75	3252.25
3474.75	3470.	1766.75	3283.
2473.	3418.75	3138.75	3129.5
2419.75	3373.5	3087.5	2969.
2901.75	3341.25	2914.	2699.25
2617.	3355.	2748.5	2519.75
2342.25	3240.	3317.5	2579.
3418.75	3470.	3391.25	2312.25
3269.25	3454.75	3402.	2041.5
2996.5	3373.5	3368.75	1665.5

3037.5	3216.25	3216.25	3037.5
2986.25	3290.	3171.	3267.5
2812.75	3300.75	3138.75	3252.25
2647.25	3267.5	3152.5	3171.
1	=		
101.25			

Sehingga diperoleh nilai eigen $\lambda = [\lambda(\underline{\tilde{A}}), \lambda(\overline{\tilde{A}})] = [93,625; 101,25]$.

Karena $\lambda(\underline{\tilde{A}}) \neq \lambda(\overline{\tilde{A}})$, berarti matriks interval \tilde{A} tidak mempunyai *universal eigenvalue*, tetapi hanya mempunyai *possible eigenvalue*, yaitu $93,625 \leq \lambda \leq 101,25$. *Possible eigenvalue* ini menyatakan keperiodikan sistem. Interpretasi dari nilai eigen adalah periode keberangkatan kereta api di setiap stasiun asal adalah setiap λ menit sekali, yaitu setiap 93,625 hingga 101,25 menit sekali. Karena nilai eigen matriks \tilde{A} lebih kecil dari periode waktu keberangkatan, maka berdasarkan Teorema 2.19 sistem stabil.

Karena jadwal keberangkatan kereta api adalah periodik maka dapat disusun jadwal keberangkatan kereta api menggunakan vektor eigen matriks \tilde{A} sebagai keadaan awal. Dari hasil perhitungan diatas diperoleh vektor eigen matriks batas bawah dan matriks batas atas matriks \tilde{A} adalah vektor berdimensi 168. Karena waktu keberangkatan kereta api yang sebenarnya adalah 42 variabel, yaitu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{42}$ maka hanya elemen ke- 1 hingga ke- 42 yang digunakan sebagai keadaan awal keberangkatan kereta api, sedangkan elemen ke- 43 hingga ke- 168 adalah keadaan pembantu atau waktu keberangkatan tak sebenarnya. Sehingga keadaan awal keberangkatan kereta api menjadi berikut.

-->Vbawah =v(1:42)

Vbawah	=			
2351.625		2222.75	2576.5	2576.5
2297.		3249.5	2499.875	2327.625
2751.5		3102.25	2529.625	2269.
2484.625		2843.375	2382.375	2217.375

3274.5	2389.	3247.	3189.625
3297.875	2133.125	3313.375	3089.625
3152.625	1778.625	3322.75	3294.125
3003.375	3089.625	3294.125	3274.5
2751.5	3034.	3249.5	3210.875
2585.25	2866.75	3210.875	
2638.875	2705.5	3183.25	

-->Vatas=v(1:42)

Vatas =

2574.25	2607.75	2882.75	3571.25
2521.	2812.	2616.	3520.
3003.	2544.25	2345.25	3474.75
2718.25	2485.	1969.25	3442.5
2443.5	2432.75	3341.25	3456.25
3520.	3556.	3290.	3341.25
3370.5	3586.75	3116.5	3571.25
3097.75	3433.25	2951.	3556.
2812.	3272.75	3520.	3474.75
2731.75	3003.	3593.75	
2766.25	2823.5	3604.5	

Untuk mempermudah penyusunan jadwal keberangkatan awal kereta api maka didefinisikan vektor keberangkatan awal yang baru v' sebagai berikut.

$$v' = [\underline{v}, \bar{v}] = \underline{v} \otimes (-\min(\underline{v})), \bar{v} \otimes (-\min(\bar{v}))$$

dengan

$$\min(\underline{v}) = \min_{1 \leq i \leq 42} [\underline{v}]_{i,1} \text{ dan } \min(\bar{v}) = \min_{1 \leq i \leq 42} [\bar{v}]_{i,1}.$$

Sehingga diperoleh vektor akhir keberangkatan v' yang berdimensi 42, yaitu :

-->Vbawah =Vbawah(:, :)-min(Vbawah)

Vbawah =

573.	972.875	444.125	1323.625
518.375	706.	1470.875	1064.75

797.875	1519.25	1311.	1432.25
721.25	1374.	1255.375	1404.625
751.	1224.75	1088.125	1411.
603.75	972.875	926.875	1311.
797.875	806.625	1468.375	1515.5
549.	860.25	1534.75	1495.875
490.375	610.375	1544.125	1432.25
438.75	354.5	1515.5	
1495.875	0.	1470.875	

-->Vatas =Vatas(:, :)-min(Vatas)

Vatas =

605.	638.5	913.5	1602.
551.75	842.75	646.75	1550.75
1033.75	575.	376.	1505.5
749.	515.75	0.	1473.25
474.25	463.5	1372.	1487.
1550.75	1586.75	1320.75	1372.
1401.25	1617.5	1147.25	1602.
1128.5	1464.	981.75	1586.75
842.75	1303.5	1550.75	1505.5
762.5	1033.75	1624.5	
797.	854.25	1635.25	

Hasil akhir dari proses perhitungan ini yakni vektor v' sebagai waktu keberangkatan awal penjadwalan dan selanjutnya dapat disusun jadwal periodik keberangkatan kereta api dari setiap stasiun dengan periode antar keberangkatan kereta api di setiap stasiun adalah $93,625 \leq \lambda \leq 101,25$ menit untuk keberangkatan kereta api. Hasil v' terlihat bahwa $[v']_{26,1} = [0,0]$, sehingga untuk selanjutnya keberangkatan stasiun Lamongan (LMG) menuju stasiun Surabaya Pasarturi (SBI) dijadikan sebagai titik acuan penjadwalan.

Berdasarkan kondisi sebenarnya keberangkatan awal kereta api dari stasiun Lamongan (LMG) menuju stasiun Surabaya Pasarturi dimulai pukul 2.51

WIB sehingga waktu keberangkatan awal pada setiap stasiun akan berubah menyesuaikan titik acuan.

Hasil penyusunan jadwal pada Tabel 4.8 s/d 4.12 yang dilakukan secara periodik pada batas atas dengan melakukan pembulatan ke atas dan waktu keberangkatan awal yaitu vektor v' dibanding dengan jadwal keberangkatan kereta api sebenarnya yang telah terjadwal oleh PT. KAI menunjukkan adanya beberapa perbedaan jadwal keberangkatan. Hal ini dikarenakan pada jadwal kereta api yang terjadwal oleh PT. KAI terdapat beberapa perjalanan kereta api yang penentuan waktu keberangkatan bergantung kepada pasar (konsumen) sehingga terjadi selisih antara jadwal yang disusun secara periodik dengan jadwal keberangkatan sebenarnya. Namun, selisih yang muncul di setiap keberangkatan tidak melebihi λ . Berikut ini diberikan Tabel desain waktu keberangkatan dan jadwal keberangkatan sebenarnya kereta api di Jawa Timur.

