TUGAS AKHIR - SM141501

PEMETAAN KONTRAKTIF PADA RUANG TYPE-METRIK LENGKAP

DIMAZ WISNU ADIPRADANA
NRP 1213 100 041

Dosen Pembimbing:
Sunarsini, S.Si, M.Si
Dr. Mahmud Yunus, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017

FINAL PROJECT - SM141501

CONTRACTIVE MAPPING IN COMPLETE TYPE-METRIC SPACE

DIMAZ WISNU ADIPRADANA
NRP 1213 100 041

Supervisors:
Sunarsini, S.Si, M.Si
Dr. Mahmud Yunus, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017

LEMBAR PENGESAHAN

PEMETAAN KONTRAKTIF PADA RUANG TYPE-METRIK LENGKAP

CONTRACTIVE MAPPING IN COMPLETE TYPE-METRIC SPACE

TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada bidang Studi Analisis, Aljabar dan Pembelajaran Matematika
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
DIMAZ WISNU ADIPRADANA
NRP. 1213 100 041

Menyetujui

Dosen Pembimbing II	Dosen Pembimbing I
Dr. Mahmud Yunus, M.Si	Sunarsini, S.Si, M.Si
NIP. 19620407 198703 1 005	NIP. 19691004 199402 2 001

Mengetahui
Kepala Departemen Matematika
FMIPA ITS

a/n Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 28 Juli 2017

PEMETAAN KONTRAKTIF PADA RUANG TYPE-METRIK LENGKAP

Nama Mahasiswa	:	DIMAZ WISNU ADIPRADANA
NRP	:	1213 100 041
Jurusan	:	Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	:	1. Sunarsini, S.Si, M.Si
		2. Dr. Mahmud Yunus, M.Si

Abstrak

Salah satu topik yang dipelajari dalam analisis fungsional adalah ruang metrik. Konsep ruang metrik dapat diperluas, dengan menggunakan sifat dari cone menjadi ruang metrik cone dan juga ruang type-metrik. Konsep ruang type-metrik berbeda dengan konsep ruang metrik. Perbedaannya terletak pada pertidaksamaan di ruang metrik dan ruang type-metrik. Diberikan analogi mengenai barisan konvergen dan Cauchy di ruang type-metrik, lalu dikonstruksi contoh ruang type-metrik dari ruang metrik cone. Pada prinsip kontraksi di ruang type-metrik diberikan sifat Lipschitz yang digunakan untuk menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap. Dengan menggunakan teorema titik tetap, diperoleh titik tetap tunggal pada ruang type-metrik lengkap.

Kata-kunci: *ruang metrik, ruang type-metrik, ruang metrik cone, titik tetap, pemetaan kontraktif*

CONTRACTIVE MAPPING IN COMPLETE TYPE-METRIC SPACE

Name	:	DIMAZ WISNU ADIPRADANA
NRP	:	1213 100 041
Department	:	Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors	:	1. Sunarsini, S.Si, M.Si
		2. Dr. Mahmud Yunus, M.Si

Abstract

One of the topics studied in functional analysis is the metric space. The concept of metric space can be expanded, using the property of the cone into the cone metric space and also the type-metric space. The concept of a type-metric space is different from the concept of a metric space. The difference lies in the inequality in the metric space and the type-metric space. Given an analogy of the convergent and Cauchy sequences in the type-metric space, then constructed an example of a metric-type space of the cone metric space. On the principle of contraction in the type-metric space is given the Lipschitzian properties used to assure the existence and unity of fixed points. Using the fixed-point theorem, a single fixed point is obtained in the complete type-metric space.

Keywords: *metric space, type-metric space, cone metric space, fixed point, contractive mapping*

KATA PENGANTAR

Dengan segala puji TUHAN YME, segala puji dan syukur yang telah memberikan rahmat, kasih sayang, dan petunjuk-NYA, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

KAJIAN PEMETAAN KONTRAKTIF PADA RUANG TYPE-METRIK LENGKAP

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Matematika FMIPA ITS.

Dalam penulisan Tugas Akhir ini, dapat terselesaikan dengan baik berkat adanya bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Disampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu atas terselesaikannya Tugas Akhir ini:

1. Kepala Departemen Matematika ITS. Khususnya Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT, yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.

2. Kaprodi S1 dan Sekretaris Kaprodi S1 Departemen Matematika ITS. Khususnya Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si dan Bapak Drs. Iis Herisman, M.Sc.

3. Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si dan Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala arahan, bimbingan dan motivasinya kepada penulis, sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.

4. Ibu Prof. DR. Erna Apriliani, M.Si, Bapak Drs. Sadjidon, M.Si dan Bapak Drs. I Gst. Ngr. Rai Usadha, M.Si selaku dosen penguji atas segala arahan, bimbingan dan motivasinya kepada penulis, sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.

5. Bapak Ibu dosen serta seluruh staf Tenaga Kependidikan jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Khususnya, Bapak Mohammad Syifa'ul Mufid, S.Si, M.Si , Bapak Kistosil Fahim, S.Si, M.Si dan Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si yang telah memberikan nasihat, arahan dan motivasi selama penulis menempuh perkuliahan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.

6. Tidak Kurang Pentingnya Orang Tua, Adik dan Keluarga Besar dari penulis, Ibu dan Umary Kharisma Amandayu yang telah memberikan banyak dukungan, do'a, cinta dan kasih yang tidak dapat di hitung.

7. Kepada sahabat dan teman-teman seperjuangan Mahasiswa Matematika ITS 2013 wisuda 116 dari penulis khususnya Fella, Jojo, Bri, Tesa, Jonbon, Ivan, Agus, Prima, Septia, Niken, Zunna, Wawan, Gery, Ayur, Melynda, Fadhlan, Rozi, Toem, Ardi, Sinar, Romli, Bayu, Supean, Via, Gono, Haidar, Mila, Satria, (PMK, PMKK Matematika ITS & TPKH ITS), pejuang grup line dospem 3, pejuang lab (RO dan Permod) dan teman-teman lain yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah memberikan semangat ,bantuan fisik dan mau direpotkan untuk membantu penulis mengerjakan tugas akhir ini.

8. Seluruh Tim ONMIPA Matematika nasional khususnya ITS dan UGM juga Tim Olimpiade Matematika ITS

diantaranya Evan, Gilbert, Sachio, Garry, Musa, Ihsan, Alzim, Ising, Yuni, Mai, Mustain, Riri, Mufti, Patty, Faikar, Engki, Kahfi, Satria Stanza, Pak Barra, Jamil, Susi, Gadis, Yasya, Rizal, Ryan, Ardi dan teman-teman lain yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang mana telah memberikan banyak pengalaman, motivasi dan semangat kepada penulis.

9. Kepada seluruh admin Q&A khususnya Jehian, Jerome, Abel, Lidya, Clay, Lucas, Apip, Azzam, Andrew, Jessica, Rimba, dan teman-teman lain yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang mana telah memberikan banyak pengalaman, motivasi dan semangat kepada penulis.

10. Kepada Auda Nuril(Gadis), Annisa Rahmita(Chibi), Ahmad Jamil yang telah memberikan bantuan buku tugas akhir sebagai dasar menulis tugas akhir oleh penulis.

11. Kepada Seluruh Asisten Kalkulus ITS periode Tahun 2014 sampai 2017 dan Pengurus UPMB Khususnya Bu Catur dan Bu Uun yang telah memberikan semangat kepada penulis.

12. Seluruh pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Penulis mengucapkan terima kasih yang sangat dalam atas doa dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan ini masih terdapat kekurangan, sehingga segala kritik dan saran yang sifatnya membangun sangat diharapkan untuk kesempurnaan Tugas Akhir ini. Penulis berharap Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri pada khususnya dan pembaca pada umumnya.

Surabaya, 28 Juli 2017

Dimaz Wisnu Adipradana

DAFTAR ISI

Daftar Simbol

d	Metrik.
D	Type-Metrik.
d_c	Metrik cone.
$\|.\|$	Norma.
P	Cone.
X	Himpunan tak kosong.
$\mathbb{C}$	Himpunan bilangan kompleks.
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real.
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli.
$\mathbb{R}^+$	Himpunan bilangan real positif.
$\mathbb{R}^2_{0^+}$	Himpunan pasangan terurut bilangan real tak negatif.
$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
$\mathbb{R}^n$	$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle\vert \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$.
a.e	Hampir dimana-mana(almost everywhere).
$\in$	Elemen atau anggota.
$\notin$	Bukan elemen.
$\subseteq$	Himpunan bagian.
$\{x_n\}$	Barisan bilangan real.
sup	Supremum(batas atas terkecil).
inf	Infimum(batas bawah terbesar).
max	Maksimum.
$\|.\|$	Nilai Mutlak.
$\lim\limits_{n\to\infty}$	Limit n mendekati ∞.
$\lim\limits_{n,m\to\infty}$	Limit n, m mendekati ∞.
$\mathcal{P}(x)$	Koleksi semua himpunan bagian dari X (Power set).
$\mathcal{A}$	Aljabar himpunan(Set algebra).
$\mathcal{M}$	Aljabar sigma(σ-algebra).

$\rightarrow$	Mendekati.
$<$	Kurang dari.
$>$	Lebih dari.
$\leq$	Kurang dari sama dengan.
$\geq$	Lebih dari sama dengan.
$\cap$	Irisan (2 atau lebih) dari suatu himpunan.
$\cup$	Gabungan (2 atau lebih) dari suatu himpunan.
$\prec$	Preceed.
$\preceq$	Preceed sama dengan.
$\neq$	Tidak sama dengan.
α	Alpha.
λ	Lambda.
θ	Theta(Elemen nol dari ruang Banach).
ϵ	Epsilon.
δ	Delta.
ω	Omega.
A^C	Komplemen dari Himpunan A atau Himpunan. Semesta yang tidak berada di Himpunan A.
$\mathrm{Lip}(T)$	Konstanta Lipschitz dari Pemetaaan T.
$\mathrm{int}P$	Interior P.

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dipaparkan mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat penulisan dari tugas akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Analisis Fungsional adalah salah satu cabang ilmu matematika analisis. Bahasan analisis fungsional diantaranya adalah ruang metrik, ruang bernorma, ruang Banach, ruang Hilbert, dan lain-lain. Adapun ruang vektor, dan sifat-sifat ruang vektor yang mendasari pembahasan-pembahasan yang ada didalam analisis fungsional.

Teorema titik tetap berperan dalam aplikasi ilmu matematika. Teorema tersebut diperkenalkan oleh seorang matematikawan bernama Banach dan diberi nama teorema kontraksi(Kreyszig, 1989) atau kontraktif. Kemudian, ruang metrik mulai dikembangkan oleh Czerwick dengan diperkenalkan suatu ruang b-metrik yang merupakan perluasan dari ruang metrik dengan perbedaan yang terletak pada koefisien dari pertidaksamaan segitiga yang berlaku dalam definisi ruang b-metrik(Czerwik, 1998). Lalu Huang dan Zhang memperkenalkan ruang metrik cone sebagai bentuk umum ruang metrik, Selanjutnya Hussain dan Shah memperkenalkan kembali ruang b-metrik cone sebagai bentuk umum dari ruang metrik cone(Hussain dan Shah, 2011). Teorema titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang b-metrik cone diuraiakan pada (Sunarsini, Yunus, Sadjidon dan Zazilah, 2016)

Perkembangan Analisis Fungsional tidak berhenti sampai ruang b-metrik cone saja, Mohamed A. Khamsi memperkenalkan ruang type-metrik yang merupakan salah satu pengembangan dari konsep ruang metrik. Konsep dasar dari ruang type-metrik sedikit berbeda dengan konsep ruang metrik yaitu pada hasil pemetaan di bilangan real non-negatif dan juga pada sifat pertidaksamaannya(Soemarsono, 2016). Pemetaan kontraksi dan ruang yang digunakan dalam pemetaan kontraksi merupakan dua hal penting dalam pengembangan teorema titik tetap. Dalam teorema titik tetap, prinsip kontraksi Banach memegang peranan penting untuk menunjukkan keberadaan dan ketunggalan titik tetapnya(Kreyszig, 1989). Perkembangan ruang type-metrik sendiri masih terus berkembang sehingga cukup menarik sebagai objek untuk dikaji lebih dalam lagi. Dalam tugas akhir ini, dibahas lebih dalam lagi mengenai sifat Lipschitz, teorema titik tetap, barisan konvergen, barisan Cauchy, sifat kelengkapan dan hubungan antara sifat-sifat tersebut serta mengkonstruksi suatu fungsi type-metrik pada ruang type-metrik cone.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, dibuatlah suatu rumusan masalah yaitu: Apakah barisan konvergen di ruang type-metrik limitnya tunggal?, Bagaimana kaitan antara barisan konvergen dan barisan Cauchy di ruang type-metrik? Apakah pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik lengkap menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap?.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini, yaitu contoh yang dipakai pada ruang type-metrik adalah $\mathcal{L}^2([0,1])$.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini antara lain:

1. Menyelidiki hubungan sifat-sifat barisan konvergen, barisan Cauchy, sifat kelengkapan pada ruang type-metrik.
2. Menyelidiki hubungan ruang metrik dan ruang type-metrik.
3. Mengkonstruksi suatu fungsi type-metrik pada ruang type-metrik cone.
4. Mengkaji sifat-sifat pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik lengkap.

