SKRIPSI

PERMASALAHAN *KNAPSACK* DUA DIMENSI

Oleh :

M. AJIR MUZAKKI

NRP : 1296 100 031

BIDANG STUDI MATEMATIKA INFORMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA

2003

LEMBAR PENGESAHAN

SKRIPSI

PERMASALAHAN *KNAPSACK* DUA DIMENSI

Dipersiapkan dan diusulkan oleh

M. Ajir Muzakki
Nrp. 1296100 031

Telah dipertahankan di depan tim penguji pada tanggal 13 Agustus 2003

Susunan tim penguji

Pembimbing

Drs. Bandung A.S, MIKomp
Nip. 131 859 249

Anggota tim penguji lain

Imam Mukhlas, S.Si, MT
Nip. 132 094 085

Darmaji, S.Si, MT
Nip. 132 125 683

Budi Setiyono, S.Si,MT
Nip. 132 161 183

Skripsi telah diterima sebagai salah satu persyaratan untuk

Memperoleh gelar Sarjana Matematika

Ketua Jurusan Matematika

FMIPA - ITS

Drs. Chairul Imron, MIKomp.
Nip. 131 688 310

ABSTRAK

Tugas akhir ini merupakan studi literatur tentang permasalahan knapsack, khususnya pada permasalahan knapsack dua dimensi. Permasalahan knapsack akan dikaji dengan memberikan contoh-contoh serta penyelesaian dari penerapan permasalahan knapsack dua dimensi.

Untuk menyelesaikan permasalahan knapsack dua dimensi permasalahan terlebih dahulu disederhanakan menjadi permasalahan knapsack satu dimensi. Hasil dari penyelesaian permasalahan knapsack adalah nilai (value) yang optimal.

Kata Kunci : Permasalahan Knapsack

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis haturkan ke hadirat ALLAH SWT karena atas hidayah dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

"PERMASALAHAN KNAPSACK DUA DIMENSI".

Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat yang harus ditempuh untuk menyelesaikan studi pada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Ada banyak rintangan dan hambatan dalam menyelesaikan karya ini, yang pada akhirnya penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini tidak akan selesai tanpa bantuan pihak-pihak lain. Oleh karena itu, penulis bermaksud menyampaikan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kepada beberapa pihak yang – baik secara langsung maupun tidak langsung – telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini, antara lain kepada :

1. Bapak dan ibuku (almarhumah) yang telah memberikan kasih dan sayang yang tiada terkira selama ini, juga tak lupa ummi' dan saudara-saudaraku tercinta.
2. Bapak Drs. Chairul Imron, MIKomp. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS
3. Drs. Bandung Arry S. ,MIKomp selaku dosen pembimbing tugas akhir yang telah membimbing dengan penuh kesabaran dan bijaksana.
4. Drs. Imam Mukhlas, S.Si, MT yang telah banyak memberikan perhatian dan dorongan semangat.

5. Seluruh Staf Pengajar di ITS, khususnya di Jurusan Matematika yang telah mengajarkan banyak hal baik selama perkuliahan maupun diluar perkuliahan
6. Seluruh karyawan Matematika; Mas Pion, Mbak Salma, Mbak Sih, Mas Yono, Mas Muhtadi, Anik,dll.
7. Teman-teman seperjuangan Sugenk, Rukyat, Minto yang tetap fight terus. Oon, Amik, Saleho, Boy, Rinci serta teman-teman angkatan'96 lainnya.
8. Ari(96), Mr komenk, Mr Ibad yang telah bersedia menjadi teman diskusi
9. Hanif kacong bersama konco-konconya.
10. Teman-teman Himatika ITS.
11. Teman-teman PMII Komisariat ITS.

Serta masih banyak lagi yang tidak dapat saya sebutkan satu per satu namanya disini, semoga Allah memberikan balasan atas amal dan kebaikan saudara semua.

Surabaya, 10 Agustus 2003

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN i
ABSTRAK ii
KATA PENGANTAR iii
DAFTAR ISI v
DAFTAR GAMBAR vi
DAFTAR TABEL vii
BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Permasalahan 1
1.3 Tujuan 1
1.4 Batasan Masalah 2
1.5 Manfaat 2
1.6 Metodologi Penelitian 2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA 3
2.1 Permasalahan Knapsack 3
2.2 Jenis Permasalahan Knapsack 4
2.3 Permasalahan Knapsack Satu Dimensi 7
BAB III KASUS-KASUS KNAPSACK DUA DIMENSI 14
3.1 Permasalahan pemotongan bahan 14
3.2 Penyusunan iklan pada sebuah halaman koran 32
BAB IV KESIMPULAN 39
DAFTAR PUSTAKA 41

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Nama	Halaman
3.1.	Susunan potongan untuk pemotongan bahan secara Horizontal-vertikal	23
3.2	Susunan potongan untuk pemotongan bahan secara vertikal horizontal	32

DAFTAR TABEL

Tabel	Nama	Halaman
2.1	ukuran item	8
2.2.	Hasil penghitungan nilai $F_k(y)$	11
2.3	Hasil penghitungan nilai i(k,y)	13
3.1	Ukuran item (potongan)	14
3.2	Hasil penghitungan nilai $F_k(x)$ untuk pemotongan secara horizontal-vertikal	17
3.3	Hasil penghitungan nilai $G_k(y)$ untuk pemotongan secara horizontal-vertikal	20
3.4	Hasil penghitungan nilai i(k,y) untuk pemotongan secara horizontal-vertikal	22
3.5	Ukuran item(potongan) yang telah terurut	23
3.6	Hasil penghitungan nilai $F_k(y)$ untuk pemotongan secara vertikal-horisontal	26
3.7	Hasil penghitungan nilai $G_k(x)$ untuk pemotongan secara vertikal-horisontal	29
3.8	Hasil penghitungan nilai i(k,x) untuk pemotongan secara vertikal-horisontal	31
3.9	Ukuran item(iklan)	32
3.10	Hasil penghitungan nilai $F_k(y)$ untuk penyusunan iklan	35
3.11	Hasil penghitungan nilai $G_k(x)$ untuk penyusunan iklan	38
3.12	Hasil penghitungan i(k,x) untuk penyusunan iklan	39

BAB I

PENDAHULUAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Permasalahan Knapsack merupakan salah satu topik dalam Algoritma Kombinatorik. Permasalahan knapsack ini telah dipelajari secara intensif dan diaplikasikan dalam berbagai bidang industri

Salah satu penerapan permasalahan knapsack pada bidang industri adalah pada permasalahan pemotongan bahan. Di mana pada permasalahan tersebut suatu bahan dalam ukuran yang besar akan dipotong dengan beberapa potongan dalam ukuran yang lebih kecil. Tiap potongan memiliki nilai (value) dan ukuran yang berbeda. Tujuan dari pemotongan bahan tersebut adalah bagaimana memperoleh hasil pemotongan yang memberikan nilai(*value*) yang paling maksimal.

1.2 PERMASALAHAN

Permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah cara penyelesaian dan menyajikan contoh-contoh permasalahan knapsack dua dimensi.

1.3 TUJUAN

Tujuan dari tugas akhir ini adalah melakukan studi literatur tentang Permasalahan Knapsack dua dimensi.

1.4 BATASAN MASALAH

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah pada Permasalahan Knapsack dua dimensi .

1.5 MANFAAT

Manfaat dari tugas akhir adalah :

1. Adanya tambahan untuk sarana pustaka tentang permasalahan knapsack dua dimensi
2. Sebagai kajian dalam perkembangan ilmu pengetahuan khususnya pada permasalahan *knapsack* .

1.6 METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi yang ditempuh dalam tugas akhir ini :

1. Studi literatur
2. Mengkaji permasalahan Knapsack dengan memberikan contoh kasus pada permasalahan knapsack dua dimensi.
3. Penyusunan Laporan

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Permasalahan *Knapsack*

Permasalahan *knapsack* secara sederhana dapat digambarkan pada seorang pendaki yang membawa ransel dalam perjalanannya. Dimana, ransel tersebut akan diisi dengan sejumlah benda (item) yang berbeda-beda, masing-masing benda (item) mempunyai bobot dan nilai (*value*). Permasalahan muncul karena ransel tersebut mempunyai bobot volume yang terbatas sehingga harus dipilih benda (item) yang akan dibawa agar ransel terisi penuh sesuai dengan kapasitas bobot volume ransel. Tentu, dia lebih suka membawa benda (item) yang dapat memberikan nilai (value) maksimal dengan bobot total yang tidak melebihi kapasitas bobot volume ransel.

Dari gambaran permasalahan di atas permasalahan *knapsack* ini dapat ditulis dalam suatu bentuk matematis dengan mengasumsikan w_j adalah bobot dari j item, v_j adalah nilai (*value*) dari j item. x_j adalah banyak item dari j yang dibawa oleh pendaki, dan c menunjukkan kapasitas bobot volume ransel. Maka permasalahan secara matematis menjadi :

$$\text{Max} \quad \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \qquad (v_j \geq 0,\ j = 1 \ldots n)$$

$$\text{Syarat} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c \qquad (w_j \geq 0,\ c > 0,\ j = 1 \ldots n) \quad \text{......................} (2.1)$$

$$x_j \geq 0, \text{ integer}$$

2.2 Jenis Permasalahan Knapsack

Berdasarkan pada jumlah kapasitas bahan yang digunakan, masalah knapsack terbagi menjadi 2(dua), yaitu :

a. Knapsack Tunggal

Masalah knapsack tunggal adalah masalah knapsack di mana jumlah knapsack yang dipakai hanya satu. Persamaannya adalah

$$\text{Maksimal} \quad \sum_{j=1}^{n} v_j \; x_j$$

$$\text{Syarat} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j \; x_j \leq c \qquad (2.2)$$

$$0 \leq x_j \leq b_j, \; j = 1,2,\ldots n$$

$$x_j = \text{integer}, \; j = 0,1,2, \ldots n$$

b. Knapsack Ganda

Masalah knapack Ganda adalah masalah knapsack dengan menggunakan banyak knapsack. Persamaan matematisnya adalah sebagai berikut :

$$\text{Maksimal} \quad \sum_{j=1}^{n} v_j \; x_j$$

$$\text{Syarat} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j \; x_j \leq c_j \qquad (2.3)$$

$$0 \leq x_j \leq b_j, \; j = 1,2,\ldots n$$

$$x_j = \text{integer}, \; j = 0,1,2, \ldots n$$

Jika ditinjau menurut jumlah masing-masing item masalah knapsack terbagi menjadi 2 (dua), yaitu :

a. Masalah knapsack 0-1

Masalah knapsack 0-1 adalah masalah knapsack di mana jumlah barang untuk setiap item hanya satu. Persamaan matematisnya adalah sebagai berikut :