Tabel 4.8 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api Jalur 1 : Surabaya-Madiun PP

Rute	Interval Waktu Keberangkatan	Jadwal Keberangkatan Sebenarnya
Madiun – Nganjuk (x_1)	12:24 – 12:56	12:03
	15:48 – 16:20	16:18
	17.30 – 18.02	17:20 , 18:23
	22.36 – 23.08	23:25
	02.00 – 02.32	02:45
	03.42 – 04.14	03:25 , 03:35 , 04:45
	05.24 – 05.56	05:35
	08.48 – 09.20	09:42
	10.30 – 11.02	10:32
Nganjuk – Kertosono (x_2)	11:29 – 12:03	11:31
	13:11 – 13:45	13:02
	16:35 – 17:09	17:23
	18:17 – 18:51	18:00 , 19:14
	23:23 – 23:57	0:05
	02:47 – 03:21	03:24
	04:29 – 05:03	04:08 , 04:30 , 05:26
	06:11 – 06:45	06:17
	09:35 – 10:09	10:25

Tabel 4.8 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api Jalur 1 : Surabaya-Madiun PP
(Lanjutan)

Rute	Interval Waktu Keberangkatan	Jadwal Keberangkatan Sebenarnya
Kertosono – Jombang (x_3)	0:10 – 01:11	0:25
	03:34 – 04:35	03:42, 04:00, 04:29, 04:58
	05:16 – 06:17	05:46 , 06:34
	06:58 – 07:59	06:55
	10:22 – 11:23	10:44 , 11:56
	13:46 – 14:47	13:27 , 13:37
	15:28 – 16:29	15:22
	17:10 – 18:11	17:53 , 18:20
	18:52 – 19:53	18:53 , 19:20 , 19:40
Jombang - Mojokerto (x_4)	14:37 – 15:20	15:44
	18:01 – 18:44	18:22 , 18:35
	19:43 – 20:26	19:20
	21:25 – 22:08	20:08
	0:49 - 01:32	0:45
	04:13 – 04:56	04:00, 04:21 , 04:45 , 05:19
	05:55 – 06:38	06:50
	07:37 – 08:20	07:16
	11:01 – 11:44	11:01
12:43 – 13:26	12:10 , 13:44 , 13:58	
Mojokerto - Gubeng (x_5)	11:57 – 12:27	11:27 , 12:10 , 12:40
	13:39 – 14:09	14:07 , 14:36
	17:03 – 17:33	16:24
	18:45 – 19:15	18:54 , 19:03 , 19:47
	20:27 – 20:57	20:09 , 20:34
	01:33 – 02:03	01:11
	03:15 – 03:45	04:23
	04:57 – 05:27	04:52 , 05:10 , 05:25 , 05:55
	06:39 – 07:09	07:12
08:21 – 08:51	08:06	
Gubeng - Mojokerto (x_6)	03:22 – 04:42	03:49 , 04:30
	06:46 – 08:06	07:30 , 08:00 , 08:15
	08:28 – 09:48	08:27 , 09:20 , 09:45
	10:10 – 11:30	10:50
	11:52 – 13:12	12:00 , 12:30
	13:34 – 14:54	13:45
	15:16 – 16:36	15:45
	16:58 – 18:18	17:00 , 17:10 , 17:40
18:40 – 20:00	19:00	

Tabel 4.8 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api Jalur 1 : Surabaya-Madiun PP
(Lanjutan)

Rute	Interval Waktu Keberangkatan	Jadwal Keberangkatan Sebenarnya
Mojokerto - Jombang (x_7)	06:01 – 06:18	05:50
	07:43 – 08:00	08: 04
	09:25 – 09:42	08:40 , 08:56 , 09:33 , 10:02
	12:49 – 13:06	12:03 , 12:41 , 13:33
	14:31 – 14:48	14:37
	16:13 – 16:30	16:25
	17:55 – 18:12	17:40 , 18:01, 18:56
	19:37 – 19:54	19:29 , 19:46
Jombang - Kertosono (x_8)	05:06 – 06:10	06:25
	08:30 – 09:34	08:26 , 09:02 , 09:19
	10:12 – 11:16	10:03 , 10:25
	11:54 – 12:58	12:40 , 12:09
	13:36 – 14:40	14:21
	15:18 – 16:22	15:04 , 16:00
	17:00 – 18:04	16:47 , 18:00
	18:42 – 19:46	18:50 , 19:23
20:24 – 21:28	20:09 , 20:25	
Kertosono - Nganjuk (x_9)	16:09 – 16:54	17:01
	09:09 – 09:54	08:41 , 09:16 , 09:35
	10:51 – 11:36	10:46
	12:33 – 13:18	13:25
	14:15 – 15:00	14:45 , 15:20
	15:57 – 16:42	16:17
Nganjuk - Madiun (x_{10})	14:52 – 15:34	15:11 , 15:44
	16:34 – 17:16	16:39 , 17:25
	18:16 – 18:58	18:43
	19:58 – 20:40	19:56 , 20:44
	07:52 – 08:34	08:59
	09:34 – 10:16	09:37 , 09:54
	11:16 – 11:58	11:03
12:58 – 13:40	13:44	

Berdasarkan Tabel 4.8 pada jalur 1 jadwal keberangkatan kereta api yang sudah terjadwal oleh PT.KAI dengan desain waktu keberangkatan mempunyai selisih terbesar adalah 41 menit, yaitu pada kereta api BIMA untuk keberangkatan dari stasiun Mojokerto menuju stasiun Jombang.

Tabel 4.9 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api Jalur 2: Malang – Madiun PP

Rute	Interval Waktu Keberangkatan	Jadwal Keberangkatan Sebenarnya
Madiun – Nganjuk (x_{11})	23:52 – 0:38	0:28
	01:34 – 02:20	01:35 , 01:55 , 02:15
	03:16 – 04:02	04:15
	04:58 – 05:44	05:03
	06:40 – 07:26	07:35
Nganjuk - Kertosono (x_{12})	0:49 – 01:24	01:09
	02:31 – 03:06	02:18 , 02:40 , 03:05
	04:13 – 04:48	04:55
	05:55 – 06:30	05:46
	07:37 – 08:12	08:18
Kertosono - Kediri (x_{13})	19:33 – 20:18	19:25
	0:39 – 01:24	01:29
	02:21 – 03:06	02:38 , 03:01 , 03:26
	05:45 – 06:30	05:13 , 06:20
	07:27 – 08:12	07:17
	09:09 – 09:54	08:56
	10:51 – 11:36	10:52
	12:33 – 13:18	13:14
Kediri – Tulungagung (x_{14})	13:42 – 14:08	13:51
	20:30 – 20:56	20:06
	01:36 – 02:02	02:01
	03:18 – 03:44	03:12 , 03:39 , 04:05
	05:00 – 05:26	05:52
	08:24 – 08:50	07:54
	11:48 – 12:14	11:44
Tulungagung – Blitar (x_{15})	12:43 – 13:09	12:31
	14:25 – 14:51	14:43
	21:13 – 21:39	20:52
	02:19 – 02:45	02:38
	04:01 – 04:27	03:51 , 04:22 , 04:47
	05:43 – 06:09	06:29
	09:07 – 09:33	08:49
Blitar – Malang (x_{16})	13:34 – 13:59	13:32
	15:16 – 15:41	15:45
	03:10 – 03:35	03:21
	04:52 – 05:17	04:10 , 04:42 , 05:07 , 05:32
	06:34 – 06:59	07:12
	08:16 – 08:41	07:50
	09:58 – 10:23	09:31

Tabel 4.9 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api Jalur 2: Malang – Madiun PP
(Lanjutan)

