



TESIS - SS14 2501

**PENGUJIAN HIPOTESIS SIMULTAN
PARAMETER MODEL REGRESI
NONPARAMETRIK SPLINE *TRUNCATED* PADA
DATA LONGITUDINAL**

(Aplikasi pada Data Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun
2011-2016)

RAFAEL LUMBAN TORUAN
NRP. 06211650017004

DOSEN PEMBIMBING :
Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si
Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI, DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018



TESIS SS14 2501

**PENGUJIAN HIPOTESIS SIMULTAN PARAMETER
MODEL REGRESI NONPARAMETRIK SPLINE
TRUNCATED PADA DATA LONGITUDINAL**

(Aplikasi pada Data Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua
Tahun
2011-2016)

RAFAEL LUMBAN TORUAN
NRP. 06211650017004

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Vita Ratnasari, S.Si, M.Si
Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si

PROGRAM PASCA SARJANA
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA KOMPUTASI DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018



THESIS SS14 2501

**SIMULTANEOUS HYPOTHESIS TESTING OF
PARAMETER IN TRUNCATED SPLINE
NONPARAMETRIC REGRESSION MODEL FOR
LONGITUDINAL DATA**

(Application on Data of Economic Growth in Papua Province in
2011-2016)

RAFAEL LUMBAN TORUAN
NRP. 06211650017004

SUPERVISOR
Dr. Vita Ratnasari, S.Si, M.Si
Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si

PROGRAM OF POSTGRADUATE
DEPARTMENT OF STATISTICS
FACULTY OF MATHEMATICS COMPUTATION AND DATA SCIENCE
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018

**PENGUJIAN HIPOTESIS SIMULTAN PARAMETER DALAM
REGRESI NONPARAMETRIK SPLINE TRUNCATED PADA
DATA LONGITUDINAL**

**(Aplikasi pada Data Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-
2016)**

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

RAFAEL LUMBAN TORUAN

NRP. 06211650017004

Tanggal Ujian : 19 Januari 2018
Periode Wisuda : Maret 2018

Disetujui Oleh: 

1. Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si.
NIP. 19700910199702 2 001

(Pembimbing I)

2. Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si.
NIP. 19650603 198903 1 003

(Pembimbing II)

3. Dr. Dra. Ismaini Zain, M.Si.
NIP. 19600525 198803 2 001

(Penguji)

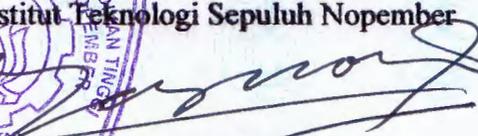
4. Dr. Margaretha Ari Anggorowati, S.Kom., M.T.
NIP. 19720222 199803 2 002

(Penguji)

Dekan

Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember




Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

PENGUJIAN HIPOTESIS SIMULTAN PARAMETER MODEL REGRESI NONPARAMETRIK SPLINE TRUNCATED PADA DATA LONGITUDINAL

(Aplikasi pada Data Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua
Tahun 2011-2016)

Nama Mahasiswa : Rafael Lumban Toruan
NRP : 06211650017004
Pembimbing 1 : Dr. Vita Ratnasari, S.Si, M.Si
Pembimbing 2 : Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si

ABSTRAK

Analisis Regresi digunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor berdasarkan bentuk dan pola hubungan dari kedua variabel tersebut. Dalam penelitian ini diperoleh bentuk dan pola hubungan dari variabel respon dan variabel prediktor tidak diketahui pola hubungannya, sehingga analisisnya menggunakan pendekatan regresi nonparametrik. Spline *truncated* merupakan salah satu pendekatan yang digunakan untuk regresi nonparametrik karena memiliki kelebihan yaitu model yang dihasilkan akan mengikuti bentuk pola hubungan yang sesuai dengan perilaku datanya berdasarkan titik-titik knotnya. Banyaknya titik-titik knot yang digunakan adalah satu titik knot. Untuk pemilihan jumlah titik knot optimal digunakan metode *Generalized Cross Validation* (GCV). Bentuk penyajian data bisa berupa data *cross section*, *time series*, dan longitudinal. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data longitudinal. Penelitian di bidang ekonomi lebih sesuai menggunakan data longitudinal karena mengandung dimensi ruang dan waktu, misalnya mengenai pertumbuhan ekonomi. Pertumbuhan Ekonomi di Provinsi Papua periode 2011-2016 mengalami pergerakan yang fluktuatif dan bahkan menuju titik minus. Pada penelitian ini akan melakukan kajian pengujian hipotesis simultan parameter untuk mengetahui apakah variabel-variabel prediktor yang digunakan berpengaruh secara statistik terhadap pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua. Dari hasil kajian estimasi pengujian hipotesis simultan parameter model Regresi Nonparametrik Spline Truncated diperoleh bahwa distribusi dari statistik uji hipotesis mengikuti distribusi $F_{np+nrp,ntp-(np+nrp)}$. Dari pengujian hipotesis yang dilakukan, diperoleh model terbaik untuk pertumbuhan ekonomi Provinsi Papua adalah dengan menggunakan Regresi Nonparametrik Spline Truncated dengan menggunakan bobot W_1 dengan nilai GCV adalah 0,0963 dengan nilai R^2 dan R^2 adjusted masing-masing adalah 97,09 dan 91,27 persen.

