



TUGAS AKHIR - SM141501

**SISTEM KONTROL PADA MINI *QUADROTOR*
MENGUNAKAN METODE BACKSTEPPING DENGAN
LINTASAN FRENET-SERRET**

AULIYAUL HASANAH
NRP. 0611124000050

Dosen Pembimbing :
Drs. Iis Herisman, M.Sc
Dr. Hariyanto, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018



FINAL PROJECT - SM141501

***CONTROL SYSTEM ON A MINI QUADROTOR USING
BACKSTEPPING METHOD WITH THE PATH
FRENET-SERRET***

AULIYAUH HASANAH
NRP. 0611124000050

Supervisors :
Drs. Iis Herisman, M.Sc
Dr. Hariyanto, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics, Computation and Data Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2018

LEMBAR PENGESAHAN

SISTEM KONTROL PADA MINI QUADROTOR MENGUNAKAN METODE BACKSTEPPING DENGAN LINTASAN FRENET-SERRET

CONTROL SYSTEM ON A MINI QUADROTOR USING BACKSTEPPING METHOD WITH THE PATH FRENET- SERRET

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

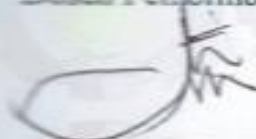
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

AULIYAU HASANAH
NRP. 0611124000050

Menyetujui,

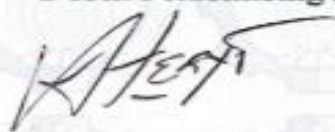
Dosen Pembimbing II,



Dr. Hariyanto, M.Si

NIP. 19530414 198203 1 002

Dosen Pembimbing I,



Drs. Iis Herisman, M.Sc

NIP. 19601002 198903 1 002

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika
FMKSD ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si. MT

NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 19 Januari 2018

SISTEM KONTROL PADA MINI *QUADROTOR* MENGUNAKAN METODE BACKSTEPPING DENGAN LINTASAN FRENET-SERRET

Nama Mahasiswa : Auliyaul Hasanah
NRP : 0611124000050
Departemen : Matematika FMKSD – ITS
Pembimbing : Drs. Iis Herisman, M.Sc
Dr. Hariyanto, M.Si

Abstrak

Quadrotor merupakan salah satu jenis pesawat tanpa awak yang menggunakan empat buah rotor dan dapat dikendalikan jarak jauh. *Quadrotor* memiliki empat gerak dasar yang dapat mempengaruhi gerak *quadrotor* saat terbang, yaitu gerak sudut roll, gerak sudut pitch, gerak sudut yaw dan gerak altitude. Selain itu, *quadrotor* dapat menjadi sulit untuk terbang tanpa adanya sistem kontrol karena memiliki mekanisme sistem kompleks yang tidak stabil. Sistem kontrol yang digunakan pada *quadrotor* adalah kontrol *backstepping* agar dapat mengatasi masalah kestabilan saat terbang. Langkah pertama yang dilakukan adalah mengkaji penurunan persamaan model dinamik gerak rotasi dan translasi pada *quadrotor*. Langkah selanjutnya dilakukan perancangan sistem kontrol *backstepping* dengan lintasan *Frenet-Serret*. Setelah sistem kontrol *backstepping* diterapkan, maka dilakukan pengamatan hasil simulasi untuk mendapatkan respon keluaran sistem. Hasil simulasi menunjukkan bahwa respon masing-masing sudut stabil pada sudut 0.2 rad dengan waktu yang berbeda-beda. Respon ketinggian (z), posisi x dan posisi y juga stabil pada jarak 1 meter dari titik nol.

Kata Kunci : *Quadrotor*, gerak rotasi dan translasi, Kontrol *Backstepping*.

**CONTROL SYSTEM ON A MINI QUADROTOR WITH
BACKSTEPPING METHOD USING THE PATH
FRENET-SERRET**

Student's Name : Auliyaul Hasanah
NRP : 0611124000050
Department : Matematika FMKSD – ITS
Supervisors : Drs. Iis Herisman, M.Sc
Dr. Hariyanto, M.Si

Abstract

Quadrotor is typical Unmanned Aerial Vehicle (UAV) plane that uses four rotor and can be controlled remotely. Quadrotor has four basic motions that can affect the motion of the quadrotor when flying, is roll angle motion, pitch angle motion, yaw angle motion and altitude motion. In addition, quadrotor can be difficult to fly without a control system because it has an unstable complex system mechanism. The control system used in quadrotor is backstepping control in order to overcome stability problems when flying. The first step is reviewing the mathematical model's equation of dynamical rotation and translation motion in quadrotor. The next step is to designing the backstepping control system with the Frenet-Serret trajectory. After the backstepping control system is applied, simulation results are observed to obtain the system output response. The simulation results shows that the response of each angle is stable at an angle of 0.2 rad with different time. The height(z) response, x and y position are also stable at a distance of 1 meter from the zero point.

***Keyword :Quadrotor, Rotational and Translational Motion,
Backstepping Control***

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh,

Alhamdulillah rabbil'alam, segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah serta karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul :

“Sistem Kontrol Pada Mini *Quadrotor* Menggunakan Metode Backstepping Dengan Lintasan Frenet-Serret”

Tugas Akhir ini merupakan sebuah karya ilmiah hasil pergulatan pemikiran penulis tentang ilmu kontrol dan sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD ITS Surabaya.

Tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat bantuan, dukungan dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si. MT. selaku Kepala Departemen Matematika FMKSD ITS.
2. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si selaku ketua prodi sekaligus koordinator Tugas Akhir yang telah mengatur jalannya proses pelaksanaan Tugas Akhir.
3. Bapak Drs. Nurul Hidayat, M.IKom selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika ITS.
4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Sc. dan Bapak Dr. Hariyanto, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan dalam mengerjakan Tugas Akhir sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

5. Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc dan Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan untuk perbaikan Tugas Akhir ini.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf di Departemen Matematika FMKSD ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.
7. Kedua orang tua tercinta atas segala kesabarannya, ketabahannya, kepercayaannya, serta motivasi dan doanya yang selalu diberikan kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman Matematika angkatan 2012 dan teman-teman Pondok Pesantren Mahasiswi Muhyiddin yang telah menemani penulis selama 1 tahun dengan penuh ketegangan dan keceriaan.
9. Teman-teman Ibnu Muqlah, Jamaah Masjid Manarul Ilmi, Himpunan Matematika, dan *Extension* yang telah memberikan persahabatan serta pelajaran dalam banyak hal.
10. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Apabila dalam penyusunan Tugas Akhir ini terdapat kekurangan, maka penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi penyempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak. Amin.

Wassalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Surabaya, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

Abstrak.....	i
<i>Abstract</i>	iii
KATA PENGANTAR.....	v
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL.....	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	4
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Sebelumnya	7
2.2 Mini Quadrotor DraganFlyer.....	8
2.3 Prinsip Kerja Quadrotor	10
2.3.1 Gaya Angkat Mini Quadrotor	10
2.3.2 Gerak Dasar Mini <i>Quadrotor</i>	13
2.4 Sistem Koordinat <i>Quadrotor</i>	17
2.5 Momen Inersia	18
2.6 Teori Frenet-Serret.....	20

2.7	Metode Kontrol <i>Backstepping</i>	24
2.7.1	Kestabilan Lyapunov	25
2.7.2	Kontrol <i>Backstepping</i>	25
BAB III METODE PENELITIAN		33
BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN		35
4.1	Model Dinamik Mini <i>Quadrotor</i>	35
4.1.1	Transformasi Sistem Koordinat Quadrotor	36
4.1.2	Analisis Dinamika Gerak Translasi	40
4.1.3	Analisis Dinamika Gerak Rotasi.....	44
4.1.4	Momen Inersia <i>Quadrotor</i>	48
4.1.5	Model Dinamik dalam Bentuk Persamaan State-Space	49
4.2	Perancangan Sistem Kontrol	51
4.2.1	Perancangan Kontrol <i>Backstepping</i> untuk Subsistem Rotasi	51
4.2.2	Perancangan Kontrol <i>Backstepping</i> untuk Subsistem Translasi	55
4.3	Simulasi Sistem Kontrol <i>Backstepping</i> dengan Simulink Matlab	58
4.3.1	Representasi Diagram Blok pada Sistem Awal.....	63
4.3.2	Representasi Sistem Dengan Kontrol <i>Backstepping</i>	65
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN		77
5.1	Kesimpulan	77
5.2	Saran	78

DAFTAR PUSTAKA	79
LAMPIRAN 1	81
BIODATA PENULIS	83

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1[8] : DraganFlyer	9
Gambar 2. 2 Benda bergerak ke kiri	11
Gambar 2. 3 Arah gaya saat terjadi <i>Lift</i> dan <i>Drag</i>	12
Gambar 2. 4[2] : Gerak dasar mini <i>quadrotor</i>	13
Gambar 2. 5 Sistem koordinat cartesian B terhadap E.....	17
Gambar 2. 6 Momen inersia dari sistem partikel	18
Gambar 2. 7 [12] Kurva vektor tangen, normal dan binormal	21
Gambar 2. 8 Diagram Blok Sistem.....	26
Gambar 4. 1 Sistem koordinat <i>quadrotor</i> terhadap bumi.....	36
Gambar 4. 2 Rotasi terhadap sumbu x	37
Gambar 4. 3 Rotasi terhadap sumbu y	38
Gambar 4. 4 Rotasi terhadap sumbu z	39
Gambar 4. 5 Momen Inersia pada sumbu <i>XB</i> , <i>YB</i> dan <i>ZB</i>	48
Gambar 4. 6 Diagram Perancangan Kontrol <i>Backstepping</i>	51
Gambar 4. 7 Hasil Simulasi untuk Subsistem Rotasi.....	64
Gambar 4. 8 Hasil Simulasi untuk Subsistem Translasi	65
Gambar 4. 9 Diagram Blok Sistem Akhir.....	68
Gambar 4. 10 Hasil simulasi percobaan pertama pada sudut <i>roll</i>	68
Gambar 4. 11 Hasil simulasi percobaan pertama pada sudut <i>pitch</i>	69
Gambar 4. 12 Hasil simulasi percobaan pertama pada sudut <i>yaw</i>	69

Gambar 4. 13 Hasil simulasi percobaan pertama pada ketinggian (z).....	70
Gambar 4. 14 Hasil simulasi percobaan pertama pada posisi x	71
Gambar 4. 15 Hasil simulasi percobaan pertama pada posisi y	71
Gambar 4. 16 Hasil simulasi percobaan ke-9 pada sudut <i>roll</i>	72
Gambar 4. 17 Hasil simulasi percobaan ke-9 pada sudut <i>pitch</i>	73
Gambar 4. 18 Hasil simulasi percobaan ke-9 pada sudut <i>yaw</i>	73
Gambar 4. 19 Hasil simulasi percobaan ke-6 pada ketinggian (z).....	74
Gambar 4. 20 Hasil simulasi percobaan ke-6 pada posisi (x)	75
Gambar 4. 21 Hasil simulasi percobaan ke-6 pada posisi (y)	75

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 [8] : Spesifikasi Dragan Flyer	9
Tabel 2. 2 Gerak <i>pitch</i>	14
Tabel 2. 3 Gerak <i>roll</i>	15
Tabel 2. 4 Gerak <i>yaw</i>	16
Tabel 2. 5 Gerak <i>altitude</i>	16
Tabel 2. 6 [11] Momen inersia dari beberapa benda tegar	19
Tabel 4. 1 Gerakan Quadrotor	35
Tabel 4. 2 Nilai Parameter Quadrotor.....	60
Tabel 4. 3 <i>Trial and error</i> untuk nilai α	67
Tabel 4. 4 <i>Trial and error</i> untuk nilai β	67

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seiring dengan perkembangan teknologi modern, telah banyak dijumpai pesawat model mini tanpa awak yang digunakan untuk memantau atau pengambilan gambar suatu objek dari jarak yang cukup jauh yang biasanya dikendalikan oleh kontrol jarak jauh (*remote control*). Selain untuk memantau atau pengambilan gambar suatu objek, dengan karakteristik yang bermacam-macam, pesawat tanpa awak dapat digunakan dalam berbagai bidang, seperti penelitian, pemantauan lingkungan dan keamanan, pengawasan meteorologi, riset cuaca, agrikultur serta kepentingan militer. Tidak hanya untuk kebutuhan di lapangan, pesawat tanpa awak juga mulai dikembangkan untuk dapat bekerja di dalam ruangan. Pesawat tanpa awak tersebut dikenal dengan istilah *Unmanned Aerial Vehicle (UAV)* [1].

Pada penelitian [2] digunakan UAV jenis *quadrotor*. *Quadrotor* merupakan salah satu jenis UAV yang menggunakan empat buah rotor dan memiliki mekanisme sistem kompleks. Mini *quadrotor* memiliki beberapa keunggulan yaitu memiliki kemampuan manuver yang tinggi, dapat melakukan gerak hover, mampu melakukan *take off* dan *landing* bahkan di daerah yang sempit. Walaupun demikian, pengendalian mini *quadrotor* tidak mudah. Selain itu adanya ketidakpastian terkait model dinamik sistem juga memberikan tantangan tersendiri dalam disain sistem kontrol.

Saat ini, *quadrotor* sering dikembangkan dan menjadi objek penelitian. Banyak hal yang dapat dikaji dan dijadikan topik dalam penelitian dari mini *quadrotor* terutama tentang kestabilan dan kontrol posisi ketinggian. Beberapa penelitian telah dilakukan untuk mengaplikasikan metode kontrol pada mini *quadrotor* agar dapat terbang secara stabil diantaranya adalah dengan metode PID, *fuzzy*, *Linear quadratic*, *Sliding*

mode control dan *Backstepping*. Penggunaan metode PID untuk mengontrol *altitude* pada UAV model *quadrotor*, hanya mampu mempertahankan posisi ketinggian pada satu titik menjadi kelemahan pada paper ini [3]. Penelitian lain metode PID dan LQR sistem kontrol digunakan untuk mengendalikan *attitude quadrotor*. Hasil yang didapat cukup baik, namun saat terdapat gangguan dari luar sistem tidak mengikuti waypoint dengan baik. Kombinasi dari LQR dan PID (PID optimal) juga digunakan untuk kontrol *attitude quadrotor*. Dari hasil yang didapat lebih baik daripada PID dan LQR [4].

Penelitian tentang masalah kontrol untuk sistem UAV *underactuated quadrotor* dengan model parameter yang tidak pasti. Teknik yang digunakan berbasis *backstepping* untuk merancang pengontrol adaptif nonlinear yang dapat mengkompensasi tentang ketidakpastian sistem. Pengendali *backstepping* pada penelitian pengaturan kestabilan hover pada *quadrotor* menunjukkan hasil yang bagus. Metode kontrol *backstepping* mampu mengendalikan kestabilan hover sehingga dapat mengatasi gangguan yang diberikan [5].

Dari kajian pustaka di atas maka pada tugas akhir ini, dilakukan perancangan sistem kontrol *backstepping* dengan lintasan Frenet-Serret untuk mengontrol gerak sudut, posisi dan ketinggian pada mini *quadrotor*, dengan judul “Sistem Kontrol pada Mini *Quadrotor* menggunakan Metode *Backstepping* dengan Lintasan Frenet-Serret”. Setelah perancangan kontrol *backstepping* diterapkan, hasil perancangan disimulasikan dengan *software* Matlab R2013a.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Bagaimana konstruksi model dinamik gerak pada mini *quadrotor*?

2. Bagaimana merancang sistem kontrol *backstepping* pada persamaan model dinamik gerak mini *quadrotor*?
3. Bagaimana hasil simulasi sistem kontrol *backstepping* pada mini *quadrotor* dengan lintasan Frenet-Serret?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang diterapkan dalam Tugas akhir ini adalah :

1. Metode kendali yang akan diterapkan adalah metode *Backstepping*.
2. Data terkait spesifikasi *quadrotor* DraganFlyer diperoleh dari jurnal utama.
3. Diasumsikan koordinat bumi (*inertial frame*) tetap dan koordinat *body* (*quadrotor*) mobile.
4. Struktur *body* dan baling-baling dari mini *quadrotor* merupakan benda rigid (kaku).
5. *Quadrotor* digunakan dalam ruangan sehingga kecepatan dianggap rendah, efek *gyroscopic* dan efek aerodinamika dapat diabaikan.
6. Variabel yang dikontrol adalah perubahan sudut, posisi dan ketinggian.
7. Simulasi perhitungan dilakukan dengan *Software* Matlab R2013a.

1.4 Tujuan

Tujuan dari tugas akhir ini adalah :

1. Mengkontruksi model dinamik gerak pada mini *quadrotor*.
2. Merancang desain sistem kontrol *backstepping* pada persamaan model dinamik gerak mini *quadrotor*.
3. Melakukan simulasi sistem kontrol *backstepping* pada mini *quadrotor* dengan lintasan Frenet-Serret.

1.5 Manfaat

Penulisan Tugas Akhir ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut :

1. Memberikan kontribusi untuk perkembangan ilmu pengetahuan khususnya metode kontrol untuk mini *quadrotor*.
2. Hasil simulasi dapat digunakan sebagai referensi dan dapat dikembangkan lebih lanjut agar dapat diimplementasikan ke perangkat keras sistem kontrol pada DraganFlyer.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, antara lain:

BAB I PENDAHULUAN

Pada Bab I menjelaskan gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab II menguraikan tentang teori-teori utama maupun penunjang yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir, antara lain informasi terkait mini *quadrotor* DraganFlyer, prinsip kerja *quadrotor*, sistem koordinat *quadrotor*, momen inersia, Teori Frenet-Serret, kestabilan Lyapunov dan metode kontrol *Backstepping*.

BAB III METODE PENELITIAN

Dalam bab III menjelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahap pertama adalah analisis model dinamik gerak mini *quadrotor* yang meliputi model dinamik gerak translasi dan gerak rotasi. Tahap kedua adalah perancangan kontrol *backstepping*

dengan lintasan Frenet-Serret dan kestabilan Lyapunov. Dan tahap ketiga adalah simulasi dengan *software* Matlab R2013a. Selanjutnya dilakukan pengamatan karakteristik respon sistem. Setelah itu dilakukan penyusunan laporan.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada Bab IV mengkaji secara detail tentang analisis penurunan model dinamik gerak mini *quarotor* yang meliputi model dinamik gerak translasi dan gerak rotasi. Selanjutnya perancangan kontrol *backstepping* dengan lintasan Frenet-Serret. Kemudian dilakukan simulasi dengan simulink Matlab R2013a serta pengamatan respon sistem hasil simulasi.

BAB V PENUTUP

Bab V hasil dari Tugas Akhir berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Sebelumnya

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa terdapat beberapa penelitian dan penerapan metode kontrol pada *quadrotor* dalam berbagai kasus.

Pada tahun 2007, Bouabdallah membandingkan *Backstepping* dengan *Sliding-mode* untuk mengontrol mikro *quadrotor* lalu menyimpulkan bahwa controller memberikan hasil rata-rata [6]. Dan Bouabdallah juga melakukan penelitian dengan membandingkan beberapa metode untuk mengontrol *quadrotor* lalu menyimpulkan bahwa kombinasi dari metode *backstepping* dan *integral action* dapat mengantisipasi gangguan yang besar dan ketidakpastian dari dinamika *quadrotor* secara keseluruhan [7].

Pada tahun 2012, dalam jurnal yang berjudul “Sistem Kontrol Altitude pada UAV Model Quadcopter dengan Metode PID”. Akhmad dkk menggunakan metode PID untuk mengontrol ketinggian *quadrotor*. Dari hasil pengujian yang telah dilakukan menunjukkan bahwa sistem kontrol PID bisa bekerja dengan baik, tetapi *quadrotor* hanya bisa mempertahankan posisi ketinggian pada satu titik, sehingga jika diberi gangguan *quadrotor* akan kembali ke posisi semula [3].

