TESIS SS142501

PENDUGAAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS PADA *BIVARIATE POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION*
(Studi Kasus: Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo Tahun 2012)

Sekarsari Utami Wijaya
NRP. 1314201011

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Purhadi, M.Sc
Dr. Sutikno, M.Si

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2017

THESIS SS142501

PARAMETER ESTIMATION AND TESTS OF STATISTICAL HYPOTHESES ON *BIVARIATE POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION*
(Case Study: The Number of New HIV and AIDS Infections in Trenggalek and Ponorogo 2012)

Sekarsari Utami Wijaya
NRP. 1314201011

SUPERVISORS
Dr. Purhadi, M.Sc
Dr. Sutikno, M.Si

MASTER PROGRAMME
DEPARTMENT OF STATISTICS
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOVEMBER TECHNOLOGY INSTITUTE
SURABAYA
2017

PENDUGAAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS PADA *BIVARIATE POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION*
(Studi Kasus: Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo Tahun 2012)

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Oleh:

SEKARSARI UTAMI WIJAYA
NRP. 1314201011

Tanggal Ujian : 18 Juli 2017
Periode Wisuda : September 2017

Disetujui oleh

1. Dr. Purhadi, M.Sc (Pembimbing I)
   NIP. 19620204 198701 1 001

2. Dr. Sutikno, M.Si (Pembimbing II)
   NIP. 19710313 199702 1 001

3. Dr. rer. Pol Heri Kuswanto, S.Si, M.Si (Penguji I)
   NIP. 19820326 200312 1 004

4. Dr. R. Moh. Atok, M.Si (Penguji II)
   NIP. 19710915 199702 1 001

Dekan
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
NIP. 19650605 198903 1 002

PENDUGAAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS PADA *BIVARIATE POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION*
(Studi Kasus: Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo Tahun 2012)

Nama Mahasiswa	: Sekarsari Utami Wijaya
NRP	: 1314201011
Pembimbing	: Dr. Purhadi, M.Sc
	Dr. Sutikno, M.Si

ABSTRAK

Data cacahan sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Nilai mean pada data cacahan sering lebih besar daripada varian (overdispersi). Salah satu contoh data cacahan dalam bidang kesehatan adalah jumlah kasus baru HIV dan AIDS. HIV dan AIDS merupakan epidemi di seluruh dunia karena tidak ada obat yang dapat menyembuhkan penderitanya. Meluasnya penyakit HIV dan AIDS ini memberikan dampak buruk pada pembangunan secara nasional karena sebagian besar penderita HIV dan AIDS berusia produktif. Jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo terus meningkat dari tahun ke tahun. Berbagai penanganan untuk mencegah penyebaran virus ini telah dilakukan oleh Dinas Kesehatan Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. Namun, jumlah penderita justru cenderung meningkat. Oleh karena itu, faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo perlu diteliti. Data jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012 berdistribusi bivariat Poisson dan mengalami overdispersi yang sangat tinggi. Salah satu solusi yang tepat untuk menyelesaikan kasus ini adalah dengan membuat model regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG). Metode pendugaan parameter menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan algoritma *Newton-Raphson*. Pengujian hipotesis menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Variabel penjelas yang berpengaruh positif terhadap jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo adalah persentase penduduk berusia 25-29 tahun, persentase Pasangan Usia Subur (PUS) yang menggunakan kondom, dan persentase penduduk yang mendapatkan Jaminan Kesehatan Masyarakat (Jamkesmas). Variabel penjelas yang berpengaruh negatif terhadap jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo adalah persentase penduduk dengan tingkat pendidikan rendah dan persentase penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan.

Kata kunci: algoritma *Newton-Raphson*, Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian, HIV dan AIDS, *Maximum Likelihood Estimation*, *Maximum Likelihood Ratio Tests*

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

PARAMETER ESTIMATION AND TESTS OF STATISTICAL HYPOTHESES ON *BIVARIATE POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION*
(Case study: The Number of New HIV and AIDS Infections in Trenggalek and Ponorogo 2012)

By	: Sekarsari Utami Wijaya
Student Identity Number	: 1314201011
Supervisors	: Dr. Purhadi, M.Sc
	Dr. Sutikno, M.Si

ABSTRACT

Count data are often found in many disciplines. The sample variance of count data often exceeds the sample mean (overdispersion). The example of count data in public health discipline is the number of new HIV and AIDS infections. HIV and AIDS is epidemy deasses in the world because there were no medicines to cure people with HIV and AIDS. The transmission of this deasses give the negative effect for national development because most people with HIV and AIDS comes from productive population. New HIV and AIDS infections in Trenggalek and Ponorogo always increase year by year. The Health Department of Trenggalek and Ponorogo already have done many programs to prevent the transmission of virus. But, the number of sufferers are still increase. So that, the variable that influence new HIV and AIDS infections in Trenggalek and Ponorogo must be considered. Data of new HIV and AIDS infections in Trenggalek and Ponorogo 2012 have a bivariate Poisson distribution and extra-overdispersion. One of the solutions of this case is modelling Bivariate Poisson Inverse Gaussian (BPIG) Regression. Parameter estimation method uses *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) with *Newton-Raphson* algorithm. Hypotheses tests uses *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) method. Explanatory variables that influence HIV and AIDS positively in Trenggalek and Ponorogo are percentage of citizens that their age are 25-29 years, percentage of fertile couple using condoms, and percentage of citizens that obtain public health insurance. Explanatory variable that influence HIV and AIDS negatively in Trenggalek and Ponorogo is percentage of citizens that have low education and percentage of citizens that join health counseling program.

Key words: *Newton-Raphson* algorithm, Bivariate Poisson Inverse Gaussian, HIV and AIDS, *Maximum Likelihood Estimation*, *Maximum Likelihood Ratio Tests*

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan untuk menyelesaikan pendidikan Program Magister Departemen Statistika FMIPA ITS. Tesis ini berjudul: “Pendugaan Parameter dan Pengujian Hipotesis pada *Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression* (Studi Kasus: Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo 2012)”.

Selama melakukan penelitian ini, penulis memperoleh banyak bimbingan, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak. Tak lupa penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Suami tercinta, Erwin Indra P., yang telah memberikan dukungan baik secara moril maupun materiil.
2. Kedua orang tua, kedua mertua, Rayhan Fikri A. (anak), kakak, dan adik tercinta yang telah memberikan semangat dan doa selama menyelesaikan tesis ini.
3. Bapak Dr. Purhadi, M.Sc selaku dosen pembimbing dan Bapak Dr. Sutikno, M.Si selaku dosen co pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan dalam menyelesaikan tesis ini.
4. Ibu Santi Wulan P., M.Si, Ph.D dan Bapak Dr. R. Moh. Atok, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan saran serta perbaikan dalam tesis ini.
5. Bapak Dr. Suhartono selaku Kepala Departemen Statistika FMIPA ITS .
6. Bapak Dr.rer.pol. Heri Kuswanto selaku Kepala Program Studi Pascasarjana Departemen Statistika ITS dan dosen penguji.
7. Bapak dan Ibu dosen pengajar Departemen Statistika ITS yang telah memberikan ilmu selama perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu pegawai Departemen Statistika ITS yang telah banyak membantu penulis selama masa perkuliahan.

9. Dewi, Amel, dan Oji yang telah banyak membantu penulis selama masa perkuliahan
10. Semua pihak yang telah saya repotkan dalam penulisan tesis ini

Semoga tulisan ini dapat memberikan informasi ilmiah yang bermanfaat dan berguna bagi masyarakat. Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam penulisan tesis ini. Oleh karena itu, kritik dan saran dari berbagai pihak sangat penulis harapkan untuk menyempurnakan penelitian yang akan datang.

Surabaya, Juli 2017

Sekarsari Utami Wijaya

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
LEMBAR PENGESAHAN iii
ABSTRAK v
ABSTRACT vii
KATA PENGANTAR ix
DAFTAR ISI xi
DAFTAR TABEL xv
DAFTAR GAMBAR xvii
DAFTAR LAMPIRAN xix

BAB 1 PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Tujuan Penelitian 5
1.4 Manfaat Penelitian 5
1.5 Batasan Masalah 6

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA 7
2.1 Statistika Deskriptif 7
2.2 Distribusi Bivariat Poisson 8
2.3 Distribusi *Inverse* Gaussian 9
2.4 Distribusi Poisson *Inverse* Gaussian 9
2.5 Regresi Poisson *Inverse* Gaussian 14
2.6 Distribusi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG) 14
2.7 Regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG) 16
2.8 Korelasi 17
2.9 Pengujian Distribusi Bivariat Poisson 18
2.10 Multikolinieritas 19

2.11 Pengujian Hipotesis secara Parsial pada Model Regresi Bivariat Poisson Inverse Gaussian (BPIG) 19
2.12 *Akaike Information Criterion* (AIC) 21
2.13 HIV dan AIDS serta Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS 21

BAB 3 METODE PENELITIAN... 25
3.1 Sumber Data 25
3.2 Variabel Penelitian... 25
3.3 Tahapan Penelitian... 27
3.3.1 Pendugaan Parameter Model Regresi Bivariat Poisson Inverse Gaussian (BPIG) 27
3.3.2 Pengujian Hipotesis secara Serentak pada Model Regresi Bivariat Poisson Inverse Gaussian (BPIG) dengan Menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) 29
3.3.3 Penentuan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS dengan Model BPIG.. 30

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN.. 35
4.1 Pendugaan Parameter Regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG) 35
4.2 Pengujian Hipotesis secara Serentak terhadap Parameter Regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG).............. 52
4.3 Aplikasi Model Regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG)... 59
4.3.1 Deskripsi Variabel Respon dan Variabel Penjelas 60
4.3.2 Pemeriksaan Korelasi antar Variabel Respon 65
4.3.3 Pengujian Distribusi Variabel Respon 65
4.3.4 Pemeriksaan Multikolinieritas.................................... 66

4.3.5 Pemodelan Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo Tahun 2012 dengan Bivariat Poisson Inverse Gussian (BPIG)...... 67

BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN.. 73
5.1 Kesimpulan 73
5.2 Saran.. 74

DAFTAR PUSTAKA... 75
LAMPIRAN.. 79
BIOGRAFI PENULIS 137

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Variabel Penelitian dan Tipe Data 25
Tabel 4.1 Statistika Deskriptif Variabel Respon 62
Tabel 4.2 Statistika Deskriptif Variabel Penjelas 64
Tabel 4.3 Nilai VIF variabel penjelas 67
Tabel 4.4 Nilai Dugaan dan Pengujian Hipotesis Parsial Parameter BPIG 68

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Plot Distribusi PIG dengan $\tau = 6$ (tetap) pada (a) $\mu = 2$, (b) $\mu = 4$, (c) $\mu = 10$, (d) $\mu = 20$ 12
Gambar 2.2 Plot Distribusi PIG $\mu = 2$ (tetap) pada (a) $\tau = 6$, (b) $\tau = 12$, (c) $\tau = 30$, (d) $\tau = 60$ 13
Gambar 3.1 Langkah-Langkah Pendugaan Parameter Model Regresi BPIG .. 32
Gambar 3.2 Langkah-Langkah Pengujian Hipotesis Model Regresi BPIG 32
Gambar 3.3 Langkah-Langkah Menentukan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS 32
Gambar 4.1 Jumlah Kasus Baru HIV/AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2008-2012 60
Gambar 4.2 Histogram Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS 61
Gambar 4.3 Diagram Pencar antara Variabel Respon dan Variabel Penjelas .. 63

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Penurunan Fungsi Ln *Likelihood* BPIG (di Bawah Populasi)	79
Lampiran 2	Penurunan Fungsi Ln *Likelihood* BPIG (di Bawah H_0)	111
Lampiran 3	Data Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo Tahun 2012	119
Lampiran 4	Statistika Deskriptif	120
Lampiran 5	Pengujian Korelasi dan Multikolinieritas	121
Lampiran 6	Macro Minitab Pengujian Distribusi Bivariat Poisson	123
Lampiran 7	Syntax R untuk Pendugaan Parameter BPIG	124
Lampiran 8	Syntax R untuk Pengujian Hipotesis secara Serentak	131
Lampiran 9	Syntax R untuk Pengujian Hipotesis secara Parsial	134
Lampiran 10	Syntax R untuk *Akaike Information Criterion* (AIC)	135

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Data cacahan atau *count data* adalah observasi yang berupa unit/item/ kejadian yang dapat dihitung satu per satu. Dalam statistika, data cacahan adalah observasi yang hanya memiliki bilangan bulat non-negatif dari nol sampai tak terhingga. Variabel cacahan adalah variabel yang terdiri atas data cacahan (Hilbe, 2014). Distribusi data cacahan bukan merupakan distribusi normal, sehingga *Generalized Linear Models* (GLM) digunakan untuk melakukan pemodelan data cacahan. Analisis regresi digunakan untuk mengetahui pola hubungan antar variabel respon dan variabel penjelas dengan membuat suatu model. Jika variabel respon merupakan data cacahan/diskret, maka solusi untuk mengatasinya dengan GLM. Asumsi GLM tidak mengharuskan variabel respon berdistribusi normal dan varians homogen (De Jong and Heller, 2008). GLM ini merupakan perluasan dari model regresi linier yang memperbolehkan mean bergantung pada variabel penjelas melalui fungsi penghubung.

Salah satu distribusi variabel random yang berisi data cacahan adalah distribusi Poisson. Salah satu asumsi dalam distribusi Poisson adalah mean dan varians memiliki nilai yang sama (*equidispersion).* Faktanya, nilai mean dan varians suatu data cacahan sering tidak sama (Agresti, 2007), baik nilai mean lebih besar dari varians (*overdispersion*) maupun nilai mean lebih kecil dari varians (*underdispersion*). Dengan kata lain, asumsi *equidispersion* sering dilanggar. Data cacahan sering menunjukkan varians yang cukup besar karena banyak mengandung nilai nol (*extra zeros*) atau sebaran yang lebih besar dari nilai-nilai pada data atau keduanya (Hu, Pavlicova, dan Nunes, 2011). Kasus overdispersi bila diabaikan bisa mengakibatkan terjadinya *underestimate* pada estimasi standar error, sehingga dapat mengakibatkan kesalahan pada pengambilan keputusan beberapa uji hipotesis. Misalnya, suatu variabel prediktor berpengaruh signifikan, tetapi pada kenyataannya tidak berpengaruh signifikan (Hilbe, 2007).

Suatu data yang mengalami overdispersi tidak dapat diselesaikan dengan model regresi Poisson. Overdispersi dapat diselesaikan dengan melakukan pemodelan dimana data yang berdistribusi Poisson dikombinasikan dengan distribusi kontinu. Kombinasi distribusi Poisson dengan distribusi kontinu disebut distribusi *mixed* Poisson. Model regresi *mixed Poisson* sangat berguna dalam mengatasi overdispersi (Dean, Lawless, dan Willmot, 1989). Selain itu, distribusi *mixed* Poisson telah digunakan dalam berbagai cabang ilmu untuk melakukan pemodelan dengan populasi yang heterogen (Karlis dan Xekalaki, 2005). Distribusi *mixed* Poisson meliputi binomial negatif, Poisson-*inverse* Gaussian, dan Poisson-lognormal.

Poisson *Inverse* Gaussian (PIG) merupakan gabungan distribusi Poisson dan *inverse* Gaussian. Distribusi ini pertama kali diperkenalkan oleh Holla pada tahun 1966. Holla (1966) mendefinisikan distribusi PIG sebagai distribusi diskret yang diperoleh ketika parameter yang dilibatkan dalam distribusi Poisson memiliki fungsi kepekatan peluang dari distribusi *inverse* Gaussian dan variabel responnya berdistribusi Poisson. Model regresi PIG lebih baik daripada regresi binomial negatif dalam mengatasi overdispersi yang tinggi. Menurut Hilbe (2014), regresi PIG digunakan untuk melakukan pemodelan data cacahan yang memiliki nilai awal yang tinggi dan memiliki kurva yang sangat miring ke kanan (overdispersi yang tinggi). Oleh karena itu, pemodelan regresi PIG sangat tepat dalam mengatasi overdispersi.

Penerapan model ini sudah dilakukan oleh beberapa peneliti. Dean dkk (1989) menerapkan model regresi PIG dalam kasus klaim asuransi motor. Metode yang digunakan untuk menduga parameter model regresi PIG adalah MLE dan *quasilikelihood moment estimation*. Shoukri, Asyali, Vandorp, dan Kelton (2004) menerapkan model regresi PIG pada data cacahan yang bergerombol (*clustered*) dalam studi kasus jumlah sapi perah yang menderita mastitis di peternakan sapi perah di Ontario, Canada. Penelitan tersebut juga membandingkan antara model regresi PIG, binomial negatif, dan *generalized linear mixed Poisson*. Meskipun pemodelan yang dihasilkan hampir sama, model regresi PIG merupakan model terbaik. Widiari (2016) menerapkan model regresi PIG pada jumlah kasus baru

HIV di Provinsi Jawa Timur tahun 2013. Jumlah kasus HIV di Provinsi Jawa Timur merupakan data cacahan yang mengalami overdispersi.

Jika terdapat sepasang variabel respon yang saling berkorelasi dan berdistibusi PIG, maka analisis yang digunakan disebut regresi Bivariat PIG (BPIG). Holla (1966) menjelaskan analogi multivariat dari distribusi PIG, sifat-sifat distribusi univariat dan bivariat PIG pada penelitiannya. Ghitany, Karlis, Al-Mutairi, dan Al-Awadhi (2012) melakukan pendugaan parameter model regresi multivariat *mixed* Poisson menggunakan metode MLE dengan algoritma EM.

Salah satu contoh data cacahan dalam bidang kesehatan adalah jumlah kasus HIV dan AIDS. HIV atau *Human Immunodeficiency Virus* adalah sejenis virus yang menyerang/menginfeksi sel darah putih yang menyebabkan turunnya kekebalan tubuh manusia. AIDS atau *Acquired Immune Deficiency Syndrome* adalah sekumpulan jenis penyakit yang timbul karena turunnya kekebalan tubuh yang disebabkan infeksi oleh HIV (Kemenkes RI, 2014). HIV dan AIDS ini sudah menjadi epidemi di seluruh dunia karena tidak ada obat yang dapat menyembuhkan penderitanya. Selain itu, gejala penyakit ini tidak terlihat dan perjalanan penyakit ini memerlukan waktu yang relatif panjang. Di Indonesia, penyebaran HIV dan AIDS diawali oleh adanya Pekerja Seks Komersial (PSK) dan kaum homoseksual. PSK yang berganti-ganti pasangan menyebabkan timbulnya penyakit HIV dan AIDS. PSK yang terjangkit penyakit ini menyebarkan penyakitnya dari satu pelanggan ke pelanggan lainnya dan ibu rumah tangga di sekitar. Selain itu, bayi-bayi yang baru lahir juga terjangkit penyakit ini karena dilahirkan dari ibu yang juga terjangkit HIV dan AIDS. Akhir-akhir ini, penyebab utama penyebaran HIV dan AIDS di Indonesia adalah kaum heteroseksual dan penggunaan Narkotika, Psikotropika, dan zat aditive lainnya (NAPZA) melalui jarum suntik. Pengguna NAPZA suntik ini kemudian menulari pasangannya. Meluasnya penyakit HIV dan AIDS ini memberikan dampak buruk pada pembangunan secara nasional karena sebagian besar penderita HIV dan AIDS masih berusia produktif. Dampak buruk ini tidak hanya dirasakan di bidang kesehatan, tetapi juga di bidang sosial ekonomi.

Tiga peringkat tertinggi jumlah infeksi HIV yang terjadi di Indonesia dari tahun 1987 sampai september 2014 adalah Provinsi DKI Jakarta (32.782 jiwa), Jawa timur (19.249 jiwa) dan Papua (16.051 jiwa). Berbeda halnya dengan HIV, tiga peringkat tertinggi jumlah infeksi AIDS adalah Provinsi Papua (10.184 jiwa), Jawa timur (8.976 jiwa), dan DKI Jakarta (7.477 jiwa) (Dinkes Jatim, 2014). Besarnya jumlah infeksi HIV dan AIDS di Jawa timur yang sangat tinggi perlu menjadi perhatian. HIV dan AIDS masih menjadi permasalahan yang harus diselesaikan di berbagai daerah, termasuk Kabupaten Trenggalek dan Kabupaten Ponorogo. Data penderita HIV/AIDS pada tahun 2015 di Kabupaten Trenggalek mencapai 54 orang dan satu orang meninggal di tahun yang sama. Di Kabupaten Ponorogo tercatat terdapat 87 kasus HIV/AIDS pada tahun 2014 dan meningkat menjadi 97 kasus dengan 19 orang meninggal pada tahun 2015. Berbagai penanganan untuk mencegah penyebaran virus ini telah dilakukan oleh dinas kesehatan Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo, di antaranya memberikan penyuluhan kepada masyarakat dan populasi kunci (waria) serta eks lokalisasi. Namun, penyebaran penyakit ini tetap berlanjut di kedua kabupaten tersebut. Oleh karena itu, faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo perlu diteliti untuk mencegah timbulnya penyakit tersebut serta penularannya.

Data jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012 berdistribusi Poisson (Pangulimang, 2016). Selain itu, data tersebut mengalami overdispersi yang sangat tinggi karena mengandung banyak nilai nol (Umami, 2015), sehingga model regresi Poisson biasa tidak dapat menyelesaikan kasus ini. Pengembangan model regresi Poisson perlu dilakukan untuk mengatasi overdispersi yang tinggi. Salah satu pengembangan model regresi Poisson adalah model regresi Poisson *inverse* Gaussian (PIG). Penelitian terhadap model regresi PIG telah dilakukan oleh Widiari (2016). Penelitian tersebut menggunakan satu variabel respon, yaitu jumlah kasus baru HIV di Jawa Timur. Lalu, penelitian tersebut dikembangkan lagi menjadi model regresi *geographically weighted Poisson inverse Gaussian* oleh Purnamasari (2016). Penelitian tersebut mempertimbangkan aspek spasial dengan satu variabel respon.

1.2 Rumusan Masalah

Jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012 merupakan dua variabel respon yang saling berkorelasi karena AIDS terjadi jika HIV menyebabkan kerusakan serius pada sistem imun. Data jumlah kasus baru HIV dan AIDS mengalami overdispersi. Kurva data jumlah kasus baru HIV dan AIDS sangat miring ke kanan, sehingga pemodelan yang tepat adalah regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG). Metode pendugaan parameter menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) karena metode tersebut menghasilkan pendugaan parameter yang tidak bias, konsisten, dan efisien (Zheng, 2014). Pendugaan parameter yang diperoleh akan diuji serentak. Hipotesis nol dan alternatif yang dibuat merupakan hipotesis majemuk, sehingga metode yang digunakan adalah *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Berdasarkan uraian di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana mendapatkan penduga parameter model regresi BPIG?
2. Bagaimana statistik uji untuk pengujian serentak pada model regresi BPIG?
3. Faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012 dengan pendekatan model regresi BPIG?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Mendapatkan penduga parameter model regresi BPIG.
2. Mendapatkan statistik uji model regresi BPIG.
3. Mendapatkan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012 dengan pendekatan model regresi BPIG.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Penelitian ini dapat memperluas wawasan keilmuan dan pengetahuan mengenai pendugaan parameter dan pengujian hipotesis model regresi BPIG.

2. Memberikan informasi kepada masyarakat, khususnya dinas terkait, mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini meliputi:

1. Pendugaan parameter model regresi BPIG menggunakan metode MLE dengan algoritma *Newton-Raphson*. Algoritma *Newton-Raphson* digunakan untuk mengatasi turunan pertama fungsi ln *likelihood* yang rumit dan tidak eksplisit.
2. Statistik uji model regresi BPIG menggunakan metode M*aximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). MLRT digunakan karena hipotesis (H_0 dan H_1) yang digunakan merupakan hipotesis majemuk.
3. Ruang lingkup penelitiannya dibatasi hanya pada jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012. Jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo saling berkorelasi dan berdistribusi bivariat Poisson.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Statistika Deskriptif

Pada dasarnya, statistika dipelajari bertujuan untuk menyajikan dan menafsirkan kejadian yang bersifat peluang yang terjadi dalam suatu penelitian. Setiap informasi yang dicatat, baik data numerik maupun kategorik, disebut dengan pengamatan. Prosedur yang digunakan dalam pengumpulan, penyajian, analisis, dan penafsiran data disebut metode statistik. Metode-metode tersebut dikelompokkan ke dalam dua kelompok besar, yaitu statistika deskriptif dan inferensia statistika.

Statistika deskriptif adalah metode-metode yang berkaitan dengan pengumpulan dan penyajian suatu gugus data, sehingga memberikan informasi yang berguna (Walpole, 1992). Statistika deskriptif hanya memberikan informasi mengenai data yang dimiliki. Penyusunan tabel, diagram, grafik, ukuran pemusatan, dan ukuran keragaman merupakan beberapa contoh statistika deskriptif.

Seberapa jauh pengamatan-pengamatan menyebar dari rata-ratanya juga perlu diketahui. Varians, nilai maksimal, dan nilai minimal merupakan beberapa ukuran keragaman yang sangat penting. Adapun rumus varians sebagai berikut:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}$$

Nilai maksimal adalah nilai yang paling tinggi atau besar dari sekumpulan data yang telah diurutkan, sedangkan nilai minimal adalah nilai yang paling rendah atau kecil dari sekumpulan data yang telah diurutkan.

Skewness merupakan suatu nilai yang menunjukkan tingkat kemiringan kurva dari suatu distribusi. Suatu distribusi dapat memiliki kurva yang miring ke kanan maupun kiri. Kurva yang cenderung miring ke kanan memiliki ekor kanan yang menjulur lebih panjang daripada ekor kiri, sedangkan kurva yang cenderung miring ke kiri memiliki ekor kiri yang menjulur lebih panjang daripada ekor kanan. *Skewness* dapat dihitung dengan menggunakan persamaan:

$$Skewness = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^3}{\left(n-1\right)s^3}$$

dimana Y_i adalah jumlah terjadinya suatu kejadian dalam periode waktu tertentu, *s* adalah standar deviasi dan *n* adalah jumlah unit observasi. Jika *skewness* bertanda positif, maka kurva senderung miring ke kanan, sedangkan jika *skewness* bertanda negatif, maka kurva cenderung miring ke kiri. Suatu distribusi dikatakan sangat miring (*highly skewness*) jika absolut dari kemiringannya lebih dari satu (Bulmer, 1979 dalam Zha, Lord, dan Zou, 2014).

2.2 Distribusi Bivariat Poisson

Model yang bisa digunakan untuk data cacahan adalah distribusi Poisson. Jika variabel random diskret Y berdistribusi Poisson dengan parameter μ $\left(\mu > 0\right)$, maka Y memiliki fungsi massa peluang sebagai berikut:

$$f(y;\mu) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!}, & y = 0,1,2,... \\ 0 & \text{, y lainnya} \end{cases}$$

dengan $E(Y) = Var(Y) = \mu$.

Model cacahan bivariat digunakan pada kasus yang memiliki dua variabel cacahan yang saling berkorelasi dan parameternya diestimasi secara bersama-sama. Misalkan Z_1, Z_2, dan Z_3 adalah variabel random yang berdistribusi Poisson dan saling bebas dengan parameter μ_1, μ_2, dan μ_3. Jika variabel random $Y_1 = Z_1 + Z_3$ dan $Y_2 = Z_2 + Z_3$, maka fungsi massa peluang bersamanya adalah (Karlis dan Ntzoufras, 2005):

$$f(y_1, y_2; \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \begin{cases} e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)} \displaystyle\sum_{k=0}^{\min(y_1,y_2)} \frac{\mu_1^k \mu_2^{(y_1-k)} \mu_3^{(y_2-k)}}{k!(y_1-k)!(y_2-k)!}, & y_1, y_2 = 0,1,2,... \\ 0 & \text{, y lainnya} \end{cases} \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) menunjukkan bahwa Y_1 dan Y_2 secara marjinal berdistribusi Poisson dengan $E(Y_1) = \mu_1 + \mu_3$, $E(Y_2) = \mu_2 + \mu_3$, dan $Cov(Y_1, Y_2) = \mu_3$

. Parameter μ_3 adalah suatu ukuran untuk mengetahui besarnya korelasi antara Y_1 dan Y_2. Jika μ_3 bernilai nol, maka Y_1 dan Y_2 saling bebas dan bukan merupakan bivariat Poisson.