Maksimal $\sum_{j=1}^{n} v_j \; x_j$

Syarat $\sum_{j=1}^{n} w_j \; x_j \leq c$ .... (2.4)

$x_j = 0$ atau $1, j = 0,1,2, \ldots n$

b. Masalah *Knapsack* Pilihan Ganda

Masalah knapsack pilihan ganda adalah masalah knapsack di mana jumlah barang setiap item lebih dari satu. Persamaan matematisnya adalah sebagai berikut:

Maksimal $\sum_{j=1}^{n} v_j \; x_j$

Syarat $\sum_{j=1}^{n} w_j \; x_j \leq c$ .... (2.5)

$0 \leq x_j \leq b_j, j = 1,2, \ldots n$

x_j = integer, $j = 0,1,2, \ldots n$

Jika ditinjau menurut jumlah item benda yang dioptimalkan masalah knapsack terbagi 2(dua) , yaitu ;

a. *Knapsack* Terbatas

Masalah knapsack terbatas adalah masalah knapsack di mana jumlah setiap item benda yang dipilih dibatasi dengan nilai tertentu, maksudnya kita hanya dapat memasukkan item tertentu dengan jumlah benda yang dipilih tidak boleh melebihi jumlah yang diminta (order). Persamaan matematisnya adalah sebagai berikut :

Maksimal $\sum_{j=1}^{n} v_j \; x_j$

Syarat $\sum_{j=1}^{n} w_j \; x_j \leq c$ .... (2.6)

$0 \leq x_j \leq b_j, j = 1,2, \ldots n$

x_j = integer, $j = 1,2, \ldots n$

b. Knapsack Tak Terbatas

Masalah knapsack tak terbatas adalah masalah knapsack di mana jumlah setiap item benda yang dipilih tidak terbatas. Persamaan matematisnya adalah sebagai berikut :

Maksimal $\sum_{j=1}^{n} v_j \; x_j$

Syarat $\sum_{j=1}^{n} w_j \; x_j \leq c$ .... (2.7)

$x_j \geq 0$ dan integer, $j = 1,2, \ldots n$

Permasalahan *knapsack* jika ditinjau dari dimensi benda maka dapat dibedakan menjadi :

- Knapsack 1 dimensi yaitu permasalahan *knapsack* yang peninjauannya hanya pada dimensi panjang.
- Knapsack 2 dimensi yaitu permasalahan *knapsack* yang peninjauannya hanya pada dimensi panjang dan lebar.
- Knapsack 3 dimensi yaitu permasalahan *knapsack* yang peninjauannya pada dimensi panjang, lebar dan tinggi.

Pada dasarnya permasalahan *knapsack* secara umum dapat dibedakan menjadi :

- Mengisi ruang , contoh ; pengisian kontainer dengan boks dengan ukuran tertentu sehingga dapat memuatnya semaksimal mungkin
- Membagi ruang , contoh ; bahan persegi yang berukuran besar dibagi-bagi (dipotong) sehingga menjadi bagian kecil untuk memberi nilai profit besar.

2.3 Permasalahan Knapsack Satu dimensi

Permasalahan knapsack satu dimensi merupakan permasalahan knapsack yang peninjauannya hanya dimensi panjang (satu dimensi). Persamaan permasalahan knapsack satu dimensi adalah sebagaimana berikut ini :

$$\text{Max} \quad \sum_{j=1}^{n} v_j \, x_j \qquad (v_j \geq 0,\ j = 1 \ldots n)$$

$$\text{Syarat} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j \, x_j \leq c \qquad (w_j \geq 0,\ c > 0, j = 1 \ldots n) \ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

$$x_j \geq 0, \text{ integer}$$

untuk menyelesaikan permasalahan 2.8 maka didefinisikan sebuah fungsi baru $F_k(y)$.

$$F_k(y) = \max \sum_{i=1}^{k} v_i x_i \qquad (0 \leq k \leq n)$$

$$\text{Kendala} : \sum_{i=1}^{k} w_i \, x_i \leq x \ ,(0 \leq y \leq c) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.9)$$

$F_k(y)$: nilai maksimal yang diperoleh dari membawa k item pertama dengan total bobot tidak lebih dari c

Untuk nilai awal

$F_0(y)=0$, untuk semua x($0 \leq x \leq c$) , karena tidak ada item yang dipilih

$F_k(0)=0$, untuk semua k ($0 \leq k \leq n$), bobot maksimal bernilai 0

$F_1(y) = \left\lfloor \frac{y}{w_1} \right\rfloor v_1$, untuk k=1

Sedang secara umum adalah sebagai berikut ini :

$F_k(y) = \text{Max} \{ F_{k-1}(y),\ F_k(y-w_k) + v_k \}$ (k=1 .....n ; x=1...c)

Contoh : Permasalahan pemuatan barang.

Sebuah kapal memiliki beban muatan maksimum sebesar 10 ton, akan digunakan untuk mengangkut suatu persediaan barang. Di mana setiap unit barang memiliki nilai dan beban muatan. Ada pun ukuran dari barang-barang tersebut adalah sebagaimana berikut ini :

Tabel 2.1 ukuran barang(item)

x_i	$W_{i\,(ton)}$	v_i
1	2	3
2	3	5
3	6	11

Karena beban muatan kapal terbatas, tidak semua barang bisa diangkut untuk itu pengangkutan barang dilakukan dengan membawa barang yang paling bernilai dengan beban muatan barang yang tidak melebihi beban muatan maksimal kapal

Formulasi permasalahan dalam permasalahan knapsack adalah sebagaimana berikut ini :

$$Max \sum_{i=1}^{n} v_i\ x_i \qquad (v_i > 0,\ i = 1.....n)$$

$$\text{Kendala} : \sum_{j=1}^{n} w_i\ x_i \le c \qquad (w_i \ge 0,\ c > 0,\ i = 1..n)$$

Keterangan :

v_i : nilai dari barang (item) ke i

x_i : banyak barang(item) ke-i

w_i : beban barang ke-i

c : muatan maksimum kapal

sehingga diperoleh formulasi permasalahan sebagai berikut ;

Max $3x_1 + 5x_2 + 11x_3$

Kendala : $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \leq 10$

Fungsi optimal untuk menyelesaikan

$$F_k(y) = \max \sum_{i=1}^{k} v_i x_i \qquad (0 \leq k \leq n)$$

$$\text{Kendala} : \sum_{i=1}^{k} w_i x_i \leq x \ , \qquad (0 \leq y \leq c)$$

$F_k(y) =$ nilai maksimal yang didapat dari membawa k item pertama dan total bobot tidak lebih dari c

Untuk nilai awal

$F_0(y) = 0$, untuk semua y ($0 \leq y \leq c$)

$F_k(0) = 0$, untuk semua k ($0 \leq k \leq n$)

$F_1(k) = \left\lfloor \frac{y}{w_1} \right\rfloor v_1$, untuk k= 1

Secara umum adalah sebagai berikut

$F_k(y) = \text{Max} \{ F_{k-1}(y) \ , \ F_k(y - w_k) + v_k \}$ (k=1, ...n; y =1....c)

Selanjutnya akan dicari $F_n(c)$ sebagaimana berikut ini ;

- k = 1

$F_1(1) = \left\lfloor \frac{y_1}{w_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor .3 = 0$ $\qquad$ $F_1(2) = \left\lfloor \frac{y_2}{w_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor .3 = 3$

$$F_1(3) = \left\lfloor \frac{y_3}{w_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor .3 = 3$$

$$F_1(4) = \left\lfloor \frac{y_4}{w_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor .3 = 6$$

$$F_1(5) = \left\lfloor \frac{y_5}{w_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor .3 = 6$$

$$F_1(6) = \left\lfloor \frac{y_6}{w_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor .3 = 9$$

$$F_1(7) = \left\lfloor \frac{y_7}{w_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor .3 = 9$$

$$F_1(8) = \left\lfloor \frac{y_8}{w_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{8}{2} \right\rfloor .3 = 12$$

$$F_1(9) = \left\lfloor \frac{y_9}{w_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor .3 = 12$$

$$F_1(10) = \left\lfloor \frac{y_{10}}{w_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor .3 = 14$$

- $k = 2$

$F_2(1) = \max \{ F_1(1), F_2(1\text{-}3) + 5 \} = 0$

$F_2(2) = \max \{ F_1(2), F_2(2\text{-}3) + 5 \} = 3$

$F_2(3) = \max \{ F_1(3), F_2(3\text{-}3) + 5 \} = 5$

$F_2(4) = \max \{ F_1(4), F_2(4\text{-}3) + 5 \} = 6$

$F_2(5) = \max \{ F_1(5), F_2(5\text{-}3) + 5 \} = 8$

$F_2(6) = \max \{ F_1(6), F_2(6\text{-}3) + 5 \} = 10$

$F_2(7) = \max \{ F_1(7), F_2(7\text{-}3) + 5 \} = 11$

$F_2(8) = \max \{ F_1(8), F_2(8\text{-}3) + 5 \} = 12$

$F_2(9) = \max \{ F_1(9), F_2(9\text{-}3) + 5 \} = 15$

$F_2(10) = \max \{ F_1(10), F_2(10\text{-}3) + 5 \} = 16$

- $k = 3$

$F_3(1) = \max \{ F_2(1), F_3(1\text{-}6) + 30 \} = 0$

$F_3(2) = \max \{ F_2(2), F_3(2\text{-}6) + 30 \} = 3$

$F_3(3) = \max \{ F_2(3), F_3(3\text{-}6) + 30 \} = 5$

$F_3(4) = \max \{ F_2(4), F_3(4\text{-}6) + 30 \} = 6$

$F_3(5) = \max \{ F_2(5), F_3(5\text{-}6) + 30 \} = 8$

$F_3(6) = \max \{ F_2(6),\ F_3(6\text{-}6) + 30 \} = 10$

$F_3(7) = \max \{ F_2(7),\ F_3(7\text{-}6) + 30 \} = 11$

$F_3(8) = \max \{ F_2(8),\ F_3(8\text{-}6) + 30 \} = 14$

$F_3(9) = \max \{ F_2(9),\ F_3(9\text{-}6) + 30 \} = 16$

$F_3(10) = \max \{ F_2(10),\ F_3(10\text{-}6) + 30 \} = 17$

Tabel 2.2 Hasil penghitungan nilai $F_k(y)$

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(y)$	0	3	3	6	6	9	9	12	12	15
$F_2(y)$	0	3	5	6	8	10	11	13	15	16
$F_3(y)$	0	3	5	6	8	10	11	14	16	17

