



TESIS - SM142501

**ANALISIS BIFURKASI DAN EKSISTENSI  
*TRAVELLING WAVE* PADA MODEL  
PENYEBARAN VIRUS EBOLA**

M. NUR HAQQUL Q.  
NRP 1215 201 011

DOSEN PEMBIMBING:  
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.  
Dr. Hariyanto, M.Si.

PROGRAM MAGISTER  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2017



TESIS - SM 142501

**ANALISIS BIFURKASI DAN EKSISTENSI *TRAVELLING*  
WAVE PADA MODEL PENYEBARAN VIRUS EBOLA**

M. NUR HAQQUL Q.  
NRP 1215 201 011

Dosen Pembimbing:  
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.  
Dr. Hariyanto, M.Si.

PROGRAM MAGISTER  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2017





THESIS - SM 142501

**THE BIFURCATION AND TRAVELLING WAVE EXISTENCE  
ANALYSIS OF SPREADING VIRUS EBOLA MODEL**

M. NUR HAQQUL Q.  
NRP 1215 201 011

Supervisors:  
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.  
Dr. Hariyanto, M.Si.

MASTER'S DEGREE  
MATHEMATICS DEPARTMENT  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2017



Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (M.Si.)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Oleh:

M. NUR HAQQUL Q.  
NRP. 1215 201 011

Tanggal Ujian : 14 Juli 2017  
Periode Wisuda : September 2017

Disetujui oleh:

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.  
NIP. 19660414 199102 2 001

(Pembimbing I)

Dr. Hariyanto, M.Si.  
NIP. 19530414 198203 1 002

(Pembimbing II)

Dr. Dwi Ratna Sulistyningrum, S.Si, MT  
NIP. 19690405 199403 2 003

(Penguji)

Dr. Dra. Mardijah, MT  
NIP. 19670114 199102 2 001

(Penguji)

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si  
NIP. 19830517 200812 1 003

(Penguji)



Dekan FMIPA,

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
NIP. 19650605 199102 2 001



# ANALISIS BIFURKASI DAN EKSISTENSI *TRAVELLING WAVE* PADA MODEL PENYEBARAN VIRUS EBOLA

Nama Mahasiswa : M. Nur Haqqul Q.  
NRP : 1215 201 011  
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.  
2. Dr. Hariyanto, M.Si.

## ABSTRAK

Virus ebola pada mulanya diidentifikasi pada tahun 1976 di dekat sungai Ebola, Republik Demokratik Kongo. Penyebab penyebaran virus ebola disebabkan oleh kontak antar individu. Penyebaran virus ebola dinyatakan dalam bentuk model matematika untuk lebih memahami penyakit menular. Model matematika yang diperoleh memperlihatkan adanya kemungkinan perubahan antara stabil atau tidaknya model tersebut. Perubahan ini juga dinamakan suatu bifurkasi pada sistem. Selain itu, pergerakan populasi juga memungkinkan adanya penyebaran penyakit secara lebih meluas. Karena penyebaran ini, maka pengamatan mengenai eksistensi *travelling wave* pada sistem dapat dilakukan. Penelitian ini menghasilkan modifikasi model penyebaran virus ebola dengan dua titik tetap, yaitu  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$  dan  $(S^*, L^*, I^*, R^*)$ . Kestabilan sistem dianalisis berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari dua titik tetap tersebut. Selanjutnya konstruksi model *travelling wave* yang dilakukan menghasilkan kecepatan minimal pada kompartemen *latent L* dan terinfeksi *I*. Model penyebaran virus ebola yang diperoleh diselesaikan secara numerik menggunakan Runge Kutta orde empat. Penyelesaian numerik ini menunjukkan bahwa semakin besar *rate* transmisi virus ebola, maka semakin besar jumlah individu yang terinfeksi. Model *travelling wave* diselesaikan menggunakan metode beda hingga untuk selanjutnya disimulasikan dengan menggunakan parameter yang berbeda-beda. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa grafik *travelling wave* menghasilkan gelombang yang berbeda-beda berdasarkan nilai parameter yang digunakan. Pada grafik *travelling wave* ini juga menunjukkan bahwa penyebaran virus ebola dapat terjadi di tempat yang pada mulanya tidak terjadi *outbreak*.

**Kata kunci:** Virus Ebola, Bifurkasi, *Travelling wave*





# THE BIFURCATION AND TRAVELLING WAVE EXISTENCE ANALYSIS OF SPREADING VIRUS EBOLA MODEL

Name : M. Nur Haqqul Q.  
NRP : 1215 201 011  
Supervisors : 1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.  
2. Dr. Hariyanto, M.Si.

## ABSTRACT

Ebola originally identified in 1976 near the Ebola River in Democratic Republic of Congo. The cause of the spread of the Ebola virus is a contact between individuals. The using of mathematical models to better understand infectious disease has become a practice for many years. Observations on the model is useful to obtain a prediction and an ideal strategy in controlling the outbreak. The mathematical model obtained showed the possibility of change among a stable or unstable in the model. In addition, the movement of the population also allows the spread of the disease more widely. Because of that, observation about the existence of travelling wave on the system can be done. This research produces the modification of the ebola virus spreading model with two fixed points, i.e.  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$  and  $(S^*, L^*, I^*, R^*)$ . The stability of the system is analyzed based on the eigenvalues obtained from the two fixed points. Furthermore the construction of the travelling wave model resulted the minimum speed of latent  $L$  and infected  $I$  compartment. The obtained ebola virus spreading model was resolved numerically using fourth order Runge Kutta. This numerical settlement shows that the larger rate of the ebola virus transmission, gives the larger number of infected individuals. Travelling wave model is solved using a finite different method with different parameters. The results show that the graph travelling wave produces different waves based on the value of the parameters. In the graph travelling wave also shows that the spreading of ebola virus can occur in the place that did not happened before.

**Keywords:** Ebola, Bifurcation, Travelling wave



## **KATA PENGANTAR**

Alhamdulillahirrobbil'alamin segala puji bagi Allah SWT karena limpahan rahmat beserta kasih sayang serta petunjuk-NYA penulis dapat menyelesaikan Tesis ini yang diberikan judul:

### **ANALISISBIFURKASI DAN EKSISTENSI *TRAVELLING WAVE* PADA MODEL PENYEBARAN VIRUS EBOLA**

Sebagai salah satu syarat kelulusan program Magister Matematika ITS. Dalam penyusunan tesis ini penulis menyampaikan beribu ucapan terimakasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan penulisan ini. Jika tidak ada bantuan dari berbagai pihak tersebut, maka tesis ini tidak akan dapat diselesaikan dengan baik. Oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih terhadap pihak-pihak yang telah membantu sebagai berikut:

1. Ibu, Bapak selaku orang tua penulis yang banyak membantu dalam memberikan biaya, motivasi beserta doa yang berguna bagi penulis untuk menyelesaikan sekolah Magister di Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D, Selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember yang telah memberikan berbagai fasilitas yang sangat membantu kepada penulis dalam menyelesaikan Tesis ini.
3. Bapak Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T, Selaku Direktur Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
4. Ibu Prof.Dr.Erna Apriliani, M.Si, selaku pembimbing yang membantu menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang dihadapi penulis
5. Bapak Dr. HARIyanto,M.Si, selaku Dosen Pembimbing yang memberikan nasehat dan berbagai masukan bahkan ide kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan sekolah Magister di Institut Teknologi Sepuluh Nopember
6. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T, Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si, M.T, dan Dr. Dieky,S.Si, M.Si Selaku penguji tesis yang banyak memberikan saran sehingga tesis ini dapat diselesaikan dengan cukup baik.

7. Bapak Ibu dosen serta seluruh staf Tenaga Kependidikan jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember
8. Seluruh pihak yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan tesis ini.
9. Seluruh kawan-kawan yang memberikan motivasi yang mendukung dalam menyelesaikan penulisan ini

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan ini terdapat berbagai kekurangan dan kesalahan sehingga tulisan ini sangat jauh dari sempurna. Oleh karena itu dalam penulisan-penulisan selanjutnya penulis berharap kritik dan saran yang membangun kepada para pembaca agar penulisan selanjutnya menjadi lebih baik

Surabaya Agustus 2017

Penulis

## DAFTAR ISI

|   |      |
|---|------|
| HALAMAN JUDUL   | i    |
| LEMBAR PENGESAHAN                                       | v    |
| ABSTRAK   | vii  |
| ABSTRACT  | ix   |
| DAFTAR ISI  | xiii |
| DAFTAR GAMBAR   | xv   |
| DAFTAR SIMBOL   | xvii |
| BAB I     PENDAHULUAN                                   | 1    |
| 1.1 Latar Belakang . . . . .                            | 1    |
| 1.2 Rumusan Masalah . . . . .                           | 3    |
| 1.3 Batasan Masalah . . . . .                           | 3    |
| 1.4 Tujuan Penelitian . . . . .                         | 3    |
| 1.5 Manfaat Penelitian . . . . .                        | 3    |
| BAB II     TINJAUAN PUSTAKA                             | 5    |
| 2.1 Model Penyebaran Virus Ebola . . . . .              | 5    |
| 2.2 Kestabilan Sistem . . . . .                         | 8    |
| 2.2.1 Titik Tetap . . . . .                             | 8    |
| 2.2.2 $\omega$ -limit . . . . .                         | 9    |
| 2.2.3 Definisi stabil manifold . . . . .                | 9    |
| 2.2.4 Stabil <i>Lyapunov</i> . . . . .                  | 9    |
| 2.2.5 Titik Tetap <i>Hyperbolic</i> . . . . .           | 9    |
| 2.3 Bifurkasi . . . . .                                 | 10   |
| 2.4 <i>Travelling Waves</i> pada Suatu Sistem . . . . . | 11   |
| BAB III    METODE PENELITIAN                            | 15   |
| BAB IV    ANALISIS DAN PEMBAHASAN                       | 17   |
| 4.1 Modifikasi model penyebaran virus ebola . . . . .   | 17   |
| 4.2 Titik Tetap pada Sistem . . . . .                   | 22   |
| 4.3 Analisis Kestabilan Sistem . . . . .                | 25   |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 4.3.1 | Kestabilan pada Titik Tetap $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$ .....                  | 25 |
| 4.3.2 | Kestabilan untuk Titik Tetap $(S^*, L^*, I^*, R^*)$ .....                           | 31 |
| 4.4   | Bifurkasi Hopf pada Model Persebaran Virus Ebola .....                              | 36 |
| 4.5   | <i>Travelling Wave</i> pada Sistem .....  | 39 |
| 4.5.1 | Analisa Eksistensi <i>Travelling Wave</i> .....                                     | 41 |
| 4.5.2 | <i>Travelling wave</i> disekitar titik tetap $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$ ..... | 41 |
| 4.5.3 | <i>Travelling wave</i> disekitar titik tetap $(S^*, L^*, I^*, R^*)$ .....           | 43 |
| 4.6   | Simulasi .....  | 45 |
| BAB V | Kesimpulan dan Saran .....  | 61 |
| 5.1   | Kesimpulan .....  | 61 |
| 5.2   | Saran .....   | 63 |
|       | DAFTAR PUSTAKA .....  | 64 |

## DAFTAR GAMBAR

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Gambar 4.1  | Hasil Simulasi Pada Model Persebaran Virus Ebola pada Kondisi tak Stabil . . . . .                           | 48 |
| Gambar 4.2  | Hasil Simulasi Pada Model Persebaran Virus Ebola pada Kondisi Bifurkasi Hopf . . . . .                       | 49 |
| Gambar 4.3  | Trayektori Populasi $S$ dan $L$ Beserta Arah Potrait Fasenya .   | 50 |
| Gambar 4.4  | <i>Travelling Wave</i> di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Tidak Stabil . . . . .             | 52 |
| Gambar 4.5  | Gelombang <i>Travelling Wave</i> di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Tidak Stabil . . . . .   | 52 |
| Gambar 4.6  | <i>Travelling Wave</i> di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Stabil . . . . .                   | 53 |
| Gambar 4.7  | Gelombang <i>Travelling Wave</i> di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Stabil . . . . .         | 54 |
| Gambar 4.8  | <i>Travelling Wave</i> di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Bifurkasi Hopf . . . . .           | 55 |
| Gambar 4.9  | Gelombang <i>Travelling Wave</i> di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Bifurkasi Hopf . . . . . | 55 |
| Gambar 4.10 | <i>Travelling Wave L</i> di Sekitar Titik Endemik pada Kondisi Tidak Stabil . . . . .                        | 57 |
| Gambar 4.11 | Gelombang <i>travelling Wave L</i> di Sekitar Titik Endemik pada Kondisi Tidak Stabil . . . . .              | 58 |
| Gambar 4.12 | <i>Travelling Wave L</i> di Sekitar Titik Bebas Penyakit pada Kondisi Tidak Stabil . . . . .                 | 58 |
| Gambar 4.13 | Gelombang <i>Travelling Wave L</i> di Sekitar Titik Bebas Penyakit pada Kondisi Tidak Stabil . . . . .       | 59 |





## DAFTAR SIMBOL

|                   |   |  |
|-------------------|---|--|
| $S(t)$            | : | Jumlah populasi individu susceptible pada waktu $t$  |
| $L(t)$            | : | Populasi individu-individu <i>latent</i> pada waktu $t$  |
| $I(t)$            | : | Populasi dari individu-individu terinfeksi pada waktu $t$  |
| $R(t)$            | : | Jumlah populasi individu-individu yang mengalami proses penyembuhan                                      |
| $D(t)$            | : | Jumlah populasi individu-individu yang mengalami kematian  |
| $\beta$           | : | Rata-rata transmisi virus pada individu <i>susceptible</i>   |
| $p_\beta$         | : | Rata-rata infeksi dikarenakan kontak antar individu  |
| $c_\beta$         | : | Rata-rata kontak individu perkapita  |
| $p$               | : | Proporsi petugas kesehatan yang berasal dari individu <i>susceptible</i>                                 |
| $\alpha_L$        | : | Rata-rata terinfeksi petugas kesehatan yang mengalami kontak dengan individu <i>latent</i>               |
| $\alpha_I$        | : | Rata-rata terinfeksi petugas kesehatan yang mengalami kontak dengan individu terinfeksi                  |
| $\lambda$         | : | Proporsi kematian alami yang dialami individu <i>susceptible</i>   |
| $\phi$            | : | Rata-rata individu-individu <i>latent</i> yang memasuki kompartemen terinfeksi                           |
| $\xi$             | : | Rata-rata individu terinfeksi yang mengalami proses penyembuhan  |
| $\tau$            | : | Rata-rata individu terinfeksi yang mengalami kematian  |
| $\psi$            | : | Rata-rata kematian yang dialami individu <i>latent</i> tanpa didiagnosa                                  |
| $\pi$             | : | Rata-rata kelahiran pada suatu populasi  |
| $\nu$             | : | Rata-rata individu terinfeksi yang mengalami kematian saat dia berada pada masa penyembuhan              |
| $\kappa$          | : | Rata-rata individu terinfeksi yang memasuki kelas <i>susceptible</i>                                     |
| $N$               | : | Jumlah keseluruhan populasi yang bernilai konstan  |
| $x^*$             | : | Titik tetap  |
| $\dot{x}$         | : | Sistem persamaan differensial  |
| $\omega$          | : | Nilai eigen  |
| $\mathcal{J}$     | : | Fluks populasi   |
| $D$               | : | Konstanta difusifitas  |
| $D_L$             | : | Konstanta difusifitas pada kompartemen $L$   |
| $D_I$             | : | Konstanta difusifitas pada kompartemen $I$   |
| $c, c_L^*, c_I^*$ | : | Kecepatan minimal <i>travelling wave</i> (pada $L$ dan $I$ )   |
| $\nu$             | : | $[\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N}]S$                                 |
| $\delta$          | : | Nilai karakteristik  |
| $a$               | : | $[\nu + \beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi]k_1 + [\alpha_I\frac{S^*}{N}]k_2$ |



# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Virus ebola pertama kali ditemukan pada tahun 1976 di sekitar sungai Ebola, Republik Demokratik Kongo. Pada saat itu virus ebola telah menginfeksi setidaknya 280 orang pada area tersebut. Penanganan yang cukup serius baru dilakukan pada maret 2014 setelah adanya dampak yang begitu besar (Do, dkk., 2016). Pada 13 Desember 2015 telah dilaporkan bahwa wabah ebola telah menginfeksi 28.600 orang dengan lebih dari 11.000 orang meninggal terutama di Afrika Barat. Wabah tersebut juga terjadi di Italia, Spanyol, Inggris dan Amerika Serikat meskipun hanya sedikit yang menimbulkan korban jiwa. Pada saat ini wabah virus ebola telah dinyatakan oleh WHO sebagai wabah yang berbahaya. Tiga negara di Afrika Barat yaitu Guinea, Sierra, Leone dan Liberia sejauh ini telah mengalami dampak terbesar dengan sekitar 99,9 % dari semua kasus yang terjadi. Dalam hal ini, negara-negara tersebut memiliki jumlah korban yang cukup banyak dikarenakan infrastruktur dan sistem kesehatan yang kurang memadai pada daerah-daerah tersebut (Bonyah, dkk., 2016).

Penyebab banyaknya penyebaran virus ebola disebabkan oleh kontak antar individu. Virus tersebut memiliki masa inkubasi mencapai 2 hingga 21 hari dalam satu kali periode (Astacio, dkk., 1996). Dalam hal ini, diperlukan waktu sekitar delapan jam pada virus untuk melakukan replikasi pada dirinya. Replikasi tersebut dapat terjadi beberapa kali sebelum gejala pada individu muncul. Saat melakukan infeksi pada sel inangnya, ratusan hingga ribuan partikel virus baru kemudian dilepaskan selama periode tersebut sebelum sel inang mati. Gejala yang dapat terjadi dalam beberapa hari setelah transmisi virus meliputi demam tinggi, sakit kepala, nyeri otot, sakit perut, kelelahan, diare, sakit tenggorokan, cegukan, bintil merah pada kulit, mata merah, dan gatal, muntah darah, serta diare berdarah. Akibat belum ditemukannya obat ataupun vaksin pada virus ebola maka jumlah korban jiwa mencapai 50% hingga 90% (Ndanusa, dkk., 2015).

Penggunaan model matematika dalam memahami penyakit menular telah dilakukan selama bertahun-tahun. Pembentukan hipotesis mengenai masalah penyakit menular dapat diperoleh dengan mengamati data-data yang diperoleh beserta melakukan klarifikasi ukuran sampel yang optimal di lapangan. Selain

itu, model yang diperoleh memungkinkan para peneliti untuk mengamati efek dari mengubah parameter-parameter infektivitas, waktu inkubasi, dan waktu pemulihan dari penyakit beserta efek perubahan dari ukuran populasi, dan faktor-faktor lain yang menarik. Pengamatan tersebut dapat dilakukan dalam situasi yang berbeda-beda berdasarkan pemahaman pola jangka panjang dari penyakit. Melalui pengamatan tersebut maka prediksi dan strategi yang ideal untuk memperlambat penyebaran penyakit berdasarkan kesepakatan pada model maupun tempat dimana terjadinya wabah dapat diperoleh (Funk dan Wolfe, 2015). Model matematika yang digunakan kebanyakan merupakan model deterministik dalam sistem persamaan differensial biasa. Seperti pada Ndanusa, dkk. (2015) dimana dalam jurnal ini menggunakan sistem persamaan  $SLIR$  dengan  $S, L, I, R$  menyatakan jumlah individu *susceptible, latent, infected* dan *recovery*. Pada Do, dkk. (2016) jumlah populasi  $D$  (*death*) merupakan populasi yang diperhitungkan pada model dimana  $N$  menyatakan jumlah keseluruhan populasi.

Sampai saat ini, kebanyakan analisis dari suatu penelitian hanya melakukan pembahasan mengenai jumlah dari satu populasi di tempat tertentu tanpa memperhatikan pergerakan yang terjadi pada populasi tersebut. Pada kenyataannya populasi-populasi di dunia bisa melakukan penyebaran melebihi ruang lingkup yang biasa diasumsikan sampai saat ini. Konsep penyebaran tersebut harus ditentukan sedemikian hingga konsep tersebut bisa ditambahkan pada sistem. Sebagai contoh, jika jumlah suatu populasi telah memenuhi satu tempat tertentu, maka populasi itu akan menyebar ke tempat lain. Proses penyebaran tersebut dinamakan proses difusi (Brian, 2004). Penyebaran tersebut juga dapat diartikan sebagai suatu pergerakan dinamis yang dilakukan oleh individu-individu di satu populasi. Jika individu-individu tersebut bergerak secara dinamis, maka pergerakan tersebut akan bergantung pada kecepatan *travelling wave* (Hariyanto, 2014). Oleh karena itu, analisis terhadap existensi *travelling wave* perlu dilakukan untuk mengetahui penyebaran secara lebih meluas tersebut (Hariyanto, dkk., 2016).

Pada penelitian ini dilakukan pengamatan mengenai penyebaran wabah ebola menggunakan model yang telah dimodifikasi berdasarkan sumber-sumber terkait. Penelitian ini juga menekankan analisis kestabilan dan bifurkasi Hopf yang terjadi pada model. Selain itu, analisis *travelling wave* yang terjadi pada model tersebut juga perlu dilakukan karena adanya gerakan yang terjadi pada suatu populasi. Penyelesaian secara numerik juga dilakukan pada model penyebaran virus ebola dengan menggunakan Runge Kutta orde 4. Model *travelling wave* yang telah diperoleh juga akan diselesaikan menggunakan metode beda hingga. Parameter-parameter yang digunakan pada proses numerik tersebut, dalam hal ini akan

diperoleh berdasarkan sumber-sumber terkait.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang tersebut rumusan masalah yang dibentuk pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis kestabilan yang terjadi pada sistem?
2. Bagaimana eksistensi *travelling wave* pada sistem setelah dilakukan analisis terhadap model?
3. Bagaimanakah dinamika yang terjadi pada sistem berdasarkan hasil simulasi yang diperoleh?

## **1.3 Batasan Masalah**

Batasan pada penelitian ini dibagi menjadi dua bagian sebagai berikut.

1. Penelitian dilakukan dengan menganalisa terjadinya bifurkasi pada model
2. Selanjutnya analisis mengenai eksistensi *travelling wave* dilakukan setelah membentuk model *travelling wave* pada sistem.

## **1.4 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah tersebut maka tujuan yang dibentuk pada penelitian ini adalah:

1. Mengetahui parameter-parameter yang mempengaruhi kestabilan sistem.
2. Selanjutnya eksistensi akan adanya *travelling wave* dapat diketahui setelah melakukan analisis pada model *travelling wave* tersebut.
3. Simulasi numerik yang dilakukan bertujuan untuk memberikan kemudahan dalam mengamati dinamika sistem.