2.3 Distribusi *Inverse* Gaussian

Distribusi *inverse* Gaussian merupakan distribusi kontinu dan merupakan keluarga dari distribusi eksponensial. Distribusi ini memiliki satu modus dan memiliki kurva yang miring ke kanan, bahkan terkadang ekor kanan kurva dari distribusi ini sangat panjang. Fungsi kepekatan peluangnya sebagai berikut:

$$f(v;\delta,\tau)=\left(2\pi\tau v^3\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(\delta v-1)^2}{2\tau v}},\ v\geq 0,\ \delta>0,\ \tau>0$$

Parameter δ dan τ dikenal sebagai parameter bentuk. Nilai harapan dan varians dari distribusi *inverse* Gaussian adalah $E(V)=\frac{1}{\delta}$ dan $Var(V)=\frac{\tau}{\delta^3}$. Kemiringan (*skewness*) dan keruncingan (*kurtosis*) dari distribusi *inverse* Gaussian masing-masing adalah $3\sqrt{\frac{\tau}{\delta}}$ dan $\frac{15\tau}{\delta}$. Distribusi ini diberi nama inverse Gaussian oleh Tweedie (1945) karena fungsi pembangkit kumulannya merupakan kebalikan dari distribusi Gaussian (Chaubey, 2002).

2.4 Distribusi Poisson *Inverse* Gaussian

Solusi lain untuk memodelkan data cacahan adalah distribusi *mixed* Poisson. Distribusi ini sangat berguna pada situasi ketika data cacahan yang berdistribusi Poisson memiliki varians yang sangat besar (*extra-Poisson variation*). Distribusi ini merupakan alternatif dari distribusi Poisson. Salah satu alternatif distribusi *mixed* Poisson adalah distribusi Poisson *inverse* Gaussian. Misalkan Y adalah variabel respon yang berdistribusi Poisson, maka fungsi massa peluang bagi Y adalah

$$P(Y=y;\mu)=\int f(y;\mu,v)g(v;\tau)dv$$

dengan v adalah efek random yang berdistribusi *inverse* gaussian dan $g(v)$ adalah fungsi kepekatan peluang bagi v yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$g(v;\tau)=\left(2\pi\tau v^{3}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(v-1)^{2}}{2\tau v}},v>0 \tag{2.2}$$

dengan $E(V)=1$ dan $Var(V)=\tau$.

Distribusi Poisson *inverse* Gaussian terdiri atas dua parameter, yaitu μ (rata-rata) sebagai parameter lokasi dan τ (parameter dispersi) sebagai parameter bentuk. Misalkan Y adalah variabel respon yang berdistribusi Poisson *inverse* Gaussian (PIG) dan dapat dinotasikan dengan $Y\sim PIG(\mu,\tau)$. Fungsi kepekatan peluang bagi Y sebagai berikut:

$$f(y;\mu,\tau)=\left(\frac{2z}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mu^{y}e^{\frac{1}{\tau}}K_{s}(z)}{(z\tau)^{y}y!},y\geq 0 \tag{2.3}$$

dengan $s=y-\frac{1}{2}$ dan $z=\sqrt{\frac{1}{\tau^{2}}+\frac{2\mu}{\tau}}$, sehingga $K_{s}(z)=K_{y-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau}\sqrt{2\mu\tau+1}\right)$ adalah modifikasi fungsi Bessel jenis ketiga (Willmot, 1987). Nilai harapan dan varians dari distribusi PIG adalah $E(Y)=\mu$ dan $Var(Y)=\mu+\tau\mu^{2}$. Sifat-sifat fungsi Bessel di antaranya sebagai berikut:

$$K_{\frac{1}{2}}(a)=K_{-\frac{1}{2}}(a)=\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-a}$$

$$K_{\frac{3}{2}}(a)=\left(1+\frac{1}{a}\right)K_{\frac{1}{2}}(a)$$

Sehingga,

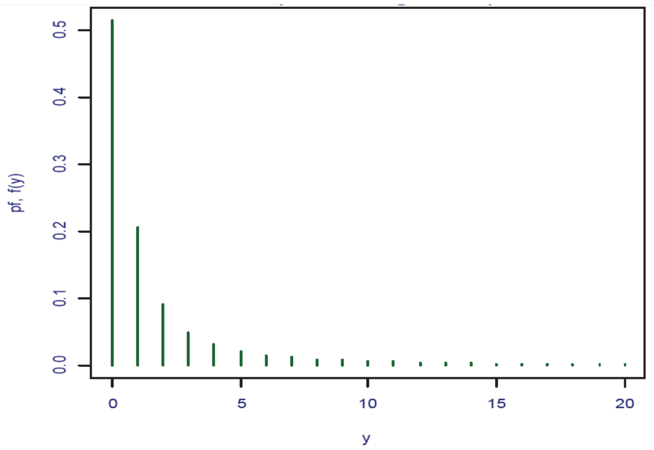
$$\frac{K_{y+\frac{1}{2}}(a)}{K_{y-\frac{1}{2}}(a)}=\left(1+2\lambda\mu\right)^{-\frac{1}{2}}M(y)$$

dengan $M(y)=(y+1)\frac{p(y+1)}{p(y)}$.

Fungsi pembangkit peluang untuk PIG (μ,τ) adalah

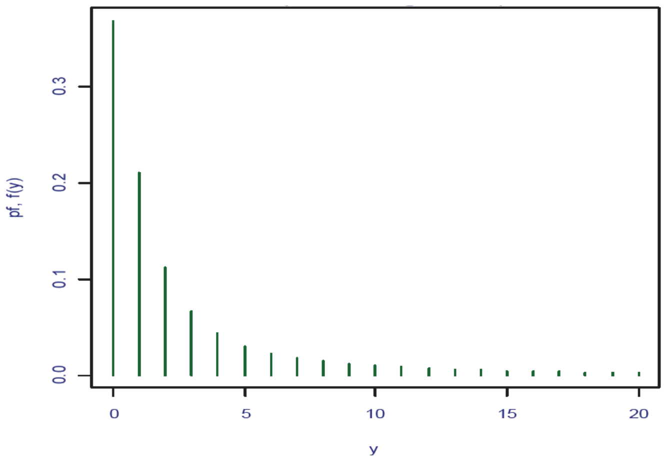
$$P(z)=\sum_{y=0}^{\infty}p(y)z^{y}=e^{\frac{1-\left(1-2\tau\mu[z-1]\right)^{\frac{1}{2}}}{\tau}} \tag{2.4}$$

Fungsi pembangkit peluang pada persamaan (2.4) menghasilkan nilai yang sama dengan fungsi kepekatan peluang pada persamaan (2.3) dalam perhitungannya.



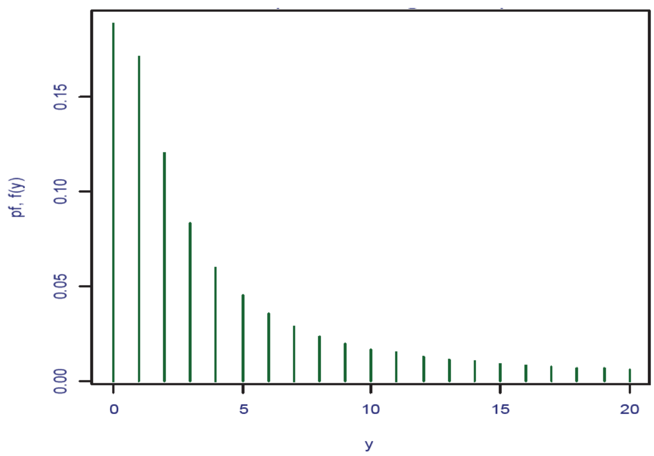
pf, f(y)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
5
10
15
20
y

(a)



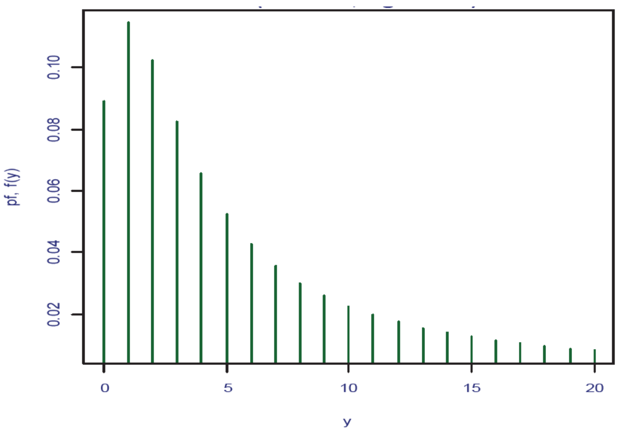
pf, f(y)
0.0
0.1
0.2
0.3
0
5
10
15
20
y

(b)



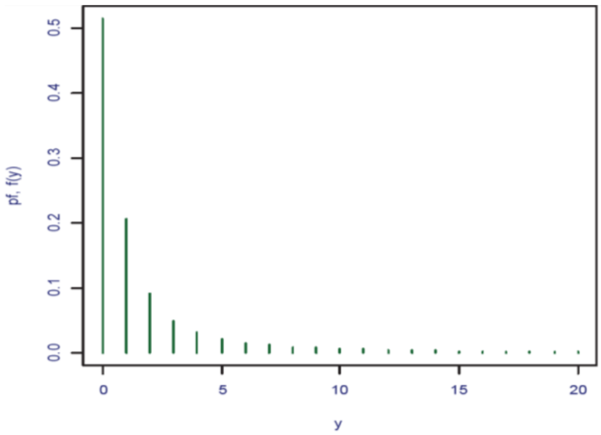
pf, f(y)
0.00
0.05
0.10
0.15
0
5
10
15
20
y

(c)

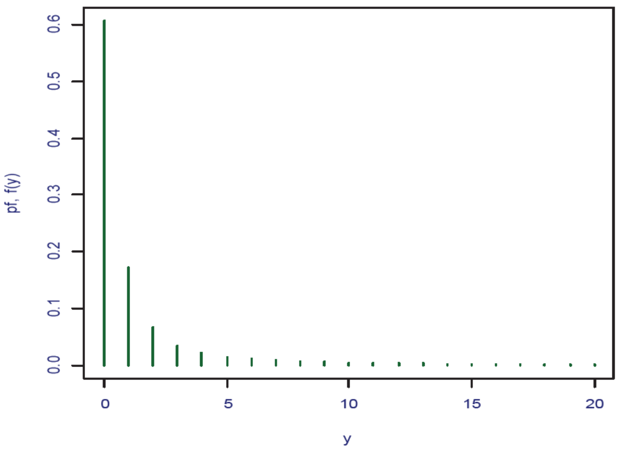


(d)

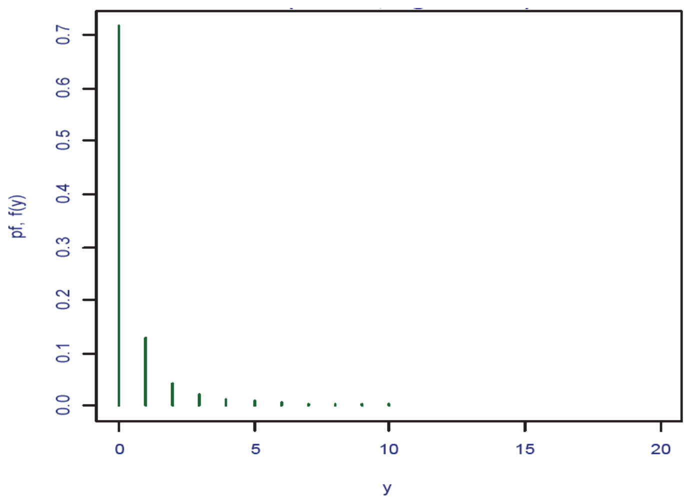
Gambar 2.1 Plot distribusi PIG dengan $\tau = 6$ (tetap) pada (a) $\mu = 2$, (b) $\mu = 4$, (c) $\mu = 10$, (d) $\mu = 20$ (Widiari, 2016)



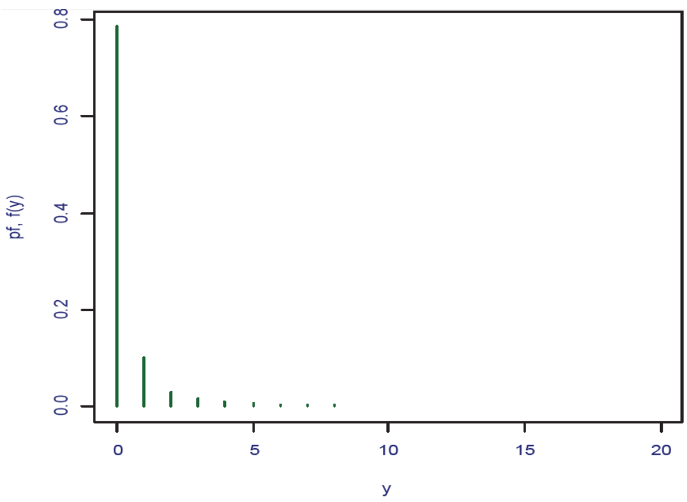
(a)



(b)



(c)



(d)

Gambar 2.2 Plot distribusi PIG $\mu = 2$ (tetap) pada (a) $\tau = 6$, (b) $\tau = 12$, (c) $\tau = 30$, (d) $\tau = 60$ (Widiari, 2016)

Distribusi PIG tidak hanya sebagai alternatif dari distribusi Poisson, tetapi juga alternatif dari distribusi binomial negatif karena ekor kanannya sangat panjang (Dean dkk, 1989). Gambar 2.1 dan Gambar 2.2 menunjukkan ekor kanan dari distribusi PIG sangat panjang. Selain itu, Gambar 2.1 menunjukkan semakin semakin besar nilai μ, maka kurva semakin bergeser ke kanan. Dengan kata lain, perubahan nilai μ mengakibatkan kurva mengalami perpindahan lokasi. Oleh karena itu, μ disebut parameter lokasi. Gambar 2.2 menunjukkan semakin besar nilai τ , maka semakin pendek ekor kanan kurva. Dengan kata lain, perubahan nilai τ mengakibatkan perubahan bentuk kurva. Oleh karena itu, τ disebut parameter bentuk.

2.5 Regresi Poisson *Inverse* Gaussian

Misalkan y_i adalah variabel respon untuk pengamatan ke-*i* dan $\mathbf{x}_i^T = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & \dots & x_{pi} \end{bmatrix}$ adalah vektor variabel penjelas untuk pengamatan ke-*i* yang berdimensi $(p+1)x1$. Asumsikan variabel random Y berdistribusi Poisson dengan mean $v_i\mu_i(\mathbf{x})$, dinotasikan dengan $Y_i \sim Poisson(v_i\mu_i(\mathbf{x}))$ dimana $i = 1, 2, ..., n$. Variabel v_i merupakan variabel random kontinu yang bernilai $(0,\infty)$. Selain itu, v_i adalah variabel random yang berdistribusi saling bebas dan identik (iid) dari distribusi campuran dengan fungsi kepekatan peluang $g(v;\boldsymbol{\tau})$ dan $\boldsymbol{\tau}$ adalah vektor parameter. Variabel random v_i berdistribusi *inverse* Gaussian dengan $E(v_i)=1$ dan $Var(v_i)=\tau$. Model regresi linier berganda tidak sesuai bila diterapkan pada variabel Y yang berdistribusi Poisson *inverse* Gaussian. Variabel Y pada model regresi linier berganda bernilai $(-\infty,\infty)$, sedangkan Y pada model Poisson *inverse* Gaussian merupakan bilangan bulat non-negatif $(0,\infty)$. Oleh karena itu, parameter μ_i dihubungkan dengan variabel penjelas menggunakan fungsi penghubung log natural (ln), yaitu:

$$\begin{aligned} \ln \mu_i v_i &= \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \\ \mu_i v_i &= \exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i\right) \\ &= \mu_i \exp\left(\varepsilon_i\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.6 Distribusi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG)

Distribusi bivariat Poisson *inverse* Gaussian (BPIG) memiliki dua variabel cacahan yang saling berkorelasi. Misalkan ada dua variabel random yang berdistribusi Poisson dan saling bebas, Y_1 dan Y_2, yang memiliki mean masing-masing $v\mu_1$ dan $v\mu_2$. Variabel *v* merupakan variabel random yang berdistribusi *inverse* Gaussian. Hal tersebut menunjukkan bahwa Y_1 dan Y_2 berdistribusi *mixed* Poisson, yaitu Poisson *inverse* Gaussian. Distribusi ini dapat mengatasi terjadinya overdispersi. Fungsi kepekatan peluang bersama untuk Y_1 dan Y_2 sebagai berikut:

$$P(y_1, y_2; \mu_1, \mu_2, \tau) = \int_0^\infty \prod_{j=1}^{2} f(y_j; \mu_j, v) g(v;\tau) dv$$

$$= \int_0^\infty \prod_{j=1}^{2} \frac{e^{(-v\mu_j)} (v\mu_j)^{y_j}}{y_j!} g(v;\tau) dv \tag{2.6}$$

dengan $g(v;\tau)$ adalah fungsi kepekatan peluang untuk *v*.

Beberapa sifat-sifat yang berkaitan dengan *mixed* Poisson pada kasus multivariat sebagai berikut (Ghitany dkk, 2012):

1. Distribusi marjinal dari Y_j, $j = 1, 2, ..., m$ adalah distribusi *mixed* Poisson dengan distribusi campuran yang sama $g(v;\tau)$.
2. Varians dari Y_j adalah

   $Var(Y_j) = \mu_j + \mu_j^2 \tau$

   dengan τ adalah varians dari *v*, $Var(v) = \tau$.
3. Kovarians antara Y_j dan Y_l adalah

   $Cov(Y_j, Y_l) = \mu_j \mu_l \tau, \ j \neq l$

   Karena $\tau > 0$, maka kovarians (korelasi) antara Y_j dan Y_l selalu positif.
4. *Generalized variance ratio* (GVR) antara model multivariat *mixed* Poisson, yaitu $Y_j \sim Poisson(v\mu_j), j = 1, 2, ..., m, v \sim g(v;\tau)$, dan model Poisson sederhana, yaitu

   $W_j \sim Poisson(\mu_j), j = 1, 2, ..., m$ sebagai berikut:

$$GVR = \frac{\sum_{j=1}^{m} Var\left(Y_j\right) + 2\sum_{j<l} Cov\left(Y_j, Y_l\right)}{\sum_{j=1}^{m} Var\left(W_j\right)} = 1 + \tau \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$

Jika GVR bernilai lebih dari satu, maka variabel tersebut berdistribusi kontinu campuran. Distribusi campuran ini mengindikasikan adanya overdispersi multivariat. Selain itu, jika nilai GVR meningkat, maka varians dari distribusi campurannya juga meningkat.

Model BPIG didasarkan pada distribusi campuran *inverse* Gaussian yang memiliki fungsi kepekatan peluang pada persamaan (2.2). Berdasarkan persamaan (2.6), distribusi BPIG memiliki fungsi kepekatan bersama sebagai berikut:

$$f\left(y_1, y_2; \mu_1, \mu_2, \tau\right) = \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu_1^{y_1} \mu_2^{y_2} e^{\frac{1}{\tau}} K_s\left(z\right)}{\left(z\tau\right)^{y_1+y_2} y_1! y_2!} \quad (2.7)$$

dengan $s = y_1 + y_2 - \frac{1}{2}$ dan $z = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\left(\mu_1 + \mu_2\right)}{\tau}}$, sehingga $K_s(z)$ $= K_{y_1+y_2-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau}\sqrt{1 + 2\tau\left(\mu_1 + \mu_2\right)}\right)$ adalah modifikasi fungsi Bessel jenis ketiga.

2.7 Regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG)

Model regresi bivariat adalah model regresi dengan dua variabel respon yang berkorelasi dan satu atau lebih variabel penjelas. Pemodelan regresi bivariat Poisson *inverse* Gaussian (BPIG) memerlukan fungsi penghubung log natural (ln). Parameter μ_{ij} dihubungkan dengan variabel penjelas menggunakan fungsi penghubung ln, sehingga model regresi BPIG dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \ln \mu_{ij} v_i &= \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_j + \varepsilon_{ij} \\ \mu_{ij} v_i &= \exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_j + \varepsilon_{ij}\right) \\ &= \mu_i \exp\left(\varepsilon_{ij}\right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

dengan

$\mathbf{x}_i^T = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & \ldots & x_{pi} \end{bmatrix}$ adalah vektor variabel penjelas pada pengamatan ke-*i* dan variabel respon ke-*j* ($i = 1, 2, ..., n$),

$\boldsymbol{\beta}_j = \begin{bmatrix} \beta_{j0} & \beta_{j1} & \beta_{j2} & \dots & \beta_{jp} \end{bmatrix}^T$ adalah vektor koefisien regresi yang berdimensi $(p+1)x1$ pada variabel respon ke-*j*.

Dalam model ini, koefisien regresi $\boldsymbol{\beta}_j$ menginterpretasikan besarnya perubahan ekspektasi variabel respon (μ_j) dalam ln yang disebabkan oleh perubahan rata-rata per satuan unit variabel penjelas ($\mathbf{x}_j$). Oleh karena itu, peningkatan/penurunan $\mathbf{x}_j$ sebesar satu satuan dapat mengakibatkan peningkatan/penurunan ln rata-rata variabel respon sebesar $\boldsymbol{\beta}_j$.

2.8 Korelasi

Analisis korelasi adalah suatu analisis untuk mengukur kekuatan hubungan antara dua variabel random Y_1 dan Y_2 dengan menghasilkan suatu bilangan yang disebut koefisien korelasi. Koefisien korelasi dilambangkan dengan *r*. Koefisien korelasi dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut (Draper dan Smith, 1992):

$$r_{y_1 y_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{1i}-\bar{y}_1)(y_{2i}-\bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_{1i}-\bar{y}_1)^2 \sum_{i=1}^{n}(y_{2i}-\bar{y}_2)^2}}$$

Koefisien korelasi mengukur sejauh mana titik-titik pengamatan menggerombol di sekitar garis lurus. Nilai koefisien korelasi berkisar antara -1 dan 1. Tanda pada koefisien korelasi menunjukkan hubungan positif dan negatif. Jika nilai korelasi mendekati positif atau negatif 1, maka kedua variabel memiliki hubungan yang erat. Kedua variabel tidak memiliki hubungan erat ketika nilai korelasinya adalah 0. Nilai korelasi positif menunjukkan hubungan berbanding lurus antara dua variabel, sedangkan nilai korelasi negatif menunjukkan hubungan berbanding terbalik.

Pengujian korelasi untuk variabel respon dilakukan dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \rho = 0$ (Tidak terdapat hubungan antara Y_1 dan Y_2)

$H_1 : \rho \neq 0$ (Terdapat hubungan antara Y_1 dan Y_2)

Statistik uji yang digunakan pada pengujian ini adalah

$$t = \frac{r_{(y_1,y_2)}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(r_{(y_1,y_2)})^2}} \qquad (2.9)$$

Kriteria penolakan H_0 adalah tolak H_0 apabila $\left|t_{hitung}\right| > t_{(\frac{\alpha}{2},n-2)}$.

2.9 Pengujian Distribusi Bivariat Poisson

Pengujian distribusi bivariat Poisson dilakukan untuk mengetahui variabel respon (Y_1 dan Y_2) mengikuti distribusi bivariat Poisson atau tidak. Loukas dan Kemp's (1986) dalam Best (1999) melakukan pengujian distribusi bivariat Poisson dengan pendekatan *index of dispersion test* (I_B). Hipotesis yang digunakan adalah

H_0: Variabel respon (Y_1 dan Y_2) mengikuti distribusi bivariat Poisson

H_1: Variabel respon (Y_1 dan Y_2) tidak mengikuti distribusi bivariat Poisson

Statistik uji yang digunakan adalah

$$I_B = \frac{n(\bar{Y}_2 S_{Y_1}^2 - 2m_{11}^2 + \bar{Y}_1 S_{Y_2}^2)}{\left(\bar{Y}_1\bar{Y}_2 - m_{11}^2\right)} \qquad (2.10)$$

dengan.

n = jumlah data pada variabel respon (Y_1 dan Y_2)

$\bar{Y}_1$ = nilai rata rata variabel respon (Y_1)

$\bar{Y}_2$ = nilai rata rata variabel respon (Y_2)

$$S_{Y_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{1i} - \bar{Y}_1\right)^2}{n} \text{ dan } S_{Y_2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{2i} - \bar{Y}_2\right)^2}{n}$$

$$m_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{1i} - \bar{Y}_1\right)\left(Y_{2i} - \bar{Y}_2\right)}{n}$$

Daerah penolakan H_0 adalah $I_B > \chi^2_{(\alpha;2n-3)}$ (Best, 1999).

2.10 Multikolinieritas

Multikolinieritas disebabkan oleh adanya hubungan linier yang kuat, baik sempurna maupun tidak sempurna, di antara beberapa atau semua variabel penjelas dalam model regresi. Multikolinieritas pertama kali ditemukan oleh Ragnar Frisch. Konsekuensi jika multikolinieritas diabaikan, di antaranya:

1. Standar error semakin besar dengan meningkatnya korelasi antar variabel penjelas.
2. Selang kepercayaaan suatu parameter menjadi semakin lebar.
3. Peluang kesalahan tipe II (terima H_0 padahal H_0 salah) semakin besar.
4. Pada multikolinieritas yang tinggi tapi tidak sempurna, estimator koefisien regresi bisa diperoleh, tapi estimator dan standar error menjadi sensitif terhadap perubahan data
5. Pada multikolinieritas yang tinggi tapi tidak sempurna bisa terjadi R^2 yang tinggi tetapi tidak ada satupun variabel penjelas yang signifikan secara statistik.

Salah satu cara untuk mendeteksi terjadinya multikolinieritas adalah dengan *Variance Inflation Factor* (VIF), yaitu nilai yang menunjukkan kenaikan varians dari parameter yang diduga. Rumus VIF sebagai berikut:

$$VIF = \frac{1}{1-R_k^2} \tag{2.11}$$

dengan R_k^2 adalah koefisien determinasi antara variabel penjelas ke-k dengan variabel penjelas lainnya. Multikolinieritas terjadi jika nilai VIF lebih dari 10 (Draper dan Smith, 1992).

2.11 Pengujian Hipotesis secara Parsial pada Model Regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG)

a. Pengujian hipotesis secara parsial terhadap parameter β

   Menurut Widiari (2016), langkah-langkahnya sebagai berikut:

   1. Menentukan hipotesis.

      $H_0 : \beta_{jk} = 0$

      $H_1 : \beta_{jk} \neq 0$ dengan $j = 1, 2$ dan $k = 1, 2, \ldots, p$

2. Menentukan statistik uji.

$$Z = \frac{\hat{\beta}_{jk}}{SE(\hat{\beta}_{jk})}$$

dengan $SE\left(\hat{\beta}_{jk}\right)$ merupakan akar elemen diagonal utama ke-(k+1) untuk j = 1 dan ke-(k+p+2) dari matriks varians dan kovarians yang diperoleh dari persamaan

$$\hat{\text{cov}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = -E\left(\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)$$

dengan

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \left.\frac{\partial^2 \ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T \partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

3. Menentukan daerah penolakan H_0.

   Kriteria penolakan H_0, yaitu jika $\left|Z_{hitung}\right|$ lebih besar dari $Z_{\alpha/2}$ dengan α adalah tingkat signifikansi yang digunakan.

b. Pengujian hipotesis terhadap parameter τ

   Menurut Widiari (2016), langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Menentukan hipotesis.

$$H_0 : \tau = 0$$
$$H_1 : \tau \neq 0$$

2. Menentukan statistik uji.

$$Z = \frac{\widehat{\tau}}{SE\left(\hat{\tau}\right)}$$

dengan $SE\left(\hat{\tau}\right)$ merupakan akar elemen diagonal utama ke-$\left(2p+3\right)$ dari matriks varians dan kovarians yang diperoleh dari persamaan

$$\hat{\text{cov}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = -E\left(\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)$$

dengan

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \left.\frac{\partial^2 \ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T \partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

3. Menentukan daerah penolakan H_0.

   Kriteria penolakan H_0, yaitu jika $\left|Z_{hitung}\right|$ lebih besar dari $Z_{\alpha/2}$ dengan α adalah tingkat signifikansi yang digunakan.

