103
SKRIPSI

FUNGSIONAL ADITIF ORTHOGONAL DAN KONTINU PADA l_1

Oleh:
SARI RAHAYU
1299 100 046

BIDANG STUDI MATEMATIKA MURNI
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2003

LEMBAR PENGESAHAN

SKRIPSI

FUNGSIONAL ADITIF ORTHOGONAL DAN KONTINU PADA l_1

SARI RAHAYU
1299 100 046

Telah dipertahankan di depan penguji
pada tanggal 30 Juli 2003

Susunan Tim Penguji

Pembimbing

s. Sadjidon, M.Si
IP. 131 835 488

Anggota Tim Penguji Lain

1. **Drs. Sentot Didik Surjanto,M.Si**
   NIP. 131 651 252

2. **Drs. Mahmud Yunus, M.Si**
   NIP. 131 687 915

3. **Drs. I GNR USADHA, M.Si**
   NIP. 131 846 103

Skripsi ini telah diterima sebagai salah satu persyaratan
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

Surabaya, Agustus 2003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Drs. Chairul Imron, MIKomp
NIP. 131 688 310

ABSTRAK

Ruang l_1 merupakan ruang barisan dengan elemen-elemen yang deretnya konvergen solut, yaitu $l_1 = \{ x = (x_k) : \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k | < \infty \}$. Ruang l_1 dengan dilengkapi norm $\| = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k |$, maka l_1 merupakan ruang bernorma-F yang lengkap atau ruang Frechet. lanjutnya, ruang l_1 merupakan ruang-FK dan bersifat-AK dan memenuhi $\|x^N\| \le \|x\|$, tuk setiap $x \in l_1$ dan $N \in \boldsymbol{N}$, maka dapat direpresentasikan fungsional aditif orthogonal n kontinu pada l_1, yaitu jika dan hanya jika terdapat fungsi $g(.,.) : \boldsymbol{N} \, x \, \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $k,0) = 0$ dan $g(k,.)$ kontinu untuk setiap $k \in \boldsymbol{N}$, sehingga :

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k, x_k)$$

a untuk setiap $x \in l_1$.

ta kunci : Ruang l_1, Ruang-FK, Sifat AK dan Fungsional Aditif Orthogonal Kontinu

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena berkat rahmat dan hidayah-Nya Tugas Akhir dengan judul :

FUNGSIONAL ADITIF OTHOGONAL

DAN KONTINU PADA l_1

ini dapat diselesaikan.

Penulis menyadari bahwa penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari bimbingan dan bantuan banyak pihak. Seiring dengan hal ini penulis sangat berterima kasih kepada

1. Bapak Drs. Chairul Imron, MI.Komp. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS.
2. Bapak Drs. Sadjidon, M.Si selaku pembimbing atas bimbingan dan pengarahannya.
3. Para dosen penguji atas segala saran dan pengarahannya.
4. Bapak, Ibu dan adik-adikku Adi dan Yuni atas dukungan dan do'anya selama ini.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika ITS, yang telah mendidik penulis selama kuliah.
6. Serta semua pihak yang telah membantu hingga terselesainyaTugas Akhir ini.

Semoga Allah SWT membalas budi baik bagi yang telah membantu penulis, baik langsung maupun tidak langsung. Akhirnya, semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan.

Surabaya, Agustus 2003

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Nama	Hal
$\boldsymbol{R}$	Himpunan Bilangan Real	3
$\boldsymbol{N}$	Himpunan Bilangan Asli	3
$\in$	Elemen (Anggota)	3
$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$	Deret tak hingga	4
$\lvert a \rvert$	Nilai absolut dari a	5
$\boldsymbol{s}$	Ruang barisan dari semua barisan real	7
$\boldsymbol{F}$	Field	7
$\boldsymbol{C}$	Himpunan Bilangan komplek	7
$\boldsymbol{R}^n$	Ruang Euclid	8
$\lVert \cdot \rVert$	Norm	8
$\Leftrightarrow$	Jika dan hanya jika	8
θ	Vektor nol	8
l_1	Ruang barisan dari semua barisan yang deretnya konvergen absolut	13
sup	supremum (batas atas terkecil)	16

BAB I PENDAHULUAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara umum, barisan adalah fungsi pada himpunan bilangan asli ***N***. Jika range dari fungsi tersebut berada di dalam bilangan real ***R***, maka barisannya adalah barisan bilangan real. Selain barisan dikenal juga istilah deret. Satu diantaranya adalah deret konvergen absolut.

Suatu deret $\sum x_k$ dari barisan bilangan real dikatakan konvergen absolut jika deret $\sum |x_k|$ konvergen. Ruang dari semua barisan yang deretnya konvergen absolut inilah yang kemudian dinotasikan dengan l_1, atau l_1 merupakan ruang dari semua barisan $x = (x_k)$ sehingga $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergen. Telah dikaji di dalam analisis fungsional (Erwin Kreyszig, 1978) bahwa l_1 adalah ruang Banach yaitu ruang bernorma-B yang lengkap.

Selanjutnya Chew dan Lee telah merepresentasikan fungsional aditif orthogonal dan kontinu pada ruang barisan yaitu ruang barisan bernorma-B yang lengkap. Karena setiap ruang Banach adalah ruang Frechet yaitu ruang bernorma-F yang lengkap, maka l_1 adalah ruang Frechet. Berdasarkan hal tersebut, Tugas Akhir ini akan mengkaji fungsional aditif orthogonal dan kontinu pada l_1.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang akan diselesaikan dalam Tugas Akhir ini adalah menentukan syarat perlu dan cukup fungsional aditif orthogonal dan kontinu pada l_1.

1.3 Batasan Masalah

Untuk membahas masalah di atas, dalam Tugas Akhir ini dibatasi hal-hal berikut:

a. Barisan yang dikaji adalah barisan bilangan real

b. Fungsional pada ruang bernorma-F khususnya pada l_1 dan fieldnya adalah $\boldsymbol{R}$

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan Tugas Akhir ini adalah mengkaji fungsional aditif orthogonal dan kontinu pada l_1.