Pada tahun 2013, Argentim dkk membandingkan penerapan PID, LQR dan LQR-PID pada *attitude quadrotor* dalam jurnal yang berjudul “PID, LQR and LQR-PID on a *Quadrotor Platform*”. Hasil penelitian menyebutkan bahwa PID, LQR dan LQR-PID sudah cukup baik, namun belum mampu mengatasi gangguan dari luar. Dari ketiga metode kontrol tersebut, metode LQR-PID memiliki kemampuan paling baik dibandingkan kedua metode lainnya [4].

Pada tahun 2015, Jumiyyatun dkk. melakukan penelitian dalam jurnal yang berjudul “Pengaturan Kestabilan

Hover pada Quadrotor menggunakan Kontrol Backstepping PD PI". Jumiyatun dkk. mengatur hover pada *quadrotor* dengan metode *backstepping* PD PI. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa kestabilan *roll*, *pitch*, dan *yaw* dapat tercapai sesuai setpoint yaitu nol dan pengujian ketinggian mendekati tiga karena masih ada *error steady state* yaitu 0.0132m [2].

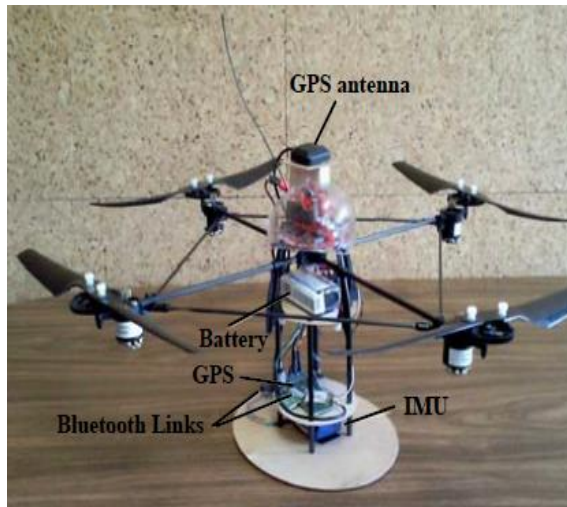
Maka dalam tugas akhir ini akan berfokus pada penerapan metode *backstepping* dengan teori *Frenet-Serret* yang mencakup perubahan sudut, posisi dan ketinggian yang diinginkan sebagai fungsi dari penerbangan *quadrotor*. Dengan demikian diharapkan kedepannya sistem ini dapat dikembangkan lebih lanjut.

2.2 Mini Quadrotor DraganFlyer

Quadrotor merupakan salah satu pesawat tanpa awak (UAV) yang mempunyai empat buah rotor penggerak. Hanya tersusun atas dua kerangka pejal yang saling bersilangan dengan rotor di masing-masing ujungnya. Rotor-rotor tersebut yang akan menggerakkan baling-baling (*propeller*) sehingga bisa menghasilkan gaya dorong dan gaya angkat sehingga *quadrotor* dapat melayang. Tipe *quadrotor* sendiri terdiri dari dua jenis, yaitu tipe X dan tipe + tergantung pada gerak laju pada *quadrotor* [1].

Quadrotor dapat melakukan *take off* dan *landing* secara vertikal. *Vertical Take Off Landing (VTOL) Aircraft* merupakan jenis *quadrotor* yang dapat melakukan *take off* dan *landing* tegak lurus terhadap bumi sehingga dapat dilakukan pada tempat yang kecil dan sempit.

DraganFlyer merupakan salah satu jenis *quadrotor* yang akan digunakan dalam Tugas Akhir ini. Gambar 2.1 menunjukkan DraganFlyer yang telah dimodifikasi. GPS antenna, battery, GPS, IMU, dan link Bluetooth telah dimasukkan dalam sistem [8].



Gambar 2. 1[8] : DraganFlyer

Berikut adalah tabel spesifikasi DraganFlyer [8] :

Tabel 2. 1 [8] : Spesifikasi Dragan Flyer

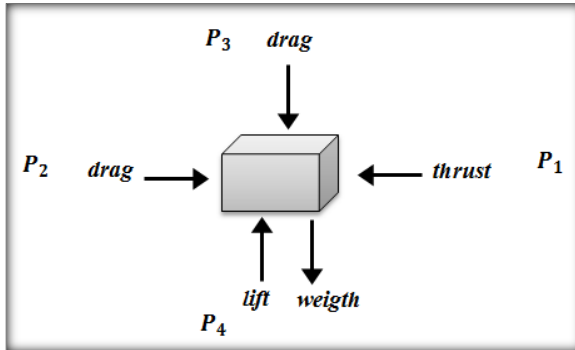
No	Nama	Besaran
1	Massa Total	686 gram
2	Lebar <i>quadrotor</i>	0.63 m
3	Panjang total baling-baling	0.35 m
4	Lebar ujung baling-baling	0.015 m
5	Radius propeller-blade	0.03 m
6	RPM dari rotor	24000 rpm

2.3 Prinsip Kerja Quadrotor

2.3.1 Gaya Angkat Mini Quadrotor

Terdapat empat gaya mendasar yang bekerja pada mini *quadrotor* yaitu :

- a. Thrust adalah gaya dorong, berlawanan dengan gaya hambat (drag). Jika benda bergerak ke kiri, maka gaya dorong bergerak dari kanan ke kiri. Terjadi karena tekanan pada kanan benda lebih besar daripada tekanan pada kiri benda ($P_1 > P_2$). Sebaliknya, jika benda bergerak ke kanan maka gaya dorong bergerak dari kiri ke kanan. Dikarenakan tekanan pada kiri benda lebih besar daripada tekanan pada kanan benda ($P_2 > P_1$).
- b. Drag adalah gaya hambat, berlawanan dengan gaya dorong (thrust). Jika benda bergerak ke kiri, maka gaya hambat bergerak dari kiri ke kanan. Terjadi karena tekanan pada kanan benda lebih besar daripada tekanan pada kiri benda ($P_1 > P_2$). Begitupula sebaliknya. Dan jika benda bergerak ke atas, maka gaya hambat bergerak dari atas ke bawah.
- c. Lift adalah gaya angkat, melawan gaya dari weight. Merupakan gaya dorong yang menyebabkan benda bergerak ke atas yang berarti usaha angkat untuk melawan gravitasi. Terjadi karena tekanan di atas benda lebih kecil daripada tekanan di bawah benda ($P_3 < P_4$).
- d. Weight adalah gaya berat, kombinasi dari total berat benda. Weight menarik quadrotor ke bawah karena gaya gravitasi.



Gambar 2. 2 Benda bergerak ke kiri

Hukum Bernoulli menyatakan bahwa tekanan dari fluida yang bergerak seperti udara berkurang ketika fluida tersebut bergerak lebih cepat. Jadi, semakin besar kecepatan fluida maka semakin kecil tekanannya dan begitu juga sebaliknya, semakin kecil kecepatan fluida maka semakin besar tekanannya. Pada *quadrotor*, kecepatan fluida di atas baling-baling lebih tinggi dibandingkan dengan kecepatan fluida di bawah baling-baling, yang menyebabkan tekanan di atas baling-baling lebih rendah dibandingkan tekanan di bawah. Perbedaan tekanan inilah yang menghasilkan gaya angkat pada *quadrotor*. Persamaan Bernoulli dapat ditulis [9]:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \quad (2.1)$$

dengan keterangan sebagai berikut :

P_1 = tekanan pada permukaan 1 (N/m^2)

P_2 = tekanan pada permukaan 2 (N/m^2)

ρ = massa jenis fluida udara (kg/m^3)

v_1 = kecepatan aliran pada permukaan 1 (m/s)

v_2 = kecepatan aliran pada permukaan 2 (m/s)

Dari persamaan (2.1) dapat dilihat bahwa $v_2 > v_1$, $P_1 > P_2$.

$$F_1 = P_1 A, \quad F_2 = P_2 A \quad \text{jadi} \quad F_1 > F_2$$

Beda gaya pada bagian bawah dan atas ($F_1 - F_2$) menghasilkan gaya angkat *quadrotor*. Dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2} \rho A (v_2^2 - v_1^2) \quad (2.2)$$

dengan keterangan sebagai berikut :

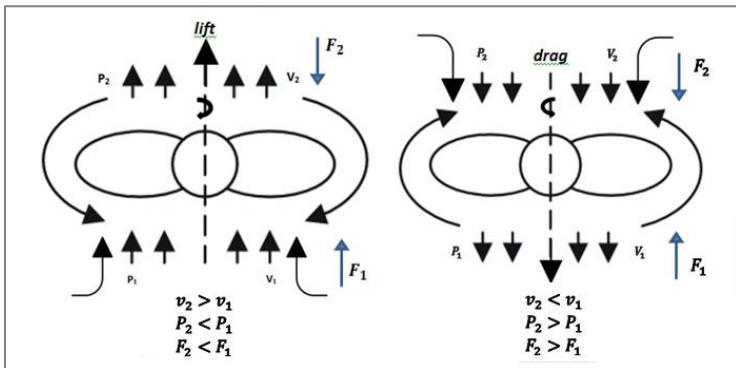
$F_1 - F_2 =$ gaya angkat (N)

$A =$ luas benda (m^2)

Dari persamaan (2.2) diketahui bahwa *quadrotor* dapat terangkat ke atas jika gaya angkat lebih besar daripada berat *quadrotor*. Makin besar kecepatan baling-baling, makin besar kecepatan udara, dan ini berarti gaya angkat *quadrotor* makin besar.

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} (m \cdot v) \quad (2.3)$$

dimana F merupakan gaya, P tekanan fluida, dan v kecepatan fluida.



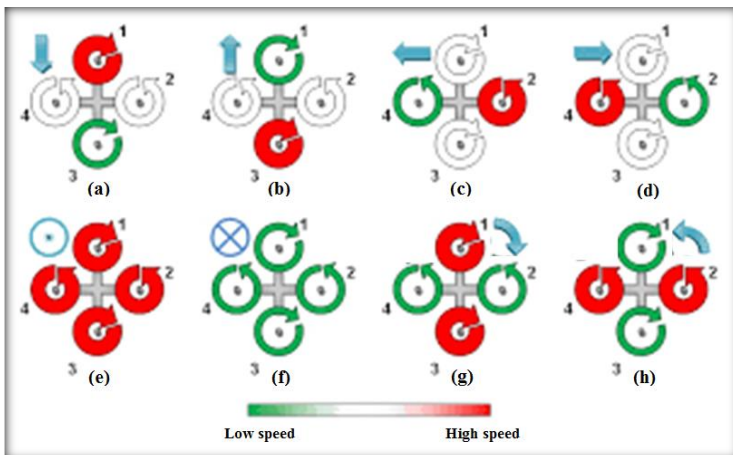
Gambar 2. 3 Arah gaya saat terjadi *Lift* dan *Drag*

Dari Gambar 2.3 dapat disimpulkan bahwa *lift* terjadi karena tekanan di atas benda lebih kecil daripada tekanan di bawah benda ($P_2 < P_1$). *Drag* terjadi karena tekanan di bawah benda lebih kecil daripada tekanan di atas benda ($P_2 > P_1$).

2.3.2 Gerak Dasar Mini *Quadrotor*

Quadrotor memiliki ketentuan tersendiri pada kecepatan perputaran setiap baling-balingnya untuk dapat melakukan pergerakan tertentu. Setiap pasangan baling-baling memiliki fungsi yang berbeda, satu pasang sebagai pendorong dan satu pasang yang lain sebagai penarik. Rotor depan dan rotor belakang berputar searah jarum jam, sedangkan rotor kanan dan rotor kiri berputar berlawanan arah jarum jam. Rotor-rotor tersebut bersifat independen, yaitu kecepatannya dapat berbeda untuk satu rotor dengan rotor yang lain.

Dengan mengubah perbedaan tekanan yang berarti perbedaan kecepatan sudut pada baling-baling maka *quadrotor* dapat melayang, bergerak maju atau mundur, gerak ke kiri atau kanan, naik atau turun, dan berputar ke kiri atau kanan. Pergerakan tersebut merupakan empat gerak dasar mini *quadrotor* yang lebih dikenal dengan istilah *pitch* (gerak maju atau mundur), *roll* (gerak kiri atau kanan), *yaw* (putar kiri atau kanan) dan *altitude* (naik atau turun). Lebih jelas dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2. 4[2] : Gerak dasar mini *quadrotor*

a) Gerak *Pitch*

Gerak *pitch* merupakan gerak maju atau mundur. Untuk melakukan gerak maju dan mundur dilakukan perubahan kecepatan putar pada rotor depan (1) dan rotor belakang (3). Sedangkan kecepatan putar pada dua rotor yang lain, rotor kanan (2) dan rotor kiri (4) konstan, seperti yang terlihat pada Gambar 2.4. Untuk gerak maju maka kecepatan putar pada rotor belakang(3) lebih besar dari pada rotor depan (1) Gambar 2.4(b). Dan sebaliknya, untuk gerak mundur maka kecepatan putar pada rotor depan (1) lebih besar dari pada rotor belakang (3) Gambar 2.4(a). Dari penjabaran diatas dapat dilihat lebih jelas pada Tabel 2.2.

Tabel 2. 2 Gerak *pitch*

MUNDUR	Putaran baling-baling	1 lebih cepat daripada 3	2 dan 4 konstan
	Kecepatan sudut (ω)	$\omega_1 > \omega_3$	$\omega_2 = \omega_4$
	Tekanan fluida (P)	$P_1 > P_3$	$P_2 = P_4$
MAJU	Putaran baling-baling	3 lebih cepat daripada 1	2 dan 4 konstan
	Kecepatan sudut (ω)	$\omega_1 < \omega_3$	$\omega_2 = \omega_4$
	Tekanan fluida (P)	$P_1 < P_3$	$P_2 = P_4$

b) Gerak *Roll*

Gerak *roll* merupakan gerak ke kanan atau kiri. Untuk melakukan gerak ke kanan dan kiri dilakukan perubahan kecepatan putar pada rotor kanan (2) dan rotor kiri (4). Sedangkan kecepatan putar pada dua rotor yang lain, rotor depan (1) dan rotor belakang (3) konstan, seperti yang terlihat pada Gambar 2.4. Untuk gerak ke kanan maka kecepatan putar pada rotor kiri (4) lebih besar dari pada rotor kanan (2) Gambar 2.4(d). Dan sebaliknya, untuk gerak ke kiri maka kecepatan putar pada rotor

kanan (2) lebih besar dari pada rotor kiri (4) Gambar 2.4(c). Dari penjabaran diatas dapat dilihat lebih jelas pada Tabel 2.3.

Tabel 2. 3 Gerak *roll*

GERAK KE KANAN	Putaran baling-baling	1 dan 3 konstan	4 lebih cepat daripada 2
	Kecepatan sudut (ω)	$\omega_1 = \omega_3$	$\omega_2 < \omega_4$
	Tekanan fluida (P)	$P_1 = P_3$	$P_2 < P_4$
GERAK KE KIRI	Putaran baling-baling	1 dan 3 konstan	2 lebih cepat daripada 4
	Kecepatan sudut (ω)	$\omega_1 = \omega_3$	$\omega_2 > \omega_4$
	Tekanan fluida (P)	$P_1 = P_3$	$P_2 > P_4$

c) Gerak *yaw*

Pada gerak *yaw*, rotor yang bergerak berpasangan. Rotor depan (1) dan rotor belakang (3) berputar searah jarum jam, sedangkan rotor kanan (2) dan rotor kiri (4) berputar berlawanan jarum jam, seperti yang terlihat pada Gambar 2.4. Gerak *yaw* yang searah jarum jam (berputar ke kanan) dihasilkan dengan cara menaikkan kecepatan putar pada rotor depan (1) dan rotor belakang (3) serta menurunkan kecepatan putar pada rotor kanan (2) dan rotor kiri (4) Gambar 2.4(g). Dan sebaliknya, untuk gerak *yaw* yang berlawanan jarum jam (berputar ke kiri) dihasilkan dengan cara menaikkan kecepatan putar pada rotor kanan (2) dan rotor kiri (4) serta menurunkan kecepatan putar pada rotor depan (1) dan rotor belakang (3) Gambar 2.4(h). Dari penjabaran diatas dapat dilihat lebih jelas pada Tabel 2.4.

Tabel 2. 4 Gerak yaw

BERPUTAR KE KANAN	Putaran baling-baling	1&3 lebih cepat daripada 2&4
	Kecepatan sudut (ω)	$\omega_1, \omega_3 > \omega_2, \omega_4$
	Tekanan fluida (P)	$P_1, P_3 > P_2, P_4$
BERPUTAR KE KIRI	Putaran baling-baling	2&4 lebih cepat daripada 1&3
	Kecepatan sudut (ω)	$\omega_1, \omega_3 < \omega_2, \omega_4$
	Tekanan fluida (P)	$P_1, P_3 < P_2, P_4$

d) Gerak *altitude*

Gerak *altitude* merupakan gerak naik atau turun, seperti yang terlihat pada Gambar 2.4. Gerak naik atau turun diperoleh dengan cara menaikkan atau menurunkan kecepatan putar dari tiap rotor dengan besar yang sama. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Tabel 2.5.

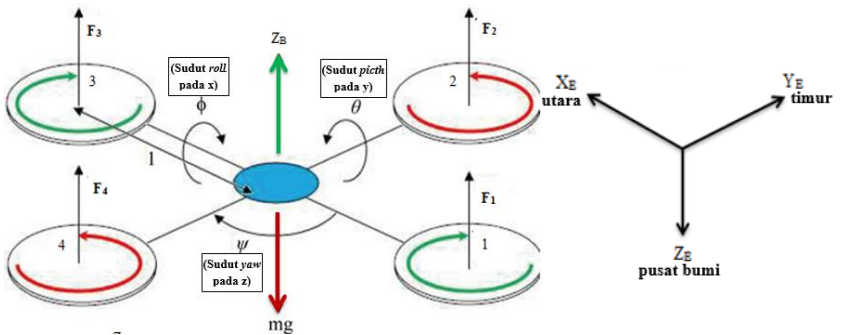
Tabel 2. 5 Gerak altitude

NAIK KE ATAS	Putaran baling-baling	1, 2, 3 & 4 sama cepat
	Kecepatan sudut (ω)	$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$
	Tekanan fluida (P)	$P_1 = P_2 = P_3 = P_4$
TURUN KE BAWAH	Putaran baling-baling	1, 2, 3 dan 4 sama lambat
	Kecepatan sudut (ω)	$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$
	Tekanan fluida (P)	$P_1 = P_2 = P_3 = P_4$

2.4 Sistem Koordinat *Quadrotor*

Sistem koordinat merupakan bagian dasar yang akan menjadi acuan setiap pergerakan *quadrotor*. Terdapat dua jenis sistem koordinat yaitu koordinat bumi (*inertial frame*) dan koordinat *body* (*body frame*). Koordinat bumi dibentuk berdasarkan arah rotasi bumi. Pada Gambar 2.5 diasumsikan bahwa bumi sebagai pusat sistem koordinat Cartesius E , yang dibagi menjadi 3 bagian, yaitu sumbu X_E , Y_E dan Z_E . Dimana X_E merupakan representasi dari arah utara bumi, Y_E representasi dari arah timur bumi dan Z_E representasi dari pusat bumi.