Rute	Interval Waktu Keberangkatan	Jadwal Keberangkatan Sebenarnya
Malang – Blitar (x_{17})	03:47 – 05:18	04:20
	07:11 – 08:42	08:00 , 08:15
	08:53 – 10:24	10:23
	12:17 – 13:48	12:45 , 13:45
	13:59 – 15:30	14:04 , 15:00
	15:41 – 17:12	16:00
Blitar - Tulungagung (x_{18})	04:10 – 05:49	04:00
	09:16 – 10:55	10:02 , 10:55
	12:40 – 14:19	12:53
	14:22 – 16:01	14:43 , 15:44
	16:04 – 17:43	16:23 , 16:57
	17:46 – 19:25	18:00
Tulungagung - Kediri (x_{19})	05:09 – 06:39	05:07
	10:15 – 11:45	10:46 , 11:47
	13:39 – 15:09	13:43
	15:21 – 16:51	15:27 , 16:26
	17:03 – 18:33	17:14 , 17:39
	18:45 – 20:15	18:48
Kediri - Kertosono (x_{20})	06:04 – 07:23	05:53
	11:10 – 12:29	11:25 , 12:00 , 12:36
	12:52 – 14:11	14:00
	14:34 – 15:53	14:30
	16:16 – 17:35	16:06 , 17:04
	17:58 – 19:17	18:00 , 18:18 , 19:27
Kertosono - Nganjuk (x_{21})	19:04 – 20:05	18:49 , 19:58
	12:04 – 13:05	11:54 , 12:40
	13:46 – 14:47	14:30
	15:28 – 16:29	16:37
	17:10 – 18:11	17:35
Nganjuk - Madiun (x_{22})	16:18 – 17:05	17:00
	18:00 – 18:47	18:02 , 19:12
	19:42 – 20:29	20:20
	12:42 – 13:29	12:15 , 13:00
	14:24 – 15:11	14:51

Berdasarkan Tabel 4.9 pada jalur 2 jadwal keberangkatan kereta api yang sudah terjadwal oleh PT.KAI dengan desain waktu keberangkatan mempunyai selisih terbesar adalah 32 menit, yaitu pada kereta api GAJAYANA untuk keberangkatan dari stasiun Kertosono menuju stasiun Kediri.

Tabel 4.10 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api Jalur 3: Surabaya – Cepu PP

Rute	Interval Waktu Keberangkatan	Jadwal Keberangkatan Sebenarnya
Cepu - Bojonegoro (x_{23})	17:11 – 18:05	17:10
	23:59 – 0:53	01:06
	01:41 – 02:35	01:30
	03:23 – 04:17	04:03
	05:05 – 05:59	05:07 , 05:25
	06:47 – 07:41	06:52
Bojonegoro - Babat (x_{24})	13:11 – 13:38	13:20
	18:17 – 18:44	17:41
	01:05 – 01:32	01:43
	02:47 – 03:14	02:12
	04:29 – 04:56	04:40
	06:11 – 06:38	05:38 , 06:10
Babat - Lamongan (x_{25})	07:53 – 08:20	07:29
	13:52 – 14:13	14:06
	17:16 – 17:37	18:07
	01:46 – 02:07	02:21 , 02:45
	05:10 – 05:31	05:08 , 05:15 , [06:03]
Lamongan - Pasarturi (x_{26})	06:52 – 07:13	07:08 , 07:57
	02:51 – 02:51	02:51 , 03:15
	05:59 – 06:15	05:15 , 05:35 , 05:50 , 06:24
	07:33 – 07:57	07:40 , 08:22
	13:49 – 14:45	14:51
Pasarturi - Lamongan (x_{27})	18:31 – 19:51	18:27
	02:24 – 03:25	03:55
	07:30 – 08:31	08:15
	09:12 – 10:13	09:30 , 10:00
	14:18 – 15:19	15:00
	16:00 – 17:01	16:00 , 16:15 , 16:35 , 17:00
	17:42 – 18:43	18:25
Lamongan - Babat (x_{28})	19:24 – 20:25	20:04
	08:16 – 09:22	08:46
	09:58 – 11:04	10:18 , 10:56
	15:04 – 16:10	15:38
	16:46 – 17:52	16:40 , 17:12 , 17:38
	18:28 – 19:34	19:18
	20:10 – 21:16	20:46

Tabel 4.10 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api Jalur 3: Surabaya – Cepu PP
(Lanjutan)

Rute	Interval Waktu Keberangkatan	Jadwal Keberangkatan Sebenarnya
Babat - Bojonegoro (x_{29})	20:59 – 21:58	21:06
	08:53 – 09:52	09:06
	10:35 – 11:34	10:50 , 11:34
	15:41 – 16:40	16:05 , 17:04
	17:23 – 18:22	18:09
	19:05 – 20:04	19:41
Bojonegoro - Cepu (x_{30})	18:18 – 19:13	18:45
	20:00 – 20:55	20:15
	21:42 – 22:37	21:32
	09:36 – 10:31	09:32
	11:18 – 12:13	11:34
	16:24 – 17:19	16:45 , 17:43

Berdasarkan Tabel 4.10 pada jalur 3 jadwal keberangkatan kereta api yang sudah terjadwal oleh PT.KAI dengan desain waktu keberangkatan mempunyai selisih terbesar adalah 39 menit, yaitu pada kereta api ARGO ANGGREK untuk keberangkatan dari stasiun Bojonegoro menuju stasiun Babat.

Tabel 4.11 Jadwal Keberangkatan Kereta Api Jalur 4: Surabaya – Banyuwangi PP

Rute	Interval Waktu Keberangkatan	Jadwal Keberangkatan Sebenarnya
Banyuwangi - Jember (x_{31})	05:01 – 06:24	05:15 , 06:30
	08:25 – 09:48	08:30 , 09:00
	11:49 – 13:12	12:40
	22:01 – 23:24	22:00
Jember - Probolinggo (x_{32})	04:26 – 05:56	05:10
	07:50 – 09:20	08:05 , 09:20
	11:14 – 12:44	11:10
	14:38 – 16:08	16:05
	23:08 – 0:38	0:40
Probolinggo - Bangil (x_{33})	07:59 – 09:30	06:53
	09:41 – 11:12	09:57 , 11:09
	11:23 – 12:54	12:55
Bangil - Gubeng (x_{34})	0:59 – 02:30	02:24
	07:31 – 08:57	07:58
	10:55 – 12:21	12:18
	12:37 – 14:03	14:02
	02:13 – 03:39	03:30

Tabel 4.11 Jadwal Keberangkatan Kereta Api Jalur 4: Surabaya – Banyuwangi PP
(Lanjutan)

Rute	Interval Waktu Keberangkatan	Jadwal Keberangkatan Sebenarnya
Gubeng – Bangil (x_{35})	08:28 – 09:48	09:00]
	13:34 – 14:54	13:55]
	15:16 – 16:36	15:20]
	22:04 – 23:24	22:00
Bangil - Probolinggo (x_{36})	09:31 – 10:45	09:55
	14:37 – 15:51	14:55
	16:19 – 17:33	16:15 , 16:42
	23:07 – 0:21	22:55
Probolinggo – Jember (x_{37})	03:58 – 05:06	05:10
	10:46 – 11:54	11:06
	15:52 – 17:00	16:05
	17:34 – 18:42	17:25 , 17:50
	0:22 – 1:30	0:01
Jember - Banyuwangi (x_{38})	07:28 – 08:44	07:20
	12:34 – 13:50	13:05
	14:16 – 15:32	15:30
	17:40 – 18:56	18:00
	19:22 – 20:38	19:45
	0:28 – 01:44	01:55

Berdasarkan Tabel 4.11 pada jalur 4 jadwal keberangkatan kereta api yang sudah terjadwal oleh PT.KAI dengan desain waktu keberangkatan mempunyai selisih terbesar adalah 21 menit, yaitu pada kereta api MUTIARA TIMUR untuk keberangkatan dari stasiun Probolinggo menuju stasiun Jember.