1.5 Manfaat

Manfaat yang didapat dalam penelitian tugas akhir ini adalah tambahan referensi tentang ruang-ruang metrik serta pemetaan kontraktif dan bermanfaat sebagai referensi atau bahan kajian dalam ilmu matematika dan aplikasinya.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini disusun atas lima bab yang meliputi, pendahuluan, tinjauan pustaka, metode penelitian, analisis dan pembahasan serta penutup. Uraian dari masing-masing bab dijelaskan di bawah ini.

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Pada bab ini dijelaskan tentang penelitian sebelumnya yang berkaitan tentang konsep ruang type- metrik

dan pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik. Ditunjukkan pula beberapa definisi yang berkaitan dengan konsep ruang metrik dan ruang type-metrik yang meliputi definisi ruang metrik dan ruang type-metrik, definisi konvergensi barisan dan barisan Cauchy pada ruang type-metrik, serta definisi ruang type-metrik lengkap. Pada bab ini juga diberikan definisi pemetaan kontraktif, dan sifat Lipschitz pada ruang metrik dan ruang type-metrik serta teorema titik tetap.

3. BAB III METODE PENELITIAN
   Pada bab ini dijelaskan tentang tahap-tahap dalam melakukan penelitian berkaitan dengan tugas akhir ini yang meliputi studi literatur, konstruksi terkait analogi metrik dan type-metrik, kajian teorema titik tetap pemetaan kontraktif, penyelidikan tentang keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik serta penarikan kesimpulan dan pembukuan tugas akhir.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Pada bab ini diuraikan tentang dua teorema yang berkaitan dengan analogi antara metrik dan type-metrik. Dibuktikan pula sifat konvergensi dan barisan Cauchy beserta keterkaitannya dan contoh pada ruang type-metrik, Selain itu, dibuktikan teorema titik tetap pada ruang type-metrik, serta diberikan contoh dari teorema titik tetap tersebut.

5. BAB V PENUTUP
   Pada bab ini disajikan kesimpulan terkait ruang type-metrik, seperti konvergensi barisan dan barisan Cauchy pada ruang type-metrik dan teorema titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik. Diberikan pula beberapa saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, ditunjukkan beberapa hal yang mendukung penyelesaian tugas akhir, meliputi penelitian-penelitian terdahulu yang dilakukan oleh beberapa ilmuwan matematika terkait konsep ruang metrik, ruang metrik cone dan ruang type-metrik. Ditunjukkan pula definisi-definisi yang berkaitan dengan ruang metrik dan ruang type-metrik serta pemetaan kontraktif.

2.1 Penelitian Terdahulu

Referensi yang digunakan dalam tugas akhir ini diantaranya adalah beberapa penelitian terdahulu yang berhubungan dengan topik tugas akhir. Salah satunya adalah penelitian yang dilakukan Banach mengenai teorema kontraksi(Kreyszig, 1989). Dalam penelitian tersebut, diperkenalkan suatu prinsip kontraksi Banach yakni teorema titik tetap dalam ruang metrik lengkap. Penelitian tersebut melatarbelakangi Czerwik untuk mengembangkan ruang metrik yang dituangkan dalam jurnal yang berjudul Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces(Czerwik, 1998). Selain penelitian yang dilakukan Banach dan Czerwik, penelitian Huang dan Zhang dalam jurnal yang berjudul Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings(Huang dan Zhang, 2007) juga dijadikan tinjauan pustaka dalam tugas akhir ini. Huang dan Zhang memperkenalkan ruang metrik cone sebagai bentuk umum ruang metrik, Selanjutnya Hussain dan Shah memperkenalkan kembali bentuk umum dari ruang b-metrik cone sebagai bentuk umum dari ruang metrik cone(Hussain dan Shah, 2011).

Perkembangan Analisis Fungsional tidak berhenti sampai ruang b-metrik cone saja, Mohamed A. Khamsi memperkenalkan ruang type-metrik dalam jurnal berjudul Remarks on cone metric space and fixed point theorems of contractive mappings yang merupakan salah satu pengembangan dari konsep ruang metrik. Konsep dasar dari ruang type-metrik sedikit berbeda dengan konsep ruang metrik yaitu pada hasil pemetaan di bilangan real non-negatif dan juga pada sifat pertidaksamaan segitiganya(Soemarsono, 2016). Karena bahasan yang ada di setiap penelitian tersebut saling berhubungan dan merupakan perkembangan yang lainnya, penelitian penelitian tersebut dapat dijadikan sebagai tinjauan pustaka dan bahan acuan dalam penelitian tugas akhir ini.

2.2 Bilangan Real

Pada bagian ini diuraikan mengenai definisi dan teorema yang berkaitan dengan sifat urutan dari bilangan $\mathbb{R}$ dan barisan bilangan.

Teorema 2.2.1. (Bartle dan Sherbert, 2011)
Diberikan $a \in \mathbb{R}$. Jika $a \leq 0$ dan $a \geq 0$ maka $a = 0$.

Teorema 2.2.2. (Bartle dan Sherbert, 2011)
Diketahui $a \in \mathbb{R}$. Jika $0 \leq a < \epsilon$ untuk setiap $\epsilon > 0$, maka $a = 0$.

Teorema 2.2.3. (Bartle dan Sherbert, 2011)
Jika $x \in \mathbb{R}$ maka terdapat $n_x \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x \leq n_x$.

Selanjutnya, dijelaskan mengenai barisan bilangan real. Barisan bilangan real (atau barisan di $\mathbb{R}$) adalah fungsi yang didefinisikan pada himpunan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ dari bilangan asli yang mana range berada di bilangan real. Dengan kata lain, barisan di $\mathbb{R}$ memetakan setiap bilangan asli $n = 1, 2, 3, \cdots$. Secara tunggal menentukan bilangan real, jika $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah barisan, nilai dari X pada n diberi simbol x_n. Nilai dari x_n juga disebut suku atau elemen dari barisan. Untuk $n \in \mathbb{N}$ barisan bilangan real dinotasikan $\{x_n\}$.

Definisi 2.2.4 (Bartle dan Sherbert, 2011)
Suatu barisan bilangan real $\{x_n\}$ dari titik-titik dalam suatu himpunan tak kosong X dikatakan konvergen ke $x \in X$, dinotasikan $x_n \rightarrow x$ untuk $n \rightarrow \infty$ atau $\lim_{n\rightarrow\infty} x_n = x$, jika barisan bilangan real $x_n \rightarrow x$ saat $n \rightarrow \infty$; dengan kalimat lain untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n - x| < \epsilon$ untuk setiap $n \geq N(\epsilon)$.

Sehingga diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.2.5 (Bartle dan Sherbert, 2011)
Diberikan $\{x_n\}$ barisan bilangan real. Jika $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ dimana $n \in \mathbb{N}$ maka barisan $\{x_n\}$ konvergen ke 1.

Penyelesaian. Ambil sebarang $\epsilon > 0$
Untuk $n \in \mathbb{N}$ tinjau

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| &= \left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| \\
&= \left|\frac{-1}{n+1}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n+1}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{n}\right|
\end{aligned}$$

Sehingga untuk $n \geq N(\epsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{N(\epsilon)}\right| < \epsilon$
Hal tersebut berlaku karena Teorema 2.2.3, sehingga terdapat $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $N(\epsilon) > \frac{1}{\epsilon}$ sehingga berdasarkan Definisi 2.2.4 terbukti bahwa barisan $\{x_n\}$ konvergen ke 1. ■

Definisi 2.2.6 (Bartle dan Sherbert, 2011)
Suatu barisan bilangan real $\{x_n\}$ dari titik-titik dalam suatu himpunan tak kosong X disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n - x_m| < \epsilon$ untuk setiap $n, m \geq K(\epsilon)$.

Sehingga diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.2.7 (Bartle dan Sherbert, 2011)
Diberikan $\{s_n\}$ barisan bilangan real. Jika $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ dimana $n \in \mathbb{N}$ maka barisan $\{s_n\}$ Cauchy di $\mathbb{R}$.

Penyelesaian. Ambil sebarang $\epsilon > 0$
Untuk $n, m \in \mathbb{N}$ dengan asumsi $n > m$ W.L.O.G dan dengan pertidaksamaan segitiga dapat ditinjau

$$\begin{aligned}
|s_n - s_m| =& \left|\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right. \\
&\left. - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}\right)\right| \\
=& \left|1 + \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right| \\
\leq& \left|\frac{1}{(m+1)!}\right| + \left|\frac{1}{(m+2)!}\right| + \cdots + \left|\frac{1}{n!}\right| \\
=& \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Karena untuk setiap $n \in \mathbb{N}\backslash 1$ berlaku $2^n \leq n!$ sehingga didapat $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!} &\leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \frac{1}{2^{m+3}} + \cdots \\ &= \frac{\frac{1}{2^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^m}\end{aligned}$$

Untuk $m, n > N(\epsilon)$ berlaku $\frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^N}$. Berdasarkan Teorema 2.2.3 maka terdapat $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $N(\epsilon) >^2 \log \frac{1}{\epsilon}$ dengan $\log \frac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}$ sehingga berdasarkan Definisi 2.2.6 terbukti bahwa barisan $\{s_n\}$ Cauchy di $\mathbb{R}$. ■

Teorema 2.2.8. (Bartle dan Sherbert, 2011)
Suatu barisan bilangan real $\{x_n\}$ dari titik-titik dalam suatu himpunan tak kosong X konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy.

Bukti:
$(\Rightarrow)$
Ambil sebarang barisan $\{x_n\}$ yang konvergen ke $x \in X$. Berdasarkan Definisi 2.2.4 dapat ditulis untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $N(\frac{\epsilon}{2}) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$. Misalkan $N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = H(\epsilon)$ dan jika $n, m \geq H(\epsilon)$, juga dengan menggunakan pertidaksamaan

segitiga maka diperoleh

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= |x_n - x + x - x_m| \\ &\leq |x_n - x| + |x - x_m| \\ &= |x_n - x| + |x_m - x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $H(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n - x_m| < \epsilon$ untuk setiap $n \geq H(\epsilon)$ Berdasarkan Definisi 2.2.6 terbukti bahwa barisan $\{x_n\}$ Cauchy.

$(\Leftarrow)$

Ambil sebarang barisan Cauchy di X. Misalkan $\{x_n\}$ barisan tersebut. Diketahui bahwa barisan Cauchy merupakan barisan terbatas. Berdasarkan Teorema Bolzano-Weierstrass(Bartle dan Sherbert, 2011) terdapat subbarisan $\{x_{n_k}\}$ yang konvergen ke x^*. Karena $\{x_n\}$ barisan Cauchy berdasarkan Definisi 2.2.6 berlaku untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $H\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$ untuk $n, m \geq H\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$.

Karena subbarisan $\{x_{n_k}\}$ konvergen ke x^* berdasarkan Definisi 2.2.4 untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $K \geq H\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ yang berada pada himpunan $\{n_1, n_2, \cdots\}$ sehingga memenuhi $|x_K - x^*| < \frac{\epsilon}{2}$

Karena $K \geq H\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ untuk $m = K$ berlaku juga $|x_n - x_K| < \frac{\epsilon}{2}$ untuk $n \geq H\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$

Jadi, untuk $n \geq H\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ didapat

$$
\begin{aligned}
|x_n - x^*| &= |(x_n - x_K) + (x_K - x^*)| \\
&\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk setiap $\epsilon > 0$ berdasarkan Definisi 2.2.4 maka barisan $\{x_n\}$ konvergen. ■

Selanjutnya, diberikan Definisi dan Teorema dari deret sebagai berikut:

Definisi 2.2.9 (Bartle dan Sherbert, 2011)
Diberikan barisan bilangan real $\{x_n\}$. Barisan $\{s_n\}$ dikatakan *deret* yang dihasilkan dari barisan $\{x_n\}$ jika memenuhi:

$$
\begin{aligned}
&s_1 := x_1 \\
&s_2 := s_1 + x_1 \qquad (= x_1 + x_2) \\
&\quad\vdots \\
&s_n := s_{n-1} + x_n \qquad (= x_1 + x_2 + \cdots + x_n)
\end{aligned}
$$

Bilangan x_n disebut *suku* dari deret tersebut dan bilangan s_n disebut *jumlahan parsial* atau jumlahan n suku pertama dari deret tersebut.