Sedangkan badan *quadrotor* sebagai pusat sistem koordinat Cartesius B . Pada Gambar 2.5 yang juga dibagi menjadi 3 bagian, yaitu sumbu X_B , Y_B dan Z_B . Sepasang baling-baling yang searah jarum jam sepanjang sumbu x , sumbu y sepanjang arah sepasang baling-baling yang lain dan sumbu z arah ke atas.



Gambar 2. 5 Sistem koordinat cartesius B terhadap E

Pergerakan *quadrotor* terhadap bumi bekerja pada sumbu-sumbu yang terbentuk pada *quadrotor* yaitu sumbu x , y dan z dari koordinat kartesius serta sudut *roll* (ϕ), *pitch* (θ) dan *yaw* (ψ). Sudut *roll* (ϕ) yaitu sudut yang bekerja pada sumbu x , sudut *pitch* (θ) adalah sudut yang bekerja pada

sumbu y , dan sudut yaw (ψ) merupakan sudut yang bekerja pada sumbu z .

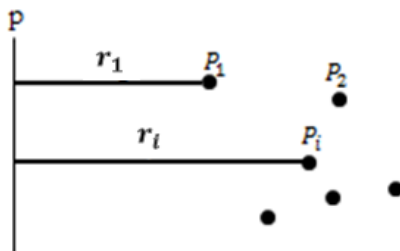
Quadrotor merupakan benda yang mampu bergerak dengan enam derajat kebebasan (*Degree of Freedom* DoF). Gerakan yang mempresentasikan *attitude* dari *quadrotor* yaitu gerakan translasi pada sumbu x , sumbu y dan sumbu z dan gerakan rotasi pada sudut *roll* (ϕ), sudut *pitch* (θ) dan sudut *yaw* (ψ).

2.5 Momen Inersia

Misalkan sistem partikel P_1, P_2, \dots, P_n masing-masing mempunyai massa m_1, m_2, \dots, m_n dan jarak r_1, r_2, \dots, r_n terhadap garis lurus p , maka [10]:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (2.4)$$

disebut momen inersia daripada sistem tersebut terhadap garis p . Untuk lebih jelas bisa dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2. 6 Momen inersia dari sistem partikel

Secara umum, momen inersia setiap benda tegar bisa dinyatakan sebagai berikut [11]:

$$I = \sum mr^2 = mr_1^2 + mr_2^2 + mr_3^2 + \dots + mr_n^2 \quad (2.5)$$

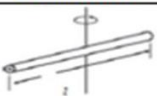
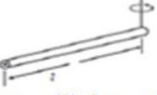






dengan keterangan sebagai berikut :

I = momen inersia

m = massa benda

r = jarak benda dari sumbu rotasi

Tabel 2. 6 [11] Momen inersia dari beberapa benda tegar

No	Nama Benda	Rumus	Keterangan
1	 Batang silinder, poros melalui pusat silinder	$I = \frac{1}{12} ml^2$	I = momen inersia m = massa silinder l = panjang silinder
2	 Batang silinder, poros melalui ujung	$I = \frac{1}{3} ml^2$	
3	 Silinder tipis berongga, poros melalui sumbu silinder	$I = mR^2$	m = massa silinder R = jari-jari silinder l = panjang silinder
4	 Silinder Pejal, poros melalui sumbu silinder	$I = \frac{1}{12} ml^2$	
5	 Silinder pejal, poros seperti pada gambar	$I = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{2} ml^2$	
6	 Bola Pejal, poros melalui diameter	$I = \frac{2}{5} mR^2$	m = massa bola R = jari-jari bola
7	 Bola berongga, poros melalui diameter	$I = \frac{2}{3} mR^2$	
8	 Bola pejal, poros seperti pada gambar	$I = \frac{7}{5} mR^2$	

Benda tegar bisa kita anggap tersusun dari banyak partikel yang tersebar di seluruh bagian benda itu. Setiap partikel-partikel itu mempunyai massa dan jarak r dari sumbu rotasi. Jadi momen inersia dari setiap benda tegar merupakan jumlah total momen inersia setiap partikel yang menyusun benda itu [11]. Momen inersia dari beberapa benda tegar dapat dilihat pada Tabel 2.6.

Momen Inersia dalam gerak rotasi menyatakan ukuran kemampuan benda untuk mempertahankan kecepatan sudut. Makin besar Momen inersia suatu benda, semakin sulit membuat benda itu berputar alias berotasi. Sebaliknya, benda yang berputar juga sulit dihentikan jika momen inersianya besar. Besarnya momen inersia yang dimiliki oleh benda bergantung kepada beberapa faktor yaitu :

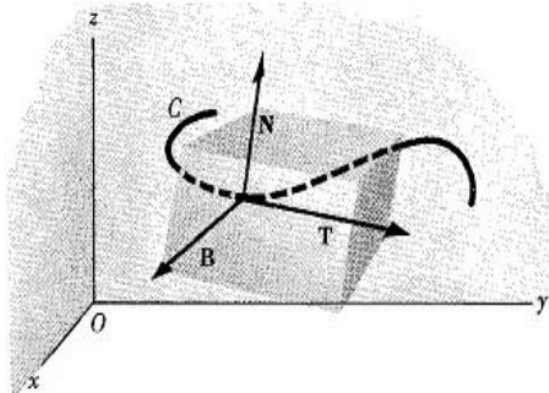
- Massa benda
- Bentuk benda
- Letak sumbu putar
- Jarak sumbu putar

2.6 Teori Frenet-Serret

Jika kurva C dalam ruang \mathbb{R}^3 adalah sebuah kurva ruang yang didefinisikan oleh kurva $\alpha(s)$, maka diketahui bahwa $\frac{d\alpha}{ds}$ adalah sebuah vektor yang searah dengan garis singgung pada C . Jika skalar s diambil sebagai panjang busur yang diukur dari satu titik pada α , maka

$$\mathbf{T} = \frac{d\alpha}{ds} = \alpha'(s) \quad (2.6)$$

adalah sebuah vektor singgung satuan pada C yang disebut vektor tangen [12].



Gambar 2. 7 [12] Kurva vektor tangen, normal dan binormal

Laju perubahan T terhadap s adalah ukuran dari kelengkungan C dan dinyatakan dengan $\frac{dT}{ds}$. Arah dari $\frac{dT}{ds}$ pada sebarang titik pada C adalah normal terhadap kurva pada titik tersebut. Jika N adalah sebuah vektor satuan dalam arah normal maka N disebut normal utama pada kurva.

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N \quad (2.7)$$

dimana κ disebut kelengkungan dari C pada titik yang dispesifikasikan.

Vektor satuan B yang tegak lurus pada bidang T dan N sedemikian rupa sehingga

$$B = T \times N \quad (2.8)$$

disebut vektor binormal terhadap kurva. Dari sini diperoleh bahwa T, N , dan B membentuk sebuah sistem koordinat tegak lurus tangan kanan pada sebarang titik dari C .

Suatu kurva dalam \mathbb{R}^3 terkait pula dengan suatu torsi yang berelasi dengan kelengkungan, tangen, normal dan binormal. Kelengkungan adalah perubahan sudut antara garis singgung dengan kurva terhadap panjang kurva di suatu titik yang terletak pada kurva. Selanjutnya didefinisikan kurva α sebagai berikut :

Definisi 2.6.1 [13].

Sebuah kurva parameter α yang diferensiabel didefinisikan sebagai pemetaan, untuk suatu $-\infty \leq a < b \leq \infty$, sehingga $\alpha(t)$ memiliki turunan dari semua order.

Kurva α dikatakan **regular** jika $\frac{d\alpha}{dt} \neq 0$ untuk semua t di (a, b) .

Kurva α dapat ditulis dalam sistem koordinat :

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots \dots x_n(t))$$

dan turunan α terhadap t :

$$\frac{d\alpha}{dt} = (x'_1(t), x'_2(t), \dots \dots x'_n(t))$$

Definisi 2.6.2 [13].

Diberikan kurva parameter yang diferensiabel, $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, **vektor tangen satuan** dari kurva $\alpha(t)$ didefinisikan sebagai:

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t)$$

dan $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)}$

merupakan vektor kecepatan dari α di $\alpha(t)$. Jika $\|\alpha'(t)\| = 1$ disebut vektor kecepatan satuan dari α di $\alpha(t)$.

Kemudian didefinisikan panjang kurva lintasan sebagai berikut :

Definisi 2.6.3 [13].

Diberikan kurva parameter yang diferensiabel, $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dan $a < a_0 < b$. Fungsi panjang kurva $s: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh

$$s(t) = \int_{a_0}^t \|\alpha'(t)\| dr = \int_{a_0}^t \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)} dr$$

Setelah mendefinisikan α dan s , selanjutnya akan didefinisikan vektor tangen, vektor normal dan vektor binormal.

Definisi 2.6.4 [13].

Diberikan $T(s) = \alpha'(s)$ sebagai **vektor tangen satuan**, kurva kecepatan satuan $\alpha(s)$. Kelengkungan dari α didefinisikan $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \|T'(s)\|$ dengan $\kappa(s) \neq 0$. Diberikan $N(s) = T'(s)/\kappa(s)$ sebagai **vektor normal satuan** untuk α . Didefinisikan $B(s) = T(s) \times N(s)$ sebagai **vektor binormal satuan** untuk α .

Definisi 2.6.5 [13].

Didefinisikan $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ dan fungsi $\tau(s)$ dinamakan torsi dari kurva α di t .

Definisi 2.6.6 [13].

Diberikan $\alpha(s)$ kurva regular, kurva kecepatan satuan $\alpha(s)$. Koleksi dari

$$\{\kappa(s), \tau(s), T(s), N(s), B(s)\}$$

disebut **Frenet-Serret apparatus**. Basis orthonormal $\{T(s), N(s), B(s)\}$ disebut *moving frame* atau *moving trihedron* di sepanjang kurva.

Teorema 2.6.7 (Teorema Frenet-Serret) [13].

Jika $\alpha(s)$ adalah kurva kecepatan satuan regular dengan kelengkungan $\kappa(s)$ tak nol, maka himpunan relasi-relasi yang mengandung turunan dari vektor $T(s), N(s), B(s)$ dikenal sebagai rumus **Frenet-Serret** yang diberikan oleh

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$\text{dan } B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

Bukti :

Ingat jika $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ basis orthonormal di \mathbb{R}^3 maka vektor sebarang $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ditulis

$$\vec{v} = (v \cdot \vec{w}_1)\vec{w}_1 + (v \cdot \vec{w}_2)\vec{w}_2 + (v \cdot \vec{w}_3)\vec{w}_3$$

Dari definisi jelas bahwa

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$\text{dan } B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

Selanjutnya, untuk membuktikan $N'(s)$ dimisalkan

$$\vec{w}_1 = T, \quad \vec{w}_2 = N, \quad \vec{w}_3 = B$$

maka $N'(s)$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$N' = (N'.T)T + (N'.N)N + (N'.B)B \quad (2.9)$$

$$\text{e) } N \perp T \text{ maka } N.T = 0 \Rightarrow N'T + N T' = 0$$

$$N'T = -N T'$$

$$N'T = -N(\kappa N)$$

$$N'T = -\kappa \quad (2.10)$$

$$\text{f) } N.N = 1 \text{ maka } N'N + N N' = 0$$

$$2N'N = 0$$

$$N'N = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{g) } B \perp N \text{ maka } B.N = 0 \Rightarrow B'N + B N' = 0$$

$$N'B = -B'N$$

$$N'B = -(-\tau N).N$$

$$N'B = \tau \quad (2.12)$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.10), (2.11), (2.12) ke persamaan (2.9), sehingga diperoleh

$$N' = -\kappa T + 0 N + \tau B$$

Jadi terbukti bahwa $N' = -\kappa T + \tau B$.

Dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

2.7 Metode Kontrol *Backstepping*

Untuk suatu sistem kontrol linier maupun nonlinier, kestabilan biasanya merupakan yang paling penting untuk

ditentukan. Dalam metode kontrol *backstepping* akan digunakan kestabilan Lyapunov untuk menstabilkan sistem.

2.7.1 Kestabilan Lyapunov

Metode Lyapunov adalah salah satu jenis metode yang dapat digunakan untuk menyelidiki kinerja terutama kestabilan sistem linier maupun non linier yang tidak berubah dengan waktu, untuk orde rendah maupun orde tinggi.

Teorema 2.7.1 [14].

Anggaplah bahwa sistem dijelaskan oleh

$$\dot{x} = f(x)$$

dengan $f(0) = 0$. Jika fungsi skalar yang terdapat pada $V(x)$ kontinu, maka turunan pertama memenuhi kondisi :

a. $V(x)$ pasti positif

b. $\dot{V}(x)$ pasti negatif

maka keadaan setimbang pada titik awal adalah stabil seragam secara garis lurus.

Sebagai tambahan, jika $V(x) \rightarrow \infty$ ketika $\|x\| \rightarrow \infty$, maka keadaan setimbang pada titik awal akan stabil secara seragam di dalam ruang.

Teorema 2.7.2 [14].

Misalkan sistem berikut diuraikan oleh

$$\dot{x} = f(x)$$

dengan $f(0) = 0$. Jika fungsi skalar yang terdapat pada $V(x)$ kontinu, maka turunan pertama memenuhi kondisi berikut :

a. $V(x)$ definit positif

b. $\dot{V}(x)$ semi definit negatif

maka keadaan setimbang pada titik awal akan stabil secara garis lurus dan seragam di dalam ruang.

2.7.2 Kontrol *Backstepping*

Metode kontrol *backstepping* adalah metode kontrol nonlinier yang merancang pengendali pada sistem yang terdiri

dari beberapa subsistem dengan mempertimbangkan beberapa *state*. Masing-masing subsistem mempunyai variabel kontrol virtual dimana variabel kontrol virtual terakhir digunakan dalam desain kontrol virtual sistem sebelumnya sehingga diperoleh kontrol subsistem utama yang merupakan kontrol sistem.

Langkah perancangan kontrol *backstepping* adalah [2] :

1. Menentukan tracking error
2. Setelah ditemukan error kemudian akan diuji dengan kestabilan Lyapunov. Jika turunan pertama hasilnya definit negatif berarti sistem stabil dan pengujian yang dilakukan terbukti.
3. Selanjutnya menambahkan variabel baru sebagai *control input virtual* sehingga akan diperoleh error kedua yang akan diuji kembali dengan kestabilan Lyapunov. Jika hasilnya definit negatif maka syarat terpenuhi dan sistem stabil.

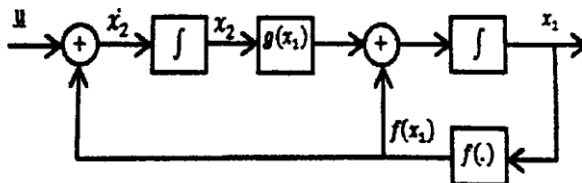
Untuk error selanjutnya dalam bentuk state yang lain dapat diperoleh dengan cara yang sama, yaitu kembali ke langkah awal dengan menentukan tracking error. Jumlah error tergantung state yang dikontrol.

Pertimbangkan sebuah sistem nonlinier yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1).x_2 \quad (2.14)$$

$$\dot{x}_2 = f(x_1) + u \quad (2.15)$$

dengan $x = [x_1 \ x_2]^T$ merupakan *state*, u adalah *control input*, f dan g merupakan *smooth function* ($x_1 = 0 \rightarrow f(0) = 0$). Diagram blok sistem ditunjukkan pada Gambar 2.7.



Gambar 2. 8 Diagram Blok Sistem

Akan didesain sebuah *feedback control law* untuk menstabilkan origin ($x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$) dengan beberapa langkah prosedur desain.

Langkah pertama, menstabilkan komponen pertama pada sistem, yaitu persamaan (2.14) dengan memilih *smooth state feedback control law* :

$$x_2 = \phi(x_1); \text{ dimana } \phi(0) = 0 \quad (2.16)$$

Sehingga komponen sistem pada persamaan (2.14) menjadi :

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1) \cdot \phi(x_1) \quad (2.17)$$

Kemudian ambil fungsi Lyapunov definit positif

$$V(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2 \quad (2.18)$$

yang memenuhi pertidaksamaan

$$\dot{V}(x_1) \leq -W(x_1) \quad (2.19)$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &\leq -W(x_1) \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} &\leq -W(x_1) \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 &\leq -W(x_1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot [f(x_1) + g(x_1) \cdot \phi(x_1)] \leq -W(x_1) \quad (2.20)$$

dengan $W(x_1)$ merupakan fungsi definit positif.

Langkah kedua : tambahkan dan kurangkan ruas kanan persamaan (2.14) dengan suku $g(x_1) \cdot \phi(x_1)$ untuk memperoleh :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1) \cdot x_2 + g(x_1) \cdot \phi(x_1) - g(x_1) \cdot \phi(x_1) \\ &= [f(x_1) + g(x_1) \cdot \phi(x_1)] + g(x_1)[x_2 - \phi(x_1)] \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (2.22)$$

Jika diambil variabel perubahan (*change of variable*)

$$z = x_2 - \phi(x_1) \quad (2.23)$$

maka akan menghasilkan 'sistem baru' yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\dot{x}_1 = [f(x_1) + g(x_1) \cdot \phi(x_1)] + g(x_1)z \quad (2.24)$$

$$\dot{z} = u - \dot{\phi}(x_1) \quad (2.25)$$

Perubahan sistem pada persamaan (2.14) dan (2.15) menjadi sistem pada persamaan (2.24) dan (2.25) dapat dilihat sebagai proses melakukan ‘backstepping’ $\dot{\phi}(x_1)$ melalui integrator. Turunan $\dot{\phi}(x_1)$ dapat dihitung sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x_1) &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1) \cdot x_2] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Kemudian dengan mengambil variabel $v = u - \dot{\phi}$ menjadikan sistem dalam bentuk *cascade connection*.

$$\dot{x}_1 = [f(x_1) + g(x_1) \cdot \phi(x_1)] + g(x_1)z \quad (2.27)$$

$$\dot{z} = v \quad (2.28)$$

Pada sistem dengan bentuk terakhir ini, komponen pertama memiliki *asymptotically stable origin* ketika inputnya bernilai nol.

Langkah ketiga : desain *control input v* untuk menstabilkan keseluruhan sistem dengan menggunakan fungsi Lyapunov yang diperluas (*augmented Lyapunov function*)

$$V_c(x_1, x_2) = V(x_1) + \frac{1}{2}z^2 \quad (2.29)$$

dengan turunan pertamanya adalah :

$$\begin{aligned} \dot{V}_c(x_1, x_2) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + z \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + z \dot{z} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1) \cdot \phi(x_1) + g(x_1)z] + zv \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1) \cdot \phi(x_1)] + \frac{\partial V}{\partial x_1} g(x_1)z + zv \end{aligned}$$

atau

$$\dot{V}_c(x_1, x_2) \leq -W(x_1) + \frac{\partial V}{\partial x_1} g(x_1)z + zv \quad (2.30)$$

Kemudian dengan memilih

$$v = -\frac{\partial V}{\partial x_1} g(x_1) - kz; \quad k > 0 \quad (2.31)$$

diperoleh

$$\dot{V}_c(x_1, x_2) \leq -W(x_1) - kz^2 \quad (2.32)$$

yang menunjukkan bahwa *origin* ($x_1 = 0; z = 0$) adalah *asymptotically stable*. Oleh karena $(0) = 0$, dapat disimpulkan bahwa *origin* ($x_1 = 0; x_2 = 0$) juga *asymptotically stable*.