Hasil penghitungan nilai $F_k(y)$ pada Tabel 2.2 menunjukkan nilai (*value*) terbesar adalah 17. ini berarti barang yang akan diangkut pada kapal akan menghasilkan nilai (*value*) maksimal sebesar 17 kan tetapi belum diketahui barang(item) mana saja yang akan diangkut dalam kapal.. Untuk itu didefinisikan :

$i(k,y)$: indek maksimal dari item yang digunakan dalam $F_k(y)$

$$i(1,y) = \begin{cases} 0, & \text{jika } F_1(y) = 0 \\ 1, & \text{jika } F_1(y) \neq 0 \end{cases}$$

secara umum :

$$i(k,y) = \begin{cases} i(k-1),y) & \text{jika } F_{k-1}(y) > F_k(y - w_k) + v_k \\ k & \text{jika } F_{k-1}(y) \leq F_k(y - w_k) + v_k \end{cases}$$

- k=1

  $i(1,1) = [F_1(1) = 0] = 0$

  $i(1,2) = [F_1(2) = 3] = 1$

  $i(1,3) = [F_1(3) = 3] = 1$

  $i(1,4) = [F_1(4) = 6] = 1$

  $i(1,5) = [F_1(5) = 6] = 1$

$i(1,6) = [F_1(6) = 9] = 1$

$i(1,7) = [F_1(7) = 9] = 1$

$i(1,8) = [F_1(8) = 12] = 1$

$i(1,9) = [F_1(9) = 12] = 1$

$i(1,10) = [F_1(10) = 15] = 1$

- k=2

$i(2,1) = F_1(1) > F_2(1\text{-}3) + 5 = i(1,1) = 0$

$i(2,2) = F_1(2) > F_2(2\text{-}3) + 5 = i(1,2) = 1$

$i(2,3) = F_1(3) \leq F_2(3\text{-}3) + 5 = k = 2$

$i(2,4) = F_1(4) > F_2(4\text{-}3) + 5 = k = 1$

$i(2,5) = F_1(5) \leq F_2(5\text{-}3) + 5 = k = 2$

$i(2,6) = F_1(6) \leq F_2(6\text{-}3) + 5 = k = 2$

$i(2,7) = F_1(7) \leq F_2(7\text{-}3) + 5 = k = 2$

$i(2,8) = F_1(8) \leq F_2(8\text{-}3) + 5 = k = 2$

$i(2,9) = F_1(9) \leq F_2(9\text{-}3) + 5 = k = 2$

$i(2,10) = F_1(10) \leq F_2(10\text{-}3) + 5 = k = 2$

- k=3

$i(3,1) = F_2(1) > F_3(1\text{-}6) + 11 = i(2,1) = 0$

$i(3,2) = F_2(2) > F_3(2\text{-}6) + 11 = i(2,2) = 1$

$i(3,3) = F_2(3) > F_3(3\text{-}6) + 11 = i(2,3) = 2$

$i(3,4) = F_2(4) > F_3(4\text{-}6) + 11 = i(2,4) = 1$

$i(3,5) = F_2(5) \leq F_3(5\text{-}6) + 11 = i(2,5) = 2$

$i(3,6) = F_2(6) > F_3(6\text{-}6) + 11 = i(2,6) = 2$

$i(3,7) = F_2(7) \leq F_3(7\text{-}6) + 11 = k = 3$

$i(3,8) = F_2(8) \leq F_3(8\text{-}6) + 11 = k = 3$

$i(3,9) = F_2(9) \leq F_3(9\text{-}6) + 11 = k = 3$

$i(3,10) = F_2(10) \leq F_3(10\text{-}6) + 11 = k = 3$

Tabel 2.3 Hasil penghitungan nilai i(k,y)

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i(1,y)	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i(2,y)	0	1	2	1	2	2	2	2	2	2
i(3,y)	0	1	2	1	2	2	3	3	3	3

Dari Tabel 2.2 dapat diketahui bahwa nilai (*value*) maksimum $F_3(10) = 17$ untuk $1 \leq k \leq 3$ dan $0 \leq y \leq 10$. Dari Tabel 2.3 akan dicari barang (item) yang akan diangkut dalam kapal sebagaimana berikut ini :

$F_3(10) = 17$ dengan $i(3,10) = 3$

$i(3,10) = 3$

$i(3,10 - w_3) = i(3,10\text{-}6) = i(3,4) = 1$

$i(3,6\text{-}w_1) = i(3,4\text{-}2) = i(3,2) = 1$

$i(3,2\text{-}w_1) = i(3,2\text{-}2) = i(3,0) = 0$

Jadi barang-barang yang akan diangkut dalam kapal adalah $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ dan $x_3 = 1$.

BAB III

KASUS-KASUS KNAPSACK DUA DIMENSI

BAB III

KASUS-KASUS KNAPSACK DUA DIMENSI

3.1 Permasalahan Pemotongan Bahan

Diberikan suatu bahan dalam bentuk persegi panjang memiliki ukuran Panjang = 14 dan Lebar = 11. bahan akan dipotong menjadi potongan-potongan dengan ukuran sebagai berikut :

Tabel 3.1 ukuran item (potongan)

x_i	p_i	l_i	v_i
1	7	2	6
2	5	3	7
3	4	5	9

Pemotongan dilakukan dengan tujuan memperoleh profit semaksimal mungkin.

Formulasi permasalahan dalam permasalahan knapsack adalah sebagaimana berikut ini :

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{n} v_i \, x_i \qquad (v_i > 0,\ i = 1 \ldots n)$$

$$\text{Kendala} : \sum_{i=1}^{n} (p_i \times l_i)\ x_i \ \leq P \times L \qquad (p_i \geq 0,\ l_i \geq 0,\ P > 0,\ L > 0,\ i = 1..\ n)$$

Keterangan :

v_i : nilai *(value)* dari item ke i

x_i : banyak item ke-i

p_i : panjang potongan ke-i

l_i : lebar potongan ke-i

P : Panjang bahan

L : lebar bahan

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dilakukan dengan dua cara pemotongan :

- Horisontal kemudian vertikal
- Vertikal kemudian horisontal

Horisontal kemudian vertikal

Untuk menyelesaikan permasalahan di atas terlebih dulu dibawa ke dalam permasalahan knapsack satu dimensi tetapi lebar item harus memenuhi $l_1 < l_2 < \ldots < l_n$ sehingga diperoleh formulasi permasalahan sebagai berikut ;

Max $6x_1 + 7x_2 + 9x_3$

Kendala : $7x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 14$ ....(3.1)

Fungsi optimal untuk menyelesaikan (3.1)

$$F_k(x) = \max \sum_{i=1}^{k} v_i x_i \qquad (0 \leq k \leq n)$$

$$\text{Kendala : } \sum_{i=1}^{k} p_i x_i \leq x \;, \qquad (0 \leq x \leq P)$$

$F_k(x)$ = nilai maksimal yang didapat dari membawa k item pertama dan total bobot tidak lebih dari P

Untuk nilai awal

$F_0(x) = 0$, untuk semua x ($0 \leq x \leq P$)

$F_k(0) = 0$, untuk semua k ($0 \leq k \leq n$)

$$F_1(k) = \left\lfloor \frac{x}{p_1} \right\rfloor v_1, \text{ untuk } k = 1$$

Secara umum adalah sebagai berikut

$F_k(x) = \text{Max} \{ F_{k-1}(x)\ ,\ F_k(x - p_k) + v_k \}$ (k=1, ...n; x =1....P)

Selanjutnya akan dicari $F_n(P)$ sebagaimana berikut ini ;

- k = 1

$$F_1(1) = \left\lfloor \frac{x_1}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{1}{7} \right\rfloor .6 = 0$$

$$F_1(2) = \left\lfloor \frac{x_2}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{2}{7} \right\rfloor .6 = 0$$

$$F_1(3) = \left\lfloor \frac{x_3}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{3}{7} \right\rfloor .6 = 0$$

$$F_1(4) = \left\lfloor \frac{x_4}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{4}{7} \right\rfloor .6 = 0$$

$$F_1(5) = \left\lfloor \frac{x_5}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{5}{7} \right\rfloor .6 = 0$$

$$F_1(6) = \left\lfloor \frac{x_6}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{6}{7} \right\rfloor .6 = 0$$

$$F_1(7) = \left\lfloor \frac{x_7}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{7}{7} \right\rfloor .6 = 6$$

$$F_1(8) = \left\lfloor \frac{x_8}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{8}{7} \right\rfloor .6 = 6$$

$$F_1(9) = \left\lfloor \frac{x_9}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{9}{7} \right\rfloor .6 = 6$$

$$F_1(10) = \left\lfloor \frac{x_{10}}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor .6 = 6$$

$$F_1(11) = \left\lfloor \frac{x_{11}}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{2}{7} \right\rfloor .6 = 6$$

$$F_1(12) = \left\lfloor \frac{x_{12}}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{12}{7} \right\rfloor .6 = 6$$

$$F_1(13) = \left\lfloor \frac{x_{13}}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{13}{7} \right\rfloor .6 = 6$$

$$F_1(14) = \left\lfloor \frac{x_{14}}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{14}{7} \right\rfloor .6 = 12$$