## **1.5 Manfaat Penelitian**

Setelah mengetahui tujuan yang diberikan maka diharapkan penelitian ini mampu memberikan pengetahuan mengenai nilai-nilai yang menjadi parameter perubahan kestabilan pada sistem. Sedemikian juga dengan melakukan analisis tersebut jenis-jenis bifurkasi yang dapat terjadi pada sistem dapat diketahui. Pengamatan tersebut berguna untuk mengetahui kejadian-kejadian pada penyebaran ebola berdasarkan analisis yang dilakukan. Pada bagian yang lain dinamika yang terjadi pada sistem juga dapat diketahui dengan melakukan analisis *travelling wave* dalam

sistem. Sehingga penyebaran infeksi ebola secara lebih meluas dapat diketahui dengan mengamati eksistensi *travelling wave* tersebut. Selain pada hal tersebut hasil simulasi yang diberikan juga diharapkan mampu mempermudah dalam menjelaskan dinamika yang terjadi pada sistem.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab ini dijelaskan beberapa teori yang digunakan dalam penelitian. Kajian pustaka mengenai penelitian yang berkaitan model matematika penyebaran virus ebola, bifurkasi maupun masalah kestabilan sistem diberikan pada bab ini sebagai sumber yang akan membantu dalam penyelesaian penelitian tersebut.

#### 2.1 Model Penyebaran Virus Ebola

Pada model yang pertama, dinamika penyakit dibentuk kedalam empat diagram *kompartement* dengan menggunakan model standar SEIR. Pada model tersebut empat subpopulasi utama yang akan digunakan adalah populasi *susceptible*, *latent*, populasi orang-orang terinfeksi dan populasi orang-orang yang mengalami penyembuhan karena infeksi (*recovery*). Pada Persamaan 2.1 terdapat pernyataan  $\alpha SI$  yang mengindikasikan bahwa jumlah populasi susceptible berkurang karena adanya infeksi yang terjadi padanya dengan selanjutnya akan memasuki kompartemen *latent*.  $\kappa R$  dalam hal ini menyatakan jumlah individu yang mengalami proses penyembuhan sedemikian hingga individu tersebut dapat memasuki kompartemen susceptible. Pada individu *latent* yang memasuki kompartemen terinfeksi selanjutnya memiliki jumlah  $\beta L$ . Namun, pada kompartemen *latent* terdapat pengurangan atas populasi tersebut dengan jumlah sebesar  $rL$  dengan individu-individu *latent* tersebut memasuki populasi *recovery*. Pada individu terinfeksi kematian yang dialami olehnya akibat infeksi memiliki jumlah  $dI$  sedangkan jumlah individu yang terinfeksi dan mengalami proses penyembuhan didefinisikan sebagai  $\pi I$ . Model SEIR ini dikonstruksikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \alpha SI - \mu S + \kappa R \\ \frac{dL}{dt} &= \alpha SI - (\mu + \beta)L - rL \\ \frac{dI}{dt} &= \beta L - (\pi + \mu + d)I \\ \frac{dR}{dt} &= \pi I - (\kappa + \mu)R + rL\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan  $N = S + L + I + R$ . Parameter-parameter ataupun variabel yang digunakan pada model ini adalah

$S(t)$ : Merupakan jumlah populasi individu susceptible pada waktu  $t$



$L(t)$ : Populasi individu-individu *latent* yang terinfeksi pada waktu  $t$

$I(t)$ : Populasi dari individu-individu terinfeksi pada waktu  $t$

$R(t)$ : Merupakan populasi individu-individu yang mengalami proses penyembuhan atas infeksi yang diderita.

$\alpha$ : Rata-rata individu *susceptible* yang memasuki *kompartment* terinfeksi secara *latent*

$\beta$ : Rata-rata individu *latent* yang telah mengalami infeksi secara aktif

$\pi$ : Rata-rata individu terinfeksi yang mengalami proses penyembuhan dari penyakit

$\kappa$ : Besaran yang menyatakan tingkat kesembuhan total individu terinfeksi setelah menjalani proses penyembuhan

$\mu$ : Rata-rata kematian alami yang terjadi pada tiap individu di masing-masing *kompartment*

$d$ : Rata-rata kematian yang diakibatkan oleh virus ebola

$\Lambda$ : Merupakan rata-rata kelahiran alami yang memasuki *kompartment susceptible*

$r$ : Adalah rata-rata individu *latent* yang mengalami proses penyembuhan

$N$ : Jumlah keseluruhan populasi

(Kalu, dkk., 2015)

Pada penelitian yang lain, model penyebaran virus ebola dapat dibentuk atas lima kompartemen. Pada model tersebut asumsi atas kelahiran dan kematian alami yang dialami oleh tiap individu dihilangkan. Kompartemen pada model dibagi menjadi lima kelas yang terdiri dari  $S$  adalah jumlah individu *susceptible* pada waktu  $t$ ,  $L$  adalah jumlah individu dimana individu-individu tersebut telah mengalami gejala-gejala akan adanya penyakit namun belum sepenuhnya dapat didiagnosis jika telah mengalami infeksi. Kemudian terdapat kelas  $I$  dimana kelas tersebut menyatakan jumlah dari individu yang telah didiagnosa terinfeksi virus ebola.  $R$  adalah individu yang mengalami penyembuhan dari virus beserta  $D$  adalah kelas yang menyatakan jumlah individu yang mengalami kematian akibat virus ebola saat waktu  $t$  dimana  $N = S + L + I + R + D$ .

Besaran transmisi dalam hal ini dinyatakan kedalam  $\beta(1-p)S/N$  dengan  $\beta$  merupakan rata-rata transmisi virus yang diakibatkan adanya kontak antara individu *susceptible* dan terinfeksi. Berdasarkan keterangan sebelumnya,  $p$  merupakan proporsi petugas kesehatan yang berada pada kelas *susceptible*, sehingga  $1-p$  dapat diartikan sebagai individu-individu pada kelas *susceptible* yang bukan petugas kesehatan. Pernyataan lain yaitu  $\beta(1-p)S\frac{L}{N}$  merupakan jumlah individu *susceptible* yang mengalami infeksi sehingga memasuki kompartemen *latent* dikarenakan adanya kontak dengan individu *latent*. Jumlah dari petugas kesehatan yang mengalami infeksi karena kontak individu *latent* dengan *susceptible* yakni  $p\alpha_L L\frac{S}{N}$ . Pada model kedua ini juga terdapat pernyataan  $p\alpha_I I\frac{S}{N}$  yang merupakan jumlah individu *susceptible* dari petugas kesehatan yang memasuki kompartemen terinfeksi karena kontak individu terinfeksi dengan individu *susceptible* tersebut. Jumlah individu *susceptible* dapat berkurang karena kontak dengan individu yang mati akibat penyakit yang dinyatakan kedalam  $\lambda S\frac{D}{N}$  sedemikian hingga individu tersebut memasuki kelas *latent*. Pernyataan lain  $\phi L$  adalah jumlah individu *latent* yang benar-benar didiagnosis terinfeksi. Rata-rata individu terinfeksi yang mengalami penyembuhan adalah  $\xi$  dan kematian yang dialami individu tersebut memiliki jumlah sebesar  $\tau I$ . Namun pada individu *latent* juga memiliki kemungkinan untuk meninggal sebelum ia terinfeksi dalam hal ini sebanyak  $\psi L$ . Pada model ini juga diberikan kondisi awal pada model 2.2 seperti yang diberikan oleh Tae Sug Do pada jurnalnya adalah  $S(0) = N - 1$  dengan  $L(0) = 1$  beserta  $I(0) = R(0) = D(0) = 0$ . Dalam hal ini jumlah keseluruhan populasi beserta model penyebaran virus yang digunakan dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta(1-p)S\frac{L}{N} - p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N} - \lambda S\frac{D}{N} \\
\frac{dL}{dt} &= \beta(1-p)S\frac{L}{N} + p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N} + \lambda S\frac{D}{N} - \phi L - \psi L \\
\frac{dI}{dt} &= \phi L - \xi I - \tau I \\
\frac{dR}{dt} &= \xi I \\
\frac{dD}{dt} &= \psi L + \tau I
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Dalam hal ini  $\beta = \rho_\beta c_\beta$  dengan  $\rho_\beta$  merupakan rata-rata terinfeksi individu *susceptible* saat melakukan kontak dengan individu terinfeksi dan  $c_\beta$  adalah rata-rata kontak perkapita. Parameter-parameter yang digunakan pada model persebaran virus tersebut adalah

- $\beta$ : Rata-rata transmisi virus pada individu susceptible
- $p$ : Proporsi petugas kesehatan yang berasal dari individu susceptible
- $\alpha_L$ : Rata-rata terinfeksi petugas kesehatan yang mengalami kontak dengan individu *latent*
- $\alpha_I$ : Rata-rata terinfeksi petugas kesehatan yang mengalami kontak dengan individu terinfeksi
- $\lambda$ : Proporsi terinfeksi individu *susceptible* yang melakukan kontak dengan korban meninggal akibat infeksi
- $\phi$ : Rata-rata individu-individu dimana ia yang berada pada kelas *latent* dan terinfeksi secara asimtomatik kemudian dilakukan isolasi sebelum kematian terjadi
- $\xi$ : Merupakan rata-rata individu terinfeksi yang mengalami proses penyembuhan akibat penyakit
- $\tau$ : Rata-rata individu terinfeksi yang mengalami kematian.
- $\psi$ : Rata-rata kematian yang dialami individu *latent* tanpa didiagnosa terinfeksi dan tanpa adanya isolasi pada individu tersebut
- $N$ : Jumlah keseluruhan populasi yang bernilai konstan

(Do, dkk., 2016)

## 2.2 Kestabilan Sistem

Pada subbab ini akan diberikan diberikan definisi-definisi mengenai titik tetap dan jenis-jenis kestabilan yang mendukung penelitian.

### 2.2.1 Titik Tetap

Suatu titik  $x^*$  dinamakan titik tetap pada sistem  $\bar{x} = F(x)$  jika memenuhi  $F(x^*) = 0$ . Solusi yang berada pada titik tetap memiliki kecepatan nol, sehingga diperoleh  $\phi(t; x^*) = x^*$  untuk semua  $t$  dan  $\frac{d}{dt}\phi(t; x_0) = x_0$  Dalam logika sederhana suatu titik dinamakan titik equilibrium dalam hal ini dikarenakan sistem tersebut berada dalam keseimbangan sedemikian hingga tidak terjadi perubahan nilai pada sistem tersebut (Robinson, 2012).

### 2.2.2 $\omega$ -limit

Suatu titik  $q$  dinamakan titik  $\omega$ -limit pada trayektori  $x_0$  sedemikian hingga  $\phi(t; x_0)$  mendekati nilai  $q$  untuk  $t$  mendekati tak hingga. Dalam hal ini jika  $\|\phi(t; x_0) - x^*\| \rightarrow 0$  untuk  $t \rightarrow \infty$ , maka titik  $x^*$  adalah satu-satunya titik  $\omega$ -limit pada  $x_0$ . jika terdapat terdapat lebih dari satu untuk titik  $\omega$ -limit pada  $x_0$ , maka himpunan titik-titik  $\omega$ -limit yang dinotasikan sebagai  $\omega(x_0)$  dinamakan himpunan  $\omega$ -limit (Robinson, 2012).

### 2.2.3 Definisi stabil manifold

Untuk suatu titik tetap  $x^*$ , suatu stabil manifold  $W^S(x^*)$  adalah himpunan setiap titik dimana titik-titik tersebut mendekati titik tetap dengan  $t$  mendekati positif tak hingga yaitu

$$W^S(x^*) = \{p_0 : \phi(t; p_0) \rightarrow x^*, t \rightarrow \infty\} = \{p_0 : \omega(p_0) = x^*\} \quad (2.3)$$

Pada konteks ini jika orbit pada himpunan tersebut konvergen pada suatu titik tetap  $x^*$  yang tunggal dengan  $t$  mendekati tak hingga, maka himpunan  $\omega$ -limit akan sama dengan  $\omega(p_0) = x^*$ . Jika stabil manifold adalah himpunan terbuka maka  $W^S(x^*)$  dinamakan cekungan tarik (*the basin of attraction*) pada  $x^*$  (Robinson, 2012).

### 2.2.4 Stabil Lyapunov

Suatu titik tetap  $x^*$  dinamakan stabil Lyapunov sedemikian hingga solusi  $\phi(t; x_0)$  mendekati  $x^*$  untuk setiap  $t \geq 0$  jika sebuah nilai awal  $x_0$  berada cukup dekat dengan titik tetap  $x^*$ . Dalam hal ini,  $L$ -stabil juga dapat dituliskan yakni untuk suatu titik tetap  $x^*$  maka berlaku, jika setiap  $\epsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian hingga untuk  $\|x_0 - x^*\| < \delta$  maka  $\|\phi(t; x_0) - x^*\| < \epsilon$  untuk  $t \geq 0$  (Robinson, 2012).

### 2.2.5 Titik Tetap Hyperbolic

Sebuah titik tetap disebut hiperbolik, jika untuk setiap titik tetap tidak memiliki nilai eigen yang bernilai nol pada bagian realnya pada sistem persamaan differensial linier yang diberikan.

#### **Teorema 2.2.1.** (Robinson, 2012)

*Diberikan suatu sistem persamaan differensial yaitu  $\dot{x} = Ax$  sehingga berlaku sifat-sifat sebagai berikut:*

- a* Jika untuk setiap nilai eigen  $\lambda$  memiliki nilai negatif pada bagian realnya, maka titik awal adalah stabil asimptotik. Titik-titik yang stabil, titik-titik stabil menurun, dan stabil foci semuanya merupakan stabil asimptotik.

- b* Jika salah satu nilai eigen  $\lambda$  memiliki nilai positif pada bagian realnya, maka titik awal adalah tak stabil. Titik-titik saddle, titik-titik yang tak stabil, titik-titik yang tak stabil menurun, dan tak stabil foci semuanya merupakan tak stabil. Suatu titik saddle memiliki garis yang menarik dan menolak pada bagian yang lainnya. Namun, titik saddle tetap merupakan titik yang tak stabil.
- c* Pada dua dimensi jika setiap nilai eigen murni bernilai imajiner  $\pm i\beta$ , Maka titik awal memiliki  $L$ -stable tapi tidak stabil asimptotik
- d* Pada dua dimensi jika salah satu nilai eigen bernilai 0 dan yang lain memiliki nilai eigen yang negatif, maka titik awal memiliki  $L$ -stable namun tidak stabil asimptotik.

### 2.3 Bifurkasi

Pada subbab ini akan diberikan penjelasan mengenai definisi yang berhubungan dengan bifurkasi pada titik tetap. Suatu titik tetap  $(x, \mu) = (0, 0)$  dikatakan mengalami bifurkasi pada  $\mu = 0$  jika aliran untuk nilai  $\mu$  disekitaran 0 beserta  $x$  disekitar 0 tidak sama secara kualitatif dengan aliran yang berada dekat dengan  $x = 0$  pada  $\mu = 0$  (Wiggins, 2003).

Bifurkasi dibagi menjadi beberapa jenis. Bifurkasi yang pertama yakni bifurkasi *saddle node*. Bifurkasi ini merupakan tabrakan dan hilangnya dua kesetimbangan pada suatu sistem dinamis. Dalam sistem autonomus, hal tersebut terjadi ketika suatu titik kritis memiliki satu nilai eigen yang bernilai nol. Fenomena ini juga disebut batas titik bifurkasi. Jika pada suatu titik tetap dengan nilai-nilai yang memungkinkan pada titik tetap tersebut, pada satu nilai memiliki sifat yang stabil sedangkan yang lain tidak stabil. Bifurkasi tersebut menyebabkan terjadinya perubahan kestabilan pada suatu titik tetap tertentu. Dalam hal ini, bifurkasi tersebut dinamakan bifurkasi transkritikal. Bifurkasi transkritikal juga dapat berlaku pada titik-titik tetap yang lain pada sistem yang dianalisa (Karaaslanlı, 2012). Bifurkasi yang lain yaitu bifurkasi yang terjadi apabila salah satu bagian dari titik tetap memberikan sifat-sifat kestabilannya pada dua bagian setelah atau sebelum titik bifurkasi. Bifurkasi ini dinamakan bifurkasi pitchfork. Jika *pitchfork bifurcation* terjadi setelah titik bifurkasi maka bifurkasi tersebut dinamakan bifurkasi superkritikal. Bifurkasi *pitchfork* dinamakan subkritikal jika terdapat titik tetap yang nontrivial untuk nilai-nilai parameter lebih kecil jika dibandingkan dengan nilai bifurkasi yang terjadi. Bifurkasi yang lain yakni bifurkasi Hopf seperti yang dijelaskan Wei-Min Liu dalam jurnalnya yang berjudul "Criterion of Hopf Bifurcations Without Using Eigenvalues", memberikan kondisi bifurkasi pada hasil peneli-

tianya pada teorema berikut:

**Teorema 2.3.1.** (Liu, 1994)

Asumsikan terdapat suatu kurva halus dari titik tetap  $(x(\mu), \mu)$  dengan  $x(\mu_0) = x_0$  pada sistem  $\dot{x} = f_\mu(x)$ . Kondisi yang diberikan pada sistem tersebut yaitu:

A1 Jacobian matriks  $D_x f_{\mu_0}(x_0)$  memiliki sepasang nilai eigen murni imajiner dan nilai eigen lainnya adalah negatif. Maka dalam hal ini terdapat kurva halus dari titik tetap  $(x(\mu), \mu)$  dengan  $x(\mu_0) = x_0$ . Nilai-nilai eigen  $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$  dari  $J(\mu) = D_x f_\mu(x(\mu))$  dalam hal ini akan memiliki nilai eigen murni imajiner pada  $\mu = \mu_0$ . Bersamaan dengan

A2  $d(R_e(\lambda(\mu_0)))/d\mu \neq 0$ , Maka terdapat simple bifurkasi Hopf pada sistem  $\dot{x} = f_\mu(x)$ .

Dalam hal ini, berdasarkan sistem  $\dot{x} = f_\mu(x)$  maka akan diperoleh polinomial karakteristik atas Jacobi  $J(\mu)$  dengan

$$p(\lambda; \mu) = \det(\lambda I_n - J(\mu)) = p_0(\mu) + p_1(\mu)\lambda + p_2(\mu)\lambda^2 + \dots + p_n(\mu)\lambda^n \quad (2.4)$$

Oleh karena itu, untuk memenuhi kondisi A1 dan A2 maka harus berlaku persamaan sebagai berikut:

$$B1 \quad p_0(\mu_0) > 0, D_1(\mu_0) > 0, \dots, D_{n-2}(\mu_0) > 0, D_{n-1}(\mu_0) = 0$$

$$B2 \quad dD_{n-1}(\mu_0)/d\mu \neq 0$$

dengan

$$J_n(\mu) = \begin{pmatrix} p_1(\mu) & p_0(\mu) & \dots & 0 \\ p_3(\mu) & p_2(\mu) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2n-1}(\mu) & p_{2n-2}(\mu) & \dots & p_n(\mu) \end{pmatrix}$$

Dalam hal ini,  $D_1 = \det(J_1(\mu)) = p_1(\mu)$  beserta

$$D_2(\mu) = \det(J_2(\mu)) = \det \begin{pmatrix} p_1(\mu) & p_0(\mu) \\ p_3(\mu) & p_2(\mu) \end{pmatrix}$$

dan seterusnya.

## 2.4 Travelling Waves pada Suatu Sistem

Solusi *Travelling wave* menurut jurnal yang dituliskan oleh Haitao Fan dan Xiao-Biao Lin adalah suatu orbit heteroklinik yang memiliki kecepatan sebagai

parameternya. Dalam hal ini setelah menganalisa kestabilan lokal maupun kestabilan *manifold* dari titik-titik tetap yang diperoleh maka dapat ditunjukkan bahwa setidaknya terdapat satu orbit tersebut yang menghubungkan antara ketidakstabilan *manifold* pada satu titik tetap dan kestabilan manifold pada titik yang lain. Pada *literature* tersebut metode ini dinamakan metode *shooting* (Fan dan Lin, 2012).

Sebagai contoh pada suatu model *prey-predator* yang diberikan oleh Brian Kim pada sebuah artikelnya yang berjudul *Computing Traveling-Wave Front Solutions in a Difusive Predator-Prey Model* yakni dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= au\left(1 - \frac{u}{K} - buw\right) \\ \frac{dw}{dt} &= -ew + f uw\end{aligned}\tag{2.5}$$

dengan  $u$  adalah jumlah mangsa dan  $w$  adalah jumlah predator dengan  $a, b, e, f$  adalah konstanta positif. Pada sistem tersebut jelas bahwa terdapat tiga titik kritis atasnya. Titik yang pertama adalah  $(0, 0)$  yang berarti bahwa tidak ada satupun spesies dari populasi tersebut. Titik kritis yang kedua adalah  $(K, 0)$ . Pada titik tersebut dapat dilihat bahwa mangsa memiliki jumlah yang maksimal dikarenakan tidak adanya populasi predator yang memangsanya. Titik kritis yang terakhir yaitu titik dimana kedua populasi tidak berjumlah 0. Titik tersebut mengindikasikan bahwa baik mangsa maupun predator tidak mengalami kepunahan yaitu  $\frac{e}{f}, \frac{a}{b}\left(1 - \frac{e}{fK}\right)$ .