Langkah keempat : dengan mensubstitusikan v, z dan ϕ akan diperoleh *state feedback control law*.

$$\begin{aligned} z &= x_2 - \phi \\ \dot{z} &= \dot{x}_2 - \dot{\phi} \\ \dot{z} &= u - \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.33)$$

atau

$$\begin{aligned} u &= \dot{z} + \dot{\phi} \\ u &= v + \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (2.26) dan (2.31) ke persamaan (2.34) diperoleh :

$$u = -\frac{\partial V}{\partial x_1} g(x_1) - kz + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1) \cdot x_2] \quad (2.35)$$

Prosedur perancangan kontrol *backstepping* diatas dapat disimpulkan dalam Lemma 1.

Lemma 1 [2]. Pertimbangkan sistem (2.14) dan (2.15). Ambil $\phi(x_1)$ sebagai *state feedback control law* yang menstabilkan komponen (2.14) dengan $\phi(0) = 0$, dan $V(x_1)$ sebagai fungsi Lyapunov yang memenuhi persamaan (2.15). Maka *state feedback control law* (2.35) akan menghasilkan *origin* dari (2.14) dan (2.15), dengan $V(x_1) + \frac{1}{2}[x_2 - \phi(x_1)]^2$ sebagai fungsi Lyapunov. Lebih jauh jika semua diasumsikan global dan $V(x_1)$ *radially unbounded*, maka *origin* akan stabil asimtotik secara global.

Sekarang pertimbangkan sistem yang lebih umum daripada persamaan (2.14) dan (2.15), sebagai berikut :

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1) \cdot x_2 \quad (2.36)$$

$$\dot{x}_2 = f_a(x_1, x_2) + g_a(x_1, x_2)u \quad (2.37)$$

dengan f_a dan g_a adalah *smooth function*.

Jika $g_a(x_1, x_2) \neq 0$ pada domain tertentu, maka *input transformation*

$$u = \frac{1}{g_a(x_1, x_2)} [u_a - f_a(x_1, x_2)] \quad (2.38)$$

akan mereduksi komponen sistem pada persamaan (2.37) menjadi integrator :

$$\dot{x}_2 = u_a \quad (2.39)$$

Oleh karena itu, jika *stabilizing state feedback control law* $\phi(x_1)$ dan fungsi Lyapunov $V(x_1)$ keduanya eksis dan sedemikian memenuhi kondisi Lemma 1, maka akan menghasilkan *stabilizing state feedback control law* :

$$u = \frac{1}{g_a(x_1, x_2)} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1) \cdot x_2] - \frac{\partial V}{\partial x_1} g(x_1) - k[x_2 - \phi(x_1)] - f_a(x_1, x_2) \right\} \quad (2.40)$$

dengan k adalah konstanta positif, sehingga fungsi Lyapunov menjadi :

$$V(x_1, x_2) = V(x_1) + \frac{1}{2} [x_2 - \phi(x_1)]^2 \quad (2.41)$$

Contoh kontrol *Backstepping* [2] :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \quad (2.42)$$

dimana x_1, x_2, x_3 adalah state sistem dan u adalah kontrol input.

Langkah pertama : mulai dengan persamaan (2.42) didefinisikan $z_1 = x_1$ sehingga persamaan (2.42) menjadi

$$\dot{z}_1 = x_2 + x_1^2 \quad (2.43)$$

dengan menganggap x_2 sebagai variable kontrol.

Didefinisikan hubungan kontrol virtual α_1 dan dimisalkan z_2 variable error mewakili perbedaan antara kontrol aktual dan kontrol virtual dari persamaan (2.43) yaitu:

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 \quad (2.44)$$

Variable state baru dapat ditulis sebagai berikut :

$$\dot{z}_1 = \alpha_1 + x_1^2 + z_2 \quad (2.45)$$

Langkah untuk desain hukum kontrol virtual α_1 dimana z_1 mendekati nol berdasarkan fungsi Lyapunov :

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 \quad (2.46)$$

Persamaan (2.46) diturunkan menjadi :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1\dot{z}_1 = z_1(\alpha_1 + x_1^2 + z_2) \\ \dot{V}_1 &= z_1(\alpha_1 + x_1^2) + z_1z_2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Dapat dilihat kontrol virtual α_1 yang membuat sistem stabil :

$$\alpha_1 = -k_1z_1 - x_1^2 \quad (2.48)$$

$$\dot{\alpha}_1 = -(k_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2)$$

dimana $k_1 \geq 0$, maka persamaan (2.47) dapat diubah menjadi:

$$\dot{V}_1 = -k_1z_1^2 + z_1z_2 \quad (2.49)$$

Jika $z_2 = 0$, sehingga persamaan (2.49) menjadi :

$$\dot{V}_1 = -k_1z_1^2 \quad (2.50)$$

dan z_1 konvergen untuk asimtotik nol.

Langkah kedua : menurunkan error dinamik untuk $z_2 = x_2 - \alpha_1$:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1$$

$$z_2 = x_3 + x_2^2 + (k_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2) \quad (2.51)$$

dimana x_3 dianggap input kontrol virtual. Didefinisikan hukum kontrol virtual α_2 dan z_3 dianggap variable error yang mewakili perbedaan antara kontrol aktual dan virtual.

$$z_3 = x_3 - \alpha_2 \quad (2.52)$$

Sehingga persamaan (2.51) menjadi :

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2 + x_2^2 + (k_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2) \quad (2.53)$$

Untuk membuat z_2 mendekati nol, sesuai fungsi Lyapunov

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 \quad (2.54)$$

Persamaan (2.54) diturunkan menjadi :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2\dot{z}_2 = -k_1z_1^2 + z_1z_2 + z_2(z_3 + \alpha_2 + x_2^2 + \\ &\quad (k_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2)) \end{aligned}$$

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 + z_2(z_1 + \alpha_2 + x_2^2 + (k_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2)) + z_2 z_3 \quad (2.55)$$

Memilih kontrol virtual α_2 :

$$\alpha_2 = -z_1 - k_2 z_2 - x_2^2 - (k_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2) \quad (2.56)$$

dimana k_2 konstanta positif, sehingga persamaan (2.55) dapat diubah menjadi :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + z_2 z_3 \\ \dot{V}_2 &= -\sum_{i=1}^2 k_i z_i^2 + z_2 z_3 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Jika $z_3 = 0$, maka persamaan (2.57) menjadi :

$$\dot{V}_2 = -\sum_{i=1}^2 k_i z_i^2 \quad (2.58)$$

Jadi z_1 dan z_2 konvergen untuk asimtotik nol.

Langkah ketiga : dari persamaan (2.52) diperoleh error dinamik untuk $z_3 = x_3 - \alpha_2$, turunan z_3 adalah

$$\dot{z}_3 = u - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(x_2 + x_1^2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(x_3 + x_2^2) \quad (2.59)$$

Untuk membuat z_3 mendekati nol, sesuai fungsi Lyapunov untuk V_3 adalah

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2 \quad (2.60)$$

Persamaan (2.60) diturunkan menjadi

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \dot{V}_2 + z_3 \dot{z}_3 \\ \dot{V}_3 &= -\sum_{i=1}^2 k_i z_i^2 + z_3 \left(u - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(x_2 + x_1^2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(x_3 + x_2^2) \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Desain kontrol u dibuat $\dot{V}_3 \leq 0$ adalah

$$u = -z_2 - k_3 z_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(x_2 + x_1^2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(x_3 + x_2^2) \quad (2.62)$$

dimana k_3 konstanta positif, fungsi Lyapunov untuk V_3 adalah :

$$\dot{V}_3 = -\sum_{i=1}^3 k_i z_i^2 \quad (2.63)$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir ini dibagi menjadi beberapa tahap sebagai berikut :

1. Studi literatur

Tahap pertama yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah studi literature. Dengan mencari literature ilmiah yang berhubungan dengan kontrol *backstepping* dan teori Frenet-Serret dari buku, jurnal, artikel, dan lain-lain. Bahan-bahan yang dikaji meliputi informasi mengenai mini *quadrotor* DraganFlyer yang digunakan, analisis model dinamik gerak mini *quadrotor*, teori Frenet-Serret, metode kontrol *backstepping* serta perancangan sistem kontrol *backstepping* menggunakan Matlab.

2. Analisa pemodelan mini *quadrotor* DraganFlyer

Pada tahap ini akan dilakukan model dinamik gerak mini *quadrotor* DraganFlyer yang melibatkan analisis dinamik gerak translasi dan gerak rotasi pada mini *quadrotor* dengan beberapa batasan dan asumsi.

3. Perancangan sistem kontrol *backstepping*

Perancangan sistem mini *quadrotor* dibagi dua yaitu subsistem rotasi dan subsistem translasi. Berdasarkan hasil pemodelan yang didapat, akan dilakukan perancangan sistem kontrol *backstepping* pada mini *quadrotor* DraganFlyer dengan lintasan Frenet-Serret.

4. Simulasi dan Pembahasan

Pada tahap ini akan dibahas hasil perhitungan pada tahap sebelumnya dan akan disimulasikan menggunakan *software* Matlab R2013a. Selanjutnya akan dianalisis hasil grafik untuk mendapatkan nilai parameter kestabilan terbang mini *quadrotor* DraganFlyer.

5. Penarikan kesimpulan

Dalam tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan pengamatan respon sistem dari simulasi yang telah dilakukan.

6. Penulisan Laporan

Penulisan laporan Tugas Akhir dilakukan sebagai dokumentasi dari hasil penelitian yang telah dilakukan.

BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Dinamik Mini *Quadrotor*

Pada sistem sumbu badan mini *quadrotor* terjadi gerak translasi dan gerak rotasi. Gerak translasi pada sumbu x, y, z terhadap sumbu X_E, Y_E, Z_E dengan kecepatan linier yaitu u, v, w yang diukur pada sumbu X_B, Y_B, Z_B , dapat dilihat pada Tabel 4.1. Hubungan antara posisi x, y, z dengan kecepatan u, v, w terlihat pada persamaan berikut :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

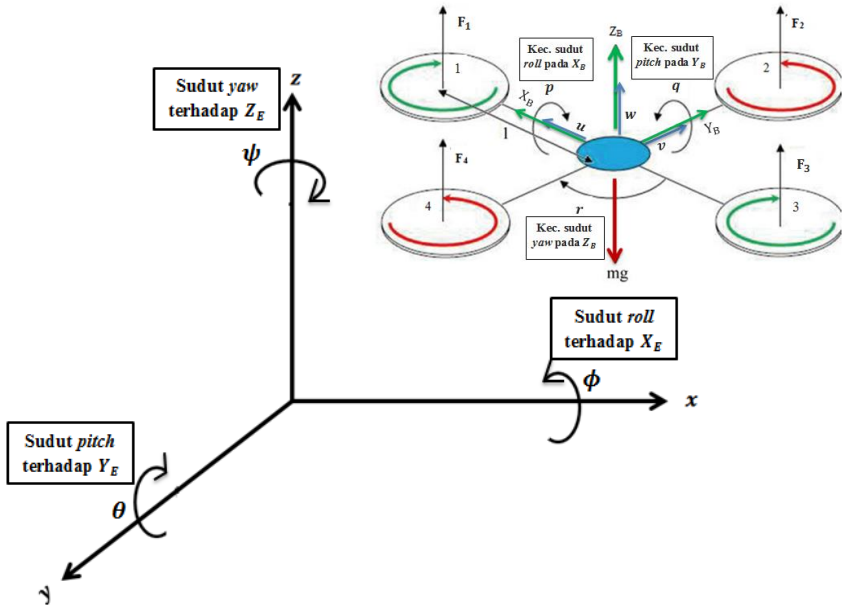
Sedangkan gerak rotasi pada sudut ϕ, θ, ψ terhadap sumbu X_E, Y_E, Z_E dengan kecepatan sudut (ω) yaitu p, q, r yang diukur pada sumbu X_B, Y_B, Z_B , dapat dilihat pada Tabel 4.1. Hubungan antara sudut ϕ, θ, ψ dengan kecepatan sudut p, q, r terlihat pada persamaan berikut :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Tabel 4. 1 Gerakan *Quadrotor*

x	Posisi <i>quadrotor</i> terhadap sumbu X_E
y	Posisi <i>quadrotor</i> terhadap sumbu Y_E
z	Posisi <i>quadrotor</i> terhadap sumbu Z_E
u	Kecepatan <i>quadrotor</i> yang diukur pada sumbu X_B
v	Kecepatan <i>quadrotor</i> yang diukur pada sumbu Y_B
w	Kecepatan <i>quadrotor</i> yang diukur pada sumbu Z_B
ϕ	Sudut <i>roll</i> terhadap sumbu X_E
θ	Sudut <i>pitch</i> terhadap sumbu Y_E
ψ	Sudut <i>yaw</i> terhadap sumbu Z_E
p	Kecepatan sudut <i>roll</i> yang diukur pada sumbu X_B
q	Kecepatan sudut <i>pitch</i> yang diukur pada sumbu Y_B
r	Kecepatan sudut <i>yaw</i> yang diukur pada sumbu Z_B

Gerak rotasi yang terjadi sumbu X_B disebut dengan gerak *roll*, pada sumbu Y_B disebut dengan gerak *pitch*, dan pada sumbu Z_B disebut dengan gerak *yaw*. Pergerakan gerak pada *quadrotor* dapat dilihat pada Gambar 4.1.



Gambar 4. 1 Sistem koordinat *quadrotor* terhadap bumi

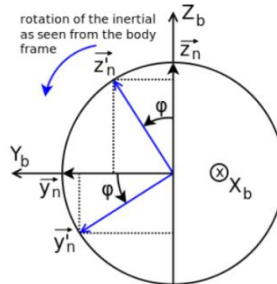
4.1.1 Transformasi Sistem Koordinat Quadrotor

Transformasi sumbu digunakan untuk mengetahui koordinat *quadrotor* terhadap koordinat bumi. Transformasi tersebut dapat dicari dengan menggunakan persamaan sebagai berikut :

$${}^B_E R = R_\phi R_\theta R_\psi \quad (4.1)$$

dimana ${}^B_E R$ adalah hasil perkalian dari R_ϕ , R_θ , dan R_ψ yang merupakan matriks rotasi pada setiap sumbunya. Transformasi dilakukan terhadap sumbu x , sumbu y dan kemudian sumbu z , yaitu :

- Rotasi terhadap sumbu x



Gambar 4. 2 Rotasi terhadap sumbu x

Dari Gambar 4.2 diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$x = x'$$

$$y = y' \cos \phi - z' \sin \phi$$

$$z = z' \cos \phi + y' \sin \phi$$

Dari persamaan y dan z dilakukan eliminasi sehingga diperoleh :

$$y' = y \cos \phi + z \sin \phi$$

$$z' = -y \sin \phi + z \cos \phi$$

sehingga diperoleh persamaan x' , y' dan z' sebagai berikut :

$$x' = x$$

$$y' = y \cos \phi + z \sin \phi$$

$$z' = -y \sin \phi + z \cos \phi$$

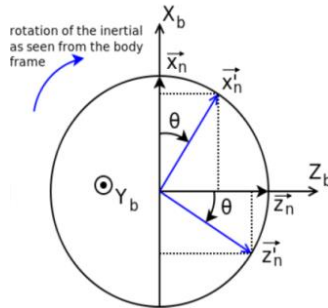
Jika ditulis dalam bentuk matriks menjadi :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks rotasi terhadap sumbu x sebagai berikut :

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

- Rotasi terhadap sumbu y



Gambar 4.3 Rotasi terhadap sumbu y

Dari Gambar 4.3 diperoleh hubungan sebagai berikut :

$$y' = y''$$

$$x' = x'' \cos \theta + z'' \sin \theta$$

$$z' = z'' \cos \theta - x'' \sin \theta$$

Dari persamaan x' dan z' dilakukan eliminasi sehingga diperoleh :

$$x'' = x' \cos \theta - z' \sin \theta$$

$$z'' = x' \sin \theta + z' \cos \theta$$

sehingga diperoleh persamaan x'' , y'' dan z'' sebagai berikut :

$$x'' = x' \cos \theta - z' \sin \theta$$

$$y'' = y'$$

$$z'' = x' \sin \theta + z' \cos \theta$$

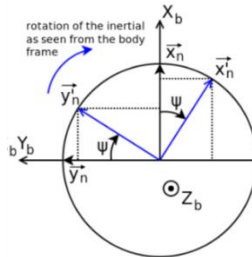
Jika ditulis dalam bentuk matriks menjadi :

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks rotasi terhadap sumbu y sebagai berikut :

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

- Rotasi terhadap sumbu z



Gambar 4. 4 Rotasi terhadap sumbu z

Dari Gambar 4.4 diperoleh hubungan sebagai berikut :

$$z'' = z'''$$

$$x'' = x''' \cos \psi - y''' \sin \psi$$

$$y'' = y''' \cos \psi + x''' \sin \psi$$

Dari persamaan x'' dan y'' dilakukan eliminasi sehingga diperoleh :

$$x''' = x'' \cos \psi + y'' \sin \psi$$

$$y''' = -x'' \sin \psi + y'' \cos \psi$$

sehingga diperoleh persamaan x''' , y''' dan z''' sebagai berikut :

$$x''' = x'' \cos \psi + y'' \sin \psi$$

$$y''' = -x'' \sin \psi + y'' \cos \psi$$

$$z''' = z''$$

Jika ditulis dalam bentuk matriks menjadi :

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks rotasi terhadap sumbu y sebagai berikut :

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Selanjutnya dilakukan transformasi pada keseluruhan sumbu maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 {}^B_E R &= R_\phi R_\theta R_\psi \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \cos \psi \\ -\cos \phi \sin \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \sin \psi \\ +\cos \phi \cos \psi \end{pmatrix} & \sin \phi \cos \theta \\ \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ +\sin \phi \sin \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \phi \cos \psi \end{pmatrix} & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Sedangkan matriks transformasi dari B-frame ke E-frame dengan cara :

$$\begin{aligned}
 {}^B_E R &= R_\psi R_\theta R_\phi \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \cos \psi \\ -\cos \phi \sin \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ +\sin \phi \sin \psi \end{pmatrix} \\ \cos \theta \sin \psi & \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \sin \psi \\ +\cos \phi \cos \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \phi \cos \psi \end{pmatrix} \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

4.1.2 Analisis Dinamika Gerak Translasi

Gerak translasi pada *quadrotor* merupakan gerak yang searah dengan sumbu x, y dan z yang diakibatkan oleh pergeseran benda. Dengan menggunakan formulasi Hukum Newton II untuk dinamika gerak translasi pada mini *quadrotor* diperoleh persamaan :

$$\sum F = ma \quad (4.7)$$

dengan keterangan sebagai berikut :

F = Gaya (satuan : N (Newton) = $\frac{\text{kg.m}}{\text{s}^2}$)

m = massa (kg)

a = percepatan (m/s^2)

dengan percepatan $a = \left(\frac{d}{dt} v\right)$ sehingga

$$\sum F = m \left(\frac{d}{dt} v\right)$$

dan $v = \left(\frac{d}{dt} \xi\right)$ serta $\sum F = F_f + F_g$ sehingga

$$F_f + F_g = m \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \xi\right)\right)$$

atau

$$F_f + F_g = m \ddot{\xi} \quad (4.8)$$

dimana ξ merupakan posisi dari pusat massa mini *quadrotor* terhadap *inersia frame*, yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Sehingga persamaan (4.8) dapat dinyatakan pada persamaan berikut :

$$F_f + F_g = m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

dengan keterangan sebagai berikut :