1.5 Metodologi

Metodologi dari penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

a. Memahami dan menganalisa permasalahan yang ada

b. Memberikan penjelasan tentang hal-hal yang berkaitan dengan topik permasalahan seperti ruang barisan l_1, ruang Frechet dan fungsional aditif orthogonal dan kontinu pada ruang barisan .

c. Mengemukakan teorema penunjang dalam pengkajian fungsional aditif orthogonal dan kontinu pada l_1.

d. Memberikan kesimpulan yang singkat dan jelas.

BAB II TEORI PENUNJANG

BAB II

TEORI PENUNJANG

Pada BAB II ini akan diuraikan beberapa pengertian dan teorema mengenai barisan dan deret, ruang Banach dan ruang Frechet, serta fungsi dan fungsional. Uraian ini akan digunakan sebagai dasar untuk pembahasan bab-bab selanjutnya.

2.1 Barisan dan Deret

Pada sub bab ini akan diuraikan tentang barisan bilangan real dan deret, khususnya deret konvergen absolut. Selanjutnya akan didefinisikan juga ruang barisan.

Definisi 2.1.1(Barisan Bilangan Real, R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 67)

Barisan bilangan real (barisan di $\boldsymbol{R}$) adalah fungsi pada himpunan bilangan asli N yang rangenya termuat di himpunan bilangan real $\boldsymbol{R}$.

Contoh 2.1.2

$(x_k) = (2k : k \in N) = (2, 4, 6, \dots)$

Definisi 2.1.3(Operasi Barisan, R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 69)

Jika $X = (x_k)$ dan $Y = (y_k)$ adalah barisan bilangan real maka

a. $X + Y = (x_k + y_k : k \in N)$

b. Jika $c \in \boldsymbol{R}$ maka $cX = (cx_k : k \in N)$

Contoh 2.1.4

Jika (x_k) dan (y_k) masing-masing adalah barisan bilangan real dengan

$$(x_k)=(1, 2, 3, \ldots, k, \ldots) \text{ dan } (y_k)=(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots)$$

maka

$$(x_k)+(y_k)=(x_k+y_k)=(2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, \ldots, \frac{k^2+1}{k}, \ldots)$$

dan untuk $c = 3$

$$3(x_k)=(3x_k)=(3, 6, 9, \ldots, 3k, \ldots)$$

Definisi 2.1.5 (Konvergensi deret Tak Hingga, R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 318)

Deret tak hingga $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ disebut konvergen jika barisan (S_n) dari jumlahan parsial

$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ konvergen ke bilangan real S dengan $S=\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ atau $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = S$

Contoh 2.1.6

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots$ konvergen ke 1, sebab

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

dan $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$

Teorema 2.1.7

(i) Jika $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ masing-masing adalah deret-deret konvergen,maka

$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)$ dan $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)$ adalah deret-deret konvergen dan

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

(ii) Jika $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ adalah deret konvergen dan c adalah bilangan real, maka

$\sum_{k=1}^{\infty} cx_k$ adalah deret konvergen dan

$$\sum_{k=1}^{\infty} cx_k = c \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

Sebelum menguraikan tentang deret konvergen absolut, maka akan diuraikan terlebih dahulu tentang nilai absolut dan sifat-sifatnya

Definisi 2.1.8 (Nilai Absolut, R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 38)

Jika $a \in \boldsymbol{R}$, maka nilai absolut dari a, didefinisikan sebagai

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ jika } a \geq 0 \\ -a, \text{ jika } a < 0 \end{cases}$$

Teorema 2.1.9

a. $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$, untuk setiap $a \in \boldsymbol{R}$

b. $|-a| = |a|$, untuk setiap $a \in \boldsymbol{R}$

c. $|ab| = |a|\,|b|$, untuk setiap a,b $\in \boldsymbol{R}$

Teorema 2.1.10

Untuk setiap a dan b di dalam $\boldsymbol{R}$, maka $|a+b| \leq |a| + |b|$

Selanjutnya akan diuraikan tentang deret konvergen absolut .

Definisi 2.1.11 (Deret Konvergen Absolut, R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 318)

Diberikan deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergen maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ dikatakan konvergen absolut

Contoh 2.1.12

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots$ adalah deret konvergen absolut sebab

$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{2k} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ adalah deret konvergen

Teorema 2.1.13

Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergen di dalam $\boldsymbol{R}$ maka $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ juga konvergen di dalam $\boldsymbol{R}$.

Definisi di bawah ini akan menjelaskan tentang ruang barisan. Selanjutnya diberikan suatu contoh dari ruang barisan

Definisi 2.1.14

Jika setiap anggota dari X adalah barisan, maka X adalah ruang barisan.

Contoh 2.1.15

$s = \{x : x$ barisan bilangan real$\}$. s adalah ruang barisan dari semua barisan bilangan real.

2.2 Ruang Banach dan ruang Frechet

Pada sub bab ini akan dibahas beberapa pengertian dan teorema mengenai ruang linear (ruang vektor), ruang bernorma-B dan ruang bernorma-F, serta ruang Frechet dan ruang Banach.