Pada model 2.5 analisa dilakukan hanya pada jumlah dari suatu populasi baik dari *prey* maupun *predator*. Pada kenyataannya, keseluruhan dari populasi tersebut memiliki distribusi dalam suatu ruangan tertentu. Sebagai contoh, saat jumlah suatu populasi telah memenuhi satu tempat tertentu, maka untuk memaksimalkan pertumbuhannya populasi tersebut akan berpindah ke tempat lain. Proses tersebut dinamakan dengan proses difusi dari suatu populasi. Dalam hal ini pada model *prey-predator* yang diberikan tersebut digunakan bentuk difusi yang dikenal sebagai *Fickian diffusion*. Pada difusi ini fluks dari populasi dinyatakan sebagai  $J$  yang menyatakan jumlah proporsional dari suatu konsentrasi tertentu. Pada satu dimensi berlaku

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x}\tag{2.6}$$

dengan  $c(x, t)$  menyatakan konsentrasi dari suatu spesies dan  $D$  menyatakan tingkat diffusifitasnya. Sedemikian hingga berdasarkan persamaan tersebut diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= -\frac{\partial J}{\partial x} \\ &= D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Substitusi bentuk diffusi tersebut pada persamaan *prey-predator* 2.5 maka diperoleh bentuk sistem persamaan *prey-predator* dalam bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned}u_t &= D_1 u_{xx} + au\left(1 - \frac{u}{K} - buw\right) \\ w_t &= D_w w_{xx} - ew + fuw\end{aligned}\quad (2.8)$$

Pembentukan model tersebut kedalam bentuk yang lebih sederhana dengan cara membentuk parameter-parameter non dimensional. Bentuk tersebut memiliki dua keuntungan utama yaitu yang pertama bentuk tersebut mengurangi jumlah parameter yang digunakan saat menganalisa sistem. Keuntungan yang kedua yaitu hubungan-hubungan antara parameter-parameter ataupun hubungan yang lain menjadi penting dalam hal ini. Penyederhanaan yang dilakukan pada bentuk diffusi tersebut akan menghasilkan

$$\begin{aligned}U_t &= DU_{xx} + U(1 - U - W) \\ W_t &= W_{xx} + \alpha W(U - \beta)\end{aligned}\quad (2.9)$$

Dalam hal ini,  $U = \frac{u}{K}$ ,  $W = \frac{b}{a}w$ ,  $t' = at$ ,  $x' = \frac{x}{\sqrt{D_2/a}}$ ,  $D = \frac{D_1}{D_2}$ ,  $\alpha = \frac{fK}{a}$  dan  $\beta = \frac{e}{fK}$  yang untuk selanjutnya tanda ' pada  $t$  dan  $x$  dapat dihilangkan. Tahap selanjutnya, diambil asumsi penyelesaian atas bentuk diffusif ini membentuk suatu rambatan gelombang, sehingga dapat dibuat asumsi bahwa pada bentuk tersebut terdapat solusi yang membentuk persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}U(t, x) &= u(x + ct) \\ W(t, x) &= w(x + ct)\end{aligned}\quad (2.10)$$

dengan  $c$  adalah kecepatan rambatan gelombang. Jika  $s = x + ct$  maka dengan menggunakan aturan rantai dapat diperoleh persamaan yaitu

$$\begin{aligned}cu' &= Du'' + u(1 - u - w) \\ cw' &= w'' + \alpha w(u - \beta)\end{aligned}\quad (2.11)$$



dengan ' adalah  $\frac{d}{ds}$ . Pada tahap terakhir akan diperoleh sistem persamaan differensial orde pertama dengan melakukan penyederhanaan pada persamaan tersebut sedemikian hingga diperoleh

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= \frac{c}{D}v - \frac{1}{D}u(1 - u - w) \\ w' &= z \\ z' &= cz - \alpha w(u - \beta) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Bentuk *travelling waves* tersebut dapat diselesaikan seperti menyelesaikan suatu sistem persamaan differensial orde satu. Dalam hal ini sistem dengan bentuk *travelling waves* tersebut harus memiliki kondisi yaitu  $u(-\infty) = 1$ ,  $w(-\infty) = 0$ ,  $u(+\infty) = \beta$  dan  $w(+\infty) = 1 - \beta$  (Brian, 2004).

**Definisi 2.4.1.** (Hariyanto, dkk., 2016)

*Sebuah solusi dari travelling wave front yang memiliki kecepatan  $c$  dengan model pada Persamaan (2.9) merupakan penyelesaian dengan bentuk  $u(x + ct)w(x + ct)$  yang berhubungan dengan titik endemik pada sistem sedemikian hingga*

$$\lim \inf(u, w) = (u^*, w^*) \tag{2.13}$$

**Teorema 2.4.1.** (Hariyanto, dkk., 2016)

*Jika dalam hal ini diberikan kecepatan travelling wave front yakni  $c^*$  adalah kecepatan minimal untuk setiap  $c \geq c^*$  maka sistem nonlinear untuk model memiliki penyelesaian travelling wave front tak menaik  $(u(x + ct), w(x + ct))$  dimana  $c$  memenuhi (2.11).*

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan penulisan. Bermula dari tahap awal yakni tahap pencarian *study* literatur hingga tahap akhir yaitu tahap pengambilan kesimpulan, pada masing-masing bagian tersebut juga akan dijelaskan mengenai hal-hal yang akan dilakukan dalam penyelesaian penelitian. Dalam hal ini, langkah-langkah tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut :

#### 1. Studi literatur

Pada tahap ini akan dilakukan identifikasi permasalahan pada penelitian tersebut. Pencarian *study* literatur yang mendukung penyelesaian dari permasalahan pada tahap ini akan dilakukan. Pembelajaran atas literatur tersebut akan berguna dalam proses pemahaman model penyebaran virus ebola sehingga dapat mendukung analisis-*analisis* yang dilakukan pada sistem.

#### 2. Modifikasi model penyebaran virus ebola

Tahap ini akan memberikan modifikasi model penyebaran virus ebola yang didasarkan atas artikel-artikel yang mendukung dalam membentuk model pada penelitian ini.

#### 3. Analisis kestabilan pada model .

Pada tahap ini akan dilakukan analisis kestabilan pada model penyebaran virus ebola. Jika model yang digunakan adalah model nonlinear maka sebelum melakukan proses analisa akan dilakukan pelinearan persamaan terlebih dahulu. Setelah itu, Pencarian nilai eigen yang sesuai dengan model sedemikian hingga analisa kestabilan dapat dilakukan pada model yang telah dilinearkan.

#### 4. Analisis Bifurkasi pada Sistem

Setelah dilakukan analisa kestabilan pada sistem, maka pada tahap ini analisa mengenai bifurkasi pada sistem akan dilakukan. Analisa dilakukan dengan mengamati parameter-parameter yang digunakan pada model. Analisis yang dilakukan pada parameter-parameter dapat memberikan kesimpulan

mengenai jenis-jenis bifurkasi pada model dan bagaimana bifurkasi berlaku akan dapat disimpulkan pada analisa.

5. Pembentukan model *Travelling Wave* pada Sistem

Selanjutnya akan dibentuk suatu konstruksi model berdasarkan *travelling wave* yang terjadi pada sistem. Jelas sebelum melakukan konstruksi tersebut pengamatan mengenai analisa eksistensi akan adanya *travelling wave* pada sistem harus dilakukan. Hal tersebut dilakukan agar menjadi jaminan adanya *travelling wave* tersebut.

6. Analisis eksistensi *Travelling Wave*

Analisis eksistensi ini dilakukan guna membuktikan akan adanya *travelling wave* pada sistem. Hal tersebut juga dilakukan guna mengetahui seberapa cepat penyebaran dari virus ebola.

7. Simulasi numerik

Simulasi numerik dilakukan guna mempermudah untuk melakukan pengamatan mengenai dinamika sistem. Simulasi ini akan dilakukan secara numerik pada model dengan menggunakan *software* MATLAB. Jadi setelah melakukan simulasi pada tahap ini maka dapat diambil beberapa kesimpulan berdasarkan hasil simulasi yang diperoleh.

8. Pengambilan kesimpulan

Pada tahap ini setelah mengetahui hasil simulasi maka penarikan kesimpulan dapat dilakukan. Kesimpulan tersebut juga akan didasarkan pada hasil analisa yang diperoleh. Untuk selanjutnya akan dibuat laporan berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan.

## BAB IV

### ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dilakukan pembahasan mengenai modifikasi model penyebaran virus ebola, titik tetap, linearisasi, kestabilan hingga pembentukan *travelling waves* pada sistem. Setelah melakukan analisa dinamika sistem, simulasi akan dilakukan dengan melakukan langkah-langkah numerik pada model guna mempermudah dalam melakukan pengamatan pada sistem penyebaran virus ebola.

#### 4.1 Modifikasi model penyebaran virus ebola

Pada penelitian ini model penyebaran virus yang digunakan adalah model yang digunakan oleh Kalu A.U, Agbanyim Akuagwu N dan Onum K.NKpa dengan sedikit pengembangan pada model tersebut dan disesuaikan berdasarkan jurnal yang dituliskan oleh Tae Sug Do beserta Young S. Lee. Pada jurnal yang dituliskan oleh Kalu A.U, Agbanyim Akuagwu N dan Onum K.NKpa terdapat konstanta kelahiran yang akan menambah jumlah individu *susceptible* dalam satu populasi dengan rata-rata  $\pi$ . Dalam hal ini pada model tersebut setiap kelahiran yang terjadi secara alami diasumsikan sebagai individu yang sehat. Selain itu pada bagian selanjutnya terdapat konstanta  $\lambda$  yang menyatakan rata-rata kematian alami yang dialami oleh setiap individu dalam suatu populasi. Namun pada modifikasi model kali ini, kematian alami tersebut diasumsikan hanya akan berlaku pada individu *susceptible*. Secara spesifik model yang diberikan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \pi - \beta(1-p)S\frac{L}{N} - p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N} - \lambda S + \kappa R \\
 \frac{dL}{dt} &= \beta(1-p)S\frac{L}{N} + p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N} - \phi L - \psi L \\
 \frac{dI}{dt} &= \phi L - \xi I - \tau I \\
 \frac{dR}{dt} &= \xi I - \kappa R - \nu R
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

dengan  $N = S + L + I + R$ . Kondisi awal yang digunakan pada modifikasi model ini yang diambil yaitu  $S(0) = S_0$ ,  $L(0) = L_0$  dengan  $I(0) = I_0$  dan  $R(0) = R_0$ . Parameter-parameter dan variabel yang digunakan adalah sebagai berikut:

$S(t)$ : Jumlah populasi individu susceptible pada waktu  $t$

$L(t)$ : Populasi individu-individu *latent* yang terinfeksi pada waktu  $t$  namun belum menularkan virus ataupun dalam hal ini dapat diartikan sebagai individu dengan infeksi didalam tubuhnya namun terdapat salah diagnosis padanya

$I(t)$ : Populasi dari individu-individu terinfeksi pada waktu  $t$  dan dapat menularkan penyakit.

$R(t)$ : Jumlah populasi individu-individu yang mengalami proses penyembuhan atas infeksi yang diderita.

$\beta$ : Rata-rata transmisi virus pada individu *susceptible*

$p$ : Proporsi petugas kesehatan yang berasal dari individu *susceptible*

$\alpha_L$ : Rata-rata terinfeksiya petugas kesehatan yang mengalami kontak dengan individu *latent*

$\alpha_I$ : Rata-rata terinfeksiya petugas kesehatan yang mengalami kontak dengan individu terinfeksi

$\lambda$ : Proporsi kematian alami yang dialami individu *susceptible*

$\phi$ : Rata-rata individu-individu dimana ia yang berada pada kelas *latent* dan terinfeksi secara asimptomatik kemudian dilakukan isolasi sebelum kematian terjadi

$\xi$ : Rata-rata individu terinfeksi yang mengalami proses penyembuhan akibat penyakit

$\tau$ : Rata-rata individu terinfeksi yang mengalami kematian.

$\psi$ : Rata-rata kematian yang dialami individu *latent* tanpa didiagnosa terinfeksi dan tanpa adanya isolasi pada individu tersebut

$\pi$ : Rata-rata kelahiran pada suatu populasi

$\nu$ : Rata-rata individu terinfeksi yang mengalami kematian saat dia berada pada masa penyembuhan.

$\kappa$ : Rata-rata individu terinfeksi yang memasuki kelas *susceptible*

$N$ : Jumlah keseluruhan populasi yang bernilai konstan

Pada penelitian yang dilakukan oleh Tae S.Do dan yang lainnya terdapat beberapa bentuk yang salah satunya yaitu  $\frac{\beta(1-p)S}{N}$  dimana pernyataan tersebut menyatakan adanya transmisi antara virus dan calon inang pada virus. Selanjutnya pada peneletian ini terdapat pernyataan  $\beta = p_{\beta}c_{\beta}$  dimana  $p_{\beta}$  yang menyatakan kemungkinan adanya infeksi yang terjadi akibat adanya kontak antara individu terinfeksi dan tak terinfeksi sedangkan  $c_{\beta}$  adalah rata-rata adanya kontak dalam satu populasi tertentu. Pada persamaan  $\frac{dS}{dt}$ , terdapat rata-rata  $p$  yang memberikan suatu proporsi bahwa dari jumlah petugas kesehatan pada keseluruhan individu *susceptible* hal tersebut merupakan hasil pengamatan yang diberikan oleh Tae S.Do dan yang lainnya. Oleh karena itu, suatu transmisi dari virus ebola yang ditandai akan adanya kontak antara individu *susceptible* yang bertemu dengan individu *latent* dapat dinyatakan sebagai  $\beta(1-p)S\frac{I}{N}$ . Dalam hal ini, pernyataan  $1-p$  pada  $-\beta(1-p)S\frac{I}{N}$  menyatakan bahwa persebaran virus tersebut terjadi pada seluruh individu *susceptible* namun tidak ada satupun dari individu-individu tersebut yang masuk kedalam petugas kesehatan. Pada laju perubahan jumlah populasi *susceptible* tersebut terdapat pernyataan  $p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N}$ .  $\alpha_L L$  menyatakan peluang mendapatkan individu terinfeksi saat seorang petugas kesehatan melakukan kontak dengan individu *latent*, sehingga pernyataan  $p\alpha_L L\frac{S}{N}$  dapat diartikan sebagai jumlah individu *susceptible* sebagai petugas kesehatan yang mengalami infeksi akibat adanya kontak dengan individu *latent*. Begitu pula dengan  $p\alpha_I I\frac{S}{N}$  merupakan jumlah individu *susceptible* sebagai petugas kesehatan yang mengalami infeksi akibat adanya kontak dengan individu terinfeksi.

Selain adanya kelahiran alami pada jumlah populasi, juga terdapat kematian alami yang terjadi pada setiap individu yang dinyatakan sebagai  $\lambda$ . Oleh karena itu, adanya kematian alami ini menyebabkan berkurangnya jumlah individu pada setiap kelas dengan di keseluruhan jumlah populasi. Hal tersebut bukanlah merupakan sebuah asumsi yang digunakan oleh Tae S.Do dkk namun merupakan asumsi yang masih digunakan oleh Kalu A.U dkk. Oleh karena itu, modifikasi yang digunakan pada jurnal Kalu A.U dkk untuk kematian alami hanya akan digunakan pada individu *susceptible* dimana hal tersebut juga digunakan pada jurnal yang dituliskan olehnya. Namun, setiap kematian yang dialami oleh individu-individu non-*susceptible* akan menggunakan asumsi yang diberikan oleh Tae S.Do dkk dimana kematian individu-individu non-*susceptible* tersebut merupakan kematian yang dialami karena kasus infeksi virus ebola.

Misalkan memang terdapat individu yang terinfeksi, maka proses penyembuhan juga akan dilakukan pada individu tersebut. Meskipun dalam jangka waktu tertentu setelah suatu individu dinyatakan sembuh virus ebola masih terdapat pada sperma,

namun tidak mungkin seorang individu menginginkan dirinya terinfeksi penyakit terus menerus. Sehingga dalam hal ini menurut jurnal yang dituliskan oleh Kalu A.U dkk maka proses penyembuhan pada individu terinfeksi sedemikian hingga individu tersebut dapat masuk kedalam kompartement  $S$  memiliki rata-rata  $\kappa$ . Oleh karena itu jumlah individu yang dapat disembuhkan secara total tersebut dapat dinyatakan sebagai  $\kappa R$ . Pada model persebaran ebola ini, karena  $S$  menyatakan jumlah populasi *susceptible* maka dalam hal ini  $\frac{dS}{dt}$  dapat diartikan sebagai perubahan jumlah populasi *susceptible* diakibatkan karena adanya infeksi pada individu-individu tersebut akibat adanya kontak antara individu-individu ini dengan individu latent, terinfeksi, adanya kematian alami pada individu *susceptible* maupun adanya penyembuhan total pada individu terinfeksi. Pengamatan ini selanjutnya dilakukan pada persamaan yang kedua yakni  $\frac{dL}{dt}$ . Dalam hal ini,  $L$  menyatakan jumlah populasi *latent* yang merupakan individual terinfeksi namun belum menginfeksi yang lain ataupun individual dengan adanya kesalahan diagnosis sebagai individual terinfeksi hal tersebut sesuai dengan definisi yang diberikan oleh Tae S.D dkk. Pada sistem persebaran ebola yang dituliskan oleh Tae S.Do telah diketahui sebelumnya bahwa adanya infeksi pada individual *susceptible* diakibatkan kontakannya dengan individu *latent*. Akibat adanya penginfeksian tersebut maka jumlah individu-individu latent akan bertambah seiring berjalanya waktu. Oleh karena itu, dengan adanya pernyataan  $\beta(1 - p)S\frac{L}{N}$  maka hal tersebut membuktikan bahwa jumlah individu latent akan bertambah akibat adanya kontak antara individu *susceptible* dengan individu-individu *latent*. Penginfeksian yang sama juga berlaku pada petugas-petugas kesehatan yang secara umum digolongkan pada populasi *susceptible* sedemikian hingga petugas-petugas tersebut dapat menjadi individual-individual *latent* yang dinyatakan dengan  $p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N}$ . Transmisi virus ini juga berlaku karena adanya kontak individu yang menjadi *latent* ataupun individu-individu yang memang telah memiliki infeksi ebola pada tubuhnya. Saat individual *latent* yang memang benar-benar telah didiagnosis bahwa ia terinfeksi, maka individu tersebut akan di isolasi dan dilakukan penanganan pada individu tersebut sebelum kematian padanya terjadi. Rata-rata dari keseluruhan kasus yang terjadi tersebut adalah  $\phi$ . Oleh karena itu, jumlah individu-individu *latent* yang telah didiagnosis terinfeksi dan dilakukan isolasi padanya sebelum kematian dapat dinyatakan sebagai  $\phi L$ . Individu-individu *latent* yang mengalami hal demikian akan dimasukkan kedalam individu terinfeksi. Namun dalam kejadian yang diamati oleh Tae Sug Do dkk terdapat kemungkinan adanya kematian yang dialami oleh individu *latent* sebelum proses penyembuhan terjadi padanya. Kematian tersebut dikarenakan belum adanya konfirmasi akan virus yang diidap oleh individual ini. Rata-rata

hal tersebut terjadi dari keseluruhan individu latent dapat dinyatakan dengan  $\psi$ . Oleh karena itu, jumlah orang yang mati akibat kesalahan ini diberikan sebagai  $\psi L$  yang untuk selanjutnya hal tersebut menyebabkan bertambahnya jumlah orang yang meninggal akibat adanya infeksi virus ebola. Dari keseluruhan penjelasan tersebut maka dapat diambil kesimpulan bahwa  $\frac{dI}{dt}$  adalah perubahan jumlah dari individu *latent* pada suatu waktu tertentu baik dari bertambahnya individu *latent* sebagai akibat penginfeksi individu-individu *susceptible* beserta berkurangnya individu latent tersebut akibat adanya pengisolasian maupun kematian yang dialami individu *latent*.

Pada  $\frac{dI}{dt}$  tidak ada perbedaan yang signifikan diantara kedua jurnal seperti yang dijelaskan pada bab 2. Dalam hal ini, pendagnosisan yang dilakukan pada individu *latent* dapat membuktikan bahwa adanya diagnosis yang menghasilkan kesimpulan bahwa individu tersebut mengalami infeksi sedemikian hingga dapat menginfeksi individu yang lain. Akibat dari proses penyebaran tersebut maka penambahan jumlah individu terinfeksi dari individu latent terjadi. Seluruhan individu yang terinfeksi tersebut selanjutnya mengalami proses penyembuhan dan isolasi yang harus dilakukan padanya agar tidak semakin menyebarkan wabah ebola. Pada kasus *recovery* ini rata-rata pada individu-individu terinfeksi dinyatakan dengan  $\xi$ . Oleh karena itu, jumlah individu yang diisolasi dan dilakukan proses penyembuhan sedemikian hingga pada nantinya dapat digolongkan pada individu *R* atau *recovery* dituliskan sebagai  $\xi I$ . Namun jumlah individu yang terinfeksi juga akan semakin berkurang dikarenakan adanya kematian pada individu tersebut. Penjelasan-penjelasan tersebut juga sama-sama digunakan pada kedua jurnal. Namun pada penelitian ini asumsi yang akan digunakan adalah kematian pada individu-individu terinfeksi hanya akan disebabkan karena penyakit ebola dan menghilangkan adanya kematian alami pada individu tersebut sesuai dengan jurnal yang dituliskan oleh Tae S.Do dkk. Jika rata-rata kematian dari seluruh total populasi individu-individu yang terinfeksi dinyatakan sebagai  $\tau$  maka jumlah populasi individu yang mati akibat infeksi dapat didefinisikan oleh  $\tau I$ . Oleh karena itu,  $\frac{dI}{dt}$  merupakan bertambahnya jumlah individu yang terinfeksi akibat diagnosis yang dilakukan pada individu-individu *latent* maupun berkurangnya individu-individu tersebut akibat kematian dan proses penyembuhan yang dilakukan pada individu terinfeksi. Pada persamaan selanjutnya yakni  $\frac{dR}{dt} = \xi I - \kappa R - \nu R$  merupakan jumlah pertambahan individu *recovery* dari individu-individu yang dilakukan proses pengobatan padanya dengan individu tersebut berasal dari orang-orang yang terinfeksi beserta berkurangnya jumlah populasi tersebut dikarenakan individu terinfeksi mengalami kesembuhan total dari penyakit maupun kematian akibat penyakit saat ia mengalami proses



penyembuhan sesuai dengan yang dikatakan oleh Kalu A.U dkk. Pengurangan jumlah tersebut juga dinyatakan pada  $\kappa R$  yaitu jumlah individu terinfeksi yang mengalami kesembuhan total. Asumsi tersebut sama seperti yang dikatakan oleh Kalu A.U dkk dimana individu terinfeksi dapat diobati sedemikian hingga sembuh atas infeksi. Pada jurnal tersebut juga dinyatakan bahwa  $vR$  dapat diartikan sebagai jumlah populasi *recovery* yang mengalami kematian dengan  $v$  adalah rata-rata kematian alami individu *recovery*. Dalam hal ini,  $\lambda$  belum tentu akan sama dengan  $v$  dikarenakan orang yang terinfeksi dalam masa penyembuhan memiliki kemungkinan meninggal lebih besar atau bahkan lebih kecil jika dibandingkan dengan individu tanpa infeksi tergantung tempat dimana wabah ebola terjadi. Sistem ini juga mengambil populasi pada tempat tertentu dengan jumlah populasi baik dari *susceptible* hingga individu-individu yang mengalami kematian dianggap sebagai suatu konstanta dengan nilai  $N = S + L + I + R$ .