Tabel 4.12 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api Jalur 5:
Surabaya – Malang PP

Rute	Interval Waktu Keberangkatan	Jadwal Keberangkatan Sebenarnya
Gubeng – Bangil (x_{39})	04:06 – 05:07	05:00
	07:30 – 08:31	07:10
	10:54 – 11:55	11:00
	14:18 – 15:19	14:40
	16:00 – 17:01	16:20

Tabel 4.12 Desain Jadwal Keberangkatan Kereta Api Jalur 5:
Surabaya – Malang PP (Lanjutan)

Rute	Interval Waktu Keberangkatan	Jadwal Keberangkatan Sebenarnya
Bangil – Malang (x_{40})	05:49 – 07:15	06:25
	07:31 – 08:57	08:49
	10:55 – 12:21	11:50 , 12:19
	16:01 – 17:27	16:04
	17:43 – 19:09	17:40
Malang - Bangil (x_{41})	03:47 – 05:18	04:20
	05:29 – 07:00	06:40
	08:53 – 10:24	10:25
	10:35 – 12:06	12:00
	13:59 – 15:30	14:45
	15:41 – 17:12	16:15
	17:23 – 18:54	18:58
Bangil – Gubeng (x_{42})	06:07 – 07:21	05:52
	07:49 – 09:03	08:15
	11:13 – 12:27	11:48
	12:55 – 14:09	13:27
	16:19 – 17:33	17:41
	19:43 – 20:57	20:29

Berdasarkan Tabel 4.12 pada jalur 5 jadwal keberangkatan kereta api yang sudah terjadwal oleh PT.KAI dengan desain waktu keberangkatan mempunyai selisih terbesar adalah 20 menit, yaitu pada kereta api PENATARAN untuk keberangkatan dari stasiun Gubeng menuju stasiun Bangil.

Berikutnya, berdasarkan Tabel 4.8 s/d 4.12 dapat disusun kembali jadwal keberangkatan kereta api yang sudah tersinkronisasi di antara lima jalur. Hasil yang diperoleh dapat digunakan oleh PT KAI untuk dijadikan acuan dalam pembuatan jadwal keberangkatan kereta api. Karena lima jalur sudah tersinkronisasi satu sama lain sehingga memudahkan penumpang untuk saling pindah kereta api satu ke kereta api lain, dan juga dapat mengurangi jumlah kereta api yang beroperasi di setiap jalur yang mengakibatkan waktu keterlambatan atau waktu tunggu di setiap stasiun mengalami penurunan. Berikut ini diberikan Tabel desain keberangkatan kereta api yang dipilih setelah melakukan sinkronisasi di lima jalur yang telah dibahas di atas.

Tabel 4.13 Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Jalur 1: Surabaya – Madiun PP

Rute		Jadwal	Jadwal
Dari	Tujuan	Keberangkatan I	Keberangkatan II
Madiun	Nganjuk	02:00 – 02:32	03:42 – 04:14
Nganjuk	Kertosono	02:47 – 03:21	04:29 – 05:03
Kertosono	Jombang	03:34 – 04:35	05:16 – 06:17
Jombang	Mojokerto	04:13 – 04:56	05:55 – 06:38
Mojokerto	Gubeng	04:57 – 05:27	06:39 – 07:09
Gubeng	Mojokerto	06:46 – 08:06	08:28 – 09:48
Mojokerto	Jombang	07:43 – 08:06	09:25 – 09:42
Jombang	Kertosono	08:30 – 09:34	10:12 – 11:16
Kertosono	Nganjuk	09:09 – 09:54	10:51 – 11:36
Nganjuk	Madiun	09:34 – 10:16	11:16 – 11:58

Tabel 4.14 Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Jalur 2: Malang – Madiun PP

Rute		Jadwal	Jadwal
Dari	Tujuan	Keberangkatan I	Keberangkatan II
Madiun	Nganjuk	08:22 – 09:08	10:04 – 10:50
Nganjuk	Kertosono	09:49 – 09:54	11:02 – 11:37
Kertosono	Kediri	09:09 – 09:54	10:51 – 11:36
Kediri	Tulungagung	10:07 – 10:32	11:48 – 12:14
Tulungagung	Blitar	10:49 – 11:15	12:43 – 13:09
Blitar	Malang	11:52 – 12:17	13:34 – 13:59
Malang	Blitar	01:11 – 01:42	01:53 – 03:24
Blitar	Tulungagung	02:16 – 03:55	03:58 – 05:37
Tulungagung	Kediri	01:45 – 03:15	03:27 – 04:57
Kediri	Kertosono	02:40 – 03:59	04:22 – 05:41
Kertosono	Nganjuk	03:34 – 04:35	05:16 – 06:17
Nganjuk	Madiun	04:12 – 04:59	05:54 – 06:41

Tabel 4.15 Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Jalur 3: Surabaya – Cepu PP

Rute		Jadwal	Jadwal
Dari	Tujuan	Keberangkatan I	Keberangkatan II
Cepu	Bojonegoro	03:23 – 04:17	05:15 – 05:59
Bojonegoro	Babat	04:29 – 04:56	06:21 – 06:38
Babat	Lamongan	05:10 – 05:31	07:02 – 07:13
Lamongan	Pasarturi	05:59 – 06:15	07:43 – 07:57
Pasarturi	Lamongan	07:30 – 08:31	09:12 – 10:13
Lamongan	Babat	08:16 – 09:22	09:58 – 11:04
Babat	Bojonegoro	08:53 – 09:52	10:35 – 11:34
Bojonegoro	Cepu	09:36 – 10:31	11:18 – 12:13

Tabel 4.16 Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Jalur 4:

Surabaya – Banyuwangi PP

Rute		Jadwal	Jadwal
Dari	Tujuan	Keberangkatan I	Keberangkatan II
Banyuwangi	Jember	05:01 – 06:24	06:43 – 08:06
Jember	Probolingga	06:08 – 07:38	07:50 – 09:20
Probolingga	Bangil	07:59 – 09:30	09:41 – 11:12
Bangil	Gubeng	09:13 – 10:39	10:55 – 12:21
Gubeng	Bangil	01:28 – 02:48	03:22 – 04:42
Bangil	Probolingga	02:43 – 03:57	04:25 – 05:39
Probolingga	Jember	03:58 – 05:06	05:40 – 06:48
Jember	Banyuwangi	05:46 – 07:02	07:28 – 08:44

Tabel 4.17 Pilihan Desain Jadwal Keberangkatan Jalur 5: Surabaya – Malang PP

Rute		Jadwal	Jadwal
Dari	Tujuan	Keberangkatan I	Keberangkatan II
Gubeng	Bangil	07:30 – 08:31	09:12 – 10:13
Bangil	Malang	09:13 – 10:39	10:55 – 12:21
Malang	Bangil	01:11 – 01:42	01:53 – 03:24
Bangil	Gubeng	02:43 – 03:57	04:25 – 05:39

Berdasarkan Tabel 4.13 s/d 4.17 da pat ditunjukkan proses sinkronisasi lima jalur kereta api yang ada di Jawa Timur, yaitu:

- Keberangkatan kereta api dari stasiun Kertosono menuju stasiun Jombang bersamaan dengan keberangkatan kereta api dari stasiun Kertosono menuju stasiun Nganjuk.
- Keberangkatan kereta api dari stasiun Malang menuju stasiun Blitar bersamaan dengan keberangkatan kereta api dari stasiun Malang menuju stasiun Bangil.
- Keberangkatan kereta api dari stasiun Bangil menuju stasiun Malang bersamaan dengan keberangkatan kereta api dari stasiun Bangil menuju stasiun Probolinggo.
- Keberangkatan kereta api dari stasiun Gubeng menuju stasiun Bangil bersamaan dengan keberangkatan kereta api dari stasiun Surabaya Pasarturi menuju stasiun Lamongan.

- Keberangkatan kereta api dari stasiun Gubeng menuju stasiun Bangil bersamaan dengan keberangkatan kereta api dari stasiun Gubeng menuju stasiun Mojokerto.