2.12 *Akaike Information Criterion* (AIC)

AIC adalah sebuah kriteria dalam memilih model yang terbaik. Model dikatakan paling baik jika model tersebut memiliki nilai AIC yang paling kecil. Pemilihan model dengan AIC menggunakan prinsip *likelihood*. Adapun rumus untuk menentukan nilai AIC sebagai berikut:

$$AIC = 2q - 2\ln\left(L\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_j, \hat{\tau}, j = 1, 2\right)\right) \tag{2.12}$$

dengan q adalah banyaknya parameter yang diestimasi dalam model dan L adalah nilai maksimum dari fungsi *likelihood* suatu model (Hu, 2007).

2.13 HIV dan AIDS serta Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS

HIV dan AIDS adalah masalah dan tantangan serius terhadap kesehatan masyarakat dunia, baik di negara-negara maju maupun negara-negara berkembang. Penyakit HIV berbeda dengan AIDS. HIV atau *Human Immunodeficiency Virus* adalah sejenis virus yang menyerang/menginfeksi sel darah putih yang menyebabkan turunnya kekebalan tubuh manusia. AIDS atau *Acquired Immune Deficiency Syndrome* adalah sekumpulan gejala penyakit yang timbul karena turunnya kekebalan tubuh yang disebabkan oleh HIV. Akibat menurunnya kekebalan tubuh, maka orang tersebut sangat mudah terkena berbagai penyakit infeksi (infeksi oportunistik) yang sering berakibat fatal. Pengidap HIV memerlukan pengobatan dengan *Antiretroviral (*ARV) untuk menurunkan jumlah virus HIV di dalam tubuh agar tidak masuk ke dalam stadium AIDS, sedangkan pengidap AIDS memerlukan pengobatan ARV untuk mencegah terjadinya infeksi oportunistik dengan berbagai komplikasinya.

Di seluruh dunia pada tahun 2013 ada 35 juta orang hidup dengan HIV, meliputi 16 juta perempuan dan 3,2 juta anak berusia kurang dari 15 tahun. Jumlah infeksi baru HIV pada tahun 2013 sebesar 2,1 juta yang terdiri atas 1,9 juta dewasa dan 240.000 anak berusia kurang dari 15 tahun. Jumlah kematian AIDS sebanyak 1,5 juta yang terdiri atas 1,3 juta dewasa dan 190.000 anak berusia kurang dari 15 tahun (Kemenkes RI, 2014). Yeboah dan Ansong (2014) menyimpulkan bahwa HIV/AIDS memperlambat pertumbuhan GDP per kapita pada 86 negara berkembang dan sedang berkembang serta sub-sample negara miskin tahun 1990 dan 2012.

Di Indonesia, HIV/AIDS pertama kali ditemukan di Bali pada tahun 1987 yang kemudian menyebar ke seluruh Indonesia. Berdasarkan penelitian tahun 1987-2014, pola penularan HIV terjadi pada kelompok heteroseksual, pengguna NAPZA suntik, dan kelompok homoseksual. Lima besar kasus HIV terbanyak terjadi di Provinsi DKI Jakarta, Jawa Timur, Papua, Jawa Barat, dan Bali, sedangkan lima besar kasus AIDS terbanyak terjadi di Papua, Jawa Timur, DKI Jakarta, Bali, dan Jawa Barat. Berdasarkan penelitian yang dilakukan Kemenkes RI tahun 2014, transmisi HIV paling banyak terjadi pada kelompok laki-laki, heteroseksual, usia 25-49 tahun. Kasus AIDS terbanyak pada kelompok laki-laki, heteroseksual, usia 20-19 tahun, sedangkan berdasarkan profesi penderita AIDS terbanyak adalah ibu rumah tangga.

Dinas Kesehatan (Dinkes) Provinsi Jawa Timur mencatat ada 23.924 Orang Dengan HIV/AIDS (ODHA) pada tahun 2015. Jumlah kasus kumulatif AIDS yang ditemukan sampai tahun 2015 sebanyak 14.498, yaitu 8.979 orang berjenis kelamin laki-laki dan 5.519 orang berjenis kelamin perempuan. Upaya pencegahan penularan HIV dan AIDS sudah dilakukan Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Timur, diantaranya memberikan penyuluhan “Aku Bangga Aku Tahu (ABAT) Cara Cegah HIV/AIDS” di beberapa kabupaten/kota yang sudah dimulai sejak tahun 2012, melakukan kegiatan *Harm Reduction* pada pengguna NAPZA suntik, dan program penyediaan kondom untuk mencegah penularan melalui hubungan seks dengan penderita HIV. Berdasarkan data dari Dinkes Provinsi Jawa Timur, ada 488 ibu hamil yang menderita HIV dari 68.688 ibu hamil yang diperiksa.

Sejak pertama kali kasus HIV ditemukan di Kabupaten Trenggalek pada tahun 2004, jumlah kasus HIV dan AIDS di kabupaten ini semakin meningkat. Menurut Kepala Bidang Pencegahan dan Pemberantasan Penyakit dan Penyakit Lingkungan (P2PL) Dinkes Kabupaten Trenggalek, rata-rata peningkatan jumlah kasus HIV dan AIDS di atas 10 kasus per tahun. Sebagian besar penderita HIV dan AIDS merupakan penderita yang tertular saat mereka sedang berada di daerah yang memiliki penderita HIV dan AIDS terbanyak di Indonesia. Jumlah kasus HIV/AIDS di Kabupaten Ponorogo juga mengalami lonjakan. Lonjakkan tertinggi terjadi pada tahun 2010-2014. Penyebaran penyakit ini bahkan sudah merambah ke kalangan pelajar.

Penelitian mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus HIV dan AIDS sudah relatif banyak dilakukan. Mondal dan Shitan (2013) menyimpulkan faktor risiko kesehatan dan sosial memiliki hubungan dengan infeksi HIV secara global. Tingkat prevalensi kontrasepsi yang tinggi, ketersediaan tenaga medis, dan pendidikan memiliki peranan yang penting dalam pencegahan HIV. Selain itu, banyaknya penduduk yang berusia produktif dan persentasi penduduk beragama muslim yang rendah mempertinggi penyebaran HIV. Zakanis, Alvarez, dan Li (2007) melakukan penelitan dengan kesimpulan negara dengan kepadatan penduduk lebih rendah yang menyediakan layanan kesehatan lebih baik dan nilai PDB yang lebih besar merupakan negara-negara dengan epidemi HIV/AIDS lebih rendah. Penelitian Moran dan Jordaan (2007) menunjukkan bahwa prevalensi HIV di Rusia berhubungan kuat dengan tingginya urbanisasi antar region, mobilitas penduduk domestik, tingkat kriminalitas, dan pertumbuhan ekonomi.

Penelitian mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus HIV dan AIDS sudah relatif banyak dilakukan di Indonesia dengan studi kasus pada daerah yang berbeda-beda. Widiari (2016) menyimpulkan bahwa faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV di Provinsi Jawa Timur tahun 2013 adalah persentase penduduk dengan pendidikan SLTA ke atas, persentase pasangan usia subur yang menggunakan kondom, dan rasio fasilitas kesehatan. Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan pemodelan regresi Poisson inverse Gaussian. Lalu, pengembangan pemodelan regresi Poisson inverse Gaussian dengan memperhatikan faktor keheterogenan spasial dilakukan oleh Purnamasari (2016). Peneliti mengembangkan pemodelan tersebut menjadi *Geographically Weighted Poisson Inverse Gaussian Regression* (GWPIGR). Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian tersebut adalah berdasarkan pengujian parameter secara serentak persentase penduduk miskin, persentase penduduk dengan pendidikan tertinggi SMA ke atas, persentase pasangan usia subur, rasio jumlah tenaga kerja, rasio fasilitas kesehatan, persentase daerah perkotaan, dan persentase penduduk usia 25-34 tahun berpengaruh signifikan terhadap jumlah kasus baru HIV di Provinsi Jawa Timur. Namun, variabel penjelas yang signifikan berpengaruh pada setiap kabupaten/kota berbeda-beda.

Umami (2015) melakukan penelitian di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. Analisis yang digunakan adalah *Bivariate Zero Inflated Poisson* karena data jumlah kasus mengalami overdispersi. Kesimpulan yang diperoleh adalah persentase kelompok umur 25-29 tahun, persentase penduduk dengan pendidikan SMA, dan persentase pengguna kondom merupakan faktor-faktor yang signifikan mempengaruhi jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. Ratnasari dan Purhadi (2014) dalam penelitiannya menyimpulkan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus AIDS di Jawa Timur adalah persentase penduduk tamat SMA, persentase pengguna kondom, persentase penduduk kelompok umur 25-29 tahun, persentase daerah berstatus desa, dan persentase penduduk miskin.

Penelitian yang sama juga dilakukan oleh Kambu (2012). Penelitian tersebut menyimpulkan faktor-faktor yang berhubungan dengan tindakan pencegahan penularan HIV oleh ODHA di Sorong di antaranya umur, pengetahuan, tingkat pendidikan, dan status perkawinan. Faktor umur paling berpengaruh terhadap pencegahan penularan HIV. ODHA yang berumur muda 5,5 kali lebih sedikit memiliki kesadaraan untuk melakukan tindakan pencegahan HIV dibandingkan dengan ODHA yang berumur lebih tua. Susilowati (2009) menyimpulkan bahwa faktor risiko yang terbukti berpengaruh terhadap kejadian HIV dan AIDS di Semarang dan sekitarnya, yaitu riwayat penyakit menular seksual, riwayat penyakit dalam keluarga ada yang menderita HIV/AIDS, tingkat pendidikan yang rendah, dan status penggunaan narkoba suntik/IDU.

BAB 3
METODE PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Profil Kesehatan Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. Data tersebut merupakan data pada tahun 2012 (Lampiran 3). Unit pengamatan yang diambil adalah kecamatan yang ada di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. Ada 35 kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo, yaitu 14 kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan 21 kecamatan di Kabupaten Ponorogo.

3.2 Variabel Penelitian

Ada dua variabel respon $\left(Y_1 \text{ dan } Y_2\right)$ dan lima variabel penjelas $X_1, X_2, X_3, X_4,$ dan X_5 yang digunakan dalam penelitian ini (Tabel 3.1).

Tabel 3.1 Variabel Penelitian dan Tipe Data

Variabel	Keterangan	Tipe Data
Y_1	Jumlah kasus baru HIV	Diskret
Y_2	Jumlah kasus baru AIDS	Diskret
X_1	Persentase penduduk berusia umur 25-29 tahun	Kontinu
X_2	Persentase penduduk dengan tingkat pendidikan rendah	Kontinu
X_3	Persentase Pasangan Usia Subur (PUS) yang menggunakan kondom	Kontinu
X_4	Persentase penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan	Kontinu
X_5	Persentase penduduk yang mendapatkan Jaminan Kesehatan Masyarakat (Jamkesmas)	Kontinu

Sumber : Profil Kesehatan Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo, 2012

Definisi operasional dari variabel penelitian sebagai berikut:

1. Jumlah kasus baru HIV

Jumlah kasus baru HIV pada setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

2. Jumlah kasus baru AIDS

   Jumlah kasus baru AIDS pada setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

3. Persentase penduduk berusia 25-29 tahun

   Hasil bagi antara jumlah penduduk yang berusia 25-29 tahun dan jumlah total penduduk dikali 100 pada setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

4. Persentase penduduk dengan tingkat pendidikan rendah

   Hasil bagi antara jumlah penduduk yang hanya tamat sampai SMA dan jumlah total penduduk yang berusia 10 tahun ke atas dikali 100 pada setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

5. Persentase Pasangan Usia Subur (PUS) yang menggunakan kondom

   Hasil bagi antara jumlah PUS yang menggunakan kondom dan jumlah total penduduk dikali 100 pada setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. PUS adalah suami istri yang istrinya berumur antara 15-49 tahun dan masih haid atau pasangan suami istri yang istrinya berumur kurang dari 15 tahun dan sudah haid atau istri berumur 50 tahun tetapi masih haid (BKKBN, 2007).

6. Persentase penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan

   Hasil bagi antara jumlah penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan dan jumlah total penduduk dikali 100 pada setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

7. Persentase penduduk yang mendapatkan Jaminan Kesehatan Masyarakat (Jamkesmas)

   Hasil bagi antara jumlah penduduk yang mendapatkan Jamkesmas dan jumlah total penduduk dikali 100 pada setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

3.3 Tahapan Penelitian

Langkah-langkah analisis data untuk setiap tujuan penelitian sebagai berikut:

3.3.1 Pendugaan parameter model regresi Bivariat Poisson Inverse Gaussian (BPIG)

Langkah-langkah pendugaan parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan algoritma *Newton-Raphson* (Gambar 3.1) untuk menyelesaikan tujuan ini sebagai berikut:

1. Ambil n sampel random.

   $\left(Y_{1i}, Y_{2i}, X_{1i}, X_{2i}, ..., X_{pi}\right)$

   dengan $i = 1, 2, ..., n$.

2. Buat fungsi *likelihood*.

   $$L\left(\boldsymbol{\beta}_j, \tau, j = 1, 2\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_1, y_2; \boldsymbol{\beta}_j, \tau, j = 1, 2\right)$$

3. Buat log natural (ln) dari fungsi *likelihood*.

   $l\left(\boldsymbol{\beta}_j, \tau, j = 1, 2\right) = \ln L\left(\boldsymbol{\beta}_j, \tau . j = 1, 2\right)$

4. Buat turunan pertama dari ln fungsi *likelihood* terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}_j$ dan τ. Lalu, turunan pertamanya disamadengan-kan nol.

   Syarat perlu bahwa $\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\beta}_{j0}$ dan $\tau = \tau_0$ adalah

   $$\frac{\partial l\left(\boldsymbol{\beta}_j, \tau, j = 1, 2\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_j} = \mathbf{0} \text{ dan } \frac{\partial l\left(\boldsymbol{\beta}_j, \tau, j = 1, 2\right)}{\partial \tau} = 0 .$$

   Misalkan $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \\ \hat{\tau} \end{bmatrix}$. Syarat cukup $H\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \left.\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T \partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}}$ merupakan definit negatif, maka $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ memaksimumkan $l\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ atau meminimumkan $l\left(\boldsymbol{\theta}\right)$.

Turunan pertama fungsi ln l*ikelihood* merupakan fungsi yang tidak eksplisit. Salah satu solusi untuk menduga parameter dengan algoritma *Newton-Raphson*. Algoritma *Newton-Raphson* dilakukan dengan menggunakan persamaan:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right) \tag{3.1}$$

dimana

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \tau \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{g}^T\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} & \dfrac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} & \dfrac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau} \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}}$$

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T \partial \boldsymbol{\beta}_1} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T \partial \boldsymbol{\beta}_2} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \tau} \\ & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T \partial \boldsymbol{\beta}_2} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \tau} \\ \textit{simetris} & & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau^2} \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}}$$

Adapun langkah-langkah pendugaan parameter dengan algoritma *Newton-Raphson* sebagai berikut:

1. Tentukan nilai awalan (*initial value*) untuk parameter $\boldsymbol{\beta}_j^{(0)}$ dan $\tau^{(0)}$ dengan menggunakan fungsi kepekatan peluang distribusi univariat Poisson *inverse* Gaussian, yaitu:

   $$\mu_j = e^{\mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}_j} \quad \text{dengan} \quad \mu_j^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}}{n}.$$

2. Tentukan vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)$ dengan menggunakan turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap parameter yang ingin diduga $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$.
3. Tentukan matriks Hessian $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)$ dengan mengunakan turunan kedua fungsi ln *likelihood* terhadap parameter yang ingin diduga $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$.

4. Masukkan nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$ ke dalam elemen-elemen vektor gradien $\mathbf{g}$ dan matriks Hessian $\mathbf{H}$, sehingga diperoleh vektor $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}\right)$ dan matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}\right)$.
5. Tentukan inverse dari matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}\right)$.
6. Lakukan iterasi mulai dari $r = 0$ pada persamaan (3.1).
7. Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}$ merupakan kumpulan penduga parameter yang konvergen saat iterasi ke-*r*.
8. Jika penduga parameter belum konvergen, maka kembali ke Langkah 4. Iterasi akan berhenti jika nilai $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right\| \leq \varepsilon$.

3.3.2 Pengujian hipotesis secara serentak pada model regresi Bivariat Poisson Inverse Gaussian (BPIG) dengan menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT)

Langkah-langkahnya (Gambar 3.2) sebagai berikut:

1. Menentukan hipotesis.

   H_0: $\beta_{j1} = \beta_{j2} = ... = \beta_{jp} = 0$ dengan $j = 1, 2$

   H_1: paling sedikit ada satu $\beta_{jk} \neq 0$ dengan $j = 1, 2$ dan $k = 1, 2, ..., p$
2. Menentukan himpunan parameter di bawah populasi, Ω.

   $\Omega = \left\{\boldsymbol{\beta}_j, \tau, j = 1, 2\right\}$
3. Menentukan fungsi *likelihood* di bawah populasi, $L(\Omega)$.

   $$L(\Omega) = L\left(\boldsymbol{\beta}_j, \tau, j = 1, 2\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_{i1}, y_{i2}; \boldsymbol{\beta}_j, \tau, j = 1, 2\right)$$

   $$L\left(\hat{\Omega}\right) = \max_{\Omega}\left(L(\Omega)\right)$$

   $L\left(\hat{\Omega}\right)$ adalah nilai *maximum likelihood* untuk model lengkap yang melibatkan variabel penjelas.
4. Menentukan himpunan parameter di bawah H_0 benar, ω.

$$\omega = \left\{ \beta_{j0}, \tau, j = 1, 2 \right\}$$

5. Menentukan fungsi *likelihood* di bawah H_0 benar, $L(\omega)$.

$$L(\omega) = L\left(\beta_{0j}, \tau, j = 1, 2\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_{i1}, y_{i2}; \beta_{0j}, \tau, j = 1, 2\right)$$

$$L(\hat{\omega}) = \max_{\omega}\left(L(\omega)\right)$$

$L(\hat{\omega})$ adalah nilai *maximum likelihood* untuk model tanpa melibatkan variabel penjelas.

6. Menentukan statistik uji dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT).

$$G^2 = -2 \ln \left(\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} \right)$$
$$= 2\left[\ln\left(L(\widehat{\Omega})\right) - \ln\left(L(\widehat{\omega})\right) \right]$$

7. Menentukan daerah penolakan H_0.

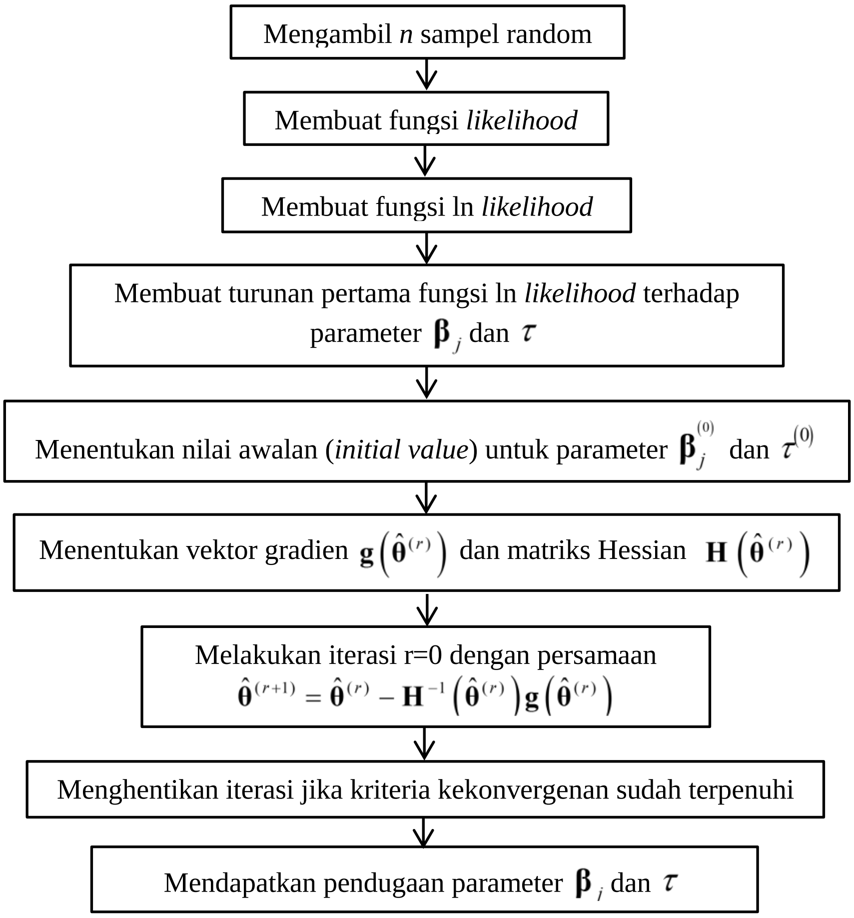
Kriteria penolakan H_0 jika nilai $G^2 > \chi^2_{\alpha,v}$ dengan *v* adalah derajat bebas yang diperoleh dari jumlah parameter di bawah populasi dikurangi jumlah parameter di bawah H_0.

3.3.3 Penentuan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV dan AIDS dengan model BPIG

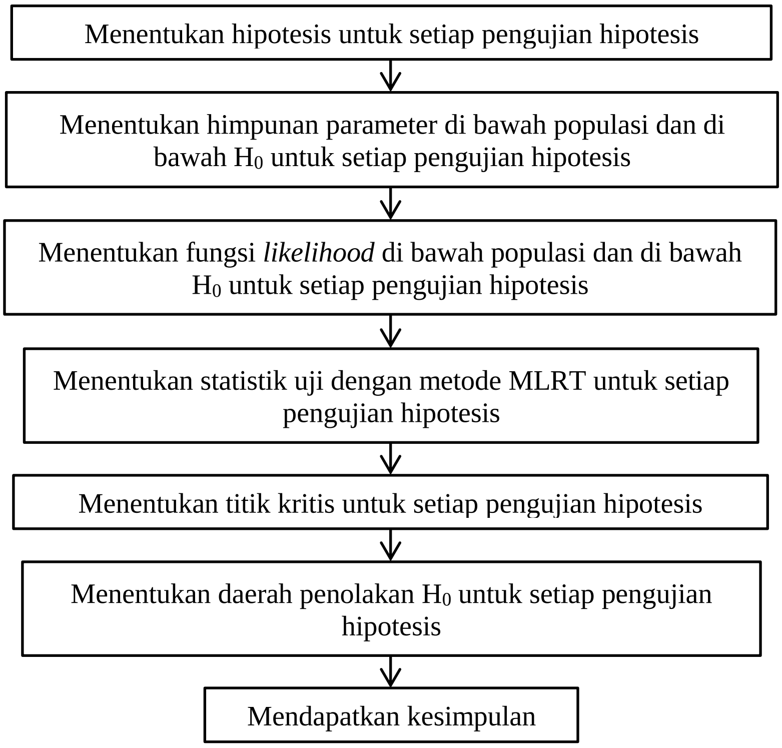
Langkah-langkahnya (Gambar 3.3) sebagai berikut:

1. Melakukan analisis statistika deskriptif terhadap semua variabel, baik variabel respon maupun variabel penjelas.
2. Melakukan uji korelasi antar variabel respon. Pengujian ini menggunakan persamaan (2.9).
3. Melakukan uji distribusi bivariat Poisson. Pengujian ini menggunakan persamaan (2.10).
4. Mendeteksi multikolinieritas antar variabel penjelas dengan menggunakan nilai VIF. Nilai VIF diperoleh dengan menggunakan persaman (2.11).

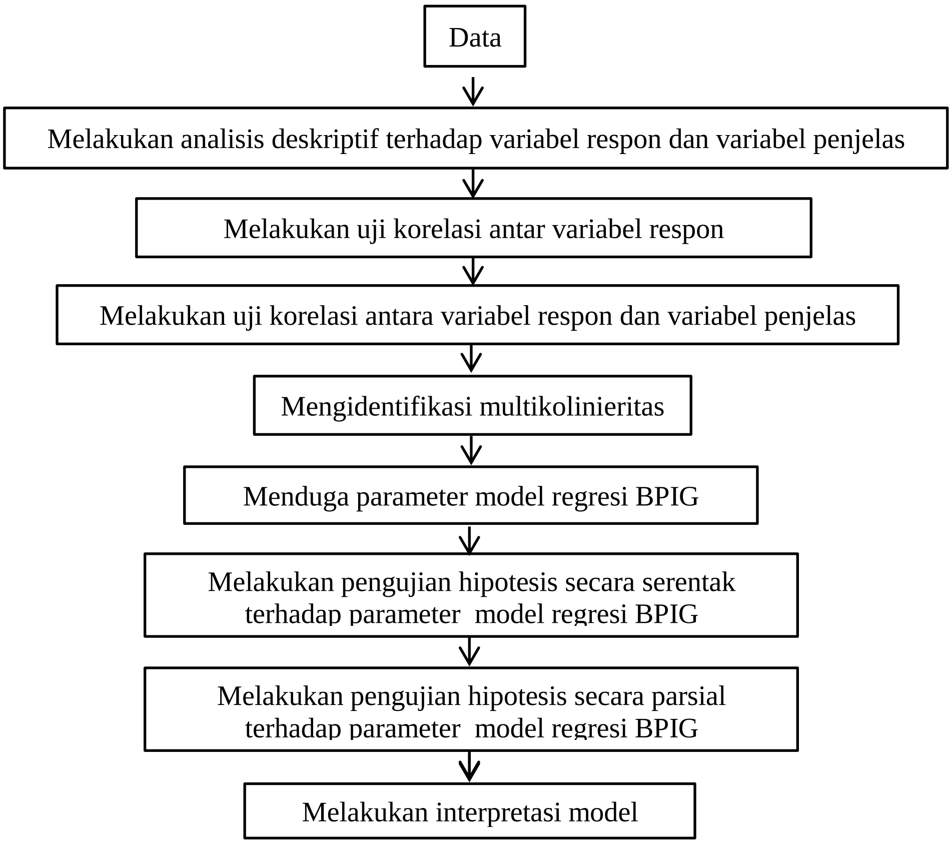
5. Melakukan pendugaan parameter model regresi BPIG. Pendugaan parameter menggunakan metode MLE dengan algoritma *Newton-Raphson*.
6. Melakukan uji hipotesis terhadap parameter model regresi BPIG. Pengujian hipotesis dilakukan secara serentak dan parsial.
7. Melakukan interpretasi model regresi BPIG yang diperoleh.



Gambar 3.1 Langkah-langkah pendugaan parameter model regresi BPIG



Gambar 3.2 Langkah-langkah pengujian hipotesis model regresi BPIG



Gambar 3.3 Langkah-langkah menentukan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV dan AIDS

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 4
HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan penurunan rumus untuk menduga parameter model regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG) dengan *Newton-Raphson* (NR). Setelah memperoleh penduga parameter, pengujian hipotesis secara serentak dan parsial terhadap parameter regresi BPIG dilakukan. Selanjutnya, model regresi BPIG diterapkan pada jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012 untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhinya.

4.1 Pendugaan Parameter Regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG)

Estimasi parameter dalam regresi BPIG menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Parameter yang diduga adalah $\boldsymbol{\beta}_j$ dan τ . Metode MLE dilakukan dengan mengambil *n* sampel random terlebih dahulu, $\left(Y_{1i}, Y_{2i}, X_{1i}, X_{2i}, ..., X_{pi}\right)$ dengan $k = 1, 2, ..., p$ dan $i = 1, 2, ..., n$.