Karena  $N = S + L + I + R$  maka akan dapat diperoleh  $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dL}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}$ . Pada persamaan 4.1 akan dilakukan penjumlahan pada setiap persamaan tersebut sehingga diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \pi - \lambda S - \psi L - \tau I - vR \quad (4.2)$$

Masing-masing *kompartment* yakni  $S, L, I, R$  merupakan bagian dari jumlah keseluruhan populasi. Oleh karena itu jumlah populasi dari *kompartment* dapat dinyatakan sebagai proporsi dari  $N$ . Sehingga dalam hal ini, dapat diperoleh  $S = aN$ ,  $L = bN$ ,  $I = cN$ , dan  $R = dN$  dengan  $a, b, c, d$  merupakan proporsi masing-masing *kompartment* atas jumlah keseluruhan populasi. Pada persamaan 4.2 tersebut saat terjadi *outbreak* ebola maka dapat berlaku

$$\frac{dN}{dt} = \pi - \lambda aN - \psi bN - \tau cN - v dN \quad (4.3)$$

$$< \pi - \lambda aN \quad (4.4)$$

Penyelesaian pertidaksamaan 4.3 yang dapat diperoleh yaitu  $N < N_0 e^{-a\lambda t} + a\lambda\pi$ . Oleh karena itu, dengan mengambil kondisi batas  $S \geq 0$ ,  $L \geq 0$ ,  $I \geq 0$ , dan  $R \geq 0$  sehingga dalam hal ini akan berlaku  $0 \leq S, L, I, R < N_0 e^{-a\lambda t} + a\lambda\pi$  yang menyatakan bahwa jumlah keseluruhan populasi maupun jumlah populasi di masing-masing *kompartment* terbatas pada suatu interval nilai tertentu.

## 4.2 Titik Tetap pada Sistem

Berdasarkan definisi titik tetap pada subbab 2.2.1, suatu  $x^*$  merupakan titik tetap pada sistem  $\dot{x} = F(x)$  jika  $x^*$  memenuhi  $F(x^*) = 0$ . Oleh karena itu pada

model 4.1, titik tetap pada sistem dapat diperoleh dengan memberikan

$$\pi - \beta(1-p)S\frac{L}{N} - p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N} - \lambda S + \kappa R = 0 \quad (4.5)$$

$$\beta(1-p)S\frac{L}{N} + p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N} - \phi L - \psi L = 0 \quad (4.6)$$

$$\phi L - \xi I - \tau I = 0 \quad (4.7)$$

$$\xi I - \kappa R - \nu R = 0 \quad (4.8)$$

Berdasarkan Persamaan 4.8 dalam hal ini dapat diperoleh

$$R = \frac{\xi}{\kappa + \nu} I \quad (4.9)$$

Penyederhanaan yang dilakukan pada Persamaan 4.7 sedemikian hingga nilai  $I$  pada persamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut

$$I = \frac{\xi + \tau}{\phi} L \quad (4.10)$$

Oleh karena itu, dengan melakukan substitusi Persamaan 4.10 pada Persamaan 4.9 maka nilai  $R$  dapat diberikan sebagai berikut

$$R = \frac{\xi(\xi + \tau)}{\phi(\kappa + \nu)} L \quad (4.11)$$

Penjumlahan Persamaan 4.5 dan Persamaan 4.6 dalam hal ini akan menghasilkan

$$S = \frac{\pi + \kappa R - (\phi + \psi)L}{\lambda} \quad (4.12)$$

Substitusi yang dilakukan pada Persamaan 4.11 kedalam Persamaan 4.12 dapat memberikan persamaan sebagai berikut

$$S = \frac{\pi\phi(\kappa + \nu) + (\kappa\xi(\xi + \tau) - \phi(\phi + \psi)(\kappa + \nu))L}{\lambda\phi(\kappa + \nu)} \quad (4.13)$$

Dalam hal ini Persamaan 4.10, 4.11, dan 4.13 akan disubstitusikan pada Persamaan 4.5 sehingga dapat diperoleh

$$(mL - n)L = 0 \quad (4.14)$$

dengan

$$\begin{aligned}
m &= \left( \frac{\beta(1-p)}{\lambda N} + \frac{p\alpha_L}{\lambda N} + \frac{p\alpha_I}{\lambda N} + \frac{\kappa\xi(\xi+\tau)}{\phi(\phi+\psi)(\kappa+v) - \kappa\xi(\xi+\tau)} \right) \\
&\quad \frac{(\phi(\phi+\psi)(\kappa+v) - \kappa\xi(\xi+\tau))}{\phi(\kappa+v)} \\
&= \left( n + \frac{\kappa\xi(\xi+\tau)}{\phi(\kappa+v)} + \frac{\kappa\xi(\xi+\tau)}{\phi(\phi+\psi)(\kappa+v) - \kappa\xi(\xi+\tau)} \right) \\
&\quad \frac{(\phi(\phi+\psi)(\kappa+v) - \kappa\xi(\xi+\tau))}{\phi(\kappa+v)} \\
n &= \frac{\beta(1-p)\pi}{\lambda N} + \frac{p\alpha_L\pi}{\lambda N} + \frac{p\alpha_I\pi}{\lambda N} - \frac{\kappa\xi(\xi+\tau)}{\phi(\kappa+v)} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Oleh karena itu berdasarkan Persamaan 4.14 maka diperoleh  $L = 0$  atau  $L = \frac{n}{m}$ ,  $m \neq 0$ . Dalam hal ini, setiap parameter yang digunakan pada model adalah bernilai positif. Sehingga akan diambil nilai-nilai parameter yaitu

$$\phi(\phi+\psi)(\kappa+v) > \kappa\xi(\xi+\tau) \tag{4.16}$$

beserta

$$\frac{\beta(1-p)\pi}{\lambda N} + \frac{p\alpha_L\pi}{\lambda N} + \frac{p\alpha_I\pi}{\lambda N} \geq \frac{\kappa\xi(\xi+\tau)}{\phi(\kappa+v)} \tag{4.17}$$

agar jumlah populasi *latent* dari keseluruhan jumlah populasi dalam model adalah  $L \geq 0$ .

Pada titik tetap yang pertama diambil nilai  $L = 0$  sehingga diperoleh nilai  $I = 0$ ,  $R = 0$  dan  $S = \frac{\pi}{\lambda}$ . Jadi dalam hal ini dapat diperoleh titik tetap yang pertama adalah  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$ . Pada titik tetap pertama dapat diartikan bahwa titik tetap tersebut merupakan titik tetap bebas penyakit dimana variabel keadaan tidak akan berubah nilainya dikarenakan tidak adanya infeksi pada individu-individu *susceptible*. Titik tetap yang kedua dapat diperoleh dengan memberikan  $L^* = \frac{n}{m}$ . Substitusi  $L^* = \frac{n}{m}$  pada Persamaan 4.10, 4.9 dan Persamaan 4.13 dengan nilai  $m, n$  seperti pada Persamaan 4.15 sedemikian hingga diperoleh

$$S^* = \frac{\pi\phi(\kappa+v) + (\kappa\xi(\xi+\tau) - \phi(\phi+\psi)(\kappa+v))\frac{n}{m}}{\lambda\phi(\kappa+v)} \tag{4.18}$$

$$R^* = \frac{\xi(\xi+\tau)}{\phi(\kappa+v)} \frac{n}{m} \tag{4.19}$$

$$I^* = \frac{\xi+\tau}{\phi} \frac{n}{m} \tag{4.20}$$

Dalam hal ini titik tetap  $(S^*, L^*, I^*, R^*)$  merupakan titik tetap endemik dengan adanya penyebaran virus didalamnya dimana  $m > n$ .

### 4.3 Analisis Kestabilan Sistem

Model penyebaran virus ebola pada Persamaan 4.1 merupakan model tak linear. Oleh karena itu untuk menganalisa kestabilan pada sistem akan dilakukan pelinieran terlebih dahulu pada Persamaan 4.1. Pelinieran pada model dilakukan dengan mendekati model menggunakan deret Taylor disekitaran titik tetap  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$  dan  $(S^*, E^*, I^*, R^*)$ . Sehingga dalam hal ini model dalam Persamaan 4.1 dapat dibentuk menjadi  $\dot{x} = Jx$  dimana  $J$  dinamakan Jacobi pada model tersebut. Pada Persamaan 4.1 akan dilakukan pemisalan yaitu  $f_1 = \frac{dS}{dt}$ ,  $f_2 = \frac{dL}{dt}$ ,  $f_3 = \frac{dI}{dt}$  dan  $f_4 = \frac{dR}{dt}$  sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} f_1 &= \pi - \beta(1-p)S\frac{L}{N} - p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N} - \lambda S + \kappa R \\ f_2 &= \beta(1-p)S\frac{L}{N} + p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N} - \phi L - \psi L \\ f_3 &= \phi L - \xi I - \tau I \\ f_4 &= \xi I - \kappa R - \nu R \end{aligned} \quad (4.21)$$

Jacobi pada sistem dapat dinyatakan sebagai berikut

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial L} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial L} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial L} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial L} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \end{pmatrix}_{x^*} \quad (4.22)$$

dengan  $x^*$  merupakan titik tetap pada sistem.

#### 4.3.1 Kestabilan pada Titik Tetap $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$

Pada titik tetap  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$  sedemikian hingga dengan mensubstitusikan titik tetap tersebut pada Persamaan 4.22 dapat diperoleh nilai Jacobi yaitu

$$J = \begin{pmatrix} -\lambda & -\beta(1-p)\frac{\pi}{N\lambda} - p\alpha_L\frac{\pi}{N\lambda} & -p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda} & \kappa \\ 0 & (\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi & p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda} & 0 \\ 0 & \phi & -(\xi + \tau) & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -(\kappa + \nu) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Kemudian nilai eigen yang berhubungan dengan titik tetap bebas penyakit tersebut akan dicari dengan menggunakan

$$|J - \omega I| = 0 \quad (4.24)$$

sehingga dapat diperoleh

$$\begin{vmatrix} -\lambda - \omega & -\beta(1-p)\frac{\pi}{N\lambda} - p\alpha_L\frac{\pi}{N\lambda} & -p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda} & \kappa \\ 0 & \beta(1-p) + p\alpha_L\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi - \omega & p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda} & 0 \\ 0 & & \phi - (\xi + \tau) - \omega & 0 \\ 0 & & 0 & \xi - (\kappa + v) - \omega \end{vmatrix} = 0 \quad (4.25)$$

Penyelesaian Persamaan 4.25 akan memberikan nilai determinan sebagai berikut

$$\begin{aligned} (-\lambda - \omega)(-\kappa + v) - \omega \left\{ (\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi - \omega \right\} & - (\xi + \tau) - \omega \\ & - \phi p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda} \} = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Oleh karena itu pada Persamaan 4.26 tersebut dapat terpenuhi jika berlaku

$$-\lambda - \omega = 0 \Rightarrow \omega_1 = -\lambda \quad (4.27)$$

$$-(\kappa + v) - \omega = 0 \Rightarrow \omega_2 = -(\kappa + v) \quad (4.28)$$

dan pada bagian terakhir yaitu Persamaan 4.26 juga berlaku

$$\begin{aligned} \omega^2 + \{ (\xi + \tau) - (\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi \} \omega - \\ (\xi + \tau) [ (\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi ] - \phi p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Dalam hal ini, Pengambilan persamaan berikut

$$b = (\xi + \tau) - (\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi \quad (4.30)$$

dengan

$$c = (\xi + \tau) [ (\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi ] - \phi p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda} \quad (4.31)$$

sehingga Persamaan 4.29 dapat dituliskan sebagai berikut

$$\omega^2 + b\omega - c = 0 \quad (4.32)$$

sedemikian hingga dapat diperoleh nilai-nilai eigen yang ketiga dan keempat sebagai berikut

$$\omega_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2} \quad (4.33)$$

dan

$$\omega_4 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2} \quad (4.34)$$

Oleh karena itu, berdasarkan pada perhitungan yang telah dilakukan maka dapat diperoleh nilai-nilai eigen sebagai yaitu  $\omega_1 = -\lambda$ ,  $\omega_2 = -(\kappa + v)$ ,  $\omega_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$  dan  $\omega_4 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$ . Berdasarkan nilai eigen tersebut maka terdapat beberapa kemungkinan yang menyebabkan titik ini dapat mengalami kestabilan maupun ketidakstabilannya. Dalam hal ini pada titik tetap tersebut dapat dikatakan stabil jika setiap nilai eigen yang berhubungan dengan titik tetap ini memiliki nilai negatif pada bagian realnya. Pada tahap pertama pengamatan pada sistem akan dilakukan untuk menganalisis bagaimana sistem tersebut dapat dikatakan stabil. Untuk nilai eigen yang pertama yaitu  $\omega_1 = -\lambda$ , nilai eigen tersebut bernilai negatif karena  $\lambda > 0$  sedemikian hingga berlaku  $\omega_1 < 0$ . Selanjutnya untuk  $\omega_2 = -(\kappa + v)$  dan karena  $\kappa + v > 0$  maka  $\omega_2 < 0$ . Pada  $\omega_3$  dan  $\omega_4$  memiliki beberapa kemungkinan dimana dengan kemungkinan-kemungkinan tersebut, maka sifat kestabilan pada sistem dapat berganti. Pada Persamaan 4.33 dan Persamaan 4.34 dalam hal ini berlaku

$$\begin{aligned} b^2 + 4c &= (\xi + \tau)^2 + [(\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi]^2 \\ &\quad - 2[(\xi + \tau)(\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi] \\ &\quad + 4[(\xi + \tau)[(\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi] - \phi p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda}] \\ &= (\xi + \tau)^2 + [(\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi]^2 \\ &\quad + 2(\xi + \tau)[(\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi] - 4\phi p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda} \\ &= \left\{ (\xi + \tau) + [(\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi] \right\}^2 - 4\phi p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda} \end{aligned} \quad (4.35)$$

**Kasus 1:**  $b > 0$ ,  $c < 0$  dan  $b^2 + 4c \leq 0$

Pada kasus pertama akan diambil  $b > 0$  sedemikian hingga berlaku

$$(\xi + \tau) > (\beta(1 - p) + p\alpha_L) \frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi \quad (4.36)$$

Persamaan 4.36 mengindikasikan bahwa jumlahan dari rata-rata *recovery* individu terinfeksi dan kematian atas individu terinfeksi lebih besar jika dibandingkan dengan rata-rata transmisi virus pada individu *susceptible* maupun pada petugas kesehatan walaupun dikurangi dengan rata-rata kematian individu *latent* dan rata-rata individu *latent* yang memasuki kompartemen terinfeksi. Berdasarkan 4.36 untuk

$$\mathcal{A}_1 = \frac{(\xi + \tau + \phi + \psi) \frac{N\lambda}{\pi} - p\alpha_L}{1 - p} \quad (4.37)$$

akan diperoleh

$$\mathcal{A}_1 > \beta \quad (4.38)$$

Pada kasus ini jelas bahwa  $b^2 > 0$ , oleh karena itu saat diasumsikan bahwa  $c < 0$  sedemikian hingga berlaku

$$(\xi + \tau)[(\beta(1 - p) + p\alpha_L) \frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi] < \phi p \alpha_I \frac{\pi}{N\lambda} \quad (4.39)$$

Nilai  $c < 0$  dalam hal ini mengindikasikan perkalian antara jumlahan rata-rata *recovery* individu terinfeksi dan kematian atas individu terinfeksi dan rata-rata transmisi virus pada individu *susceptible* maupun pada petugas kesehatan walaupun dikurangi dengan rata-rata kematian individu *latent* dan rata-rata individu *latent* yang memasuki kompartemen terinfeksi masih akan lebih kecil jika dibandingkan dengan perkalian antara rata-rata transmisi virus pada petugas medis saat melakukan kontak dengan individu terinfeksi dan rata-rata individu *latent* yang memasuki kelas terinfeksi. Penyederhanaan akan dilakukan dengan lebih seksama sehingga Persamaan 4.40 dapat dibentuk menjadi

$$\beta < \frac{\frac{\phi p \alpha_I}{((\xi + \tau))} + (\phi + \psi) \frac{N\lambda}{\pi} - p\alpha_L}{1 - p} \quad (4.40)$$

Oleh karena Persamaan 4.40 dan dengan mengambil nilai

$$\mathcal{A}_2 = \frac{\frac{\phi p \alpha_I}{((\xi + \tau))} + (\phi + \psi) \frac{N\lambda}{\pi} - p\alpha_L}{1 - p} \quad (4.41)$$

maka diperoleh

$$\beta < \mathcal{A}_2 \quad (4.42)$$

Saat diberikan Persamaan 4.38 dan Persamaan 4.42 maka dapat diambil suatu kondisi yang diinginkan yaitu  $b^2 + 4c \leq 0$ . Karena kondisi tersebut, maka pada Persamaan 4.35 menjadi

$$\left\{ (\xi + \tau) + [(\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi] \right\}^2 - 4\phi p\alpha_I \frac{\pi}{N\lambda} \leq 0 \quad (4.43)$$

Sehingga dapat diperoleh

$$-2\sqrt{\phi p\alpha_I \frac{\pi}{N\lambda}} \leq \left\{ (\xi + \tau) + [(\beta(1-p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi] \right\} \leq 2\sqrt{\phi p\alpha_I \frac{\pi}{N\lambda}} \quad (4.44)$$

Penyederhanaan dengan lebih seksama juga akan dilakukan pada Persamaan 4.44 sehingga pada persamaan tersebut dapat diperoleh

$$\frac{(\phi + \psi - \xi - \tau)\frac{N\lambda}{\pi} - p\alpha_L}{1-p} - \frac{2\sqrt{\phi p\alpha_I \frac{N\lambda}{\pi}}}{1-p} \leq \beta \leq \frac{(\phi + \psi - \xi - \tau)\frac{N\lambda}{\pi} - p\alpha_L}{1-p} + \frac{2\sqrt{\phi p\alpha_I \frac{N\lambda}{\pi}}}{1-p} \quad (4.45)$$

Persamaan 4.45 dalam hal ini dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{(\phi + \psi + \xi + \tau)\frac{N\lambda}{\pi} - p\alpha_L}{1-p} - 2\frac{(\xi + \tau)N\lambda}{(1-p)\pi} - \frac{2\sqrt{\phi p\alpha_I \frac{N\lambda}{\pi}}}{1-p} &\leq \beta \\ &\leq \frac{(\phi + \psi + \xi + \tau)\frac{N\lambda}{\pi} - p\alpha_L}{1-p} \\ &\quad - 2\frac{(\xi + \tau)N\lambda}{(1-p)\pi} + \frac{2\sqrt{\phi p\alpha_I \frac{N\lambda}{\pi}}}{1-p} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Sedemikian hingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 - 2\frac{(\xi + \tau)N\lambda}{(1-p)\pi} - \frac{2\sqrt{\phi p\alpha_I \frac{N\lambda}{\pi}}}{1-p} &\leq \beta \\ &\leq \mathcal{A}_1 - 2\frac{(\xi + \tau)N\lambda}{(1-p)\pi} + \frac{2\sqrt{\phi p\alpha_I \frac{N\lambda}{\pi}}}{1-p} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Pengambilan kondisi  $b^2 + 4c \leq 0$  dengan  $b > 0$  jelas menyebabkan  $R_e(\omega_3) < 0$  dan  $R_e(\omega_4) < 0$ . Jadi pada kasus 1 sistem berada pada kondisi stabil dengan berlakunya Persamaan 4.38, 4.42, dan 4.47.



**Kasus 2:**  $b > 0$ ,  $c < 0$  dan  $b^2 + 4c > 0$

Sama seperti pada kasus 1, saat diberikan  $b > 0$  maka akan diperoleh  $\mathcal{A}_1 > \beta$ . Dalam hal ini, akan diambil  $c < 0$  sedemikian hingga berlaku  $\beta < \mathcal{A}_2$ . Karena  $b^2 + 4c > 0$  maka  $b^2 > -4c$  sehingga berdasarkan 4.35 dapat diperoleh

$$\beta < \mathcal{A}_1 - 2 \frac{(\xi + \tau)N\lambda}{(1-p)\pi} - \frac{2\sqrt{\phi p \alpha_I \frac{N\lambda}{\pi}}}{1-p} \quad (4.48)$$

atau

$$\beta > \mathcal{A}_1 - 2 \frac{(\xi + \tau)N\lambda}{(1-p)\pi} + \frac{2\sqrt{\phi p \alpha_I \frac{N\lambda}{\pi}}}{1-p} \quad (4.49)$$

Jelas pada  $\omega_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$  maka  $R_e(\omega_3) < 0$ . Pada  $\omega_4 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$ , agar sistem penyebaran virus ebola bersifat stabil maka harus berlaku  $b > \sqrt{b^2 + 4c}$ . Karena berlaku  $b > \sqrt{b^2 + 4c}$  maka dapat diperoleh  $b^2 > b^2 + 4c$  dan hal ini akan membawa pada kesimpulan yang sama yaitu  $c < 0$ .

**Kasus 3:**  $b > 0$ ,  $c > 0$  dan  $b^2 + 4c > 0$

Pada kasus ini akan diambil asumsi bahwa  $b^2 + 4c \geq 0$  oleh karena itu akan berlaku Persamaan 4.48 dan Persamaan 4.49. Karena pada kasus ini diambil asumsi bahwa  $c > 0$ , sehingga seperti pada Persamaan 4.42 dapat berlaku  $\beta > \mathcal{A}_2$ . Dengan adanya  $b > 0$  maka juga berlaku  $\beta < \mathcal{A}_1$  seperti pada 4.38. Oleh karena itu, dapat diperoleh  $\mathcal{A}_2 < \beta < \mathcal{A}_1$ . Karena  $b^2 + 4c > 0$  maka jelas bahwa  $R_e(\omega_3) < 0$ . Namun dalam hal ini,  $R_e(\omega_4) > 0$  akan berlaku. Pada kasus ini dapat disimpulkan sistem tidak akan berada pada kondisi yang stabil. Dapat diperhatikan juga untuk  $c > 0$  maka jumlah individu-individu latent yang memasuki kelas terinfeksi memiliki rata-rata yang cukup kecil. Demikian juga dengan infeksi *susceptible* pada petugas medis yang bersinggungan dengan individu terinfeksi akan memiliki jumlah yang lebih kecil jika dibandingkan dengan transmisi yang lain.

**Kasus 4:**  $b < 0$ ,  $c < 0$  dan  $b^2 + 4c \leq 0$

Pada kasus ini asumsi yang digunakan adalah  $c < 0$  maka dapat diperoleh  $\beta < \mathcal{A}_2$ . Asumsi yang kedua adalah  $b < 0$  maka berlaku  $\mathcal{A}_1 < \beta$  sehingga berdasarkan kedua asumsi ini dapat diperoleh  $\mathcal{A}_1 < \beta < \mathcal{A}_2$ . Nilai  $b < 0$  dalam hal ini juga mengindikasikan bahwa jumlahan dari rata-rata *recovery* individu terinfeksi dan kematian atas individu terinfeksi lebih kecil jika dibandingkan dengan rata-rata transmisi virus pada individu *susceptible* maupun pada petugas kesehatan saat dikurangi dengan rata-rata kematian individu *latent* dan rata-rata individu *latent* yang memasuki kompartemen terinfeksi. Adanya kondisi  $b^2 + 4c \leq 0$  maka jelas bahwa sistem akan berada pada kondisi yang tak stabil dikarenakan  $R_e(\omega_4) > 0$

dikarenakan  $-b > 0$ . Kondisi ini juga berlaku pada  $R_e(\omega_3) > 0$ . Jadi dapat disimpulkan bahwa pada kondisi ini sistem berada pada kondisi yang tak stabil.