Teorema 2.2.10. (Bartle dan Sherbert, 2011)
Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen maka $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Bukti : Misalkan $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ dan $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Perhatikan bahwa $x_n = s_n - s_{n-1}$. Karena $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$, maka diperoleh $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$. ■

2.3 Ruang Metrik

Pertama dijelaskan mengenai definisi dan sifat-sifat dasar mengenai ruang metrik yang merupakan dasar dari pengembangan ruang type-metrik.

Definisi 2.3.1 (Kreyszig, 1989)
Diberikan X suatu himpunan tak kosong. Didefinisikan metrik atau fungsi jarak adalah sebuah fungsi bernilai real $d : X \times X \to \mathbb{R}$ jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi:

(M1) $d(x, y) \geq 0$

(M2) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Jika d metrik di X, maka pasangan (X, d) disebut ruang metrik.

Contoh 2.3.2 (Yunus, 2005)
Pada himpunan $\mathbb{R}$ dapat didefinisikan fungsi $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, maka d merupakan metrik pada $\mathbb{R}$ dan pasangan $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik. Metrik ini disebut metrik Euclid pada $\mathbb{R}$.

Penyelesaian. Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$, d merupakan metrik pada $\mathbb{R}$ karena memenuhi (M1),(M2),(M3) dan (M4) pada Definisi 2.3.1. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

(M1) Didefinisikan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Karena nilai mutlak selalu bernilai tak negatif, maka $d(x, y) = |x - y| \geq 0$

(M2) ($\Leftarrow$) Jika $d(x,y) = |x-y| = 0$ maka terdapat dua kondisi, yaitu $x - y = 0$ dan $-(x-y) = 0$. Dari kedua kondisi tersebut, terlihat bahwa $x = y$

($\Rightarrow$) Jika $x = y$, maka $d(x,y) = d(y,y) = |y-y| = |0-0| = 0$

(M3) Ditunjukkan bahwa $d(x,y) = d(y,x)$
$d(x,y) = |x-y| = |(-1)(y-x)| = |-1|\,|y-x|$
$= |y-x| = d(y,x)$

(M4)
$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x-z| \\ &= |(x-y)+(y-z)| \\ &\leq |x-y| + |y-z| \\ &= d(x,y) + (y,z) \end{aligned}$$

Dari keempat sifat yang telah dipenuhi terbukti $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik. ■

Selanjutnya, dijelaskan mengenai beberapa konsep penting dalam ruang metrik diantaranya konvergensi barisan, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan.

Definisi 2.3.3 (Yunus, 2005)
Suatu barisan $\{x_n\}$ dari titik-titik dalam suatu ruang metrik (X,d) dikatakan konvergen ke $x \in X$, dinotasikan $x_n \to x$ untuk $n \to \infty$ atau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, jika barisan bilangan real tak negatif $d(x_n, x) \to 0$ saat $n \to \infty$; dengan kalimat lain untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \epsilon$ untuk $n \geq N(\epsilon)$.

Sebelum mendefinisikan ruang metrik lengkap, diuraikan dahulu definisi barisan Cauchy yang berkaitan erat dengan ruang metrik lengkap.

Definisi 2.3.4 (Yunus, 2005)
Barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik (X, d) disebut barisan Cauchy (atau fundamental) jika untuk setiap $(\epsilon > 0)$, $(\exists K(\epsilon) \in \mathbb{N})$ sedemikian hingga $d(x_m, x_n) < \epsilon$, untuk setiap $m, n > K(\epsilon)$

Definisi 2.3.5 (Yunus, 2005)
Misal (X, d) suatu ruang metrik dan himpunan $E \subseteq X$. Himpunan E dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di E mempunyai limit di E. Jika X lengkap, maka pasangan (X, d) disebut ruang metrik lengkap.

Selanjutnya, diberikan contoh ruang metrik lengkap.

Contoh 2.3.6 (Yunus, 2005)
Pada himpunan $\mathbb{R}^n$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ dapat didefinisikan metrik $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ untuk setiap $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, maka pasangan $(\mathbb{R}^n, d)$ adalah ruang merik lengkap. Metrik ini disebut metrik Euclid pada $\mathbb{R}^n$.

Dari Definisi 2.3.5 tersebut diberikan analogi dari barisan konvergen dan barisan Cauchy pada ruang metrik sebagai berikut.

Teorema 2.3.7. (Yunus, 2005)
Misal (X, d) suatu ruang metrik. Jika $\{x_n\}$ di X suatu barisan konvergen di X, maka $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Kebalikan dari Teorema 2.3.7 tidak benar pada umumnya. Sehingga diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.3.8 (Royden dan Fitzpatrick, 1988)
Diberikan $X = (0, 1)$. Metrik d didefinisikan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan d merupakan metrik Euclid untuk $\mathbb{R}$. Suatu barisan

$\{x_n\}$, dengan $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, adalah barisan Cauchy di $(0,1)$, tetapi barisan $\{x_n\}$ tidak konvergen di $(0,1)$.

Selanjutnya, diberikan Definisi penting mengenai pemetaan kontraktif pada ruang metrik.

Definisi 2.3.9 (Kreyszig, 1989)
Diberikan ruang metrik (X, d). Pemetaan $f : X \to X$ disebut pemetaan kontraktif jika terdapat $c \in \mathbb{R}$ dengan $0 \leq c < 1$ sedemikian hingga $d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x, y)$

2.4 Ruang Bernorma

Setelah dibahas mengenai ruang metrik kemudian dibahas mengenai ruang yang berkaitan dengan ruang metrik yaitu ruang bernorma.

Definisi 2.4.1 (Yunus, 2005)
Diberikan ruang vektor X atas lapangan $\mathbb{F}$, dan suatu elemen nol dari X adalah 0_v. Fungsi bernilai real $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ disebut norma jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ memenuhi:

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0_v$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Jika $\|.\|$ norma di X, maka pasangan $(X, \|.\|)$ disebut ruang bernorma.

Definisi 2.4.2 (Yunus, 2005)
Diberikan $(X, \|.\|)$ adalah ruang bernorma

(1) Barisan $\{x_n\}$ di X dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $(\epsilon > 0)$, $(\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N})$ sedemikian hingga $\|x_n - x\| < \epsilon$, untuk setiap $n > N(\epsilon)$

(2) Barisan $\{x_n\}$ di X disebut barisan Cauchy (atau fundamental) jika untuk setiap $(\epsilon > 0)$, $(\exists K(\epsilon) \in \mathbb{N})$ sedemikian hingga $\|x_m - x_n\| < \epsilon$, untuk setiap $m, n > K(\epsilon)$

Ruang bernorma $(X, \|.\|)$ dikatakan lengkap jika dan hanya jika setiap barisan Cauchy di X konvergen.
Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap.

Berikut ini diberikan contoh ruang Banach.

Contoh 2.4.3 (Yunus, 2005)
Misal $n \in \mathbb{N}$. Pandang ruang vektor Euclid real $\mathbb{R}^n$, didefinisikan norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

untuk setiap vektor $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pasangan $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma lengkap(ruang Banach). Norma ini dikenal norma Euclid pada $\mathbb{R}^n$.

Penyelesaian. Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\cdot\|$ merupakan norma pada $\mathbb{R}^n$ karena memenuhi (N1),(N2),(N3) dan (N4) pada Definisi 2.4.1. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

(N1) Terlihat bahwa $|x_k|^2 \geq 0, k \in \mathbb{N}$ untuk setiap $x_k \in \mathbb{R}$. Hal ini menunjukkan $\|x\| \geq 0$.

(N2) ($\Leftarrow$) Jika $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = 0$ maka $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0$, sehingga haruslah $x_k = 0$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Hal ini menunjukkan $x = 0$

($\Rightarrow$) Jika $x = 0$, maka $\|0\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |0|^2\right)^{1/2} = 0$

(N3) Ditunjukkan bahwa $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^2 |x_i|^2\right)^{1/2} \\
&= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \\
&= |\alpha| \|x\|
\end{aligned}$$

(N4) Dengan menggunakan Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz diperoleh

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dari keempat sifat yang telah dipenuhi terbukti $\|\cdot\|$ merupakan ruang bernorma. Selanjutnya, berdasarkan (Yunus, 2005; Kreyszig, 1989) didapat bahwa $\|x\|$ lengkap. Jadi, terbukti $\|x\|$ merupakan norma yang lengkap atau $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ merupakan ruang Banach. $\blacksquare$

2.5 Ruang Metrik Cone

Sebelum membahas tentang ruang metrik cone, dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi cone dan suatu urutan parsial dalam cone.

Definisi 2.5.1 (Huang dan Zhang, 2007)
Misalkan E ruang Banach dan $P \subseteq E$. suatu elemen nol dari E adalah θ. P adalah cone jika dan hanya jika

(C1) P tertutup, tidak kosong dan $P \neq \{\theta\}$

(C2) $a, b \in \mathbb{R};\ a, b \geq 0;\ x, y \in P \Rightarrow ax + by \in P$

(C3) $P \cap (-P) = \{\theta\}$

Dalam cone, didefinisikan suatu urutan parsial $\preceq$ yang berarti jika $x \preceq y$ maka $y - x \in P$. Sedangkan jika $x \prec y$ artinya $x \preceq y$ tetapi $x \neq y$ dan jika $x \ll y$ maka $y - x \in \operatorname{int} P \subseteq P$ ($\operatorname{int} P =$ Interior P).

Cone P dikatakan *normal* jika terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in E$, $\theta \preceq x \preceq y$ berakibat $\|x\| \leq M \|y\|$ dengan $\|.\|$ adalah norma pada E.

Contoh 2.5.2 (Huang dan Zhang, 2007)
Diberikan ruang Banach $E = \mathbb{R}^2$, diperoleh bahwa himpunan $P = \mathbb{R}^2_{0+} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x, y \geq 0 \in \mathbb{R} \right\}$ adalah himpunan cone dan cone P normal dengan konstan $M = 1$.

Definisi 2.5.3 (Huang dan Zhang, 2007)
Misalkan X adalah himpunan tidak kosong. Pemetaan $d_c : X \times X \to E$ disebut metrik cone pada X jika dan hanya jika memenuhi:

(MC1) $\theta \prec d_c(x, y)$ untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \neq y$

(MC2) $d_c(x,y) = \theta$ jika dan hanya jika $x = y$ untuk semua $x, y \in X$

(MC3) $d_c(x,y) = d_c(y,x)$ untuk semua $x, y \in X$

(MC4) $d_c(x,y) \preceq d_c(x,z) + d_c(z,y)$ untuk semua $x, y, z \in X$

Pasangan (X, d_c) disebut ruang metrik cone.

Contoh 2.5.4 (Sunarsini dkk., 2016)
Diberikan $E = \mathbb{R}^2, P = \{(x,y) \in E |\, x, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}$ dan $d : X \times X \to E$ memenuhi $d_c(x,y) = (|x-y|, \alpha\,|x-y|)$ dimana $\alpha \geq 0$ konstan. Maka pasangan (X, d_c) adalah ruang metrik cone.

Selanjutnya dibahas mengenai sifat Lipschitz pada ruang metrik cone.

Definisi 2.5.5 (Khamsi, 2010)
Diberikan (X, d_c) ruang metik cone. Pemetaan $T : X \to X$ dikatakan Lipschitz jika terdapat $k \in \mathbb{R}$ sehingga memenuhi

$$d_c(Tx, Ty) \preceq k\, d_c(x,y)$$

Untuk setiap $x, y \in X$. Nilai terkecil dari k yang memenuhi pertidaksamaan di atas disebut sebagai konstanta Lipschitz dari T, ditulis $\mathrm{Lip}(T)$. Khususnya T kontraktif jika $\mathrm{Lip}(T) \in [0,1)$

2.6 Integral Lebesgue

Pada bagian ini diuraikan mengenai Integral Lebesgue terkait sebagai dasar materi pada pembahasan selanjutnya. Sebagian diuraikan definisi Aljabar himpunan, ukuran luar, himpunan terukur, fungsi terukur, Integral Lebesgue dan teorema-teorema yang berkaitan dengan Integral Lebesgue.

Definisi 2.6.1 (Sunarsini, 2011)
Misalkan himpunan X tak kosong. $\mathcal{P}(X) :=$ koleksi semua himpunan bagian dari X (Power Set). $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ disebut aljabar himpunan(set algebra) dari X jika memenuhi:

(i) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Suatu aljabar $\mathcal{A}$ disebut aljabar sigma (σ-algebra/Borel field), jika setiap gabungan dari countable himpunan di dalam $\mathcal{A}$ menjadi anggota $\mathcal{A}$. Dengan kalimat lain, jika $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ maka $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Terlihat bahwa jika $\mathcal{A}$ aljabar sigma maka $\mathcal{A}$ aljabar himpunan, namun tidak berlaku sebaliknya.
Sehingga diberikan contoh aljabar himpunan tetapi bukan aljabar sigma sebagai berikut:

Contoh 2.6.2 (Sunarsini, 2011)
Diberikan $X = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Jika $\mathcal{A} = \{A : A \subseteq X, A$ berhingga atau A^C berhingga$\}$ maka $\mathcal{A}$ aljabar himpunan dari X tetapi bukan aljabar sigma dari X.