Definisi 2.2.1 (Ruang Linear, Erwin Kreyszig, hal. 50)

Ruang linear (ruang vektor) atas field $\boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{R}$ atau $\boldsymbol{C}$) adalah himpunan tak kosong X dari elemen-elemen yang disebut vektor yang mempunyai dua operasi aljabar, yaitu :

Operasi penjumlahan vektor yang memenuhi

(i) $x + y \in X$, untuk setiap $x, y \in X$

(ii) $x + y = y + x$, untuk setiap $x, y \in X$ (sifat komutatif)

(iii) $x + (y + z) = (x + y) + z$, untuk setiap $x, y, z \in X$ (sifat asosiatif)

(iv) terdapat $\theta \in X$, sehingga $\theta + x = x + \theta = x$, untuk setiap $x \in X$

(θ adalah vektor nol)

(v) untuk setiap $x \in X$ terdapat $(-x) \in X$, sehingga

$x + (-x) = (-x) + x = \theta$ (θ adalah vektor nol)

Operasi perkalian vektor dengan skalar yang memenuhi

(i) $\alpha x \in X$, untuk setiap $\alpha \in \boldsymbol{F}$ dan $x \in X$

(ii) $(\alpha + \beta) x = (\alpha x) + (\beta x)$, untuk setiap $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$ dan $x \in X$

(iii) $\alpha (x + y) = (\alpha x) + (\alpha y)$, untuk setiap $\alpha \in \boldsymbol{F}$ dan $x, y \in X$

(iv) $(\alpha\beta) x = \alpha (\beta x)$, untuk setiap $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$ dan $x \in X$

(v) $1x = x1 = x$, untuk setiap $x \in X$

Contoh 2.2.2 :

Ruang Euclid $\boldsymbol{R}^n$ yang memuat himpunan terurut dari bilangan real $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan ruang linear terhadap operasi penjumlahan vektor dan operasi perkalian vektor dengan skalar.

Definisi 2.2.3 (Ruang Bernorma-B, Erwin Kreyszig, hal. 59)

Diberikan ruang linear X atas field $\boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{R}$ atau $\boldsymbol{C}$).

Norm $\|.\| : X \to \boldsymbol{R}$ disebut norma-B pada X jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $a \in \boldsymbol{F}$ memenuhi :

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (θ adalah vektor nol)

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(iii). $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ruang linear X yang dilengkapi dengan norm tersebut disebut ruang bernorma-B

Definisi 2.2.4 (Ruang Bernorma-F, I. J. Maddox, hal. 85)

Diberikan ruang linear X atas field $\boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{R}$ atau $\boldsymbol{C}$).

Norm $\|.\| : X \rightarrow \boldsymbol{R}$ disebut norma-F pada X jika untuk setiap $x,y \in X$ dan untuk suatu $a \in \boldsymbol{R}$ memenuhi :

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$ (θ adalah vektor nol)

(ii). $\|-x\| = \|x\|$

(iii). $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(iv). Jika (a_n) barisan bilangan real sehingga $a_n \rightarrow a$ untuk $n \rightarrow \infty$ dan (x_n) barisan di dalam X sehingga $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$ berakibat $\|a_n x_n - ax\| \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$

Ruang linear X yang dilengkapi dengan norm tersebut disebut ruang bernorma-F

Definisi 2.2.5 (Barisan Terbatas, W.A. Light, hal. 16)

Barisan (x_n) di ruang linear bernorma X dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga $\|x_n\| \leq M$ untuk setiap $n \in N$

Definisi 2.2.6 (Barisan Konvergen, Erwin Kreyzsig, hal. 67)

Barisan (x_n) di dalam ruang bernorma X disebut konvergen jika X memuat x dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in N$ sehingga $\|x_n - x\| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$.

atau $\|x_n - x\| \to 0$ untuk $n \to \infty$

Definisi 2.2.7(Barisan Cauchy, Erwin Kreyzsig, hal. 67)

Barisan (x_n) di dalam ruang bernorma X disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $H(\varepsilon) \in N$ sehingga $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ untuk setiap $n,m \geq H(\varepsilon)$.

Definisi 2.2.8(Ruang yang Lengkap, Erwin Kreyzsig, hal. 28)

Ruang bernorma X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchynya konvergen.

Definisi 2.2.9 (Ruang Banach, Erwin Kreyszig, hal. 59)

Ruang Banach adalah ruang bernorma-B yang lengkap

Definisi 2.2.10 (Ruang Frechet, I.J. Maddox, hal. 86)

Ruang Frechet adalah ruang bernorma-F yang lengkap

Teorema 2.2.11 :

Jika (X, $\|.\|$) adalah ruang Banach maka (X, $\|.\|$) adalah ruang Frechet.

2.3 Fungsi dan Fungsional

Pada sub bab ini akan diuraikan tentang fungsi, pemetaan kontinu, operator dan fungsional.

Definisi 2.3.1 (Fungsi, R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 10)

Diberikan A dan B adalah dua himpunan tak kosong. Fungsi dari A ke B adalah himpunan f dari pasangan terurut di AxB sehingga untuk setiap $x \in A$ terdapat dengan tunggal $y \in B$ sehingga $(x,y) \in f$.

Contoh 2.3.2

(i) $\{(1, 2), (2, 2)\}$ adalah fungsi

(ii) $\{(1, 2), (1, 3)\}$ bukan fungsi

Definisi 2.3.3 (Pemetaan Kontinu, W.A. Light, hal. 16)

Diberikan ruang bernorma ($X, \|.\|$) dan ($Y, \|.\|$). Pemetaan $f : X \rightarrow Y$ dikatakan kontinu di $x_o \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk $\| x - x_0 \| < \delta$ berakibat $\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$. Jika pemetaan f kontinu pada semua titik di dalam X, maka f dikatakan kontinu pada X.

Contoh 2.3.4

$f(x) = 2x$, untuk setiap $x \in \boldsymbol{R}$

Maka f kontinu pada $\boldsymbol{R}$.

Teorema 2.3.5

Diberikan ruang bernorma ($X, \|.\|$) dan ($Y, \|.\|$).

Pemetaan $f : X \rightarrow Y$ kontinu di $x_o \in X$ jika dan hanya jika untuk sebarang barisan (x_n) di dalam X, sehingga $x_n \rightarrow x_o$ berakibat $f(x_n) \rightarrow f(x_o)$

Definisi 2.3.5 (Operator, Erwin Kreyszig, hal. 82)

Pemetaan $T : X \rightarrow Y$ disebut operator jika X dan Y keduanya adalah ruang linear atau ruang bernorma atas field yang sama .