**Kasus 5:**  $b < 0, c < 0$  dan  $b^2 + 4c > 0$

Pada kasus ini asumsi yang digunakan adalah  $b < 0$  dan  $c < 0$ . Oleh karena itu berdasarkan pada Persamaan 4.42 dan Persamaan 4.38 sama seperti sebelumnya maka berlaku  $\mathcal{A}_1 < \beta < \mathcal{A}_2$ . Asumsi yang terakhir yaitu  $b^2 + 4c > 0$  jelas menyebabkan  $R_e(\omega_3) < 0$ . Namun dengan adanya  $b < 0$  sehingga  $-b > 0$  maka jelas bahwa  $R_e(\omega_4) > 0$ . Jadi dikarenakan kondisi-kondisi ini maka sistem tidak akan berada pada kondisi yang tak stabil.

**Kasus 6:**  $b = \sqrt{b^2 + 4c}$  atau  $b = -\sqrt{b^2 + 4c}$

Pada bagian yang terakhir suatu titik tetap pada sistem tidak bisa ditentukan mengenai stabil atau tidaknya suatu sistem. Jika salah satu dari nilai eigen tersebut memiliki nilai nol pada bagian realnya sehingga akan diperoleh  $\omega_3 = 0$  yaitu  $b = -\sqrt{b^2 + 4c}$  atau pada  $\omega_4 = 0$  yaitu  $b = \sqrt{b^2 + 4c}$  sedemikian hingga sistem memiliki titik tetap yang bernilai 0. Berdasarkan kondisi tersebut maka berlaku  $\beta = \mathcal{A}_2$  dimana tidak bisa ditentukan mengenai kestabilan sistem.

#### 4.3.2 Kestabilan untuk Titik Tetap ( $S^*, L^*, I^*, R^*$ )

Pada titik tetap endemik yaitu ( $S^*, L^*, I^*, R^*$ ) untuk melakukan pengamatan atas kestabilan pada titik tetap tersebut maka akan dibentuk Jacobi seperti dengan langkah sebelumnya. Dalam hal ini,  $L^* = \frac{n}{m}$  dengan nilai  $m$  dan  $n$  seperti pada Persamaan 4.15 beserta Persamaan 4.18 hingga Persamaan 4.20 sehingga berdasarkan Persamaan 4.22 dapat diperoleh nilai Jacobi sebagai berikut

$$J = \begin{pmatrix} -\beta(1-p)\frac{L^*}{N} - p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N} - \lambda & -\beta(1-p)\frac{S^*}{N} - p\alpha_L \frac{S^*}{N} & -p\alpha_I \frac{S^*}{N} & \kappa \\ \beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N} & \beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} - \phi - \psi & \alpha_I \frac{S^*}{N} & 0 \\ 0 & \phi & -(\xi + \tau) & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -(\kappa + \nu) \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dengan cara yang sama maka nilai eigen pada sistem akan dicari dengan menggunakan  $|J - \omega I| = 0$  dengan  $\omega$  adalah nilai eigen pada sistem dan  $I$  adalah matriks identitas. Perhitungan tersebut akan memberikan persamaan sebagai berikut

$$\begin{vmatrix} -\beta(1-p)\frac{L^*}{N} - p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N} - \lambda - \omega & -\beta(1-p)\frac{S^*}{N} - p\alpha_L \frac{S^*}{N} & -p\alpha_I \frac{S^*}{N} & \kappa \\ \beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N} & \beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} - \phi - \psi - \omega & \alpha_I \frac{S^*}{N} & 0 \\ 0 & \phi & -(\xi + \tau) - \omega & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -(\kappa + \nu) - \omega \end{vmatrix} = 0$$

Dengan melakukan perhitungan pada determinan tersebut maka diperoleh  $-\beta(1-p)\frac{L^*}{N} - p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N} - \lambda - \omega$

$$\begin{vmatrix}
\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi - \omega & \alpha_I\frac{S^*}{N} & 0 \\
\phi & -(\xi + \tau) - \omega & 0 \\
0 & \xi & -(\kappa + \nu) - \omega \\
-\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N} & & \\
-\beta(1-p)\frac{S^*}{N} - p\alpha_L\frac{S^*}{N} & -p\alpha_I\frac{S^*}{N} & \kappa \\
\phi & -(\xi + \tau) - \omega & 0 \\
0 & \xi & -(\kappa + \nu) - \omega
\end{vmatrix} = 0$$

(4.50)

Perhitungan pada Persamaan 4.50 untuk determinan yang pertama dan determinan yang kedua akan diperoleh

$$\begin{vmatrix}
\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi - \omega & \alpha_I\frac{S^*}{N} & 0 \\
\phi & -(\xi + \tau) - \omega & 0 \\
0 & \xi & -(\kappa + \nu) - \omega
\end{vmatrix}$$

$$= (-(\kappa + \nu) - \omega)[(\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi - \omega)(-(\xi + \tau) - \omega) - \phi\alpha_I\frac{S^*}{N}]$$

(4.51)

$$\begin{vmatrix}
-\beta(1-p)\frac{S^*}{N} - p\alpha_L\frac{S^*}{N} & -p\alpha_I\frac{S^*}{N} & \kappa \\
\phi & -(\xi + \tau) - \omega & 0 \\
0 & \xi & -(\kappa + \nu) - \omega
\end{vmatrix}$$

$$= (-(\kappa + \nu) - \omega)[(-\beta(1-p)\frac{S^*}{N} - p\alpha_L\frac{S^*}{N})(-(\xi + \tau) - \omega) + \phi p\alpha_I\frac{S^*}{N}]$$

(4.52)

Dalam hal ini dengan mensubsitusikan Persamaan 4.51 dan Persamaan 4.52 pada Persamaan 4.50 selanjutnya akan diperoleh

$$\begin{aligned}
& [(\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi - \omega)(-(\xi + \tau) - \omega) - \phi\alpha_I\frac{S^*}{N}] \\
& (-(\kappa + \nu) - \omega)(-\beta(1-p)\frac{L^*}{N} - p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N} - \lambda - \omega) \\
& - [(-\beta(1-p)\frac{S^*}{N} - p\alpha_L\frac{S^*}{N})(-(\xi + \tau) - \omega) + \phi p\alpha_I\frac{S^*}{N}](-(\kappa + \nu) - \omega) \\
& (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N}) = 0 \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Pada Persamaan 4.53 dalam hal ini dapat diperoleh nilai eigen yang pertama yaitu

$\omega_1 = -(\kappa + v)$  dan

$$\begin{aligned}
& \omega^3 + [((\xi + \tau) - (\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi)) + \\
& \quad (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_LL^* + \alpha_II^*)\frac{1}{N} + \lambda)]\omega^2 + \\
& + [(\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi)(-(\xi + \tau)) - \phi\alpha_I\frac{S^*}{N} + \\
& \quad ((\xi + \tau) - (\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi)) \\
& \quad (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_LL^* + \alpha_II^*)\frac{1}{N} + \lambda) + \\
& (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_LL^* + \alpha_II^*)\frac{1}{N})(\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N})]\omega \\
& + [(\xi + \tau)(\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} + \phi p\alpha_I\frac{S^*}{N})] \\
& \quad (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_LL^* + \alpha_II^*)\frac{1}{N}) + \\
& \quad (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_LL^* + \alpha_II^*)\frac{1}{N} + \lambda) \\
& (\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi)(-(\xi + \tau)) - \phi\alpha_I\frac{S^*}{N} = 0 \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Dengan mengambil nilai-nilai pada Persamaan 4.54 yaitu

$$\begin{aligned}
d_1 = & ((\xi + \tau) - (\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi)) + \\
& (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_LL^* + \alpha_II^*)\frac{1}{N} + \lambda) \tag{4.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2 = & (\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi)(-(\xi + \tau)) - \phi\alpha_I\frac{S^*}{N} + \\
& ((\xi + \tau) - (\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi)) \\
& (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_LL^* + \alpha_II^*)\frac{1}{N} + \lambda) + \\
& (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_LL^* + \alpha_II^*)\frac{1}{N})(\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N}) \tag{4.56}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
d_3 = & [(\xi + \tau)(\beta(1 - p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} + \phi p\alpha_I\frac{S^*}{N})] \\
& (\beta(1 - p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N}) + \\
& (\beta(1 - p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N} + \lambda) \quad (4.57) \\
& (\beta(1 - p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi)(-(\xi + \tau)) - \phi\alpha_I\frac{S^*}{N}
\end{aligned}$$

maka Persamaan 4.54 dapat dituliskan secara lebih sederhana yaitu

$$\omega^3 + d_1\omega^2 + d_2\omega + d_3 = 0 \quad (4.58)$$

Pada nilai eigen yang pertama yaitu  $\omega = -(\kappa + \nu)$ , karena  $\kappa > 0$  dan  $\nu > 0$  maka diperoleh  $\omega < 0$ . Berdasarkan bentuk Persamaan 4.58 dengan Persamaan 4.55, Persamaan 4.56 dan Persamaan 4.57 maka persamaan poinomial berderajat tiga tersebut akan susah untuk diselesaikan menggunakan cara pemfaktoran biasa. Oleh karena itu dalam menentukan kestabilan pada titik endemik tersebut maka akan digunakan kriteria Routh-Hurwitz dalam menganalisa kestabilan pada titik ini seperti yang telah dituliskan pada (Liu, 1994). Dalam hal ini akan diberikan matriks berdasarkan Persamaan 4.58 adalah sebagai berikut

$$H_3 = \begin{pmatrix} d_2 & d_3 & 0 \\ 1 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Berdasarkan (Liu, 1994) Agar nilai-nilai karaktersitik pada Persamaan 4.58 bernilai negatif maka harus berlaku  $d_3 > 0$  dengan

$$D_1 = \det(H_1) = d_2 > 0 \quad (4.60)$$

$$D_2 = \det(H_2) = \begin{vmatrix} d_2 & d_3 \\ 1 & d_1 \end{vmatrix} = d_1 d_2 - d_3 > 0 \quad (4.61)$$

dan

$$D_3 = \begin{vmatrix} d_2 & d_3 & 0 \\ 1 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(d_1 d_2 - d_3) > 0 \quad (4.62)$$

Oleh karena itu pada Persamaan 4.55 agar sistem bersifat stabil, jika diambil nilai

$d_1 > 0$  sehingga diperoleh

$$(\xi + \tau) + (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N} + \lambda) + \phi + \psi > (\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N}) \quad (4.63)$$

yang mengindikasikan bahwa jumlahan dari rata-rata *recovery* individu terinfeksi, rata-rata kematian individu *latent* tanpa adanya diagnosa, rata-rata individu *latent* yang memasuki kelas terinfeksi, rata-rata individu terinfeksi yang mengalami kematian beserta rate transmisi yang dikalikan dengan titik endemik  $I^*$  dan  $L^*$  akan lebih besar jika dibandingkan dengan rata-rata transmisi yang dikalikan dengan  $S^*$ . Pada bagian selanjutnya akan diambil  $d_2 > 0$  agar kestabilan dapat tercapai. Jika  $\xi + \tau > 0$  dan  $\phi\alpha_I \frac{S^*}{N} > 0$  dengan  $(\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} - \phi - \psi) > 0$  maka

$$(\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} - \phi - \psi)((\xi + \tau) + \phi\alpha_I \frac{S^*}{N}) < 0 \quad (4.64)$$

Pada  $d_2$  juga dapat diambil nilai bahwa  $\xi + \tau + \phi + \psi > (\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N})$ . Oleh karena itu untuk  $d_2 > 0$  sedemikian hingga akan diperoleh

$$\begin{aligned} & (\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} - \phi - \psi)((\xi + \tau)) + \phi\alpha_I \frac{S^*}{N} < \\ & ((\xi + \tau) - (\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} - \phi - \psi)) \\ & (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N} + \lambda) + \\ & (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N})(\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N}) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Pada bagian selanjutnya juga diambil  $d_3 > 0$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & [(\xi + \tau)(\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} \phi p\alpha_I \frac{S^*}{N})] \\ & (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N}) > \\ & (\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N} + \lambda) \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$(\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} - \phi - \psi)(-\xi - \tau) - \phi\alpha_I \frac{S^*}{N}$$

agar akar-akar karakteristik Persamaan 4.58 bernilai negatif. Dalam hal ini polinomial orde ke tiga tersebut akan mempunyai akar negatif jika dan hanya jika  $d_1 d_2 - d_3 > 0$ . Pada tahap ini akan diambil kesimpulan bahwa  $d_1 > 0, d_2 > 0$ , dan  $d_3 > 0$ . Oleh karena dapat diperoleh  $d_1 d_2 - d_3 > 0$  sehingga  $d_1 d_2 > d_3$ , jadi dengan mengambil nilai  $d_1 > 0, d_2 > 0, d_3 > 0$  dan  $d_1 d_2 > d_3$  maka sistem penye-

baran virus ebola pada titik endemik ini akan bersifat stabil. Namun jika sebaliknya diambil kondisi bahwa  $d_1 < 0$  maka sistem akan berada pada kondisi tak stabil.

#### 4.4 Bifurkasi Hopf pada Model Persebaran Virus Ebola

Bifurkasi Hopf pada Persamaan 4.1 dalam hal ini akan terjadi jika untuk titik-titik tetap pada Persamaan 4.1 memiliki nilai eigen murni imajiner dengan  $\omega_{1,2} = \pm\omega_0$  dimana  $\omega_0 > 0$  berdasarkan Stephen Wiggins pada Wiggins (2003). Pada titik tetap yang pertama yaitu  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$  maka diperoleh nilai eigen pada model Persamaan 4.1 yaitu

$$-\lambda - \omega = 0 \Rightarrow \omega_1 = -\lambda \quad (4.67)$$

$$-(\kappa + \nu) - \omega = 0 \Rightarrow \omega_2 = -(\kappa + \nu) \quad (4.68)$$

$$\omega_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2} \quad (4.69)$$

dan

$$\omega_4 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2} \quad (4.70)$$

dengan

$$b = (\xi + \tau) - (\beta(1 - p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi \quad (4.71)$$

$$c = (\xi + \tau)[(\beta(1 - p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi] - \phi p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda} \quad (4.72)$$

Pada Persamaan 4.67 dan Persamaan 4.68 bukanlah nilai eigen yang bersifat imajiner. Namun, kemungkinan adanya nilai eigen yang murni imajiner terdapat pada Persamaan 4.69 dan Persamaan 4.70 dengan nilai  $b$  dan  $c$  seperti pada Persamaan 4.71 beserta Persamaan 4.72. Pada  $\omega_3$  dan  $\omega_4$  akan memiliki nilai eigen yang murni imajiner jika nilai  $b = 0$ . Oleh karena itu dapat diambil  $b = 0$  sedemikian hingga diperoleh

$$\xi + \tau = (\beta(1 - p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi \quad (4.73)$$

Persamaan 4.73 dapat diartikan bahwa jumlahan rata-rata proses penyembuhan pada individu terinfeksi dan kematian pada individu terinfeksi adalah sama dengan besar transmisi virus ebola pada individu susceptible yang dikurangi dengan rata-rata individu *latent* yang memasuki kelas terinfeksi dan kematian yang dialami individu *latent* akibat virus yang diidapnya. Berdasarkan Persamaan 4.73 maka jelas bahwa  $\mathcal{A}_1 = \beta$ . Bifurkasi hopf pada titik tetap ini juga berlaku jika  $c < 0$  sehingga diperoleh sehingga nilai eigen pada sistem memiliki akar-akar karakteristik murni

imajiner. Sehingga dapat diambil nilai  $c < 0$  dan didapatkan

$$(\xi + \tau)[(\beta(1 - p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} + \phi + \psi] < \phi p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda} \quad (4.74)$$

Jadi dalam hal ini dapat disimpulkan bahwa bifurkasi hopf dapat terjadi pada sistem jika berlaku  $\mathcal{A}_1 = \beta$  dan  $\mathcal{A}_2 > \beta$ . Pada Persamaan 4.69 dan Persamaan 4.70 dengan nilai  $b$  pada Persamaan 4.71 maka akan diperoleh

$$R_e(\beta) = -\frac{1}{2}[(\xi + \tau) - (\beta(1 - p) + p\alpha_L)\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi] \quad (4.75)$$

Sedemikian hingga berdasarkan Persamaan 4.75 maka dapat diperoleh

$$\frac{d}{d\beta}R_e(\beta) = \frac{1}{2}(1 - p)\frac{\pi}{N\lambda} \neq 0 \quad (4.76)$$

Oleh karena itu syarat transversal terjadinya bifurkasi hopf pada titik ini dipenuhi dengan adanya Persamaan 4.76.

Pada titik kesetimbangan endemik yaitu  $(S^*, L^*, I^*, R^*)$  seperti pada Persamaan 4.18 - Persamaan 4.20 sedemikian hingga diperoleh nilai eigen yakni  $\omega = -(\kappa + \nu)$  beserta Persamaan 4.55- Persamaan 4.57 dengan persamaan tersebut berlaku pada Persamaan 4.58. Telah dijelaskan sebelumnya bahwa pada Persamaan 4.58 akan bersifat stabil jika berlaku  $d_1 > 0, d_2 > 0, d_3 > 0, (d_1d_2 - d_3) > 0$  dan  $(d_1d_2 - d_3) > 0$ . Karena pada titik ini berlaku polinomial yaitu

$$\omega^3 + d_1\omega^2 + d_2\omega + d_3 = 0 \quad (4.77)$$

maka berdasarkan teorema 2.3.1 bifurkasi hopf pada titik endemik tersebut terjadi jika  $d_2 > 0, d_3 > 0$  dan  $(d_1d_2 - d_3) = 0$  berlaku sedemikian hingga

$$\frac{d}{d\beta}(d_1d_2 - d_3) \neq 0 \quad (4.78)$$

Sesuai pada subbab sebelumnya dalam hal ini akan diambil  $d_2 > 0$  dan  $d_3 > 0$ . Oleh karena itu jika diambil  $d_1 \geq 0$  maka jelas bahwa  $d_1d_2 = d_3$  agar syarat awal bifurkasi Hopf terjadi dapat dipenuhi dimana  $d_1d_2 \neq d_3$  untuk  $d_1 < 0$ . Dalam hal ini dapat diperoleh  $\frac{d\beta S^*}{d\beta} = (S^* + \beta\frac{dS^*}{d\beta})$  dan  $\frac{d\beta L^*}{d\beta} = (L^* + \beta\frac{dL^*}{d\beta})$ . Selain itu, turunan-turunan titik tetap endemik dapat diperoleh sebagai berikut

$$\frac{dL^*}{d\beta} = \frac{1 - p}{\lambda Nm}\pi\left(1 - L\frac{(\phi(\phi + \psi)(\kappa + \nu) - \kappa\xi(\xi + \tau))}{\phi(\kappa + \nu)}\right) \quad (4.79)$$



$$\frac{dS^*}{d\beta} = \frac{(\phi(\phi + \psi)(\kappa + \nu) - \kappa\xi(\xi + \tau))}{\phi(\kappa + \nu)} \frac{dL^*}{d\beta} \quad (4.80)$$

$$\frac{dI^*}{d\beta} = \frac{\xi + \tau}{\phi} \frac{dL^*}{d\beta} \quad (4.81)$$

Sehingga dengan mengambil nilai-nilai

$$r_1 = -\left[\frac{1-p}{N}(S^* + \beta\frac{dS^*}{d\beta}) + \frac{p\alpha_L}{N}\frac{dS^*}{d\beta}\right] \quad (4.82)$$

dan

$$r_2 = \frac{1-p}{N}(L^* + \beta\frac{dL^*}{d\beta}) + \frac{p}{N}(\alpha_L\frac{dL^*}{d\beta} + \alpha_I\frac{dI^*}{d\beta}) \quad (4.83)$$

maka dapat diperoleh nilai-nilai sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta}d_3 &= \left((\phi + \psi + \frac{p\alpha_I}{N}S^*)r_2 + \lambda r_1\right)(\xi + \tau) \\ &+ \left[\frac{\phi p\alpha_I}{N}\frac{dS^*}{d\beta}\left(\frac{\beta(1-p)}{N}L^* + \frac{p}{N}(\alpha_LL^* + \alpha_II^*)\right)\right](\xi + \tau) \\ &- \frac{\phi\alpha_I}{N}\frac{dS^*}{d\beta} \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\frac{d}{d\beta}d_2 = (\xi + \tau + \lambda)r_1 + (\xi + \tau + \phi + \psi)r_2 \quad (4.85)$$

$$\frac{d}{d\beta}d_1 = r_1 + r_2 \quad (4.86)$$

Dalam hal ini dapat berlaku  $\frac{d}{d\beta}(d_1d_2 - d_3) = d_2\frac{d}{d\beta}d_1 + d_1\frac{d}{d\beta}d_2 - \frac{d}{d\beta}d_3$ . Sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta}d_1d_2 &= d_2\frac{d}{d\beta}d_1 + d_1\frac{d}{d\beta}d_2 \\ &= d_2(r_1 + r_2) + d_1((\xi + \tau + \lambda)r_1 + (\xi + \tau + \phi + \psi)r_2) \\ &= [d_1(\xi + \tau + \lambda) + d_2]r_1 + [(\xi + \tau + \phi + \psi)d_1 + d_2]r_2 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
d_2 \frac{d}{d\beta} d_1 + d_1 \frac{d}{d\beta} d_2 - \frac{d}{d\beta} d_3 &= \left[ d_1(\xi + \tau + \lambda) + d_2 - (\xi + \tau)(\phi + \psi + \frac{p\alpha_I}{N} S^*) \right] r_1 \\
&+ \left[ (\xi + \tau + \phi + \psi) d_1 + d_2 - (\xi + \tau)(\phi + \psi + \frac{p\alpha_I}{N} S^*) \right] r_2 \\
&+ \left[ 1 - (\xi + \tau) \left( \frac{\beta(1-p)}{N} L^* + \frac{p}{N} (\alpha_L L^* + \alpha_I I^*) \right) \right] \frac{\phi p \alpha_I}{N} \frac{dS^*}{d\beta}
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Berdasarkan Persamaan 4.87 maka jelas bahwa  $\frac{dd_1 d_2 - d_3}{d\beta} = d_2 \frac{dd_1}{d\beta} + d_1 \frac{dd_2}{d\beta} - \frac{dd_3}{d\beta} \neq 0$ . Jadi dapat disimpulkan bahwa pada titik endemik ini terdapat parameter  $\beta$  dimana dengan adanya sedikit pergeseran nilai pada  $\beta$  dapat menyebabkan perubahan kestabilan pada sistem. Sehingga benar bahwa pada titik endemik ini memiliki kemungkinan akan adanya bifurkasi hopf.