Kata kunci: Regresi Nonparametrik, Spline *Truncated*, GCV, Pengujian Hipotesis Simultan, Data Longitudinal, Pertumbuhan Ekonomi

Halaman ini sengaja dikosongkan

**SIMULTANEOUS HYPOTHESIS TESTING FOR
PARAMETERS OF SPLINE TRUNCATED
NONPARAMETRIC REGRESSION MODEL FOR
LONGITUDINAL DATA**

**(Applied on Data of Economic Growth in Papua Province in 2011-
2016)**

Name : Rafael Lumban Toruan
NRP : 06211650017004
Supervisor : Dr. Vita Ratnasari, S.Si, M.Si
Co-Supervisor : Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si

ABSTRACT

Regression analysis is used to analyze the relationship between response and predictor variables based on the form and relationship pattern of the two variables. In this research obtained the pattern and form of the relationship between response and predictor variables is unknown, so that, for analyze can be approached by using nonparametric regression. Spline truncated is one of the approaches used for nonparametric regression because it has advantages that the resulting model will follow the pattern of the relationship that matches the data behavior based on the knot points. The number of knot points used are one, two, three, and a combination of knot points. For selection of optimal knot point number used Generalized Cross Validation (GCV) method. Form of data presentation can be data cross section, time series, and longitudinal. The data used in this research is longitudinal data. Research in economics is more appropriate using longitudinal data because it contains the dimensions of space and time, for example on economic growth. Economic Growth in Papua Province for the period of 2011-2016 has fluctuated and even towards minus point. In this study will conduct simultaneous hypothesis testing of parameters to determine whether the predictor variables used statistically affect the economic growth in Papua Province. From the result of the simultaneous hypothesis testing estimation study, the parameters of Spline Truncated Nonparametric Regression model showed that the distribution of the hypothesis test statistics follows the $F_{np+nrp,ntp-(np+nrp)}$ distribution. From the hypothesis testing, the best model for economic groth of Papua Province is using Spline Truncated Nonparametric Regression by using W_1 with GCV values is 0,0963 with R^2 dan R^2 adjusted are 97,09 and 91,27 percent.

Key words: Nonparametric Regression, Spline Truncated, GCV, Simultaneous Hypothesis Testing, Longitudinal Data, Economic Growth

Halaman ini sengaja dikosongkan

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Allah Tritunggal Maha Kudus, Bapa, Putera dan Roh Kudus karena atas kasih karunia dan berkat-Nya serta Santa Perawan Maria dalam penyertaan-Nya sehingga Penulis diperkenankan menyelesaikan tesis yang berjudul **“Pengujian Hipotesis Simultan Parameter Model Regresi Nonparametrik Spline Truncated pada Data Longitudinal (Aplikasi pada Data Pertumbuhan Ekonomi di Provinsi Papua Tahun 2011-2016)”**. Tesis ini merupakan salah satu persyaratan untuk menyelesaikan studi pada Departemen Statistika, Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data, Program Pascasarjana di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Keberhasilan penulis dalam menyelesaikan tesis ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan serta dukungan dari berbagai pihak. Sehubungan dengan hal tersebut, teriring rasa syukur dan doa dari Penulis. Dalam kesempatan ini, Penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih dengan rendah hati kepada:

1. Badan Pusat Statistik (BPS) yang telah memberikan beasiswa sehingga Penulis berkesempatan untuk melanjutkan studi program S2 Statistika di ITS.
2. Ibu Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si dan Bapak Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si selaku dosen pembimbing tesis. Atas segala bimbingan, arahan, pembelajaran, dan koreksi yang telah diberikan dengan penuh teladan dan kesabaran serta dorongan semangat selama penyusunan tesis ini.
3. Ibu Dr. Dra. Ismaini Zain, M.Si serta Ibu Dr. Margaretha Ari Anggorowati, S.Kom., M.T selaku dosen penguji yang memberikan saran, masukan ide, dan evaluasi yang bermanfaat untuk menjadikan tesis ini lebih baik.
4. Bapak Dr. Suhartono, M.Sc selaku Ketua Departemen Statistika serta Ibu Dr. Kartika Fithriasari, M.Si selaku Sekretaris Departemen yang telah memberikan arahan dan bantuannya selama penulis menempuh studi.
5. Bapak Dr. rer.pol. Heri Kuswanto, M.Si selaku Ketua Program Studi Pascasarjana Statistika FMKSD ITS Surabaya beserta seluruh jajarannya atas kemudahan dan fasilitas yang diberikan selama studi.