Selanjutnya, dapat diteruskan penyusunan desain jadwal keberangkatan kereta api di Jawa Timur untuk keberangkatan ke-3 dan seterusnya. Hasil desain jadwal keberangkatan kereta api diperoleh jadwal yang periodik. Dengan keperiodikan jadwal keberangkatan yang terbentuk diharapkan PT KAI dapat membuat jadwal keberangkatan kereta api yang mengacu pada desain jadwal keberangkatan dengan keinginan pasar (konsumen) sehingga diperoleh jadwal keberangkatan yang optimal.

BAB 5

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan dalam aplikasi petri net dan aljabar max-plus pada sistem jaringan kereta api di Jawa Timur, maka dapat disimpulkan bahwa:

- a. Petri net dan aljabar max-plus dapat diterapkan dalam penyusunan model sistem jaringan kereta api di Jawa Timur. Model yang disusun menggunakan aljabar max-plus interval adalah $\tilde{x}(k + 1) = \tilde{A} \otimes \tilde{x}(k) \oplus \tilde{d}(k + 1)$ dimana \tilde{A} adalah matriks interval berukuran 168×168 .
- b. Model sistem jaringan kereta api di Jawa Timur adalah realistik dan stabil dengan periode keberangkatan masing-masing stasiun adalah setiap λ menit sekali, dengan $93,625 \leq \lambda \leq 101,25$. Sedangkan waktu keberangkatan awal kereta api disetiap stasiun diperoleh dari vektor eigen.
- c. Desain dan model penjadwalan sistem jaringan kereta api di Jawa Timur dipengaruhi oleh banyaknya kereta api, waktu tempuh, dan aturan sinkronisasi.

5.2. Saran

- a. Penelitian ini telah memodelkan sistem jaringan kereta api di Jawa Timur dengan diberikannya beberapa asumsi pada Bab 1. Oleh karena itu, pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian sistem jaringan kereta api di Jawa Timur dengan memperluas perilaku sistem sehingga diharapkan dapat sesuai dengan kondisi real di lapangan.
- b. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa desain jadwal keberangkatan awal kereta api di setiap stasiun mengalami periodik dan dapat di sinkronisasi untuk setiap jalur. Oleh karena itu, penulis berharap kepada PT KAI dalam pembuatan jadwal keberangkatan kereta api dapat mengacu pada hasil desain penjadwalan yang telah disusun dengan keinginan pasar (konsumen) sehingga

diharapkan diperoleh jadwal keberangkatan kereta api di Jawa Timur yang optimal.

LAMPIRAN
WAKTU TEMPUH ANTAR STASIUN TRANSFER

Jalur 1 (Madiun – Surabaya PP)

- a. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Madiun
Stasiun Kedatangan : Stasiun Nganjuk

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
34	BIMA	02:45	03:24	39
94	MUTIARA SELATAN	03:25	04:08	43
154	ARJUNO	03:35	04:30	55
44	BANGUNKARTA	04:45	05:26	41
38	TURANGGA	05:35	06:17	42
74	SANCAKA – 1	09:42	10:25	43
136	SRITANJUNG	10:32	11:31	59
130	LOGAWA	12:03	13:02	59
122	PASUNDAN	16:18	17:23	65
6	ARGOWILIS	17:20	18:00	40
76	SANCAKA – 2	18:23	19:14	51
116	GAYABARU SELATAN	23:25	0:05	40

- b. Stasiun keberangkatan : Stasiun Nganjuk
Stasiun Kedatangan : Stasiun Kertosono

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
116	GAYABARU SELATAN	0:05	0:25	20
34	BIMA	3:24	3:42	18
94	MUTIARA SELATAN	4:08	4:29	21
154	ARJUNO	4:30	4:58	28
44	BANGUNKARTA	5:26	5:46	20
38	TURANGGA	6:17	6:34	17
74	SANCAKA – 1	10:25	10:44	19
136	SRITANJUNG	11:31	11:56	25
130	LOGAWA	13:02	13:27	25
122	PASUNDAN	17:23	17:53	30
6	ARGOWILIS	18:00	18:20	20
76	SANCAKA – 2	19:14	19:40	26

- c. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Kertosono
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Jombang

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
116	GAYABARU SELATAN	0:25	0:45	20
34	BIMA	3:42	4:00	18
378	KRD	4:00	4:21	21
94	MUTIARA SELATAN	4:29	4:45	16
154	ARJUNO	4:58	5:19	21
44	BANGUNKARTA	5:46	6:00	14
38	TURANGGA	6:34	6:50	16
354	DHOHO	6:55	7:16	21
74	SANCAKA – 1	10:44	11:01	17
136	SRITANJUNG	11:56	11:10	14
130	LOGAWA	13:27	13:44	17
356	DHOHO	13:37	13:58	21
358	DHOHO	15:22	15:44	22
122	PASUNDAN	17:53	18:22	29
6	ARGOWILIS	18:20	18:35	15
360	DHOHO	18:53	19:20	27
76	SANCAKA – 2	19:40	20:08	28

- d. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Jombang
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Mojokerto

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
116	GAYABARU SELATAN	0:45	1:11	26
34	BIMA	4:00	4:23	23
378	KRD	4:21	4:52	31
94	MUTIARA SELATAN	4:45	5:10	25
154	ARJUNO	5:19	5:55	36
38	TURANGGA	6:50	7:12	22
354	DHOHO	7:16	7:44	28
74	SANCAKA – 1	11:01	11:27	26
136	SRITANJUNG	11:10	12:40	30
130	LOGAWA	13:44	14:07	23
356	DHOHO	13:58	14:36	38
358	DHOHO	15:44	16:24	40
122	PASUNDAN	18:22	18:43	21
6	ARGOWILIS	18:35	18:54	19
360	DHOHO	19:20	20:09	49
76	SANCAKA – 2	20:08	20:34	26

e. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Mojokerto

Stasiun Kedatangan : Stasiun Surabaya Gubeng

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
116	GAYABARU SELATAN	1:11	1:50	39
34	BIMA	4:23	5:00	37
378	KRD	4:52	6:09	77
94	MUTIARA SELATAN	5:10	5:47	37
388	KRD SUROKERTO	5:25	6:33	68
154	ARJUNO	5:55	6:51	56
38	TURANGGA	7:12	7:55	43
354	DHOHO	7:44	9:22	76
74	SANCAKA – 1	11:27	12:07	40
390	KRD SUROKERTO	12:10	13:40	90
136	SRITANJUNG	12:40	13:18	38
130	LOGAWA	14:07	14:46	33
356	DHOHO	14:36	15:25	49
358	DHOHO	16:24	17:28	64
6	ARGOWILIS	18:54	19:28	34
122	PASUNDAN	19:03	19:55	52
392	KRD SUROKERTO	19:47	20:56	69
360	DHOHO	20:09	21:03	54
76	SANCAKA – 2	20:34	21:13	39

f. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Gubeng

Stasiun Kedatangan : Stasiun Mojokerto

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
387	KRD SUROKERTO	3:49	4:44	55
353	DHOHO	4:30	5:50	80
5	ARGOWILIS	7:30	8:04	34
73	SANCAKA – 1	8:00	8:40	40
121	PASUNDAN	8:15	8:56	41
355	DHOHO	8:27	9:33	66
129	LOGAWA	9:20	10:02	42
389	KRD SUROKERTO	9:45	10:52	67
357	DHOHO	10:50	12:03	73
115	GAYABARU SELATAN	12:00	12:41	41
153	ARJUNO	12:30	13:33	63
135	SRITANJUNG	13:45	14:37	52
75	SANCAKA – 2	15:45	16:25	40
93	MUTIARA SELATAN	17:00	17:40	40
391	KRD SUROKERTO	17:10	18:24	74
379	KRD	17:40	19:29	49
37	TURANGGA	19:00	19:46	46