Fungsi kepekatan peluang bersama Y_1 dan Y_2 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(y_j; \boldsymbol{\beta}_j, \tau, j=1,2) &= e^{\frac{1}{\tau}} K_s(z) \left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_j\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_j - 1\right)}{4}} \prod_{j=1}^{2} \frac{\mu_j^{y_j}}{y_j!} \\
&= e^{\frac{1}{\tau}} K_s(z) \left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_j}\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_j - 1\right)}{4}} \prod_{j=1}^{2} \frac{e^{y_j \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_j}}{y_j!}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

dimana $s = \sum_{j=1}^{2} y_j - \frac{1}{2}$ dan $z = \frac{1}{\tau}\left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_j\right)^{\frac{1}{2}}$, sehingga $K_s(z) = K_{\sum_{j=1}^{2} y_j - \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\tau}\left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_j\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ adalah fungsi Bessel modifikasi jenis ketiga. Bentuk umum fungsi Bessel modifikasi ketiga ditulis sebagai berikut (Willmot, 1987):

$$K_s(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}\sum_{w=0}^{s-\frac{1}{2}}\frac{\left(s-\frac{1}{2}+w\right)!}{\left(s-\frac{1}{2}-w\right)!w!}(2z)^{-m}$$

Fungsi Bessel memiliki beberapa propertis penting (Shoukri dkk, 2004) di antaranya sebagai berikut:

$$K_{\frac{1}{2}}(z)=K_{-\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}$$

$$K_{\frac{3}{2}}(z)=\left(1+\frac{1}{z}\right)K_{\frac{1}{2}}(z)$$

Fungsi *likelihood* dari persamaan (4.1) adalah

$$L\left(\boldsymbol{\beta}_j,\tau, j=1,2\right)=e^{\frac{n}{\tau}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\left[K_{s_i}(z_i)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}}\prod_{j=1}^{2}\frac{e^{y_{ij}\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}}{y_{ij}!}\right]$$

Fungsi *likelihood* di atas dilogaritmanaturalkan, sehingga diperoleh fungsi ln *likelihood* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}l\left(\boldsymbol{\beta}_j,\tau, j=1,2\right)=&\frac{n}{\tau}-\frac{n}{2}\ln(\tau)+\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}(z_i)\right]+\\&-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}\ln\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j+\\&-\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}!\right)\end{aligned}$$

Penurunan fungsi ln *likelihood* dapat dilihat pada Lampiran 1. Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ adalah

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln K_{s_i}(z_i)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\sum_{i=1}^{n}y_{i1}\mathbf{x}_i^T \qquad (4.2)$$

Berdasarkan tabel integral dalam Gradshtey dan Ryzhik (1980) dalam Shoukri, dkk (2004) diketahui bahwa

$$K_{s+1}(z) = K_{s-1}(z) + \frac{2s}{z} K_s(z) \tag{4.3}$$

$$z \frac{\partial K_s(z)}{\partial z} = -zK_{s+1}(z) + sK_s(z) \tag{4.4}$$

Berdasarkan persamaan (4.4), turunan pertama $K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)$ terhadap z_i, yaitu:

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}{\partial (z_i)} = \frac{-z_i K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i) + \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2} \right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}{z_i}$$

$$= -K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i) + \frac{\tau \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2} \right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}{\sqrt{1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}}} \tag{4.5}$$

Turunan pertama $\ln K_{s_i}(z_i)$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \frac{\partial \ln K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}$$

$$= \left[-\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} + \frac{\tau \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}}} \right] \frac{\mu_{i1} \mathbf{x}_i^T}{\sqrt{1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}}}$$

Diketahui $M(y_i) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}}} \frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}$, maka

$$\frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \left[-\left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} M(y_i) + \frac{\tau \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}}} \right] \frac{\mu_{i1} \mathbf{x}_i^T}{\sqrt{1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}}} \tag{4.6}$$

Substitusi persamaan (4.6) ke persamaan (4.2).

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i1}\mathbf{x}_i^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\left[-\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} M(y_i) + \frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}\right]\frac{\mu_{i1}x_i^T}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}\right.$$

$$\left. - \frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)} + y_{i1}\mathbf{x}_i^T\right\}$$

$$= \ldots = \sum_{i=1}^{n}\left[y_{i1} - M(y_i)\mu_{i1}\right]\mathbf{x}_i^T \tag{4.7}$$

Penjabaran secara terperinci dapat dilihat pada Lampiran 1. Jika persamaan (4.7) disamadengankan nol

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i1} - M(y_i)\mu_{i1}\right]\mathbf{x}_i^T = 0$$

maka pada turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ membentuk persamaan yang tidak eksplisit. Turunan kedua persamaan (4.7) terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, dan τ perlu dilakukan untuk mengestimasi parameter model regresi BPIG.

Turunan kedua fungsi ln l*ikelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ adalah

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T \partial \boldsymbol{\beta}_1} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\left(y_{i1}\mathbf{x}_i^T\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} - \frac{\partial\left[M(y_i)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T\right]}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right\} \tag{4.8}$$

Adapun turunan pertama dari $M(y_i)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ sebagai berikut:

Misalkan

$$u_i = M(y_i)$$

$$\mathbf{v}_i = \mu_{i1}\mathbf{x}_i^T = e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\mathbf{x}_i^T$$

$$\mathbf{u}_i' = \frac{\partial M(y_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$$

$$= \left[\frac{\partial \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right] \frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} + \frac{1}{\left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial \left(\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right] \tag{4.9}$$

Turunan pertama dari $\left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = -\tau \mu_{i1} \mathbf{x}_i \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_j}\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{4.10}$$

Turunan pertama $\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \left(\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} \right) = \frac{1}{\left(K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)\right)^2} \left[\left(\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i) + \right.$$

$$\left. - K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i) \left(\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \right] \tag{4.11}$$

Persamaan (4.11) dapat diselesaikan menggunakan aturan rantai, sehingga

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \tag{4.12}$$

Berdasarkan persamaan (4.4), maka

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{\partial z_i}=\frac{-z_i K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{3}{2}}(z_i)+\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{z_i} \tag{4.13}$$

Berdasarkan persamaan (4.3), persamaan di atas dapat ditulis seperti:

$$K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{3}{2}}(z_i)=K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)+\frac{2\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{z_i} \tag{4.14}$$

Substitusi persamaan (4.14) ke persamaan (4.13).

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{\partial z_i}=-\left(K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)+\frac{2\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{z_i}\right)+\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{z_i}$$

$$=-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)-\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{z_i} \tag{4.15}$$

Turunan pertama z_i terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ adalah

$$\frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}=\tau^{-1}\cdot\frac{\partial\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$$

$$=\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \tag{4.16}$$

Substitusi persamaan (4.15) dan (4.16) ke persamaan (4.12).

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}=\left(-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)-\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{z_i}\right)\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \tag{4.17}$$

Turunan pertama $K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ dapat diselesaikan menggunakan aturan rantai, sehingga

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}=\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \tag{4.18}$$

Berdasarkan persamaan (4.4),

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i}=-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)+\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i} \tag{4.19}$$

Substitusi persamaan (4.19) dan (4.16) ke persamaan (4.18).

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}=\left(-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)+\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}\right)\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \tag{4.20}$$

Substitusi persamaan (4.17) dan (4.20) ke persamaan (4.11), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\left(\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right)=-\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left[1+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \tag{4.21}$$

Penjabaran secara terperinci dapat dilihat pada Lampiran 1. Lalu, substitusi persamaan (4.10) dan (4.21) ke persamaan (4.9).

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i' = & -\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{3}{2}} M\left(y_i\right)\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}+\\ & -\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left[1+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}\end{aligned}$$

$$= -\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} + \mu_{i1}\mathbf{x}_i M^2\left(y_i\right) \tag{4.22}$$

Turunan pertama $e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\mathbf{x}_i^T$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_i\,' = \frac{\partial\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\mathbf{x}_i^T\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T} = \mu_{i1}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T$$

Turunan pertama $M\left(y_{ij}\right)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left[M\left(y_i\right)\mu_{i1}\mathbf{x}_{i1}^T\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T} &= \mathbf{u}_i\,'\mathbf{v}_i + u_i\mathbf{v}_i\,' \\
&= \left\{-\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} + \mu_{i1}\mathbf{x}_i M^2\left(y_i\right)\right\}\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T + \\
&\quad + M\left(y_i\right)\mu_{i1}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T \\
&= \mu_{i1}\left\{-\frac{\mu_{i1}\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} + \mu_{i1}M^2\left(y_i\right) + M\left(y_i\right)\right\}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Substitusi persamaan (4.23) ke persamaan (4.8).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\boldsymbol{\beta}_1} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\left(y_{i1}\mathbf{x}_i^T\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T} - \frac{\partial\left(M\left(y_i\right)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[0 - \mu_{i1}\left\{-\frac{\mu_{i1}\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} + \mu_{i1}M^2\left(y_i\right) + M\left(y_i\right)\right\}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T\right]
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \mu_{i1} \left\{ M\left(y_i\right) - \frac{\mu_{i1}\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} + \mu_{i1} M^2\left(y_i\right) \right\} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$$

(4.24)

Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ adalah

$$\frac{\partial l\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln K_{s_i}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i2}\mathbf{x}_i^T \tag{4.25}$$

Berdasarkan persamaan (4.25), turunan pertama $\ln K_{s_i}\left(z_i\right)$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ akan diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln K_{s_i}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} &= \frac{\partial \ln K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \\
&= \frac{\partial \ln K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial\left(\tau^{-1}\sqrt{1+2\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \\
&= \left[-\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)} + \frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \right] \frac{\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}
\end{aligned}$$

Diketahui $M\left(y_i\right) = \frac{1}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}$, maka

$$\frac{\partial \ln K_{s_i}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \left[-\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T M\left(y_i\right) + \frac{\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} \right] \tag{4.26}$$

Substitusi persamaan (4.26) ke persamaan (4.25).

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T M(y_i)+\frac{\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{2\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\sum_{i=1}^{n}y_{i2}\mathbf{x}_i^T$$

$$=\ldots=\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i2}-\mu_{i2}M(y_i)\right]\mathbf{x}_i^T \tag{4.27}$$

Penjabaran secara terperinci dapat dilihat pada Lampiran 1. Jika persamaan (4.27) disamadengankan nol

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i2}-\mu_{i2}M(y_i)\right]\mathbf{x}_i^T=0$$

maka pada turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ membentuk persamaan yang tidak eksplisit. Turunan kedua persamaan (4.27) terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, dan τ perlu dilakukan untuk mengestimasi parameter model regresi BPIG.

Turunan kedua $\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i2}-\mu_{i2}M(y_i)\right]\mathbf{x}_i^T}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\mu_{i2}\frac{\partial M(y_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\mathbf{x}_i^T \tag{4.28}$$

Substitusi persamaan (4.22) ke persamaan (4.28).

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T\partial \boldsymbol{\beta}_2}=-\sum_{i=1}^{n}\mu_{i2}\left(\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left[1+\tau M(y_i)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}-\mu_{i1}\mathbf{x}_i M^2(y_i)\right)\mathbf{x}_i^T$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\mu_{i1}\mu_{i2}\left(\frac{\left[1+\tau M(y_i)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}-M^2(y_i)\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T \tag{4.29}$$

Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap τ sebagai berikut:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{n}{\tau}-\frac{n\ln(\tau)}{2}+\frac{n\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)}{2}+\sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}\left(z_i\right)\right]+\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{i=1}^{2}y_{ij}-1\right)\ln\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{4}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j-\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}!\right)\right]$$

$$=-\frac{n}{\tau^2}-\frac{n}{2\tau}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln\left[K_{s_i}\left(z_i\right)\right]}{\partial\tau}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} \qquad (4.30)$$

Turunan pertama $\ln\left[K_{s_i}\left(z_i\right)\right]$ terhadap τ adalah:

$$\frac{\partial\ln\left[K_{s_i}\left(z_i\right)\right]}{\partial\tau}=\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)}{\tau\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2} \qquad (4.31)$$

Substitusi persamaan (4.31) ke persamaan (4.30).

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau}=-\frac{n}{\tau^2}-\frac{n}{2\tau}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)}{\tau\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}$$

$$=\ldots=\sum_{i=1}^{n}\frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)-1}{\tau^2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau} \qquad (4.32)$$

Penjabaran secara terperinci dapat dilihat pada Lampiran 1. Jika persamaan (4.32) disamadengankan nol

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)-1}{\tau^2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau}=0$$

maka pada turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap τ membentuk persamaan yang tidak eksplisit. Turunan kedua persamaan (4.32) terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, dan τ perlu dilakukan untuk mengestimasi parameter bivariat model regresi BPIG.

Turunan kedua persamaan (4.32) terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)-1}{\tau^2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau}\right]$$

$$=\frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\right]\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\left(\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right)\right\}$$

Turunan pertama $\dfrac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}=\frac{\tau\mathbf{x}_i\mu_{i1}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\tau\mathbf{x}_i\mu_{i1}\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Berdasarkan persamaan (4.21), turunan kedua $\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \tau} = \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i1}\left\{\tau M(y_i) - \frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1+\tau M(y_i)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} + \right.$$

$$\left. +M^2(y_i)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right\}\mathbf{x}_i \qquad (4.33)$$

Berdasarkan persamaan (4.27), turunan kedua fungsi ln *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ adalah:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T \partial \boldsymbol{\beta}_2} = -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\left(\mu_{i2}M(y_i)\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right]\mathbf{x}_i^T \qquad (4.34)$$

Turunan $\mu_{i2}M(y_i)$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial\left[\mu_{i2}M(y_i)\right]}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\left[\frac{\mu_{i2}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}\right]$$

$$= \left\{\frac{\partial\left[e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right\}\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)} +$$

$$+\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}{\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}\right] \qquad (4.35)$$

Turunan pertama $\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}{\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_2^T$ dapat ditulis

$$\frac{\partial\left[e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}=\mu_{i2}\left[\frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\tau\mu_{i2}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\mathbf{x}_i \quad (4.36)$$

Berdasarkan persamaan (4.36), persamaan (4.35) menjadi

$$\frac{\partial\left[\mu_{i2}M\left(y_i\right)\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}=\mu_{i2}\left\{M\left(y_i\right)-\frac{\mu_{i2}\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}+\mu_{i2}M^2\left(y_i\right)\right\}\mathbf{x}_i$$

(4.37)

Substitusi persamaan (4.37) ke persamaan (4.34).

$$\frac{\partial^2 l\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T\partial\boldsymbol{\beta}_2}=-\sum_{i=1}^{n}\mu_{i2}\left\{M\left(y_i\right)-\frac{\mu_{i2}\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}+\mu_{i2}M^2\left(y_i\right)\right\}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T$$

(4.38)

Turunan kedua persamaan (4.32) terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\tau}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)}{\tau}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}\left[\frac{\left(1+\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)}{\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)}\right]+\frac{1}{\tau^2}\frac{\partial\left[M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}\right\}$$

(4.39)

Turunan $\frac{\left(1+\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)}{\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ adalah:

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}\left[\frac{\left(1+\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)}{\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)}\right]=-\frac{\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^2} \quad (4.40)$$

Turunan $M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)$ menjadi

$$\frac{\partial\left[M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}=-\frac{\mu_{i2}\mathbf{x}_i\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left[1+\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\tau M\left(y_i\right)+\right.$$

$$\left.-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]+M\left(y_i\right)\tau\mathbf{x}_i\mu_{i2} \qquad (4.41)$$

Substitusi persamaan (4.40) dan (4.41) ke persamaan (4.39), sehingga

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\tau}=\frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i2}\left\{\tau M\left(y_i\right)-\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\right.$$

$$\left.+M^2\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right\}\mathbf{x}_i \qquad (4.42)$$

Berdasarkan persamaan (4.32), turunan kedua fungsi ln *likelihood* terhadap τ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\tau^2}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)-1}{\tau^2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\left[\tau^{-2}M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}+\frac{2}{\tau^3}+\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau^2}\right\} \qquad (4.43)$$

Turunan $\dfrac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2}$ terhadap τ sebagai berikut:

$$\frac{\partial\left[\tau^{-2}M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}=\frac{1}{\tau^4}\left\{\tau^2\cdot\frac{\partial\left[M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}-2\tau M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right\}$$

(4.44)

dengan

$$\frac{\partial M\left(y_i\right)}{\partial\tau}=-\frac{1}{\tau^2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left\{\tau^2 M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.$$

$$\left.-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]\right\}$$

maka

$$\frac{\partial\left[M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}=\left[\frac{\partial M\left(y_i\right)}{\partial\tau}\right]\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)$$

$$=-\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left\{\tau^2 M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.$$

$$-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right.$$

$$\left.\left.+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]\right\}+M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right) \qquad (4.45)$$

Substitusi persamaan (4.45) ke persamaan (4.44).

$$\frac{\partial\left[\tau^{-2}M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}=-\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^4\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left\{\tau^2 M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right.$$

$$\left.\times\left[1-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]\right\}+$$

$$+\frac{M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2}-\frac{2M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^3}$$

Persamaan (4.43) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\tau^2}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^4\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left\{\tau^2 M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.\right.$$

$$\left.-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]\right\}+$$

$$\left.+\frac{2-2M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^3}+\frac{\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)+M\left(y_i\right)\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}{\tau^2}\right] \tag{4.46}$$

Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap parameter yang ingin diduga menghasilkan persamaan yang tidak eksplisit, sehingga algoritma *Newton-Raphson* dilakukan untuk menyelesaikan persamaan tersebut dengan menggunakan persamaan:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}-\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right) \tag{4.47}$$

dimana

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \tau\end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{g}^T\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)=\left[\begin{matrix}\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1} & \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2} & \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\tau}\end{matrix}\right]_{\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}}$$

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)=\left[\begin{matrix}\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\boldsymbol{\beta}_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\boldsymbol{\beta}_2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\tau}\\ & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T\partial\boldsymbol{\beta}_2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\tau}\\ \mathit{simetris} & & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\tau^2}\end{matrix}\right]_{\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}}$$

Adapun langkah-langkah pendugaan parameter dengan algoritma *Newton-Raphson* sebagai berikut:

1. Tentukan nilai awalan (*initial value*) untuk parameter $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^{(0)} & \boldsymbol{\beta}_2^{(0)} & \tau^{(0)} \end{bmatrix}^T$ dengan menggunakan fungsi kepekatan peluang distribusi univariat Poisson inverse Gaussian, yaitu:

   $\mu_j = e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_j}$
2. Tentukan vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)$ dengan menyubstitusi persamaan (4.7), (4.27), dan (4.32).
3. Tentukan matriks Hessian $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)$ dengan menyubstitusi persamaan (4.24), (4.29), (4.33), (4.38), (4.42), dan (4.46).
4. Masukkan nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$ ke dalam elemen-elemen vektor gradien $\mathbf{g}$ dan matriks Hessian $\mathbf{H}$, sehingga diperoleh vektor $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}\right)$ dan matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)$.
5. Tentukan inverse dari matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)$.
6. Lakukan iterasi mulai dari $r = 0$ pada persamaan (4.47). Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}$ merupakan kumpulan penduga parameter yang konvergen saat iterasi ke-*r*.
7. Jika penduga parameter belum konvergen, maka kembali ke Langkah 4. Iterasi akan berhenti jika nilai $\left\| \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)} \right\| \leq 10^{-3}$.

4.2 Pengujian Hipotesis secara Serentak terhadap Parameter Regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG)

Pengujian hipotesis secara serentak terhadap parameter regresi BPIG menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Metode ini melibatkan dua fungsi *likelihood*, yaitu $L\left(\hat{\Omega}\right)$ yang merupakan nilai maksimum *likelihood* untuk model dengan melibatkan variabel penjelas dan $L\left(\hat{\omega}\right)$ yang merupakan nilai maksimum *likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel penjelas. Pengujian hipotesis terhadap parameter secara serentak dilakukan untuk mengetahui signifikansi parameter $\boldsymbol{\beta}_j$ secara bersama-sama dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0: $\beta_{j1} = \beta_{j2} = ... = \beta_{jp} = 0$ dengan $j = 1, 2$

H_1: paling sedikit ada satu $\beta_{jk} \neq 0$ dengan $j = 1, 2$ dan $k = 1, 2, ..., p$

Himpunan parameter di bawah populasi (Ω) adalah $\{\boldsymbol{\beta}_j, \tau, j = 1, 2\}$. Fungsi *likelihood* di bawah populasi, $L(\boldsymbol{\Omega})$, sebagai berikut:

$$L\left(\hat{\boldsymbol{\Omega}}\right) = e^{\frac{n}{\hat{\tau}}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{\hat{\tau}}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \left[K_{s_i}(z_i) \left(1 + 2\hat{\tau} \sum_{j=1}^{2} e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_j}\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)}{4}} \prod_{j=1}^{2} \frac{e^{y_{ij} \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_j}}{y_{ij}!} \right]$$

Fungsi ln *likelihood* di bawah populasi, $l\left(\hat{\boldsymbol{\Omega}}\right)$, sebagai berikut:

$$l\left(\hat{\boldsymbol{\Omega}}\right) = \frac{n}{\hat{\tau}} - \frac{n}{2}\ln(\hat{\tau}) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left[K_{s_i}(z_i)\right] +$$
$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)}{4} \ln\left(1 + 2\hat{\tau} \sum_{j=1}^{2} e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} y_{ij} \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_j - \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} y_{ij}!\right) \quad (4.48)$$

Nilai $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$ dan $\hat{\tau}$ merupakan nilai penduga parameter yang diperoleh dari algoritma *Newton-Raphson*. Sedangkan fungsi ln *likelihood* untuk model yang tidak melibatkan variabel prediktor dibentuk pada himpunan di bawah H_0. Himpunan parameter di bawah H_0 $(\hat{\omega})$ adalah $\{\beta_{j0}, \tau, j = 1, 2\}$. Fungsi *likelihood* di bawah H_0, $L(\hat{\boldsymbol{\omega}})$, sebagai berikut:

$$L(\hat{\boldsymbol{\omega}}) = e^{\frac{n}{\hat{\tau}_\omega}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{\hat{\tau}_\omega}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \left[K_{s_i}(z_{i\omega}) \left(1 + 2\hat{\tau}_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\hat{\beta}_{j0\omega}}\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)}{4}} \prod_{j=1}^{2} \frac{e^{y_{ij} \hat{\beta}_{j0\omega}}}{y_{ij}!} \right]$$

Fungsi ln *likelihood* di bawah H_0, $l(\boldsymbol{\omega})$, sebagai berikut:

$$l(\boldsymbol{\omega}) = \frac{n}{\tau_\omega} - \frac{n}{2}\ln(\tau_\omega) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right] +$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}\ln\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\beta_{j0\omega} - \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}!\right) \qquad (4.49)$$

Penurunan fungsi ln *likelihood* di bawah H_0 dapat dilihat pada Lampiran 2. Turunan pertama $l(\boldsymbol{\omega})$ terhadap $\beta_{10\omega}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{10\omega}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right]}\frac{\partial\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right]}{\partial\beta_{10\omega}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_\omega\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)e^{\beta_{10\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)} + \sum_{i=1}^{n}y_{i1}$$

(4.50)

Berdasarkan persamaan (4.5), turunan pertama $K_{s_i}(z_{i\omega})$ terhadap $\beta_{10\omega}$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial K_{s_i}(z_i)}{\partial\beta_{10\omega}} = \frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_{i\omega})}{\partial z_{i\omega}}\cdot\frac{\partial z_{i\omega}}{\partial\beta_{10\omega}}$$

$$= \left[-K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_{i\omega}) + \frac{\tau_\omega\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_{i\omega})}{\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{e^{\beta_{10\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(4.51)

Substitusi persamaan (4.51) ke persamaan (4.50).

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{10\omega}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left[K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_{i\omega})\right]}\frac{\partial\left[K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_{i\omega})\right]}{\partial\beta_{10\omega}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_\omega\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)e^{\beta_{10\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)} + \sum_{i=1}^{n}y_{i1}$$

$$= \ldots = \sum_{i=1}^{n}\left[y_{i1} - M(y_i)e^{\beta_{10\omega}}\right] \qquad (4.52)$$

Penjabaran secara terperinci dapat dilihat pada Lampiran 2. Turunan pertama $l(\boldsymbol{\omega})$ terhadap $\beta_{20\omega}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{20\omega}} = \sum_{i=1}^{n}\left[y_{i2} - M\left(y_i\right) e^{\beta_{20\omega}} \right] \tag{4.53}$$

Turunan pertama $l(\boldsymbol{\omega})$ terhadap τ_ω sebagai berikut:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \tau_\omega} = \frac{\partial}{\partial \tau_\omega}\left\{ \frac{n}{\tau_\omega} - \frac{n}{2}\ln\left(\tau_\omega\right) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)\right] + \right.$$

$$\left. -\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)}{4}\ln\left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\beta_{j0\omega} - \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} y_{ij}!\right)\right\}$$

$$= \ldots = -\frac{n}{\tau_\omega^2} - \frac{n}{2\tau_\omega} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)}\frac{\partial\left[K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)\right]}{\partial \tau_\omega} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\left(1 + 2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} \tag{4.54}$$

Penjabaran secara terperinci dapat dilihat pada Lampiran 2. Berdasarkan persamaan (4.5), turunan pertama $K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)$ terhadap τ_ω dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial\left[K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)\right]}{\partial \tau_\omega} = \frac{\partial K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)}{\partial z_{i\omega}}\frac{\partial z_{i\omega}}{\partial \tau_\omega}$$

$$= \left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right) + \frac{\tau_\omega\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right)}{\left(1 + 2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$\times\left[-\frac{\left(1 + 2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\tau_\omega^2} + \frac{\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\tau_\omega\left(1 + 2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \tag{4.55}$$

Substitusi persamaan (4.55) ke persamaan (4.54).

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \tau_\omega} = -\frac{n}{\tau_\omega^2} - \frac{n}{2\tau_\omega} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right)} \left\{ \left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right) + \frac{\tau_\omega \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2} \right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right)}{\left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \right.$$

$$\left. \times \left[-\frac{\left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\tau_\omega^2} + \frac{\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\tau_\omega \left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2} \right) \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{M\left(y_i\right)\left(1 + \tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right) - 1}{\tau_\omega^2} \right\} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \frac{y_{ij}}{\tau_\omega}$$

Turunan kedua fungsi ln *likelihood* terhadap $\beta_{10\omega}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{10\omega}^2} = -\sum_{i=1}^{n} e^{\beta_{10\omega}} \left\{ M\left(y_i\right) - \frac{e^{\beta_{10\omega}} \left[1 + \tau_\omega M\left(y_i\right) \left(1 + 2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} \right) \right]}{1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}} + e^{\beta_{10\omega}} M^2\left(y_i\right) \right\}$$

(4.56)

Turunan kedua fungsi ln *likelihood* terhadap $\beta_{20\omega}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{20\omega}^2} = -\sum_{i=1}^{n} e^{\beta_{20\omega}} \left\{ M\left(y_i\right) - \frac{e^{\beta_{20\omega}} \left[1 + \tau_\omega M\left(y_i\right) \left(1 + 2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} \right) \right]}{1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{20\omega}}} + e^{\beta_{20\omega}} M^2\left(y_i\right) \right\}$$

(4.57)

Turunan kedua fungsi ln *likelihood* terhadap τ_ω sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \tau_\omega^2} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\left(1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)}{\tau_\omega^{\;4}\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} \left\{ \tau_\omega^{\;2} M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right) + \right.\right.$$

$$\left. -\left(1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)\left[1 - M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right) + 2\tau_\omega M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)\right]\right\} +$$

$$\left. + \frac{2 - 2M\left(y_i\right)\left(1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)}{\tau_\omega^{\;3}} + \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right) + M\left(y_i\right)\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\tau_\omega^{\;2}} \right] \tag{4.58}$$

Turunan fungsi ln *likelihood* terhadap $\beta_{10\omega}$ dan $\beta_{20\omega}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{10\omega} \partial \beta_{20\omega}} = \sum_{i=1}^{n} e^{\beta_{10\omega}} e^{\beta_{20\omega}} \left(\frac{\left[1+\tau_\omega M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}} - M^2\left(y_i\right) \right) \tag{4.59}$$

Turunan fungsi ln *likelihood* terhadap $\beta_{10\omega}$ dan τ_ω sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{10\omega} \partial \tau_\omega} = \frac{1}{\tau_\omega^{\;2}} \sum_{i=1}^{n} e^{\beta_{10\omega}} \left\{ \tau_\omega M\left(y_i\right) - \frac{\left(1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)\left[1+\tau_\omega M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)\right]}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} + \right.$$

$$\left. + M^2\left(y_i\right)\left(1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)\right\} \tag{4.60}$$

Turunan fungsi ln *likelihood* terhadap $\beta_{20\omega}$ dan τ_ω sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{20\omega} \partial \tau_\omega} = \frac{1}{\tau_\omega^{\;2}} \sum_{i=1}^{n} e^{\beta_{20\omega}} \left\{ \tau_\omega M\left(y_i\right) - \frac{\left(1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)\left[1+\tau_\omega M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)\right]}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} + \right.$$

$$+M^2\left(y_i\right)\left(1+\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)\Bigg\} \tag{4.61}$$

Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap $\beta_{10\omega}$, $\beta_{20\omega}$ dan τ_ω merupakan persamaan yang tidak eksplisit. Oleh karena itu, algoritma *Newton-Raphson* digunakan untuk menduga parameter di bawah H_0 dengan menggunakan persamaan:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r+1)}=\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r)}-\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r)}\right) \tag{4.62}$$

dimana

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\beta_{10\omega} & \beta_{20\omega} & \tau_\omega\end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{g}^T\left(\boldsymbol{\omega}^{(r)}\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\beta_{10\omega}} & \dfrac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\beta_{20\omega}} & \dfrac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\tau_\omega}\end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{\omega}}=\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r)}}$$

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r)}\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\beta_{10\omega}^2} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\beta_{10\omega}\partial\beta_{20\omega}} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\beta_{10\omega}\partial\tau_\omega} \\ & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\beta_{20\omega}^2} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\beta_{20\omega}\partial\tau_\omega} \\ \textit{simetris} & & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\tau_\omega^{\,2}}\end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{\omega}}=\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r)}}$$

Adapun langkah-langkah pendugaan parameter dengan algoritma *Newton-Raphson* sebagai berikut:

1. Tentukan nilai awalan (*initial value*) untuk parameter $\boldsymbol{\omega}^{(0)}=\begin{bmatrix}\beta_{10\omega}^{(0)} & \beta_{20\omega}^{(0)} & \tau_0^{(0)}\end{bmatrix}^T$
2. Tentukan vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r)}\right)$ dengan menyubstitusi persamaan (4.52), (4.53), dan (4.54).
3. Tentukan matriks Hessian $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r)}\right)$ dengan menyubstitusi persamaan (4.56), (4.57), (4.58), (4.59), (4.60), dan (4.61).
4. Masukkan nilai $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}$ ke dalam elemen-elemen vektor gradien $\mathbf{g}$ dan matriks Hessian $\mathbf{H}$, sehingga diperoleh vektor $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\right)$ dan matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\right)$.
5. Tentukan inverse dari matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\right)$.