#### 4.5 Travelling Wave pada Sistem

Model matematika yang digunakan pada Persamaan 4.1 merupakan model penyebaran yang terjadi pada satu lokasi tertentu. Model tersebut merupakan model yang mengambil suatu populasi pada satu tempat. Oleh karena itu, distribusi populasi-populasi tersebut pada satu tempat ke tempat yang lainya pada model tersebut bukanlah merupakan sebuah asumsi yang digunakan pada sistem. Pada pembahasan kali ini akan terdapat konsep yang ditambahkan pada sistem sehingga pada model akan terdapat tambahan asumsi bahwa populasi akan bergerak diantara wilayah tertentu berdasarkan jalur-jalur yang menghubungkan satu wilayah ke wilayah yang lain. Sehingga dalam hal ini dapat diambil sebuah asumsi bahwa dengan adanya wilayah tersebut, maka populasi-populasi pada model penyebaran virus ebola dapat memasuki atau bahkan keluar dari wilayah ini. Hal inilah yang kemudian dapat mengakibatkan adanya penginfeksi pada daerah yang lain ataupun penyebaran pada daerah tersebut dikarenakan adanya wabah didaerah yang lainya. Sehingga *travelling wave* pada model penyebaran virus ebola ini dapat terjadi. Oleh karena itu pada model persebaran virus ebola dapat didefinisikan fluks atas populasi-populasi pada sistem yaitu  $\mathcal{J}$  dengan

$$\mathcal{J} = -D \frac{\partial L}{\partial x} \tag{4.88}$$

dengan  $L(x, t)$  adalah jumlah populasi dari satu kelas tertentu atas model dan  $D$  adalah koefisien diffusifitas pada populasi tersebut yang bernilai konstan. Selan-

jutnya akan diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} \\
&= -\frac{\partial \{-D \frac{\partial L}{\partial x}\}}{\partial x} \\
&= D \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Dengan menambahkan persamaan difusi tersebut pada model Persamaan 4.1 untuk setiap perubahan jumlah jumlah populasi di satu *kompartment* maka ddidaapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t} &= D_S \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \pi - \beta(1-p)S \frac{L}{N} - p(\alpha_L L + \alpha_I I) \frac{S}{N} - \lambda S + \kappa R \\
\frac{\partial L}{\partial t} &= D_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \beta(1-p)S \frac{L}{N} + p(\alpha_L L + \alpha_I I) \frac{S}{N} - \phi L - \psi L \\
\frac{\partial I}{\partial t} &= D_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \phi L - \xi I - \tau I \\
\frac{\partial R}{\partial t} &= D_R \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \xi I - \kappa R - \nu R
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Persamaan 4.90 merupakan persamaan perubahan jumlah populasi atas ruang (wilayah) dan waktu. Oleh karena itu analisis *travelling wave* pada Persamaan 4.90 selanjutnya dapat dilakukan. Pada Do, dkk. (2016) dinyatakan bahwa dengan adanya kontak antara individu *susceptible* dengan individu *latent* maupun terinfeksi dapat menyebabkan adanya transmisi virus ebola pada individu *susceptible* tersebut. Berdasarkan kasus tersebut dapat disimpulkan bahwa penyebab utama adanya penyebaran virus ini adalah adanya jumlah populasi *latent* maupun terinfeksi dalam satu wilayah tertentu ataupun dari wilayah yang lainnya. Maka pengamatan model *travelling wave* dalam hal ini dibatasi untuk model *travelling wave* di individu *latent* dan terinfeksi. Pada langkah yang pertama akan diasumsikan bahwa terdapat solusi dari Persamaan 4.90 yang berbentuk

$$\begin{aligned}
L(x, t) &= L(x - ct) \\
I(x, t) &= I(x - ct)
\end{aligned} \tag{4.91}$$

dengan  $c$  adalah kecepatan gelombang. Definisi dan teorema yang akan digunakan untuk membuktikan eksistensi *travelling wave* pada sistem yang adalah sebagai berikut

**Definisi 4.5.1.** (Hariyanto, 2014)

*Penyelesaian travelling wave dengan kecepatan c pada Persamaan 4.90 adalah*

penyelesaian yang memiliki bentuk 4.91 dan berhubungan dengan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik sedemikian hingga berlaku jika  $u = x - ct$  maka

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -\infty} (L, I) &= (L^*, I^*) \\ \lim_{u \rightarrow \infty} (L, I) &= (0, 0) \end{aligned} \quad (4.92)$$

**Teorema 4.5.1.** (Hariyanto, 2014)

Jika kecepatan minimal pada travelling wave adalah  $c_0$  sedemikian hingga untuk setiap  $c \geq c_0$  maka pada model sistem tak linear akan mempunyai penyelesaian travelling wave tak menaik  $(L(x - ct), I(x - ct))$  dengan kecepatan  $c$  sedemikian hingga memenuhi  $\lim_{u \rightarrow -\infty} = (L^*, I^*)$  dan  $\lim_{u \rightarrow \infty} = (0, 0)$

#### 4.5.1 Analisa Eksistensi Travelling Wave

Analisis eksistensi travelling wave diawali dengan membentuk  $L(u)$  dan  $I(u)$  dimana  $u = x - ct$ . Susbsitusi yang dilakukan pada  $L$  dan  $I$  yaitu dengan  $u = x - ct$  pada Persamaan 4.90 dapat menghasilkan persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} -c \frac{\partial L}{\partial u} &= D_L \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} + \beta(1-p)S \frac{L}{N} + p(\alpha_L L + \alpha_I I) \frac{S}{N} - \phi L - \psi L \\ -c \frac{\partial I}{\partial u} &= D_I \frac{\partial^2 I}{\partial u^2} + \phi L - \xi I + \tau I \end{aligned} \quad (4.93)$$

Syarat batas yang diambil dalam hal ini berdasarkan pada model Persamaan 4.93 adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(0)}{\partial t} &= \frac{\partial L(\mathcal{L})}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial I(0)}{\partial t} &= \frac{\partial I(\mathcal{L})}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4.94)$$

Persamaan 4.93 merupakan persamaan *travelling wave* atas *kompartement*  $L$  dan  $I$ . Persamaan tersebutlah yang kemudian akan dilinearisasi dengan menggunakan titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik pada sistem Persamaan 4.1. Pada tahap terakhir analisis akan eksistensi *travelling wave* pada Persamaan 4.93 dilakukan untuk mendapatkan kecepatan minimal pada sistem.

#### 4.5.2 Travelling wave disekitar titik tetap $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$

Pada titik tetap yang pertama yaitu  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$ , pertama-tama akan dilakukan linearisasi disekitar titik tetap tersebut sehingga model *travelling wave* Persamaan 4.93 akan menjadi

$$\begin{aligned}
-c \frac{dL}{du} &= D_L \frac{d^2L}{du^2} + [\beta(1-p) + p\alpha_L] \frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi]L + [p\alpha_I \frac{\pi}{N\lambda}]I \\
-c \frac{dI}{du} &= D_I \frac{d^2I}{du^2} + \phi L - (\xi + \tau)I
\end{aligned} \tag{4.95}$$

Pada bagian ini akan diambil penyelesaian Persamaan 4.95 adalah  $(L, I) = (j_1 e^{\delta u}, j_2 e^{\delta u})$  sehingga pada Persamaan 4.95 akan diperoleh

$$\begin{aligned}
-cj_1 \delta e^{\delta u} &= D_L j_1 \delta^2 e^{\delta u} + [\beta(1-p) + p\alpha_L] \frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi]j_1 e^{\delta u} + [p\alpha_I \frac{\pi}{N\lambda}]j_2 e^{\delta u} \\
-cj_2 \delta e^{\delta u} &= D_I j_2 \delta^2 e^{\delta u} + \phi j_1 e^{\delta u} - (\xi + \tau)j_2 e^{\delta u}
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Karena  $e^u \neq 0$  maka untuk  $-cj_2 \delta e^{\delta u} = D_I j_2 \delta^2 e^{\delta u} + \phi j_1 e^{\delta u} - (\xi + \tau)j_2 e^{\delta u}$  sedemikian hingga diperoleh  $[D_I j_2 \delta^2 + cj_2 \delta + \phi j_1 - (\xi + \tau)j_2]e^{\delta u} = 0$  dapat diketahui bahwa berlaku  $D_I j_2 \delta^2 + cj_2 \delta + \phi j_1 - (\xi + \tau)j_2 = 0$ . Pada Persamaan 4.96 berdasarkan pada persamaan yang pertama dalam hal ini juga akan diperoleh  $D_L j_1 \delta^2 e^{\delta u} + cj_1 \delta + [\beta(1-p) + p\alpha_L] \frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi]j_1 + [p\alpha_I \frac{\pi}{N\lambda}]j_2 = 0$ . Sehingga pada tahap selanjutnya akan dicari nilai-nilai kecepatan minimal berdasarkan persamaan berikut

$$\begin{aligned}
g(\delta) &= D_L j_1 \delta^2 + cj_1 \delta + [\beta(1-p) + p\alpha_L] \frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi]j_1 + [p\alpha_I \frac{\pi}{N\lambda}]j_2 = 0 \\
h(\delta) &= D_I j_2 \delta^2 + cj_2 \delta + \phi j_1 - (\xi + \tau)j_2 = 0
\end{aligned} \tag{4.97}$$

Titik kritis pada Persamaan 4.97 dapat diperoleh dengan memberikan  $\frac{dg}{d\delta} = 0$  dan  $\frac{dh}{d\delta} = 0$ . Dalam hal ini dengan memberikan  $\frac{dg}{d\delta} = 0$  maka diperoleh  $\delta = \frac{-c}{2D_L} < 0$ . Demikian juga dengan memberikan  $\frac{dh}{d\delta} = 0$  akan menghasilkan  $\delta = \frac{-c}{2D_I} < 0$ . Dengan melakukan substitusi  $\delta = \frac{-c}{2D_L} < 0$  pada  $g$  dan  $\delta = \frac{-c}{2D_I} < 0$  pada  $h$  di Persamaan 4.97 akan diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
j_1 \frac{c^2}{4D_L} - j_1 \frac{c^2}{2D_L} + [\beta(1-p) + p\alpha_L] \frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi]j_1 + [p\alpha_I \frac{\pi}{N\lambda}]j_2 &= 0 \\
j_2 \frac{c^2}{4D_I} - j_2 \frac{c^2}{2D_I} + \phi j_1 - (\xi + \tau)j_2 &= 0
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Sehingga berdasarkan pada Persamaan 4.98 akan dapat diperoleh dua kecepatan minimal pada masing-masing *kompartement* baik  $L$  maupun  $I$  yaitu

$$c_L^* = 2\sqrt{\frac{D_L[\beta(1-p) + p\alpha_L]\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi}{j_1} + [p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda}]j_2} \quad (4.99)$$

$$c_I^* = 2\sqrt{\frac{D_I\phi j_1 - (\xi + \tau)j_2}{j_2}}$$

dimana dengan kecepatan minimal tersebut akan menghasilkan sebuah gelombang penyebaran.

#### 4.5.3 Travelling wave disekitar titik tetap ( $S^*, L^*, I^*, R^*$ )

Pada titik tetap kesetimbangan endemik yaitu ( $S^*, L^*, I^*, R^*$ ) sebagaimana pada Persamaan 4.15- Persamaan 4.20 juga akan dilakukan analisa terhadap eksistensi *travelling wave* pada sistem berdasarkan titik tetap endemik tersebut. Bentuk persamaan diffusi yang digunakan juga sama seperti sebelumnya yaitu Persamaan 4.93. Sehingga dengan melakukan dengan melakukan cara yang sama seperti sebelumnya untuk titik tetap endemik tersebut maka dapat diperoleh

$$-c\frac{dL}{du} = D_L\frac{d^2L}{du^2} + [\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N}]S$$

$$+ [\beta(1-p)\frac{S^*}{N} + p\alpha_L\frac{S^*}{N} - \phi - \psi]L + [\alpha_I\frac{S^*}{N}]I \quad (4.100)$$

$$-c\frac{dI}{du} = D_I\frac{d^2I}{du^2} + \phi L - (\xi + \tau)I$$

Pada Persamaan 4.100 tersebut terdapat  $[\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N}]S$  yang merupakan transmisi infeksi ebola pada individu *susceptible* akibat adanya interaksi individu tersebut dengan individu-individu *latent* maupun individu-individu terinfeksi. Dalam hal ini dengan adanya infeksi tersebut maka akan terdapat sejumlah populasi tertentu yang akan memasuki kompartemen  $L$ . Oleh karena itu dalam tingkatan waktu tertentu maka individu *susceptible* tersebut akan memasuki kompartemen *latent*. Jumlah individu-individu *susceptible* yang menjadi individu *latent* baik karena interaksinya dengan individu *latent* maupun terinfeksi akan dapat dinyatakan sebagai

$$[\beta(1-p)\frac{L^*}{N} + p(\alpha_L L^* + \alpha_I I^*)\frac{1}{N}]S = \nu L \quad (4.101)$$

Berdasarkan Persamaan 4.101 maka Persamaan 4.100 dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
-c \frac{dL}{du} &= D_L \frac{d^2 L}{du^2} + [\nu + \beta(1-p) \frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} - \phi - \psi]L \\
&\quad + [\alpha_I \frac{S^*}{N}]I \\
-c \frac{dI}{du} &= D_I \frac{d^2 I}{du^2} + \phi L - (\xi + \tau)I
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Sehingga dengan mengambil penyelesaian Persamaan 4.102 adalah  $(L, I) = (k_1 e^{\delta u}, k_2 e^{\delta u})$ , maka Persamaan 4.102 akan dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
-ck_1 \delta e^{\delta u} &= D_L k_1 \delta^2 e^{\delta u} + [\nu + \beta(1-p) \frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} - \phi - \psi]k_1 e^{\delta u} \\
&\quad + [\alpha_I \frac{S^*}{N}]k_2 e^{\delta u} \\
-ck_2 \delta e^{\delta u} &= D_I k_2 \delta^2 e^{\delta u} + \phi k_1 e^{\delta u} - (\xi + \tau)k_2 e^{\delta u}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Pada bagian kedua di Persamaan 4.103 yaitu  $-ck_2 \delta e^{\delta u} = D_I k_2 \delta^2 e^{\delta u} + \phi k_1 e^{\delta u} - (\xi + \tau)k_2 e^{\delta u}$  dengan  $e^{\delta u} \neq 0$  maka persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi  $g(\delta) = D_I k_2 \delta^2 + ck_2 \delta + \phi k_1 - (\xi + \tau)k_2 = 0$ . Demikian juga pada persamaan yang pertama pada Persamaan 4.103 maka persamaan tersebut dapat dibentuk sebagai

$$\begin{aligned}
h(\delta) &= D_L k_1 \delta^2 + ck_1 \delta + [\nu + \beta(1-p) \frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} - \phi - \psi]k_1 \\
&\quad + [\alpha_I \frac{S^*}{N}]k_2 = 0
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Jika diambil nilai

$a^* = [\nu + \beta(1-p) \frac{S^*}{N} + p\alpha_L \frac{S^*}{N} - \phi - \psi]k_1 + [\alpha_I \frac{S^*}{N}]k_2$ , maka diperoleh

$$h(\delta) = D_L k_1 \delta^2 + ck_1 \delta + a^* \tag{4.105}$$

Pada tahap pertama saat diambil nilai  $\frac{dg}{d\delta} = 0$  dan  $\frac{dh}{d\delta} = 0$  maka diperoleh  $\delta = \frac{-c}{2D_I} < 0$  serta  $\delta = \frac{-c}{2D_L} < 0$ . Saat substitusi dilakukan pada  $\delta = \frac{-c}{2D_I} < 0$  pada  $g$  dan  $\delta = \frac{-c}{2D_L} < 0$  pada  $h$ , maka hasil perhitungan pada substitusi tersebut adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
D_I k_2 \left( \frac{-c}{2D_I} \right)^2 + ck_2 \left( \frac{-c}{2D_I} \right) + \phi k_1 - (\xi + \tau)k_2 &= 0 \\
D_L k_1 \left( \frac{-c}{2D_L} \right)^2 + ck_1 \left( \frac{-c}{2D_L} \right) + a^* &= 0
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Berdasarkan pada Persamaan 4.106 maka didapatkan dua kecepatan minimum pada masing-masing kompartemen yaitu

$$c_I^* = 2\sqrt{\frac{D_I(\phi k_1 - (\xi + \tau)k_2)}{k_2}} \quad (4.107)$$

$$c_L^* = 2\sqrt{\frac{D_L a^*}{k_1}}$$

Pengamatan-pengamatan yang dilakukan tersebut dapat memberikan kesimpulan bahwa jika pada satu tempat tertentu pernah terjadi wabah atau penyebaran penyakit dan dengan adanya pergerakan individu-individu *latent* maupun terinfeksi oleh adanya sebab tertentu, maka adanya wabah ebola ditempat yang lain, akan memungkinkan terjadi. Hal ini dikarenakan kecepatan minimum saat penyebaran terjadi telah dapat diketahui. Sehingga jika berlaku kecepatan-kecepatan penyebaran tersebut melebihi kecepatan minimum yang diperoleh maka besar kemungkinan bahwa penularan penyakit juga akan terjadi di tempat yang lainnya.

#### 4.6 Simulasi

Model penyebaran ebola pada bagian ini akan diselesaikan secara numerik menggunakan Runge Kutta orde 4. Dalam hal ini model tersebut akan didiskritisasi menggunakan  $n=100000$  bagian. Estimasi nilai parameter  $\phi$  pada jurnal yang dituliskan oleh Tae S.do dkk adalah  $\phi = \frac{1}{9}p_I d^{-1}$  dengan  $p_I$  merupakan proporsi dari pasien terinfeksi dan terisolasi atas pasien yang terinfeksi namun belum ada isolasi maupun konfirmasi atas penyakit yang diidapnya. Terjadinya wabah ebola yang telah dikonfirmasi di Nigeria memiliki rata-rata isolasi yang sangat besar hingga mencapai 90% (1 kemungkinan tak terkonfirmasi secara cepat dan 19 terkonfirmasi). Pada jurnal tersebut juga dijelaskan bahwa  $\xi = \frac{1}{18}p_R d^{-1}$  dimana  $p_R$  adalah rata-rata *recovery*. Rata-rata waktu *recovery* pasien di Nigeria dalam hal ini adalah 18 hari dimana nilai  $p_R = 60\%$  di Nigeria dan lebih kecil di afrika barat yakni 50%. Semenjak gejala penyakit terjadi jika kematian terjadi pada individu terinfeksi maka hal tersebut membutuhkan waktu rata-rata 8-9 hari sehingga dapat diambil nilai  $\tau = \frac{1}{8.5}(1 - p_R)d^{-1}$ . Rata-rata masa inkubasi adalah 9 hari dan masa kritis sebelum kematian biasanya adalah 7 hari. Oleh karena itu dapat diambil nilai  $\psi = \frac{1}{(7+9)}(1 - p_I)d^{-1}$  dimana  $1 - p_I = 10\%$  di Nigeria dan lebih besar di afrika barat. Petugas kesehatan dalam hal ini adalah 10% dari seluruh populasi. Pada parameter yang lain menurut keterangan Tae S.Do dkk yaitu  $\alpha_L = \alpha_I = \alpha = 1.5\beta$ . Bersarnya nilai parameter tersebut dikarenakan dua perawat dari pasien ebola di Texas terinfeksi. Dokter, perawat beserta para pembantu dirumah sakit terinfeksi di



afrika barat. Sementara dua belas dari dua puluh pasien ebola di Lagos merupakan petugas kesehatan. Sehingga jelas bahwa dapat diambil  $\alpha = 1.5\beta$ . Sementara  $\beta$  pada jurnal yang dituliskan oleh Tae S Do dkk besarnya merupakan transmisi terinfeksi individu *susceptible* akibat kontak dengan individu terinfeksi maupun *latent* dalam hal ini menurun diantara  $\beta_I$  dan  $\beta_L$ .  $\beta_I$  merupakan rata-rata transmisi saat wabah virus ebola terjadi. Penggunaan data pada saat terjadinya wabah ebola di Nigeria pada dua belas hari pertama maka estimasi nilai  $\beta_I$  pada jurnal tersebut dilakukan dengan menggunakan persamaan sebagai berikut seperti pada 2.2

$$\beta_I(1 - p) + 1.5\beta_I p[1 + \phi(\xi + \tau) + \lambda - \phi - \psi] = 0.167 \quad (4.108)$$

dengan  $\lambda = 0$  sehingga dapat diperoleh  $\beta_I = 0.221d^{-1}$ .  $\beta_L$  pada jurnal tersebut disebutkan akan memenuhi

$$\frac{(\tau + \xi)[\beta_L(1 - p) + 1.5\beta_L p] + 1.5\beta_L p\phi}{(\xi + \tau)(\phi + \psi)} = \frac{1}{2} \quad (4.109)$$

Sehingga diperoleh  $\beta_L = 0.043$  (Do, dkk., 2016). Disebutkan pada jurnal yang dituliskan oleh Zhiming Li dkk bahwa  $\pi$  merupakan rata-rata kelahiran per 1000 orang di setiap tahun. Berdasarkan jurnal tersebut rata-rata kelahiran di Guinea pada tahun 2014 adalah 0.03602. Pada jangka waktu satu hari Zhiming Li dkk memberikan  $\pi = \frac{0.03602}{365} 11.744.951 = 1.159$  dikarenakan hal tersebut. Rata-rata kematian yaitu  $\lambda$  menurut Zhiming Li dkk merupakan rata-rata kematian alami per 1000 orang disetiap tahun (Li, dkk., 2015). Nilai  $\lambda$  tersebut dapat digunakan pada numerik ini sehingga diperoleh  $\lambda = 0.0643$  yang merupakan kasus penyebaran virus ebola di Guinea. Nilai tersebut sesuai dengan estimasi yang dilakukan oleh Sylvie Diane Djiomba Njankou (Njankou, 2015). Nilai  $v = 0$  dapat diambil dikarenakan rata-rata kematian saat periode *recovery* lebih kecil jika dibandingkan rata-rata kematian saat periode terinfeksi. Berdasarkan Zhiming Li dkk rata-rata proses penyembuhan yang efektif adalah  $0.093 < \kappa < 0.2857$  (Li, dkk., 2015). Oleh karena itu nilai parameter-parameter yang digunakan pada numerik ini adalah sebagai berikut:

$$\beta = 0.221$$

$$\alpha_L = 1.5\beta$$

$$\alpha_I = 1.5\beta$$

$$\phi = 0.1$$

$$\xi = 0.6/18$$

$$\tau = 0.4/8.5$$

$$\psi = 0.9/16$$

$$p = 0.1$$

$$\pi = 1.159$$

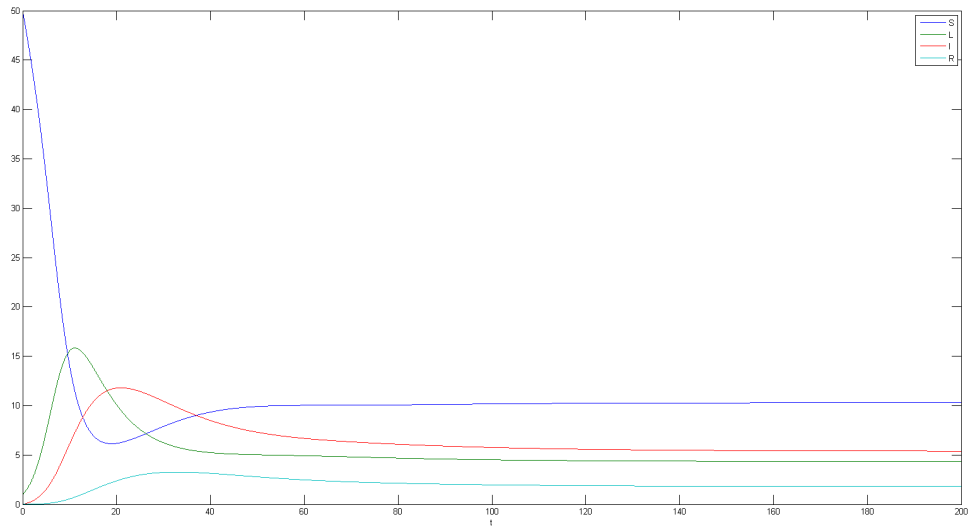
$$\lambda = 0.0643$$

$$\kappa = 0.1$$

$$v = 0$$

Dalam hal ini kondisi batas yang diberikan disesuaikan pada jurnal yang dituliskan oleh Zhiming Li dkk (Li, dkk., 2015). Dalam hal ini nilai awal yang diambil sesuai dengan penelitian oleh Tae S.Do dkk dengan mengambil  $S(0) = 50, L(0) = 1, I(0) = R(0) = 0$  (Do, dkk., 2016). Berdasarkan nilai parameter-parameter yang diperoleh jelas bahwa model penyebaran virus ebola ini bersifat tak stabil. Oleh karena itu akan terdapat individu yang terinfeksi dengan jumlah yang cukup banyak. Seperti dijelaskan pada gambar 4.1 terlihat bahwa jumlah *susceptible* dari kondisi awal yang diperoleh semakin mengalami penurunan diselang waktu sebelum 30 hari. Hal tersebut dikarenakan besarnya transmisi penyebaran virus sehingga semakin banyak pula individu-individu yang mengalami infeksi. Demikian dengan jumlah individu-individu *latent* di awal waktu mengalami kenaikan dan kemudian mengalami penurunan jumlahnya hingga mencapai nilai tertentu seiring berjalannya waktu. Terlihat juga jumlah *recovery* yang paling sedikit diantara yang lain dikarenakan *rates recovery* atas individu-individu terinfeksi sngat kecil. Oleh karena itu dalam mengendalikan penyakit ini diperlukan adanya penanganan medis yang lebih baik sehingga semakin banyak individu yang mendapatkan pengobatan. Demikian pula dengan kontak antar individu harus dijaga sedemikian rupa sehingga besarnya transmisi virus akan semakin berkurang. Sehingga penyebaran virus ebola disetiap negara dapat dihilangkan.