- g. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Mojokerto
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Jombang

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
353	DHOHO	5:50	6:25	35
5	ARGOWILIS	8:04	8:26	22
73	SANCAKA – 1	8:40	9:02	22
121	PASUNDAN	8:56	9:19	23
355	DHOHO	9:33	10:03	30
129	LOGAWA	10:02	10:25	23
357	DHOHO	12:03	12:40	37
115	GAYABARU SELATAN	12:41	13:09	28
153	ARJUNO	13:33	14:21	48
135	SRITANJUNG	14:37	15:04	27
75	SANCAKA – 2	16:25	16:47	22
93	MUTIARA SELATAN	17:40	18:02	22
359	DHOHO	18:01	18:50	49
33	BIMA	18:56	19:23	27
379	KRD	19:29	20:25	56
37	TURANGGA	19:46	20:09	23

- h. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Jombang
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Kertosono

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
353	DHOHO	6:25	6:52	27
5	ARGOWILIS	8:26	8:41	15
73	SANCAKA – 1	9:02	9:16	14
121	PASUNDAN	9:19	9:35	16
355	DHOHO	10:03	10:22	19
129	LOGAWA	10:25	10:46	21
357	DHOHO	12:40	12:59	19
115	GAYABARU SELATAN	13:09	13:25	16
153	ARJUNO	14:21	14:45	24
135	SRITANJUNG	15:04	15:20	16
43	BANGUNKARTA	16:00	16:17	17
75	SANCAKA – 2	16:47	17:01	14
93	MUTIARA SELATAN	18:02	18:22	20
359	DHOHO	18:50	19:13	23
33	BIMA	19:23	19:38	15
379	KRD	20:25	20:45	20
37	TURANGGA	20:09	20:23	14

- i. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Kertosono
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Nganjuk

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
5	ARGOWILIS	8:41	8:59	18
73	SANCAKA – 1	9:16	9:37	21
121	PASUNDAN	9:35	9:54	19
129	LOGAWA	10:46	11:03	17
115	GAYABARU SELATAN	13:25	13:44	19
153	ARJUNO	14:45	15:11	26
135	SRITANJUNG	15:20	15:44	24
43	BANGUNKARTA	16:17	16:39	22
75	SANCAKA – 2	17:01	17:25	24
93	MUTIARA SELATAN	18:22	18:43	21
33	BIMA	19:38	19:56	18
37	TURANGGA	20:23	20:44	21

- j. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Nganjuk
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Madiun

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
5	ARGOWILIS	8:59	9:39	40
73	SANCAKA – 1	9:37	10:25	48
121	PASUNDAN	9:54	10:50	56
129	LOGAWA	11:03	11:43	40
115	GAYABARU SELATAN	13:44	14:24	40
153	ARJUNO	15:11	16:05	54
135	SRITANJUNG	15:44	16:35	51
43	BANGUNKARTA	16:39	17:18	39
75	SANCAKA – 2	17:25	18:21	56
93	MUTIARA SELATAN	18:43	19:24	41
33	BIMA	19:56	20:35	39
37	TURANGGA	20:44	21:25	41

Jalur 2 (Madiun – Malang PP)

- a. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Madiun
Stasiun Kedatangan : Nganjuk

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
88	MALIOBORO	0:28	1:09	41
114	MATARMAJA	1:35	2:18	43
86	MALABAR	1:55	2:40	45
106	MAJAPAHIT	2:15	3:05	50
32	GAJAYANA	4:15	4:55	40
118	BRANTAS	5:03	5:46	43
124	KAHURIPAN	7:35	8:18	43

- b. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Nganjuk
Stasiun Kedatangan : Stasiun Kertosono

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
88	MALIOBORO	1:09	1:29	20
114	MATARMAJA	2:18	2:38	20
86	MALABAR	2:40	3:01	21
106	MAJAPAHIT	3:05	3:26	21
32	GAJAYANA	4:55	5:13	18
118	BRANTAS	5:46	6:20	34
124	KAHURIPAN	8:18	8:56	38

- c. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Kertosono
Stasiun Kedatangan : Stasiun Kediri

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
88	MALIOBORO	1:29	2:01	32
114	MATARMAJA	2:38	3:12	34
86	MALABAR	3:01	3:39	38
106	MAJAPAHIT	3:26	4:05	39
32	GAJAYANA	5:13	5:52	39
118	BRANTAS	6:20	6:55	35
346	DHOHO	7:17	7:54	37
124	KAHURIPAN	8:56	9:27	31
348	DHOHO	10:52	11:44	52
350	DHOHO	13:14	13:51	37
352	DHOHO	19:25	20:06	41

- d. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Kediri
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Tulungagung

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
88	MALIOBORO	2:01	2:38	37
114	MATARMAJA	3:12	3:51	39
86	MALABAR	3:39	4:22	43
106	MAJAPAHIT	4:05	4:47	42
32	GAJAYANA	5:52	6:29	37
346	DHOHO	7:54	8:39	35
348	DHOHO	11:44	12:31	47
350	DHOHO	13:51	14:43	52
352	DHOHO	20:06	20:52	46

- e. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Tulungagung
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Blitar

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
88	MALIOBORO	2:38	3:21	43
114	MATARMAJA	3:51	4:42	51
86	MALABAR	4:22	5:07	45
106	MAJAPAHIT	4:47	5:32	45
32	GAJAYANA	6:29	7:12	43
346	DHOHO	8:39	9:13	42
348	DHOHO	12:31	13:32	61
350	DHOHO	14:43	15:45	62
352	DHOHO	20:52	21:41	49

- f. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Blitar
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Malang

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
88	MALIOBORO	3:21	5:09	108
364	PENATARAN	4:10	6:30	140
114	MATARMAJA	4:42	6:54	132
86	MALABAR	5:07	7:11	124
106	MAJAPAHIT	5:32	7:28	116
32	GAJAYANA	7:12	9:04	112
366	PENATARAN	7:50	10:21	151
368	PENATARAN	9:31	11:55	144
370	PENATARAN	13:32	16:00	142
372	PENATARAN	15:45	18:35	170

- g. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Malang
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Blitar

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
361	PENATARAN	4:20	7:05	165
87	MALIOBORO	8:00	10:02	122
363	PENATARAN	8:15	10:48	153
865	PENATARAN	10:23	12:41	138
85	MALABAR	12:45	14:43	118
105	MAJAPAHIT	13:45	15:44	119
367	PENATARAN	14:04	16:19	135
31	GAJAYANA	15:00	16:57	117
113	MATARMAJA	16:00	18:00	120

- h. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Blitar
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Tulungagung

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
345	DHOHO	4:00	5:07	67
87	MALIOBORO	10:02	10:46	44
347	DHOHO	10:55	11:47	52
349	DHOHO	12:53	13:43	50
85	MALABAR	14:43	15:27	44
105	MAJAPAHIT	15:44	16:26	42
351	DHOHO	16:23	17:14	51
31	GAJAYANA	16:57	17:39	42
113	MATARMAJA	18:00	18:48	48

- i. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Tulungagung
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Kediri

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
345	DHOHO	5:07	5:53	46
87	MALIOBORO	10:46	11:25	39
347	DHOHO	11:47	12:36	49
349	DHOHO	13:43	14:30	47
85	MALABAR	15:27	16:06	39
105	MAJAPAHIT	16:26	17:04	38
351	DHOHO	17:14	18:00	46
31	GAJAYANA	17:39	18:18	39
113	MATARMAJA	18:48	19:27	39

- j. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Kediri
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Kertosono