6. Bapak Dr. Sutikno, M.Si selaku dosen wali, serta seluruh Bapak/Ibu dosen pengajar yang telah memberikan motivasi, ilmu pengetahuan dan pengalaman yang bermanfaat.
7. Kedua orang tua terkasih yang telah membesarkan, mendidik, memberi perhatian, serta selalu mendoakan penulis dengan penuh ketulusan. Saudara kandung serta segenap keluarga yang senantiasa mendukung dalam proses penyelesaian tesis ini.
8. Bapak Yunus Wakum, S.E selaku Kepala BPS Kabupaten Mimika yang telah memberikan kesempatan serta mendoakan penulis dengan penuh ketulusan.
9. Istriku tercinta, Engellia Rompah yang selalu mendoakan, mendukung, penuh kesabaran dan menjadi penyemangat yang luar biasa.
10. Teman-teman BPS angkatan 10 yaitu Ratna, Fendy, Umam, Suprpto, Reny, Sartika, Imra, Mike, Taufiq, Sony, Ratih, Parih dan Aniq. Terima kasih atas kebersamaan dan kekompakan serta menjadi pelengkap atas kekurangan penulis dalam menyelesaikan studi di ITS. Semoga dapat bertemu lagi di lain kesempatan.
11. Teman-teman regular angkatan 2016 atas kerjasama dan keceriaannya, serta seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu atas doa dan dukungan yang telah diberikan.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, saran serta kritik yang membangun sangat diharapkan buat penulis untuk perbaikan tesis ini. Akhirnya, penulis berharap semoga tesis ini dapat memberikan manfaat untuk semua pihak yang memerlukan.

Surabaya, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xvii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Permasalahan.....	7
1.3 Tujuan Penelitian.....	8
1.4 Manfaat Penelitian.....	8
1.5 Batasan Masalah.....	8
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	9
2.1 Analisis Regresi Parametrik	9
2.2 Regresi Nonparametrik Spline <i>Truncated</i> untuk Data <i>Cross Section</i>	11
2.3 Regresi Nonparametrik Spline <i>Truncated</i> pada Data Longitudinal	12
2.4 Pemilihan Titik Knot Optimal	16
2.5 <i>Likelihood Ratio Test</i> (LRT)	17
2.6 Pengujian Parameter dalam Regresi Parameter.....	18
2.6.1 Uji Simultan/Serentak.....	18
2.6.2 Uji Parsial/Individu.....	19
2.7 Teorema Dasar Terkait Aljabar Matriks.....	19
2.8 Definisi dan Teori Pertumbuhan Ekonomu serta Faktor-Faktor yang Berpengaruh	20
2.9 Penelitian-Penelitian Terdahulu Mengenai Pertumbuhan Ekonomi	27
BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN.....	31
3.1 Sumber Data	31
3.2 Variabel Penelitian	31
3.3 Tahapan Penelitian	32
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN.....	35

4.1 Estimasi Model Regresi Nonparametrik <i>Spline truncated</i> pada Data Longitudinal.....	35
4.1.1 Perumusan Uji Hipotesis	40
4.1.2 Estimasi Parameter di bawah $H(\Omega)$ dan $H_0(\omega)$	41
4.1.3 Menentukan Statistik Uji Hipotesis	45
4.1.4 Mendapatkan Distribusi Statistik Uji Hipotesis	49
4.1.5 Menentukan Daerah Penolakan Uji Hipotesis H_0	55
4.2 Aplikasi pada Data Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016.....	55
4.2.1 Analisis Deskriptif	56
4.2.2 Pemodelan Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016 Menggunakan Regresi Linier Berganda	62
4.2.2.1 Pengujian Signifikansi Parameter secara Simultan	63
4.2.2.2 Pengujian Signifikansi Parameter secara Parsial	64
4.2.3 Pemodelan Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016 Menggunakan Model Regresi Nonparametrik <i>Spline truncated</i> untuk Data Longitudinal	65
4.2.3.1 Identifikasi Variabel Komponen Nonparametrik	65
4.2.3.2 Pemodelan Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016 Menggunakan Bobot \mathbf{W}_1	68
4.2.3.3 Pemodelan Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016 Menggunakan Bobot \mathbf{W}_2	69
4.2.3.4 Pemodelan Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016 Menggunakan Bobot \mathbf{W}_3	70
4.2.3.5 Pemilihan Model Terbaik Spline Truncated	71
4.2.3.6 Pengujian Signifikansi Parameter secara Simultan	72
4.2.3.7 Pengujian Signifikansi Parameter secara Parsial	73
4.2.4 Perbandingan Model	74
4.2.5 Interpretasi dan Prediksi Pertumbuhan Ekonomi menggunakan Model Terbaik Regresi Nonparametrik <i>Spline truncated</i>	75
BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN	87
5.1 Kesimpulan	87
5.2 Saran	88

DAFTAR PUSTAKA	89
LAMPIRAN-LAMPIRAN.....	93
SURAT PERNYATAAN.....	115
BIOGRAFI PENULIS	116

Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Analisis Varians Model Regresi	18
Tabel 3.1 Struktur Data Penelitian	32
Tabel 4.1 Statistik Deskriptif Pertumbuhan Ekonomi Kabupaten/Kota Se-Provinsi Papua Tahun 2011-2016	56
Tabel 4.1 Statistik Deskriptif Pertumbuhan Ekonomi Kabupaten/Kota Se-Provinsi Papua Tahun 2011-2016 (Lanjutan).....	57
Tabel 4.2 Statistik Deskriptif Variabel Respon dan Variabel Prediktor	58
Tabel 4.3 ANOVA Regresi Linier Berganda Data Longitudinal.....	63
Tabel 4.4 Output Pengujian Hipotesis Parsial Model Terbaik Regresi Linier Berganda pada Data Longitudinal	64
Tabel 4.5 Nilai GCV Menggunakan Satu Titik Knot dengan Bobot \mathbf{W}_1	69
Tabel 4.6 Nilai GCV Menggunakan Satu Titik Knot dengan Bobot \mathbf{W}_2	70
Tabel 4.7 Nilai GCV Menggunakan Satu Titik Knot dengan Bobot \mathbf{W}_3	70
Tabel 4.8 Perbandingan Nilai GCV Model Terpilih dengan Bobot \mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 , dan \mathbf{W}_3	71
Tabel 4.9 ANOVA Model Terbaik Regresi Nonparametrik Spline Truncated Data Longitudinal.....	72
Tabel 4.10 Output Pengujian Hipotesis secara Parsial	73
Tabel 4.11 Nilai R^2 dan R^2 <i>Adjusted</i> Model Regresi Linier Berganda dan Nonparametrik Spline Truncated pada Data Longitudinal	75

Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Kerangka Berpikir Penelitian	6
Gambar 2.1 Skema Teori Pertumbuhan Ekonomi	27
Gambar 4.1 Pertumbuhan Ekonomi di Provinsi Papua Tahun 2011-2016	59
Gambar 4.2 Rata-Rata Lama Sekolah di Provinsi Papua Tahun 2011-2016	60
Gambar 4.3 Angka Harapan Hidup di Provinsi Papua Tahun 2011-2016	61
Gambar 4.4 Scatter Plot Pertumbuhan Ekonomi dan Variabel Rata-rata Lama Sekolah yang Diduga Berpengaruh di Kabupaten/Kota di Provinsi Papua, 2011-2016	66
Gambar 4.5 Scatter Plot Pertumbuhan Ekonomi dan Variabel Angka Harapan Hidup yang Diduga Berpengaruh di Kabupaten/Kota di Provinsi Papua, 2011-2016	67
Gambar 4.6 Scatter Plot Pertumbuhan Ekonomi dan Variabel-Variabel yang Diduga Berpengaruh pada Masing-Masing Periode.....	68
Gambar 4.7 Hubungan Antara Rata-rata Lama Sekolah dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kabupaten Merauke.....	76
Gambar 4.8 Hubungan Antara Angka Harapan Hidup dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kabupaten Merauke.....	77
Gambar 4.9 Hubungan Antara Rata-rata Lama Sekolah dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kabupaten Puncak Jaya	78
Gambar 4.10 Hubungan Antara Angka Harapan Hidup dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kabupaten Puncak Jaya	79
Gambar 4.11 Hubungan Antara Rata-rata Lama Sekolah dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kota Jayapura	80
Gambar 4.12 Hubungan Antara Angka Harapan Hidup dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kota Jayapura	81
Gambar 4.13 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2011.....	81
Gambar 4.14 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2012.....	82

Gambar 4.15 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2013	83
Gambar 4.16 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2014	84
Gambar 4.17 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2015	84
Gambar 4.18 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2016	85

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Pertumbuhan Ekonomi dan Variabel-Variabel yang Diduga Berpengaruh di Provinsi Papua Tahun 2011-2016	93
Lampiran 2. Program Regresi Nonparametrik <i>Spline truncated</i> dengan Satu Titik Knot menggunakan Penimbang \mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 , dan \mathbf{W}_3	98
Lampiran 3. Output Program Titik Knot Optimal dengan Satu Titik Knot Menggunakan Bobot \mathbf{W}_1	109
Lampiran 4. Output Program Titik Knot Optimal dengan Satu Titik Knot Menggunakan Bobot \mathbf{W}_2	110
Lampiran 5. Output Program Titik Knot Optimal dengan Satu Titik Knot Menggunakan Bobot \mathbf{W}_3	111
Lampiran 6. Output Estimasi Parameter Model dengan dengan Satu Titik Knot Menggunakan Bobot \mathbf{W}_1	112
Lampiran 7. Output Nilai Pertumbuhan Ekonomi Actual dan Prediksi Menurut Kabupaten/Kota Provinsi Papua Tahun 2011-2016	113

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Dalam ilmu statistika, terdapat berbagai macam metode analisis, salah satunya adalah analisis regresi. Analisis regresi merupakan salah satu metode statistik yang digunakan untuk mengetahui pola hubungan antara variabel prediktor dan variabel respon (Draper & Smith, 1992). Di samping itu, analisis regresi sangat bermanfaat untuk peramalan (*forecasting*). Untuk memodelkan satu atau lebih variabel dalam regresi, yang perlu dilakukan adalah melihat apakah variabel-variabel tersebut secara rasional berkorelasi atau tidak. Apabila berkorelasi, maka dapat dilakukan pemodelan Statistika dengan menggunakan analisis regresi. Pola hubungan antar variabel tersebut dapat didekati dengan tiga cara yaitu regresi parametrik, regresi nonparametrik dan regresi semiparametrik. Analisis regresi parametrik adalah analisis yang paling sering digunakan karena terdapat banyak asumsi yang harus dipenuhi, salah satunya adalah bentuk kurva regresi yang harus diketahui, bisa berbentuk linier, kuadratik, kubik dan lain-lain. Apabila bentuk kurva regresi tidak diketahui polanya, maka analisis regresi nonparametrik lebih disarankan untuk digunakan (Budiantara, 2009). Menurut Eubank, dalam pandangan regresi nonparametrik, biarkan data sendiri yang akan mencari bentuk estimasi dari kurva regresinya, tanpa harus dipengaruhi oleh faktor subyektifitas peneliti (Budiantara, 2011). Beberapa contoh model regresi nonparametrik yang sering digunakan adalah Histogram, Kernel, Spline, Polinomial Lokal, Deret Ortogonal, Deret *fourier*, *Wavelets*, *Multivariate Adaptive Regression Splines* (MARS), *Neural Network*, Bayesian, dan lain sebagainya.