6. Lakukan iterasi mulai dari $r = 0$ pada persamaan (4.62) . Nilai $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r)}$ merupakan kumpulan penduga parameter yang konvergen saat iterasi ke-*r*.
7. Jika penduga parameter belum konvergen, maka kembali ke Langkah 4. Iterasi akan berhenti jika nilai $\left\|\hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r+1)} - \hat{\boldsymbol{\omega}}^{(r)}\right\| \leq 10^{-3}$.

Setelah nilai $\hat{\beta}_{10\omega}$, $\hat{\beta}_{20\omega}$ dan $\hat{\tau}_{\omega}$ diperoleh, perhitungan statistik uji dapat dilakukan dengan menyubstitusi persamaan (4.48) dan (4.49) ke statistik uji G^2.

$$\begin{aligned}
G^2 &= -2\ln\left(\frac{L(\hat{\boldsymbol{\omega}})}{L(\hat{\boldsymbol{\Omega}})}\right) \\
&= 2\left[l(\hat{\boldsymbol{\Omega}}) - l(\hat{\boldsymbol{\omega}})\right] \\
&= 2\left[\frac{n}{\hat{\tau}} - \frac{n}{\hat{\tau}_{\omega}} - \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\tau}_{\omega}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}(z_i)\right] - \sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right] + \right. \\
&\quad \left. -\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij} - 1\right)}{4}\ln\left(\frac{1 + 2\hat{\tau}\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j}}{1 + 2\hat{\tau}_{\omega}\sum_{j=1}^{2}e^{\hat{\beta}_{j0\omega}}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\hat{\beta}_{j0\omega}\right]
\end{aligned}$$

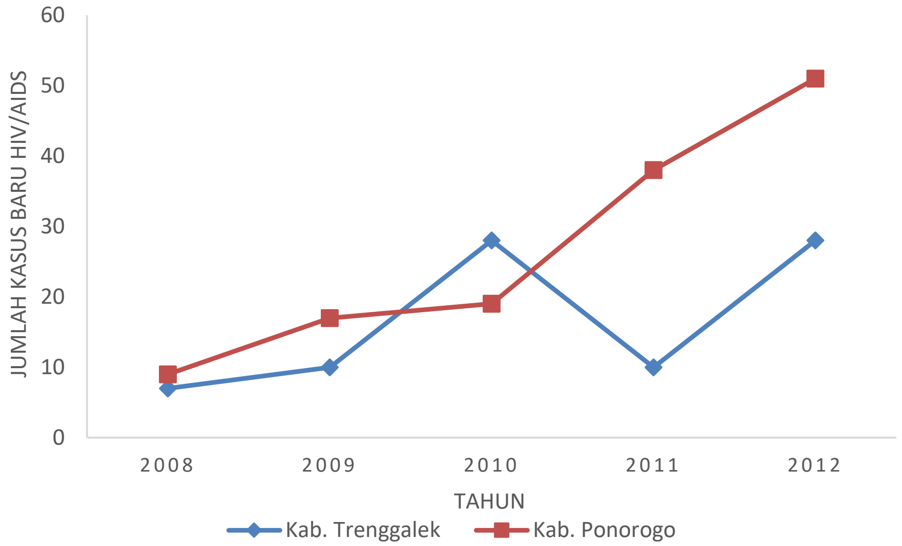
Statistik uji G^2 merupakan pendekatan dari distribusi χ^2 dengan derajat bebas *v* dengan *v* adalah banyaknya parameter di bawah populasi dikurangi banyaknya parameter di bawah H_0. Kriteria penolakan H_0 adalah $G^2_{hitung} > \chi^2_{\alpha;v}$. Jika hasil dari pengujian hipotesis memutuskan tolak H_0, maka kesimpulan yang diperoleh adalah variabel penjelas berpengaruh terhadap variabel respon secara bersama-sama dengan taraf nyata 5%.

4.3 Aplikasi Model Regresi Bivariat Poisson *Inverse* Gaussian (BPIG)

Model regresi BPIG merupakan salah satu pemodelan yang dapat diaplikasikan pada data cacahan yang mengikuti distribusi bivariat Poisson dan mengalami overdispersi. Pada penelitian ini, model regresi BPIG akan diaplikasikan pada jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012.

4.3.1 Deskripsi Variabel Respon dan Variabel Penjelas

Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo mempunyai 35 kecamatan yang terdiri dari 14 kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan 21 kecamatan di Kabupaten Ponorogo. Berdasarkan data dari Dinas Kesehatan Kabupaten Ponorogo dan Trenggalek, jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Ponorogo dan Trenggalek terus meningkat sejak tahun 2008 sampai 2012. Hal tersebut menjadi catatan penting bagi dinas kesehatan untuk melakukan upaya preventif dalam rangka mencegah bertambahnya jumlah kasus baru HIV dan AIDS.

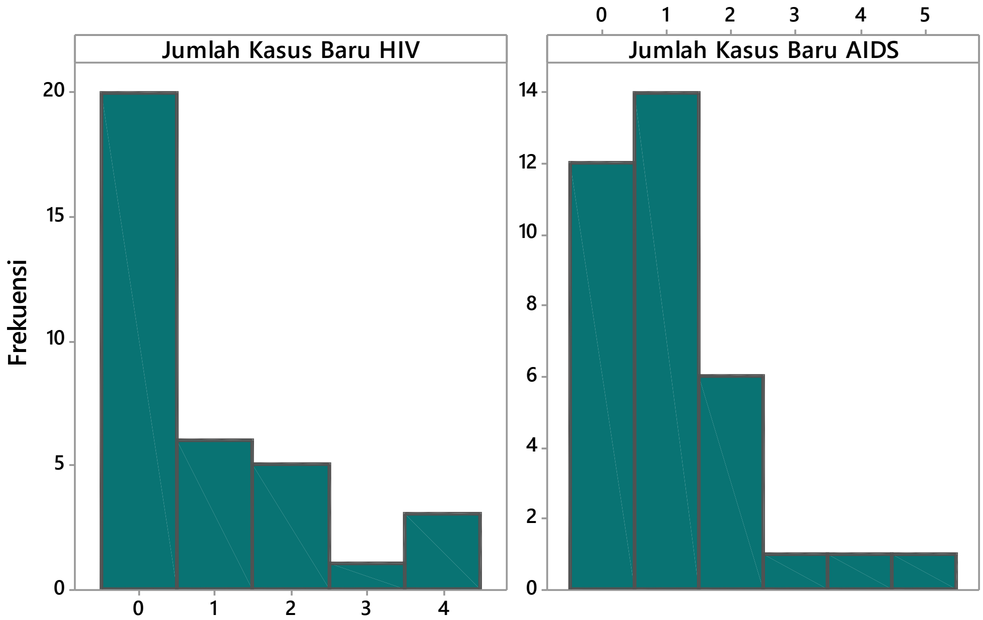


Gambar 4.1 Jumlah kasus baru HIV/AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2008-2012

Berdasarkan Gambar 4.1 jumlah kasus baru HIV/AIDS di Kabupaten Trenggalek cenderung mengalami peningkatan. Peningkatan jumlah kasus baru HIV/AIDS tertinggi terjadi pada tahun 2010 dan 2012. Sedangkan tahun 2011 jumlah kasus baru HIV/AIDS tidak setinggi tahun 2010.

Hal tersebut bukan berarti jumlah kasus HIV/AIDS di Kabupaten Trenggalek berkurang, melainkan kasus HIV/AIDS tetap bertambah, tetapi penambahannya tidak sebesar tahun sebelumnya dan sesudahnya. Lain halnya dengan jumlah kasus baru HIV/AIDS di Kabupaten Trenggalek, jumlah kasus baru HIV/AIDS di

Kabupaten Ponorogo selalu mengalami peningkatan dengan peningkatan yang semakin besar dari tahun ke tahun.



Gambar 4.2 Histogram jumlah kasus baru HIV dan AIDS

Menurut Hilbe (2014), kurva distribusi Poisson *inverse* Gaussian cenderung miring ke kanan. Pada penelitian ini, jumlah kasus baru HIV dan AIDS cenderung miring ke kanan. Hal tersebut disebabkan oleh adanya kecamatan yang tidak memiliki kasus baru HIV dan AIDS. Kemiringan distribusi ini dapat dilihat pada Gambar 4.2 dengan ekor kanan yang menjulur lebih panjang daripada ekor kiri. Suatu distribusi dikatakan sangat miring (*highly skewness*) jika absolut dari kemiringannya lebih dari satu (Bulmer, 1979 dalam Zha, Lord, dan Zou, 2014). Berdasarkan Tabel 4.1, nilai kemiringan dari jumlah kasus baru HIV dan AIDS masing-masing sebesar 1,39 dan 1,57. Nilai tersebut menunjukkan bahwa distribusi dari kedua variabel respon miring ke kanan karena bertanda positif dan nilai lebih dari satu.

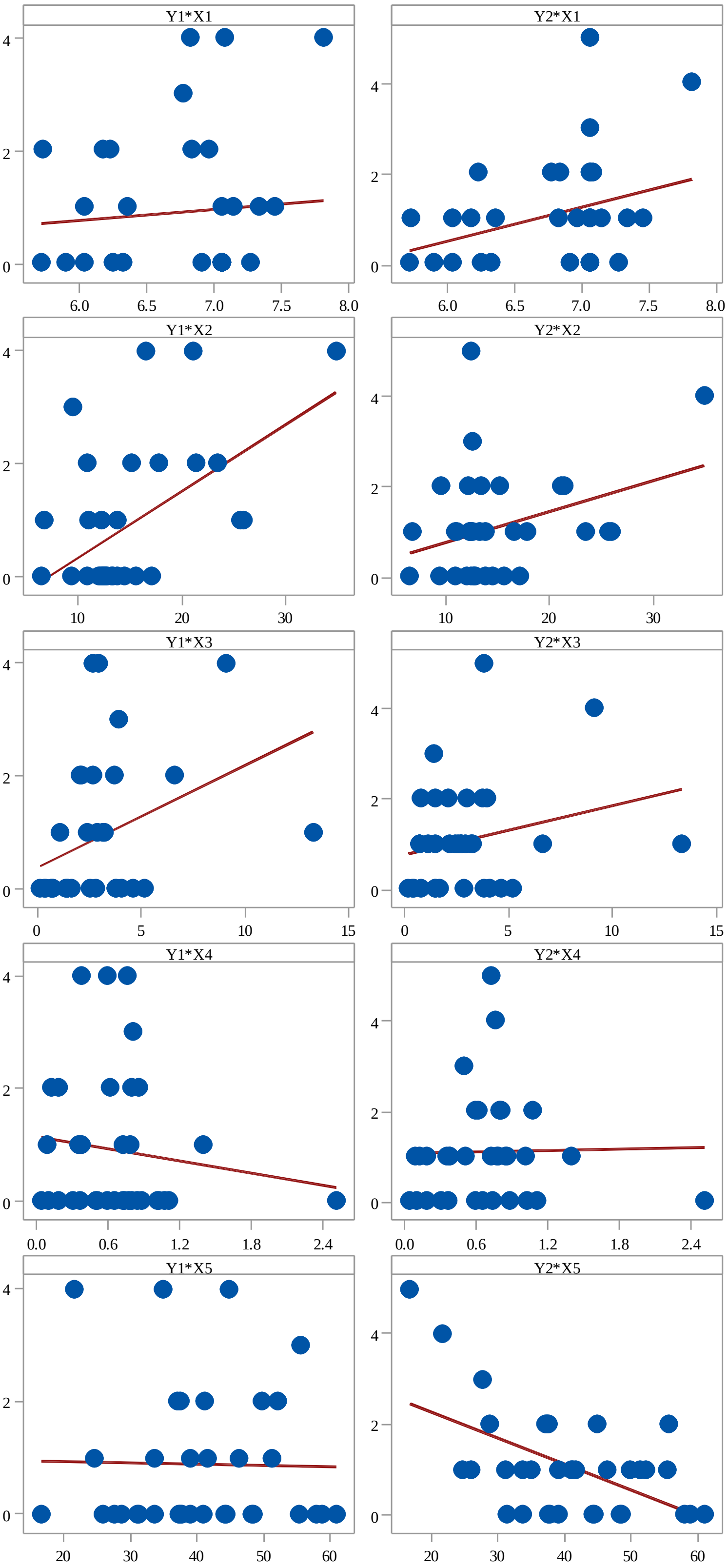
Jumlah kasus baru HIV di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo dan jumlah kasus baru AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo merupakan dua variabel respon yang digunakan dalam penelitian ini. Statistika deskriptif dari dua variabel respon menggunakan data pada Lampiran 3.

Tabel 4.1 Statistika Deskriptif Variabel Respon

Variabel Respon	Standar Deviasi	Minimum	Maksimum	*Skewness*
Jumlah kasus baru HIV (Y_1)	1,278	0	4	1,39
Jumlah kasus baru AIDS (Y_2)	1,173	0	5	1,57

Tabel 4.1 menyajikan statistika deskriptif dari dua variabel respon. Rata-rata jumlah kasus baru HIV setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo sebesar satu orang per tahun. Nilai standar deviasi sebesar 1,278 menunjukkan bahwa jumlah kasus baru HIV antar satu kecamatan dengan kecamatan lain tidak terlalu berbeda. Selain itu, nilai standar deviasi yang lebih besar dari mean menunjukkan bahwa data tersebut mengalami overdispersi. Jumlah kasus baru HIV tertinggi sebesar empat orang terjadi di Kecamatan Kampak, Trenggalek, dan Bendungan. Rata-rata jumlah kasus baru AIDS setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo juga sebesar satu orang per tahun. Nilai standar deviasi sebesar 1,173 menunjukkan jumlah kasus baru AIDS antar satu kecamatan dengan kecamatan lain tidak terlalu berbeda. Nilai standar deviasi yang lebih besar dari mean menunjukkan bahwa data tersebut mengalami overdispersi. Jumlah kasus baru AIDS tertinggi sebesar lima orang terjadi di Kecamatan Siman.

Pola hubungan variabel respon dengan variabel penjelas dapat dilihat pada Gambar 4.3. Berdasarkan diagram pencar, persentase penduduk berusia 25-29 tahun, persentase penduduk dengan tingkat pendidikan rendah, dan persentase PUS yang menggunakan kondom memiliki hubungan positif dengan jumlah kasus baru HIV dan AIDS. Semakin besar persentase penduduk berusia 25-29 tahun, persentase penduduk dengan tingkat pendidikan rendah, dan persentase PUS yang menggunakan kondom, maka semakin besar jumlah kasus baru HIV dan AIDS. Persentase penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan dan persentase penduduk yang mendapatkan jaminan kesehatan memiliki hubungan negatif dengan jumlah kasus baru HIV dan AIDS. Semakin besar persentase kegi-



Gambar 4.3 Diagram pencar antara variabel respon dan variabel penjelas

atan penyuluhan kesehatan dan persentase jaminan kesehatan, maka semakin kecil jumlah kasus baru HIV dan AIDS.

Tabel 4.2 Statistika Deskriptif Variabel Penjelas

Variabel Penjelas	Mean	Standar Deviasi	Minimum	Maksimum
Persentase penduduk berusia 25-29 tahun (X_1)	6,798	0,513	5,711	7,821
Persentase penduduk dengan tingkat pendidikan rendah (X_2)	14,784	5,783	6,491	34,954
Persentase PUS yang menggunakan kondom (X_3)	2,894	2,607	0,153	13,313
Persentase penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan (X_4)	0,671	0,459	0,041	2,512
Persentase penduduk yang mendapatkan Jaminan Kesehatan Masyarakat (X_5)	40,510	11,000	16,660	60,980

Tabel 4.2 menunjukkan bahwa rata-rata persentase penduduk berusia 25-29 tahun pada setiap kecamatan sebesar 6,798%. Nilai standar deviasi sebesar 0,513% menunjukkan bahwa persentase penduduk berusia 25-29 tahun antar kecamatan tidak terlalu berdeda. Kecamatan Watulimo memiliki persentase terendah, yaitu 5,771%, sedangkan Kecamatan Trenggalek memiliki persentase tertinggi, yaitu 7,821%. Rata-rata persentase penduduk yang memiliki tingkat pendidikan rendah setiap kecamatan sebesar 14,784%. Nilai standar deviasi sebesar 5,783% menunjukkan ada kecamatan yang persentasenya cukup berbeda dengan kecamatan lainnya. Kecamatan Pudak memiliki persentase terendah, yaitu 6,491%, sedangkan Kecamatan Trenggalek memiliki persentase tertinggi, yaitu 34,954%. Rata-rata persentase PUS yang menggunakan kondom setiap kecamatan sebesar 2,894%. Nilai standar deviasi 2,607% menunjukkan ada kecamatan yang persentasenya cukup berbeda dengan kecamatan lain. Kecamatan Ngebel memiliki persentase terendah, yaitu 0,513%, sedangkan Kecamatan Trenggalek memiliki persentase tertinggi, yaitu 13,313%. Rata-rata persentase penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan setiap kecamatan sebesar 0,671%. Nilai standar deviasi sebesar 0,459% menunjukkan bahwa persentase antar kecamatan tidak terlalu berbeda jauh dengan persentase terendah sebesar 0,041% di Kecamatan

Gandusari dan persentase tertinggi sebesar 2,512% di Kecamatan Pudak. Rata-rata persentase penduduk yang mendapatkan Jaminan Kesehatan Masyarakat (Jamkesmas) setiap kecamatan sebesar 40,51%. Nilai standar deviasi sebesar 11% menunjukkan bahwa ada perbedaan persentase yang cukup jauh antar kecamatan. Kecamatan Siman memiliki persentase terendah sebesar 16,66%, sedangkan Kecamatan Pudak memiliki persentase tertinggi sebesar 60,98% (Lampiran 4).

4.3.2 Pemeriksaan Korelasi Antar Variabel Respon

Variabel respon pada analisis regresi bivariat harus memiliki korelasi. Penelitian ini menggunakan data jumlah kasus baru HIV (Y_1) dan jumlah kasus baru AIDS (Y_2) sebagai variabel respon. Korelasi antar variabel respon sebesar 0,399. Nilai tersebut menunjukkan adanya korelasi positif yang artinya semakin besar jumlah kasus baru HIV, maka semakin besar pula jumlah kasus baru AIDS. Sebaliknya, semakin rendah jumlah kasus baru HIV, maka semakin rendah pula jumlah kasus baru AIDS. Hipotesis yang digunakan dalam pengujian adalah:

H_0: $\rho_{12} = 0$ (Tidak ada korelasi antara Y_1 dan Y_2)

H_1: $\rho_{12} \neq 0$ (Ada korelasi antara Y_1 dan Y_2)

Berdasarkan persamaan (2.9), statistik uji t yang digunakan dalam pengujian ini sebagai berikut:

$$t_{hit} = \frac{0,399\sqrt{35-2}}{\sqrt{1-(0,399)^2}} = 2,5$$

Nilai t yang diperoleh sebesar 2,5 lebih besar daripada $t_{\frac{0,05}{2},33} = 2,034$ dan nilai-p yang diperoleh sebesar 0,018 lebih kecil daripada α (0.05), sehingga keputusan yang diperoleh tolak H_0. Kesimpulannya adalah terdapat korelasi antara jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012.

4.3.3 Pengujian Distribusi Variabel Respon

Variabel respon pada model regresi bivariat Poisson *inverse* Gaussian harus memiliki distribusi Poisson. Hipotesis yang digunakan sebagai berikut:

H_0: $F(x) = F_0(x)$ untuk Y_1 dan Y_2 (Y_1 dan Y_2 mengikuti distribusi bivariat Poisson)

H_1: $F(x) \neq F_0(x)$ untuk Y_1 dan Y_2 (Y_1 dan Y_2 tidak mengikuti distribusi bivariat Poisson)

Berdasarkan persamaan (2.10), statistik uji yang digunakan sebagai berikut:

$$I_B = \frac{35\left[(1,086)(1,587)-2\left(0,58^2\right)+(0,886)(1,336)\right]}{\left[(0,886)(1,086)-0,58^2\right]} = 125,129$$

Nilai I_B yang diperoleh sebesar 125,129 (Lampiran 6). Nilai tersebut lebih besar dari χ^2 (87,108), maka keputusan yang diperoleh tolak H_0. Kesimpulannya jumlah kasus baru HIV (Y_1) dan jumlah kasus baru AIDS (Y_2) mengikuti tidak berdistribusi bivariat Poisson pada taraf nyata 5% .

Setelah pengujian variabel respon dilakukan, distribusi eror Y_1 dan Y_2 yang diperoleh dari model yang diduga diuji menggunakan Anderson-Darling. Hipotesis yang digunakan adalah:

H_0: Eror berdistribusi *inverse* Gaussian

H_1: Eror tidak berdistribusi *inverse* Gaussian

Statistik uji dari Y_1 sebesar 2,181. Nilai tersebut lebih kecil dari nilai kritis (2,502), maka keputusan yang diperoleh tidak tolak H_0. Kesimpulannya error dari model jumlah kasus baru HIV berdistribusi *inverse* Gaussian. Statistik uji dari Y_2 sebesar -0,224. Nilai tersebut lebih kecil dari nilai kritis (2,502), maka keputusan yang diperoleh tidak tolak H_0. Kesimpulannya error dari model jumlah kasus baru AIDS berdistribusi *inverse* Gaussian. Oleh karena itu, model yang digunakan adalah regresi bivariat Poisson *inverse* Gaussian.

4.3.4 Pemeriksaan Multikolinieritas

Pemeriksaan multikolinieritas dilakukan untuk mengetahui ada atau tidaknya korelasi antar variabel penjelas secara bersama-sama. Salah satu cara untuk mendeteksi adanya multikolinieritas dengan menggunakan nilai *Variance Inflation Factor* (VIF). Jika nilai VIF lebih besar dari 10, maka ada multikolinieritas antar variabel penjelas.

Berdasarkan Tabel 4.3, nilai VIF yang dihitung dengan menggunakan persamaan (2.11) dari satu variabel penjelas terhadap variabel penjelas lainnya tidak lebih dari 10. Hal tersebut menunjukkan bahwa tidak terjadi multikolinieritas antar variabel penjelas, sehingga kelima variabel penjelas dapat digunakan dalam pemodelan regresi bivariat regresi Poisson inverse Gaussian.

Tabel 4.3 Nilai VIF Variabel Penjelas

Variabel Respon	Variabel Penjelas	R_k^2	VIF	Kesimpulan
X_1	X_2, X_3, X_4, X_5	0,188	1,231	Tidak ada mulikolinieritas
X_2	X_1, X_3, X_4, X_5	0,515	2,062	
X_3	X_1, X_2, X_4, X_5	0,485	1,942	
X_4	X_1, X_2, X_3, X_5	0,062	1,066	
X_5	X_1, X_2, X_3, X_4	0,172	1,208	

4.3.5 Pemodelan Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo Tahun 2012 dengan Bivariate Poisson Inverse Gaussian (BPIG)

Jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012 merupakan variabel respon yang terdiri atas data cacahan yang mengalami overdispersi dan mengikuti distribusi bivariat Poisson. Persentase penduduk berusia 25-29 tahun, persentase penduduk dengan tingkat pendidikan rendah, persentase PUS yang menggunakan kondom, persentase penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan, dan persentase penduduk yang mendapatkan jaminan kesehatan masyarakat merupakan variabel penjelas yang tidak mengalami multikolinieritas, sehingga pemodelan regresi bivariat Poisson *inverse* Gaussian dapat dilakukan. Pendugaan parameter (Lampiran 7) model regresi bivariat Poisson *inverse* Gaussian menghasilkan pendugaan yang bersifat sama atau global untuk masing-masing kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

Pengujian hipotesis secara serentak (simultan) terhadap parameter dilakukan untuk mengetahui variabel penjelas secara bersama-sama mempengaruhi variabel respon atau tidak. Hipotesis yang digunakan sebagai berikut:

H_0: $\beta_{j1} = \beta_{j2} = ... = \beta_{j5} = 0$ dengan $j = 1, 2$

H_1: paling sedikit ada satu $\beta_{jk} \neq 0$ dengan $j = 1, 2$ dan $k = 1, 2, ..., 5$

Statistik uji G yang diperoleh sebesar 4810,705 (Lampiran 8). Nilai G lebih besar dari $\chi^2_{(0,05;10)}$ yaitu 18,307. Selain itu, nilai-p (<0,0001) lebih kecil dari α (0,05), sehingga keputusan yang diambil adalah tolak H_0. Kesimpulan yang diperoleh adalah variabel penjelas secara bersama-sama mempengaruhi variabel respon. Dengan kata lain, model regresi BPIG yang diperoleh layak pada taraf nyata 5%.

Tabel 4.4 Nilai Dugaan dan Pengujian Hipotesis Parsial Parameter BPIG

Parameter	Nilai Dugaan	Standar Eror	Z Hitung	Nilai-p
β_{10}	-35,229	1,892 x 10^{-5}	-1,861 x 10^{6}	0,000
β_{11}	6,025	3,563 x 10^{-7}	1,691 x 10^{7}	0,000
β_{12}	-0,117	1,365 x 10^{-10}	-8,543 x 10^{8}	0,000
β_{13}	0,214	1,166 x 10^{-9}	1,832 x 10^{8}	0,000
β_{14}	-6,227	1,474 x 10^{-8}	-4,223 x 10^{8}	0,000
β_{15}	0,149	3,876 x 10^{-11}	3,853 x 10^{9}	0,000
β_{20}	-27,935	1,068 x 10^{-5}	-2,616 x 10^{6}	0,000
β_{21}	5,208	2,069 x 10^{-7}	2,516 x 10^{7}	0,000
β_{22}	-0,116	2,087 x 10^{-10}	-5,581 x 10^{8}	0,000
β_{23}	0,264	6,353 x 10^{-10}	4,150 x 10^{8}	0,000
β_{24}	-5,961	5,637 x 10^{-8}	-1,057 x 10^{8}	0,000
β_{25}	0,106	7,487 x 10^{-11}	1,420 x 10^{9}	0,000
τ	0,009	7,130 x 10^{-13}	-1,318 x 10^{10}	0,000

Setelah pengujian hipotesis secara serentak (simultan) terhadap parameter dilakukan, parameter model regresi BPIG diuji secara parsial. Berdasarkan Lampiran 9 , pengujian hipotesis parsial terhadap parameter model regresi bivariat Poisson *inverse* Gaussian dapat dilihat pada Tabel 4.4. Nilai-p dari semua variabel penjelas pada Tabel 4.4 kurang dari α (0,05), sehingga keputusan yang diambil adalah tolak H_0. Keputusan tersebut menunjukkan bahwa variabel penjelas yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV pada taraf nyata 5% di antaranya persentase penduduk berusia 25-29 tahun, persentase penduduk dengan tingkat pendidikan rendah, persentase PUS yang menggunakan kondom, persentase penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan, dan persentase penduduk yang mendapatkan jaminan kesehatan masyarakat. Kelima variabel penjelas tersebut juga mempengaruhi jumlah kasus baru AIDS pada taraf nyata 5%. Selain itu, nilai-p pada parameter τ kurang dari α (0,05), maka H_0 ditolak yang berarti nilai parameter dispersi tidak sama dengan nol dan dapat disimpulkan terjadi overdispersi pada jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012.