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
345	DHOHO	5:53	6:40	47
87	MALIOBORO	11:25	11:54	29
117	BRANTAS	12:00	12:40	40
347	DHOHO	12:36	13:10	34
123	KAHURIPAN	14:00	14:30	30
349	DHOHO	14:30	15:04	34
85	MALABAR	16:06	16:37	31
105	MAJAPAHIT	17:04	17:35	31
351	DHOHO	18:00	18:34	34
31	GAJAYANA	18:18	18:49	31
113	MATARMAJA	19:27	19:58	31

- k. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Kertosono
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Nganjuk

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
87	MALIOBORO	11:54	12:15	21
117	BRANTAS	12:40	13:00	26
123	KAHURIPAN	14:30	14:51	21
85	MALABAR	16:37	17:00	23
105	MAJAPAHIT	17:35	18:02	27
31	GAJAYANA	18:49	19:12	23
113	MATARMAJA	19:58	20:20	22

- l. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Nganjuk
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Madiun

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
87	MALIOBORO	12:15	12:53	38
117	BRANTAS	13:00	13:44	44
123	KAHURIPAN	14:51	15:35	44
85	MALABAR	17:00	17:50	50
105	MAJAPAHIT	18:02	18:53	51
31	GAJAYANA	19:12	19:53	41
113	MATARMAJA	20:20	21:00	40

Jalur 3 (Cepu – Surabaya PP)

- a. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Cepu
Stasiun Kedatangan : Stasiun Bojonegoro

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
120	KERTAJAYA	1:06	1:43	37
64	GUMARANG	1:30	2:12	42
36	SEMBRANI	4:03	4:40	37
4	ARGO ANGGREK	5:07	5:38	31
168	KRDI – AC	5:25	6:10	45
58	HARINA	6:52	7:29	37
2	ARGO ANGGREK	17:10	17:41	31

- b. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Bojonegoro
Stasiun Kedatangan : Stasiun Babat

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
120	KERTAJAYA	1:43	2:21	38
64	GUMARANG	2:12	2:45	33
36	SEMBRANI	4:40	5:08	28
4	ARGO ANGGREK	5:38	6:03	25
168	KRDI – AC	6:10	6:48	38
58	HARINA	7:29	7:57	28
376	KRD	13:20	14:06	46
2	ARGO ANGGREK	17:41	18:07	26

- c. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Babat
Stasiun Kedatangan : Stasiun Lamongan

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
120	KERTAJAYA	2:21	2:51	30
64	GUMARANG	2:45	3:15	30
36	SEMBRANI	5:08	5:35	27
374	KRD	5:15	5:50	35
4	ARGO ANGGREK	6:03	6:24	21
168	KRDI – AC	6:48	7:40	32
58	HARINA	7:57	8:22	25
376	KRD	14:06	14:51	45
2	ARGO ANGGREK	18:07	18:27	20

- d. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Lamongan
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Surabaya Pasarturi

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
120	KERTAJAYA	2:51	3:25	24
64	GUMARANG	3:15	3:51	36
264	KOMUTER	5:15	6:26	71
36	SEMBRANI	5:35	6:10	35
374	KRD	5:50	7:07	77
4	ARGO ANGGREK	6:24	6:55	31
168	KRDI – AC	7:40	8:31	51
58	HARINA	8:22	9:06	44
376	KRD	14:51	15:46	55
2	ARGO ANGGREK	18:27	18:58	31

- e. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Surabaya Pasarturi
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Lamongan

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
263	KOMUTER	3:55	4:57	62
1	ARGO ANGGREK	8:15	8:46	31
167	KRDI – AC	9:30	10:18	48
375	KRD	10:00	10:56	56
119	KERTAJAYA	15:00	15:38	38
57	HARINA	16:00	16:40	40
377	KRD	16:15	17:12	57
265	KOMUTER	16:35	17:56	81
63	GUMARANG	17:00	17:38	38
35	SEMBRANI	18:25	19:18	53
3	ARGO ANGGREK	20:04	20:46	42

- f. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Lamongan
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Babat

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
1	ARGO ANGGREK	8:46	9:06	20
167	KRDI – AC	10:18	10:50	32
375	KRD	10:56	11:34	38
119	KERTAJAYA	15:38	16:05	27
57	HARINA	16:40	17:04	24
377	KRD	17:12	17:51	39
63	GUMARANG	17:38	18:07	39
35	SEMBRANI	19:18	19:41	23
3	ARGO ANGGREK	20:46	21:06	20

- g. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Babat
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Bojonegoro

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
1	ARGO ANGGREK	9:06	9:32	26
167	KRDI – AC	10:50	11:34	44
375	KRD	11:34	12:23	49
119	KERTAJAYA	16:05	16:45	40
57	HARINA	17:04	17:43	39
63	GUMARANG	18:07	18:45	36
35	SEMBRANI	19:41	20:15	34
3	ARGO ANGGREK	21:06	21:32	26

- h. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Bojonegoro
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Cepu

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
1	ARGO ANGGREK	9:32	10:03	31
167	KRDI – AC	11:34	12:11	27
119	KERTAJAYA	16:45	17:30	45
57	HARINA	17:43	18:16	33
63	GUMARANG	18:45	19:08	33
35	SEMBRANI	20:15	20:48	33
3	ARGO ANGGREK	21:32	22:03	31

Jalur 4: (Banyuwangi – Surabaya PP)

- a. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Banyuwangi
Stasiun Kedatangan : Stasiun Jember

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
150	TAWANGALUN	5:15	8:05	170
138	SRITANJUNG	6:30	9:20	170
78	MUTIARA TIMUR	8:30	11:10	160
382	PANDANWANGI	9:00	12:15	195
380	PROBOWANGI	12:40	16:05	195
80	MUTIARA TIMUR	22:00	0:40	160

- b. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Jember
Stasiun Kedatangan : Stasiun Probolinggo

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
80	MUTIARA TIMUR	0:40	2:24	112
132	LOGAWA	5:10	6:53	109
150	TAWANGALUN	8:05	9:57	105
138	SRITANJUNG	9:20	11:09	137
78	MUTIARA TIMUR	11:10	12:55	104
380	PANDANWANGI	16:05	18:22	103

- c. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Probolinggo
Stasiun Kedatangan : Stasiun Bangil

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
80	MUTIARA TIMUR	2:24	3:30	66
132	LOGAWA	6:53	7:58	65
150	TAWANGALUN	9:57	11:10	73
138	SRITANJUNG	11:09	12:18	69
78	MUTIARA TIMUR	12:55	14:02	67

- d. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Bangil
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Gubeng

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
80	MUTIARA TIMUR	3:30	4:20	50
132	LOGAWA	7:58	8:47	49
150	TAWANGALUN	11:10	13:07	54
138	SRITANJUNG	12:18	14:56	49

- e. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Gubeng
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Bangil

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
77	MUTIARA TIMUR	9:00	9:55	55
137	SRITANJUNG	13:55	14:55	60
131	LOGAWA	15:20	16:15	55
79	MUTIARA TIMUR	22:00	22:55	55

- f. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Bangil
 Stasiun Kedatangan : Probolinggo

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
77	MUTIARA TIMUR	9:55	11:06	71
137	SRITANJUNG	14:55	16:05	70
131	LOGAWA	16:15	17:25	70
149	TAWANGALUN	16:42	17:50	68
79	MUTIARA TIMUR	22:55	0:01	66

- g. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Probolinggo
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Jember

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
79	MUTIARA TIMUR	0:01	1:55	114
381	PROBOWANGI	5:10	7:20	130
77	MUTIARA TIMUR	11:06	13:05	115
137	SRITANJUNG	16:05	18:00	115
131	LOGAWA	17:25	19:05	100
149	TAWANGALUN	17:50	19:45	115

- h. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Jember
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Banyuwangi