Selanjutnya diberikan fungsi-fungsi yang terdefinisi pada aljabar sigma dan bernilai real atau bernilai real yang diperluas.

Definisi 2.6.3 (Sunarsini, 2011)
Misalkan $\mathcal{A}$ aljabar sigma pada himpunan X, fungsi $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^\star$ disebut ukuran(measure) jika memenuhi:

(i) $\mu(A) \geq 0$, untuk setiap $A \in \mathcal{A}$.

(ii) Jika $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ dengan $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, maka $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (countably additive).

Untuk setiap himpunan A dari bilangan-bilangan real, $\{I_n\}$ dipandang sebagai keluarga terhitung dari interval-interval terbuka yang mengkover(menutup) A, artinya $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ sehingga didefinisikan Ukuran luar (outer measure) sebagai berikut:

Definisi 2.6.4 (Sunarsini, 2011)
Diberikan k bilangan asli dan $\ell(I_k)$ adalah panjang interval terbuka I_k. Fungsi $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\star$ dengan $m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k \right\}$ disebut ukuran luar(outer measure) Lebesgue dari himpunan $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
Jadi $m^*(A)$ didefinisikan sebagai infimum dari semua jumlahan panjang interval-interval terbuka dari keluarga terhitung $\{I_k\}$ yang mengkover A.

Sehingga diberikan contoh ukuran luar Lebesgue sebagai berikut:

Contoh 2.6.5 (Jain dan Gupta, 1986)
Berdasarkan Definisi 2.6.4, $m^*(\emptyset) = 0$.

Penyelesaian. Akan ditunjukkan $m^*(\emptyset) = 0$. Berdasarkan Definisi 2.6.4 misalkan $I_k = (a_k, a_k)$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} m^*(\emptyset) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} \ell((a_k, a_k)) : \emptyset \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, a_k) \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} 0 : \emptyset \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, a_k) \right\} \\ &= \inf\{0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan $m^*(\emptyset) = 0$. ■

Lalu, untuk mempermudah mendapatkan ukuran luar dari suatu himpunan diperlukan teorema berikut:

Teorema 2.6.6. (Sunarsini, 2011)
Ukuran luar (outer measure) dari suatu interval adalah panjang interval tersebut.

Selanjutnya, diberikan definisi tentang himpunan terukur Lebesgue sebagai berikut:

Definisi 2.6.7 (Sunarsini, 2011)
Himpunan E dikatakan terukur (terukur Lebesgue), jika untuk setiap himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ berlaku: $m(A) = m(A \cap E) + m(A \cap E^C)$.

Sehingga diberikan contoh himpunan terukur Lebesgue sebagai berikut:

Contoh 2.6.8 (Sunarsini, 2011)
Himpunan $\emptyset$ merupakan himpunan terukur Lebesgue.

Penyelesaian. Akan dibuktikan himpunan $\emptyset$ terukur Lebesgue. Berdasarkan Definisi 2.6.7 untuk setiap $A \subseteq \mathbb{R}$ didapatkan $m^*(A\cap\emptyset)+m^*(A\cap\emptyset^C) = m^*(A\cap\emptyset)+m^*(A\cap\mathbb{R}) = m^*(\emptyset) + m^*(A)$ sehingga berdasarkan Contoh 2.6.5 diperoleh $m^*(\emptyset) = 0$. Hal ini menunjukkan bahwa $m^*(A \cap \emptyset) + m^*(A \cap \emptyset^C) = m^*(A)$. Sesuai Definisi 2.6.7 dapat disimpulkan himpunan $\emptyset$ merupakan himpunan terukur Lebesgue. ■

Definisi 2.6.9 (Sunarsini, 2011)
Diberikan $\mathcal{M}$ adalah suatu aljabar sigma yang memuat himpunan-himpunan terukur. Fungsi himpunan $m : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^\star$ yang diperoleh dengan membatasi fungsi himpunan m^* pada keluarga $\mathcal{M}$ dari himpunan-himpunan terukur disebut ukuran

Lebesgue untuk himpunan-himpunan dalam $\mathcal{M}$. Jadi, untuk setiap $E \in \mathcal{M}$, $m(E) = m^*(E)$.

Sehingga diberikan contoh penerapan dari Teorema 2.6.6 berikut:

Contoh 2.6.10 (Jain dan Gupta, 1986)
Himpunan $[0,1]$ merupakan himpunan terukur dan mempunyai ukuran 1.

Penyelesaian. Diketahui $[0,1] \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ menurut Definisi 2.6.4, himpunan $[0,1]$ merupakan ukuran luar dan diketahui $[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$ dimana $\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$ merupakan himpunan terukur untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sehingga menurut Definisi 2.6.9, $m\left([0,1]\right) = m^*\left([0,1]\right)$ dan berdasarkan Teorema 2.6.6 diperoleh $m^*\left([0,1]\right) = 1 - 0 = 1$. Hal ini menunjukkan $m\left([0,1]\right) = 1$ atau ukuran dari himpunan $[0,1]$ adalah 1. ∎

Selanjutnya, diperkenalkan fungsi terukur Lebesgue yang memegang peranan cukup penting dalam pengembangan teori integral Lebesgue.

Definisi 2.6.11 (Sunarsini, 2011)
Fungsi $f : E \to \mathbb{R}^\star$ dengan E himpunan terukur dikatakan terukur Lebesgue (terukur) pada E, jika himpunan $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ terukur untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$.

Berikut ini diberikan contoh fungsi terukur sebagai berikut:

Contoh 2.6.12 (Sunarsini, 2011)
Diberikan $f : E \to \mathbb{R}^\star$ dengan E himpunan terukur. Jika

$f(x) = c$ dengan c konstan maka fungsi f merupakan fungsi terukur Lebesgue.

Penyelesaian. Diketahui $f(x) = c$ dengan c konstanta sehingga fungsi $\{x \in E : f(x) = c > \alpha\} = \begin{cases} E, & \alpha < c \\ \emptyset, & \alpha \geq c \end{cases}$ terukur Lebesgue untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ sebab himpunan E dan berdasarkan Contoh 2.6.8 himpunan $\emptyset$ terukur. ■

Diberikan teorema mengenai hubungan dua fungsi terukur Lebesgue sebagai berikut.

Teorema 2.6.13. (Sunarsini, 2011)
Jika f, g dua fungsi terukur Lebesgue pada E, maka setiap fungsi $f - g$, fg dan $|f|$ terukur pada E.

Selanjutnya, diuraikan Definisi dan Teorema yang penting pada integral Lebesgue terukur.

Definisi 2.6.14 (Sunarsini, 2011)
Dua fungsi f dan g yang didefinisikan pada E dikatakan ekuivalen pada E, ditulis $f \sim g$ pada E, jika $f = g$ a.e pada E artinya $f(x) = g(x)$ untuk semua $x \in E - E_1$ dengan $E_1 \subseteq E$ dan $m(E_1) = 0$ atau $m\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$.

Definisi 2.6.15 (Jain dan Gupta, 1986)
Misalkan $f : E \to \mathbb{R}$ fungsi terukur nonnegatif terdefinisi pada himpunan terukur E. Integral f atas E didefinisikan sebagai $\displaystyle\int_E f = \sup_{h \leq f} \int_E h$ dengan h fungsi terukur terbatas sehingga $m\left(\{x \in E : h(x) \neq 0\}\right) < \infty$.

Teorema 2.6.16. (Sunarsini, 2011)
Misalkan fungsi $f, g : E \to \mathbb{R}$ terukur non negatif terdefinisi pada himpunan terukur E, maka:

(i) Jika $f = 0$ a.e pada E dan hanya jika $\displaystyle\int_E f = 0$.

(ii) Jika $f \leq g$ a.e pada E, maka $\displaystyle\int_E f \leq \int_E g$.

BAB III
METODE PENELITIAN

Langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan tugas akhir ini sebagai berikut :

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan studi referensi tentang cone,ruang metrik, ruang metrik cone, dan ruang type-metrik serta sifat Lipschitz, kelengkapan, kekonvergenan, Cauchy, titik tetap dan pemetaan kontraktif pada ruang tersebut. Referensi yang dicari adalah yang berasal dari jurnal - jurnal ataupun buku buku literatur yang sesuai topik tugas akhir ini.

3.2 Mempelajari Konsep ruang Type-Metrik Lengkap

Tahap ini adalah Proses untuk memahami inti dari ruang metrik, ruang cone metrik, lalu ruang type-metrik dan sifat sifat kelengkapannya beserta lemma-lemma dan teorema yang mendasari konsep tersebut, serta memahami konsep konvergensi barisan dan barisan Cauchy yang berlaku pada ruang tersebut.

3.3 Mengkaji Pemetaan Kontraktif

Tahap ini adalah inti daripada pengerjaan tugas akhir yaitu setelah memahami ruang type-metrik lengkap dan mendapatkan pemetaan kontraktif dalam ruang type-metrik, diselidiki bagaimana pemetaan tersebut dapat berlaku. Sehingga dari langkah ini diperoleh pemetaan kontraktif dalam ruang type-metrik lengkap.

3.4 Mengembangkan Pemetaan Kontraktif pada ruang type-metrik lengkap dengan contoh dan mengkonstruksi suatu fungsi type-metrik

Dalam Tahap ini, dikembangkan suatu contoh pemetaan kontraktif dalam ruang type-metrik lengkap khususnya di $L^2([0,1])$ serta mengkonstruksi suatu fungsi type-metrik pada ruang type-metrik cone.

3.5 Penarikan kesimpulan dan penulisan Tugas Akhir

Pada tahap ini, diperoleh beberapa kesimpulan terkait analogi antara ruang metrik dan ruang type-metrik serta penyelidikan tentang pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik. Selain itu, diperoleh kesimpulan dari penyelidikan keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik lengkap dengan menggunakan teorema titik tetap. Pada tahap ini, dilakukan pula penyusunan terhadap tugas akhir.

BAB IV
PEMBAHASAN

Pada bab ini, diuraikan mengenai ruang type-metrik dengan sifat konvergensi, barisan Cauchy dan contoh pada ruang type-metrik. Selain itu, dibuktikan teorema titik tetap pada ruang type-metrik, serta diberikan contoh dari teorema titik tetap tersebut.

4.1 Ruang Type-Metrik Lengkap

Pada bagian ini diuraikan beberapa definisi yang berkaitan dengan konsep ruang type-metrik yang meliputi, definisi ruang type-metrik, konvergensi barisan dan barisan Cauchy serta definisi ruang type-metrik lengkap. Selain itu, juga dibahas keterkaitan dengan ruang metrik dan juga contoh ruang type-metrik yang dikonstruksi dari ruang metrik cone dan juga contoh ruang type-metrik lengkap. Terlebih dahulu diberikan definisi ruang type-metrik. Definisi berikut ini diperlukan untuk menunjukkan perbedaan antara ruang type-metrik dan ruang metrik yang telah didefinisikan pada Definisi 2.3.1. Melalui definisi ini, dapat diperoleh analogi antara ruang metrik dan ruang type-metrik.

Definisi 4.1.1 (Khamsi, 2010)
Diberikan himpunan tak kosong X. Fungsi $D : X \times X \to \mathbb{R}$ disebut type-metrik jika memenuhi kondisi:

(MT1) $D(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$

(MT2) $D(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ untuk $x, y \in X$

(MT3) $D(x,y) = D(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$

(MT4) $D(x,y) \leq K[D(x,z_1) + D(z_1,z_2) + D(z_2,z_3) + \cdots + D(z_n,y)]$ untuk setiap $x, y, z_i \in X, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ dan untuk suatu $K \in \mathbb{R}^+$.

Pasangan (X, D) disebut ruang type-metrik. $\square$

Terlihat (MT4) jika dibandingkan dengan definisi ruang metrik memiliki perbedaan dengan sifat (M4) pada Definisi 2.3.1, yaitu $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Lebih lanjut, didefinisikan barisan konvergen dan barisan Cauchy serta sifat kelengkapan pada ruang type-metrik yang tujuannya untuk mengkaji keterkaitan masing-masing sifat tersebut.

Definisi 4.1.2 (Khamsi, 2010)
Diberikan (X, D) adalah ruang type-metrik maka

(1) Barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} D(x_n, x) = 0$; dengan kalimat lain untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $D(x_n, x) < \epsilon$ untuk $n \geq N(\epsilon)$

(2) Barisan $\{x_n\}$ Cauchy jika dan hanya jika $\lim_{n,m\to\infty} D(x_n, x_m) = 0$; dengan kalimat lain untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $D(x_n, x_m) < \epsilon$ untuk $m, n \geq K(\epsilon)$

Ruang type-metrik (X, D) dikatakan lengkap jika dan hanya jika setiap barisan Cauchy di X konvergen. $\square$

Dari Definisi 4.1.1 dan 4.1.2 akan dibuktikan bahwa barisan konvergen di ruang type-metrik limitnya tunggal.