- k = 2

$F_2(1) = \max \{ F_1(1),\ F_2(1\text{-}5) + 7 \} = 0$

$F_2(2) = \max \{ F_1(2),\ F_2(2\text{-}5) + 7 \} = 0$

$F_2(3) = \max \{ F_1(3),\ F_2(3\text{-}5) + 7 \} = 0$

$F_2(4) = \max \{ F_1(4),\ F_2(4\text{-}5) + 7 \} = 0$

$F_2(5) = \max \{ F_1(5),\ F_2(5\text{-}5) + 7 \} = 7$

$F_2(6) = \max \{ F_1(6),\ F_2(6\text{-}5) + 7 \} = 7$

$F_2(7) = \max \{ F_1(7), F_2(7-5) + 7 \} = 7$

$F_2(8) = \max \{ F_1(8), F_2(8-5) + 7 \} = 7$

$F_2(9) = \max \{ F_1(9), F_2(9-5) + 7 \} = 7$

$F_2(10) = \max \{ F_1(10), F_2(10-5) + 7 \} = 14$

$F_2(11) = \max \{ F_1(11), F_2(11-5) + 7 \} = 14$

$F_2(12) = \max \{ F_1(12), F_2(12-5) + 7 \} = 14$

$F_2(13) = \max \{ F_1(13), F_2(13-5) + 7 \} = 14$

$F_2(14) = \max \{ F_1(14), F_2(14-5) + 7 \} = 14$

- $k = 3$

$F_3(1) = \max \{ F_2(1), F_3(1-4) + 9 \} = 0$

$F_3(2) = \max \{ F_2(2), F_3(2-4) + 9 \} = 0$

$F_3(3) = \max \{ F_2(3), F_3(3-4) + 9 \} = 0$

$F_3(4) = \max \{ F_2(4), F_3(4-4) + 9 \} = 9$

$F_3(5) = \max \{ F_2(5), F_3(5-4) + 9 \} = 9$

$F_3(6) = \max \{ F_2(6), F_3(6-4) + 9 \} = 9$

$F_3(7) = \max \{ F_2(7), F_3(7-4) + 9 \} = 9$

$F_3(8) = \max \{ F_2(8), F_3(8-4) + 9 \} = 18$

$F_3(9) = \max \{ F_2(9), F_3(9-4) + 9 \} = 18$

$F_3(10) = \max \{ F_2(10), F_3(10-4) + 9 \} = 18$

$F_3(11) = \max \{ F_2(11), F_3(11-4) + 9 \} = 18$

$F_3(12) = \max \{ F_2(12), F_3(12-4) + 9 \} = 27$

$F_3(13) = \max \{ F_2(13), F_3(13-4) + 9 \} = 27$

$F_3(14) = \max \{ F_2(14), F_3(14-4) + 9 \} = 27$

Tabel 3.2 Hasil penghitungan nilai $F_k(x)$ untuk pemotongan secara horizontal - vertikal

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$F_1(x)$	0	0	0	0	0	0	6	6	6	6	6	6	6	12
$F_2(x)$	0	0	0	0	7	7	7	7	7	14	14	14	14	14
$F_3(x)$	0	0	0	9	9	9	9	18	18	18	18	27	27	27

Dari Tabel 3.2 dapat diketahui bahwa $F_1(14) = 12$, $F_2(14) = 14$, dan $F_1(14) = 27$ ini berarti satu kali pemotongan bahan secara horisontal seharusnya ;

- untuk item 1 akan menghasilkan nilai (*value*) sebesar 12
- untuk item 2 akan menghasilkan nilai (*value*) sebesar 14
- untuk item 3 akan menghasilkan nilai (*value*) sebesar 27

Tahap berikutnya pemotongan dilakukan secara vertikal, di mana nilai (*value*) dari pemotongan manjadi (12, 14, 24) , sehingga formulasi permasalahan menjadi sebagai berikut ini :

Max $12x_1 + 14x_2 + 27x_3$

Kendala $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 11$ ....(3.2)

Fungsi Optimal untuk menyelesaikan (3.2)adalah sebagaiman berikut ini ;

$$G_k(y) = \text{Max} \sum_{i=1}^{k} v_i\, x_i\,, \qquad (0 \leq k \leq n)$$

$$\text{Kendala} \;:\; \sum_{i=1}^{k} l_i\, x_i \leq y\,, \qquad (0 \leq y \leq L)$$

$G_k(y)$ = nilai maksimal yang didapat dari membawa k item pertama dan total bobot tidak lebih dari L

Untu nilai awal

$G_0(y) = 0$, untuk semua y ($0 \leq y \leq L$)

$G_k(0) = 0$, untuk semua k ($0 \leq k \leq n$)

$$G_1(y) = \left\lfloor \frac{y}{l_1} \right\rfloor v_1, \text{ untuk } k = 1$$

Secara umum adalah sebagai berikut

$$G_k(y) = \text{Max}\,\{\, G_{k-1}(y)\;,\; G_k(\,y - l_k\,) + v_k \,\} \qquad (k=1, \ldots n;\; y = 1 \ldots L)$$

Selanjutnya akan dicari $G_n(L)$ sebagaimana berikut ini ;

- k = 1

$$G_1(1) = \left\lfloor \frac{y_1}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor .12 = 0$$

$$G_1(2) = \left\lfloor \frac{y_2}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor .12 = 12$$

$$G_1(3) = \left\lfloor \frac{y_3}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor .12 = 12$$

$$G_1(4) = \left\lfloor \frac{y_4}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor .12 = 24$$

$$G_1(5) = \left\lfloor \frac{y_5}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor .12 = 24$$

$$G_1(6) = \left\lfloor \frac{y_6}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor .12 = 36$$

$$G_1(7) = \left\lfloor \frac{y_7}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor .12 = 36$$

$$G_1(8) = \left\lfloor \frac{y_8}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{8}{2} \right\rfloor .12 = 48$$

$$G_1(9) = \left\lfloor \frac{y_9}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor .12 = 48$$

$$G_1(10) = \left\lfloor \frac{y_{10}}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor .12 = 60$$

$$G_1(11) = \left\lfloor \frac{y_{11}}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor .12 = 60$$

- k = 2

$$G_2(1) = \max \{ G_1(1), G_2(1-3) + 14 \} = 0$$
$$G_2(2) = \max \{ G_1(2), G_2(2-3) + 14 \} = 12$$
$$G_2(3) = \max \{ G_1(3), G_2(3-3) + 14 \} = 14$$
$$G_2(4) = \max \{ G_1(4), G_2(4-3) + 14 \} = 24$$
$$G_2(5) = \max \{ G_1(5), G_2(5-3) + 14 \} = 26$$
$$G_2(6) = \max \{ G_1(6), G_2(6-3) + 14 \} = 36$$
$$G_2(7) = \max \{ G_1(7), G_2(7-3) + 14 \} = 38$$
$$G_2(8) = \max \{ G_1(8), G_2(8-3) + 14 \} = 48$$
$$G_2(9) = \max \{ G_1(9), G_2(9-3) + 14 \} = 50$$
$$G_2(10) = \max \{ G_1(10), G_2(10-3) + 14 \} = 60$$
$$G_2(11) = \max \{ G_1(11), G_2(11-3) + 14 \} = 62$$

- $k = 3$

$G_3(1) = \max\{ G_2(1), G_3(1\text{-}5) + 27 \} = 0$

$G_3(2) = \max\{ G_2(2), G_3(2\text{-}5) + 27 \} = 12$

$G_3(3) = \max\{ G_2(3), G_3(3\text{-}5) + 27 \} = 14$

$G_3(4) = \max\{ G_2(4), G_3(4\text{-}5) + 27 \} = 24$

$G_3(5) = \max\{ G_2(5), G_3(5\text{-}5) + 27 \} = 27$

$G_3(6) = \max\{ G_2(6), G_3(6\text{-}5) + 27 \} = 36$

$G_3(7) = \max\{ G_2(7), G_3(7\text{-}5) + 27 \} = 39$

$G_3(8) = \max\{ G_2(8), G_3(8\text{-}5) + 27 \} = 48$

$G_3(9) = \max\{ G_2(9), G_3(9\text{-}5) + 27 \} = 51$

$G_3(10) = \max\{ G_2(10), G_3(10\text{-}5) + 27 \} = 60$

$G_3(11) = \max\{ G_2(11), G_3(11\text{-}5) + 27 \} = 63$

Tabel 3.3 Hasil penghitungan nilai $G_k(y)$ untuk pemotongan secara horizontal-vertikal

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$G_1(y)$	0	12	12	24	24	36	36	48	60	60	60
$G_2(y)$	0	12	14	24	26	36	38	48	50	60	62
$G_3(y)$	0	12	14	24	27	36	39	48	51	60	63

Hasil penghitungan nilai $G_k(y)$ pada Tabel 3.3 menunjukkan nilai (*value*) terbesar adalah 63. ini berarti pemotongan bahan dengan cara pemotongan horisontal kemudian vertikal untuk ukuran-ukuran yang telah ditentukan di atas akan menghasilkan nilai (*value*) maksimal sebesar 63.

Pada Tabel 3.3 diperoleh nilai (*value*) yang akan pada pemotongan bahan dengan ukuran yang telah ditentukan di atas tetapi tidak diketahui item (potongan) mana saja yang akan digunakan dalam pemotongan. Untuk itu didefinisikan :

$i(k,y)$: indek maksimal dari item yang digunakan dalam $G_k(y)$

$$i(1,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } G_1(y) = 0 \\ 1 & , \text{ jika } G_1(y) \neq 0 \end{cases}$$

secara umum :

$$i(k,y) = \begin{cases} i(k-1), y) \text{ jika } G_{k-1}(y) > G_k(y - l_k) + v_k \\ \\ k \qquad\qquad \text{jika } G_{k-1}(y) \le G_k(y - l_k) + v_k \end{cases}$$