Pada kondisi yang selanjutnya yaitu saat bifurkasi hopf maka jumlahan dari rata-rata *recovery* dan rata-rata kematian seseorang akibat infeksi akan sama besar jika dibandingkan dengan besaran transmisi pada individu *susceptible* dikurangi dengan rata-rata kematian individu *latent* dan rata-rata individu *latent* yang memasuki kelas *infected*. Proses yang sama akan dilakukan seperti



Gambar 4.1: Hasil Simulasi Pada Model Persebaran Virus Ebola pada Kondisi tak Stabil

pada simulasi sebelumnya. Namun dalam hal ini akan diambil nilai  $\beta > 1$  yang menyebabkan adanya infeksi secara besar-besaran pada satu daerah tertentu. Namun besarnya nilai transmisi ebola tersebut akan diimbangi dengan nilai  $\phi$  yang cukup besar sehingga banyak akan individu-individu terinfeksi yang masuk pada *kompartement I*. Jumlah individu *recovery* juga memungkinkan bertambah meskipun seiring berjalanya waktu akan terdapat individu-individu yang mengalami proses penyembuhan akan kembali memasuki *kompartement S*. Oleh karena itu parameter-parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\beta = 7.5$$

$$\alpha_L = 4.5\beta$$

$$\alpha_I = 4.5\beta$$

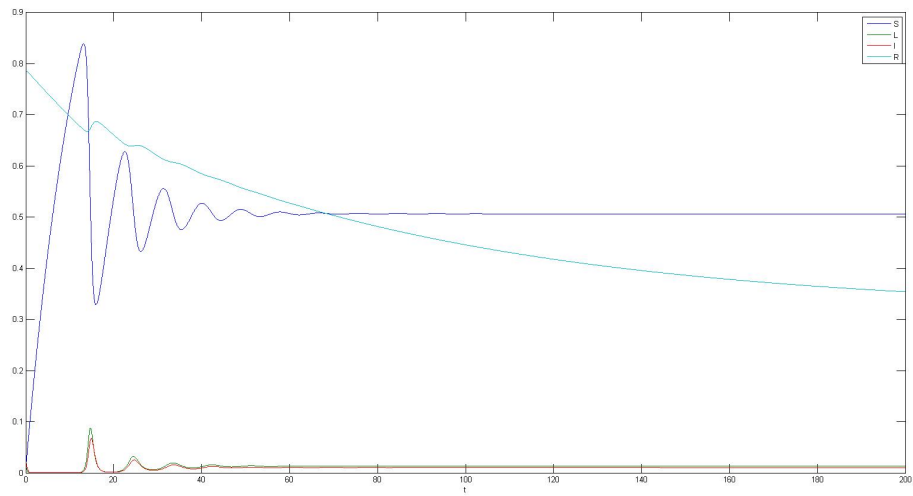
$$\phi = 40.17/9.5$$

$$\xi = 10.65/28.5$$

$$\tau = 4.8865$$

$$\psi = 10.5/16.5$$

$$p = 0.1$$



Gambar 4.2: Hasil Simulasi Pada Model Persebaran Virus Ebola pada Kondisi Bifurkasi Hopf

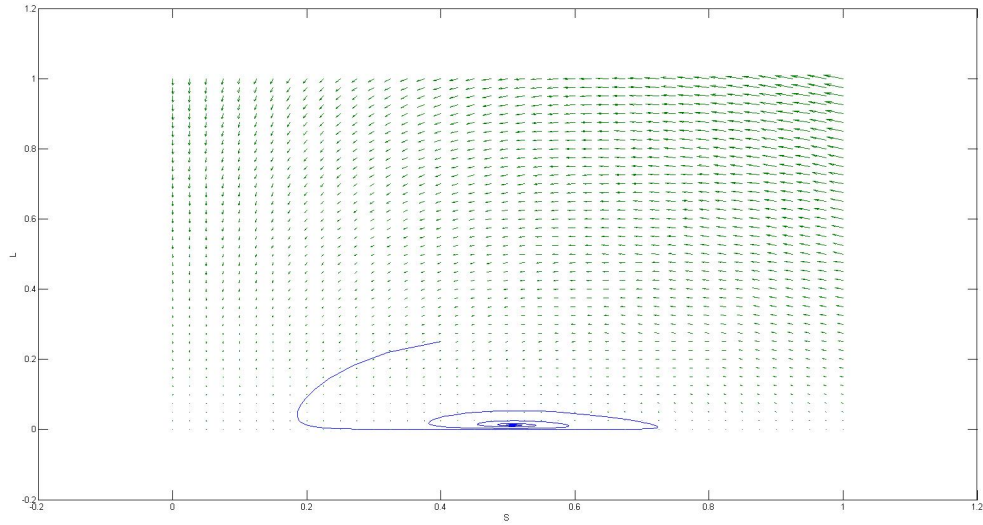
$$\pi = 0.1$$

$$\lambda = 0.07479$$

$$\kappa = 0.0023$$

$$v = 0.01$$

Pada bagian ini parameter-parameter yang diambil merupakan nilai-nilai yang diinginkan agar bifurkasi Hopf terjadi pada sistem. Hasil penyelesaian sistem berdasarkan nilai parameter-parameter yang diberikan pada kondisi ini dapat dijelaskan berdasarkan gambar 4.2 dengan kondisi batas Dirichlet  $(S^*, L^*, R^*, I^*)$ . Terlihat pada gambar 4.2 jumlah populasi *susceptible* mengalami kenaikan dan penurunan pada mulanya, dari kondisi awal sebelumnya sehingga jumlah populasi *susceptible* akan hampir mendekati suatu nilai tertentu seiring berjalannya waktu. Dalam hal ini jumlah populasi *latent* saling berimpit dengan jumlah individu terinfeksi seiring dengan berjalannya waktu. Namun pada gambar 4.2 terlihat bahwa jumlah individu *recovery* selalu menurun hingga mencapai nilai tertentu. Kejadian-kejadian tersebut dikarenakan adanya infeksi besar-besaran yang terjadi pada individu *susceptible* yang diimbangi dengan besarnya jumlah individu *latent* yang memasuki *kompartment* terinfeksi dimana jumlah individu terinfeksi tersebut juga dapat berkurang karena adanya proses penyembuhan pada individu terinfeksi. Oleh karena kasus tersebut maka adanya proses penyembuhan dapat memper-



Gambar 4.3: Trayektori Populasi  $S$  dan  $L$  Beserta Arah Potrait Fasenya

banyak jumlah individu-individu *recovery* yang dapat dinyatakan sembuh total dari penyakit. Fase potrait dan trayektori pada kondisi ini juga dapat dilihat berdasarkan pada gambar 4.3. Terlihat pada gambar tersebut arah fase potrait dalam hal ini semakin mendekati titik tetap  $(S^*, L^*)$  pada koordinat titik  $S - L$ . Dalam hal ini berdasarkan analisis sebelumnya sistem tersebut mengalami bifurkasi Hopf. Kondisi ini terjadi saat salah satu nilai eigen atas sistem persebaran ebola memiliki nilai imajiner murni dimana bagian real dari nilai eigen tersebut adalah 0.

Model *travelling wave* pada persamaan 4.95 yang telah dilinearkan di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit, model tersebut selanjutnya akan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga. Penggunaan kondisi batas pada simulasi ini yaitu Dirichlet seperti pada definisi 4.5.1. Pada  $x_0$  maka berlaku  $L(t, x_0) = L^*$  dan  $I(t, x_0) = I^*$  demikian juga pada  $x_1$  juga digunakan kondisi batas Dirichlet  $L(t, x_1) = L^*$  dengan  $I(t, x_1) = I^*$  beserta  $x_0 = -5$  dan  $x_1 = 5$ . Syarat batas yang digunakan selanjutnya adalah dengan menggunakan teorema 4.5.1 sedemikian hingga dapat diambil kondisi batas Neuman dengan nilai  $\mathcal{L} = 3$  dengan  $t_{awal} = 0$  dan  $t_{akhir} = \mathcal{L}$  yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(0)}{\partial t} &= \frac{\partial L(\mathcal{L})}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial I(0)}{\partial t} &= \frac{\partial I(\mathcal{L})}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4.110)$$

Parameter-parameter yang digunakan dalam hal ini adalah sebagai berikut

$$\beta = 0.221$$

$$\alpha_L = 1.5\beta$$

$$\alpha_I = 1.5\beta$$

$$\phi = 0.1$$

$$\xi = 0.6/18$$

$$\tau = 0.4/8.5$$

$$\psi = 0.9/16$$

$$p = 0.1$$

$$\pi = 1.159$$

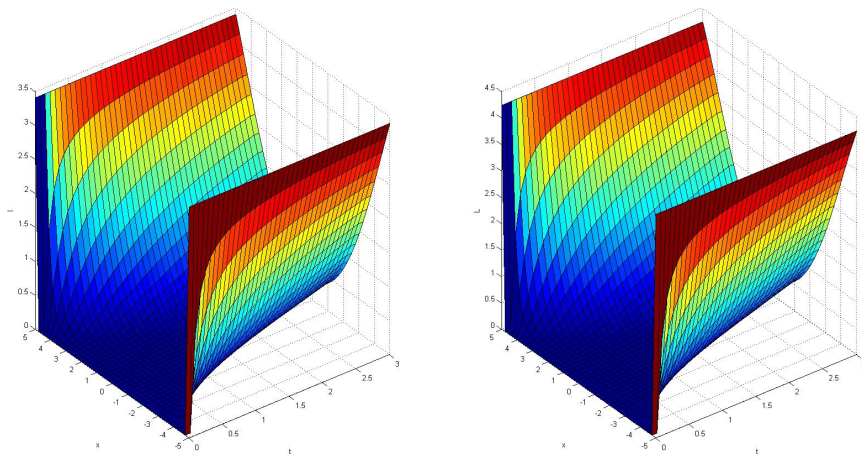
$$\lambda = 0.0643$$

$$\kappa = 0.1$$

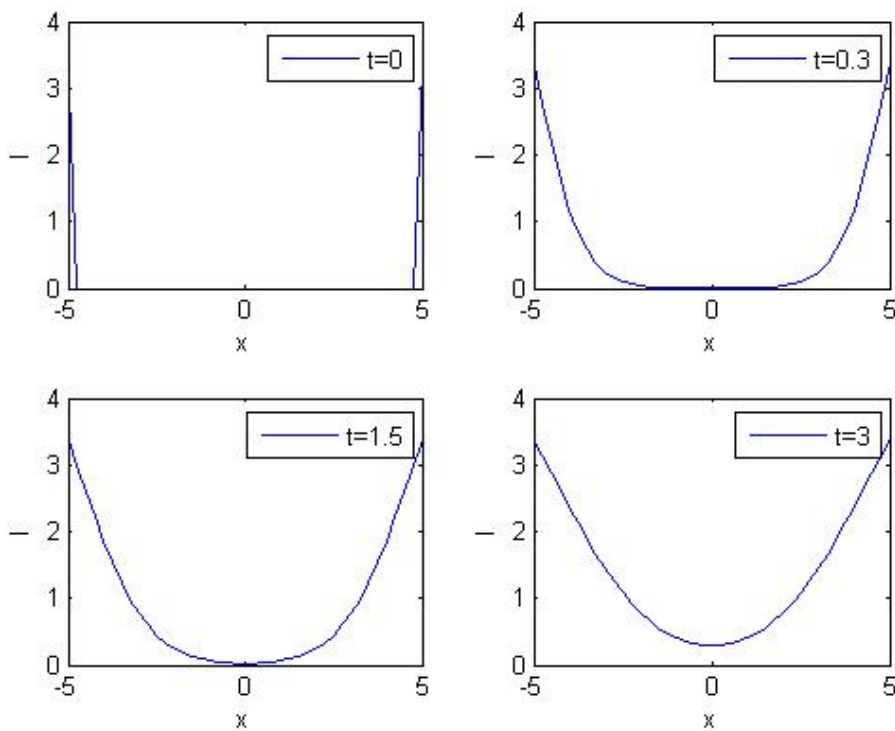
$$v = 0$$

dengan parameter-parameter tersebut sama dengan parameter-parameter yang diambil pada gambar 4.1 dengan sistem berada pada kondisi yang tak stabil. Hasil simulasi *travelling wave* ini dengan menggunakan parameter-parameter tersebut dapat dilihat pada gambar 4.4. Terlihat pada gambar 4.4 bahwa seiring berjalanya waktu maka jumlah individu-individu yang terinfeksi semakin banyak. Hal tersebut dapat dilihat pada gambar 4.5 yang menjelaskan bahwa semakin berjalanya waktu maka jumlah individu terinfeksi meningkat.

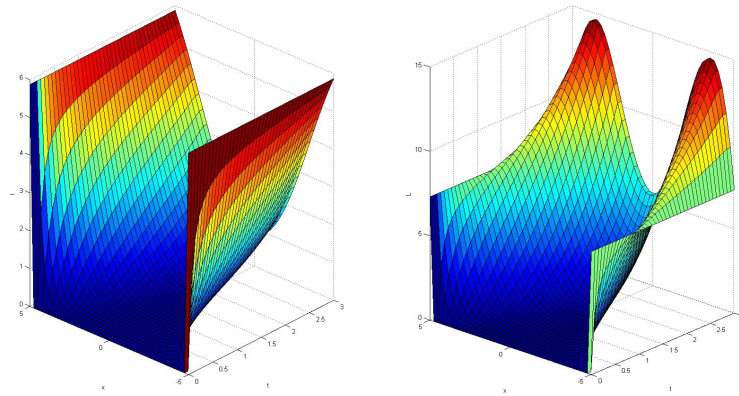
Terlihat pada gambar 4.5 bahwa seiring berjalanya waktu jumlah individu terinfeksi semakin meningkat. Peningkatan tersebut menunjukkan bahwa saat terjadi wabah virus ebola di dua tempat berbeda memungkinkan adanya gelombang penyebaran lain di lintasan yang menjadi penghubung kedua tempat tersebut. Penyebaran ini dikarenakan pergerakan individu-individu terinfeksi secara bebas dapat memperluas jangkauan penyebaran virus di waktu yang berbeda. Pada kondisi yang berbeda maka dalam hal ini parameter yang dirubah adalah nilai  $\beta = 1$ . Hasil simulasi atas parameter-parameter tersebut dengan menggunakan kondisi awal (Dirichlet) dan kondisi batas (Neuman) yang sama dapat dilihat pada gambar 4.6. Terlihat pada gambar 4.6 gelombang penyebaran yang lebih besar terjadi pada



Gambar 4.4: *Travelling Wave* di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Tidak Stabil



Gambar 4.5: Gelombang *Travelling Wave* di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Tidak Stabil



Gambar 4.6: *Travelling Wave* di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Stabil

individu terinfeksi dan *latent*. Penyebaran yang lebih besar tersebut dikarenakan besarnya transmisi virus sehingga memperbanyak penyebaran virus di waktu yang berbeda. Penggambaran gelombang dengan lebih jelas dapat dilihat pada gambar 4.7 (gelombang penyebaran individu *latent*). Karena besarnya transmisi pada satu tempat, maka wabah virus ebola juga terjadi di tempat yang lain. Hal tersebut dikarenakan pergerakan individu keluar masuk di satu tempat tertentu. Sehingga saat individu terinfeksi melewati jalur tertentu maka penyebaran juga terjadi pada tempat tersebut dimana seiring berjalannya waktu jumlah individu *latent* semakin besar.

Saat bifurkasi terjadi dalam hal ini parameter-parameter yang digunakan adalah sebagai berikut

$$\beta = 3$$

$$\alpha_L = 1.5\beta$$

$$\alpha_I = 1.5\beta$$

$$\phi = 5.17/9.5$$

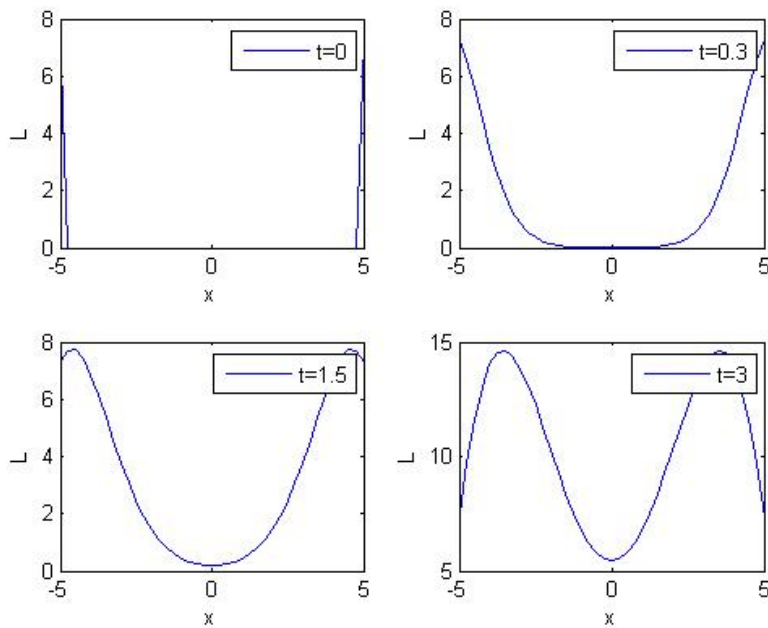
$$\xi = 10.65/18.5$$

$$\tau = 1.5957$$

$$\psi = 10.5/16.5$$

$$p = 0.1$$





Gambar 4.7: Gelombang *Travelling Wave* di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Stabil

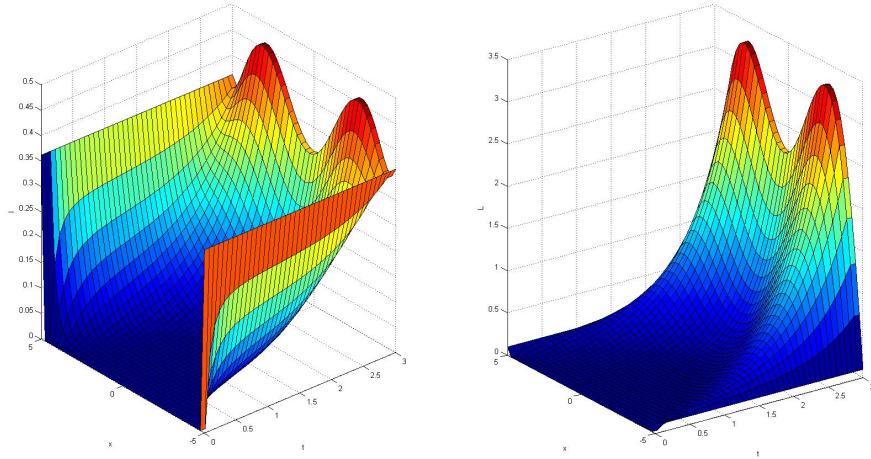
$$\pi = 0.1$$

$$\lambda = 0.07479$$

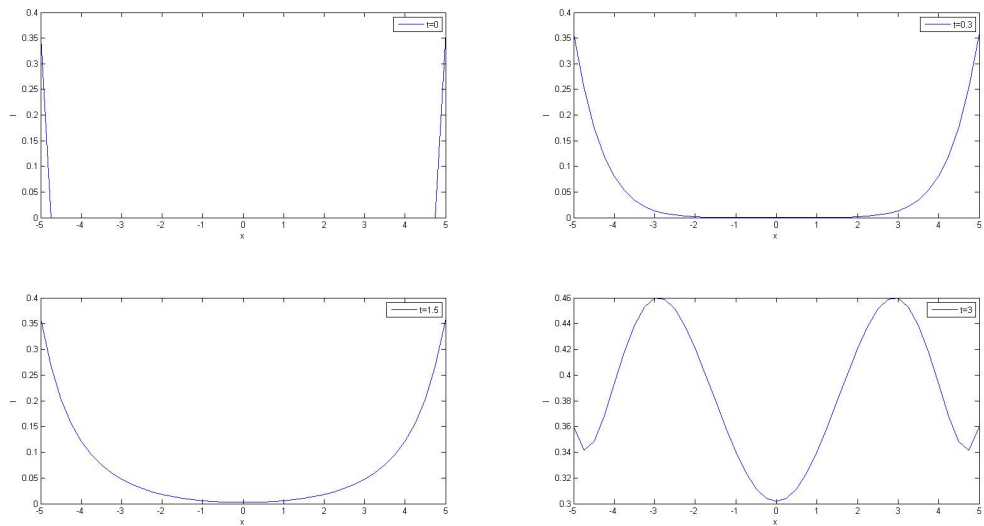
$$\kappa = 0.0023$$

$$\nu = 0.001$$

dengan parameter-parameter yang diambil tersebut adalah sesuai dengan kondisi bifurkasi Hopf. Hasil simulasi *travelling wave* tersebut selanjutnya dapat dilihat pada gambar 4.8. Berdasarkan pada hasil simulasi yang diberikan pada gambar 4.8 terdapat perbedaan yang cukup signifikan terhadap populasi terinfeksi (kiri). Terlihat pada gambar tersebut seiring berjalannya waktu maka jumlah individu terinfeksi maupun *latent* semakin besar. Perbedaan gelombang pada individu terinfeksi sesuai dengan parameter-parameter tersebut seperti pada gambar 4.9 dengan waktu yang berbeda. Terlihat jika diberikan kondisi dimana dua tempat yang berbeda mengalami wabah ebola maka jalur diantara dua tempat tersebut dimana individu terinfeksi bebas bergerak, memiliki kemungkinan wabah ebola yang sangat besar. Hal tersebut dapat dilihat saat  $t = 3$  jumlah individu terinfeksi selain di dua tempat tersebut mengalami wabah yang lebih besar.