Di antara beberapa model regresi nonparametrik tersebut, model spline lebih banyak diminati karena model spline merupakan model yang mempunyai interpretasi statistik dan interpretasi visual sangat khusus dan sangat baik (Eubank, 1999; Budiantara, 2009). Menurut Budiantara (2009), data yang memiliki pola berubah-ubah pada sub-sub interval tertentu sebaiknya dimodelkan dengan menggunakan metode spline. Beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam

membentuk regresi spline adalah menentukan orde model, banyaknya titik knot, serta lokasi knot tersebut (Montoya, Ulloa, dan Miller, 2014). Dalam proses menentukan orde model dapat digunakan bentuk pola hubungan yang ada pada data yang digunakan.

Budiantara (2005) mengembangkan estimator spline dalam regresi nonparametrik dengan menggunakan basis fungsi keluarga *spline truncated*. Pendekatan dengan menggunakan basis fungsi *spline truncated* ini memberikan perhitungan matematik yang lebih mudah dan sederhana, dan optimasi yang digunakan tanpa melibatkan penalti yaitu optimasi *Least Square* (LS). Wahba (1990) memberikan metode untuk memilih parameter penghalus dalam estimator spline yaitu dengan *Generalized Cross Validation* (GCV). Beberapa kelebihan metode GCV antara lain memiliki sifat optimal asimptotik, dalam penghitungannya tidak memerlukan pengetahuan tentang varians populasi (σ^2) dan invarians terhadap transformasi (Wahba dalam Astuti, 2017).

Beberapa penelitian yang menggunakan regresi nonparametrik *spline truncated* antara lain Merdekawati (2013) melakukan pemodelan regresi *spline truncated* multivariabel pada faktor-faktor yang mempengaruhi kemiskinan kabupaten/kota di Jawa Tengah. Bintariningrum (2014) melakukan pemodelan regresi nonparametrik *spline truncated* pada angka kelahiran kasar di Surabaya. Mariati (2015) melakukan pemodelan regresi deret *fourier* dan *spline truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel pada data kemiskinan di Provinsi Papua.

Selain penelitian tentang regresi nonparametrik *spline truncated* data *cross section*, terdapat juga penelitian *spline truncated* untuk data longitudinal. Penelitian dengan pendekatan nonparametrik pada data longitudinal banyak dilakukan pada bidang kesehatan, namun juga dapat diaplikasikan pada bidang lain termasuk bidang sosial dan ekonomi (Wu & Zhang, 2006). Dalam analisis bidang ekonomi, peneliti sering menggunakan data longitudinal yang mengandung dimensi ruang dan waktu. Kelebihan data longitudinal adalah lebih komprehensif dengan banyak data yang meningkat karena terdapat unsur waktu yang dapat meningkatkan efisiensi dalam pengestimasiannya, karena penambahan derajat bebasnya (Baltagi, 2005). Beberapa penelitian yang menggunakan *spline truncated* data longitudinal adalah Basri (2009) melakukan pemodelan mengenai tegangan

kolom beton bertulang dengan pendekatan spline. Sriliana (2012) melakukan penelitian mengenai jumlah leukosit penderita leukemia menggunakan regresi *spline truncated* dalam model linier parsial. Amelia (2014) melakukan pemodelan regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal.

Dalam suatu analisis statistik, selain menggunakan statistik deskriptif diperlukan juga untuk melakukan suatu analisis berupa statistik inferensia karena sangat penting untuk dilakukan, salah satunya adalah pengujian hipotesis simultan terhadap parameter model untuk mengetahui apakah parameter tersebut signifikan terhadap model. Beberapa penelitian yang telah mengkaji mengenai pengujian hipotesis simultan adalah Tupen (2011) telah mengkaji tentang uji hipotesis dalam regresi nonparametrik *spline truncated*. Begitu juga Ruliana, dkk (2016) telah mengkaji tentang pengujian hipotesis simultan pada model spline pada *Structural Equation Modelling* (SEM) nonlinier. Pada penelitian ini akan dikembangkan untuk mengkaji tentang pengujian hipotesis simultan dalam regresi nonparametrik *spline truncated* pada data longitudinal. Kajian tentang pengujian hipotesis pada regresi nonparametrik *spline truncated* sudah pernah dilakukan, sehingga dalam penelitian ini akan melakukan pengembangan mengenai kajian pengujian hipotesis simultan parameter dalam regresi nonparametrik *spline truncated* pada data longitudinal. Kajian ini sangat penting karena dapat digunakan untuk menetapkan suatu hipotesis, penurunan untuk mendapatkan statistik uji dan daerah penolakan dari pengujian hipotesis secara simultan

Pengujian hipotesis sudah banyak diterapkan dalam berbagai macam bidang keilmuan yaitu sosial, kesehatan dan juga ekonomi. Salah satu penelitian pada bidang ekonomi yang sesuai dengan penerapan regresi nonparametrik *spline truncated* data longitudinal adalah data laju pertumbuhan ekonomi. Hal ini dikarenakan dari hasil identifikasi awal dengan menggunakan *scatter plot* bahwa hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor tidak diketahui bentuk kurva regresinya. Beberapa penelitian ekonomi yang menggunakan data longitudinal adalah Syafrizal (2012) yang memodelkan pertumbuhan ekonomi di Provinsi Jawa Timur menggunakan metode *spatial autoregressive with autoregressive disturbance*. Selain itu, ada juga Astuti (2017) yang melakukan

pemilihan titik knot optimal terhadap data pertumbuhan ekonomi di Pulau Kalimantan dengan metode *GCV* dalam regresi nonparametrik *spline truncated*.