Contoh 2.3.6

Diberikan X ruang linear dari semua polinomial pada [a,b]. Didefinisikan $T : X \rightarrow X$

$$Tx(t) = x(t) \qquad \text{untuk setiap } x \in X,$$

adalah operator.

Definisi 2.3.7 (Fungsional, Erwin Kreyszig, hal. 103)

Pemetaan $T : X \rightarrow \boldsymbol{R}$ disebut fungsional jika X adalah ruang linear atau ruang bernorma

Contoh 2.3.8

Norm $\|.\| : X \rightarrow \boldsymbol{R}$ pada ruang bernorma ($X, \|.\|$) adalah fungsional

BAB III RUANG BARISAN l_1

BAB III

RUANG BARISAN l_1

Pada BAB III ini akan diuraikan tentang ruang $l_1 = \{\, x=(x_k) : \| x \| = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k | < \infty \}$.

Salah satu anggota l_1 adalah barisan $(x_k) = \left(\frac{(-1)^k}{2k} \right)$. Selanjutnya akan diuraikan tentang norma-F dan kelengkapan pada l_1. Kemudian akan dibahas pula ruang-FK dan sifat AK dari l_1 yang terkait dengan norma-F dan kelengkapan dari l_1.

3.1 Ruang Bernorma-F pada l_1

Pada sub bab ini akan ditunjukkan bahwa l_1 adalah ruang bernorma-F. Sebelumnya akan diberikan beberapa teorema yang akan digunakan untuk membuktikan bahwa l_1 adalah ruang bernorma-F.

Teorema 3.1.1

Ruang l_1 merupakan ruang linear atas field $\boldsymbol{R}$.

Bukti :

Diberikan ruang l_1. Setiap anggota ruang l_1 adalah barisan $x = (x_k)$ yang deretnya konvergen absolut. Sehingga untuk setiap $x = (x_k) \in l_1$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergen.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa l_1 adalah ruang linear atas field $\boldsymbol{R}$.

Menurut Definisi 2.2.1 ruang l_1 adalah ruang linear atas field $\boldsymbol{R}$, sebab

Terhadap operasi penjumlahan memenuhi

(i) untuk setiap $x, y \in l_1$,

$$x + y \in l_1, \text{ karena } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$$

(ii) untuk setiap $x, y \in l_1$,

$$x + y = (x_k) + (y_k) = (x_k + y_k) = (y_k + x_k) = (y_k) + (x_k) = y + x$$

(iii) untuk setiap $x, y, z \in l_1$,

$$x + (y + z) = (x_k) + ((y_k) + (z_k)) = (x_k) + ((y_k + z_k)) = (x_k + y_k + z_k)$$
$$= ((x_k + y_k)) + (z_k) = (x + y) + z$$

(iv) terdapat $\theta \in l_1$, sehingga untuk setiap $x \in l_1$,

$$\theta + x = (0,0,\ldots) + (x_1, x_2,\ldots) = (0 + x_1, 0 + x_2, \ldots) = (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots)$$
$$= (x_1, x_2, \ldots) + (0,0,\ldots) = x + \theta$$

(iv) untuk setiap $x \in X$, terdapat $(-x) \in l_1$ sehingga

$$x + (-x) = (x_k) + (-x_k) = (x_k + (-x_k)) = ((-x_k) + x_k) = (-x_k) + (x_k) = (-x) + x = \theta$$

Terhadap operasi perkalian skalar memenuhi

(i) untuk setiap $x \in l_1$ dan $\alpha \in \boldsymbol{R}$,

$$\alpha x \in l_1 \text{ karena } \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k| = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$$

(ii) untuk setiap $x,y \in l_1$ dan $\alpha \in \boldsymbol{R}$,

$$\alpha(x+y) = \alpha((x_k)+(y_k)) = \alpha(x_k + y_k) = \alpha(x_k) + \alpha(y_k) = \alpha x + \alpha y$$

(iii) untuk setiap $x \in l_1$ dan $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$,

$$\alpha x + \beta x = \alpha(x_k) + \beta(x_k) = (\alpha+\beta)(x_k) = (\alpha+\beta)\text{x}$$

(iv) untuk setiap $x \in l_1$ dan $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, $\alpha(\beta x) = \alpha(\beta(x_k)) = \alpha\beta(x_k) = \alpha\beta x$

(v) untuk setiap $x \in l_1$, $1x = 1(x_k) = (1x_k) = (x_k 1) = (x_k)1 = x1 = x$

Jadi l_1 merupakan ruang linear atas field $\boldsymbol{R}$.

Teorema 3.1.2

Untuk setiap x dan y di dalam ruang bernorma X. Maka

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

Bukti :

Karena $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

dan $\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\|$

Maka $-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ atau $\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\|$

Teorema 3.1.3

Jika barisan (x_n) di ruang linier bernorma X konvergen maka barisan itu terbatas.

Bukti :

Ambil sebarang barisan (x_n) di dalam X, sehingga $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ dan ambil $\varepsilon = 1$

Dari Definisi 2.2.6 terdapat bilangan asli $K(\varepsilon) = K(1)$ sehingga jika $n \geq K(\varepsilon)$ berakibat

$$\| x_n - x \| < 1.$$

Sehingga

$$\big| \| x_n \| - \| x \| \big| \leq \| x_n - x \| < 1$$

$$-1 < \| x_n \| - \| x \| < 1$$

$$\| x_n \| < 1 + \| x \|$$

Ambil $M = \sup(\| x_1 \|, \ldots, \| x_{k-1} \|, \ldots, \| x \| + 1)$ maka $\| x_n \| \leq M$

Karena (x_n) sebarang barisan konvergen di dalam X, maka setiap barisan konvergen di X adalah berisan terbatas.