Persamaan model regresi BPIG untuk jumlah kasus baru HIV sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_1 = \exp\left(-35,229 + 6,025X_1 - 0,117X_2 + 0,214X_3 - 6,227X_4 + 0,149X_5\right)$$

Pendugaan parameter pada persamaan model regresi di atas dapat diinterpretasikan sebagai berikut:

1. Setiap peningkatan penduduk berusia 25-29 tahun sebesar 1%, maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus baru HIV sebesar 413,642 $\left(e^{6,025}\right)$ kali dari rata-rata jumlah kasus baru HIV semula jika variabel penjelas lainnya tetap, begitu pula sebaliknya.
2. Setiap peningkatan penduduk dengan tingkat pendidikan rendah sebesar 1%, maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus baru HIV sebesar 0,8896 $\left(e^{-0,117}\right)$ kali dari rata-rata jumlah kasus baru HIV semula jika variabel penjelas lainnya tetap. Pola hubungan yang diperoleh dari pendugaan parameter tidak sesuai dengan pola hubungan yang diperoleh pada Gambar 4.3. Hal tersebut disebabkan korelasi antara persentase tingkat pendidikan rendah dan persentase PUS yang menggunakan kondom lebih tinggi daripada korelasi antara jumlah kasus baru HIV dan persentase tingkat pendidikan rendah. Nilai korelasi antar variabel dapat dilihat pada Lampiran 5.
3. Setiap peningkatan PUS yang menggunakan kondom sebesar 1%, maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus baru HIV sebesar 1,239 $\left(e^{0,214}\right)$ kali dari rata-rata jumlah kasus baru HIV semula jika variabel penjelas lainnya tetap.
4. Setiap peningkatan penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan (X_4) sebesar 1%, maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus baru HIV

sebesar 0,002 $\left(e^{-6,227}\right)$ kali dari rata-rata jumlah kasus baru HIV semula jika variabel penjelas lainnya tetap.

5. Setiap peningkatan penduduk yang mendapatkan jaminan kesehatan masyarakat sebesar 1%, maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus baru HIV sebesar 1,161 $\left(e^{0,149}\right)$ kali dari rata-rata jumlah kasus baru HIV semula jika variabel penjelas lainnya tetap. Pola hubungan yang diperoleh dari pendugaan parameter tidak sesuai dengan pola hubungan yang diperoleh pada Gambar 4.3. Hal tersebut disebabkan korelasi antara persentase tingkat pendidikan rendah dan persentase jaminan kesehatan masyarakat lebih tinggi daripada korelasi antara jumlah kasus baru HIV dan persentase jaminan kesehatan masyarakat. Nilai korelasi antar variabel dapat dilihat pada Lampiran 5.

Persamaan model regresi BPIG untuk jumlah kasus baru AIDS sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_2 = \exp\left(-27,935 + 5.208X_1 - 0,116X_2 + 0,264X_3 - 5,961X_4 + 0,106X_5\right)$$

Pendugaan parameter pada persamaan model regresi di atas dapat diinterpretasikan sebagai berikut:

1. Setiap peningkatan penduduk berusia 25-29 tahun sebesar 1%, maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus baru AIDS sebesar 182,728 $\left(e^{5,208}\right)$ kali dari rata-rata jumlah kasus baru AIDS semula jika variabel penjelas lainnya tetap, begitu pula sebaliknya.
2. Setiap peningkatan penduduk dengan tingkat pendidikan rendah sebesar 1%, maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus baru AIDS sebesar 0,793 $\left(e^{-0,116}\right)$ kali dari rata-rata jumlah kasus baru AIDS semula jika variabel penjelas lainnya tetap. Pola hubungan yang diperoleh dari pendugaan parameter tidak sesuai dengan pola hubungan yang diperoleh pada Gambar 4.3. Hal tersebut disebabkan korelasi antara persentase tingkat pendidikan rendah dan persentase PUS yang menggunakan kondom lebih tinggi daripada korelasi antara jumlah kasus baru AIDS dan persentase tingkat pendidikan rendah. Nilai korelasi antar variabel dapat dilihat pada Lampiran 5.

3. Setiap peningkatan PUS yang menggunakan kondom sebesar 1%, maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus baru AIDS sebesar 1,302 $\left(e^{0,264}\right)$ kali dari rata-rata jumlah kasus baru AIDS semula jika variabel penjelas lainnya tetap.
4. Setiap peningkatan penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan sebesar 1%, maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus baru AIDS sebesar 0,003 $\left(e^{-5,961}\right)$ kali dari rata-rata jumlah kasus baru AIDS semula jika variabel penjelas lainnya tetap.
5. Setiap peningkatan penduduk yang mendapatkan jaminan kesehatan sebesar 1%, maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus baru AIDS sebesar 1,112 $\left(e^{0,106}\right)$ kali dari rata-rata jumlah kasus baru AIDS semula jika variabel penjelas lainnya tetap. Pola hubungan yang diperoleh dari pendugaan parameter tidak sesuai dengan pola hubungan yang diperoleh pada Gambar 4.3. Hal tersebut disebabkan korelasi antara persentase tingkat pendidikan rendah dan persentase jaminan kesehatan masyarakat lebih tinggi daripada korelasi antara jumlah kasus baru AIDS dan persentase jaminan kesehatan masyarakat. Nilai korelasi antar variabel dapat dilihat pada Lampiran 5.

Beberapa interpretasi pendugaan parameter yang tidak sesuai dengan teori mengenai HIV dan AIDS disebabkan oleh keterbatasan dalam pengumpulan data. Tidak semua penderita HIV dan AIDS mau memeriksakan diri secara sukarela atau secara terbuka mengakui penyakitnya. Fenomena ini sering disebut sebagai fenomena gunung es karena jumlah kasus baru HIV dan AIDS yang tercatat tidak sebanyak jumlah penderita yang sebenarnya. Selain itu, struktur data yang digunakan bersifat agregat selama setahun, sehingga kemungkinan ada data yang tidak tercatat pada bulan-bulan tertentu di setiap kecamatannya.

Estimasi parameter yang diperoleh digunakan untuk mendapatkan nilai kebaikan model. Nilai kebaikan model diperoleh dengan mendapatkan nilai *Akaike Information Criterion* (Lampiran 10). Berdasarkan persamaan (2.12), nilai *Akaike Information Criterion* (AIC) yang diperoleh sebesar 901,051. Nilai tersebut cenderung kecil, sehingga model yang diperoleh merupakan model yang baik.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Pendugaan parameter model regresi bivariat Poisson *inverse* Gaussian (BPIG) menggunakan metode *maximum likelihood estimation* (MLE). Persamaan yang diperoleh dengan metode ini merupakan persamaan yang tidak eksplisit (tidak *close form*) sehingga pendugaan parameter diselesaikan dengan menggunakan algoritma *Newton-Raphson*.
2. Pengujian hipotesis terhadap parameter dilakukan secara parsial dan serentak. Pengujian hipotesis secara parsial menggunakan statistik uji Z, sedangkan pengujian hipotesis secara serentak menggunakan metode *maximum likelihood ratio test* (MLRT) sehingga diperoleh statistik uji G^2. Statistik uji G^2 yang diperoleh, yaitu:

$$G^2 = 2\left[\frac{n}{\hat{\tau}} - \frac{n}{\hat{\tau}_\omega} - \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\tau}_\omega}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}\left(z_i\right)\right] - \sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)\right] + \right.$$
$$\left. -\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}\ln\left(\frac{1+2\hat{\tau}\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j}}{1+2\hat{\tau}_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\hat{\beta}_{j0\omega}}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\hat{\beta}_{j0\omega}\right]$$

3. Berdasarkan pengujian hipotesis secara serentak, model regresi BPIG yang diperoleh merupakan model yang layak. Model regresi BPIG untuk jumlah kasus baru HIV di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo adalah:

$$\hat{\mu}_1 = \exp\left(-35,229 + 6,025X_1 - 0,117X_2 + 0,214X_3 - 6,227X_4 + 0,149X_5\right)$$

Model regresi BPIG untuk jumlah kasus baru AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo adalah:

$$\hat{\mu}_2 = \exp\left(-27,935 + 5.208X_1 - 0,116X_2 + 0,264X_3 - 5,961X_4 + 0,106X_5\right)$$

Variabel yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo di antaranya persentase penduduk berusia 25-29 tahun, persentase penduduk dengan tingkat pendidikan rendah, persentase PUS yang menggunakan kondom, persentase penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan, dan persentase penduduk yang mendapatkan jaminan kesehatan masyarakat.

5.2 Saran

Saran yang diperoleh berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan di antaranya:

1. Penelitian selanjutnya diharapkan menggunakan metode iterasi yang berbeda, seperti algoritma *Expectation Maximization* (EM), BFGS, Nelder Mead, dan sebagainya, karena *Newton-Raphson* terkendala jika determinan matriks Hessian bernilai nol.
2. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat memodifikasi program yang telah dibuat agar dapat mengakomodir jika jumlah unit pengamatan dari kedua variabel respon bernilai lebih dari 85.
3. Dinas Kesehatan Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo diharapkan dapat meningkatkan kegiatan penyuluhan kesehatan dan pelayanan Jaminan Kesehatan Masyarakat (Jamkesmas) terhadap masyarakat, khususnya penderita HIV dan AIDS.

DAFTAR PUSTAKA

Best, D. (1999), *Tests of Fit and Other Nonparametric Data Analysis*, Tesis, University of Wollongong, New SouthWales.

Chaubey, T.P. (2002), “Estimation in Inverse Gaussian Regression: Comparison of Asymptotic and Bootstrap Distributions”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 100, No. 2002, hal. 135-143.

De Jong, P. dan Heller, G.Z. (2008), *Generalized Linear Models for Insurance Data*, 1st edition, Cambridge University Press, New York.

Dean, C., Lawless, J.F., dan Willmot, G.E. (1989), “A Mixed Poisson-Inverse-Gaussian Regression Model”, *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 17, No. 2, hal. 171-181.

Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Timur (2014), *Profil Kesehatan Provinsi Jawa Timur 2014*, Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Timur, Surabaya.

Draper, N.R. dan Smith, R. (1992), *Applied Regression Analysis*, 2nd edition, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Ghitany, M.E., Karlis, D., Al-Mutairi, D.K., dan Al-Awadhi, F.A. (2012), “ An EM Algorithm for Multivariate Mixed Poisson Regression Models and its Application”, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, No. 137, hal. 6843-6856.

Hilbe, J.M. (2007), *Negative Binomial Regression*, 1st edition, Cambridge University Press, New York.

Hilbe, J.M. (2014), *Modeling Count Data*, Cambridge University Press, New York.

Holla, M.S. (1966), “On a Poisson-Inverse Gaussian Distribution”, *Metrika*, Vol. 11, hal. 115-121.

Hu, M.C., Pavlicova, M., dan Nunes, E.V. (2011), “Zero-Inflated and Hurdle Models of Count Data with Extra Zeros: Examples from an HIV-Risk Reduction Intervention Trial”, *The American Journal of Drug and Alcohol Abuse*, Vol. 37, No.5, hal. 367-375.

Hu, S. (2007), *Akike Information Criterion*, Lecture Handout: Center of Research in Scientific University, North Carolina State University, US.

Kambu, Y. (2012), *Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Tindakan Pencegahan Penularan HIV oleh ODHA di Sorong*, Tesis, Universitas Indonesia, Depok.

Karlis, D. dan Ntzoufras I. (2005), "Bivariate Poisson and Diagonal Inflated Bivariate Poisson Regression Model in R", *Journal of Statistical Software*, Vol. 14, No.10, hal 1-36.

Karlis, D. dan Xekalaki, E. (2005), "Mixed Poisson Distributions", *International Statistical Review*, Vol. 73, No. 1, hal. 35-58.

Kementerian Kesehatan Republik Indonesia (2014), *Situasi dan Analisis HIV dan AIDS*, Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, Jakarta Selatan.

Mondal, M.N.I dan Shitan, M. (2013), "Factors Affecting the HIV/AIDS Epidemic: An Ecological Analysis of Global Data", *African health Science*, Vol. 13, No.2, hal. 301-310.

Moran, D. dan Jordaan, J.A. (2007), "HIV/AIDS in Rusia: Determinants of Regional Prevalence", *International Journal of Health Geographics*, Vol. 6, No. 22, hal. 1-9.

Pangulimang, J. (2016), *Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Geographically Weighted Bivariate Zero-Inflated Poisson Regression*, Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Purnamasari, I. (2016), *Penaksiran Parameter dan Statistik Uji dalam Model Regresi Geographically Weighted Poisson inverse Gaussian*, Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Ratnasari, N.T. dan Purhadi (2014), "Pemodelan Faktor yang Mempengaruhi Jumlah HIV dan AIDS Propinsi Jawa Timur", *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, Vol. 2, No. 2, hal. 213-218.

Shoukri, M.M., Asyali, M.H., Vandorp, R., dan Kelton, D. (2004), "The Poisson Inverse Gaussian Regression Model in the Analysis of Clustered Counts Data", *Journal of Data Science*, Vol.2, No. 1, hal. 17-32.

Susilowati, T. (2009), *Faktor-Faktor Risiko yang berpengaruh terhadap Kejadian HIV dan AIDS di Semarang dan Sekitarnya*, Skripsi, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Umami, R.L. (2015), *Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Bivariate Zero-Inflated Poisson Regression (Studi Kasus: Jumlah Kasus Penderita HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo Tahun 2012)*, Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Walpole, R.E. (1992), *Pengantar Statistika*, Edisi ke-3, PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Willmot, G.E. (1987), "The Poisson-Inverse Gaussian Distribution as an Alternative to the Negative Binomial", *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1987, No. 3-4, hal. 113-127.

Widiari, S.M. (2016), *Penaksiran Parameter dan Statistik Uji dalam Model Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG) (Studi Kasus: Jumlah Kasus Baru HIV di Propinsi Jawa Timur Tahun 2013)*, Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Yeboah, M.A. dan Ansong, M.O. (2014), "Instrumental Variables Approach to Estimating the Continuing Effect of HIV/AIDS Epidemic on Global Development", *American International Journal of Contemporary Research*, Vol. 4, No. 6, hal. 159-180.

Zakanis, S.H., Alvarez, C., dan Li, V. (2007), "Socio-economic Determinants of HIV/AIDS Pandemic and Nations Efficiencies", *European Journal of Operational Research*, Vol. 176, No. 2, hal. 1181-1838.

Zha, L., Lord, D., dan Zou, Y. (2014), "The Poisson Inverse Gaussian (PIG) Generalized Linear Regression Model for Analyzing Motor Vehicle Crash Data", *Journal of Transportation Safety and Security*, DOI:20.2080/19439962.2014.977502.

Zheng, P. (2014), *Maximum Likelihood and Method of Moments Estimation*, Lecture Handout: University of California, Riverside.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

Lampiran 1

Penurunan Fungsi ln *Likelihood* BPIG (di Bawah Populasi)

Fungsi kepekatan peluang bersama Y_1 dan Y_2 sebagai berikut:

$$f(y_j;\boldsymbol{\beta}_j,\tau,\ j=1,2)=e^{\frac{1}{\tau}}K_s\left(z\right)\left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_j\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_j-1\right)}{4}}\prod_{j=1}^{2}\frac{\mu_j^{\ y_j}}{y_j\,!}$$

$$=e^{\frac{1}{\tau}}K_s\left(z\right)\left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}_j}\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_j-1\right)}{4}}\prod_{j=1}^{2}\frac{e^{y_j\mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}_j}}{y_j\,!} \qquad (1.1)$$

Fungsi *likelihood* dari persamaan (1.1) adalah

$$L\left(\boldsymbol{\beta}_j,\tau,\ j=1,2\right)=e^{\frac{n}{\tau}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\left[K_{s_i}\left(z_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}}\prod_{j=1}^{2}\frac{e^{y_{ij}\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}}{y_{ij}\,!}\right] \qquad (1.2)$$

Fungsi ln *likelihood* dari persamaan (1.2) sebagai berikut:

$$l\left(\boldsymbol{\beta}_j,\tau,\ j=1,2\right)=\frac{n}{\tau}-\frac{n}{2}\ln\left(\tau\right)+\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}\left(z_i\right)\right]+$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}\ln\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j+$$

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\,!\right)$$

Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ adalah

$$\frac{\partial l\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln K_{s_i}\left(z_i\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\beta_1}\mathbf{x}_i^T}{4\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}\right)}+\sum_{i=1}^{n}y_{i1}\mathbf{x}_i^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln K_{s_i}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i1}\mathbf{x}_i^T \qquad (1.3)$$

Diketahui $s_i = \sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}$, sehingga

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial\left(z_i\right)} = \frac{-z_i K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}$$

Definisikan $z_i = \frac{1}{\tau}\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}$, maka

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial\left(z_i\right)} = \frac{-\frac{1}{\tau}\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}\, K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\frac{1}{\tau}\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}$$

$$= -K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_i\right) + \frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}$$

Turunan $\ln K_{s_i}\left(z_i\right)$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln K_{s_i}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \frac{\partial \ln K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}$$

$$= \frac{\partial \ln K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{\tau}\sqrt{1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}$$

$$= \left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_i\right) + \frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}\right]$$

$$\times\frac{1}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\frac{2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\mathbf{x}_i^T}{2\tau\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\left[-\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}+\frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}\right]\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\mathbf{x}_i^T}{\sqrt{1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}}$$

Diketahui $M\left(y_i\right)=\frac{1}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}$, maka

$$\frac{\partial\ln K_{s_i}\left(z_i\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}=\left[-\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}+\frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}\right]\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\mathbf{x}_i^T}{\sqrt{1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}}$$

$$=\left[-\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}M\left(y_i\right)+\frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}\right]\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\mathbf{x}_i^T}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \qquad (1.4)$$

Substitusi persamaan (1.4) ke persamaan (1.3).

$$\frac{\partial l\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln K_{s_i}\left(z_i\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\sum_{i=1}^{n}y_{i1}\mathbf{x}_i^T$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[-\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}M\left(y_i\right)+\frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}\right]\frac{\mu_{i1}x_i^T}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+y_{i1}\mathbf{x}_i^T\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)M\left(y_i\right)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\frac{2\tau\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)y_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)M(y_i)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)y_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)M(y_i)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\frac{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)y_{i1}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i1}-M(y_i)\mu_{i1}\right]\mathbf{x}_i^T$$

Turunan kedua fungsi ln *Likelihood* terhadap β_1 adalah

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\boldsymbol{\beta}_1}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i1}-M(y_i)\mu_{i1}\right]\mathbf{x}_i^T$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\left(y_{i1}\mathbf{x}_i^T\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}-\frac{\partial\left[M(y_i)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\right] \qquad (1.5)$$

Adapun turunan pertama dari $M(y_i)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ sebagai berikut:

Misalkan

$u_i = M(y_i)$

$\mathbf{v}_i=\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T=e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\mathbf{x}_i^T$

$\mathbf{u}_i' = \dfrac{\partial M(y_i)}{\partial\beta_1^T}$

$$=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\left[\frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right]$$

$$=\left[\frac{\partial\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\right]\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}+$$

$$+\frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right] \tag{1.6}$$

Turunan dari $\frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}=\frac{\partial\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}$$

$$=\frac{\partial\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(2\tau\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=-\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{1.7}$$

Turunan pertama $\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\left(\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right)=\frac{1}{\left(K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)\right)^2}\left[\left(\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)+\right.$$

$$\left.-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right] \tag{1.8}$$

Persamaan (1.8) dapat diselesaikan menggunakan aturan rantai, sehingga

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}=\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \tag{1.9}$$

dimana

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i}=\frac{-z_i K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{3}{2}}\left(z_i\right)+\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}$$

$$=-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{3}{2}}\left(z_i\right)+\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i} \tag{1.10}$$

dan

$$K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{3}{2}}\left(z_i\right)=K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)+\frac{2\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i} \tag{1.11}$$

Substitusi persamaan (1.11) ke persamaan (1.10).

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i}=-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{3}{2}}\left(z_i\right)+\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}$$

$$= -\left(K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right) + \frac{2\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i} \right) +$$

$$+ \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}$$

$$= -K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right) - \frac{2\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i} +$$

$$+ \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}$$

$$= -K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_i\right) - \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i} \tag{1.12}$$

Turunan z_i terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ adalah

$$\frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial \left(1 + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$$

$$= \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(2\tau \mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}{\sqrt{1 + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2}}}$$

$$= \frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}{\sqrt{1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}}} \tag{1.13}$$

Substitusi persamaan (1.12) dan (1.13) ke persamaan (1.9).

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$$

$$= \left(-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right) - \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i} \right) \frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}{\sqrt{1+2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}}} \qquad (1.14)$$

Persamaan (1.8) dapat diselesaikan menggunakan aturan rantai sehingga

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \qquad (1.15)$$

dimana

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i} = \frac{-z_i K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}$$

$$= -K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right) + \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i} \qquad (1.16)$$

Substitusi persamaan (1.16) dan (1.13) ke persamaan (1.15).

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$$

$$= \left(-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right) + \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i} \right) \frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}{\sqrt{1+2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}}} \qquad (1.17)$$

Substitusi persamaan (1.14) dan (1.17) ke persamaan (1.8).

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\left(\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right)=\frac{1}{\left(K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)\right)^2}\left[\left(\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)+\right.$$

$$\left.-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)\left(\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\left(K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)\right)^2}$$

$$\times\left\{\frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}\left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)-\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}\right]+\right.$$

$$\left.-\frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}\left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)+\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}\right]\right\}$$

$$=\frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}{\left(K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)\right)^2\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}\left\{-\left[K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)\right]^2+\right.$$

$$-\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}+\left[K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)\right]^2$$

$$\left.-\frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \left\{ -1 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)} + \right. \\
&\left. + \left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)} \right]^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)} \right\} \\
&= \frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \left\{ -1 - \frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}\right) M\left(y_i\right)\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} + \right. \\
&\left. + M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right) - \frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) M\left(y_i\right)\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \right\} \\
&= -\frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \left[1 + \tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}\right) M\left(y_i\right) + \right. \\
&\left. - M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right) + \tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) M\left(y_i\right) \right] \\
&= -\frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \left[1 + \tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) + \right. \\
&\left. - M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right) \right] \\
&= -\frac{\mathbf{x}_i \mu_{i1}}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \left[1 + \tau M\left(y_i\right)\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right) - M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right) \right]
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Substitusi persamaan (1.7) dan (1.18) ke persamaan (1.6).

$$\mathbf{u}_i' = \left[\frac{\partial\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\right]\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)} + \frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}\right]$$

$$= -\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{3}{2}} M(y_i)\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} +$$

$$-\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}\left[1+\tau M(y_i)\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right) - M^2(y_i)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]$$

$$= -\frac{\tau\mu_{i1}\mathbf{x}_i M(y_i)}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} - \frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}\left[1+\tau M(y_i)\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right) - M^2(y_i)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]$$

$$= -\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}\left[\tau M(y_i) + 1 + \tau M(y_i)\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right) - M^2(y_i)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]$$

$$= -\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left[1+\tau M(y_i)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} + \mu_{i1}\mathbf{x}_i M^2(y_i) \tag{1.19}$$

Turunan $e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\mathbf{x}_i^T$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_i' = \frac{\partial\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\mathbf{x}_i^T\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}$$

$$= \mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\mathbf{x}_i^T$$

$$= \mu_{i1}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T$$

Sehingga, turunan pertama $M(y_i)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1^T$ dapat ditulis:

$$\frac{\partial\left[M\left(y_i\right)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}=\mathbf{u}_i\,'\mathbf{v}_i+u_i\mathbf{v}_i\,'$$

$$=\left\{-\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}+\mu_{i1}\mathbf{x}_iM^2\left(y_i\right)\right\}\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T+$$

$$+M\left(y_i\right)\mathbf{x}_i\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T$$

$$=\mu_{i1}\left\{-\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}+\mu_{i1}\mathbf{x}_iM^2\left(y_i\right)+M\left(y_i\right)\mathbf{x}_i\right\}\mathbf{x}_i^T$$

(1.20)

Substitusi persamaan (1.20) ke persamaan (1.5).

$$\frac{\partial^2 l\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\partial\boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\left(y_{i1}\mathbf{x}_i^T\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}-\frac{\partial\left[M\left(y_i\right)\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}+\mu_{i1}\mathbf{x}_iM^2\left(y_i\right)+M\left(y_i\right)\mathbf{x}_i\right\}\mu_{i1}\mathbf{x}_i^T$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\mu_{i1}\left\{M\left(y_i\right)-\frac{\mu_{i1}\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}+\mu_{i1}M^2\left(y_i\right)\right\}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T$$

Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta_2}$ adalah

$$\frac{\partial l\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln K_{s_i}\left(z_i\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\mathbf{x}_i^T}{4\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j}\right)}+\sum_{i=1}^{n}y_{i2}\mathbf{x}_i^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i2}\mathbf{x}_i^T \tag{1.21}$$

Turunan pertama $\ln K_{s_i}(z_i)$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \frac{\partial \ln K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}$$

$$= \frac{\partial \ln K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{\tau}\sqrt{1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}$$

$$= \left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i) + \frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \right]$$

$$\times \frac{1}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} \frac{2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\mathbf{x}_i^T}{2\tau\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left[-\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} + \frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \right] \frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\mathbf{x}_i^T}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}$$

Diketahui $M(y_i) = \frac{1}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}$, maka

$$\frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \left[-\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} + \frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \right] \frac{\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}$$

$$= \left[-\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} M(y_i) + \frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \right] \frac{\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}}$$

$$= -\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T M(y_i) + \frac{\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} \tag{1.22}$$

Substitusi persamaan (1.22) ke persamaan (1.21).

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln K_{s_i}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i2}\mathbf{x}_i^T$$

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T M(y_i) + \frac{\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} \right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{2\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i2}\mathbf{x}_i^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[-\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T M(y_i) + \frac{\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} + y_{i2}\mathbf{x}_i^T \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[y_{i2} - \mu_{i2} M(y_i) \right] \mathbf{x}_i^T \tag{1.23}$$

Turunan kedua $\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T \partial \boldsymbol{\beta}_2} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\left[\frac{\partial \ln(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \sum_{i=1}^{n} \left[y_{i2} - \mu_{i2} M(y_i) \right] \mathbf{x}_i^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[0 - \mu_{i2} \frac{\partial M(y_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right] \mathbf{x}_i^T \tag{1.24}$$

Substitusi persamaan (1.24) dengan persamaan (1.19).