F_f = gaya yang dihasilkan dari rotor

F_g = gaya gravitasi

Resultan gaya yang dihasilkan keempat rotor dapat didefinisikan dengan persamaan :

$$F_f = \begin{bmatrix} F_{fx} \\ F_{fy} \\ F_{fz} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

dimana

F_{fx} = komponen gaya dalam arah sumbu x

F_{fy} = komponen gaya dalam arah sumbu y

F_{fz} = komponen gaya dalam arah sumbu z

Sebagaimana telah diketahui bahwa matriks transformasi dari B-frame ke E-frame dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \cos \psi \\ -\cos \phi \sin \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ +\sin \phi \sin \psi \end{pmatrix} \\ \cos \theta \sin \psi & \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \sin \psi \\ +\cos \phi \cos \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \phi \cos \psi \end{pmatrix} \\ -\sin \theta & \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\cos \theta \cos \psi)x_B + \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \cos \psi \\ -\cos \phi \sin \psi \end{pmatrix} y_B + \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ +\sin \phi \sin \psi \end{pmatrix} z_B \\ (\cos \theta \sin \psi)x_B + \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \sin \psi \\ +\cos \phi \cos \psi \end{pmatrix} y_B + \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \phi \cos \psi \end{pmatrix} z_B \\ (-\sin \theta)x_B + (\sin \phi \cos \theta)y_B + (\cos \phi \cos \theta)z_B \end{bmatrix} \quad (4.12) \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.12) komponen dari z_B pada sumbu x adalah $\begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ +\sin \phi \sin \psi \end{pmatrix} z_B$, komponen dari z_B pada sumbu y adalah $\begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \phi \cos \psi \end{pmatrix} z_B$ dan komponen dari z_B pada sumbu z adalah $(\cos \phi \cos \theta)z_B$. Oleh karena arah F_f searah dengan z_B , maka komponen gaya total F_f pada sumbu x, y, z sebagai berikut :

$$F_{fx} = F_f(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)$$

$$F_{fy} = F_f(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)$$

$$F_{fz} = F_f(\cos \phi \cos \theta)$$

atau

$$\begin{bmatrix} F_{fx} \\ F_{fy} \\ F_{fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ +\sin \phi \sin \psi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \phi \cos \psi \end{pmatrix} \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \sum_{i=1}^4 K_p \Omega_i^2 \quad (4.13)$$

dimana

K_p = koefisien gaya angkat

Ω_i = kecepatan sudut rotor

Gerak translasi juga dipengaruhi oleh gaya gravitasi yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\sum F_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

dengan F_g merupakan gaya yang diakibatkan oleh pengaruh gravitasi bumi dan $g = 10m/s^2$. Karena $\sum F_g$ merupakan jumlah resultan gaya yang terjadi pada sumbu x, y, z sehingga persamaan (4.14) dapat ditulis kembali menjadi :

$$\begin{aligned} F_{gx} &= 0 \\ F_{gy} &= 0 \\ F_{gz} &= -mg \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dengan mensubstitusikan gaya F_f dan F_g pada Hukum Newton II persamaan (4.9), maka didapat model lengkap untuk gerak translasi pada masing-masing sumbu sebagai berikut :

1. Gaya pada sumbu x :

$$\begin{aligned} F_{fx} + F_{gx} &= m\ddot{x} \\ U_1(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) + 0 &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} &= \frac{U_1}{m}(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \end{aligned}$$

2. Gaya pada sumbu y :

$$\begin{aligned} F_{fy} + F_{gy} &= m\ddot{y} \\ U_1(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) + 0 &= m\ddot{y} \\ \ddot{y} &= \frac{U_1}{m}(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \end{aligned}$$

3. Gaya pada sumbu z :

$$\begin{aligned} F_{fz} + F_{gz} &= m\ddot{z} \\ U_1(\cos \phi \cos \theta) - mg &= m\ddot{z} \\ \ddot{z} &= \frac{U_1}{m}(\cos \phi \cos \theta) - g \end{aligned}$$

dengan

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 K_p \Omega_i^2 = K_p \Omega_1^2 + K_p \Omega_2^2 + K_p \Omega_3^2 + K_p \Omega_4^2$$

Sehingga diperoleh model dinamik gerak translasi:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{U_1}{m} (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \ddot{y} &= \frac{U_1}{m} (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ \ddot{z} &= \frac{U_1}{m} (\cos \phi \cos \theta) - g\end{aligned}\quad (4.16)$$

4.1.3 Analisis Dinamika Gerak Rotasi

Gerak rotasi pada mini *quadrotor* adalah gerak *quadrotor* untuk melakukan *rolling*, *pitching* dan *yawing*. Dengan menggunakan formulasi Euler-Newton untuk dinamika gerak rotasi pada mini *quadrotor* diperoleh persamaan :

$$\sum \tau = \frac{d}{dt}(H) + \omega \times H \quad (4.17)$$

atau

$$\frac{d}{dt}(H) = -\omega \times H + \sum \tau \quad (4.18)$$

dengan keterangan sebagai berikut :

τ = torsi ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$)

H = Momentum angular *quadrotor* ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$)

I = Momen Inersia ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

ω = Kecepatan sudut ($\frac{\text{rad}}{\text{s}}$)

Dan momen angular didefinisikan sebagai berikut :

$$H = I\omega \quad (4.19)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.19) ke persamaan (4.18), maka diperoleh persamaan (4.20) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(H) &= -\omega \times H + \sum \tau \\ \frac{d}{dt}(I\omega) &= -\omega \times H + \sum \tau \\ I \frac{d}{dt}(\omega + \omega \times \omega) &= -\omega \times H + \sum \tau\end{aligned}\quad (4.20)$$

dengan matrik momen inersia (I) serta kecepatan angular (ω) didefinisikan sebagai berikut:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Nilai dari $\omega \times \omega = 0$ serta dari persamaan (4.21) diperoleh :

$$\frac{d}{dt}\omega = \dot{p}\hat{i} + \dot{q}\hat{j} + \dot{r}\hat{k}$$

Sehingga akan didapat nilai $\frac{d}{dt}(H)$ yaitu

$$\frac{d}{dt}(H) = I \frac{d}{dt}\omega$$

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \dot{p} \\ I_y \dot{q} \\ I_z \dot{r} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Dengan mensubstituisikan persamaan (4.21) ke persamaan (4.19) maka diperoleh nilai H yaitu :

$$H = I\omega = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x p \\ I_y q \\ I_z r \end{bmatrix}$$

Dengan H tersusun atas komponen-komponen h_x, h_y dan h_z , sehingga :

$$\begin{aligned} h_x &= I_x p \\ h_y &= I_y q \\ h_z &= I_z r \end{aligned} \quad (4.23)$$

Selanjutnya akan dicari nilai $\omega \times H$:

$$\begin{aligned} \omega \times H &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p & q & r \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p & q & r \\ I_x p & I_y q & I_z r \end{vmatrix} \\ &= (qrI_z - qrI_y)\hat{i} + (prI_x - prI_z)\hat{j} + \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$(pqI_y - pqI_x)\hat{k}$$

Sebagaimana telah diketahui bahwa

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

maka persamaan (4.24) dapat ditulis kembali menjadi :

$$\omega \times H = (\dot{\theta}\psi I_z - \dot{\theta}\psi I_y)\hat{i} + (\dot{\phi}\psi I_x - \dot{\phi}\psi I_z)\hat{j} + (\dot{\phi}\dot{\theta} I_y - \dot{\phi}\dot{\theta} I_x)\hat{k} \quad (4.25)$$

Serta $\sum \tau$ merupakan resultan momen gaya yang dihasilkan oleh masing-masing rotor pada mini *quadrotor*. Gaya dorong (*thrust*) dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^4 T_j = F_j = c_T \rho \pi R^2 (\Omega_j R^2) = c_D \rho \pi R^4 \Omega_j^2 = k_p \Omega_j^2$$

Besar komponen momen pada masing-masing sumbu x, y, z dinyatakan sebagai berikut :

1. Torsi pada sumbu x :

$$\begin{aligned} \tau_x &= \tau_{roll} = \tau_2 - \tau_4 = l(F_{right} - F_{left}) \\ &= l(F_2 - F_4) = l(k_p \Omega_2^2 - k_p \Omega_4^2) \\ &= lk_p(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \end{aligned}$$

2. Torsi pada sumbu y :

$$\begin{aligned} \tau_y &= \tau_{pitch} = \tau_1 - \tau_3 = l(F_{front} - F_{back}) \\ &= l(F_1 - F_3) = l(k_p \Omega_1^2 - k_p \Omega_3^2) \\ &= lk_p(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{aligned}$$

3. Torsi pada sumbu z :

$$\begin{aligned} \tau_z &= \tau_{yaw} = \tau_1 + \tau_3 - \tau_2 - \tau_4 \\ &= l(F_{front} + F_{back} - F_{right} - F_{left}) \\ &= l(F_1 + F_3 - F_2 - F_4) \\ &= l(k_d \Omega_1^2 + k_d \Omega_3^2 - k_d \Omega_2^2 - k_d \Omega_4^2) \\ &= lk_d(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \tau_x &= lk_p(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) = lU_2 \\ \tau_y &= lk_p(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) = lU_3 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\tau_z = lk_d(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2) = lU_4$$

dimana

K_p = koefisien gaya angkat

K_d = koefisien gaya dorong

l = panjang lengan *quadrotor*

Ω_i = kecepatan sudut rotor ke- i

$$U_2 = k_p(\Omega_2^2 - \Omega_4^2)$$

$$U_3 = k_p(\Omega_1^2 - \Omega_3^2)$$

$$U_4 = k_d(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.22), (4.25) dan (4.26) ke dalam persamaan Euler-Newton, maka didapat model dinamik lengkap untuk gerak rotasi pada masing-masing sumbu sebagai berikut :

1. Gaya pada sumbu x :

$$I \frac{d}{dt}(\omega + \omega \times \omega) = -\omega \times H + \sum \tau_x$$

$$I_x \dot{p} = -(\dot{\theta}\psi I_z - \dot{\theta}\psi I_y) + lk_p(\Omega_2^2 - \Omega_4^2)$$

$$\dot{p} = \frac{\dot{\theta}\psi(I_y - I_z) + lU_2}{I_x}$$

2. Gaya pada sumbu y :

$$I \frac{d}{dt}(\omega + \omega \times \omega) = -\omega \times H + \sum \tau_y$$

$$I_y \dot{q} = -(\dot{\phi}\psi I_x - \dot{\phi}\psi I_z) + lk_p(\Omega_1^2 - \Omega_3^2)$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{\phi}\psi(I_z - I_x) + lU_3}{I_y}$$

3. Gaya pada sumbu z :

$$I \frac{d}{dt}(\omega + \omega \times \omega) = -\omega \times H + \sum \tau_z$$

$$I_z \dot{r} = -(\dot{\phi}\dot{\theta} I_y - \dot{\phi}\dot{\theta} I_x) + lk_d(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2)$$

$$\dot{r} = \frac{\dot{\phi}\dot{\theta}(I_y - I_x) + lU_4}{I_z}$$

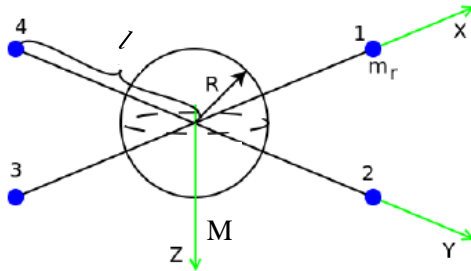
Sehingga diperoleh model dinamik gerak rotasi:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi} = \dot{p} &= \frac{\dot{\theta}\dot{\psi}(I_y - I_z) + lU_2}{I_x} \\
 \ddot{\theta} = \dot{q} &= \frac{\dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_x) + lU_3}{I_y} \\
 \ddot{\psi} = \dot{r} &= \frac{\dot{\phi}\dot{\theta}(I_y - I_x) + lU_4}{I_z}
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

4.1.4 Momen Inersia *Quadrotor*

Ada beberapa asumsi yang diberikan sebelum menghitung momen inersia terhadap sumbu X_B dan Y_B dari *quadrotor*, dapat dilihat pada Gambar 4.5, yaitu :

- Motor M_1 dan M_2 berbentuk batang dengan panjang lengan (l) dan massa (m_r).
- Badan tengah dari *quadrotor* juga berbentuk bola pejal dengan jari-jari (R) dan massa (M).



Gambar 4. 5 Momen Inersia pada sumbu X_B , Y_B dan Z_B

Berdasarkan persamaan (2.5) dan Tabel 2.6 no.6 dengan asumsi yang telah diberikan, maka momen inersia terhadap sumbu X_B dan Y_B sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 I_x &= {}^2I_x + {}^4I_x + {}^sI_x = l^2m_r + l^2m_r + \frac{2}{5}MR^2 \\
 I_y &= {}^2I_y + {}^4I_y + {}^sI_y = l^2m_r + l^2m_r + \frac{2}{5}MR^2
 \end{aligned}$$

Untuk sumbu Z_B perlu mempertimbangkan empat rotor, sehingga :

$$I_z = \sum_{j=1}^4 j I_z + s I_z = \sum_{j=1}^4 j (l^2 m_r) + \frac{2}{5} MR^2$$

Momen inersia pada masing-masing sumbu dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} I_x &= 2l^2 m_r + \frac{2}{5} MR^2 \\ I_y &= 2l^2 m_r + \frac{2}{5} MR^2 \\ I_z &= 4l^2 m_r + \frac{2}{5} MR^2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.1.5 Model Dinamik dalam Bentuk Persamaan State-Space

Setelah melakukan penurunan persamaan dari beberapa asumsi yang telah ditentukan, didapat model dinamik gerak translasi dan rotasi secara lengkap sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{U_1}{m} (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \ddot{y} &= \frac{U_1}{m} (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ \ddot{z} &= \frac{U_1}{m} (\cos \phi \cos \theta) - g \\ \ddot{\phi} &= \frac{\dot{\theta} \dot{\psi} (I_y - I_z) + l U_2}{I_x} \\ \ddot{\theta} &= \frac{\dot{\phi} \dot{\psi} (I_z - I_x) + l U_3}{I_y} \\ \ddot{\psi} &= \frac{\dot{\phi} \dot{\theta} (I_y - I_x) + l U_4}{I_z} \end{aligned} \quad (4.29)$$

dengan sistem input sebagai berikut :

$$\begin{cases} U_1 = K_p (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_2 = k_p (\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\ U_3 = k_p (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ U_4 = K_d (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{cases} \quad (4.30)$$

Model dinamik gerak translasi dan gerak rotasi pada persamaan (4.29) dapat ditulis kembali dalam bentuk persamaan *state-space* :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

dimana x adalah state vektor dan u adalah input vektor.

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_{12}]^T \in R^{12}$$

$$x_1 = \phi, \quad x_2 = \dot{\phi} = \dot{\phi}, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \dot{\theta} = \dot{\theta}$$

$$x_5 = \psi, \quad x_6 = \dot{\psi} = \dot{\psi}, \quad x_7 = z, \quad x_8 = \dot{z} = \dot{z}$$

$$x_9 = x, \quad x_{10} = \dot{x} = \dot{x}, \quad x_{11} = y, \quad x_{12} = \dot{y} = \dot{y}$$

$$\text{dan } U = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T$$

sehingga persamaan (4.29) dapat ditulis kembali dalam persamaan *state-space* dari model dinamik sebagai berikut :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + b_1 U_2$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = a_2 x_2 x_6 + b_2 U_3$$

$$\dot{x}_5 = x_6$$

$$\dot{x}_6 = a_3 x_2 x_4 + b_3 U_4$$

$$\dot{x}_7 = x_8$$

$$\dot{x}_8 = \frac{U_1}{m} (\cos \phi \cos \theta) - g \quad (4.31)$$

$$\dot{x}_9 = x_{10}$$

$$\dot{x}_{10} = \frac{U_1}{m} u_x$$

$$\dot{x}_{11} = x_{12}$$

$$\dot{x}_{12} = \frac{U_1}{m} u_y$$

dimana

$$a_1 = \frac{(I_y - I_z)}{I_x}, \quad a_2 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y}, \quad a_3 = \frac{(I_y - I_x)}{I_z}$$

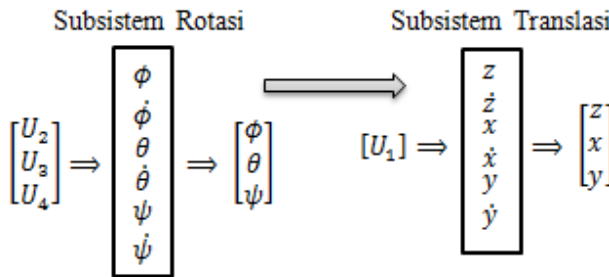
$$b_1 = \frac{l}{I_x}, \quad b_2 = \frac{l}{I_y}, \quad b_3 = \frac{l}{I_z}$$

$$u_x = (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)$$

$$u_y = (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)$$

4.2 Perancangan Sistem Kontrol

Perancangan controller *backstepping* didesain berdasarkan subsistem seperti yang terlihat pada Gambar 4.6. Ada dua subsistem pada perancangan sistem mini *quadrotor* yaitu subsistem rotasi untuk mengatur sudut *roll*, *pitch* dan *yaw* serta subsistem translasi untuk mencari ketinggian (z) dan posisi (x dan y).



Gambar 4. 6 Diagram Perancangan Kontrol *Backstepping*

4.2.1 Perancangan Kontrol *Backstepping* untuk Subsistem Rotasi

Berdasarkan Gambar 4.6 dalam merancang kontrol *backstepping* dapat dilakukan per subsistem yaitu pertama dari subsistem rotasi mencari sinyal kontrol dari sudut. Sudut *roll*, *pitch*, dan *yaw* pada mini *quadrotor* merupakan sudut yang menyebabkan mini *quadrotor* melintas pada sumbu x, y , dan z . Pengaturan masing-masing sudut dilakukan dengan mengatur dinamika rotasi pada mini *quadrotor*. Berikut akan dijabarkan perancangan kontrol *backstepping* untuk subsistem rotasi.