Lemma 4.1.3.
Diberikan (X, D) ruang type-metrik. Jika barisan $\{x_n\}$ di X konvergen, maka limitnya tunggal.

Bukti :
Diambil sebarang barisan konvergen $\{x_n\}$ di ruang type-metrik (X, D) yang konvergen ke $x \in X$.
Berdasarkan sifat (1) pada Definisi 4.1.2 artinya $(\forall \epsilon > 0)$, $(\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N})$ sedemikian sehingga

$$D(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2K} \tag{4.1}$$

untuk suatu $K \in \mathbb{R}^+$ dan berlaku untuk $n \geq N(\epsilon)$.

Misalkan barisan $\{x_n\}$ tersebut juga konvergen ke $y \in X$ berdasarkan sifat (1) pada Definisi 4.1.2 artinya $(\forall \epsilon > 0)$, $(\exists M(\epsilon) \in \mathbb{N})$ sedemikian sehingga

$$D(x_n, y) < \frac{\epsilon}{2K} \tag{4.2}$$

untuk suatu $K \in \mathbb{R}^+$ dan berlaku untuk $n \geq M(\epsilon)$.
Misalkan $P(\epsilon) = \max\{M(\epsilon), N(\epsilon)\}$ dan ambil sebarang $\epsilon > 0$, berdasarkan (MT4) pada Definisi 4.1.1 karena berlaku untuk setiap $x, y, z_i \in X$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, jika dimisalkan x, y adalah limit dari barisan $\{x_n\}$ dan karena $\{x_n\} \subseteq X$ dapat dimisalkan $z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = z_n = x_n$.
substitusi ke (MT4) pada Definisi 4.1.1 diperoleh

$$\begin{aligned} D(x, y) \leq K\,[D(x, x_n) + &\underbrace{D(x_n, x_n) + \cdots + D(x_n, x_n)}_{n-1} \\ &+ D(x_n, y)] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Berdasarkan (MT2) pada Definisi 4.1.1 diperoleh $D(x_n, x_n) = 0$ sehingga pertidaksamaan (4.3) menjadi

$$D(x,y) \leq K\left[D(x,x_n) + D(x_n,y)\right] \tag{4.4}$$

Berdasarkan (MT3) pada Definisi 4.1.1 diperoleh $D(x, x_n) = D(x_n, x)$ dan dengan substitusi pertidaksamaan (4.1) juga (4.2) pertidaksamaan (4.4) menjadi

$$\begin{aligned} D(x,y) &\leq K\left[D(x_n,x) + D(x_n,y)\right] \\ &< K\left[\frac{\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon}{2K}\right] \ \text{, untuk } n \geq P(\epsilon) \\ &= \epsilon \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dari pertidaksamaan (4.5) untuk setiap $\epsilon > 0$, berdasarkan Teorema 2.2.2 berlaku $D(x,y) = 0$ dan dari (MT2) pada Definisi 4.1.1 diperoleh $x = y$. Artinya jika titik limit dari barisan $\{x_n\}$ konvergen ke titik yang lain yaitu y haruslah $x = y$ dengan kata lain titik limitnya tunggal. ■

Lalu dengan terbuktinya Lemma 4.1.3 selanjutnya akan dibuktikan bahwa setiap barisan konvergen di ruang type-metrik adalah barisan Cauchy.

Lemma 4.1.4.
Diberikan (X, D) ruang type-metrik. Setiap barisan konvergen di ruang type-metrik adalah barisan Cauchy.

Bukti :
Diambil sebarang barisan $\{x_n\}$ di X yang konvergen ke $x \in X$ di ruang type-metrik (X, D).

Berdasarkan sifat (1) pada Definisi 4.1.2 diketahui $(\forall \epsilon > 0)$, $(\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N})$ sedemikian sehingga

$$D(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2K} \tag{4.6}$$

untuk suatu $K \in \mathbb{R}^+$ dan berlaku untuk $n \geq N(\epsilon)$.

Sehingga untuk $n, m \geq N(\epsilon)$ juga berlaku

$$D(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2K} \tag{4.7}$$

untuk suatu $K \in \mathbb{R}^+$.

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, berdasarkan (MT4) dari Definisi 4.1.1 karena berlaku untuk setiap $x, y, z_i \in X$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ sehingga berlaku juga jika dimisalkan x adalah limit dari barisan $\{x_n\}$. Karena $x_n, x_m \in X$ dapat dimisalkan $z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = z_n = x$. Lalu, substitusikan ke (MT4) pada Definisi 4.1.1 diperoleh

$$\begin{aligned} D(x_n, x_m) \leq K\,[D(x_n, x) + &\underbrace{D(x, x) + \cdots + D(x, x)}_{n-1} \\ &+ D(x, x_m)] \end{aligned} \tag{4.8}$$

Berdasarkan (MT2) pada Definisi 4.1.1 diperoleh $D\,(x, x) = 0$ sehingga pertidaksamaan (4.8) menjadi

$$D(x_n, x_m) \leq K\,[D(x_n, x) + D(x, x_m)] \tag{4.9}$$

Berdasarkan (MT3) pada Definisi 4.1.1 diperoleh $D\,(x, x_m) = D\,(x_m, x)$ dan dengan substitusi pertidaksamaan (4.6) juga (4.7) pertidaksamaan (4.9) menjadi

$$\begin{aligned} D(x_n, x_m) &\leq K\,[D(x_n, x) + D(x_m, x)] \\ &< K\left[\frac{\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon}{2K}\right]\ , \text{ untuk } n, m \geq N\,(\epsilon) \\ &= \epsilon \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dengan kalimat lain untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $D(x_n, x_m) < \epsilon$ untuk $n, m \geq N(\epsilon)$ atau $\lim\limits_{n,m\to\infty} D(x_n, x_m) = 0$. Berdasarkan Definisi 4.1.2 artinya $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. ■

Kebalikan dari Lemma 4.1.4 tidak benar pada umumnya. Oleh karena itu, diberikan contoh sederhana sebagai berikut

Contoh 4.1.5
Diberikan $X = (0, 1]$. Jika type-metrik $D : X \times X \to [0, 1]$ dimana $D(x, y) = (x - y)^2$ untuk setiap $x, y \in X$ dan barisan $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$, maka barisan $\{x_n\}$ Cauchy tetapi tidak konvergen di X.

Penyelesaian. Akan ditunjukkan bahwa $((0, 1], D)$ merupakan ruang type-metrik, yang memenuhi Definisi 4.1.1 yaitu D memenuhi (MT1),(MT2),(MT3) dan (MT4) untuk setiap $x, y, z_i \in (0, 1]$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$.

(MT1) Terlihat bahwa kuadrat dari sebarang bilangan real merupakan bilangan real nonnegatif. Jadi, untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $D(x, y) = (x - y)^2 \geq 0$. Sehingga (MT1) dipenuhi.

(MT2) ($\Rightarrow$)
Jika $D(x, y) = 0$ maka
$(x - y)^2 = 0$ atau $(x - y) = 0$
Hal ini menunjukkan bahwa $x = y$

($\Leftarrow$)
Jika $x = y$ maka
$D(x, y) = D(y, y) = (y - y)^2 = 0^2 = 0$
Hal ini menunjukkan bahwa $D(x, y) = 0$ jika dan hanya

jika $x = y$ untuk setiap $x, y \in (0, 1]$
Sehingga (MT2) dipenuhi.

(MT3) Pandang
$D(x, y) = (x - y)^2 = ((-1)(y - x))^2 = (-1)^2(y - x)^2$
$= (y - x)^2 = D(y - x)$
Hal ini menunjukkan bahwa $D(x, y) = D(y, x)$ untuk setiap $x, y \in (0, 1]$ sehingga (MT3) dipenuhi.

(MT4) Tinjau Teorema Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz, jika terdapat bilangan real $a_1, a_2, \ldots a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k \geq 0$, maka

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_k^2\right) \leq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k\right)^2 \tag{4.11}$$

lalu substitusikan $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_k = 1$ ke pertidaksamaan (4.11) diperoleh

$$k\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2\right) \leq \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_k\right)^2 \tag{4.12}$$

sehingga sesuai (MT4) pada Definisi 4.1.1 karena berlaku untuk setiap $x, y, z_i \in (0, 1]$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ dapat dimisalkan $k = n + 1$, $a_1 = x - z_1$, $a_2 = z_1 - z_2$, $a_3 = z_2 - z_3$, $\cdots$, $a_n = z_{n-1} - z_n$ dan $a_{n+1} = z_n - y$ lalu substitusikan ke pertidaksamaan (4.12) diperoleh

$$\left((x - z_1) + \left[\sum_{k=1}^{n-1} (z_k - z_{k+1})\right] + (z_n - y)\right)^2 = (x - y)$$
$$\leq (n+1)\left((x - z_1)^2 + \left[\sum_{k=1}^{n-1} (z_k - z_{k+1})^2\right] + (z_n - y)^2\right)$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$D(x, y) \leq K\left(D(x, z_1) + \left[\sum_{k=1}^{n-1} D(z_k, z_{k+1})\right] + D(z_n, y)\right)$$

dengan $K = n+1 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. untuk setiap $x, y, z_i \in (0, 1]$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ sehingga (MT4) dipenuhi.

Dari keempat sifat yang telah dipenuhi terbukti $((0,1],D)$ merupakan ruang type-metrik.
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa barisan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ Cauchy tetapi tidak konvergen.
Sesuai sifat (1) pada Definisi 4.1.2 jika

$$\begin{aligned}\lim_{n,m\to\infty} D(x_n,x_m) &= \lim_{n,m\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)^2\\ &= \lim_{n,m\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}-\frac{2}{mn}\right)\\ &= 0+0-0=0\end{aligned}$$

maka barisan $\{x_n\}$ Cauchy.
Selanjutnya, dibuktikan barisan $\{x_n\}$ tidak konvergen. Asumsikan barisan $\{x_n\}$ konvergen. Karena $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\} \to 0$ maka barisan $\{x_n\}$ konvergen ke 0, padahal diketahui bahwa $X = (0,1]$ sehingga $0 \notin X$, pernyataan tersebut kontradiksi dengan asumsi bahwa barisan $\{x_n\}$ konvergen. Jadi, barisan $\{x_n\}$ tidak konvergen.
Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}$ barisan Cauchy tetapi tidak konvergen di X ■

Contoh tersebut menjelaskan bahwa barisan Cauchy belum tentu konvergen pada ruang type-metrik.
Selanjutnya dibutuhkan analogi mengenai ruang metrik dan ruang type-metrik yang digunakan untuk meninjau kelengkapan dari ruang metrik dan ruang type-metrik sehingga Lemma mengenai analogi metrik dan type-metrik berikut diperlukan.

Lemma 4.1.6.
Diberikan (X,d) ruang metrik maka (X,d) merupakan ruang type-metrik.

Bukti :
Akan ditunjukkan bahwa (X, d) merupakan ruang type-metrik, yang memenuhi Definisi 4.1.1 yaitu d memenuhi (MT1),(MT2),(MT3) dan (MT4) untuk setiap $x, y, z_i \in X$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

(MT1) Diketahui sifat (M1) pada Definisi 2.3.1 adalah $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$, hal ini menunjukkan bahwa sifat (MT1) pada Definisi 4.1.1 yaitu $D : X \times X \to [0, \infty)$ dipenuhi.

(MT2) Karena d adalah metrik pada X maka d memenuhi (M2) seperti pada Definisi 2.3.1. Hal ini menunjukkan bahwa $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ sehingga (MT2) dipenuhi.

(MT3) Karena d adalah metrik pada X maka d memenuhi (M3) seperti pada Definisi 2.3.1. Hal ini menunjukkan bahwa $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$ sehingga (MT3) dipenuhi.

(MT4) Karena d adalah metrik pada X maka d memenuhi (M4) seperti pada Definisi 2.3.1 yaitu,
$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$. Ambil sebarang $x, y, z_i \in X$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ berdasarkan (M4) pada Definisi 2.3.1 diperoleh

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z_1) + d(z_1, y) \\ &\leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + d(z_2, y) \\ &\leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) + d(z_3, y) \end{aligned}$$

dengan induksi diperoleh

$$\begin{aligned} d(x, y) \leq\ & d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \\ & + \cdots + d(z_n, y) \end{aligned} \tag{4.13}$$

untuk suatu bilangan real positif $K = 1$, sehingga pertidaksamaan (4.13) menjadi
$d(x, y) \leq K\,[d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) + \cdots + d(z_n, y)]$
Hal ini menunjukkan bahwa (M4) dipenuhi.