Selanjutnya teorema berikut ini menunjukkan bahwa l_1 merupakan ruang bernorma-F

Teorema 3.1.4

Ruang l_1 adalah ruang bernorma-F dengan norm $\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k |$

Bukti :

Norm $\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k |$ dikatakan norma-F jika memenuhi Definisi 2.2.5

a. Ruang l_1 adalah ruang linear (Teorema 3.2.1)

b. Norm $\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k |$ memenuhi

(i) Untuk setiap $x \in l_1$, $\|x\| \geq 0$, sebab:

untuk setiap $k \in N$, $|x_k| \geq 0$

Jadi $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \geq 0$

(ii) untuk setiap $x \in l_1$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ sebab

untuk setiap $k \in N$, $|x_k| = 0 \Leftrightarrow x_k = 0$

karena untuk setiap $k \in N$, $x_k = 0$ maka $x = \theta$

Jadi $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0 \Leftrightarrow x_k = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(iii) untuk setiap $x \in l_1$, $\|-x\| = \|x\|$ sebab

untuk setiap $k \in N$, $|-x_k| = |x_k|$

Jadi $\|-x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |-x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|$

(iv) untuk setiap $x, y \in l_1$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, sebab

untuk setiap $k \in N$, $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$

sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| + |y_k|)$

karena $x, y \in l_1$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$ keduanya adalah deret konvergen, sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$

Jadi $\|x+y\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = \|x\| + \|y\|$

(v) (a_n) barisan bilangan real dan untuk suatu $a \in \boldsymbol{R}$, $a_n \to a$

(x_n) barisan di dalam l_1 dan untuk suatu $x \in l_1$, $\| x_n - x \| \to 0$

Maka untuk $n \to \infty$, $\| a_n x_n - ax \| \to 0$, sebab

$$\| a_n x_n - ax \| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_n x_k^{(n)} - a x_k^{(n)} + a x_k^{(n)} - a x_k \right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_n x_k^{(n)} - a x_k^{(n)} \right| + \left| a x_k^{(n)} - a x_k \right|$$

Karena l_1 ruang linear, maka ($a_n x_k^{(n)} - a x_k^{(n)}$) dan ($a x_k^{(n)} - a x_k$) keduanya adalah anggota l_1. Sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} \left| a_n x_k^{(n)} - a x_k^{(n)} \right|$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} \left| a x_k^{(n)} - a x_k \right|$ keduanya adalah deret konvergen. Maka

$$\| a_n x_n - ax \| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_n x_k^{(n)} - a x_k^{(n)} \right| + \left| a x_k^{(n)} - a x_k \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_n x_k^{(n)} - a x_k^{(n)} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left| a x_k^{(n)} - a x_k \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_n - a \right| \left| x_k^{(n)} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left| a \right| \left| x_k^{(n)} - x_k \right|$$

$$= \left| a_n - a \right| \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} \right| + \left| a \right| \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|$$

Karena $\| x_n - x \| \to 0$ maka $x_n \to x$ untuk $n \to \infty$ sehingga terdapat $M_1 > 0$ dan

$$\| x_n \| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} \right| \le M_1, \text{ untuk setiap } n \in N.$$

Dengan mengambil $M = \sup\{M_1, |a|\}$maka

$$\| a_n x_n - ax \| \le \left| a_n - a \right| M + M \left| x_k^{(n)} - x_k \right|$$

Selanjutnya karena $\|x_n - x\| \to 0$ dan $a_n \to a$ maka $\|a_n x_n - ax\| \to 0$ untuk $n \to \infty$.

Jadi $(l_1, \|.\|)$ adalah ruang bernorma-F.

3.2 Kelengkapan l_1

Telah ditunjukkan bahwa l_1 adalah ruang bernorma-F. Maka untuk menunjukkan l_1 adalah ruang Frechet, akan ditunjukkan bahwa l_1 adalah ruang yang lengkap.

Teorema 3.2.1

Jika $(l_1, \|.\|)$ ruang bernorma-F, maka l_1 adalah ruang lengkap

Bukti :

Diberikan $(l_1, \|.\|)$ ruang bernorma-F. Akan dibuktikan l_1 adalah ruang yang lengkap, yaitu setiap barisan Cauchynya konvergen di l_1. Ambil sebarang barisan Cauchy $(x_n) = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ di dalam l_1, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $H(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq H(\varepsilon)$ memenuhi

$$\|x_n - x_m\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right| < \varepsilon \qquad \ldots\ldots(1)$$

Sehingga untuk setiap $k \in \boldsymbol{N}$

$$\left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right| < \varepsilon \quad (n, m \geq H(\varepsilon)) \qquad \ldots\ldots(2)$$

Dari (2), untuk k dipilih tetap, barisan $(x_k^{(n)}) = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots)$ adalah barisan Cauchy di dalam $\boldsymbol{R}$. Lebih lanjut, karena $\boldsymbol{R}$ lengkap maka untuk setiap $k \in \boldsymbol{N}$, $x_k^{(n)} \to x_k$ untuk $n \to \infty$. Sehingga untuk setiap $k \in \boldsymbol{N}$, dapat dibentuk barisan $x = (x_k)$

Selanjutnya akan ditunjukkan $x_n \to x$ untuk $n \to \infty$ dan $x \in l_1$

Dari (1) untuk $m \to \infty$ maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{\,n} - x_k \right| < \varepsilon \qquad (n \geq H(\varepsilon)) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Jadi $\| x_n - x \| < \varepsilon$ atau $x_n \to x$

Dari (3), maka $x_n - x \in l_1$. Karena $x_n \in l_1$, maka

$$x = x_n + (x - x_n) \in l_1$$

Karena (x_n) sebarang barisan Cauchy di dalam l_1 maka menurut Definisi 2.2.8, l_1 merupakan ruang bernorma- F yang lengkap.

Dengan definisi 2.2.10, Teorema di atas menunjukkan bahwa l_1 merupakan ruang Frechet.

3.3 Ruang FK dan Sifat AK pada l_1

Pada sub bab ini akan diuraikan tentang ruang- FK dan sifat AK. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa l_1 adalah ruang- FK dan bersifat AK.