Persamaan *state-space* untuk subsistem rotasi yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ a_1 x_4 x_6 + b_1 U_2 \\ x_4 \\ a_2 x_2 x_6 + b_2 U_3 \\ x_6 \\ a_3 x_2 x_4 + b_3 U_4 \end{bmatrix}$$

Tulis kembali persamaan *state-space* ke dalam bentuk persamaan :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ a_1 x_4 x_6 + b_1 U_2 \\ a_2 x_2 x_6 + b_2 U_3 \\ a_3 x_2 x_4 + b_3 U_4 \end{bmatrix}$$

Jika dipilih state vektor

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

Maka akan didapatkan sebuah persamaan *state-space* baru dari subsistem rotasi sebagaimana dinyatakan pada persamaan berikut :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{J} \\ \dot{\mathbf{j}} &= \mathbf{f}_a(\mathbf{H}, \mathbf{J}) + \mathbf{g}_a \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.32)$$

dimana

$$\mathbf{f}_a = \begin{bmatrix} a_1 x_4 x_6 \\ a_2 x_2 x_6 \\ a_3 x_2 x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_a = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

Kemudian jika dipilih

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_a^{-1} [\mathbf{u}_a - \mathbf{f}_a(\mathbf{H}, \mathbf{J})] \quad (4.33)$$

maka persamaan (4.32) akan menjadi lebih sederhana sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{J} \\ \dot{\mathbf{j}} &= \mathbf{u}_a \end{aligned} \quad (4.34)$$

Langkah-langkah desain kontrol *backstepping* adalah :

Pertama, menentukan tracking error untuk mencari error dari masing-masing sudut.

$$e_1 = \mathbf{H}_d - \mathbf{H} \quad (4.35)$$

Menggunakan fungsi Lyapunov untuk menguji kestabilan sistem, dimana $V(e_1)$ adalah definit positif dan $\dot{V}(e_1)$ adalah definit negatif.

$$V(e_1) = \frac{1}{2} e_1^2 \quad (4.36)$$

Turunan pertama dari fungsi Lyapunov adalah :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1) &= e_1 \dot{e}_1 \\ &= e_1 (\dot{\mathbf{H}}_d - \dot{\mathbf{H}}) \\ &= e_1 (\dot{\mathbf{H}}_d - \mathbf{J}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Untuk memperoleh e_1 yang stabil maka dapat diperoleh dengan \mathbf{J} sebagai sebuah variabel yang disebut dengan kontrol input virtual :

$$\mathbf{J} = \phi_1(e_1) = \dot{\mathbf{H}}_d + \alpha_1 e_1 \quad (4.38)$$

dimana $\alpha_1 > 0$, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1) &= e_1 (\dot{\mathbf{H}}_d - \mathbf{J}) \\ &= e_1 (\dot{\mathbf{H}}_d - (\dot{\mathbf{H}}_d + \alpha_1 e_1)) \\ &= e_1 (-\alpha_1 e_1) \\ &= -\alpha_1 e_1^2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Langkah kedua untuk melakukan *backstepping* digunakan *variable of change* :

$$\begin{aligned} e_2 &= \mathbf{J} - \phi_1(e_1) \\ &= \mathbf{J} - \dot{\mathbf{H}}_d - \alpha_1 e_1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

dipilih

$$\dot{\mathbf{H}}_d = \mathbf{J} - e_2 - \alpha_1 e_1$$

Kemudian untuk fungsi Lyapunov yang diperluas untuk menstabilkan keseluruhan sistem sebagaimana dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$\begin{aligned} V(e_1, e_2) &= V(e_1) + \frac{1}{2} e_2^2 \\ &= \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Turunan pertama dari fungsi Lyapunov yang diperluas adalah:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e_1, e_2) &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \\
 &= e_1(\dot{H}_d - \dot{H}) + e_2(\dot{J} - \dot{H}_d - \alpha_1 \dot{e}_1) \\
 &= e_1((J - e_2 - \alpha_1 e_1) - J) + e_2(u_a - \dot{H}_d - \alpha_1(\dot{H}_d - \dot{H})) \\
 &= e_1(-e_2 - \alpha_1 e_1) + e_2(u_a - \dot{H}_d - \alpha_1(-e_2 - \alpha_1 e_1)) \\
 &= -e_1 e_2 - \alpha_1 e_1^2 + e_2 u_a - e_2 \dot{H}_d + e_2 \alpha_1 (e_2 + \alpha_1 e_1) \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Stabilisasi keseluruhan sistem diperoleh dengan mengambil

$$u_a = e_1 - \alpha_1(e_2 + \alpha_1 e_1) - \alpha_2 e_2 \quad (4.43)$$

dimana $\alpha_2 > 0$ dan $\dot{H}_d = 0$, sehingga didapatkan

$$\dot{V}(e_1, e_2) = -\alpha_1 e_1^2 - \alpha_2 e_2^2 \quad (4.44)$$

yang memenuhi $\dot{V}(e_1, e_2) < 0$.

Kontrol input u diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (4.43) ke dalam persamaan (4.33), sehingga didapatkan :

$$\begin{aligned}
 u &= g_a^{-1}[u_a - f_a(H, J)] \\
 &= g_a^{-1}[e_1 - \alpha_1(e_2 + \alpha_1 e_1) - \alpha_2 e_2 - f_a(H, J)] \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan

$$\begin{aligned}
 u &= \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}, \quad g_a = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}, \quad f_a = \begin{bmatrix} a_1 x_4 x_6 \\ a_2 x_2 x_6 \\ a_3 x_2 x_4 \end{bmatrix} \\
 e_1 &= \begin{bmatrix} e_{1a} \\ e_{1b} \\ e_{1c} \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} e_{2a} \\ e_{2b} \\ e_{2c} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ke dalam persamaan (4.45) yaitu persamaan *control input* maka diperoleh persamaan *control input* secara lengkap sebagaimana dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \frac{1}{b_1} (e_{1a} - \alpha_1(e_{2a} + \alpha_1 e_{1a}) - \alpha_2 e_{2a} - a_1 x_4 x_6) \\
 U_3 &= \frac{1}{b_2} (e_{1b} - \alpha_1(e_{2b} + \alpha_1 e_{1b}) - \alpha_2 e_{2b} - a_2 x_2 x_6) \quad (4.46) \\
 U_4 &= \frac{1}{b_3} (e_{1c} - \alpha_1(e_{2c} + \alpha_1 e_{1c}) - \alpha_2 e_{2c} - a_3 x_2 x_4)
 \end{aligned}$$

4.2.2 Perancangan Kontrol *Backstepping* untuk Subsistem Translasi

Berdasarkan Gambar 4.6 setelah dilakukan kontrol *backstepping* untuk subsistem rotasi, selanjutnya akan dirancang kontrol *backstepping* dari subsistem translasi untuk mencari sinyal kontrol dari ketinggian dan posisi x dan y . Pengaturan ketinggian serta posisi x dan y dilakukan dengan mengatur dinamika translasi pada mini *quadrotor*. Berikut akan dijabarkan perancangan kontrol *backstepping* untuk subsistem translasi.

Persamaan *state-space* untuk subsistem translasi yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_8 \\ \frac{U_1}{m} (\cos x_1 \cos x_3) - g \\ x_{10} \\ \frac{U_1}{m} u_x \\ x_{12} \\ \frac{U_1}{m} u_y \end{bmatrix}$$

Tulis kembali persamaan *state-space* ke dalam bentuk persamaan :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_8 \\ x_{10} \\ x_{12} \\ \frac{U_1}{m} (\cos x_1 \cos x_3) - g \\ \frac{U_1}{m} u_x \\ \frac{U_1}{m} u_y \end{bmatrix}$$

Jika dipilih *state vektor*

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_9 \\ x_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} x_8 \\ x_{10} \\ x_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

maka akan didapatkan sebuah persamaan *state-space* baru dari subsistem translasi sebagaimana dinyatakan pada persamaan berikut :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{L} \\ \dot{\mathbf{L}} &= \mathbf{f}_a(K, L) + \mathbf{g}_a \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.47)$$

dimana

$$\mathbf{f}_a = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_a = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} (\cos x_1 \cos x_3) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} U_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} U_1 \end{bmatrix}$$

Kemudian jika dipilih

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_a^{-1} [\mathbf{u}_a - \mathbf{f}_a(K, L)] \quad (4.48)$$

maka persamaan (4.47) akan menjadi lebih sederhana sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{L} \\ \dot{\mathbf{L}} &= \mathbf{u}_a \end{aligned} \quad (4.49)$$

Langkah-langkah desain kontrol *backstepping* adalah :

Pertama, Pertama, menentukan tracking error untuk mencari error.

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{K}_d - \mathbf{K} \quad (4.50)$$

Menggunakan fungsi Lyapunov untuk menguji kenstabilan sistem, dimana $V(e_3)$ adalah definit positif dan $\dot{V}(e_3)$ adalah definit negatif.

$$V(e_3) = \frac{1}{2} e_3^2 \quad (4.51)$$

Turunan pertama dari fungsi Lyapunov adalah :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_3) &= e_3 \dot{e}_3 \\ &= e_3 (\dot{\mathbf{K}}_d - \dot{\mathbf{K}}) \\ &= e_3 (\dot{\mathbf{K}}_d - \mathbf{L}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Untuk memperoleh e_3 yang stabil maka dapat diperoleh dengan \mathbf{J} sebagai sebuah variabel yang disebut dengan kontrol input virtual :

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\varphi}_1(e_3) = \dot{\mathbf{K}}_d + \boldsymbol{\beta}_1 e_3 \quad (4.53)$$

dimana $\beta_1 > 0$, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\dot{V}(e_3) &= e_3(\dot{K}_d - L) \\ &= e_3(\dot{K}_d - (\dot{K}_d + \beta_1 e_3)) \\ &= e_3(-\beta_1 e_3) \\ &= -\beta_1 e_3^2\end{aligned}\quad (4.54)$$

yang memenuhi $\dot{V}(e_3) < 0$.

Langkah kedua untuk melakukan *backstepping* digunakan *variable of change* :

$$\begin{aligned}e_4 &= L - \varphi_1(e_4) \\ &= L - \dot{K}_d - \beta_1 e_3\end{aligned}\quad (4.55)$$

dipilih

$$\dot{K}_d = L - e_4 - \beta_1 e_3$$

Kemudian untuk fungsi Lyapunov yang diperluas untuk menstabilkan keseluruhan sistem sebagaimana dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$\begin{aligned}V(e_3, e_4) &= V(e_3) + \frac{1}{2}e_4^2 \\ &= \frac{1}{2}e_3^2 + \frac{1}{2}e_4^2\end{aligned}\quad (4.56)$$

Turunan pertama dari fungsi Lyapunov yang diperluas adalah:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e_3, e_4) &= e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 \\ &= e_3(\dot{K}_d - L) + e_4(\dot{L} - \ddot{K}_d - \beta_1 \dot{e}_3) \\ &= e_3((L - e_4 - \beta_1 e_3) - L) + e_4(\mathbf{u}_a - \ddot{K}_d - \beta_1(\dot{K}_d - \dot{K})) \\ &= e_3(-e_4 - \beta_1 e_3) + e_4(\mathbf{u}_a - \ddot{K}_d - \beta_1(-e_4 - \beta_1 e_3)) \\ &= -e_3 e_4 - \beta_1 e_3^2 + e_4 \mathbf{u}_a - e_4 \ddot{K}_d + e_4 \beta_1 (e_4 + \beta_1 e_3)\end{aligned}\quad (4.57)$$

Stabilisasi keseluruhan sistem diperoleh dengan mengambil

$$\mathbf{u}_a = e_3 - \beta_1 (e_4 + \beta_1 e_3) - \beta_2 e_4\quad (4.58)$$

dimana $\beta_2 > 0$ dan $\ddot{K}_d = 0$, sehingga didapatkan

$$\dot{V}(e_3, e_4) = -\beta_1 e_3^2 - \beta_2 e_4^2\quad (4.59)$$

yang memenuhi $\dot{V}(e_3, e_4) < 0$.

Control input \mathbf{u} diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (4.58) ke dalam persamaan (4.48), sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{g}_a^{-1}[\mathbf{u}_a - \mathbf{f}_a(K, L)] \\ &= \mathbf{g}_a^{-1}[e_3 - \beta_1(e_4 + \beta_1 e_3) - \beta_2 e_4 - \mathbf{f}_a(K, L)]\end{aligned}\quad (4.60)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_a &= \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_3 &= \begin{bmatrix} e_{3a} \\ e_{3b} \\ e_{3c} \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_4 &= \begin{bmatrix} e_{4a} \\ e_{4b} \\ e_{4c} \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} U_1 \\ U_x \\ U_y \end{bmatrix}, & \mathbf{g}_a &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m}(\cos x_1 \cos x_3) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}U_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m}U_1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ke dalam persamaan (4.60) yaitu persamaan *control input* maka diperoleh persamaan \mathbf{U} secara lengkap sebagaimana dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$\begin{aligned}U_1 &= \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} (e_{3a} - \beta_1(e_{4a} + \beta_1 e_{3a}) - \beta_2 e_{4a} + g) \\ u_x &= \frac{m}{U_1} (e_{3b} - \beta_1(e_{4b} + \beta_1 e_{3b}) - \beta_2 e_{4b}) \\ u_y &= \frac{m}{U_1} (e_{3c} - \beta_1(e_{4c} + \beta_1 e_{3c}) - \beta_2 e_{4c})\end{aligned}\quad (4.61)$$

4.3 Simulasi Sistem Kontrol Backstepping dengan Simulink Matlab

Simulasi sistem dilakukan untuk mengamati karakteristik respon sistem. Spesifikasi pengamatan respon sistem yaitu :

○ Persen lewatan maksimum (*Maximum overshoot / M_p*)

Adalah harga puncak maksimum dari kurva respon yang diukur dari satu. Jika harga keadaan tunak, respon tidak sama dengan satu, maka bisa digunakan persen lewatan maksimum. Parameter ini didefinisikan sebagai :

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

o Waktu penetapan (*Settling Time / t_s*)

Adalah waktu yang diperlukan kurva respon untuk mencapai dan menetap dalam daerah di sekitar harga akhir yang ukurannya ditentukan dengan presentase mutlak dari harga akhir (biasanya 10 % atau 20 %).

Selain menggunakan fungsi Lyapunov, kestabilan pada sistem dapat diuji dengan mencari nilai karakteristik sistem. Jika semua bagian real dari karakteristik nilai eigen bernilai negatif, maka sistem mengalami kestabilan dinamik. Rumus untuk mendapatkan nilai eigen sebagai berikut :

$$|\lambda I - A| = 0$$

Berdasarkan persamaan yang telah diperoleh pada persamaan (4.31) maka model dinamik gerak *quadrotor*:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + b_1 U_2$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = a_2 x_2 x_6 + b_2 U_3$$

$$\dot{x}_5 = x_6$$

$$\dot{x}_6 = a_3 x_2 x_4 + b_3 U_4$$

$$\dot{x}_7 = x_8$$

$$\dot{x}_8 = \frac{U_1}{m} (\cos \phi \cos \theta) - g$$

$$\dot{x}_9 = x_{10}$$

$$\dot{x}_{10} = \frac{U_1}{m} u_x$$

$$\dot{x}_{11} = x_{12}$$

$$\dot{x}_{12} = \frac{U_1}{m} u_y$$

dengan :

$$U_1 = \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} (e_3 - \beta_1(e_4 + \beta_1 e_3) - \beta_2 e_4 + g)$$

$$U_2 = \frac{1}{b_1} (e_{1a} - \alpha_1(e_{2a} + \alpha_1 e_{1a}) - \alpha_2 e_{2a} - a_1 x_4 x_6)$$

$$U_3 = \frac{1}{b_2} (e_{1b} - \alpha_1(e_{2b} + \alpha_1 e_{1b}) - \alpha_2 e_{2b} - a_2 x_2 x_6)$$

$$U_4 = \frac{1}{b_3} (e_{1c} - \alpha_1(e_{2c} + \alpha_1 e_{1c}) - \alpha_2 e_{2c} - a_3 x_2 x_4)$$

$$u_x = \frac{m}{U_1} (e_{3b} - \beta_1(e_{4b} + \beta_1 e_{3b}) - \beta_2 e_{4b})$$

$$u_y = \frac{m}{U_1} (e_{3c} - \beta_1(e_{4c} + \beta_1 e_{3c}) - \beta_2 e_{4c})$$

dan

$$e_1 = H_d - H$$

$$e_2 = J - \dot{H}_d - \alpha_1 e_1$$

$$e_3 = K_d - K$$

$$e_4 = L - \dot{K}_d - \beta_1 e_3$$

$$H = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_9 \\ x_{11} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} x_8 \\ x_{10} \\ x_{12} \end{bmatrix}$$

Nilai parameter dari *quadrotor* yang digunakan diberikan pada Tabel 4.2 :

Tabel 4. 2 Nilai Parameter Quadrotor

Massa rotor (kg)	m	0.078
Massa total (kg)	M	0.686
Panjang lengan quadrotor (m)	l	0.35
Radius tengah quadrotor (m)	R	0.15
Momen inersia sumbu x (kg.m ²)	I_x	0.0252
Momen inersia sumbu y (kg.m ²)	I_y	0.0252
Momen inersia sumbu z (kg.m ²)	I_z	0.0443
$a_1 = \frac{(I_y - I_z)}{I_x}$		-0.7579

$a_2 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y}$	0.7579
$a_3 = \frac{(I_y - I_x)}{I_z}$	0
$b_1 = \frac{l}{I_x}$	13.8889
$b_2 = \frac{l}{I_y}$	13.8889
$b_3 = \frac{l}{I_z}$	7.9006

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.31) dengan *control input* yang telah diperoleh, maka persamaan menjadi :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & (-1 - \alpha_{1a}\alpha_{2a})x_1 - (\alpha_{1a} + \alpha_{2a})x_2 \\ & + (1 + \alpha_{1a}\alpha_{2a})x_{1d}(1 + \alpha_{1a})\dot{x}_{1d} \end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & (-1 - \alpha_{1b}\alpha_{2b})x_3 - (\alpha_{1b} + \alpha_{2b})x_4 \\ & + (1 + \alpha_{1b}\alpha_{2b})x_{3d}(1 + \alpha_{1b})\dot{x}_{3d} \end{aligned}$$

$$\dot{x}_5 = x_6$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 = & (-1 - \alpha_{1c}\alpha_{2c})x_5 - (\alpha_{1c} + \alpha_{2c})x_6 \\ & + (1 + \alpha_{1c}\alpha_{2c})x_{5d}(1 + \alpha_{1c})\dot{x}_{5d} \end{aligned}$$

$$\dot{x}_7 = x_8$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_8 = & (-1 - \beta_{1a}\beta_{2a})x_7 - (\beta_{1a} + \beta_{2a})x_8 \\ & + (1 + \beta_{1a}\beta_{2a})x_{7d}(1 + \beta_{1a})\dot{x}_{7d} \end{aligned}$$

$$\dot{x}_9 = x_{10}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{10} = & (-1 - \beta_{1b}\beta_{2b})x_9 - (\beta_{1b} + \beta_{2b})x_{10} \\ & + (1 + \beta_{1b}\beta_{2b})x_{9d}(1 + \beta_{1b})\dot{x}_{9d} \end{aligned}$$

$$\dot{x}_{11} = x_{12}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{12} = & (-1 - \beta_{1c}\beta_{2c})x_{11} - (\beta_{1c} + \beta_{2c})x_{12} \\ & + (1 + \beta_{1c}\beta_{2c})x_{11d}(1 + \beta_{1c})\dot{x}_{11d} \end{aligned}$$

Jika persamaan diatas dibentuk dalam matriks ruang keadaan $\dot{x} = Ax + Bu$ dengan

A = matriks keadaan

B = matriks input

maka :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1 + \alpha_{1a}\alpha_{2a}) & -(\alpha_{1a} + \alpha_{2a}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \alpha_{1b}\alpha_{2b}) & -(\alpha_{1b} + \alpha_{2b}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \alpha_{1c}\alpha_{2c}) & -(\alpha_{1c} + \alpha_{2c}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \beta_{1a}\beta_{2a}) & -(\beta_{1a} + \beta_{2a}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \beta_{1b}\beta_{2b}) & -(\beta_{1b} + \beta_{2b}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \beta_{1c}\beta_{2c}) & -(\beta_{1c} + \beta_{2c}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \alpha_{1a}\alpha_{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha_{1b}\alpha_{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \alpha_{1c}\alpha_{2c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \beta_{1a}\beta_{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \beta_{1b}\beta_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \beta_{1c}\beta_{2c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1d} \\ x_{3d} \\ x_{5d} \\ x_{7d} \\ x_{9d} \\ x_{11d} \end{bmatrix}$$

Output yang diharapkan ada enam, yaitu x_1 adalah sudut *roll* (ϕ), x_3 adalah sudut *pitch* (θ), x_5 adalah sudut *yaw* (ψ), x_7 adalah ketinggian (z), x_9 adalah posisi x dan x_{11} adalah posisi y . Berikut adalah matriks output sistem :

$$y = Cx$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_9 \\ x_{11} \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh matriks A , B dan C sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -(1 + \alpha_{1a}\alpha_{2a}) & -(\alpha_{1a} + \alpha_{2a}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -(1 + \alpha_{1b}\alpha_{2b}) & -(\alpha_{1b} + \alpha_{2b}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \alpha_{1c}\alpha_{2c}) & -(\alpha_{1c} + \alpha_{2c}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \beta_{1a}\beta_{2a}) & -(\beta_{1a} + \beta_{2a}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \beta_{1b}\beta_{2b}) & -(\beta_{1b} + \beta_{2b}) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \beta_{1c}\beta_{2c}) & -(\beta_{1c} + \beta_{2c}) & 0
 \end{bmatrix}$$

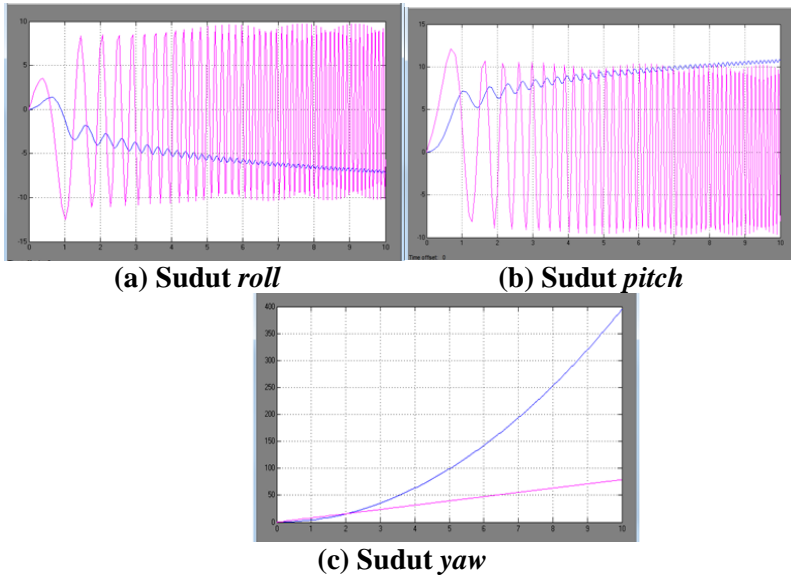
$$B = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 + \alpha_{1a}\alpha_{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 + \alpha_{1b}\alpha_{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 + \alpha_{1c}\alpha_{2c} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 + \beta_{1a}\beta_{2a} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \beta_{1b}\beta_{2b} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \beta_{1c}\beta_{2c}
 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

4.3.1 Representasi Diagram Blok pada Sistem Awal

Pada tahap ini, akan dilakukan simulasi sistem tanpa adanya kontrol. Dikarenakan sistem awal bersifat non-linier maka akan digunakan simulink untuk mempermudah membuat grafik. Simulasi sistem awal tanpa adanya kontrol dapat dilihat pada Lampiran 1. Hasil simulasi pada keluaran sistem awal tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.7 dan Gambar 4.8.