Jadi, dari keempat sifat yang telah dipenuhi terbukti (X, d) merupakan ruang type-metrik. ■

Berkaitan dengan Lemma 4.1.6 diberikan contoh ruang type-metrik berikut.

Contoh 4.1.7
Diberikan $X = \mathcal{L}^2([0,1])$ dan $D : X \times X \to [0, \infty)$ dimana $\mathcal{L}^2([0,1])$ adalah himpunan fungsi terukur Lebesgue pada $[0,1]$ yang memenuhi

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

Jika didefinisikan

$$D(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 \, dx$$

maka D memenuhi kondisi berikut:

(1) $D(f,g) = 0$ jika dan hanya jika $f = g$ a.e.

(2) $D(f,g) = D(g,f)$, untuk setiap $f, g \in X$

(3) $D(f,g) \leq 2[D(f,h) + D(h,g)]$, untuk setiap $f, g, h \in X$.

Lebih lanjut, (X, D) merupakan ruang type-metrik tetapi bukan merupakan ruang metrik.

Penyelesaian. Akan ditunjukkan bahwa D memenuhi sifat (1),(2) dan (3) untuk setiap $f, g, h \in X$.

(1) Jika $f, g \in X$ maka f dan g terukur pada $[0,1]$, berdasarkan Teorema 2.6.13 berturut-turut didapat $f - g$, $|f - g|$ dan $|f - g||f - g| = |f - g|^2$ terukur.

Misalkan $h(x) = |f(x) - g(x)|^2$, berdasarkan sifat mutlak terlihat bahwa $|f(x) - g(x)| \geq 0$ untuk setiap $x \in [0, 1]$ sama halnya juga $h(x) = |f(x) - g(x)|^2 \geq 0$. Dapat disimpulkan bahwa $h(x)$ merupakan fungsi terukur non negatif untuk $x \in [0, 1]$. Menurut sifat (i) pada Teorema 2.6.16, jika $h(x) = 0$ a.e atau $|f(x) - g(x)|^2 = 0$ a.e atau $f(x) = g(x)$ a.e jika dan hanya jika $\int_0^1 h(x)\, dx = 0$ atau $\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2\, dx = 0$.

Hal ini menunjukkan bahwa $D(f, g) = 0$ jika dan hanya jika $f = g$ a.e sehingga (MT2) dipenuhi.

(2) Pandang

$$\begin{aligned} D(f, g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2\, dx \\ &= \int_0^1 |(-1)(g(x) - f(x))|^2\, dx \\ &= \int_0^1 |-1|^2\, |g(x) - f(x)|^2\, dx \\ &= \int_0^1 |g(x) - f(x)|^2\, dx \\ &= D(g, f) \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $D(f, g) = D(g, f)$ untuk setiap $f, g \in X$ sehingga (MT3) dipenuhi.

(3) Ambil sebarang a, b bilangan real non negatif, asumsikan $a \geq b$ tanpa mengurangi keumuman didapat $(a-b)^2 \geq 0$ sehingga diperoleh $a^2 + b^2 \geq 2ab$ lalu tambahkan kedua ruas dengan $a+b$ didapat $2(a^2+b^2) \geq a^2+2ab+b^2$ atau

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \tag{4.14}$$

untuk setiap $f, g, h \in X$ diketahui $|f(x) - h(x)|$ dan $|h(x) - g(x)|$ real non negatif. Jadi dapat dimisalkan $a = |f(x) - h(x)|$, $b = |h(x) - g(x)|$ sehingga dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga dan pertidaksamaan (4.14) diperoleh

$$\begin{aligned}(|f(x)-g(x)|)^2 &= (|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|)^2\\ &\leq (|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|)^2\\ &\leq 2|f(x)-h(x)|^2\\ &\quad + 2|h(x)-g(x)|^2 \qquad (4.15)\end{aligned}$$

Diketahui $E = [0, 1]$ merupakan himpunan terukur berdasarkan Contoh 2.6.10. Sehingga dari sifat (ii) pada Teorema 2.6.16 pertidaksamaan (4.15) diperoleh

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (|f(x)-g(x)|)^2\,dx\\ &\leq \int_0^1 2(|f(x)-h(x)|^2 + |h(x)-g(x)|^2)\,dx\\ &= 2\int_0^1 \left(|f(x)-h(x)|^2 + |h(x)-g(x)|^2\right)\,dx\\ &= 2\left(\int_0^1 |f(x)-h(x)|^2\,dx + \int_0^1 |h(x)-g(x)|^2\,dx\right)\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $D(f, g) \leq 2[D(f, h) + D(h, g)]$, untuk setiap $f, g, h \in X$ sehingga (MT4) dipenuhi.

Jadi, sifat (1),(2) dan (3) telah dipenuhi. Berdasarkan (MT4) pada Definisi 4.1.1 yaitu $D(x, y) \leq K[D(x, z_1) + D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3) + \cdots + D(z_n, y)]$ untuk setiap $x, y, z_i \in X$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ dan untuk suatu $K \in \mathbb{R}^+$. Untuk $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ dan $K = 2$, sifat (3) memenuhi (MT4) pada Definisi 4.1.1. Diketahui juga $D(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$ hal ini menunjukkan bahwa sifat (MT1) pada Definisi 4.1.1 dipenuhi. Jadi, sifat (MT1),(MT2),(MT3) dan (MT4) sekaligus dipenuhi. Sesuai Definisi 4.1.1 hal ini menunjukkan bahwa (X, D) merupakan ruang type-metrik.

Selanjutnya, akan dibuktikan fungsi D yang terdefinisi tersebut bukan metrik atau akan dibuktikan bahwa terdapat $f, g, h \in X$ sehingga $D(f, g) > D(f, h) + D(h, g)$
Pilih $f(x) = 0$, $g(x) = 2$ dan $h(x) = 1$ adalah fungsi konstan, berdasarkan Contoh 2.6.12 fungsi konstan f, g, h merupakan fungsi terukur Lebesgue sehingga $f, g, h \in X$ dan memenuhi

$$\begin{aligned}
D(f,g) &= \int_0^1 (|f(x) - g(x)|)^2\, dx \\
&= \int_0^1 (|0-2|)^2\, dx \\
&= 4 \\
&> 2 \\
&= 1 + 1 \\
&= \int_0^1 |0-1|^2\, dx + \int_0^1 |1-2|^2\, dx \\
&= \int_0^1 |f(x) - h(x)|^2\, dx + \int_0^1 |h(x) - g(x)|^2\, dx \\
&= D(f,h) + D(h,g)
\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa terdapat $f, g, h \in X$ sehingga $D(f, g) > D(f, h) + D(h, g)$. Jadi, D yang terdefinisi pada contoh 4.1.7 bukan merupakan metrik. ■

Contoh 4.1.7 merupakan contoh bahwa kebalikan dari Lemma 4.1.6 tidak selalu benar pada umumnya. Selanjutnya, diberikan analogi yang berkatian dengan ruang metrik lengkap dan ruang type-metrik lengkap.

Lemma 4.1.8.
Jika (X, d) ruang metrik lengkap maka (X, d) merupakan ruang type-metrik lengkap.

Bukti :
Berdasarkan Definisi 2.3.3 dan 2.3.4 jika barisan $\{x_n\}$ konvergen dan Cauchy di X berturut-turut memenuhi
untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \epsilon$ untuk $n \geq N(\epsilon)$ dan untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $d(x_m, x_n) < \epsilon$, untuk $m, n > K(\epsilon)$.

Berdasarkan Lemma 4.1.6, jika (X, d) ruang metrik maka (X, d) merupakan ruang type-metrik, sehingga d memenuhi sifat (MT1),(MT2),(MT3) dan (MT4) pada Definisi 4.1.1. Karena d merupakan type-metrik, Hal ini menunjukkan bahwa sifat (1) dan (2) pada Definisi 4.1.2 terpenuhi. Dengan kalimat lain setiap barisan konvergen dan Cauchy di ruang metrik berturut-turut merupakan barisan konvergen dan Cauchy di ruang type-metrik.

Diketahui (X, d) merupakan ruang metrik lengkap, sesuai Definisi 2.3.5 artinya setiap barisan Cauchy di X merupakan barisan konvergen, sehingga jika setiap barisan Cauchy di X merupakan barisan konvergen di ruang metrik (X, d) maka setiap barisan Cauchy di X merupakan barisan konvergen di ruang type-metrik (X, d). Dengan kalimat lain Jika (X, d) ruang metrik lengkap maka (X, d) merupakan ruang type-metrik lengkap. $\blacksquare$

Pada kenyataannya, untuk mendapatkan ruang type-metrik lengkap cukup dengan memilih ruang metrik lengkap. Dari kondisi tersebut dipilih contoh ruang type-metrik lengkap sebagai berikut.

Contoh 4.1.9
Diberikan $n \in \mathbb{N}$ dan $X = \mathbb{R}^n$. Jika didefinisikan Pemetaan $d : X \times X \to [0, \infty)$ dengan $d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ untuk setiap $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, maka pasangan $(\mathbb{R}^n, d)$ adalah ruang type-merik lengkap.

Penyelesaian. Berdasarkan Contoh 2.3.6 terlihat bahwa d yang terdefinisi di atas adalah metrik dan $(\mathbb{R}^n, d)$ merupakan ruang metrik lengkap. Jadi, berdasarkan Lemma 4.1.8 $(\mathbb{R}^n, d)$ merupakan ruang type-metrik lengkap. ■

Selanjutnya, dikonstruksi ruang type-metrik secara umum sehingga sifat (MT4) pada Definisi 4.1.1 tidak dimanipulasi, teorema berikut mengkonstruksi suatu fungsi type-metrik pada ruang metrik cone, dimana ruang ruang metrik cone merupakan perluasan pada ruang metrik(Huang dan Zhang, 2007). Konstruksi yang telah diberikan pada(Khamsi, 2010) diuraikan sebagai berikut:

Teorema 4.1.10.
Diberikan (X, d_c) adalah ruang metrik cone pada Ruang Banach E dimana cone P adalah normal dengan konstan $K \in \mathbb{R}^+$. Fungsi $D : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan $D(x, y) = \|d_c(x, y)\|$ merupakan type-metrik pada (X, d_c).

Bukti :
Akan ditunjukkan (X, D) merupakan ruang type-metrik. Seperti pada Definisi 4.1.1 akan dibuktikan D memenuhi (MT1),(MT2),(MT3) dan (MT4) untuk setiap $x, y, z_i \in X$, untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

(MT1) Diketahui dari sifat (N1) pada Definisi 2.4.1 didapat $\|d_c(x, y)\| \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$. Hal ini menunjukkan bahwa $D(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$.

(MT2) (⇒)
Jika $D(x, y) = \|d_c(x, y)\| = 0$
Berdasarkan (N2) pada Teorema 2.4.1 diperoleh $d_c(x, y) = \theta$
dimana θ adalah elemen nol pada Ruang Banach E
Berdasarkan (MC2) pada Definisi 2.5.3 diperoleh $x = y$
hal ini menunjukkan bahwa $x = y$.

(⇐)
Jika $x = y$ maka
$D(x, y) = \|d_c(x, y)\| = \|d_c(y, y)\|$
Berdasarkan (MC3) pada Definisi 2.5.3 diperoleh
$\|d_c(y, y)\| = \|0\| = 0$
hal ini menunjukkan bahwa $D(x, y) = 0$.
sehingga kondisi (MT2) dipenuhi.

(MT3) Tinjau $D(x, y) = \|d_c(x, y)\|$
Berdasarkan (MC3) pada Definisi 2.5.3 diperoleh
$\|d_c(x, y)\| = \|d_c(y, x)\| = D(y, x)$
hal ini menunjukkan bahwa $D(x, y) = D(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$.
sehingga kondisi (MT3) dipenuhi.