Definisi 3.3.1

Ruang Frechet ($X, \|\ \|$) disebut ruang-FK jika pemetaan koordinat $p_k : X \to \boldsymbol{R}$ dengan

$$p_k(x) = x_k \qquad \text{untuk } x = (x_k) \in X$$

kontinu untuk setiap $k \in \boldsymbol{N}$

Definisi 3.3.2

Untuk setiap barisan $x = (x_k) \in X$, barisan berhingga $(x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$ditulis x^N. Suatu ruang Frechet $(X, \|.\|)$ mempunyai sifat AK jika X memuat semua barisan berhingga dan $\| x^N - x \| \to 0$ untuk $N \to \infty$

Teorema 3.3.3:

Ruang Frechet $(l_1, \|.\|)$ adalah ruang- FK

Bukti

Ruang Frechet $(l_1, \|.\|)$ adalah ruang- FK, sebab

Untuk setiap $x \in l_1$, pemetaan koordinat $p_k : l_1 \to \boldsymbol{R}$ dengan

$$p_k(x) = x_k$$

kontinu untuk setiap $k \in N$, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika

$$\| x - y \| = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k - y_k | < \delta$$

berakibat $| p_k(x) - p_k(y) | = | x_k - y_k | \leq \sum_{k=1}^{\infty} | x_k - y_k | < \varepsilon$

Dengan mengambil $\delta = \varepsilon$ maka terbukti $p_k(x)$ kontinu

Teorema 3.3.4:

Ruang Frechet $(l_1, \|.\|)$ bersifat AK

Bukti

Ruang Frechet $(l_1, \|.\|)$ bersifat AK, sebab

Ruang l_1 memuat barisan berhingga dan $\|x^N - x\| \to 0$ untuk $N \to \infty$

$x^N = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$

$x = (x_1, x_2, \ldots)$

sehingga $\|x^N - x\| = \sum_{k=N+1}^{\infty} |-x_k| = \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|$

Karena $\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|$ konvergen maka $\|x^N - x\| \to 0$ untuk $N \to \infty$

BAB IV FUNGSIONAL ADITIF ORTHOGONAL DAN KONTINU

BAB IV

FUNGSIONAL ADITIF ORTHOGONAL DAN KONTINU

Pada BAB IV ini akan dibahas mengenai fungsional aditif orthogonal dan kontinu pada l_1. Pembahasan pada BAB IV ini dibagi menjadi dua sub bab yaitu Fungsional Kontinu dan Fungsional Aditif Orthogonal dan Kontinu.

4.1 Fungsional Kontinu

Pada sub bab ini akan diuraikan tentang fungsional kontinu pada l_1. Sebelumnya akan diberikan Lemma sebagai akibat bahwa l_1 adalah ruang-*FK* dan memuat semua barisan berhingga $x^N = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$.

Lemma 4.1.1 :

Diberikan l_1 ruang-*FK* dan memuat semua barisan berhingga.

Untuk sebarang $x \in l_1$ dan $N \in \mathbf{N}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $y \in l_1$ dengan $\left\| x^N - y^N \right\| < \delta$

berakibat $\left| x_k - y_k \right| < \varepsilon$ untuk $k = 1, 2, \ldots, N$.

Teorema 4.1.2 :

Diberikan (l_1,$\|.\|$) ruang-FK dan memuat semua barisan berhingga. Ruang l_1 juga memenuhi $\|x^N\| \leq \|x\|$ untuk setiap $x \in l_1$ dan $N \in \boldsymbol{N}$. Selanjutnya diberikan fungsi $g(.,.) : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $g(k,.)$ kontinu untuk setiap $k \in \boldsymbol{N}$. Jika fungsional $F : l_1 \to \boldsymbol{R}$ dengan

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k, x_k)$$

ada untuk setiap $x \in l_1$, maka fungsional F kontinu.

Bukti :

Ambil sebarang $x \in l_1$.

Akan ditunjukkan F kontinu di x, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $\|y-x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k| < \delta$ berakibat

$$|F(y)-F(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} g(k,y_k) - \sum_{k=1}^{\infty} g(k,x_k)\right| < \varepsilon$$

Andaikan F tidak kontinu di x, maka ada $\varepsilon > 0$ sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat $y \in l_1$ dengan $\|y-x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k| < \delta$ sehingga

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} g(k,y_k) - \sum_{k=1}^{\infty} g(k,x_k)\right| \geq \varepsilon$$

Ambil $\delta_l \leq 2^{-1}$, maka terdapat $y_1 \in l_1$ dengan $\|y_1 - x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left|y_k^{(1)} - x_k\right| < \delta_l$ sehingga

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} g(k,y_k^{(1)}) - \sum_{k=1}^{\infty} g(k,x_k)\right| \geq \varepsilon.$$

Pilih $\ell(1) \in N$ sehingga $\left|\sum_{k=1}^{\ell(1)} g(k, y_k^{(1)}) - \sum_{k=1}^{\ell(1)} g(k, x_k)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$

Karena g(k,.) kontinu untuk setiap $k \in N$, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$|g(k, z_k) - g(k, x_k)| < \frac{\varepsilon}{4\ell(1)} \text{ bila } |z_k - x_k| < \delta$$

Dari Lemma 4.1.1 maka terdapat $0 < \delta_2 \leq 2^{-2}$ sehingga untuk

$$\left\| z^{\ell(1)} - x^{\ell(1)} \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| z_k^{\ell(1)} - x_k^{\ell(1)} \right| < \delta_2$$

berakibat $|z_k - x_k| < \delta$, untuk $k = 1, 2, \ldots, \ell(1)$.

Jadi terdapat $0 < \delta_2 \leq 2^{-2}$ sehingga untuk

$$\left\| z^{\ell(1)} - x^{\ell(1)} \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| z_k^{\ell(1)} - x_k^{\ell(1)} \right| < \delta_2$$

berakibat $\left|\sum_{k=1}^{\ell(1)} g(k, z_k) - \sum_{k=1}^{\ell(1)} g(k, x_k)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$

Karena F tidak kontinu di x maka terdapat $y_2 \in l_1$ sehingga untuk

$$\| y_2 - x \| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| y_k^{(2)} - x_k \right| < \delta_2$$

berakibat $\left|\sum_{k=\ell(1)+1}^{\infty} g(k, y_k^{(2)}) - \sum_{k=\ell(1)+1}^{\infty} g(k, x_k)\right| \geq \frac{3\varepsilon}{4}$.