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
79	MUTIARA TIMUR	1:55	4:25	150
381	PROBOWANGI	7:20	11:03	163
77	MUTIARA TIMUR	13:05	15:36	151
385	PANDANWANGI	15:30	18:52	202
137	SRITANJUNG	18:00	20:40	160
149	TAWANGALUN	19:45	22:27	162

Jalur 5 (Surabaya – Malang PP)

- a. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Gubeng
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Bangil

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
363	PENATARAN	5:00	6:20	80
365	PENATARAN	7:10	8:44	104
367	PENATARAN	11:00	12:16	76
369	PENATARAN	14:40	15:51	71
371	PENATARAN	16:20	17:34	74

- b. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Bangil
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Malang

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
363	PENATARAN	6:25	7:52	87
365	PENATARAN	8:49	10:14	85
151	TAWANGALUN	11:50	13:05	75
367	PENATARAN	12:19	14:00	101
369	PENATARAN	16:04	17:29	74
371	PENATARAN	17:40	19:12	92

- c. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Malang
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Bangil

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
362	PENATARAN	4:20	5:46	86
364	PENATARAN	6:40	8:07	87
366	PENATARAN	10:25	11:45	80
368	PENATARAN	12:00	13:23	83
152	TAWANGALUN	14:45	16:00	75
370	PENATARAN	16:15	17:38	83
372	PENATARAN	18:58	20:15	77

- d. Stasiun Keberangkatan : Stasiun Bangil
 Stasiun Kedatangan : Stasiun Gubeng

No. KA	Nama KA	Jadwal Keberangkatan	Jadwal Kedatangan	Waktu Tempuh
362	PENATARAN	5:46	7:01	69
364	PENATARAN	8:07	9:30	75
366	PENATARAN	11:45	12:55	67
368	PENATARAN	13:23	14:36	69
370	PENATARAN	17:38	18:51	70
372	PENATARAN	20:15	21:35	66

DAFTAR NOTASI

P	: himpunan <i>place</i> dalam petri net.
T	: himpunan <i>transisi</i> dalam petri net.
A	: himpunan <i>arc</i> dalam petri net.
(p_i, t_j)	: elemen A yang menyatakan <i>arc</i> dari <i>place</i> p_i ke transisi t_j .
(t_j, p_i)	: elemen A yang menyatakan <i>arc</i> dari transisi t_j ke <i>place</i> p_i .
$w(t_j, p_i)$: fungsi bobot <i>arc</i> dalam petri net dari <i>place</i> p_i ke transisi t_j .
X	: vektor penanda dalam petri net.
$x(p_i)$: elemen vektor X yang menyatakan jumlah token pada <i>place</i> p_i .
\mathcal{T}	: vektor waktu dalam petri net.
τ_i	: elemen vektor \mathcal{T} menyatakan waktu yang disertakan pada <i>place</i> p_i .
\cup	: gabungan himpunan.
\in	: elemen himpunan.
\mathbb{R}	: himpunan bilangan real.
\mathbb{N}	: himpunan bilangan asli $\cup \{0\}$.
\oplus	: operasi biner maksimum.
\otimes	: operasi biner penjumlahan.
ε	: elemen identitas untuk operasi \oplus ($\varepsilon = -\infty$).
e	: elemen identitas untuk operasi \otimes ($e = 0$).
\mathbb{R}_{max}	: $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$.
$\mathbb{R}_{max}^{n \times m}$: himpunan matriks berukuran $n \times m$ dalam aljabar max-plus.
\mathbb{R}_{max}^n	: himpunan vektor berukuran $n \times 1$ dalam aljabar max-plus.
$I(\mathbb{R}_{max}^{n \times m})$: himpunan matriks berukuran $n \times m$ dalam aljabar max-plus interval.
A	: matriks A .
$a_{i,j}$: elemen matriks A pada baris ke- i dan kolom ke- j .
$[A]_{i,j}$: notasi lain dari $a_{i,j}$.
A^T	: matriks A tranpose.
$G(A)$: graf berarah dari matriks A .
V	: himpunan <i>vertex</i> (<i>nodes</i>) dari graf berarah.
E	: himpunan <i>edge</i> (<i>arcs</i>) dari graf berarah.

- $|p|_l$: panjang suatu lintasan p .
 $|p|_w$: bobot suatu lintasan p .
 λ : nilai eigen matriks A .
 v : vektor eigen matriks A .
 \mathbf{A} : himpunan matriks A yang mempunyai nilai interval.
 $\overline{\mathbf{A}}$: matriks batas atas matriks interval \mathbf{A} .
 $\underline{\mathbf{A}}$: matriks batas bawah matriks interval \mathbf{A} .
 $x(k)$: vektor waktu keberangkatan yang ke- k dari semua kereta api.
 $d(k)$: vektor jadwal keberangkatan yang ke- k dari semua kereta api.
 $z(k)$: vektor keterlamabatan yang ke- k dari semua kereta api.
 $\tilde{\mathbf{A}}$: matriks interval A dari model aljabar max-plus pada sistem jaringan kereta api di Jawa Timur.
 $\tilde{x}(k)$: vektor waktu keberangkatan yang ke- k dari model aljabar max-plus pada sistem jaringan kereta api di Jawa Timur.
 $\tilde{d}(k)$: vektor jadwal keberangkatan yang ke- k dari model aljabar max-plus pada sistem jaringan kereta api di Jawa Timur.
 I_{max} : matriks identitas berukuran $n \times n$ dengan elemen diagonalnya sama dengan $e = 0$ dan elemen lainnya sama dengan $\varepsilon = -\infty$.
 \mathcal{E} : matriks berukuran $n \times n$ yang semua elemennya sama dengan ε .

DAFTAR PUSTAKA

- Adzkiya, D., (2008), *Membangun Model Petri Net Lampu Lalu Lintas dan Simulasinya*, Tesis Magister, ITS, Surabaya.
- Alfiah, S., (2011), *Pemodelan Jaringan Kereta Rel Listrik (KRL) Menggunakan Aljabar Max-Plus*, Tesis Magister, ITS, Surabaya
- Cechlarova, K., (2005), *Eigenvectors of Interval Matrices Over Max-Plus Algebra*, Journal of Discrete Applied Mathematics, vol 150, 2 – 15
- Fahim, K., (2013), *Aplikasi Aljabar Max-Plus Pada Pemodelan Dan Penjadwalan Busway Yang Diintegrasikan Dengan Kereta Api Komuter*, Tugas Akhir, ITS, Surabaya.
- Sejarah Kereta, (tanggal akses : 17 Februari 2014), http://id.wikipedia.org/wiki/Lokomotif_uap.
- Sistem Transportasi, (tanggal akses 17 Februari 2014), http://www.ircham.sttnas.ac.id/system_transportasi.doc
- Subiono, (2000), *On Classes Of Min-Max-Plus System And Their Applications*, Thesis Ph.D., Technische Universiteit Delft.
- Winarni, (2009), *Penjadwalan Jalur Bus Dalam Kota Dengan Aljabar Max-Plus*, Tesis Magister, ITS, Surabaya

BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Ahmad Afif, mulai kecil biasa dipanggil Afif, lahir di Mojokerto, 22 Juni 1986 yang merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara (kandung). Penulis menempuh pendidikan formal di SDN IV Purwoasri, MTsN Purwoasri, MAN 3 Kediri. Setelah lulus MAN penulis melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya Malang pada tahun 2004 - 2009, kemudian pada tahun 2010 penulis kembali menempuh studi S1 di Pendidikan Matematika FKIP Universitas Wisnuwardhana Malang. Selanjutnya, penulis melanjutkan studi ke jenjang lebih tinggi S2 di Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Informasi yang berhubungan dengan Tesis ini dapat ditujukan ke alamat email : ibnalfath86@gmail.com