- k=1

$i(1, 1) = [G_1(1) = 0\ ] = 0$

$i(1,2) = [G_1(2) = 12] = 1$

$i(1,3) = [G_1(3) = 12] = 1$

$i(1,4) = [G_1(4) = 24] = 1$

$i(1,5) = [G_1(5) = 24] = 1$

$i(1,6) = [G_1(6) = 36] = 1$

$i(1,7) = [G_1(7) = 36] = 1$

$i(1,8\ ) = [G_1(8) = 48] = 1$

$i(1,9) = [G_1(9) = 48] = 1$

$i(1,10) = [G_1(10) = 60] = 1$

$i(1,11) = [G_1(11) = 60] = 1$

- k=2

$i(2, 1) = G_1(1) > G_2(\ 1\text{-}3) + 14 = i(1,1) = 0$

$i(2,2) = G_1(2) > G_2(\ 2\text{-}3) + 14 = i(1,2) = 1$

$i(2,3) = G_1(3) \le G_2(\ 3\text{-}3) + 14 = k = 2$

$i(2,4) = G_1(4) > G_2(\ 4\text{-}3) + 14 = i(1,4) = 1$

$i(2,5) = G_1(5) \le G_2(\ 5\text{-}3) + 14 = k = 2$

$i(2,6) = G_1(6) > G_2(\ 6\text{-}3) + 14 = i(1,6) = 1$

$i(2,7) = G_1(7) \le G_2(\ 7\text{-}3) + 14 = k = 2$

$i(2,8\ ) = G_1(8) > G_2(\ 8\text{-}3) + 14 = i(1,8\ ) = 1$

$i(2,9) = G_1(9) \le G_2(\ 9\text{-}3) + 14 = k = 2$

$i(2,10) = G_1(10) > G_2(\ 10\text{-}3) + 14 = i(1,10) = 1$

$i(2,11) = G_1(11) \le G_2(\ 11\text{-}3) + 14 = k = 2$

- k=3

$i(3,1) = G_2(1) > G_3(1\text{-}5) + 27 = i(2,1) = 0$

$i(3,2) = G_2(2) > G_3(2\text{-}5) + 27 = i(2,2) = 1$

$i(3,3) = G_2(3) > G_3(3\text{-}5) + 27 = i(2,3) = 2$

$i(3,4) = G_2(4) > G_3(4\text{-}5) + 27 = i(2,4) = 1$

$i(3,5) = G_2(5) \leq G_3(5\text{-}5) + 27 = k = 3$

$i(3,6) = G_2(6) > G_3(6\text{-}5) + 27 = i(2,6) = 1$

$i(3,7) = G_2(7) \leq G_3(7\text{-}5) + 27 = k = 3$

$i(3,8) = G_2(8) > G_3(8\text{-}5) + 27 = i(2,8) = 1$

$i(3,9) = G_2(9) \leq G_3(9\text{-}5) + 27 = k = 3$

$i(3,10) = G_2(10) > G_3(10\text{-}5) + 27 = i(2,10) = 1$

$i(3,11) = G_2(11) \leq G_3(11\text{-}5) + 27 = k = 3$

Tabel 3.4 Hasil penghitungan nilai i(k,y) untuk pemotongan secara horisontal - vertikal

i(k,y)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
i(1,y)	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i(2,y)	0	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
i(3,y)	0	1	2	1	3	1	3	1	3	1	3

Dari Tabel 3.3 dapat diketahui bahwa nilai (*value*) maksimum $G_3(11) = 63$ untuk $1 \leq k \leq 3$ dan $0 \leq y \leq 11$. Dari Tabel 3.4 akan dicari item(potongan)yang digunakan dalam pemotongan sebagaimana berikut ini :

$G_3(11) = 63$ dengan $i(3,11)$

$i(3,11) = 3$

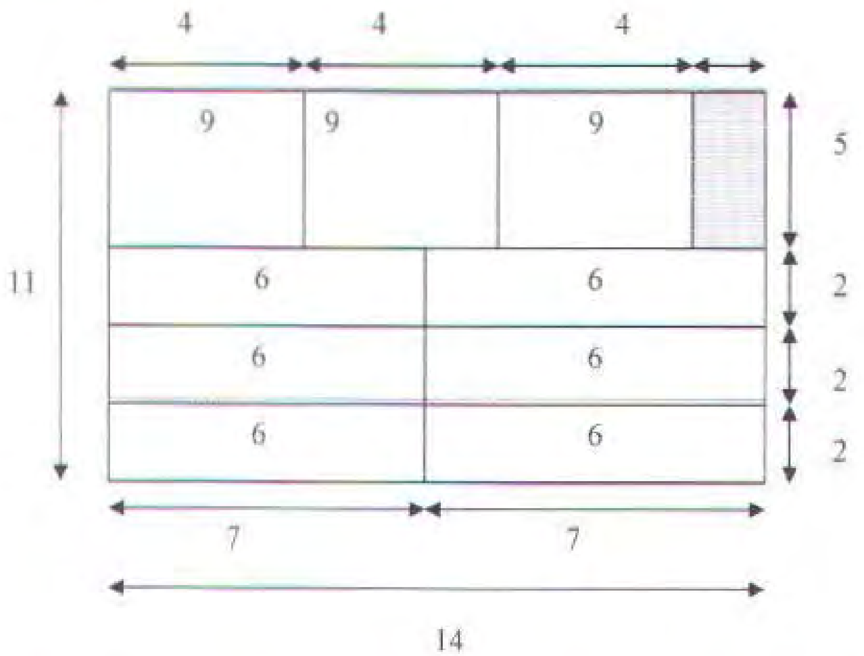
$i(3,11\text{-}l_3) = i(3,11\text{-}5) = i(3,6) = 1$

$i(3,6\text{-}l_1) = i(3,6\text{-}2) = i(3,4) = 1$

$i(3,4\text{-}l_1) = i(3,4\text{-}2) = i(3,2) = 1$

$i(3,2\text{-}i_1) = i(3,2\text{-}2) = i(3,0) = 0$

Jadi item-item yang digunakan dalam pemotongan di atas adalah $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ dan $x_3 = 1$; di mana x_1 menghasilkan nilai (*value*) sebesar 12 sedang x_3 akan menghasilkan nilai (*value*) sebesar 27. jika direpresentasikan dalam sebuah layout adalah sebagai berikut ini



Gambar 3.1 susunan potongan untuk pemotongan bahan secara horisontal-vertikal

Vertikal kemudian horisontal :

Permasalahan terlebih dulu dibawa ke dalam permasalahan knapsack satu dimensi tetapi panjang item harus memenuhi $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$

Tabel 3.5 ukuran item (potongan) setelah diurutkan berdasarkan panjang potongan

x_i	p_i	l_i	v_i
1	4	5	9
2	5	3	7
3	7	2	6

Sedangkan formulasi permasalahan sebagaimana berikut ini :

Max $9x_1 + 7x_2 + 6x_3$

Kendala : $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 11$ ....(3.3)

Fungsi optimal untuk menyelesaikan (3.3) sebagaimana berikut ini :

$$F_k(y) = \max \sum_{i=1}^{k} v_i x_i \qquad (0 \le k \le n)$$

$$\text{Kendala} : \sum_{i=1}^{k} l_i x_i \le y \qquad (0 \le y \le L)$$

$F_k(y)$ = nilai maksimal yang didapat dari membawa k item pertama dan total bobot tidak lebih dari L

Untuk nilai awal

$F_0(y) = 0$, untuk semua y ($0 \le y \le L$)

$F_k(0) = 0$, untuk semua k ($0 \le k \le n$)

$F_1(k) = \left\lfloor \frac{y}{l_1} \right\rfloor v_1$, untuk k= 1

Secara umum adalah sebagai berikut

$F_k(y) =$ Max { $F_{k-1}(y)$, $F_k(y - l_k) + v_k$ } (k=1, ….n; y=1….L)

Selanjutnya akan dicari $F_n(L)$ sebagaimana berikut ini :

- k = 1

$$F_1(1) = \left\lfloor \frac{y_1}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{1}{5} \right\rfloor .9 = 0 \qquad F_1(6) = \left\lfloor \frac{y_6}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor .9 = 9$$

$$F_1(2) = \left\lfloor \frac{y_2}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{2}{5} \right\rfloor .9 = 0 \qquad F_1(7) = \left\lfloor \frac{y_7}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{7}{5} \right\rfloor .9 = 9$$

$$F_1(3) = \left\lfloor \frac{y_3}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{3}{5} \right\rfloor .9 = 0 \qquad F_1(8) = \left\lfloor \frac{y_8}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{8}{5} \right\rfloor .9 = 9$$

$$F_1(4) = \left\lfloor \frac{y_4}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor .9 = 0 \qquad F_1(9) = \left\lfloor \frac{y_9}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{9}{5} \right\rfloor .9 = 9$$

$$F_1(5) = \left\lfloor \frac{y_5}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{5}{5} \right\rfloor .9 = 9 \qquad F_1(10) = \left\lfloor \frac{y_{10}}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor .9 = 18$$

$$F_1(11) = \left\lfloor \frac{y_{11}}{l_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{11}{5} \right\rfloor .9 = 18$$

- k = 2

$F_2(1) = \max \{ F_1(1),\ F_2(1\text{-}3) + 7 \} = 0$

$F_2(2) = \max \{ F_1(2),\ F_2(2\text{-}3) + 7 \} = 0$

$F_2(3) = \max \{ F_1(3),\ F_2(3\text{-}3) + 7 \} = 7$

$F_2(4) = \max \{ F_1(4),\ F_2(4\text{-}3) + 7 \} = 7$

$F_2(5) = \max \{ F_1(5),\ F_2(5\text{-}3) + 7 \} = 9$

$F_2(6) = \max \{ F_1(6),\ F_2(6\text{-}3) + 7 \} = 14$

$F_2(7) = \max \{ F_1(7),\ F_2(7\text{-}3) + 7 \} = 14$

$F_2(8) = \max \{ F_1(8),\ F_2(8\text{-}3) + 7 \} = 16$

$F_2(9) = \max \{ F_1(9),\ F_2(9\text{-}3) + 7 \} = 21$

$F_2(10) = \max \{ F_1(10),\ F_2(10\text{-}3) + 7 \} = 21$

$F_2(11) = \max \{ F_1(11),\ F_2(11\text{-}3) + 7 \} = 23$

- k = 3

$F_3(1) = \max \{ F_2(1),\ F_3(1\text{-}2) + 6 \} = 0$

$F_3(2) = \max \{ F_2(2),\ F_3(2\text{-}2) + 6 \} = 6$

$F_3(3) = \max \{ F_2(3),\ F_3(3\text{-}2) + 6 \} = 7$

$F_3(4) = \max \{ F_2(4),\ F_3(4\text{-}2) + 6 \} = 12$

$F_3(5) = \max \{ F_2(5),\ F_3(5\text{-}2) + 6 \} = 13$

$F_3(6) = \max \{ F_2(6),\ F_3(6\text{-}2) + 6 \} = 18$

$F_3(7) = \max \{ F_2(7),\ F_3(7\text{-}2) + 6 \} = 19$

$F_3(8) = \max \{ F_2(8),\ F_3(8\text{-}2) + 6 \} = 24$

$F_3(9) = \max \{ F_2(9),\ F_3(9\text{-}2) + 6 \} = 25$

$F_3(10) = \max \{ F_2(10),\ F_3(10\text{-}2) + 6 \} = 30$

$F_3(11) = \max \{ F_2(11),\ F_3(11\text{-}2) + 6 \} = 31$

Tabel 3. 6 Hasil penghitungan nilai $F_k(y)$ untuk pemotongan secara vertikal-horisontal