Dapat dipilih $\ell(2) > \ell(1)$ sehingga $\left|\sum_{k=\ell(1)+1}^{\ell(2)} g(k, y_k^{(2)}) - \sum_{k=\ell(1)+1}^{\ell(2)} g(k, x_k)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$

Karena $g(k,.)$ kontinu untuk setiap $k \in \mathbf{N}$, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$|g(k,z_k) - g(k,x_k)| < \frac{\varepsilon}{4\ell(2)}$$

bila $\quad |z_k - x_k| < \delta$

Dari Lemma 4.1.1 terdapat $0 < \delta_3 \le 2^{-3}$ sehingga untuk

$$\left\| z^{\ell(2)} - x^{\ell(2)} \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| z_k^{\ell(2)} - x_k^{\ell(2)} \right| < \delta_3$$

berakibat $\quad |z_k - x_k| < \delta$, untuk $k = 1,2,\ldots, \ell(2)$.

Jadi terdapat $0 < \delta_3 \le 2^{-3}$ sehingga untuk

$$\left\| z^{\ell(2)} - x^{\ell(2)} \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| z_k^{\ell(2)} - x_k^{\ell(2)} \right| < \delta_3$$

berakibat $\quad \left| \sum_{k=1}^{\ell(2)} g(k, z_k) - \sum_{k=1}^{\ell(2)} g(k, x_k) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$

Karena F tidak kontinu di x maka terdapat $y_3 \in l_1$ sehingga untuk

$$\| y_3 - x \| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| y_k^{(3)} - x_k \right| < \delta_3$$

berakibat $\quad \left| \sum_{k=\ell(2)+1}^{\infty} g(k, y_k^{(3)}) - \sum_{k=\ell(2)+1}^{\infty} g(k, x_k) \right| \ge \frac{3\varepsilon}{4}$.

Dapat dipilih $\ell(3) > \ell(2)$ sehingga $\left| \sum_{k=\ell(2)+1}^{\ell(3)} g(k, y_k^{(3)}) - \sum_{k=\ell(2)+1}^{\ell(3)} g(k, x_k) \right| \ge \frac{\varepsilon}{2}$

Demikian seterusnya, apabila hal tersebut dilakukan berulang-ulang maka diperoleh barisan (y_n) di dalam l_1 dan barisan (δ_n) di dalam $\mathbf{R}$ dengan $\delta_n \le 2^{-n}$

dan $\ell(0) = 0 < \ell(1) < \ell(2) < \ldots$

sehingga $\left\| y_n^{\ell(n)} - y_n^{\ell(n-1)} - (x^{\ell(n)} - x^{\ell(n-1)}) \right\| \leq \left\| y_n^{\ell(n)} - x^{\ell(n)} \right\| + \left\| y_n^{\ell(n-1)} - x^{\ell(n-1)} \right\|$

$$= \sum_{k=1}^{\ell(n)} \left| y_k^{(n)} - x_k \right| + \sum_{k=1}^{\ell(n-1)} \left| y_k^{(n)} - x_k \right|$$

$$\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| y_k^{(n)} - x_k \right| < 2\ \delta n < 2.2^{-n} = 2^{1-n}$$

dengan $y_n^{\ell(n)} = (y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_{\ell(n)}^{(n)}, 0, 0, \ldots)$

dan $\left| \sum_{k=\ell(n-1)+1}^{\ell(n)} g(k, y_k^{(n)}) - \sum_{k=\ell(n-1)+1}^{\ell(n)} g(k, x_k) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ ....(1)

Diberikan $z_n = \sum_{i=1}^{n} (y_i^{\ell(i)} - y_i^{\ell(i-1)}) - x^{\ell(n)}$

dengan $y_1^{\ell(0)} = \{0, 0, \ldots\}$

Maka untuk $n \geq m$

$$\| z_n - x_m \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (y_i^{\ell(i)} - y_i^{\ell(i-1)}) - x^{\ell(n)} - (\sum_{i=1}^{m} (y_i^{\ell(i)} - y_i^{\ell(i-1)}) - x^{\ell(m)}) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=m+1}^{n} (y_i^{\ell(i)} - y_i^{\ell(i-1)}) - (x^{\ell(i)} - x^{\ell(i-1)}) \right\|$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{n} \left\| y_i^{\ell(i)} - x^{\ell(i)} \right\| + \sum_{i=m+1}^{n} \left\| y_i^{\ell(i-1)} - x^{\ell(i-1)} \right\|$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell(i)} \left| y_k^{(i)} - x_k \right| + \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell(i-1)} \left| y_k^{(i)} - x_k \right|$$

$$\leq 2 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \left| y_k^{(n)} - x_k \right| < 2 \sum_{i=m+1}^{n} 2^{-i}$$

$$\leq 2^{1-m} \to 0 \text{ untuk } m \to \infty$$

Hal ini berarti z_n merupakan barisan Cauchy di dalam l_1.

Karena l_1 lengkap maka ada $z \in l_1$ sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$

Selanjutnya karena l_1 merupakan ruang FK maka untuk setiap $k \in N$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} z_k^{(n)} = z_k$$

Akibatnya $z = y - x$ dengan

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\ell(n-1)+1}^{\ell(n)} y_k^{(n)} e^k,$$

dengan e^k adalah barisan dengan elemen ke-k sama dengan 1 dan yang lain 0.