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T \partial \boldsymbol{\beta}_2} = -\sum_{i=1}^{n} \mu_{i2} \left[\frac{\partial M(y_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right] \mathbf{x}_i^T$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \mu_{i2} \left\{ -\frac{\mu_{i1}\mathbf{x}_i}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} \left[1+\tau M(y_i)\left(1+2\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right) \right] + \mu_{i1}\mathbf{x}_i M^2(y_i) \right\} \mathbf{x}_i^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_{i1}\mu_{i2} \left\{ \frac{\left[1+\tau M(y_i)\left(1+2\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right) \right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} - M^2(y_i) \right\} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$$

Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap τ sebagai berikut:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{n}{\tau} - \frac{n\ln(\tau)}{2} + \frac{n\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \ln\left[K_{s_i}(z_i)\right] + \right.$$

$$\left. -\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(2\sum_{i=1}^{2} y_{ij} - 1\right)\ln\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{4} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_j - \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} y_{ij}!\right) \right]$$

$$= -\frac{n}{\tau^2} - \frac{n}{2\tau} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln\left[K_{s_i}(z_i)\right]}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)} \qquad (1.25)$$

Turunan pertama $\ln\left[K_{s_i}(z_i)\right]$ terhadap τ adalah:

$$\frac{\partial \ln\left[K_{s_i}(z_i)\right]}{\partial \tau} = \frac{\partial \ln\left[K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)\right]}{\partial \tau}$$

$$= \frac{1}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} \frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}{\partial \tau}$$

$$=\frac{1}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\left[\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial\tau}\right]$$

$$=\frac{1}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\left\{\left[-K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)-\frac{\tau\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial\left[\tau^{-1}\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\partial\tau}\right\}$$

$$=\frac{1}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\left\{\left[-K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)-\frac{\tau\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\tau^2}\left[\frac{2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}{2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}-\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\left\{\left[-K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)-\frac{\tau\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}-\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}$$

$$=-\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[-\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}-\frac{\tau\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$=\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[M\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\tau\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$=\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)}{\tau\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2} \tag{1.26}$$

Substitusi persamaan (1.26) ke persamaan (1.25).

$$\frac{\partial l\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\tau}=-\frac{n}{\tau^2}-\frac{n}{2\tau}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln\left[K_{s_i}\left(z_i\right)\right]}{\partial\tau}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}$$

$$=-\frac{n}{\tau^2}-\frac{n}{2\tau}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)}{\tau\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}$$

$$=-\frac{n}{2\tau}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)-1}{\tau^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{M(y_i)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)-1}{\tau^2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau} \tag{1.27}$$

Turunan kedua persamaan (1.27) terhadap β_1 dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \tau}=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{M(y_i)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)-1}{\tau^2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau}\right]$$

$$=\frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\right]\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}\right]\right\}$$

Turunan $\dfrac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left[\frac{\partial\left(1+\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\frac{\partial\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\right]$$

$$= \frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left[\tau\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. -\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\frac{1}{2}\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}} 2\tau\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right]$$

$$= \frac{\tau\mathbf{x}_i\mu_{i1}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\tau\mathbf{x}_i\mu_{i1}\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Berdasarkan persamaan (1.18), turunan $\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\tau}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\tau} = \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\right]\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)} + \right.$$

$$\left. +\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{\tau\mathbf{x}_i\mu_{i1}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\tau\mathbf{x}_i\mu_{i1}\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]M(y_{ij})\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. -\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathbf{x}_i\mu_{i1}\left[1+\tau M(y_i)\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)-M^2(y_i)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i1}\mathbf{x}_i\left\{\tau M(y_i) - \frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1+\tau M(y_i)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\right.$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i1}\left\{\tau M(y_i) - \frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1+\tau M(y_i)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\right.$$

$$\left. +M^2(y_i)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right\}\mathbf{x}_i$$

Berdasarkan persamaan (1.23), turunan kedua fungsi ln *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ adalah:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T\partial\boldsymbol{\beta}_2} = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i2} - \mu_{i2}M(y_i)\right]\mathbf{x}_i^T$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\left[\mu_{i2}M(y_i)\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\right\}\mathbf{x}_i^T \tag{1.28}$$

Turunan $\mu_{i2}M(y_i)$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_2^T$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial\left[\mu_{i2}M(y_i)\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\left[\frac{\mu_{i2}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\left[\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}{\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\left[\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}{\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right]$$

$$= \left\{\frac{\partial\left[e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right\}\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}+$$

$$+\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}{\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right] \tag{1.29}$$

Turunan $\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}{\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_2^T$ dapat ditulis

$$\frac{\partial\left[e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left[\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. - \frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\tau\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}{\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= \mathbf{x}_i\mu_{i2}\left[\frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\tau\mu_{i2}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{1.30}$$

Turunan z_i terhadap $\boldsymbol{\beta}_2^T$ adalah

$$\frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial\left[\tau^{-1}\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}$$

$$= \frac{1}{\tau}\frac{1}{2}\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2\tau \mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}{\sqrt{1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}}$$

$$= \frac{\mathbf{x}_i \mu_{i2}}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \tag{1.31}$$

Substitusi persamaan (1.12) dan (1.31) ke persamaan berikut:

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}$$

$$= \left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right) - \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}\right]\frac{\mathbf{x}_i \mu_{i2}}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \tag{1.32}$$

Substitusi persamaan (1.16) dan (1.31) ke persamaan berikut:

$$\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}$$

$$= \left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right) + \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_i}\right]\frac{\mathbf{x}_i \mu_{i2}}{\sqrt{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}} \tag{1.33}$$

Substitusi persamaan (1.32) dan (1.33) ke persamaan berikut:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\left(\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}\right) &= \frac{1}{\left(K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)\right)^2}\left\{\left[\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right] K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i) + \right. \\
&\quad \left. - K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)\frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right\} \\
&= \frac{1}{\left(K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)\right)^2} \\
&\quad \times \left\{\frac{\mathbf{x}_i \mu_{i2} K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i) - \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{z_i}\right] + \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mathbf{x}_i \mu_{i2} K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i) + \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}{z_i}\right]\right\} \\
&= \frac{\mathbf{x}_i \mu_{i2}}{\left(K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)\right)^2 \left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\left\{-\left[K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)\right]^2 + \right. \\
&\quad - \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i)}{z_i} + \left[K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)\right]^2 + \\
&\quad \left. - \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_i) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_i)}{z_i}\right\}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{\mathbf{x}_i\mu_{i2}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\left\{-1-\frac{\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_iK_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right]^2-\frac{\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{z_iK_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right\}$$

$$=\frac{\mathbf{x}_i\mu_{i2}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\left\{-1-\frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}\right)M\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$\left.+M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)-\frac{\tau\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)M\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$=-\frac{\mathbf{x}_i\mu_{i2}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[1+\tau\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}\right)M\left(y_i\right)+\right.$$

$$\left.-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\tau\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)M\left(y_i\right)\right]$$

$$=-\frac{\mathbf{x}_i\mu_{i2}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]$$

$$= -\frac{\mathbf{x}_i \mu_{i2}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]$$

(1.34)

Berdasarkan persamaan (1.30) dan (1.34), persamaan (1.29) menjadi

$$\frac{\partial\left[\mu_{i2}M\left(y_i\right)\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial\left[e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}+$$

$$+\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}{\left(1+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+2\tau e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right]$$

$$= \mathbf{x}_i\mu_{i2}\left[\frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\tau\mu_{i2}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]M\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\left\{-\frac{\mu_{i2}\mathbf{x}_i^T\left[1+2\tau M\left(y_i\right)\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$= \mathbf{x}_i\mu_{i2}M\left(y_i\right)\left[1-\frac{\tau\mu_{i2}}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}\right]$$

$$-\frac{\mu_{i2}\mu_{i2}\mathbf{x}_i\left[1+2\tau M\left(y_i\right)\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}$$

$$= \mu_{i2}\left\{ M(y_i) - \frac{\mu_{i2}\left[1+\tau M(y_i)\left(1+2\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)\right]}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)} + \mu_{i2} M^2(y_i) \right\} \mathbf{x}_i \quad (1.35)$$

Substitusi persamaan (1.35) ke persamaan (1.28).

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T \partial \boldsymbol{\beta}_2} = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial\left[\mu_{i2} M(y_i)\right]}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right\} \mathbf{x}_i^T$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \mu_{i2} \left\{ M(y_i) - \frac{\mu_{i2}\left[1+\tau M(y_i)\left(1+2\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}} + \mu_{i2} M^2(y_i) \right\} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$$

Turunan persamaan (1.27) terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{M(y_i)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right) - 1}{\tau^2} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} \frac{y_{ij}}{\tau} \right]$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left[M(y_i)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \quad (1.36)$$

Berdasarkan persamaan (1.34), turunan $M(y_i)$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial M(y_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\left[\frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} \right]$$

$$
= \frac{\partial \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} + \frac{1}{\left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} \right]
$$

(1.37)

Turunan $\left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ sebagai berikut:

$$
\frac{\partial \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \frac{\partial \left(1 + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}
$$

$$
= -\frac{1}{2} 2\tau \mathbf{x}_i e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} \left(1 + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} + 2\tau e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2}\right)^{-\frac{3}{2}}
$$

$$
= -\tau \mathbf{x}_i \mu_{i2} \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{1.38}
$$

Substitusi persamaan (1.3) dan (1.38) ke persamaan (1.37).

$$
\frac{\partial M(y_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \frac{\partial \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} +
$$

$$
+ \frac{1}{\left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} \right]
$$

$$
= -\tau \mathbf{x}_i \mu_{i2} \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)} +
$$

$$
- \frac{\mu_{i2} \mathbf{x}_i}{\left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right)} \left[1 + 2\tau M(y_i) \sum_{j=1}^{2} y_{ij} - M^2(y_i) \left(1 + 2\tau \sum_{j=1}^{2} \mu_{ij}\right) \right]
$$

$$= -\frac{\tau\mu_{i2}\mathbf{x}_i}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}M\left(y_i\right)+$$

$$-\frac{\mu_{i2}\mathbf{x}_i}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left[1+2\tau M\left(y_i\right)\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]$$

$$= -\frac{\mu_{i2}\mathbf{x}_i}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left[1+\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\tau M\left(y_i\right)-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]$$

(1.39)

Berdasarkan persamaan (1.39), turunan $M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)$ menjadi

$$\frac{\partial\left[M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\boldsymbol{\beta}_2} = \frac{\partial M\left(y_i\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+M\left(y_i\right)\frac{\partial\left(1+\tau e^{\mathbf{x}_{i1}^T\boldsymbol{\beta}_1}+\tau e^{\mathbf{x}_{i2}^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}$$

$$= -\frac{\mu_{i2}\mathbf{x}_i\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left[1+\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\tau M\left(y_i\right)+\right.$$

$$\left.-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]+M\left(y_i\right)\tau\mathbf{x}_i\mu_{i2} \tag{1.40}$$

Substitusi persamaan (1.40) ke persamaan (1.36). Sehingga,

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\tau} = \frac{1}{\tau^2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}\left\{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i2}\mathbf{x}_i\left\{\tau M\left(y_i\right)-\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1+\tau M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}+\right.$$

$$+M^{2}\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\Bigg\}$$

Berdasarkan persamaan (1.27), turunan kedua $l(\boldsymbol{\theta})$ terhadap τ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\tau^2}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\tau}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)-1}{\tau^2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\left[\tau^{-2}M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}-\frac{\partial\tau^{-2}}{\partial\tau}-\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\left(y_{ij}\tau^{-1}\right)}{\partial\tau}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\left[\tau^{-2}M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}+\frac{2}{\tau^3}+\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau^2}\right\} \tag{1.41}$$

Turunan $\dfrac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2}$ terhadap τ sebagai berikut:

$$\frac{\partial\left[\tau^{-2}M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}=\frac{1}{\tau^4}\left\{\frac{\partial\left[M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}\tau^2-2\tau M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right\}$$

(1.42)

dengan

$$\frac{\partial}{\partial\tau}M\left(y_i\right)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right]$$

$$=\frac{\partial\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial\tau}\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}+\frac{1}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}\left(z_i\right)}\right]$$

$$=-\frac{M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}+\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left[1-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.$$

$$\left.+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{\tau^2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left[\tau^2 M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.$$

$$+M^2\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+$$

$$\left.-2\tau M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{\tau^2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left\{\tau^2 M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.$$

$$\left.-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]\right\}$$

Maka

$$\frac{\partial\left[M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}=\left[\frac{\partial M\left(y_i\right)}{\partial\tau}\right]\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)$$

$$= -\frac{1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}{\tau^2\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left\{\tau^2 M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.$$

$$-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]\right\}+M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right) \qquad (1.43)$$

Substitusi persamaan (1.43) ke persamaan (1.42).

$$\frac{\partial\left[\tau^{-2}M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau} = \frac{1}{\tau^4}\left\{\frac{\partial\left[M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}\tau^2 - 2\tau M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right\}$$

$$= -\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^4\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left\{\tau^2 M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.$$

$$\left.-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]\right\}+$$

$$+\frac{M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^2}-\frac{2M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^3}$$

Sehingga, persamaan (1.41) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\tau^2} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\left[\tau^{-2}M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\right]}{\partial\tau}+\frac{2}{\tau^3}+\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau^2}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^4\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\left\{\tau^2 M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.\right.$$

$$-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1-M^{2}\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]\Bigg\}$$

$$\left.+\frac{M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^{2}}-\frac{2M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^{3}}+\frac{2}{\tau^{3}}+\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau^{2}}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^{4}\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\Bigg\{\tau^{2}M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.$$

$$-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1-M^{2}\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]\Bigg\}+$$

$$\left.+\frac{\tau^{2}M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^{4}}-\frac{2M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^{3}}+\frac{2}{\tau^{3}}+\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{ij}}{\tau^{2}}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^{4}\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}\Bigg\{\tau^{2}M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+\right.$$

$$-\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)\left[1-M^{2}\left(y_i\right)\left(1+2\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)+2\tau M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]\Bigg\}$$

$$\left.+\frac{2-2M\left(y_i\right)\left(1+\tau\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}\right)}{\tau^{3}}+\frac{\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)+M\left(y_i\right)\sum_{j=1}^{2}\mu_{ij}}{\tau^{2}}\right]$$

Lampiran 2

Penurunan Fungsi Ln *Likelihood* BPIG (di Bawah H_0)

Himpunan parameter di bawah populasi (Ω) adalah $\{\boldsymbol{\beta}_j, \tau, j=1,2\}$. Fungsi *likelihood* di bawah populasi, $L(\boldsymbol{\Omega})$, sebagai berikut:

$$L\left(\hat{\boldsymbol{\Omega}}\right)=e^{\frac{n}{\hat{\tau}}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\hat{\tau}}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\left[K_{s_i}\left(z_i\right)\left(1+2\hat{\tau}\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j}\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}}\prod_{j=1}^{2}\frac{e^{y_{ij}\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j}}{y_{ij}!}\right]$$

Fungsi ln *likelihood* di bawah populasi, $l\left(\hat{\boldsymbol{\Omega}}\right)$, sebagai berikut:

$$l\left(\hat{\boldsymbol{\Omega}}\right)=\frac{n}{\hat{\tau}}-\frac{n}{2}\ln\left(\hat{\tau}\right)+\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}\left(z_i\right)\right]+$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}\ln\left(1+2\hat{\tau}\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j-\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}!\right) \qquad (2.1)$$

Himpunan parameter di bawah H_0 $(\hat{\omega})$ adalah $\{\beta_{j0}, \tau, j=1,2\}$. Fungsi *likelihood* di bawah H_0, $L(\hat{\boldsymbol{\omega}})$, sebagai berikut:

$$L\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\right)=e^{\frac{n}{\hat{\tau}_\omega}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\hat{\tau}_\omega}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\left[K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)\left(1+2\hat{\tau}_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\hat{\beta}_{j0\omega}}\right)^{-\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}}\prod_{j=1}^{2}\frac{e^{y_{ij}\hat{\beta}_{j0\omega}}}{y_{ij}!}\right]$$

Fungsi ln *likelihood* di bawah H_0, $l(\boldsymbol{\omega})$, sebagai berikut:

$$l\left(\boldsymbol{\omega}\right)=\frac{n}{\tau_\omega}-\frac{n}{2}\ln\left(\tau_\omega\right)+\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)\right]+$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}\ln\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\beta_{j0\omega}-\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}!\right) \qquad (2.2)$$

Turunan pertama $l(\boldsymbol{\omega})$ terhadap $\beta_{10\omega}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{10\omega}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{10\omega}} \left\{ \frac{n}{\tau_\omega} - \frac{n}{2}\ln(\tau_\omega) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right] \right.$$

$$\left. -\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)}{4} \ln\left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\beta_{j0\omega} - \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} y_{ij}!\right) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln\left[K_{s_i}(z_i)\right]}{\partial \beta_{10\omega}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1\right)}{4} \frac{\partial \ln\left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)}{\partial \beta_{10\omega}} + \sum_{i=1}^{n} y_{i1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right]} \frac{\partial\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right]}{\partial \beta_{10\omega}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_\omega \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) e^{\beta_{10\omega}}}{\left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i1}$$

Turunan pertama $K_{s_i}(z_{i\omega})$ terhadap $\beta_{10\omega}$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial K_{s_i}(z_{i\omega})}{\partial \beta_{10\omega}} = \frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_{i\omega})}{\partial z_{i\omega}} \cdot \frac{\partial z_{i\omega}}{\partial \beta_{10\omega}}$$

$$= \frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \left[\tau_\omega^{-1}\left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\partial \beta_{10\omega}}$$

$$= \left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_i) + \frac{\tau_\omega\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_i)}{\left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{2\tau_\omega e^{\beta_{10\omega}}}{2\tau_\omega \left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}(z_{i\omega}) + \frac{\tau_\omega\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}(z_{i\omega})}{\left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{e^{\beta_{10\omega}}}{\left(1 + 2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3)$$

Substitusi persamaan (2.3) ke persamaan (2.2).

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{10\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left[K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)\right]} \frac{\partial\left[K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)\right]}{\partial \beta_{10\omega}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_\omega \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) e^{\beta_{10\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left[K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right)\right]} \frac{\partial\left[K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right)\right]}{\partial \beta_{10\omega}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_\omega \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) e^{\beta_{10\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right)} + \frac{\tau_\omega \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{e^{\beta_{10\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_\omega \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) e^{\beta_{10\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[-M\left(y_i\right) + \frac{\tau_\omega \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} \right] e^{\beta_{10\omega}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_\omega \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) e^{\beta_{10\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i1}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} e^{\beta_{10\omega}} M\left(y_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_\omega e^{\beta_{10\omega}} \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_\omega e^{\beta_{10\omega}} \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} + \sum_{i=1}^{n} y_{i1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[y_{i1} - M\left(y_j\right) e^{\beta_{10\omega}} \right]$$

Turunan pertama $l(\boldsymbol{\omega})$ terhadap $\beta_{20\omega}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{20\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \left[y_{i2} - M\left(y_i\right) e^{\beta_{20\omega}} \right]$$

Turunan pertama $l(\boldsymbol{\omega})$ terhadap τ_ω sebagai berikut:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \tau_\omega} = \frac{\partial}{\partial \tau_\omega}\left\{\frac{n}{\tau_\omega} - \frac{n}{2}\ln(\tau_\omega) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right] + \right.$$

$$\left. -\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}\ln\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\beta_{j0\omega} - \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}!\right)\right\}$$

$$= -\frac{n}{\tau_\omega^2} - \frac{n}{2\tau_\omega} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K_{s_i}(z_{i\omega})}\frac{\partial\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right]}{\partial \tau_\omega} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)} \qquad (2.4)$$

Turunan pertama $K_{s_i}(z_{i\omega})$ terhadap τ_ω dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right]}{\partial \tau_\omega} = \frac{\partial K_{s_i}(z_{i\omega})}{\partial z_{i\omega}}\cdot\frac{\partial z_{i\omega}}{\partial \tau_\omega}$$

$$= \frac{\partial K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_{i\omega})}{\partial z_{i\omega}}\cdot\frac{\partial\left[\frac{1}{\tau_\omega}\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\partial \tau_\omega}$$

$$= \left[-K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}+\frac{1}{2}}(z_{i\omega}) + \frac{\tau_\omega\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}\right)K_{\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-\frac{1}{2}}(z_{i\omega})}{\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\times\left[-\frac{\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\tau_\omega^2} + \frac{\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}}{\tau_\omega\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \qquad (2.5)$$

Substitusi persamaan (2.5) ke persamaan (2.4).

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l(\omega)}{\partial \tau_\omega} &= -\frac{n}{\tau_\omega^2} - \frac{n}{2\tau_\omega} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)} \frac{\partial\left[K_{s_i}\left(z_{i\omega}\right)\right]}{\partial \tau_\omega} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} \\
&= -\frac{n}{\tau_\omega^2} - \frac{n}{2\tau_\omega} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right)} \left\{ \left[-K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right) + \frac{\tau_\omega \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right) K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right)}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left[-\frac{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\tau_\omega^2} + \frac{\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\tau_\omega \left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} \\
&= -\frac{n}{\tau_\omega^2} - \frac{n}{2\tau_\omega} - \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[-\frac{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} + \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right)}{K_{\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}}\left(z_{i\omega}\right)} + \frac{\tau_\omega \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left[\frac{1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\tau_\omega^2 \left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} \\
&= -\frac{n}{\tau_\omega^2} - \frac{n}{2\tau_\omega} - \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[-M\left(y_{ij}\right)\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\tau_\omega \left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left[\frac{1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\tau_\omega^2 \left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)}
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{n}{\tau_\omega^2} - \frac{n}{2\tau_\omega} + \frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)}{\tau_\omega^2} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)\left(1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)}{\tau_\omega\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)} +$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}}{\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)}$$

$$= -\frac{n}{\tau_\omega^2} - \frac{n}{2\tau_\omega} + \sum_{i=1}^{n} \frac{M\left(y_{ij}\right)\left(1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)}{\tau_\omega^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - \frac{1}{2}\right)\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)}{\tau_\omega\left(1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right) - 1}{\tau_\omega^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(2\sum_{j=1}^{2} y_{ij} - 1 + 1\right)}{2\tau_\omega}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{M\left(y_i\right)\left(1+\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}\right) - 1}{\tau_\omega^2} \right\} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \frac{y_{ij}}{\tau_\omega}$$

Turunan kedua fungsi ln *likelihood* terhadap $\beta_{10\omega}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{10\omega}^2} = -\sum_{i=1}^{n} e^{\beta_{10\omega}} \left\{ M\left(y_i\right) - \frac{e^{\beta_{10\omega}}\left[1+\tau_\omega M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{j0\omega}}} + e^{\beta_{10\omega}} M^2\left(y_i\right) \right\}$$

Turunan kedua fungsi ln *likelihood* terhadap $\beta_{20\omega}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta_{20\omega}^2} = -\sum_{i=1}^{n} e^{\beta_{20\omega}} \left\{ M\left(y_i\right) - \frac{e^{\beta_{20\omega}}\left[1+\tau_\omega M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2} y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau_\omega \sum_{j=1}^{2} e^{\beta_{20\omega}}} + e^{\beta_{20\omega}} M^2\left(y_i\right) \right\}$$

Turunan kedua fungsi ln *likelihood* terhadap τ_ω sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial \tau_\omega^2}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\left(1+\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)}{\tau_\omega{}^4\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)}\left\{\tau_\omega{}^2M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.-\left(1+\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)\left[1-M^2\left(y_i\right)\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)+2\tau_\omega M\left(y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]\right\}+$$

$$\left.+\frac{2-2M\left(y_i\right)\left(1+\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)}{\tau_\omega{}^3}+\frac{\left(\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)+M\left(y_i\right)\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}}{\tau_\omega{}^2}\right]$$

Turunan fungsi ln *likelihood* terhadap $\beta_{10\omega}$ dan $\beta_{20\omega}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\beta_{10\omega}\partial\beta_{20\omega}}=\sum_{i=1}^{n}e^{\beta_{10\omega}}e^{\beta_{20\omega}}\left(\frac{\left[1+\tau_\omega M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}}-M^2\left(y_i\right)\right)$$

Turunan fungsi ln *likelihood* terhadap $\beta_{10\omega}$ dan τ_ω sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\beta_{10\omega}\partial\tau_\omega}=\frac{1}{\tau_\omega{}^2}\sum_{i=1}^{n}e^{\beta_{10\omega}}\left\{\tau_\omega M\left(y_i\right)-\frac{\left(1+\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)\left[1+\tau_\omega M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)}+\right.$$

$$\left.+M^2\left(y_i\right)\left(1+\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)\right\}$$

Turunan fungsi ln *likelihood* terhadap $\beta_{20\omega}$ dan τ_ω sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\omega})}{\partial\beta_{20\omega}\partial\tau_\omega}=\frac{1}{\tau_\omega{}^2}\sum_{i=1}^{n}e^{\beta_{20\omega}}\left\{\tau_\omega M\left(y_i\right)-\frac{\left(1+\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)\left[1+\tau_\omega M\left(y_i\right)\left(1+2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\right)\right]}{\left(1+2\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)}+\right.$$

$$\left.+M^2\left(y_i\right)\left(1+\tau_\omega\sum_{j=1}^{2}e^{\beta_{j0\omega}}\right)\right\}$$

Setelah nilai $\hat{\beta}_{10\omega}$, $\hat{\beta}_{20\omega}$ dan $\hat{\tau}_{\omega}$ diperoleh, perhitungan statistik uji dapat dilakukan dengan menyubstitusi persamaan (2.1) dan (2.2) ke statistik uji G^2.

$$
\begin{aligned}
G^2 &= -2\ln\left(\frac{L(\hat{\boldsymbol{\omega}})}{L(\hat{\boldsymbol{\Omega}})}\right) \\
&= 2\left[l(\hat{\boldsymbol{\Omega}}) - l(\hat{\boldsymbol{\omega}})\right] \\
&= 2\left\{\left[\frac{n}{\hat{\tau}} - \frac{n}{2}\ln(\hat{\tau}) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}(z_i)\right] + \right.\right. \\
&\quad \left. -\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}\ln\left(1+2\hat{\tau}\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j - \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}!\right)\right] + \\
&\quad -\left[\frac{n}{\hat{\tau}_{\omega}} - \frac{n}{2}\ln(\hat{\tau}_{\omega}) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right] + \right. \\
&\quad \left.\left. -\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}\ln\left(1+2\hat{\tau}_{\omega}\sum_{j=1}^{2}e^{\hat{\beta}_{j0\omega}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}e^{\hat{\beta}_{j0\omega}} - \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}!\right)\right]\right\} \\
&= 2\left[\frac{n}{\hat{\tau}} - \frac{n}{\hat{\tau}_{\omega}} - \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\tau}_{\omega}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}(z_i)\right] - \sum_{i=1}^{n}\ln\left[K_{s_i}(z_{i\omega})\right] + \right. \\
&\quad \left. -\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(2\sum_{j=1}^{2}y_{ij}-1\right)}{4}\ln\left(\frac{1+2\hat{\tau}\sum_{j=1}^{2}e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j}}{1+2\hat{\tau}_{\omega}\sum_{j=1}^{2}e^{\hat{\beta}_{j0\omega}}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}\hat{\beta}_{j0\omega}\right]
\end{aligned}
$$

Lampiran 3

Data Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo Tahun 2012

No	Kabupaten	Kecamatan	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	Trenggalek	Panggul	1	1	6,028	11,071	2,920	0,728	51,23
2	Trenggalek	Munjungan	0	0	6,318	10,877	4,072	0,731	37,71
3	Trenggalek	Watulimo	0	0	5,711	13,748	2,821	1,112	31,25
4	Trenggalek	Kampak	4	1	6,827	16,562	2,658	0,374	34,87
5	Trenggalek	Dongko	2	2	6,837	21,393	2,082	0,798	37,55
6	Trenggalek	Pule	2	1	5,723	17,811	6,612	0,182	52,24
7	Trenggalek	Karangan	2	2	6,229	15,183	3,725	0,613	37,02
8	Trenggalek	Suruh	1	1	7,144	6,789	1,096	0,088	41,71
9	Trenggalek	Gandusari	0	0	6,034	15,553	4,621	0,041	37,59
10	Trenggalek	Durenan	2	1	6,961	23,436	2,701	0,120	49,77
11	Trenggalek	Pogalan	1	1	7,458	25,746	3,216	1,401	33,74
12	Trenggalek	Trenggalek	4	4	7,821	34,954	9,121	0,764	21,62
13	Trenggalek	Tugu	1	1	7,337	25,927	13,310	0,352	24,59
14	Trenggalek	Bendungan	4	2	7,083	21,110	2,970	0,593	44,92
15	Ponorogo	Ngrayun	0	0	5,896	17,081	3,763	0,647	44,44
16	Ponorogo	Slahung	0	0	6,906	14,499	5,152	0,359	44,21
17	Ponorogo	Bungkal	3	2	6,771	9,456	3,953	0,809	55,55
18	Ponorogo	Sambit	2	1	6,175	10,924	2,142	0,856	41,24
19	Ponorogo	Sawoo	1	1	6,357	13,766	2,409	0,781	46,33
20	Ponorogo	Sooko	0	0	6,245	9,296	1,406	1,023	48,36
21	Ponorogo	Pudak	0	0	7,268	6,491	0,331	2,512	60,98
22	Ponorogo	Pulung	0	2	7,057	13,384	1,430	0,800	37,39
23	Ponorogo	Mlarak	0	0	7,055	12,456	0,431	0,178	33,75
24	Ponorogo	Siman	0	5	7,054	12,347	3,775	0,717	16,66
25	Ponorogo	Jetis	1	1	7,056	12,296	3,198	0,375	39,01
26	Ponorogo	Balong	0	0	7,055	12,840	1,611	0,592	58,09
27	Ponorogo	Kauman	0	1	7,056	13,281	0,655	0,767	55,46
28	Ponorogo	Jambon	0	0	7,058	12,036	0,725	0,297	39,13
29	Ponorogo	Badegan	0	0	7,056	12,664	1,434	0,878	48,45
30	Ponorogo	Sampung	0	2	7,056	12,172	0,729	1,069	28,60
31	Ponorogo	Sukorejo	0	1	7,056	12,219	0,688	0,501	25,88
32	Ponorogo	Ponorogo	0	1	7,057	12,365	1,446	0,847	31,06
33	Ponorogo	Babadan	0	3	7,058	12,588	1,394	0,492	27,65
34	Ponorogo	Jenangan	0	1	7,057	12,48	2,533	1,012	41,06
35	Ponorogo	Ngebel	0	0	7,056	12,643	0,153	0,094	58,87