Berdasarkan isi dari *Sustainable Development Goals* (SDGs) yaitu sasaran ke delapan mengenai peningkatan pertumbuhan ekonomi yang inklusif dan berkelanjutan serta menciptakan lapangan pekerjaan yang layak (UNDP, 2017). Hal ini sejalan dengan tujuan nasional Bangsa Indonesia yang tertuang dalam Undang-Undang Dasar 1945 yaitu menciptakan kesejahteraan umum. Tujuan ini dijadikan dasar dalam pelaksanaan pembangunan (Bappenas, 2016). Usaha mendorong pertumbuhan ekonomi dilakukan dengan optimalisasi sektor-sektor ekonomi strategis di masing-masing wilayah. Pertumbuhan ekonomi inklusif merupakan pertumbuhan ekonomi yang tidak hanya tinggi nilainya namun juga terdistribusi merata di seluruh wilayah dan dapat mengurangi ketimpangan pendapatan. Untuk mencapai pertumbuhan ekonomi inklusif diperlukan suatu proses pembangunan ekonomi berkelanjutan serta mampu menciptakan lapangan kerja yang layak bagi generasi mendatang. Implementasi pembangunan untuk mencapai pertumbuhan ekonomi inklusif dapat dilakukan dengan memaksimalkan potensi perekonomian daerah, pemanfaatan sumber daya alam, dan peningkatan kualitas sumber daya manusia secara maksimal.

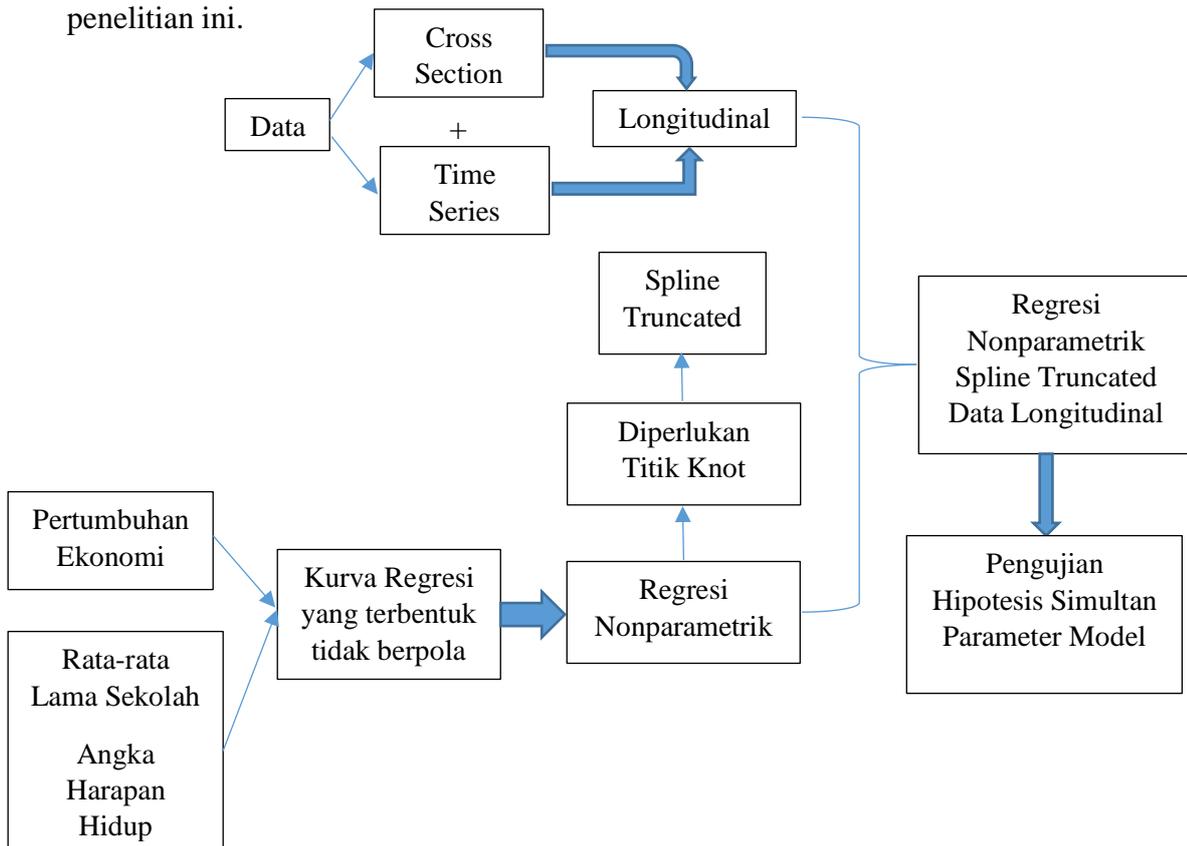
Salah satu indikator keberhasilan pelaksanaan pembangunan yang dapat dijadikan tolak ukur secara makro adalah pertumbuhan ekonomi. Semakin tinggi pertumbuhan ekonomi suatu daerah menunjukkan semakin baik kegiatan ekonomi di daerah tersebut, yang penghitungannya diperoleh dari laju pertumbuhan Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) atas dasar harga konstan (Todaro, 2000). Pembangunan ekonomi pada hakekatnya adalah upaya terencana dalam mengelola sumber daya untuk meningkatkan kesejahteraan masyarakat. Dalam pelaksanaan pembangunan, pertumbuhan ekonomi yang tinggi merupakan sasaran utama di setiap wilayah. Pertumbuhan ekonomi, struktur ekonomi dan ketimpangan pendapatan merupakan tolak ukur keberhasilan pembangunan di suatu wilayah (BPS, 2016).