(MT4) Tinjau sifat (MC4) pada Definisi 2.5.3 diketahui

$$\begin{aligned} d_c(x, y) &\preceq d_c(x, z_1) + d_c(z_1, y) \\ &\preceq d_c(x, z_1) + d_c(z_1, z_2) + d_c(z_2, y) \\ &\preceq d_c(x, z_1) + d_c(z_1, z_2) + d_c(z_2, z_3) + d_c(z_3, y) \end{aligned}$$

dengan induksi diperoleh

$$\begin{aligned} d_c(x, y) \preceq\ & d_c(x, z_1) + d_c(z_1, z_2) + d_c(z_2, z_3) \\ & + \cdots + d_c(z_n, y) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Dari pertidaksamaan (4.16) karena cone P normal dengan konstan K berdasarkan Definisi 2.5.1 Jika

$$\begin{aligned} \theta &\preceq d_c(x, y) \\ &\preceq d_c(x, z_1) + d_c(z_1, z_2) + d_c(z_2, z_3) + \cdots + d_c(z_n, y) \end{aligned}$$

maka berlaku

$$\|d(x,y)\| \leq K \,\|d_c(x,z_1) + d_c(z_1,z_2) + d_c(z_2,z_3) + \cdots + d_c(z_n,y)\| \tag{4.17}$$

Lalu, berdasarkan (N4) pada Definisi 2.4.1 pertidaksamaan (4.17) menjadi

$$\begin{aligned}\|d_c(x,y)\| &\leq K \,\|d_c(x,z_1) + d_c(z_1,z_2) + d_c(z_2,z_3) \\ &\quad + \cdots + d_c(z_n,y)\| \\ &\leq K\,(\|d_c(x,z_1)\| \\ &\quad + \|d_c(z_1,z_2) + d_c(z_2,z_3) + \cdots + d_c(z_n,y)\|) \\ &\leq K\,(\|d_c(x,z_1)\| + \|d_c(z_1,z_2)\| \\ &\quad + \|d_c(z_2,z_3) + \cdots + d_c(z_n,y)\|)\end{aligned}$$

dengan induksi diperoleh

$$\|d_c(x,y)\| \leq K\,(\|d_c(x,z_1)\| + \|d_c(z_1,z_2)\| + \|d_c(z_2,z_3)\| + \cdots + \|d_c(z_n,y)\|) \tag{4.18}$$

substitusi $D(x,y) = \|d_c(x,y)\|$ pada pertidaksamaan (4.18) didapat

$$D(x,y) \leq K\,[D(x,z_1) + D(z_1,z_2) + \cdots + D(z_n,y)]$$

Hal ini menunjukkan bahwa kondisi (MT4) pada Definisi 4.1.1 terpenuhi.

Sesuai Definisi 4.1.1 jika kondisi (MT1),(MT2),(MT3) dan (MT4) telah dipenuhi maka (X, D) yang terdefinisi pada Teorema 4.1.10 merupakan ruang type-metrik. ■

Teorema 4.1.10 menunjukkan bahwa ruang metrik cone memiliki struktur dari ruang type-metrik. Selanjutnya, Teorema 4.1.10 digunakan sebagai contoh titik tetap dari pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik lengkap yang diuraikan pada bab 4.2 sebagai berikut.

4.2 Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif pada Ruang Type-metrik Lengkap

Teorema titik tetap merupakan objek yang dikaji pada ruang type-metrik sebab dengan mengkaji teorema titik tetap dapat dijamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada ruang type-metrik. Melalui teorema titik tetap pada ruang typpe-metrik, dibuktikan bahwa terdapat titik tetap yang tunggal pada ruang type-metrik. Berdasarkan(Khamsi, 2010), dengan menggunakan definisi dan teorema yang diberikan serta ruang type-metrik lengkap yang telah dibahas pada subbab 4.1, dibuktikan teorema titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik lengkap. Sebelum membuktikan teorema titik tetap, diberikan definisi dan dibuktikan lemma yang dibutuhkan pada proses pembuktian teorema titik tetap tersebut.

Definisi 4.2.1 (Khamsi, 2010)
Diberikan X himpunan tak kosong dan $T : X \to X$ adalah pemetaan. T dikatakan Lipschitz jika terdapat konstanta $\lambda \geq 0$ yang memenuhi

$$D(Tx, Ty) \leq \lambda D(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$. Nilai terkecil dari konstanta λ dinotasikan $\mathrm{Lip}(T)$. $\square$

Lemma 4.2.2.
Diberikan (X, D) adalah ruang type-metrik. Jika $T : X \to X$ adalah pemetaan dengan $T^n x$ adalah Lipschitz untuk semua n bilangan non negatif, maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$D\left(T^n x, T^n y\right) \leq \mathrm{Lip}\left(T^n\right) D\left(x, y\right)$$

Lebih lanjut,

$$D\left(T^{n+h}x, T^{n}y\right) \leq \operatorname{Lip}\left(T^{n}\right) D\left(T^{h}x, y\right).$$

Bukti :
Berdasarkan Definisi 4.2.1 jika T^n Lipschitz untuk semua $n \geq 0$ maka $\exists \lambda_n \geq 0$ sehingga $D(T^n x, T^n y) \leq \lambda_n D(x,y)$ untuk suatu bilangan bulat $n \geq 0$. Nilai terkecil dari konstanta λ_n ditulis Lip(T^n).
Hal ini menunjukkan bahwa

$$D\left(T^{n}x, T^{n}y\right) \leq \operatorname{Lip}\left(T^{n}\right) D\left(x, y\right) \tag{4.19}$$

untuk setiap $n \geq 0$ dan untuk setiap $x, y \in X$.

Selanjutnya, dengan memisalkan $x = T^h p$ untuk suatu $h \geq 0$ substitusi ke pertidaksamaan 4.19 diperoleh
$D\left(T^n\left(T^h p\right), T^n y\right) \leq \text{Lip}(T^n)\, D\left(T^h p, y\right)$ atau
$D\left((T^n \circ T^h)p, T^n y\right) \leq \text{Lip}(T^n)\, D\left(T^h p, y\right)$. Hal ini menunjukkan bahwa $D\left(T^{n+h}x, T^n y\right) \leq \text{Lip}(T^n)\, D\left(T^h x, y\right)$ untuk setiap $x, y \in X$. Sehingga kedua pertidaksamaan telah dipenuhi. ■

Selanjutnya, diberikan Teorema titik tetap yang menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada ruang type-metrik lengkap yang telah diberikan pada(Khamsi, 2010).

Teorema 4.2.3.
Diberikan (X, D) adalah ruang type-metrik lengkap. Jika $T : X \to X$ adalah pemetaan kontraktif dengan $T^n x$ adalah Lipschitz untuk semua $n \geq 0$ dan $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Lip}\left(T^n\right) < \infty$, maka T mempunyai titik tetap tunggal yaitu $\omega \in X$ dan untuk setiap $x \in X$, suatu barisan $\{T^n x\}$ konvergen ke ω.

Bukti :
Pertama, akan ditunjukkan pemetaan T mempunyai titik tetap.
Karena T^n adalah Lipschitz untuk semua $n \geq 0$ berdasarkan Lemma 4.2.2 diketahui

$$D\left(T^{n+h}x, T^n y\right) \leq \mathrm{Lip}\left(T^n\right) D\left(T^h x, y\right) \tag{4.20}$$

Berdasarkan (MT4) pada Definisi 4.1.1 untuk suatu $K \in \mathbb{R}^+$ dan $T^h(x) \in X$ untuk setiap h non negatif diperoleh

$$D(T^h x, y) \leq K \left[\sum_{i=0}^{h-1} D\left(T^{i+1}x, T^i x\right)\right] \tag{4.21}$$

akibatnya substitusi pertidaksamaan (4.21) ke pertidaksamaan (4.20) menjadi

$$D\left(T^{n+h}x, T^n y\right) \leq K\mathrm{Lip}\left(T^n\right) \sum_{i=0}^{h-1} D\left(T^{i+1}x, T^i x\right) \tag{4.22}$$

Berdasarkan Lemma 4.2.2 juga untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, h-1$ berlaku

$$D\left(T^{i+1}x, T^i x\right) \leq \mathrm{Lip}\left(T^i\right) D\left(Tx, x\right) \tag{4.23}$$

Dari pertidaksamaan (4.23) substitusikan ke pertidaksamaan (4.22) didapatkan

$$\begin{aligned} D\left(T^{n+h}x, T^n y\right) &\leq K\mathrm{Lip}\left(T^n\right)\left[\sum_{i=0}^{h-1} \mathrm{Lip}\left(T^i\right) D\left(Tx, x\right)\right] \\ &\leq K\mathrm{Lip}\left(T^n\right)\left[\sum_{i=0}^{h-1} \mathrm{Lip}\left(T^i\right)\right] \\ &\quad D\left(Tx, x\right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Berdasarkan Teorema 2.2.10 untuk $\{\mathrm{Lip}\left(T^n\right)\}$ suatu barisan dan jika diketahui $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Lip}\left(T^n\right)$ konvergen maka

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Lip}\left(T^n\right) = 0 \tag{4.25}$$

Sehingga pada pertidaksamaan (4.24) jika diberi limit di kedua ruas untuk $n \to \infty$ berdasarkan persamaan (4.25) diperoleh

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} D\left(T^{n+h}x, T^n y\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left[K\left(\sum_{i=0}^{h-1} \mathrm{Lip}\left(T^i\right)\right) D\left(Tx, x\right) \mathrm{Lip}\left(T^n\right)\right] \\ &\leq K\left(\sum_{i=0}^{h-1} \mathrm{Lip}\left(T^i\right)\right) D\left(Tx, x\right) \lim_{n\to\infty} \mathrm{Lip}\left(T^n\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Untuk h bilangan bulat nonnegatif. Jika diambil barisan $\{x_n\} = \{T^n x\}$ dan $\{x_{n+h}\} = \{T^{n+h}x\}$ dimana $\{T^n x\}, \{T^{n+h}x\} \subseteq X$, berdasarkan (MT3) pada Definisi 4.1.1 dan pertidaksamaan (4.26), untuk $n \to \infty$ maka

$$\begin{aligned} \lim_{n,m\to\infty} D\left(x_n, x_m\right) &= \lim_{n,m\to\infty} D\left(x_m, x_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} D\left(T^{n+h}x, T^n x\right) \leq 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Padahal dari Definisi 4.1.1 diketahui $D(x_n, x_m) \geq 0$ sehingga

$$\lim_{n,m\to\infty} D\left(x_n, x_m\right) \geq 0 \tag{4.28}$$

Jadi, dari pertidaksamaan (4.27) dan (4.28) berdasarkan Teorema 2.2.1 dapat diperoleh $\lim\limits_{n,m\to\infty} D\left(x_n, x_m\right) = 0$.

Akibatnya, sesuai sifat (2) pada Definisi 4.1.2 barisan $\{x_n\} = \{T^n x\}$ merupakan barisan Cauchy.
Bilamana (X, D) merupakan ruang type-metrik lengkap maka himpunan X lengkap sehingga dari Definisi 4.1.2, barisan $\{T^n x\}$ konvergen.
Misalkan barisan $\{T^n x\}$ tersebut konvergen ke beberapa titik yaitu $\omega(x) \in X$.
Hal ini menunjukkan bahwa barisan $\{T^n x\}$ konvergen, atau sesuai sifat (1) pada Definisi 4.1.2 ditulis

$$\lim_{n\to\infty} D\left(x_n, \omega(x)\right) = \lim_{n\to\infty} D\left(T^n x, \omega(x)\right) = 0 \tag{4.29}$$

Kedua, akan ditunjukkan bahwa $\omega(x)$ adalah titik tetap pada T.
substitusi $x = T^{n-1}x$, $y = \omega(x)$ dan $z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = z_n = T^n x$ ke pertidaksamaan (MT4) pada Definisi 4.1.1 dan juga berdasarkan (MT2) pada Definisi 4.1.1 yaitu $D(T^n x, T^n x) = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
D\left(T^{n-1}x, \omega(x)\right) \leq K \Big(& D\left(T^{n-1}x, T^n x\right) \\
& + \underbrace{D\left(T^n x, T^n x\right) + \cdots + D\left(T^n x, T^n x\right)}_{n-1} \\
& + D\left(T^n x, \omega(x)\right) \Big) \\
= K \Big[& D\left(T^{n-1}x, T^n x\right) \\
& + D\left(T^n x, \omega(x)\right) \Big]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Lalu, berdasarkan Lemma 4.2.2 untuk suatu bilangan asli n

diketahui

$$D\left(T^{n-1}x, T^n x\right) \leq \text{Lip}\left(T^{n-1}\right) D\left(x, Tx\right) \tag{4.31}$$

Sehingga substitusi pertidaksamaan (4.31) pada pertidaksamaan (4.30) diperoleh

$$\begin{aligned} D\left(T^{n-1}x, \omega(x)\right) \leq K \big[&\text{Lip}\left(T^{n-1}\right) D\left(x, Tx\right) \\ &+ D\left(T^n x, \omega(x)\right)\big] \end{aligned} \tag{4.32}$$

Dengan cara yang sama substitusi $x = \omega(x)$, $y = T\omega(x)$ dan $z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = z_n = T^n x$ ke pertidaksamaan (MT4) pada Definisi 4.1.1 dan juga berdasarkan (MT2) pada Definisi 4.1.1 yaitu $D(T^n x, T^n x) = 0$ diperoleh

$$D\left(\omega(x), T\omega(x)\right) \leq K\left[D\left(\omega(x), T^n x\right) + D\left(T^n x, T\omega(x)\right)\right] \tag{4.33}$$