Lampiran 4

Statistika Deskriptif

Descriptive Statistics: Y1, Y2, X1, X2, X3, X4, X5

Variable	Mean	StDev	Minimum	Maximum	Skewness
Y1	0.886	1.278	0.000	4.000	1.39
Y2	1.086	1.173	0.000	5.000	1.57
X1	6.798	0.513	5.711	7.821	-0.70
X2	14.784	5.783	6.491	34.954	1.68
X3	2.894	2.607	0.153	13.313	2.34
X4	0.671	0.459	0.041	2.512	1.83
X5	40.510	11.000	16.660	60.980	-0.05

Lampiran 5

Pengujian Korelasi dan Multikolinieritas

Correlation: Y1, Y2, X1, X2, X3, X4, X5

	Y1	Y2	X1	X2	X3	X4
Y2	0.399					
	0.018					
X1	0.078	0.332				
	0.655	0.052				
X2	0.532	0.337	0.282			
	0.001	0.048	0.101			
X3	0.369	0.240	-0.006	0.652		
	0.029	0.165	0.972	0.000		
X4	-0.131	0.019	0.108	-0.150	-0.196	
	0.455	0.914	0.536	0.388	0.260	
X5	-0.024	-0.539	-0.223	-0.349	-0.325	0.121
	0.892	0.001	0.198	0.040	0.057	0.489

Regression Analysis: X1 versus X2, X3, X4, X5

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Regression	4	1.6776	0.4194	1.73	0.169
X2	1	1.0339	1.0339	4.27	0.047
X3	1	0.5733	0.5733	2.37	0.134
X4	1	0.1526	0.1526	0.63	0.433
X5	1	0.2774	0.2774	1.15	0.293
Error	30	7.2617	0.2421		
Total	34	8.9392			

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0.491991	18.77%	7.94%	0.00%

Regression Analysis: X2 versus X1, X3, X4, X5

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Regression	4	585.65	146.412	7.97	0.000
X1	1	78.50	78.497	4.27	0.047
X3	1	375.54	375.539	20.43	0.000
X4	1	2.60	2.602	0.14	0.709
X5	1	6.29	6.292	0.34	0.563
Error	30	551.32	18.377		
Total	34	1136.97			

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
4.28688	51.51%	45.04%	17.11%

Regression Analysis: X3 versus X1, X2, X4, X5

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Regression	4	111.972	27.9931	7.06	0.000
X1	1	9.397	9.3969	2.37	0.134
X2	1	81.072	81.0720	20.43	0.000
X4	1	0.713	0.7134	0.18	0.675
X5	1	3.702	3.7021	0.93	0.342
Error	30	119.020	3.9673		
Total	34	230.992			

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
1.99182	48.47%	41.60%	22.69%

Regression Analysis: X4 versus X5, X1, X2, X3

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Regression	4	0.44457	0.11114	0.50	0.738
X1	1	0.14115	0.14115	0.63	0.433
X2	1	0.03170	0.03170	0.14	0.709
X5	1	0.04635	0.04635	0.21	0.652
X3	1	0.04025	0.04025	0.18	0.675
Error	30	6.71588	0.22386		
Total	34	7.16045			

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0.473141	6.21%	0.00%	0.00%

Regression Analysis: X5 versus X1, X2, X3, X4

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Regression	4	708.93	177.23	1.56	0.210
X1	1	130.03	130.03	1.15	0.293
X2	1	38.85	38.85	0.34	0.563
X3	1	105.87	105.87	0.93	0.342
X4	1	23.49	23.49	0.21	0.652
Error	30	3403.75	113.46		
Total	34	4112.68			

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
10.6517	17.24%	6.20%	0.00%

Lampiran 6

Macro Minitab Pengujian Distribusi Bivariat Poisson

```
macro
coba y1 y2
mconstant n y1bar y2bar c f h m11 i j Ib v pp pvalue
mcolumn y1 y2 a b d e g
let n=35
let y1bar=mean(y1)
let y2bar=mean(y2)
let a=y1-y1bar
let b=(y1-y1bar)**2
let c=(sum(b))/n
let d=y2-y2bar
let e=(y2-y2bar)**2
let f=(sum(e))/n
let g=a*d
let h=sum(g)
let m11=h/n
let i=((y2bar*c)-(2*(m11**2))+(y1bar*f))*n
let j=(y1bar*y2bar)-(m11**2)
let Ib=i/j
let v=3*n-2
cdf Ib pp;
chis v.
let pvalue=1-pp
print Ib pvalue
endmacro
```

Lampiran 7

Syntax R untuk Pendugaan Parameter BPIG

```
#Initial value
library (polynom)
library (orthopolynom)
library (gaussquad)
library (gmp)
library (Rmpfr)
library (MASS)
library (MixedPoisson)

data0=read.csv('D:/datasekartp.csv',header=TRUE)
data=data.frame((data0))
y1=as.matrix((data[,1]))
y2=as.matrix((data[,2]))

estdelta1=est.delta(y1+5)
tau0=1/(estdelta1$ll.delta.max)^2

n=nrow(data)
x=as.matrix(cbind(rep(1,n),(data[,-c(1,2)])))

t1=lambda_start(y1,x)
beta10=t1$beta

t2=lambda_start(y2,x)
beta20=t2$beta

beta10
beta20
tau0

b1 <- as.matrix(beta10)
b2 <- as.matrix(beta20)
beta1 <- cbind(b1,b2)
t <- 1/(abs(estdelta1$ll.delta.max))
Y1 <- as.matrix(y1)
Y2 <- as.matrix(y2)
Y <- cbind(Y1,Y2)
n <- nrow(Y1)
My <- matrix(0, nrow = n, ncol = 1)

vnorm <- 1
#Myi
for(i in 1:n){

  sumxb <- 0
  sumfact <- 0
  sumfact2 <- 0

  for(j in 1:2){
    sumxb1 <- sumxb + (exp(x[i,] %*% beta1[,j]))
    sumxb <- sumxb1
  }

  for (m in 0:(Y[i,1]+Y[i,2])){
    kurung <- ((2/t)*sqrt(1+(2*t*sumxb)))^(-m)
    sumfact1 <- sumfact +
((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]+m)/((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]-
m))*factorial(m)))*kurung)
    sumfact <- sumfact1
  }
```

```
  }

  for (m in 0:abs((Y[i,1]+Y[i,2]-1))){
    kurung <- (((2/t)*sqrt(1+(2*t*sumxb)))^(-m))
    sumfact2.1 <- sumfact2 + ((factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-
1)+m)/(factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-1)-m)*factorial(m)))*kurung)
    sumfact2 <- sumfact2.1
  }
  My[i,1] <- (1/sqrt(1+(2*t*sumxb)))*(sumfact/sumfact2)
}

while(vnorm >= 10^-3){
  #Proses Matriks Gt
  #mendapatkan deltab

  deltab1 <- 0
  for (i in 1:n){

    sumxb <- 0
    sumfact <- 0
    atas <- 0
    sumfact2 <- 0
    bawah <- 0

    for(j in 1:2){

      sumxb1 <- sumxb + (exp(x[i,] %*% beta1[,j]))
      sumxb <- sumxb1
    }

    for (m in 0:(Y[i,1]+Y[i,2])){
      kurung <- (((2/t)*sqrt(1+(2*t*sumxb)))^(-m))
      sumfact1 <- sumfact +
((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]+m)/((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]-
m))*factorial(m)))*kurung)
      sumfact <- sumfact1
    }

    atas <- ((exp(x[i,] %*% beta1[,1]))*sumfact)

    for (m in 0:abs((Y[i,1]+Y[i,2]-1))){
      kurung <- (((2/t)*sqrt(1+(2*t*sumxb)))^(-m))
      sumfact2.1 <- sumfact2 + ((factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-
1)+m)/(factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-1)-m)*factorial(m)))*kurung)
      sumfact2 <- sumfact2.1
    }

    bawah <- ((sqrt(1+(2*t*sumxb)))*sumfact2)
    delta1 <- deltab1+((Y[i,1]-(atas/bawah))*x[i,])
    deltab1 <- delta1
  }

  #mendapatkan deltab2

  deltab2 <- 0
  for (i in 1:n){

    sumxb <- 0
    sumfact <- 0
    atas <- 0
    sumfact2 <- 0
    bawah <- 0
```

```
    for(j in 1:2){
      sumxb1 <- sumxb + (exp(x[i,] %*% beta1[,j]))
      sumxb <- sumxb1
    }

    for (m in 0:(Y[i,1]+Y[i,2])){
      kurung <- (((2/t)*sqrt(1+(2*t*sumxb)))^(-m))
      sumfact1 <- sumfact +
((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]+m)/((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]-
m))*factorial(m)))*kurung)
      sumfact <- sumfact1
    }

    atas <- ((exp(x[i,] %*% beta1[,2]))*sumfact)

    for (m in 0:abs((Y[i,1]+Y[i,2]-1))){
      kurung <- (((2/t)*sqrt(1+(2*t*sumxb)))^(-m))
      sumfact2.1 <- sumfact2 + ((factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-
1)+m)/(factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-1)-m)*factorial(m)))*kurung)
      sumfact2 <- sumfact2.1
    }

    bawah <- ((sqrt(1+(2*t*sumxb)))*sumfact2)

    lol <- ((Y[i,2]-(atas/bawah))*x[i,])
    delta2 <- deltab2+lol
    deltab2 <- delta2
  }

  #mendapatkan deltaT

  deltaT <- 0
  for (i in 1:n){

    sumxb <- 0
    sumfact <- 0
    atas <- 0
    sumfact2 <- 0
    bawah <- 0
    sumy <- 0

    for(j in 1:2){
      sumxb1 <- sumxb + (exp(x[i,] %*% beta1[,j]))
      sumxb <- sumxb1
    }

    for (m in 0:(Y[i,1]+Y[i,2])){
      kurung <- (((2/t)*sqrt(1+(2*t*sumxb)))^(-m))
      sumfact1 <- sumfact +
((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]+m)/((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]-
m))*factorial(m)))*kurung)
      sumfact <- sumfact1
    }

    atas <- ((1+(t*sumxb))*sumfact)

    for (m in 0:abs((Y[i,1]+Y[i,2]-1))){
      kurung <- (((2/t)*sqrt(1+(2*t*sumxb)))^(-m))
      sumfact2.1 <- sumfact2 + ((factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-
1)+m)/(factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-1)-m)*factorial(m)))*kurung)
      sumfact2 <- sumfact2.1
    }
```

```
    bawah <- (sqrt((1+(2*t*sumxb)))*sumfact2)

    for(j in 1:2){
      sumy1 <- sumy + (Y[i,j]-(atas/bawah))
      sumy <- sumy1
    }

    deltaTfix <- deltaT + ((1+(t*sumy)))
    deltaT <- deltaTfix
  }

  delta1T <- (-(1/(t^2)))*deltaT

  #Penggabungan menjadi Matriks Gt
  Gt <- matrix(c(deltab1,deltab2,delta1T), nrow=13, ncol=1)

  #Mendapatkan matriks Ht
  #Mendapatkan diff2b1b1

  diff2b1 <- 0
  for (i in 1:n){
    sumy <- 0
    summiu <- 0

    for (j in 1:2){
      sumy1 <- sumy + Y[i,j]
      sumy <- sumy1
    }

    for (j in 1:2){
      summiu1 <- summiu+(exp(x[i,] %*% beta1[,j]))
      summiu <- summiu1
    }

    atas <- (exp(x[i,] %*% beta1[,1]))*(1+(t*My[i,1]*(1+2*sumy)))
    bawah <- 1+(2*t*summiu)
    kurung1 <- My[i,1] - (atas/bawah) + ((exp(x[i,] %*%
beta1[,1]))*(My[i,1]^2))
    diff2b1.1 <- diff2b1 + ((as.vector(exp(x[i,] %*% beta1[,1]))) *
((x[i,]) %*% t(x[i,])))*(as.vector(kurung1))
    diff2b1 <- diff2b1.1
  }

  diff2b1 <- -(diff2b1)

  #Mendapatkan diff2b1b2

  diff2b1b2 <- 0
  for (i in 1:n){

    sumy <- 0
    summiu <- 0

    for (j in 1:2){
      sumy1 <- sumy+Y[i,j]
      sumy <- sumy1
    }

    for (j in 1:2){
      summiu1 <- summiu+(exp(x[i,] %*% beta1[,j]))
      summiu <- summiu1
    }
```

```
atas <- (1+(t*My[i,1]))*(1+2*sumy)
    bawah <- 1+(2*t*summiu)
    kurung1 <- (atas/bawah)-(My[i,1]^2)

    lol1 <- (as.vector((exp(x[i,] %*% beta1[,1])) * (exp(x[i,] %*%
beta1[,2]))) * ((x[i,]) %*% t(x[i,])))
    diff2b1b2.1 <- diff2b1b2+ (lol1 * as.vector(kurung1))
    diff2b1b2 <- diff2b1b2.1
  }

  #Mendapatkan diff2b1t

  diff2b1tfix <- 0

  for (i in 1:n){

    sumy <- 0
    summiu <- 0

    for (j in 1:2){
      sumy1 <- sumy+Y[i,j]
      sumy <- sumy1
    }

    for (j in 1:2){
      summiu1 <- summiu+(exp(x[i,] %*% beta1[,j]))
      summiu <- summiu1
    }

    atas <- (1+t*summiu)*(1+(t*My[i,1])*(1+2*sumy))
    bawah <- (1+2*t*summiu)
    kurung1 <- (t*My[i,1])-(atas/bawah)+((My[i,1]^2)*(1+t*summiu))

    diff2b1t.1 <- diff2b1tfix+((as.vector((exp(x[i,] %*% beta1[,1])))
* t(x[i,]))*as.vector(kurung1))
    diff2b1tfix <- diff2b1t.1
  }

  diff2b1t <- as.vector(diff2b1tfix)*(1/(t^2))

  #mendapatkan diff2b2b2

  diff2b2 <- 0

  for (i in 1:n){

    sumy <- 0
    summiu <- 0

    for (j in 1:2){
      sumy1 <- sumy+Y[i,j]
      sumy <- sumy1
    }

    for (j in 1:2){
      summiu1 <- summiu+(exp(x[i,] %*% beta1[,j]))
      summiu <- summiu1
    }

    atas <- (exp(x[i,] %*% beta1[,2]))*(1+(t*My[i,1])*(1+2*sumy))
    bawah <- 1+(2*t*summiu)
    kurung1 <- My[i,1] - (atas/bawah) + ((exp(x[i,] %*%
```

```
beta1[,2]))*(My[i,1]^2))

    diff2b2.1 <- diff2b2+((as.vector(exp(x[i,] %*% beta1[,2]))) *
((x[i,]) %*% t(x[i,]))* as.vector(kurung1))
    diff2b2 <- diff2b2.1
  }

  diff2b2 <- -(diff2b2)

  #mendapatkan diff2b2t

  diff2b2tfix <- 0

  for (i in 1:n){

    sumy <- 0
    summiu <- 0

    for (j in 1:2){
      sumy1 <- sumy+Y[i,j]
      sumy <- sumy1
    }

    for (j in 1:2){
      summiu1 <- summiu+(exp(x[i,] %*% beta1[,j]))
      summiu <- summiu1
    }

    atas <- (1+t*summiu)*(1+t*My[i,1]*(1+2*sumy))
    bawah <- 1+(2*t*summiu)
    kurung1 <- (t*My[i,1])-(atas/bawah)+(My[i,1]^2*(1+t*summiu))

    diff2b2t.1 <- diff2b2tfix+((as.vector((exp(x[i,] %*% beta1[,2])))
* t(x[i,]))*as.vector(kurung1))
    diff2b2tfix <- diff2b2t.1
  }

  diff2b2t <- as.vector(diff2b2tfix)*(1/(t^2))

  #mendapatkan diff2t2

  diff2t2 <- 0

  for (i in 1:n){

    sumy <- 0
    sumy2 <- 0
    summiu <- 0

    for (j in 1:2){
      sumy1 <- sumy+Y[i,j]
      sumy <- sumy1
    }

    for (j in 1:2){
      summiu1 <- summiu+(exp(x[i,] %*% beta1[,j]))
      summiu <- summiu1
    }

    pers1 <- -((1+t*summiu)/((t^4)*(1+2*t*summiu)))
    pers2 <- ((t^2)*My[i,1]*summiu)-((1+t*summiu)*(1-
(My[i,1]^2)*(1+2*t*summiu)+(2*t*My[i,1]*sumy)))
```

```
    diff2t2.1 <- diff2t2 + (pers1*pers2-
((My[i,1]*(2+2*t*summiu))/(t^3))+(2/(t^3))+((My[i,1]*summiu+sumy)/(t^2
)))
    diff2t2 <- diff2t2.1
   }

  #Matriks Ht
  col1 <- matrix(c(diff2b1,diff2b1b2,diff2b1t), nrow=6, ncol=13)
  col2 <- matrix(c(diff2b1b2,diff2b2,diff2b2t), nrow=6, ncol=13)
  col3 <- matrix(c(diff2b1t,diff2b2t,diff2t2), nrow=1, ncol=13)
  Ht <- matrix(rbind(col1,col2,col3), nrow=13, ncol=13)
  teta0 <- rbind(b1,b2,t)
  teta1 <- teta0 - (solve(Ht) %*% Gt)

  b1 <- as.matrix(teta1[1:6,1])
  b2 <- as.matrix(teta1[7:12,1])
  t <- as.matrix(teta1[13,1])

  if(t > 2){
    t <- 1/(abs(t))
   }

  beta1 <- cbind(b1,b2)
  ji <- teta1-teta0
  print(teta1)
  vnorm <- norm(ji, type = 'f')
  print(vnorm)
}
```

Lampiran 8

Syntax R untuk Pengujian Hipotesis secara Serentak

```
data=data.frame((data0))
y1=as.matrix((data[,1]))
y2=as.matrix((data[,2]))

n=nrow(data)
xduga=x=as.matrix(cbind(rep(1,n),(data[,-c(1,2)])))
xom=matrix(1, nrow=35, ncol=1)

b1om <- teta11[1,1]
b2om <- teta11[2,1]
beta1om <- cbind(b1om,b2om)
tom <- teta11[3,1]
b1duga <- as.matrix(teta1[1:6,1])
b2duga <- as.matrix(teta1[7:12,1])
beta1duga <- cbind(b1duga,b2duga)
tduga <- as.matrix(teta1[13,1])
Y1 <- as.matrix(y1)
Y2 <- as.matrix(y2)
Y <- cbind(Y1,Y2)
n <- nrow(Y1)
Myduga <- matrix(0, nrow = n, ncol = 1)
Myom <- matrix(0, nrow = n, ncol = 1)

for(i in 1:n){

  sumxb <- 0
  sumfact <- 0
  sumfact2 <- 0

  for(j in 1:2){
    sumxb1 <- sumxb + (exp(xduga[i,] %*% beta1duga[,j]))
    sumxb <- sumxb1
  }

  for (m in 0:(Y[i,1]+Y[i,2])){
    kurung <- ((2/tduga)*sqrt(1+(2*tduga*sumxb)))^(-m)
    sumfact1 <- sumfact +
((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]+m)/((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]-
m))*factorial(m)))*kurung)
    sumfact <- sumfact1
  }

  for (m in 0:abs((Y[i,1]+Y[i,2]-1))){
    kurung <- (((2/tduga)*sqrt(1+(2*tduga*sumxb)))^(-m))
    sumfact2.1 <- sumfact2 + ((factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-
1)+m)/(factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-1)-m)*factorial(m)))*kurung)
    sumfact2 <- sumfact2.1
  }
  Myduga[i,1] <- (1/sqrt(1+(2*tduga*sumxb)))*(sumfact/sumfact2)
}
for(i in 1:n){

  sumxb <- 0
  sumfact <- 0
  sumfact2 <- 0

  for(j in 1:2){
    sumxb1 <- sumxb + (exp(xom[i,] %*% beta1om[j]))
    sumxb <- sumxb1
  }
```

```
  for (m in 0:(Y[i,1]+Y[i,2])){
    kurung <- ((2/tom)*sqrt(1+(2*tom*sumxb)))^(-m)
    sumfact1 <- sumfact +
((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]+m)/((factorial(Y[i,1]+Y[i,2]-
m))*factorial(m)))*kurung)
    sumfact <- sumfact1
  }

  for (m in 0:abs((Y[i,1]+Y[i,2]-1))){
    kurung <- (((2/tom)*sqrt(1+(2*tom*sumxb)))^(-m))
    sumfact2.1 <- sumfact2 + ((factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-
1)+m)/(factorial(abs(Y[i,1]+Y[i,2]-1)-m)*factorial(m)))*kurung)
    sumfact2 <- sumfact2.1
  }
  Myom[i,1] <- (1/sqrt(1+(2*tom*sumxb)))*(sumfact/sumfact2)
}
Kzom <- sum(log(Myom))
Kzduga <- sum(log(Myduga))

pers2 <- 0
for(i in 1:n){
  sumymin1 <- 0
  sumxbduga <- 0
  sumxbom <- 0
  for(j in 1:2){
    sumymin1.2 <- sumymin1 + (Y[i,j]-1)
    sumymin1 <- sumymin1.2
  }
  depan <- (2*sumymin1)/4

  for(j in 1:2){
    sumxbduga1 <- sumxbduga + exp(t(xduga[i,]) %*% beta1duga[,j])
    sumxbduga <- sumxbduga1
  }

  atas <- 1+(2*tduga %*% sumxbduga)

  for(j in 1:2){
    sumxbom1 <- sumxbom + exp(beta1om[j])
    sumxbom <- sumxbom1
  }
  bawah <- 1+(2*tom*sumxbom)
  pers2.1 <- pers2 + (depan*log(atas/bawah))
  pers2 <- pers2.1
}

pers3 <- 0
for(i in 1:n){
  for(j in 1:2){
    pers3.1 <- pers3 + (Y[i,j] %*% t(xduga[i,]) %*% beta1duga[,j])
    pers3 <- pers3.1
  }
}

pers4 <- 0
for(i in 1:n){
  for(j in 1:2){
    pers4.1 <- pers4 + (Y[i,j] * beta1om[,j])
    pers4 <- pers4.1
  }
```

```
}

likelihood <- 2*((n/tduga)-(n/tom)-((n/2)*log(tduga/tom))+Kzduga-Kzom-
pers2+pers3-pers4)
pvalue <- pchisq(likelihood, 10 , ncp = 0, lower.tail = FALSE, log.p =
FALSE)
chisqtable <- qchisq(0.95,10)
table <- cbind(likelihood,chisqtable,pvalue)
colnames(table) <- c("G", "Chisq Table", "P-value")
if(table[3] <= 10^-4){
  table[3] = "0.000"
}
table1 <- data.frame(table, stringsAsFactors = FALSE)
table1
```

Lampiran 9

Syntax R untuk Pengujian Hipotesis secara Parsial

```
std <- -1*(solve(Ht))
stderror <- matrix(0, nrow=13, ncol=1)
for (i in 1:13){
  lil <- std[i,i]
  stderror [i,1] <- lil
}
zhitung <- teta1/stderror
pvalue <- pnorm(abs(zhitung), lower.tail = FALSE)
for(i in 1:13){
  if(pvalue[i,1] <= 10^-4){
    pvalue [i,1] = "<.0001"
  }
}
table <- cbind(teta1, abs(stderror), zhitung, pvalue)
table1 <- data.frame(table, stringsAsFactors = FALSE, row.names =
c("(Interceptb1)", "b1.x1", "b1.x2", "b1.x3", "b1.x4", "b1.x5",
"(Interceptb2)","b2.x1", "b2.x2", "b2.x3", "b2.x4", "b2.x5", "t"))
colnames(table1) <- c("Estimate", "Std. Error", "Z value", "P-value")
write.table (table1, "D:/Table.txt", sep="\t")
table1
```

Lampiran 10

Syntax R untuk *Akaike Information Criterion* (AIC)

```
data=data.frame((data0))
y1=as.matrix((data[,1]))
y2=as.matrix((data[,2]))

n=nrow(data)
xduga=x=as.matrix(cbind(rep(1,n),(data[,-c(1,2)])))

b1duga <- as.matrix(teta1[1:6,1])
b2duga <- as.matrix(teta1[7:12,1])
beta1duga <- cbind(b1duga,b2duga)
tduga <- as.matrix(teta1[13,1])
Y1 <- as.matrix(y1)
Y2 <- as.matrix(y2)
Y <- cbind(Y1,Y2)
n <- nrow(Y1)

Yduga1 <- exp(xduga %*% beta1duga[,1])
Yduga2 <- exp(xduga %*% beta1duga[,2])
Yduga <- cbind(Yduga1,Yduga2)
selisih2 <- t(Y-Yduga) %*% (Y-Yduga)
sse <- norm(selisih2)
AIC <- abs((-2*log(sse/n))+(2*13))
AIC
```

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BIOGRAFI PENULIS

Sekarsari Utami Wijaya lahir di Bandung pada tanggal 12 Juni 1990. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Dal Suparman dan Ibu Hariani P. Astuti. Pendidikan formal yang pernah ditempuh penulis diawali di TKIT Putri Kembar. Pendidikan dasar diperoleh di SDIT An-Nadwah (1996-2002). Sejak menempuh jenjang pendidikan dasar, penulis sudah aktif mengikuti lomba Calistung. Selanjutnya, penulis menempuh pendidikan menengah di SMPN 1 Tambun Selatan (2002-2005) dan pernah mendapatkan Juara 3 Olimpiade Biologi se-Kabupaten Bekasi. Selain itu, penulis aktif dalam organisasi Palang Merah Remaja (PMR) di sekolah tersebut. Taekwondo merupakan olahraga yang digeluti penulis saat bersekolah di SMAN 1 Tambun Selatan (2005-2008). Selain itu, penulis juga aktif dalam organisai Kerohanian Islam (Rohis). Prestasi yang pernah diperoleh selama SMA adalah menjadi Juara Harapan 2 *Biology Competition* se-Jabodetabek di UNJ. Setelah lulus SMA, penulis melanjutkan pendidikan di Departemen Statistika Institut Pertanian Bogor (2008-2012). Penulis bergabung dalam UKM Taekwondo IPB dan Himpunan Profesi Statistika IPB. Selain kuliah, penulis juga berkerja sebagai *data analyst* di *Statistics Center* Bogor. Penulis juga pernah memperoleh Juara 2 Kompetisi Nasional Statistika 2011 dan menjadi presenter paper di Annual Indonesian Scholar Conference in Taiwan. Setelah lulus S1, penulis bekerja di Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI selama setahun. Pada tahun 2014, penulis mendapatkan kesempatan melanjutkan studi S2 di Departemen Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Jika ada kritik dan saran yang berhubungan dengan tesis ini dapat disampaikan melalui email penulis: sekarsari.wijaya@gmail.com.