Atau

$$y = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_{\ell(1)}^{(1)}, y_{\ell(1)+1}^{(2)}, y_{\ell(1)+2}^{(2)}, \dots, y_{\ell(2)}^{(2)}, \dots, y_{\ell(n-1)+1}^{(n)}, y_{\ell(n)}^{(n)}, \dots)$$

Jadi $y \in l_1$

Sehingga $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\ell(n-1)+1}^{\ell(n)} g(k, y_k^{(n)})$ ada

Selanjutnya berakibat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\ell(n-1)+1}^{\ell(n)} g(k, y_k^{(n)}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\ell(n-1)+1}^{\ell(n)} g(k, x_k^{(n)})$ ada

Jadi terdapat $N \in N$ sehingga

$$\left| \sum_{k=\ell(n-1)+1}^{\ell(N)} g(k, y_k^{(n)}) - \sum_{k=\ell(n-1)+1}^{\ell(N)} g(k, x_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots\dots\dots(2)$$

Karena (2) kontradiksi dengan (1), maka fungsional F kontinu di sebarang $x \in l_1$.

Jadi, F kontinu di l_1.

4.2 Fungsional Aditif Orthogonal dan Kontinu

Pada sub bab ini akan diuraikan tentang fungsional aditif orthogonal dan kontinu pada l_1. Sebelumnya akan diuraikan tentang fungsional aditif orthogonal pada suatu ruang barisan.

Definisi 4.2.1

Diberikan X ruang barisan

Suatu fungsional $F : X \rightarrow \boldsymbol{R}$ dikatakan aditif orthogonal jika untuk setiap $x,y \in X$ dengan $x \perp y$ memenuhi

$$F(x+y) = F(x) + F(y)$$

Selanjutnya, apabila untuk fungsi $g(.,.)$ pada Teorema 4.1.2 disyaratkan pula memenuhi $g(k,0) = 0$ untuk setiap $k \in \boldsymbol{N}$, maka dapat direpresentasikan fungsional aditif orthogonal dan kontinu pada l_1. Hal itu diberikan pada pernyataan berikut :

Teorema 4.2.2

Diberikan l_1 ruang-FK dan bersifat AK, memenuhi $\|x^N\| \leq \|x\|$ untuk setiap $x \in l_1$ dan $N \in \boldsymbol{N}$. Fungsional $F : l_1 \rightarrow \boldsymbol{R}$ aditif orthogonal dan kontinu jika dan hanya jika terdapat fungsi $g(.,.) : \boldsymbol{N} \ x \ \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ memenuhi $g(k,0) = 0$ dan $g(k,.)$ kontinu untuk setiap $k \in \boldsymbol{N}$, sehingga :

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k, x_k)$$

ada untuk setiap $x \in l_1$.

Bukti

($\Rightarrow$) Ambil sebarang $x = (x_k) \in l_1$.

Ruang l_1 bersifat AK maka $\| x^N - x \| \to 0$ untuk $N \to \infty$

F kontinu maka $| F(x^N) - F(x) | \to 0$ untuk $N \to \infty$

F aditif orthogonal maka

$$F(x^N) = F((x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots))$$

$$= F(\sum_{k=1}^{N} x_k e^k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} F(x_k e^k),$$

dengan e^k adalah barisan dengan elemen ke-k sama dengan 1 dan yang lain 0.

Karena $| F(x^N) - F(x) | \to 0$ untuk $N \to \infty$ maka

$$\lim_{N \to \infty} (\sum_{k=1}^{N} F(x_k e^k)) = F(x)$$

Sehingga $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F(x_k e^k)$

Apabila untuk setiap $k \in \boldsymbol{N}$ didefinisikan $g(k,t) = F(te^k)$ maka diperoleh

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k, x_k)$$

Dan $g(k,0) = 0$ untuk setiap $k \in \boldsymbol{N}$

Ambil sebarang (a_n) di dalam $\boldsymbol{R}$ sehingga $a_n \to a$ untuk suatu $a \in \boldsymbol{R}$

Karena $(l_1, \|.\|)$ ruang bernorma-F maka $\|a_n e^k - ae^k\| \to 0$ untuk $n \to \infty$

F kontinu maka $|F(a_n e^k) - F(ae^k)| \to 0$ untuk $N \to \infty$

Sehingga $|g(k, a_n) - g(k, a)| \to 0$ untuk $N \to \infty$

Karena (a_n) sebarang, maka $g(k,.)$ kontinu untuk setiap $k \in N$.

$(\Leftarrow)$ Menurut Teorema 4.1.2 fungsional F kontinu. Karena $g(k,0) = 0$ untuk setiap $k \in N$, maka fungsional F aditif orthogonal.

BAB V KESIMPULAN

BAB V

KESIMPULAN

Dari pembahasan Bab-Bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa $l_1 = \{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} | x_k | < \infty \}$ dengan dilengkapi norm $\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k |$ merupakan ruang bernorma-F yang lengkap, sehingga l_1 merupakan Frechet. Lebih lanjut, l_1 adalah ruang- FK dan bersifat AK serta memenuhi $\| x^N \| \leq \| x \|$ untuk setiap $x \in l_1$ dan $N \in \boldsymbol{N}$, maka syarat perlu dan cukup fungsional $F : l_1 \to \boldsymbol{R}$ merupakan aditif orthogonal dan kontinu jika dan hanya jika terdapat fungsi $g(.,.) : \boldsymbol{N} \; x \; \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $g(k,0) = 0$ dan $g(k,.)$ kontinu untuk setiap $k \in \boldsymbol{N}$, sehingga :

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k, x_k)$$

ada untuk setiap $x \in l_1$.

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G. and Sherbert, D.R. (1994), *Introduction to Real Analysis*, Second Edition, John Wiley and Sons, New York.

Chew, T.S and Lee, P.Y. (1985), "Orthogonally Additive Functionals On Sequence Spaces", *SEA Bull. Math. 9*, pp. 81-85.

Kreyszig, E. (1978), *Introduction Functional Analysis with Application*, John Wiley and Sons, New York.

Light, W.A. (1990), *An Introduction to Abstract Analysis*, First Edition, Chapmand and Hall Mathematics, London.

Maddox, I.J. (1970), *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, London.