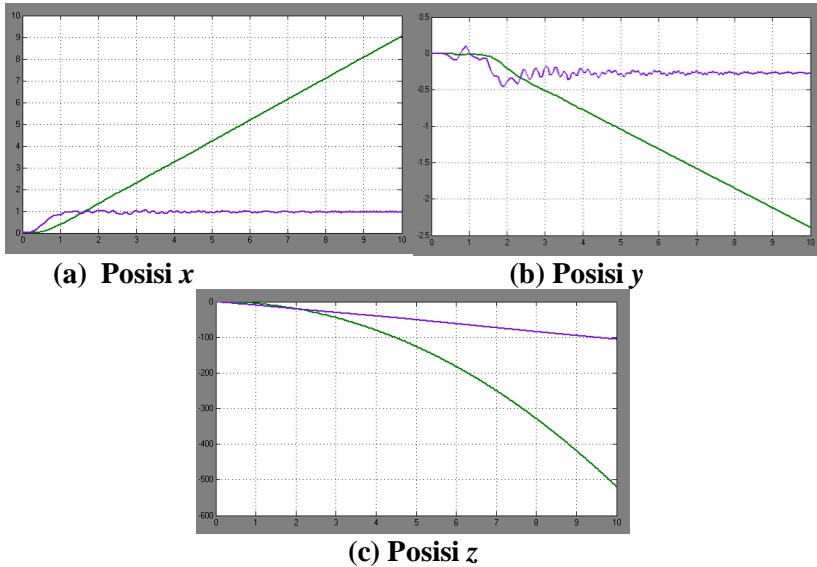


Gambar 4. 7 Hasil Simulasi untuk Subsisitem Rotasi

Hasil simulasi pada Gambar 4.7 (a) untuk sudut *roll*, (b) untuk sudut *pitch* dan (c) untuk sudut *yaw*. Untuk subsistem rotasi pada sumbu vertikal menunjukkan besar sudut dalam satuan rad dan laju kecepatan sudut sedangkan pada sumbu horizontal menunjukkan waktu dengan satuan detik. Simulasi di atas dilakukan dengan $t_0 = 0$ hingga $t_f = 10$ detik. Hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa grafik (a) dan (b) mengalami osilasi yang besar, yang memiliki rentang *overshoot* pada puncak $10 \leq o_s \leq -10$, dengan kata lain nilai *overshoot*-nya lebih dari 20%. Sedangkan grafik (c) mengalami kenaikan terus-menerus.

Sedangkan hasil simulasi pada Gambar 4.8 (a) untuk posisi x , (b) untuk posisi y dan (c) untuk posisi z . Untuk subsistem translasi pada sumbu vertikal menunjukkan posisi *quadrotor* dan laju kecepatan *quadrotor* sedangkan pada sumbu horizontal menunjukkan waktu dengan satuan detik. Simulasi di atas dilakukan dengan $t_0 = 0$ hingga $t_f = 10$ detik. Pada Gambar 4.7

dan Gambar 4.8 terlihat bahwa sistem tidak terkendali, sehingga tidak dapat dilakukan pengamatan karakteristik respon pada sistem.



Gambar 4. 8 Hasil Simulasi untuk Subsisitem Translasi

4.3.2 Representasi Sistem Dengan Kontrol *Backstepping*

Sistem yang telah dikontrol dengan metode *backstepping* akan dilakukan simulasi. Pada saat melakukan simulasi, karakteristik respon sistem utama yang diamati adalah waktu dimana sistem mencapai kondisi stabil (t_s) sesuai dengan *setpoint* yang ditentukan dan *overshoot* (o_s). *Overshoot* yaitu *error* yang terjadi antara keluaran sistem dengan *setpoint* yang telah ditentukan. Model sistem secara keseluruhan setelah dikontrol dengan metode *backstepping* sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

dengan matriks A , B dan C sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -(1 + \alpha_{1a}\alpha_{2a}) & -(\alpha_{1a} + \alpha_{2a}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -(1 + \alpha_{1b}\alpha_{2b}) & -(\alpha_{1b} + \alpha_{2b}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \alpha_{1c}\alpha_{2c}) & -(\alpha_{1c} + \alpha_{2c}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \beta_{1a}\beta_{2a}) & -(\beta_{1a} + \beta_{2a}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \beta_{1b}\beta_{2b}) & -(\beta_{1b} + \beta_{2b}) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \beta_{1c}\beta_{2c}) & -(\beta_{1c} + \beta_{2c}) & 0
 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 + \alpha_{1a}\alpha_{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 + \alpha_{1b}\alpha_{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 + \alpha_{1c}\alpha_{2c} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 + \beta_{1a}\beta_{2a} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \beta_{1b}\beta_{2b} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \beta_{1c}\beta_{2c}
 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

Seperti yang terlihat pada matriks A dan matriks B , semua nilai ditentukan oleh besarnya α dan β . Untuk nilai α , α_{1a} dan α_{2a} mempengaruhi besarnya sudut *roll*, α_{1b} dan α_{2b} mempengaruhi besarnya sudut *pitch*, serta α_{1c} dan α_{2c} mempengaruhi besarnya sudut *yaw*. Untuk nilai β , β_{1a} dan β_{2a} mempengaruhi ketinggian (z), β_{1b} dan β_{2b} mempengaruhi posisi x serta β_{1c} dan β_{2c} mempengaruhi posisi y . Berikut *trial*

and error untuk nilai α dapat dilihat pada Tabel 4.3 dan β dapat dilihat pada Tabel 4.4.

Tabel 4. 3 Trial and error untuk nilai α

No	α_{1a}	α_{2a}	α_{1b}	α_{2b}	α_{1c}	α_{2c}
1	0.01	0.01	0.03	0.03	0.05	0.05
2	0.05	10	0.07	20	0.09	30
3	10	10	20	20	30	30
4	10	0.1	20	0.1	30	0.1
5	0.1	0.1	0.5	0.5	0.9	0.9
6	10	1	20	1	30	1
7	3	1	5	1	7	1
8	0.01	1	0.05	1	0.09	1
9	0.1	1	0.5	1	0.9	1

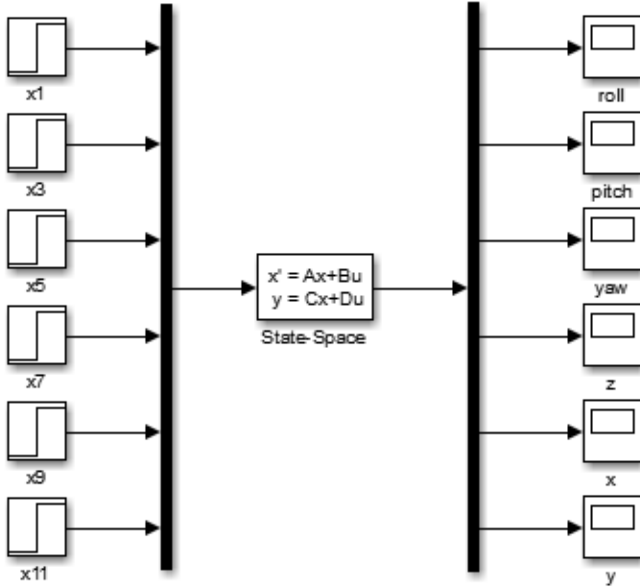
Tabel 4. 4 Trial and error untuk nilai β

No	β_{1a}	β_{2a}	β_{1b}	β_{2b}	β_{1c}	β_{2c}
1	0.01	100	0.02	100	0.03	100
2	0.01	30	0.02	50	0.03	70
3	30	30	50	50	70	70
4	0.1	30	0.2	50	0.3	70
5	0.1	10	0.2	10	0.3	10
6	1	10	2	10	3	10

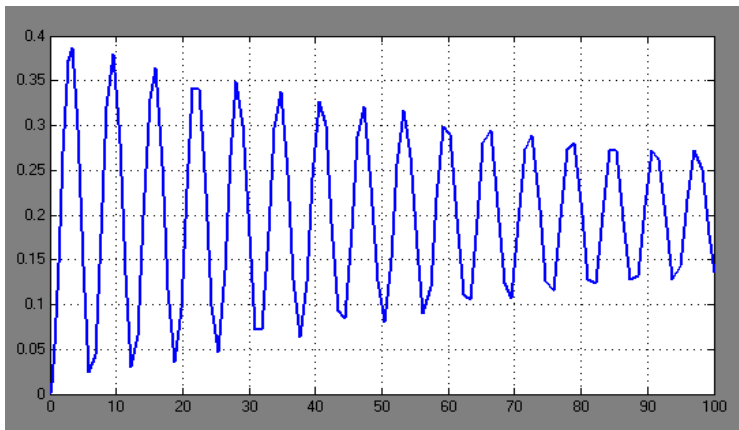
Simulasi untuk sistem yang telah dikontrol dapat dilihat pada Gambar 4.9. Hasil simulasi untuk subsistem rotasi pada sumbu vertikal menunjukkan besar sudut dalam satuan rad dan pada sumbu horizontal menunjukkan waktu dengan satuan detik. Sedangkan untuk subsistem translasi pada sumbu vertikal menunjukkan posisi *quadrotor* dan pada sumbu horizontal menunjukkan waktu dengan satuan detik.

Simulasi pada percobaan pertama di atas dilakukan dengan $t_0 = 0$ hingga $t_f = 100$ detik. Pada Gambar 4.10 merupakan hasil simulasi pada sudut *roll* dengan setpoint yang diberikan adalah sebesar 0.2 rad dan dengan nilai $\alpha_{1a} = 0.01$ dan $\alpha_{2a} = 0.01$. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa grafik mengalami osilasi yang semakin mengecil dari nol detik sampai

100 detik. Osilasi pada grafik memiliki rentang *overshoot* pada puncak $0.02 \leq o_s \leq 0.39$, dengan kata lain nilai *overshoot*-nya lebih dari 20% maka nilai α tidak dapat digunakan.

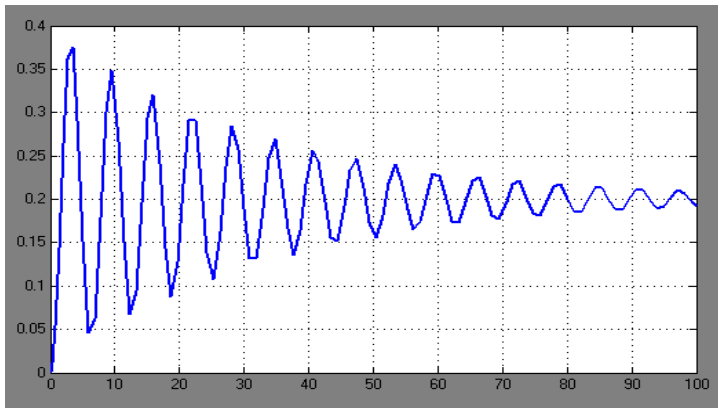


Gambar 4. 9 Diagram Blok Sistem Akhir

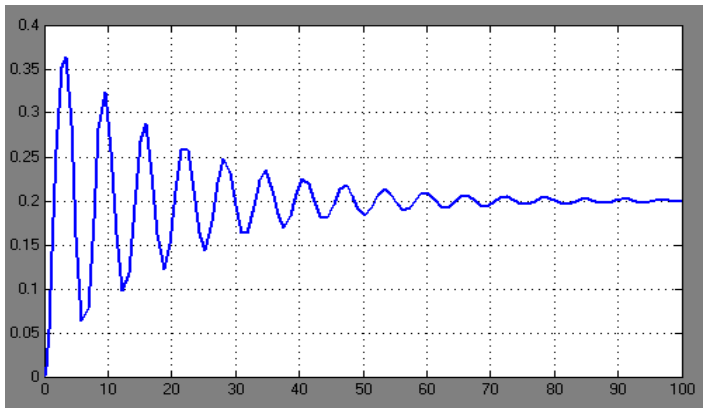


Gambar 4. 10 Hasil simulasi percobaan pertama pada sudut *roll*

Pada Gambar 4.11 merupakan hasil simulasi pada sudut *pitch* dengan setpoint yang diberikan adalah sebesar 0.2 rad dan dengan nilai $\alpha_{1b} = 0.03$ dan $\alpha_{2b} = 0.03$. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa grafik mengalami osilasi yang semakin mengecil dari detik pertama sampai 100 detik. Osilasi pada grafik memiliki rentang *overshoot* pada puncak $0.05 \leq o_s \leq 0.37$, dengan kata lain nilai *overshoot*-nya lebih dari 20% maka nilai α tidak dapat digunakan.

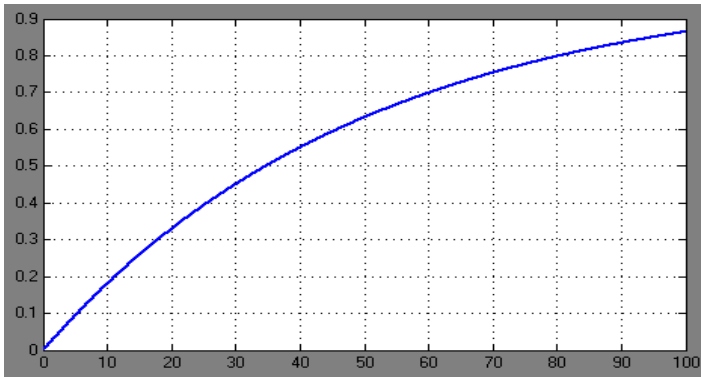


Gambar 4. 11 Hasil simulasi percobaan pertama pada sudut *pitch*



Gambar 4. 12 Hasil simulasi percobaan pertama pada sudut *yaw*

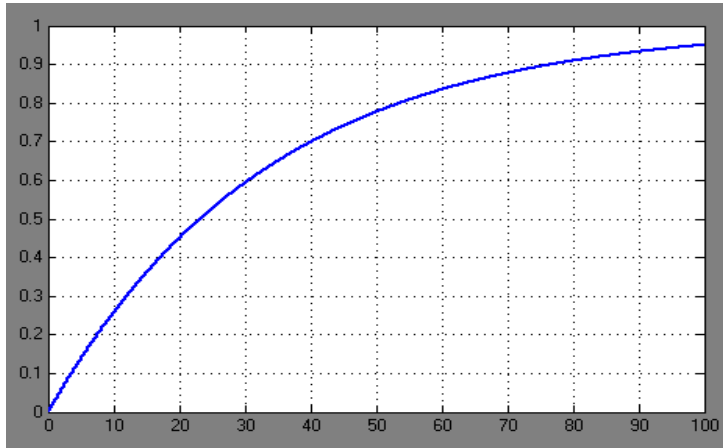
Hasil simulasi pada sudut *yaw* ditunjukkan pada Gambar 4.12 dengan setpoint yang diberikan adalah sebesar 0.2 rad dan dengan nilai $\alpha_{1c} = 0.05$ dan $\alpha_{2c} = 0.05$. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa grafik mengalami osilasi yang semakin mengecil dari detik pertama sampai detik ke-100 mendekati 0.2 rad. Osilasi pada grafik memiliki rentang *overshoot* pada puncak $0.07 \leq o_s \leq 0.36$, dengan kata lain nilai *overshoot*-nya lebih dari 20% maka nilai α tidak dapat digunakan.



Gambar 4. 13 Hasil simulasi percobaan pertama pada ketinggian(z)

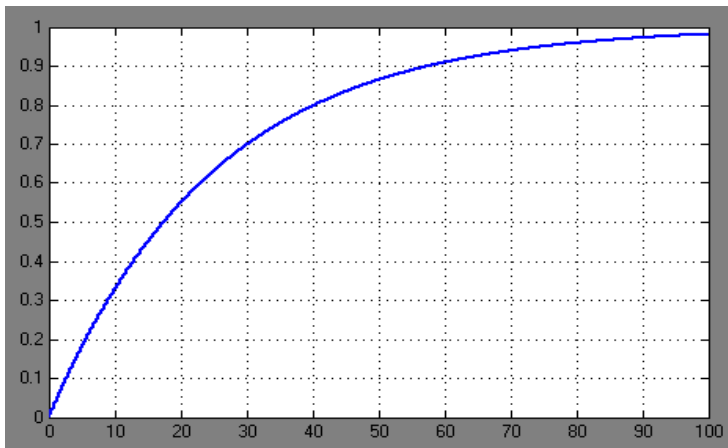
Simulasi pada percobaan pertama ini dilakukan dengan $t_0 = 0$ hingga $t_f = 100$ detik. Pada Gambar 4.13 merupakan hasil simulasi pada ketinggian (z) dengan setpoint ketinggian yang diberikan sebesar 1 meter. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa grafik terus naik dari titik nol sampai 0.86 pada detik ke 100, dengan kata lain ketinggian belum mencapai 1 meter.

Hasil simulasi pada posisi x ditunjukkan pada Gambar 4.14 dengan perintah bergerak ke posisi 1 meter dari titik nol pada sumbu x . Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa grafik terus naik dari titik nol sampai 0.95 pada detik ke 100, dengan kata lain ketinggian belum mencapai 1 meter.