Gambar 4.8: *Travelling Wave* di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Bifurkasi Hopf



Gambar 4.9: Gelombang *Travelling Wave* di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit pada Kondisi Bifurkasi Hopf

Simulasi yang lain dapat dilakukan dengan konidisi batas Dirichlet yang berbeda yakni  $L(t_0, x_0) = L^*$  dan  $I(t_0, x_0) = I^*$  beserta  $L(t_1, x_1) = L^*$  dan  $I(t_1, x_1) = I^*$  dimana  $t_{awal} = 0$  dan  $t_{akhir} = 1$ . Kondisi batas Neuman yang digunakan juga berbeda seperti sebelumnya yaitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(x_0)}{\partial x} &= \frac{\partial L(x_1)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial I(x_0)}{\partial x} &= \frac{\partial I(x_1)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L(0)}{\partial t} &= \frac{\partial L(\mathcal{L})}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial I(0)}{\partial t} &= \frac{\partial I(\mathcal{L})}{\partial t} = 0\end{aligned}\tag{4.111}$$

Dalam hal ini parameter, yang diberikan adalah sebagai berikut

$$\beta = 3$$

$$\alpha_L = 1.5\beta$$

$$\alpha_I = 4.5\beta$$

$$\phi = 0.57/9.5$$

$$\xi = 1.65/28.5$$

$$\tau = 7.16/8.5$$

$$\psi = 14.5/16.5$$

$$p = 0.1$$

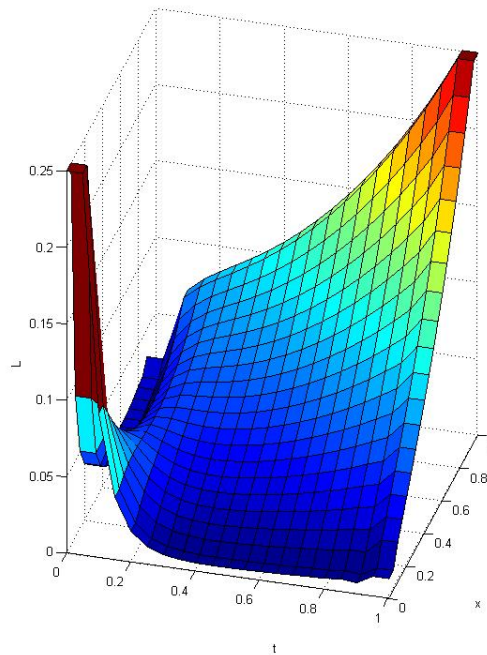
$$\pi = 0.1$$

$$\lambda = 0.07479$$

$$\kappa = 0.0023$$

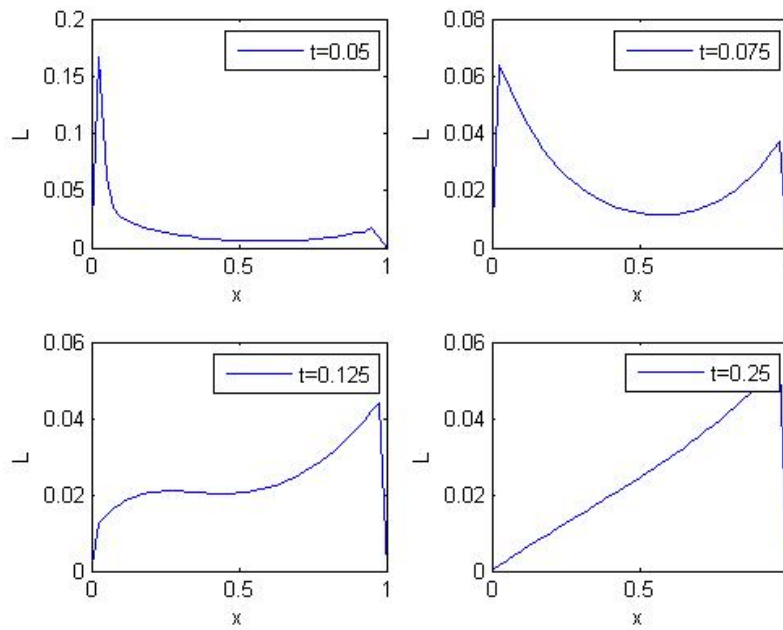
$$v = 0.01$$

dengan  $\nu = 0.2431$ . Hasil simulasi model *travelling wave* di titik endemik ini dihasilkan seperti pada gambar 4.10.

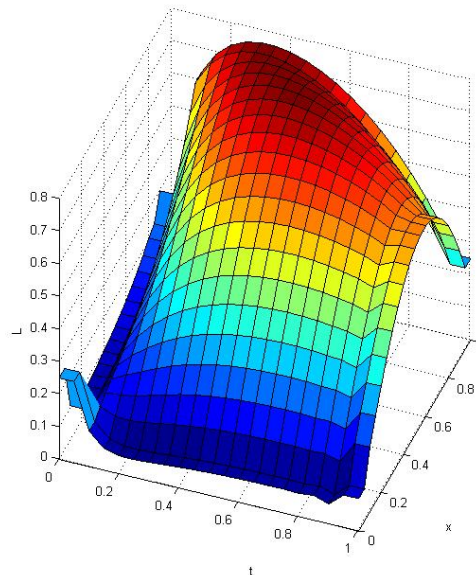


Gambar 4.10: *Travelling Wave L* di Sekitar Titik Endemik pada Kondisi Tidak Stabil

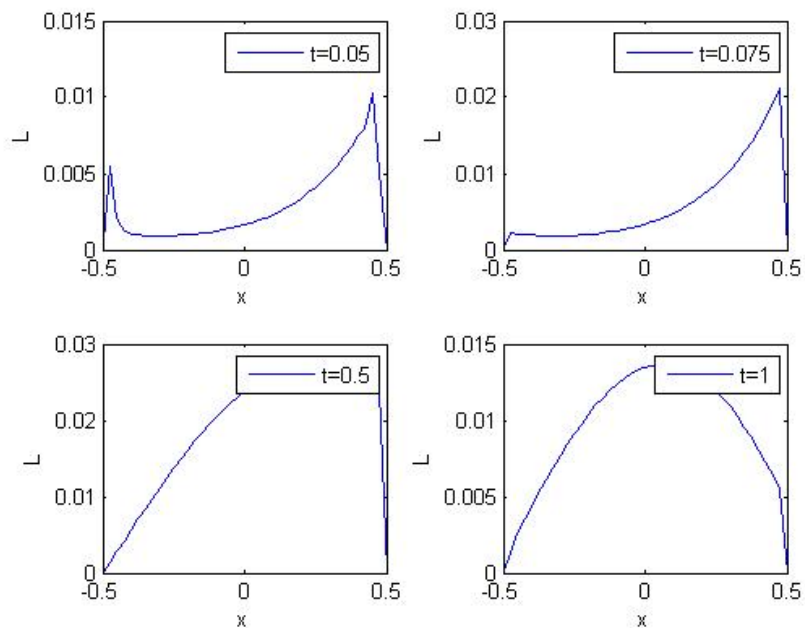
Pada gambar tersebut terlihat pada kompartemen *latent* mengalami kenaikan dan penurunan jumlah di selang waktu  $0 \leq t \leq 1$  dan di antara  $x_0 \leq x \leq x_1$ . Kenaikan tersebut menandakan bahwa terdapat peningkatan jumlah individu *latent*. Meskipun juga terdapat penurunan individu *latent* pada selang waktu  $t$ . Gelombang pada gambar 4.10 dapat dilihat lebih jelas pada gambar 4.11. Terlihat terjadinya perbedaan gelombang pada gambar 4.11 di waktu yang berbeda. Ada saat tertentu dimana jumlah individu latent sedikit namun seiring berjalanya waktu jumlah tersebut meningkat drastis. Peningkatan tersebut menunjukkan bahwa terdapat gelombang penyebaran virus ebola. Dalam hal ini, peningkatan jumlah individu latent tersebut dikarenakan besarnya nilai transmisi  $\beta$  yang menyatakan rata-rata terinfeksi individu *susceptible*. Besarnya nilai  $\beta$  tersebut diiringi dengan kecilnya nilai  $\xi$  yang menandakan bahwa terdapat sedikit peluang untuk individu terinfeksi mengalami proses penyembuhan.



Gambar 4.11: Gelombang *travelling Wave L* di Sekitar Titik Endemik pada Kondisi Tidak Stabil



Gambar 4.12: *Travelling Wave L* di Sekitar Titik Bebas Penyakit pada Kondisi Tidak Stabil



Gambar 4.13: Gelombang *Travelling Wave L* di Sekitar Titik Bebas Penyakit pada Kondisi Tidak Stabil

Hasil yang berbeda juga dapat diperoleh jika memberikan syarat awal dan kondisi awal yang sama seperti sebelumnya pada model *travelling wave* di titik tetap bebas penyakit. Dengan menggunakan parameter yang sama, maka hasil simulasi adalah pada gambar 4.12. Pada 4.12 terlihat juga akan adanya gelombang yang terjadi diantara domain yang diberikan. Gelombang yang berbeda juga terlihat pada gambar 4.13 yang menunjukkan adanya osilasi cukup besar jika dibandingkan dengan kondisi awal diantara selang waktu  $t$ . Perbedaan osilasi tersebut membuktikan adanya wabah ebola di suatu tempat menyebabkan gelombang penyebaran yang lebih meluas tergantung seberapa besar transmisi yang terjadi di tempat tersebut. Oleh karena pengamatan-pengamatan yang dilakukan tersebut maka kontrol atas penyakit ini harus dilakukan secara intensif melalui penyuluhan pengobatan, meningkatkan kualitas petugas kesehatan terutama peralatan medis yang lebih modern. Penanganan-penanganan tersebut harus dilakukan agar penyebaran ebola dapat dicegah sedemikian rupa sehingga dapat mengurangi jumlah korban ebola secara optimal.



## BAB V

### KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini, akan diberikan kesimpulan mengenai hasil penelitian berdasarkan hasil analisis yang telah diberikan pada bab-bab sebelumnya. Pada bab ini juga akan diberikan beberapa saran agar penelitian ini dapat dikembangkan lebih lanjut.

#### 5.1 Kesimpulan

1. Modifikasi model yang diperoleh berdasarkan penelitian ini dan didasarkan pada sumber-sumber terkait adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \pi - \beta(1-p)S\frac{L}{N} - p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N} - \lambda S + \kappa R \\ \frac{dL}{dt} &= \beta(1-p)S\frac{L}{N} + p(\alpha_L L + \alpha_I I)\frac{S}{N} - \phi L - \psi L \\ \frac{dI}{dt} &= \phi L - \xi I - \tau I \\ \frac{dR}{dt} &= \xi I - \kappa R - \nu R\end{aligned}$$

dimana  $N(t) = S(t) + L(t) + I(t) + R(t)$  dan parameter-parameter pada model telah dijelaskan pada bab 4.1.

2. Pengamatan pada model menghasilkan dua titik tetap yaitu  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$  dimana titik tersebut merupakan titik tetap bebas penyakit dan  $(S^*, L^*, I^*, R^*)$  yang merupakan titik tetap endemik. Dalam hal ini, pengamatan mengenai kestabilan dan bifurkasi hopf pada masing-masing titik tetap yang dilakukan menghasilkan beberapa kesimpulan sebagai berikut:

- a. Kestabilan pada titik tetap  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$  terjadi pada kasus pertama dan kasus kedua dimana pada kasus pertama berlaku  $b > 0, c < 0$  dan  $b^2 + 4c \leq 0$  serta pada kasus kedua berlaku  $b > 0, c < 0$  dan  $b^2 + 4c > 0$  dimana dilai karakteristik yang lain yaitu  $\omega_2 = -(\kappa + \nu) < 0$  dan  $\omega_1 = -\lambda$ . Sedangkan bifurkasi pada titik tetap ini dapat terjadi saat  $\mathcal{A}_1 = \beta$  dan  $\mathcal{A}_2 > \beta$  dimana

$$\frac{d}{d\beta} R_e(\beta) = \frac{1}{2}(1-p)\frac{\pi}{N\lambda} \neq 0$$



- b. Kestabilan pada titik tetap endemik  $(S^*, L^*, I^*, R^*)$  berlaku saat  $d_1 > 0$ ,  $d_2 > 0$ ,  $d_3 > 0$  dan  $d_1 d_2 > d_3$ . Nilai-nilai tersebut diperoleh menggunakan kriteria Routh Hurwitz dimana  $\omega = -(\kappa + \nu)$  yang merupakan nilai eigen pertama. Bifurkasi hopf juga dapat terjadi pada titik ini jika  $d_1 > 0$ ,  $d_2 > 0$ ,  $d_3 > 0$  dan

$$\frac{dd_1 d_2 - d_3}{d\beta} = d_2 \frac{dd_1}{d\beta} + d_1 \frac{dd_2}{d\beta} - \frac{dd_3}{d\beta} \neq 0$$

- Penelitian mengenai *travelling wave* pada sistem juga dilakukan pada titik tetap  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$  dan  $(S^*, L^*, I^*, R^*)$ . Pengamatan mengenai *travelling wave* pada sistem dibatasi hanya untuk *kompartement L* dan *I*. Oleh karena pengamatan tersebut maka dapat dihasilkan kesimpulan sebagai berikut

- a. Pada titik tetap  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$  dihasil kan nilai kecepatan minimal pada *travelling wave* dimana  $c > c^*$  dengan

$$c_L^* = 2\sqrt{\frac{D_L[\beta(1-p) + p\alpha_L]\frac{\pi}{N\lambda} - \phi - \psi}{j_1} j_1 + [p\alpha_I\frac{\pi}{N\lambda}]j_2}$$

$$c_I^* = 2\sqrt{\frac{D_I\phi j_1 - (\xi + \tau)j_2}{j_2}}$$

untuk masing-masing *kompartement L* dan *I*.

- b. Pada titik tetap  $(\frac{\pi}{\lambda}, 0, 0, 0)$  dihasil kan nilai kecepatan minimal pada *travelling wave* dimana  $c > c^*$  dengan

$$c_I^* = 2\sqrt{\frac{D_I(\phi k_1 - (\xi + \tau)k_2)}{k_2}}$$

$$c_L^* = 2\sqrt{\frac{D_L\alpha^*}{k_1}}$$

untuk masing-masing *kompartement L* dan *I*.

3. Simulasi yang dilakukan menggunakan data-data yang diperoleh berdasarkan sumber-sumber terkait. Selain data-data yang diperoleh juga digunakan nilai-nilai parameter yang merupakan kondisi dimana bifurkasi Hopf terjadi. Berdasarkan hasil simulasi dapat diperoleh kesimpulan bahwa semakin besar tingkatan transmisi virus ebola maka akan semakin besar individu-individu yang mengidap penyakit ini. Transmisi tersebut dikarenakan adanya kontak individu *susceptible* dengan individu terinfeksi maupun *latent*. Selain itu dikarenakan pergerakan individu secara bebas dari satu tempat menuju tempat yang lain menyebabkan adanya gelombang penyebaran yang lebih meluas. Gelombang tersebut terbukti saat melakukan simulasi *travelling wave* dimana gelombang penyebaran yang lebih besar dapat terjadi di tempat yang pada mulanya tidak terjadi penginfeksi ebola. oleh karena itu guna meminimalisasi penyebaran transmisi ebola perlu adanya penyuluhan kesehatan di berbagai tempat, peningkatan tenaga medis, maupun penggunaan alat-alat medis yang lebih baik agar penyebaran ebola dapat dicegah.

## 5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan dalam hal ini guna penelitian selanjutnya yakni sebagai berikut

1. Perlu adanya *kompartment D* dimana pada *kompartment* tersebut menyatakan jumlah populasi orang-orang yang meninggal akibat virus ebola. Hal tersebut guna mengetahui jumlah kematian akibat infeksi virus.
2. Perlu pengamatan lebih mendalam akan *travelling wave* di masing-masing *kompartment* hal tersebut dikarenakan pergerakan setiap individual secara dinamis dapat memperluas jangkauan penyebaran virus.
3. Pada model *travelling wave* diperlukan adanya pengamatan lebih mendalam mengenai adanya lokasi pada sistem dalam artian obyek pada sistem dapat diketahui secara gamblang bagaimana ia keluar pada satu lokasi dan masuk ke lokasi yang lain.



## DAFTAR PUSTAKA

- Astacio, J., Briere, D., Guillen, M., Martinez, J., Rodriguez, F. dan Valenzuela-Campos, N., 1996. Mathematical Models to Study The Outbreaks of Ebola.
- Attenborough, T., 2015. Modelling The Ebola Outbreak in West Africa and Community Responses.
- Bonyah, E., Badu, K. dan Asiedu-Addo, S.K., 2016. Optimal Control Application To An Ebola Model. *Asian Pacific Journal of Tropical Biomedicine*, 6(4), pp.283-289.
- Do, T. S. dan Lee, Y. S., 2016. Modeling The Spread of Ebola. *Osong Public Health and Research Perspectives*, 7(1), pp.43-48.
- Fan, H. dan Lin, X.B., 2012. A Dynamical Systems Approach To Traveling Wave Solutions for Liquid/Vapor Phase Transition. In *Infinite Dimensional Dynamical Systems* (pp. 101-117). Springer New York.
- Hariyanto, H., Sanjaya, S. dan Hartatiati, S.S., 2016. Analisis Eksistensi Traveling Wave Front pada Model Matematika Reassortment Virus Influenza H5N1 dan H1N1-p. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 13(2), pp.45-52.
- Hariyanto, 2014. Konstruksi Model Matematika Koalisi Antara Virus Influenza H5N1 dan H1N1 Pandemi. Disertasi, Universitas Airlangga, Surabaya.
- Jiang, X., Yu, P., Yuan, Z. dan Zou, X., 2009. Dynamics of An HIV-1 Therapy Model of Fighting A Virus with Another Virus. *Journal of Biological Dynamics*, 3(4), pp.387-409.
- Kalu A. U., Agbanyim Akuagwu N., dan Onum K.Nkpa. 2015. The Stability Analysis of the Endemic Equilibrium State of Ebola Virus Disease Transmission in West Africa, *International Journal of Science and Technology*, 5(9).
- Karaaslanlı, C. Ç., 2012. Bifurcation Analysis and Its Applications. In *Numerical Simulation-from Theory to Industry*. InTech.

- Kim, B., 2004. Computing Traveling-Wave Front Solutions in a Diffusive Predator-Prey Model. *REU Program*.
- Li, Z., Teng, Z., Feng, X., Li, Y. dan Zhang, H., 2015. Dynamical Analysis of An S-Eit Epidemic Model with Application to Ebola Virus Transmission in Guinea. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2015.
- Liu, W. M., 1994. Criterion of Hopf Bifurcations without Using Eigenvalues. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 182(1), pp.250-256.
- Ndanusa, A., Abdulrahman, S. dan Abdulmalik, A., 2015. A Mathematical Model for Controlling The Spread of Ebola Virus Disease in Nigeria. *Int J Human Manage Sci*, 3(3).
- Njankou, S.D.D., 2015. *Modelling The Potential Role of Control Strategies on Ebola Virus Disease Dynamics* (Doctoral Dissertation, Stellenbosch: Stellenbosch University).
- Oduro, F. T., Baafi, J. dan Apaaboah, G., 2016. Modelling The Effect of Post-mortem Contact on The Spread of Ebola with Quarantine As an Intervention. *Journal of Mathematics Research*, 8(4), p.176.
- Robinson, R. C., 2012. *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete* (Vol. 19). American Mathematical Soc..
- Rohmah, A. M., 2016. Analisa Model Penyebaran Virus Ebola Antar Dua Negara (Guinea dan Sierra-Leone). Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Wiggins, S., 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Vol. 2). Springer Science & Business Media.

## BIODATA PENULIS



Lahir di Surabaya, 3 Desember 1993, dengan nama lengkap Muhammad Nur Haqqul Qomarudin. Penulis tinggal di Jl. Brigjen Katamso RT 22 RW 02 Waru Sidoarjo. Penulis adalah anak pertama dari dua bersaudara yang merupakan putra dari Mukarromah dan Samsul Huda. Penulis telah melaksanakan pendidikan dari MI Banu Hasyim, SMP Negeri 2 Waru, SMA Wachid Hasyim 2 Taman. Meskipun lebih menyukai hal-hal yang bersifat sejarah dan kurang menyenangkan hal-hal yang bersifat hitungan penulis tetap melanjutkan sekolah di S1 Matematika ITS tahun 2011. Setelah lulus dari S1 matematika ITS, selanjutnya ia melanjutkan pembelajaran ke jenjang S2 di Jurusan yang sama. Penulis fokus pada bidang simulasi sistem dan pemodelan matematika. Minat utama penulis adalah mengenai mekanika fluida pada bidang tersebut meskipun pada penulisan ini ia menekuni hal yang berbeda. Untuk keterangan lebih lanjut mengenai penelitian ini atau untuk mendiskusikan hal lain khususnya dibidang pemodelan terutama mekanika fluida dapat menghubungi penulis melalui email : [haqquludin@gmail.com](mailto:haqquludin@gmail.com)