Pertumbuhan ekonomi Indonesia periode 2011-2016 mengalami perlambatan laju untuk setiap tahunnya. Pertumbuhan ekonomi Indonesia di tahun 2011 mencapai 6,17 persen, dan hingga tahun 2016 selalu mengalami penurunan hingga

menjadi 5,02 persen. Angka ini menggambarkan bagaimana kondisi pergerakan perekonomian di Indonesia selama periode tersebut, dan ini juga menggambarkan perekonomian pada level sebagian besar provinsi dan kabupaten/kota di Indonesia, walaupun ada juga yang mengalami ekspansi. Laju pertumbuhan ekonomi Provinsi Papua periode 2011-2016 mengalami tren yang fluktuatif, di tahun 2011 mengalami perlambatan pertumbuhan sebesar -4,28 persen, kemudian di tahun 2012 pertumbuhan ekonomi Papua tumbuh lebih cepat dari tahun sebelumnya menjadi 1,72 persen, kemudian pertumbuhan ekonomi tahun 2013 mengalami ekspansi menjadi 8,55 persen, namun di tahun 2014 pertumbuhan ekonomi Papua mengalami kontraksi menjadi 3,65 persen, di tahun 2015 kembali meningkat menjadi 7,47 persen, dan di tahun 2016 meningkat lagi menjadi 9,21 persen. Pada level kabupaten/kota, pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua sangat bervariasi. Pertumbuhan ekonomi yang tertinggi di tahun 2011 terjadi di Kabupaten Lanny Jaya yang mencapai 29,75 persen, sedangkan yang terendah terjadi di Kabupaten Mimika yaitu -16,36 persen. Pada tahun 2013, pertumbuhan ekonomi tertinggi terjadi di Kabupaten Nduga yaitu mencapai 12,35 persen, dan yang terendah terjadi di Kabupaten Supiori yaitu 4,26 persen. Laju pertumbuhan ekonomi Papua terus mengalami fluktuasi hingga tahun 2016, dimana pertumbuhan ekonomi tertinggi terjadi di Kabupaten Mimika yang mencapai 12,84 persen, dan yang terendah terjadi di Kabupaten Biak yaitu 4,07 persen.

Pada tahun 2011, PDRB Provinsi Papua memberikan kontribusi sebesar 1,38 persen terhadap perekonomian Indonesia. Kontribusi ini terus mengalami penurunan hingga tahun 2014 menjadi 1,25 persen, dan kembali meningkat di tahun 2016 menjadi 1,41 persen. Provinsi Papua, sebagai provinsi yang mempunyai IPM paling rendah di tingkat Nasional, namun PDRB Provinsi Papua berada di kelompok menengah terbesar di seluruh Indonesia yang dalam memberikan kontribusi terhadap PDB. Hal ini menjadi perhatian khusus ke depannya supaya potensi yang besar pada perekonomian Provinsi Papua juga mampu untuk meningkatkan dan menopang kualitas pembangunan manusia di Provinsi Papua. Oleh karena itu, diharapkan pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua menjadi stabil dan tumbuh dengan cepat setiap tahunnya.

Dari uraian-uraian di atas, peneliti membuat suatu rangkuman berupa kerangka berpikir yang dituangkan dalam Gambar 1.1 sebagai dasar dalam pelaksanaan penelitian ini.



Gambar 1.1 Kerangka Berpikir Penelitian

Gambar 1.1 menjelaskan bahwa dalam penelitian ini terfokus pada penggunaan data pertumbuhan ekonomi sebagai variabel respon, serta variabel prediktornya adalah rata-rata lama sekolah dan angka harapan hidup. Data-data tersebut merupakan data longitudinal karena struktur datanya merupakan gabungan dari data cross section yang terdiri dari beberapa subyek pengamatan (kabupaten/kota di Provinsi Papua) dan memiliki series data enam tahun. Kemudian dari variabel respon dan prediktor yang digunakan, peneliti melakukan eksplorasi awal terhadap pola hubungan perilaku data, dari hasil eksplorasi data terindikasi bahwa bentuk pola hubungan kedua variabel tersebut yang ditunjukkan dengan scatter plot kurva regresi adalah tidak mengikuti pola tertentu (tidak berpola), sehingga bisa menggunakan pendekatan analisis regresi nonparametrik. Selain itu juga, dari pola data yang terbentuk adanya bentuk dan arah perpotongan yang berbeda-beda. Untuk