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F_1(y)$	0	0	0	0	9	9	9	9	9	18	18
$F_2(y)$	0	0	7	7	9	14	14	16	21	21	23
$F_3(y)$	0	6	7	12	13	18	19	24	25	30	31

Dari Tabel 3.6 dapat diketahui bahwa $F_1(11) = 18$, $F_2(11) = 23$, dan $F_1(11) = 31$ ini berarti satu kali pemotongan bahan secara vertikal seharusnya ;

- untuk item 1 akan menghasilkan nilai (*value*) sebesar 18
- untuk item 2 akan menghasilkan nilai (*value*) sebesar 23
- untuk item 3 akan menghasilkan nilai (*value*) sebesar 31

Tahap berikutnya pemotongan dilakukan secara horisontal, di mana nilai (*value*) dari pemotongan manjadi (18, 23, 31) , sehingga formulasi permasalahan menjadi sebagai berikut ini :

Max $18\ x_1 + 23\ x_2 + 31\ x_3$

Kendala $4x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 11$ ....(3.4)

Fungsi Optimal untuk menyelesaikan (3.4)adalah sebagaiman berikut ini ;

$$G_k(y) = \text{Max} \sum_{i=1}^{k} v_i\ x_i , \qquad (0 \leq k \leq n)$$

$$\text{Kendala} : \sum_{i=1}^{k} p_i\ x_i \leq y , \qquad (0 \leq x \leq P)$$

$G_k(x)$ = nilai maksimal yang didapat dari membawa k item pertama dan total bobot tidak lebih dari P

Untu nilai awal

$G_0(x) = 0$, untuk semua x ($0 \leq x \leq P$)

$G_k(0) = 0$, untuk semua k ($0 \le k \le n$)

$G_1(x) = \left\lfloor \dfrac{x}{p_1} \right\rfloor v_1$, untuk k= 1

Secara umum adalah sebagai berikut

$G_k(x) = \text{Max} \{ G_{k-1}(x) \ , \ G_k(x - p_k) + v_k \}$ (k=1, ...n; x = 1 ....P)

Selanjutnya akan dicari $G_n(P)$ sebagaimana berikut ini ;

- k = 1

$G_1(1) = \left\lfloor \dfrac{x_1}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{1}{4} \right\rfloor .18 = 0$

$G_1(2) = \left\lfloor \dfrac{x_2}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{2}{4} \right\rfloor .18 = 0$

$G_1(3) = \left\lfloor \dfrac{x_3}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{3}{4} \right\rfloor .18 = 0$

$G_1(4) = \left\lfloor \dfrac{x_4}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{4}{4} \right\rfloor .18 = 18$

$G_1(5) = \left\lfloor \dfrac{x_5}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{5}{4} \right\rfloor .18 = 18$

$G_1(6) = \left\lfloor \dfrac{x_6}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{6}{4} \right\rfloor .18 = 18$

$G_1(7) = \left\lfloor \dfrac{x_7}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{7}{4} \right\rfloor .18 = 18$

$G_1(8) = \left\lfloor \dfrac{x_8}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{8}{4} \right\rfloor .18 = 36$

$G_1(9) = \left\lfloor \dfrac{x_9}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{9}{4} \right\rfloor .18 = 36$

$G_1(10) = \left\lfloor \dfrac{x_{10}}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{10}{4} \right\rfloor .18 = 36$

$G_1(11) = \left\lfloor \dfrac{x_{11}}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{11}{4} \right\rfloor .18 = 36$

$G_1(12) = \left\lfloor \dfrac{x_{12}}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{12}{4} \right\rfloor .18 = 54$

$G_1(13) = \left\lfloor \dfrac{x_{13}}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{13}{4} \right\rfloor .18 = 54$

$G_1(14) = \left\lfloor \dfrac{x_{14}}{p_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \dfrac{14}{4} \right\rfloor .18 = 54$

- k = 2

$G_2(1) = \max \{ G_1(1), G_2(1\text{-}5) + 23 \} = 0$

$G_2(2) = \max \{ G_1(2), G_2(2\text{-}5) + 23 \} = 0$

$G_2(3) = \max \{ G_1(3),\ G_2(3-5) + 23 \} = 0$

$G_2(4) = \max \{ G_1(4),\ G_2(4-5) + 23 \} = 0$

$G_2(5) = \max \{ G_1(5),\ G_2(5-5) + 23 \} = 23$

$G_2(6) = \max \{ G_1(6),\ G_2(6-5) + 23 \} = 23$

$G_2(7) = \max \{ G_1(7),\ G_2(7-5) + 23 \} = 23$

$G_2(8) = \max \{ G_1(8),\ G_2(8-5) + 23 \} = 36$

$G_2(9) = \max \{ G_1(9),\ G_2(9-5) + 23 \} = 41$

$G_2(10) = \max \{ G_1(10),\ G_2(10-5) + 23 \} = 46$

$G_2(11) = \max \{ G_1(11),\ G_2(11-5) + 23 \} = 49$

$G_2(12) = \max \{ G_1(12),\ G_2(12-5) + 23 \} = 54$

$G_2(13) = \max \{ G_1(13),\ G_2(13-5) + 23 \} = 59$

$G_2(14) = \max \{ G_1(14),\ G_2(14-5) + 23 \} = 64$

- $k = 3$

$G_3(1) = \max \{ G_2(1),\ G_3(1-4) + 31 \} = 0$

$G_3(2) = \max \{ G_2(2),\ G_3(2-4) + 31 \} = 0$

$G_3(3) = \max \{ G_2(3),\ G_3(3-4) + 31 \} = 0$

$G_3(4) = \max \{ G_2(4),\ G_3(4-4) + 31 \} = 18$

$G_3(5) = \max \{ G_2(5),\ G_3(5-4) + 31 \} = 23$

$G_3(6) = \max \{ G_2(6),\ G_3(6-4) + 31 \} = 23$

$G_3(7) = \max \{ G_2(7),\ G_3(7-4) + 31 \} = 31$

$G_3(8) = \max \{ G_2(8),\ G_3(8-4) + 31 \} = 36$

$G_3(9) = \max \{ G_2(9),\ G_3(9-4) + 31 \} = 41$

$G_3(10) = \max \{ G_2(10),\ G_3(10-4) + 31 \} = 46$

$G_3(11) = \max \{ G_2(11),\ G_3(11-4) + 31 \} = 49$

$G_3(12) = \max \{ G_2(12),\ G_3(12-4) + 31 \} = 54$

$G_3(13) = \max \{ G_2(13),\ G_3(13-4) + 31 \} = 59$

$G_3(14) = \max \{ G_2(14),\ G_3(14-4) + 9 \} = 64$

Tabel 3.7 Hasil penghitungan nilai $G_k(x)$ untuk pemotongan secara vertikal-horisontal

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$G_1(x)$	0	0	0	18	18	18	18	36	36	36	36	54	54	54
$G_2(x)$	0	0	0	18	23	23	23	36	41	46	46	54	59	64
$G_3(x)$	0	0	0	18	23	23	31	36	41	46	49	54	59	64

Hasil penghitungan nilai $G_k(x)$ pada Tabel 3.7 menunjukkan nilai (*value*) terbesar adalah 64. ini berarti pemotongan bahan dengan cara pemotongan vertikal kemudian horisontal untuk ukuran-ukuran yang telah ditentukan di atas akan menghasilkan nilai (*value*) maksimal sebesar 64.

Pada Tabel 3.7 diperoleh nilai (*value*) yang akan dihasilkan pada pemotongan bahan dengan ukuran yang telah ditentukan di atas tetapi tidak diketahui item (potongan) mana saja yang akan digunakan dalam pemotongan. Untuk itu didefinisikan :

i(k,x) : indek maksimal dari item yang digunakan dalam $G_k(x)$

$$i(1,x) = i(1,x) = \begin{cases} 0 \ , \ \text{jika } G_1(x) = 0 \\ 1 \ , \ \text{jika } G_1(x) \neq 0 \end{cases}$$

secara umum :

$$i(k,x) = \begin{cases} i(k-1),x) \text{ jika } G_{k-1}(x) > G_k(x-p_k) + v_k \\ \\ k \qquad \text{jika } G_{k-1}(x) \leq G_k(x-p_k) + v_k \end{cases}$$

- k=1
  i(1, 1) = [$G_1(1)$ = 0] = 0
  i(1,2) = [$G_1(2)$ = 0] = 1
  i(1,3) = [$G_1(3)$ = 0] = 1
  i(1,4) = [$G_1(4)$ = 18] = 1
  i(1,5) = [$G_1(5)$ = 18] = 1
  i(1,6) = [$G_1(6)$ = 18] = 1