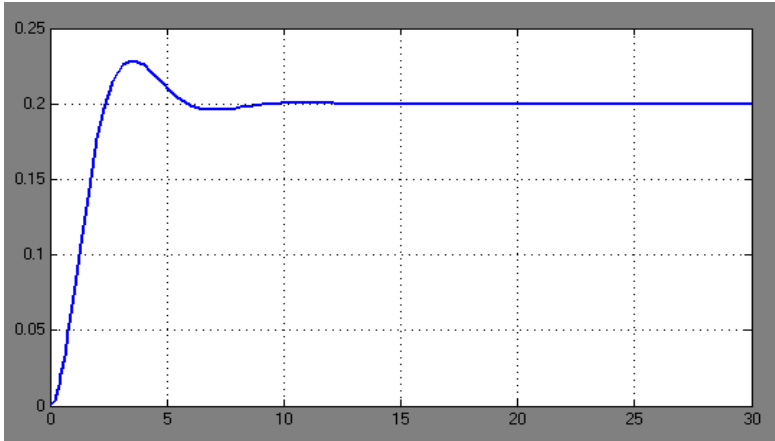
Gambar 4. 14 Hasil simulasi percobaan pertama pada posisi x

Hasil simulasi pada posisi y ditunjukkan pada Gambar 4.15 dengan perintah bergerak ke posisi 1 meter dari titik nol pada sumbu y . Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa grafik terus naik dari titik nol sampai 0.98 pada detik ke 100, dengan kata lain ketinggian belum mencapai 1 meter.



Gambar 4. 15 Hasil simulasi percobaan pertama pada posisi y

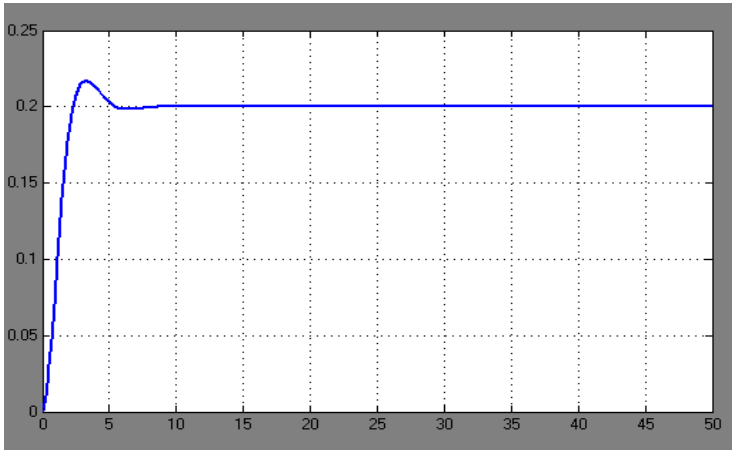
Simulasi pada percobaan α ke-9 dilakukan dengan $t_0 = 0$ hingga $t_f = 30$ detik dengan sumbu vertikal menunjukkan besar sudut *quadrotor* dan pada sumbu horizontal menunjukkan waktu tempuh. Simulasi untuk masing-masing sudut pada Gambar 4.16 sampai Gambar 4.18 memiliki hasil yang lebih baik dari sebelumnya.



Gambar 4. 16 Hasil simulasi percobaan ke-9 pada sudut *roll*

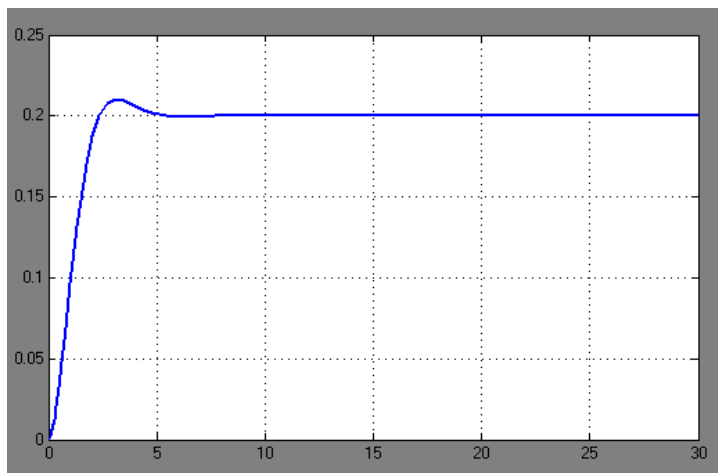
Pada Gambar 4.16 merupakan hasil simulasi pada sudut *roll* dengan setpoint yang diberikan adalah sebesar 0.2 rad dan dengan nilai $\alpha_{1a} = 0.1$ dan $\alpha_{2a} = 1$. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa sudut *roll* mengalami *overshoot* sebesar 0.03 rad atau sebesar 15% sampai detik ke 3.5 dan turun sampai pada sudut 0.195 rad pada detik ke 7 kemudian stabil pada sudut 0.2 pada detik ke 10.

Hasil simulasi pada sudut *pitch* ditunjukkan pada Gambar 4.17 dengan setpoint yang diberikan adalah sebesar 0.2 rad dan dengan nilai $\alpha_{1b} = 0.5$ dan $\alpha_{2b} = 1$. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa sudut *pitch* mengalami *overshoot* sebesar 0.02 rad atau sebesar 10% sampai detik ke 3 kemudian turun dan stabil pada sudut 0.2 rad pada detik ke 5.



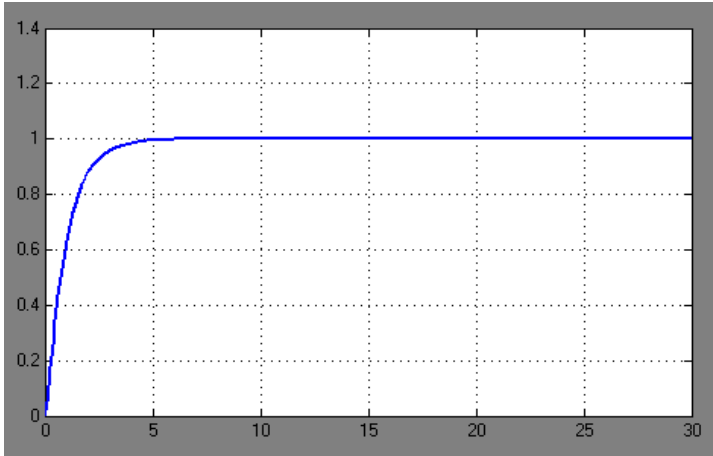
Gambar 4. 17 Hasil simulasi percobaan ke-9 pada sudut *pitch*

Pada Gambar 4.18 merupakan hasil simulasi pada sudut *yaw* dengan setpoint yang diberikan adalah sebesar 0.2 rad dengan nilai $\alpha_{1c} = 0.9$ dan $\alpha_{2c} = 1$. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa sudut *yaw* mengalami *overshoot* sebesar 0.01 rad atau sebesar 5% sampai detik ke 3 kemudian turun dan stabil pada sudut 0.2 rad pada detik ke 5.



Gambar 4. 18 Hasil simulasi percobaan ke-9 pada sudut *yaw*

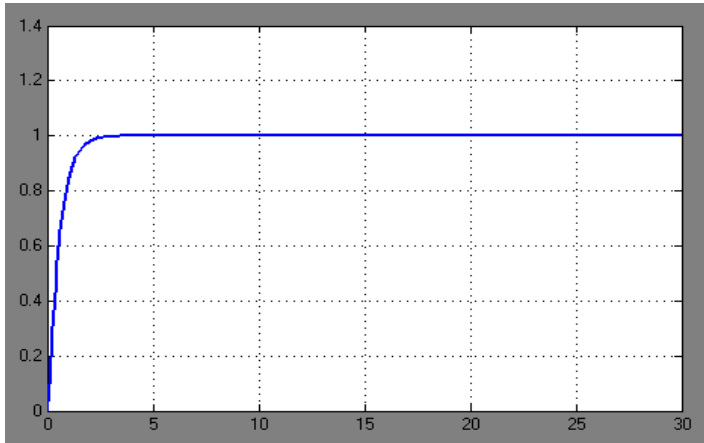
Simulasi pada percobaan β ke-6 dilakukan dengan $t_0 = 0$ hingga $t_f = 30$ detik dengan sumbu vertikal menunjukkan perubahan posisi *quadrotor* dan pada sumbu horizontal menunjukkan waktu tempuh. Simulasi pada Gambar 4.19 sampai Gambar 4.21 memiliki hasil yang lebih baik dari sebelumnya.



Gambar 4. 19 Hasil simulasi percobaan ke-6 pada ketinggian (z)

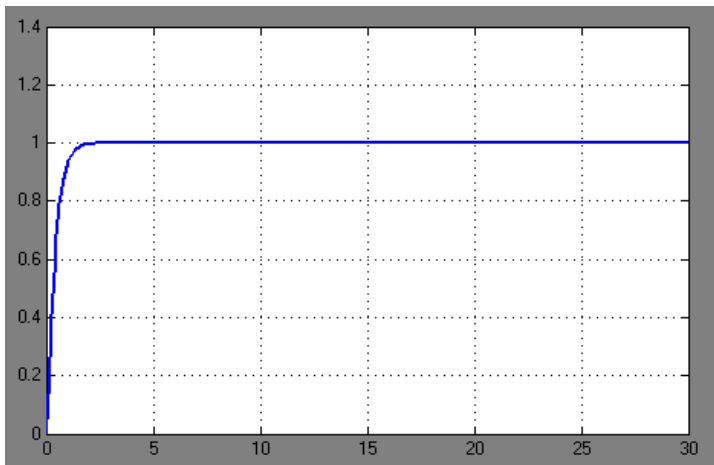
Hasil simulasi pada ketinggian (z) ditunjukkan pada Gambar 4.19 dengan ketinggian yang diberikan adalah sebesar 1 meter dengan nilai $\beta_{1a} = 1$ dan $\beta_{2b} = 10$. Pada hasil simulasi tersebut dapat diamati bahwa grafik bergerak naik dari titik nol selama 5 detik sebelum mencapai pada ketinggian 1 meter.

Pada Gambar 4.20 menunjukkan hasil simulasi pada posisi (x) dengan perintah bergerak ke posisi 1 meter dari titik nol pada sumbu x . Dengan nilai $\beta_{1b} = 2$ dan $\beta_{2b} = 10$, pada hasil simulasi respon posisi *quadrotor* pada sumbu x dapat dilihat bahwa grafik bergerak dari posisi nol menuju 1 meter selama 3 detik.



Gambar 4. 20 Hasil simulasi percobaan ke-6 pada posisi (x)

Hasil simulasi pada posisi (y) ditunjukkan pada Gambar 4.21 dengan perintah bergerak ke posisi 1 meter dari titik nol pada sumbu y. Dengan nilai $\beta_{1c} = 3$ dan $\beta_{2c} = 10$, pada hasil simulasi respon posisi *quadrotor* pada sumbu y dapat dilihat bahwa grafik bergerak dari posisi nol menuju 1 meter selama 2 detik.



Gambar 4. 21 Hasil simulasi percobaan ke-6 pada posisi (y)

Hasil simulasi untuk perubahan sudut *roll*, sudut *pitch* dan sudut *yaw* dapat dilihat pada Gambar 4.16 – Gambar 4.18 dengan nilai $0 < \alpha \leq 1$. Hal ini menunjukkan respon sistem yang stabil dan lebih baik daripada hasil simulasi pada Gambar 4.10 – Gambar 4.12 dengan nilai α yang sangat kecil yakni 0.01. Sedangkan hasil simulasi untuk perpindahan posisi ketinggian, posisi x dan posisi y dapat dilihat pada Gambar 4.19 – Gambar 4.20 dengan nilai $0 < \beta \leq 10$. Hal ini menunjukkan respon sistem yang stabil dan lebih baik daripada hasil simulasi pada Gambar 4.13 – Gambar 4.15 dengan nilai β yang sangat kecil yakni 0.01. Dengan pemilihan nilai α dan β yang tepat dan berbeda maka bisa didapatkan respon sistem yang berbeda pula.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Hasil simulasi menunjukkan bahwa sistem kontrol menggunakan metode *backstepping* dengan pengaturan pada nilai α dan β yang tepat sangat menentukan kestabilan sudut *roll*, sudut *pitch* dan sudut *yaw* serta mengatur posisi dan ketinggian (z).
2. Berdasarkan pengamatan pada hasil simulasi untuk subsistem rotasi, sudut *roll* mengalami *overshoot* sebesar 15% kemudian stabil pada sudut 0.2 pada detik ke 10. Sudut *pitch* mengalami mengalami *overshoot* sebesar 10% dan stabil pada sudut 0.2 rad pada detik ke 5. Dan sudut *yaw* mengalami *overshoot* sebesar 5% dan stabil pada sudut 0.2 rad pada detik ke 5.
3. Hasil simulasi untuk subsistem translasi menunjukkan bahwa respon ketinggian (z) bergerak naik selama 5 detik sebelum mencapai pada ketinggian 1 meter. Respon posisi pada ketinggian (z) bergerak dari posisi nol menuju 1 meter selama 3 detik. Respon posisi *quadrotor* pada sumbu x bergerak dari posisi nol menuju 1 meter selama 3 detik. Respon posisi *quadrotor* pada sumbu y bergerak dari posisi nol menuju 1 meter selama 2 detik.

5.2 Saran

Saran penulis untuk perbaikan tugas akhir ini sekaligus pengembangan penelitian selanjutnya adalah :

1. Memahami benar tentang *quadrotor* sehingga akan lebih mudah dalam mengkaji model matematikanya.
2. Untuk dapat memperoleh nilai α dan β yang tepat tanpa menggunakan *trial and error*, sebaiknya dengan menambah kontrol lain sehingga hasilnya lebih akurat.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ramadhan, M. R., & Effendi, R. (2014). Perancangan Sistem Tracking Quadrotor untuk Sebuah Target di Darat Menggunakan Sistem Fuzzy. *Jurnal Teknik POMITS*, 58-63.
- [2] Jumiyatun, Effendi, R., & Susila, J. (2015, Juni). Pengaturan Kesatbilan Hover Pada Quadrotor Menggunakan Kontrol Backstepping PD PI. *Jurnal Penelitian Fisika dan Aplikasinya (JPFA)*, 21-27.
- [3] Hendriawan, A., Utomo, G. P., & Oktavianto, H. (2012). Sintem Kontrol Altitude Pada UAV Model Quadcopter Dengan Metode PID. *The 14th Industrial Electronics Seminar 2012 (IES 2012)*, 12-16.
- [4] Argentim, L. M dkk. (2013). PID, LQR and LQR-PID on a Quadrotor Platform. IEEE International Conference on Informatics, Electronics & Vision (ICIEV). Hal 1-6.
- [5] L. Derafa, L. Fridman, A. Benanegue and A. Ouldali. (2010). Super Twisting Control Algorithm For The Four Rotors Helicopter Attitude Tracking Problem. *11th International workshop on variable structure system mexico city*. Mexico, June 26-28.
- [6] Bouabdallah, S. (2007). "Desaign and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying". Master thesis, Ecole Polytechnique Federal Lausanne.
- [7] Bouabdallah, S. and Siegwart, R. (2007) "Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor". Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Barcelona, Spain.
- [8] A. Martinez, B. Lafaverge, and J. Valente. (2010). "Mini-Quadrotor Attitude Control based on Hybrid Backstepping & Frenet-Serret Theory". **IEEE** International Conference on Robotics and Automation. Hal 1617-1622.

- [9] Meliari, V. (2011, March 7). *Hukum Bernoulli dan Penerapannya*. Retrieved December 7, 2016, from vinka014's blog: <https://vinka014.wordpress.com>
- [10] Handali, D., & Pamuntjak, R. (2004). *Kalkulus Perubahan Banyak*. Bandung: Penerbit ITB.
- [11] Giancoli, Douglas. 2001. *Fisika Jilid I* (terjemahan). Jakarta : Penerbit Erlangga.
- [12] Rahima, & Anny. (2012, February 20). *Diferensiasi Vektor*. Retrieved December 7, 2016, from Annymath: <https://annymath.wordpress.com/>
- [13] McCleary, J. (1994). *Geometry from a Differentiable Viewpoint*. Melbourne, Australia: the Press Syndicate of the University of Cambridge.
- [14] Ogata, K. (1997). *Teknik Kontrol Automatik*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

LAMPIRAN 1

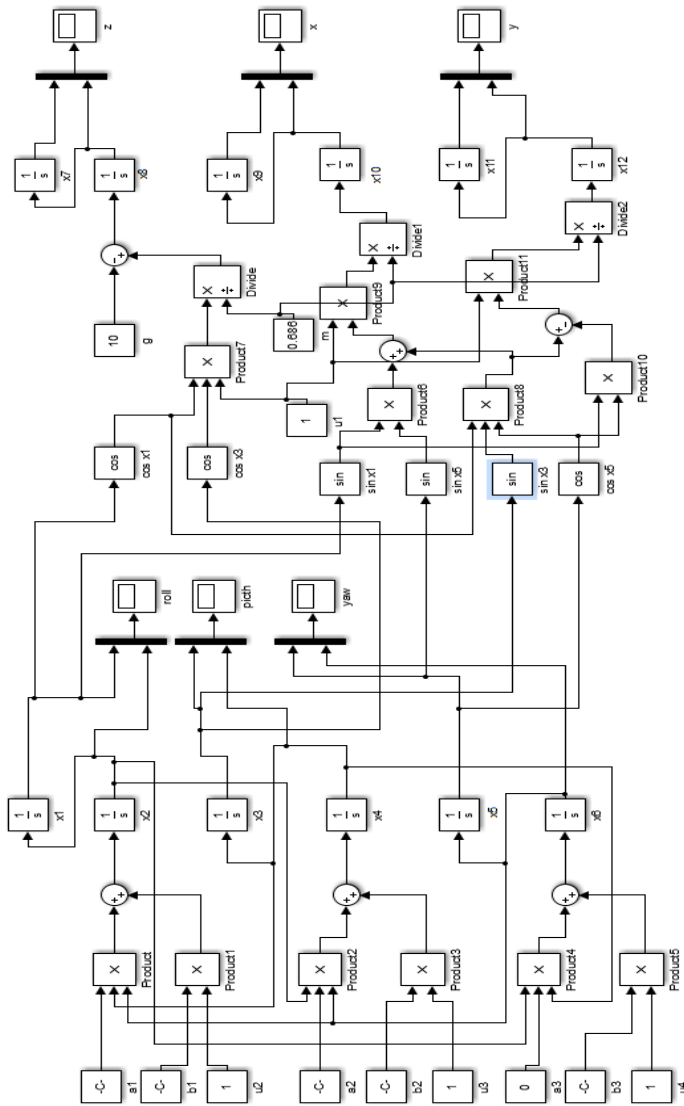


Diagram Blok Simulink Sistem Awal

BIODATA PENULIS



Auliyaul Hasanah atau yang biasa dipanggil Ana lahir pada tanggal 07 Desember 1993. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Shoheh dan Ibu Aslihah. Jenjang pendidikan formal yang ditempuh oleh penulis dimulai dari RA Nizhomiyah Jombang, MI Nizhomiyah Jombang, MTS Al-Anwar Jombang dan MA Amanatul Ummah Mojokerto. Pada tahun 2012-sekarang, penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika, FMKSD ITS.

Di Departemen Matematika, penulis mengambil rumpun Matematika Terapan, khususnya Pemodelan Matematika dan Simulasi Sistem. Penulis adalah penerima manfaat Beasiswa Bidikmisi periode 2012-2017. Selama kuliah S-1, penulis pernah aktif di Departemen Sainstek HIMATIKA ITS, LDJ Ibnu Muqhlah ITS, LDK Jamaah Masjid Manarul Ilmi ITS dan UKM Kops Suka Rela ITS. Selain itu penulis juga melaksanakan Kerja Praktek di Badan Pusat Statistika Kota Surabaya.

Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai Tugas Akhir ini, bisa melalui email hasanah12@mhs.matematika.its.ac.id