Sehingga tinjau $D\left(T^n x, T\omega(x)\right)$, berdasarkan Lemma 4.2.2, substitusi pertidaksamaan (4.32), sifat komutatif terhadap pejumlahan dan sifat (MT3) pada Definisi 4.1.1 secara berurutan diperoleh pertidaksamaan berikut

$$\begin{aligned} D\left(T^n x, T\omega(x)\right) &\leq \text{Lip}(T) D\left(T^{n-1}x, \omega(x)\right) \\ &\leq K\text{Lip}(T)\big[\text{Lip}(T^{n-1}) D\left(x, Tx\right) \\ &\quad + D\left(T^n x, \omega(x)\right)\big] \\ &= K\text{Lip}(T)\big[D\left(T^n x, \omega(x)\right) \\ &\quad + \text{Lip}(T^{n-1}) D\left(x, Tx\right)\big] \\ &= K\text{Lip}(T)\big[D\left(\omega(x), T^n x\right) \\ &\quad + \text{Lip}(T^{n-1}) D\left(x, Tx\right)\big] \end{aligned} \tag{4.34}$$

Selanjutnya, substitusikan pertidaksamaan (4.34) ke pertidaksamaan (4.33) diperoleh

$$\begin{aligned}
D\left(\omega(x), T\omega(x)\right) \leq\ & K\left[D\left(\omega(x), T^n x\right) + K\mathrm{Lip}(T)\left[D\left(\omega(x), T^n x\right)\right.\right.\\
&\left.\left. +\ \mathrm{Lip}(T^{n-1}) D\left(x, Tx\right)\right]\right]\\
=\ & K\left[[1 + K\mathrm{Lip}(T)]D\left(\omega(x), T^n x\right)\right.\\
&\left. +\ K\mathrm{Lip}(T)\mathrm{Lip}(T^{n-1}) D\left(x, Tx\right)\right]\\
=\ & K\left[[1 + K\mathrm{Lip}(T)]D\left(\omega(x), T^n x\right)\right.\\
&\left. +\ K\mathrm{Lip}\left(T^n\right) D\left(x, Tx\right)\right] \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.2.6 untuk $\{\mathrm{Lip}\left(T^n\right)\}$ suatu barisan. Jika diketahui $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Lip}\left(T^n\right)$ konvergen maka

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Lip}\left(T^n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Lip}\left(T^{n-1}\right) = 0 \qquad (4.36)$$

Sehingga pada pertidaksamaan (4.35 diberi limit di kedua ruas untuk $n \to \infty$, berdasarkan persamaan (4.36) dan (4.29) diperoleh

$$\begin{aligned}
D\left(\omega(x), T\omega(x)\right) \leq\ & \lim_{n\to\infty} K[1 + K\mathrm{Lip}(T)]D\left(\omega(x), T^n x\right)\\
& + \lim_{n\to\infty} K^2\mathrm{Lip}\left(T\right)\mathrm{Lip}\left(T^{n-1}\right) D\left(x, Tx\right)\\
=\ & K[1 + K\mathrm{Lip}(T)]0 + K^2\mathrm{Lip}(T)(0)D(x, Tx)\\
=\ & 0 \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

Padahal dari Definisi 4.1.1 diketahui $D\left(\omega(x), T\omega(x)\right) \geq 0$ sehingga berdasarkan Teorema 2.2.1 diperoleh

$$D\left(\omega(x), T\omega(x)\right) = 0 \qquad (4.38)$$

Lalu dari (MT2) pada Definisi 4.1.1, persamaan (4.38) menjadi $T\omega(x) = \omega(x)$ untuk setiap $x \in X$. Dengan kalimat lain pernyataan tersebut menunjukkan keberadaan $\omega(x)$ adalah titik tetap pada T.

Terakhir, akan ditunkukkan bahwa pemetaan T tepat

mempunyai satu titik tetap (tunggal).
Asumsikan $\omega_1, \omega_2 \in X$ adalah titik tetap dari T sehingga $T\omega_1 = \omega_1$ dan $T\omega_2 = \omega_2$. Tinjau $T^n\omega_1$ dan $T^n\omega_1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
T^n\omega_1 &= (T^{n-1} \circ T)\omega_1 \\
&= T^{n-1}(T\omega_1) \\
&= T^{n-1}\omega_1 \\
&= T^{n-2}\omega_1 \\
&\vdots \quad \text{dengan induksi diperoleh} \\
&= T\omega_1 \\
&= \omega_1 \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned}
T^n\omega_2 &= (T^{n-1} \circ T)\omega_2 \\
&= T^{n-1}(T\omega_2) \\
&= T^{n-1}\omega_2 \\
&= T^{n-2}\omega_2 \\
&\vdots \quad \text{dengan induksi diperoleh} \\
&= T\omega_2 \\
&= \omega_2 \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, tinjau $D(\omega_1, \omega 2)$ sehingga berdasarkan persamaan (4.39), (4.40) dan Lemma 4.2.2 diperoleh

$$D(\omega_1, \omega_2) = D(T^n\omega_1, T^n\omega_2) \leq \text{Lip}(T^n)\, D(\omega_1, \omega_2) \qquad (4.41)$$

Kembali diberikan limit pada kedua ruas untuk $n \to \infty$, berdasarkan persamaan (4.25) diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} D(\omega_1, \omega_2) \leq \lim_{n\to\infty} \text{Lip}(T^n)\, D(\omega_1, \omega_2) = 0$$

Padahal dari Definisi 4.1.1 diketahui $D(\omega_1, \omega 2) \geq 0$ berdasarkan Teorema 2.2.1 didapat $D(\omega_1, \omega_2) = 0$
Berdasarkan (MT2) pada Definisi 4.1.1 berlaku $\omega_1 = \omega_2$ pernyataan tersebut tidak sesuai dengan asumsi(kontradiksi), dengan itu pernyataan tersebut mengatakan bahwa 2 titik tetap yang berbeda haruslah sama sehingga titik tetap pada pemetaaan T tepat mempunyai satu titik tetap(tunggal). ■

Selanjutnya, diberikan contoh pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik lengkap yang di konstruksi sesuai Teorema 4.1.10.

Contoh 4.2.4
Diberikan $E = \mathbb{R}^2$ dan cone $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, x, y \geq 0\}$ normal dengan konstan $M = 1$. Jika didefinisikan pemetaan $X = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \big| \, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, 0 \leq y \leq 1\}$, juga didefinisikan pemetaan $d_c : X \times X \to E$ dengan

$$d_c((x,0),(y,0)) = \left(\frac{4}{3}|x-y|, |x-y|\right)$$
$$d_c((0,x),(0,y)) = \left(|x-y|, \frac{2}{3}|x-y|\right)$$
$$d_c((x,0),(0,y)) = d_c((0,y),(x,0)) = \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y\right)$$

Dan didefinisikan pemetaan $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ dengan

$$\|(x,y)\| = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

dengan type-metrik $D(x,y) = \|d_c(x,y)\|$
maka (X, D) merupakan ruang type-metrik.
Lebih lanjut, Misalkan pemetaan $T : X \to X$ dengan $T((x,0)) = (0,x)$ dan $T((0,x)) = (\frac{1}{2}x, 0)$
maka T memenuhi sifat kontraktif

$$D(T(x_1,x_2), T(y_1,y_2)) \leq kD((x_1,x_2),(y_1,y_2))$$

untuk setiap $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ dengan konstan $k = \frac{3}{4} \in \mathbb{R}$ dan titik tetapnya yaitu $(0,0)$ tunggal di X.

Penyelesaian. Akan dibuktikan bahwa (X, D) merupakan ruang type-metrik. Berdasarkan Contoh 2.5.2 himpunan $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x, y \geq 0\}$ merupakan himpunan cone dan normal dengan konstan $M = 1$. Lalu berdasarkan Contoh 2.5.4, didapatkan d_c yang terdefinisi di atas merupakan metrik cone dan dari Contoh 2.4.3 pilih $n = 2$, fungsi $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dengan $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ untuk setiap $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mendefinisikan norma. Dari Teorema 4.1.10 diperoleh D merupakan ruang type-metrik. $\blacksquare$

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari hasil studi literatur dan penyelidikan yang telah dilakukan terkait konsep ruang type- metrik, keberadaan serta ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik, diperoleh beberapa kesimpulan, antara lain:

1. Setiap barisan konvergen di ruang type-metrik (X, D) limitnya tunggal.

2. Jika barisan $\{x_n\}$ di X konvergen di ruang type-metrik (X, D) maka barisan $\{x_n\}$ Cauchy di X.

3. Jika (X, d) ruang metrik lengkap maka (X, d) merupakan ruang type-metrik lengkap.

4. Pemetaan kontraktif pada ruang type-metrik lengkap menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap.

5.2 Saran

Terdapat beberapa hal yang belum diteliti lebih dalam terkait topik tugas akhir ini, sehingga diberikan beberapa saran untuk penelitian selanjutnya diantaranya:

1. Perlu diberikan contoh ruang type-metrik lengkap tetapi bukan merupakan ruang metrik lengkap.

2. Perlu diberikan analogi ruang metrik cone dengan ruang type-metrik.

3. Perlu diberikan contoh ruang type-metrik dimana X merupakan himpunan kompleks($\mathbb{C}$) atau himpunan fungsi-fungsi kontinu ($C([a,b])$).

DAFTAR PUSTAKA

Asadi, M., Vaezpour, S. M., Rhoades, B. dan Soleimani, H. (2012), 'Metrizability of cone metric spaces via renorming the Banach spaces', *J. Nonlinear Anal. Appl* **2012**.

Bartle, R. G. dan Sherbert, D. R. (2011), *Introduction to real analysis*, Vol. 4, Wiley New York.

Czerwik, S. (1998), 'Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces', *Atti Del Seminario Matematico E Fisico Universita Di Modena* **46**, 263–276.

Huang, L.-G. dan Zhang, X. (2007), 'Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings', *Journal of mathematical Analysis and Applications* **332**(2), 1468–1476.

Hussain, N. dan Shah, M. (2011), 'KKM mappings in cone b-metric spaces', *Computers & Mathematics with Applications* **62**(4), 1677–1684.

Jain, P. K. dan Gupta, V. P. (1986), *Lebesgue measure and integration*, Halsted Press.

Khamsi, M. (2010), 'Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings', *Fixed Point Theory and Applications* **2010**(1), 315–398.

Kreyszig, E. (1989), *Introductory functional analysis with applications*, Vol. 1, wiley New York.

Royden, H. L. dan Fitzpatrick, P. (1988), *Real analysis*, Vol. 198, Macmillan New York.

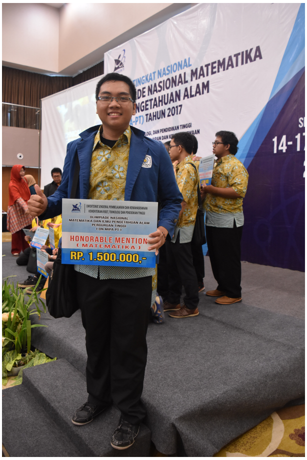
Soemarsono, A. R. (2016), 'Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial', Tugas Akhir. Departemen Matematika.

Sunarsini (2011), 'Diktat Kuliah Teori Ukuran dan Integral', *Surabaya: Jurusan Matematika ITS* .

Sunarsini, S., Yunus, M., Sadjidon, S. dan Zazilah, A. N. (2016), 'Pemetaan Kontraktif pada Ruang b-Metrik Cone $\mathbb{R}$ bernilai $\mathbb{R}^2$', *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications* **13**(2), 1–10.

Yunus, M. (2005), 'Modul Ajar Pengantar Analisis Fungsional', *Surabaya: Jurusan Matematika ITS* .

BIODATA PENULIS



Penulis bernama Dimaz Wisnu Adipradana, biasa dipanggil Uzu. Penulis dilahirkan di Sidoarjo, 7 Juni 1995. Penulis merupakan putra dari Ibu Ida Ayu Diani. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK (1999-2000), SD Sawunggaling VIII Surabaya (2001-2007), SMP Negeri 12 Surabaya (2007-2010), dan SMA Negeri 5 Surabaya (2010-2013). Kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya pada tahun 2013 dengan NRP 1213 100 041. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Analisis dan Aljabar. Penulis aktif dalam organisasi di lingkup jurusan Matematika ITS dalam bidang olimpiade dan mengajar, Dalam bidang olimpiade, penulis pernah menjadi staff departemen Sains dan Teknologi Himpunan Mahasiswa Matematika ITS (SAINSTEK HIMATIKA ITS) selama 2 tahun serta menjadi kepala divisi olimpiade departemen Sains, Terapan dan Keprofesian (SAINSTEK) HIMATIKA ITS selama 1 kepengurusan dan dalam Big Event pada Himatika ITS yaitu Ajang OMITS (Olimpiade Matematika ITS) Penulis pernah menjadi Ketua divisi tim pembuat soal OMITS dan pernah menjadi Tim Inti kepengurusan OMITS sebagai pembuat soal dan Dalam bidang mengajar penulis tercatat sebagai asisten dosen mata kuliah kalkulus selama 6 semester dan selama 5 semester menjadi koordinator asistensi kalkulus di ITS.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: *nagato.uzumaki*17@*yahoo.com*