$i(1,7) = [G_1(7) = 18] = 1$

$i(1,8) = [G_1(8) = 36] = 1$

$i(1,9) = [G_1(9) = 36] = 1$

$i(1,10) = [G_1(10) = 36] = 1$

$i(1,11) = [G_1(11) = 36] = 1$

$i(1,12) = [G_1(12) = 54] = 1$

$i(1,13) = [G_1(13) = 54] = 1$

$i(1,14) = [G_1(14) = 54] = 1$

- k=2

$i(2,1) = G_1(1) > G_2(1\text{-}5) + 23 = i(1,1) = 0$

$i(2,2) = G_1(2) > G_2(2\text{-}5) + 23 = i(1,2) = 1$

$i(2,3) = G_1(3) > G_2(3\text{-}5) + 23 = i(1,3) = 1$

$i(2,4) = G_1(4) > G_2(4\text{-}5) + 23 = i(1,4) = 1$

$i(2,5) = G_1(5) \le G_2(5\text{-}5) + 23 = k = 2$

$i(2,6) = G_1(6) \le G_2(6\text{-}5) + 23 = i(1,6) = 2$

$i(2,7) = G_1(7) \le G_2(7\text{-}5) + 23 = k = 2$

$i(2,8) = G_1(8) > G_2(8\text{-}5) + 23 = i(1,8) = 1$

$i(2,9) = G_1(9) \le G_2(9\text{-}5) + 23 = k = 2$

$i(2,10) = G_1(10) \le G_2(10\text{-}5) + 23 = k = 2$

$i(2,11) = G_1(11) \le G_2(11\text{-}5) + 23 = k = 2$

$i(2,12) = G_1(12) > G_2(12\text{-}5) + 23 = i(1,12) = 1$

$i(2,13) = G_1(13) \le G_2(13\text{-}5) + 23 = k = 2$

$i(2,14) = G_1(14) \le G_2(14\text{-}5) + 23 = k = 2$

- k=3

$i(3,1) = G_2(1) > G_3(1\text{-}4) + 31 = i(2,1) = 0$

$i(3,2) = G_2(2) > G_3(2\text{-}4) + 31 = i(2,2) = 0$

$i(3,3) = G_2(3) > G_3(3\text{-}4) + 31 = i(2,3) = 0$

$i(3,4) = G_2(4) > G_3(4\text{-}4) + 31 = i(2,4) = 1$

$i(3,5) = G_2(5) > G_3(5\text{-}4) + 31 = i(2,5) = 2$

$i(3,6) = G_2(6) > G_3(6\text{-}4) + 31 = i(2,6) = 2$

$i(3,7) = G_2(7) \leq G_3(7\text{-}4) + 31 = k = 3$

$i(3,8) = G_2(8) > G_3(8\text{-}4) + 31 = i(2,8) = 1$

$i(3,9) = G_2(9) > G_3(9\text{-}4) + 31 = i(2,9) = 2$

$i(3,10) = G_2(10) > G_3(10\text{-}4) + 31 = i(2,10) = 2$

$i(3,11) = G_2(11) \leq G_3(11\text{-}4) + 31 = k = 3$

$i(3,12) = G_2(12) > G_3(12\text{-}4) + 31 = i(2,12) = 1$

$i(3,13) = G_2(13) > G_3(13\text{-}4) + 31 = i(2,13) = 2$

$i(3,14) = G_2(14) > G_3(14\text{-}4) + 31 = i(2,14) = 2$

Tabel 3.8 Hasil penghitungan nilai i(k,x) untuk pemotongan secara vertikal-horisontal

i(k,x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
i(1,x)	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i(2,x)	0	0	0	1	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2
i(3,x)	0	0	0	1	2	2	3	1	2	2	3	1	2	2

Dari Tabel 3.7 dapat diketahui bahwa nilai (*value*) maksimum $G_2(14) = 64$ untuk $1 \leq k \leq 3$ dan $0 \leq x \leq 14$. Dari Tabel 3.8 akan dicari item(potongan)yang digunakan dalam pemotongan sebagaimana berikut ini :

$G_2(14) = 64$ dengan i (2,14)

$i(2,14) = 2$

$i(2,11\text{-}p_2) = i(2,14\text{-}5) = i(2,9) = 2$

$i(2,9\text{-}p_2) = i(2,9\text{-}5) = i(2,4) = 1$

$i(2,4\text{-}p_1) = i(2,4\text{-}4) = i(2,0) = 0$

Jadi item-item yang digunakan dalam pemotongan di atas adalah $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ dan $x_3 = 0$; di mana x_1 akan menghasilkan nilai (*value*) sebesar18 sedang x_2 menghasilkan nilai (*value*) sebesar 46. jika direpresentasikan dalam sebuah layout adalah sebagai berikut ini

Gambar 3.2 susunan potongan untuk pemotongan bahan secara vertikal- horisontal

3.2 Penyusunan iklan pada sebuah halaman Koran

Sebuah halaman koran, untuk iklan menyediakan ruang (*space*) dengan ukuran 12 baris dan 8 kolom sedangkan ukuran iklan yang akan disusun adalah sebagaimana berikut ini ;

Tabel 3.9 ukuran item (iklan)

x_i	c_i	b_i	v_i
1	1	4	2
2	2	3	5
3	4	2	8

Iklan akan disusun pada sebuah halaman surat kabar dengan tujuan untuk memperoleh nilai (*value)* yang semaksimal mungkin.

Untuk permasalahan penyusunan iklan ini diasumsikan jumlah iklan yang akan disusun dalam halaman surat kabar jumlahnya cukup banyak melebihi ruang (*space*) yang disediakan untuk iklan tersebut sehingga harus dipilih iklan yang dapat memberikan nilai *(value*) yang paling besar.

Formulasi permasalahan dalam permasalahan knapsack adalah sebagai berikut :

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \qquad (v > 0,\ i=1, \ldots n)$$

$$\text{Kendala : } \sum_{i=1}^{n} (b_i \times c_i)\, x_i \leq B \times C$$

Keterangan :

v_i : nilai (value) dari item ke-i. (i =1 ...n)

x_i : banyak item ke-i

b_i : jumlah baris iklan ke-i

c_i : ukuran kolom iklan ke-i

B : jumlah baris yang tersedia pada surat kabar

C : ukuran kolom yang tersedia paa surat kabar

Penyusunan dilakukan didasarkan pada jumlah baris (secara vertikal);

Permasalahan terlebih dulu dibawa ke dalam permasalahan knapsack satu dimensi tetapi ukuran kolom iklan harus memenuhi $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ sehingga diperoleh formulasi permasalahan sebagai berikut ;

$$\text{Max } 2x_1 + 5x_2 + 8x_3$$

$$\text{Kendala : } 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12$$

Fungsi optimal untuk menyelesaikan persamaan di atas sebagaimana berikut ini :

$$F_k(y) = \max \sum_{i=1}^{k} v_i x_i \qquad (0 \leq k \leq n)$$

$$\text{Kendala : } \sum_{i=1}^{k} b_i x_i \leq y \qquad (0 \leq y \leq B)$$

$F_k(y)$ = nilai maksimal yang didapat dari membawa k item pertama dan total bobot tidak lebih dari B

Untuk nilai awal

$F_0(y) = 0$, untuk semua y ($0 \leq y \leq B$)

$F_k(0) = 0$, untuk semua k ($0 \leq k \leq n$)

$$F_1(y) = \left\lfloor \frac{y}{b_1} \right\rfloor v_1 \text{, untuk } k = 1$$

Secara umum adalah sebagai berikut

$$F_k(y) = \text{Max } \{ F_{k-1}(y) \text{ , } F_k(y - b_k) + v_k \} \qquad (k=1, \ldots n; y=1 \ldots B)$$

Selanjutnya akan dicari $F_n(B)$ sebagaimana berikut ini :

- k = 1

$$F_1(1) = \left\lfloor \frac{y_1}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor .2 = 0$$

$$F_1(2) = \left\lfloor \frac{y_2}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor .2 = 0$$

$$F_1(3) = \left\lfloor \frac{y_3}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor .2 = 0$$

$$F_1(4) = \left\lfloor \frac{y_4}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor .2 = 2$$

$$F_1(5) = \left\lfloor \frac{y_5}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor .2 = 2$$

$$F_1(6) = \left\lfloor \frac{y_6}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor .2 = 2$$

$$F_1(7) = \left\lfloor \frac{y_7}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{7}{4} \right\rfloor .2 = 2$$

$$F_1(8) = \left\lfloor \frac{y_8}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor .2 = 4$$

$$F_1(9) = \left\lfloor \frac{y_9}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor .2 = 4$$

$$F_1(10) = \left\lfloor \frac{y_{10}}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor .2 = 4$$

$$F_1(11) = \left\lfloor \frac{y_{11}}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{11}{4} \right\rfloor .2 = 4$$

$$F_1(12) = \left\lfloor \frac{y_{12}}{b_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor .2 = 12$$

- k = 2

$$F_2(1) = \max \{ F_1(1), F_2(1\text{-}3) + 5 \} = 0$$
$$F_2(2) = \max \{ F_1(2), F_2(2\text{-}3) + 5 \} = 0$$
$$F_2(3) = \max \{ F_1(3), F_2(3\text{-}3) + 5 \} = 5$$
$$F_2(4) = \max \{ F_1(4), F_2(4\text{-}3) + 5 \} = 5$$
$$F_2(5) = \max \{ F_1(5), F_2(5\text{-}3) + 5 \} = 10$$
$$F_2(6) = \max \{ F_1(6), F_2(6\text{-}3) + 5 \} = 10$$

$F_2(7) = \max \{ F_1(7), F_2(7\text{-}3) + 5 \} = 10$

$F_2(8) = \max \{ F_1(8), F_2(8\text{-}3) + 5 \} = 15$

$F_2(9) = \max \{ F_1(9), F_2(9\text{-}3) + 5 \} = 15$

$F_2(10) = \max \{ F_1(10), F_2(10\text{-}3) + 5 \} = 15$

$F_2(11) = \max \{ F_1(11), F_2(11\text{-}3) + 5 \} = 15$

$F_2(12) = \max \{ F_1(12), F_2(11\text{-}3) + 5 \} = 20$

- $k = 3$

$F_3(1) = \max \{ F_2(1), F_3(1\text{-}2) + 8 \} = 0$

$F_3(2) = \max \{ F_2(2), F_3(2\text{-}2) + 8 \} = 8$

$F_3(3) = \max \{ F_2(3), F_3(3\text{-}2) + 8 \} = 8$

$F_3(4) = \max \{ F_2(4), F_3(4\text{-}2) + 8 \} = 16$

$F_3(5) = \max \{ F_2(5), F_3(5\text{-}2) + 8 \} = 16$

$F_3(6) = \max \{ F_2(6), F_3(6\text{-}2) + 8 \} = 24$

$F_3(7) = \max \{ F_2(7), F_3(7\text{-}2) + 8 \} = 24$

$F_3(8) = \max \{ F_2(8), F_3(8\text{-}2) + 8 \} = 32$

$F_3(9) = \max \{ F_2(9), F_3(9\text{-}2) + 8 \} = 32$

$F_3(10) = \max \{ F_2(10), F_3(10\text{-}2) + 8 \} = 40$

$F_3(11) = \max \{ F_2(11), F_3(11\text{-}2) + 8 \} = 40$

$F_3(12) = \max \{ F_2(12), F_3(12\text{-}2) + 8 \} = 48$

Tabel 3. 10 Hasil penghitungan nilai $F_k(y)$ untuk penyusunan iklan

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F_1(y)$	0	0	0	2	2	2	2	4	4	4	4	6
$F_2(y)$	0	0	5	5	5	10	10	10	15	15	15	20
$F_3(y)$	0	8	8	16	16	24	24	32	32	40	40	48

Dari Tabel 3.10 dapat diketahui bahwa $F_1(12) = 6$, $F_2(12) = 20$, dan $F_1(12) = 48$ ini berarti dalam penyusunan iklan berdasarkan jumlah barisnya nilai (*value*) yang diperoleh seharusnya :

- untuk item 1 akan menghasilkan nilai (*value*) sebesar 6
- untuk item 2 akan menghasilkan nilai (*value*) sebesar 20

- untuk item 3 akan menghasilkan nilai (*value*) sebesar 48

tahap berikutnya penyusunan iklan berdasarkan ukuran kolom (horisontal), di mana nilai (*value*) dari penyusunan manjadi (6, 20, 48) , sehingga formulasi permasalahan menjadi sebagai berikut ini :

Max $6\,x_1 + 20\,x_2 + 48\,x_3$

Kendala $1x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 11$

Fungsi Optimal untuk menyelesaikan persamaan di atas adalah sebagaimana berikut ini ;

$$G_k(y) = \text{Max} \sum_{i=1}^{k} v_i\, x_i\,, \qquad (0 \leq k \leq n)$$

$$\text{Kendala} : \sum_{i=1}^{k} c_i\, x_i \leq x\,, \qquad (0 \leq x \leq C)$$

$G_k(x)$ = nilai maksimal yang didapat dari membawa k item pertama dan total bobot tidak lebih dari C

Untu nilai awal

$G_0(x) = 0$, untuk semua x ($0 \leq x \leq C$)

$G_k(0) = 0$, untuk semua k ($0 \leq k \leq n$)

$$G_1(x) = \left\lfloor \frac{x}{c_1} \right\rfloor v_1\,, \text{ untuk } k = 1$$

Secara umum adalah sebagai berikut

$$G_k(x) = \text{Max} \{\, G_{k-1}(x)\ ,\ G_k(x - c_k) + v_k \,\} \qquad (k=1, \ldots n;\ x = 1 \ldots C)$$

Selanjutnya akan dicari $G_n(C)$ sebagaimana berikut ini ;

- $k = 1$

$$G_1(1) = \left\lfloor \frac{x_1}{c_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor .6 = 6 \qquad G_1(5) = \left\lfloor \frac{x_5}{c_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{5}{1} \right\rfloor .6 = 30$$

$$G_1(2) = \left\lfloor \frac{x_2}{c_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{2}{1} \right\rfloor .6 = 12 \qquad G_1(6) = \left\lfloor \frac{x_6}{c_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{6}{1} \right\rfloor .6 = 36$$

$$G_1(3) = \left\lfloor \frac{x_3}{c_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor .6 = 18 \qquad G_1(7) = \left\lfloor \frac{x_7}{c_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{7}{1} \right\rfloor .6 = 42$$

$$G_1(4) = \left\lfloor \frac{x_4}{c_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{4}{1} \right\rfloor .6 = 24 \qquad G_1(8) = \left\lfloor \frac{x_8}{c_1} \right\rfloor v_1 = \left\lfloor \frac{8}{1} \right\rfloor .6 = 48$$

- $k = 2$

$$G_2(1) = \max \{ G_1(1),\ G_2(1\text{-}2) + 20 \} = 6$$
$$G_2(2) = \max \{ G_1(2),\ G_2(2\text{-}2) + 20 \} = 20$$
$$G_2(3) = \max \{ G_1(3),\ G_2(3\text{-}2) + 20 \} = 26$$
$$G_2(4) = \max \{ G_1(4),\ G_2(4\text{-}2) + 20 \} = 40$$
$$G_2(5) = \max \{ G_1(5),\ G_2(5\text{-}2) + 20 \} = 46$$
$$G_2(6) = \max \{ G_1(6),\ G_2(6\text{-}2) + 20 \} = 60$$
$$G_2(7) = \max \{ G_1(7),\ G_2(7\text{-}2) + 20 \} = 66$$
$$G_2(8) = \max \{ G_1(8),\ G_2(8\text{-}2) + 20 \} = 68$$

- $k = 3$

$$G_3(1) = \max \{ G_2(1),\ G_3(1\text{-}4) + 48 \} = 6$$
$$G_3(2) = \max \{ G_2(2),\ G_3(2\text{-}4) + 48 \} = 20$$
$$G_3(3) = \max \{ G_2(3),\ G_3(3\text{-}4) + 48 \} = 26$$
$$G_3(4) = \max \{ G_2(4),\ G_3(4\text{-}4) + 48 \} = 48$$
$$G_3(5) = \max \{ G_2(5),\ G_3(5\text{-}4) + 48 \} = 54$$
$$G_3(6) = \max \{ G_2(6),\ G_3(6\text{-}4) + 48 \} = 68$$
$$G_3(7) = \max \{ G_2(7),\ G_3(7\text{-}4) + 48 \} = 74$$
$$G_3(8) = \max \{ G_2(8),\ G_3(8\text{-}4) + 48 \} = 96$$

Tabel 3.11 Hasil penghitungan nilai $G_k(x)$ untuk penyusunan iklan

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$G_1(x)$	6	12	18	24	30	36	42	48
$G_2(x)$	6	20	26	40	46	60	66	80
$G_3(x)$	6	20	26	48	54	68	74	96

Hasil penghitungan nilai $G_k(x)$ pada Tabel 3.11 menunjukkan nilai (*value*) terbesar adalah 96. ini berarti penyusunan iklan pada sebuah halaman surat kabar dengan cara ini untuk ukuran-ukuran yang telah ditentukan di atas akan menghasilkan nilai (*value*) maksimal sebesar 96. Sedangkan untuk menentukan iklan yang disusun dalam surat kabar didefinisikan :

i(k,x) : indek maksimal dari item x yang digunakan dalam $G_k(x)$

$$i(1,x) = i(1,x) = \begin{cases} 0 \ , \ \text{jika } G_1(x) = 0 \\ 1 \ , \ \text{jika } G_1(x) \neq 0 \end{cases}$$

secara umum :

$$i(k,x) = \begin{cases} i(k-1), x) \text{ jika } G_{k-1}(x) > G_k(x - c_k) + v_k \\ \\ k \qquad \text{jika } G_{k-1}(x) \leq G_k(x - c_k) + v_k \end{cases}$$

- k=1
  - i(1, 1) = [$G_1(1)$ = 6] = 1
  - i(1,2) = [$G_1(2)$ = 12] = 1
  - i(1,3) = [$G_1(3)$ = 18] = 1
  - i(1,4) = [$G_1(4)$ = 24] = 1
  - i(1,5) = [$G_1(5)$ = 30] = 1
  - i(1,6) = [$G_1(6)$ = 36] = 1
  - i(1,7) = [$G_1(7)$ = 42] = 1
  - i(1,8) = [$G_1(8)$ = 48] = 1
- k=2
  - i(2, 1) = $G_1(1)$ > $G_2($ 1-2) + 20 = i(1,1) = 1
  - i(2,2) = $G_1(2)$ ≤ $G_2($ 2-2) + 20 = k = 2

$i(2,3) = G_1(3) \leq G_2(3\text{-}2) + 20 = k = 2$

$i(2,4) = G_1(4) \leq G_2(4\text{-}2) + 20 = k = 2$

$i(2,5) = G_1(5) \leq G_2(5\text{-}2) + 20 = k = 2$

$i(2,6) = G_1(6) \leq G_2(6\text{-}2) + 20 = k = 2$

$i(2,7) = G_1(7) \leq G_2(7\text{-}2) + 20 = k = 2$

$i(2,8) = G_1(8) \leq G_2(8\text{-}2) + 20 = k = 2$

- $k=3$

$i(3,1) = G_2(1) > G_3(1\text{-}4) + 48 = i(2,1) = 1$

$i(3,2) = G_2(2) > G_3(2\text{-}4) + 48 = i(2,2) = 2$

$i(3,3) = G_2(3) > G_3(3\text{-}4) + 48 = i(2,3) = 2$

$i(3,4) = G_2(4) \leq G_3(4\text{-}4) + 48 = k = 3$

$i(3,5) = G_2(5) \leq G_3(5\text{-}4) + 48 = k = 3$

$i(3,6) = G_2(6) \leq G_3(6\text{-}4) + 48 = k = 3$

$i(3,7) = G_2(7) \leq G_3(7\text{-}4) + 48 = k = 3$

$i(3,8) = G_2(8) \leq G_3(8\text{-}4) + 48 = k = 3$

Tabel 3.12 Hasil penghitungan i(k,x) untuk penyusunan iklan

i(k,x)	1	2	3	4	5	6	7	8
i(1,x)	1	1	1	1	1	1	1	1
i(2,x)	1	2	2	2	2	2	2	2
i(3,x)	1	2	2	3	3	3	3	3

Dari Tabel 3.11 dapat diketahui bahwa nilai (*value*) maksimum $G_3(8) = 96$ untuk $1 \leq k \leq 3$ dan $0 \leq x \leq 8$. Dari Tabel 3.12 akan dicari item (iklan) yang digunakan dalam penyusunan pada sebuah halaman surat kabar adalah sebagaimana berikut ini :

$G_3(8) = 96$ dengan i (3,8)

$i(3,8) = 3$

$i(3, 8\text{-} c_3) = i(3, 8\text{-}4) = i(3,4) = 3$

$i(3,4\text{-} c_3) = i(3,4\text{-}4) = i(3,0) = 0$

jadi item yang kan disusun pada surat kabar tersebut adalah $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ dan $x_3 = 2$,

BAB IV

KESIMPULAN

BAB IV

KESIMPULAN

Dari penelitian yang telah dilakukan dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Dalam menyelesaikan permasalahan knapsack dua dimensi permasalahan disederhanakan terlebih dulu menjadi permasalahan knapsack satu dimensi kemudian dicari penyelesaikan satu per satu.
2. Permasalahan knapsack dapat diterapkan pada permasalahan pemotongan bahan dan penyusunan iklan pada sebuah halaman surat kabar.

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR PUSTAKA

Dwi Kurnia Basuki (1998), *"Pembuatan Perangkat Lunak Untuk Disain Gambar Estimasi Pada Masalah Optimasi Penempatan Barang Dalam Peti Kemas"*, Tugas Akhir, Jurusan Matematika FMIPA ITS.

T.C. Hu (1982), "*Combinatorial Algorithms*", University California San Diago, Addison- Wesley Publishing Company, Inc.