memperoleh model regresi nonparametrik yang baik hasilnya, perlakuan yang perlu diberikan terhadap pola data tersebut yaitu dengan memberikan titik-titik potong (titik knot), maka regresi nonparametrik yang sesuai dengan kriteria tersebut adalah *spline truncated*. Dimana pada model regresi nonparametrik *spline truncated* terdapat komponen *truncated* yang menggambarkan jumlah dan posisi titik-titik knot yang dibentuk. Setelah diperoleh estimasi parameter yang dapat membangun model regresi *spline truncated*, langkah selanjutnya adalah perlu dilakukan analisis statistik inferensia, salah satunya adalah pengujian hipotesis simultan terhadap estimasi parameter-parameter yang dihasilkan. Pengujian hipotesis simultan ini bertujuan untuk melihat apakah secara statistik, parameter yang dihasilkan signifikan atau tidak terhadap model.

1.2. Rumusan Permasalahan

Berdasarkan uraian dari latar belakang, maka terdapat beberapa permasalahan yang perlu dirumuskan untuk diselesaikan pada penelitian ini. Pertama adalah bagaimanakah pengujian hipotesis yang dirumuskan dalam penelitian ini, yang akan meliputi bagaimana menyusun bentuk dari hipotesa statistiknya (hipotesis), bagaimana penurunan untuk mendapatkan statistik uji dan distribusi datanya, dan bagaimana daerah kritis (daerah penolakan H_0) serta pengambilan keputusan terhadap hasil pengujian hipotesis dari regresi nonparametrik *spline truncated*, khususnya pada data longitudinal. Oleh karena itu, diperlukan kajian mengenai pengujian hipotesis secara simultan untuk regresi nonparametrik *spline truncated* pada data longitudinal. Kedua adalah adanya permasalahan mengenai laju pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua yang masih rendah dan berfluktuasi sehingga diperlukan suatu kajian untuk mengetahui variabel-variabel apa saja yang secara statistik terbukti mempengaruhi laju pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua. Dari hasil identifikasi awal dengan *scatter plot* bahwa bentuk kurva regresi antara variabel respon dan variabel prediktor tidak diketahui polanya, maka dilakukan kajian analisis statistika dengan pendekatan regresi nonparametrik *spline truncated* yang dapat digunakan untuk memodelkan laju pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua.

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan permasalahan yang telah dijelaskan, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Melakukan kajian mengenai pengujian hipotesis simultan untuk parameter dalam model regresi nonparametrik *spline truncated* pada data longitudinal.
2. Memodelkan laju pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua tahun 2011-2016 menggunakan regresi nonparametrik *spline truncated* dan menyelidiki variabel-variabel yang berpengaruh terhadap pertumbuhan ekonomi.

1.4. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang ingin dicapai dari hasil akhir penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Membuka wawasan keilmuan kepada penulis khususnya dan kepada masyarakat pada umumnya mengenai pengujian hipotesis parameter dalam regresi nonparametrik *spline truncated* pada data longitudinal.
2. Menghasilkan penurunan uji hipotesis regresi nonparametrik *spline truncated* sehingga bisa digunakan sebagai referensi dalam melakukan analisis data.
3. Memberikan informasi yang lebih rinci mengenai kondisi perekonomian Provinsi Papua berdasarkan pola hubungan antara variabel yang mempengaruhi pertumbuhan ekonomi pada titik-titik knot yang dihasilkan kepada Pemerintah Provinsi Papua untuk digunakan sebagai dasar dalam penentuan kebijakan dalam pembangunan Provinsi Papua.
4. Membantu Badan Pusat Statistik (BPS) dalam metode analisis data, khususnya untuk data-data longitudinal yang sesuai dengan regresi nonparametrik *spline truncated*.

1.5. Batasan Permasalahan

Adapun batasan permasalahan yang dibuat sebagai dasar pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Pemilihan banyaknya titik knot dibatasi dengan menggunakan satu titik knot.
2. Metode yang digunakan untuk menentukan banyaknya titik knot dan lokasi titik knot optimum adalah metode *Generalized Cross Validation (GCV)*.
3. Pada aplikasi model regresi nonparametrik *spline truncated*, fungsi spline yang digunakan adalah spline linier.

Bab II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Analisis Regresi Parametrik

Analisis Regresi adalah suatu metode yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel respon dengan beberapa variabel prediktor (Netter dkk, 1983). Analisis regresi digunakan untuk menganalisis data variabel respon yang berupa data kontinyu dan diskrit (Liang dan Zeger, 1993). Analisis regresi juga merupakan suatu analisis statistika yang digunakan untuk menjelaskan hubungan antara variabel prediktor dengan variabel respon (Draper dan Smith, 1992). Secara umum, model analisis regresi dengan pasangan data (x_i, y_i) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$$

dimana y_i merupakan variabel respon atau variabel dependen, x_i merupakan variabel prediktor atau variabel independen dengan $f(x_i)$ adalah kurva regresinya dan ε_i adalah *error random* yang diasumsikan identik, independen, dan berdistribusi normal dengan mean adalah nol dan varians σ^2 atau $N(0, \sigma^2)$.

Dalam penerapannya, analisis regresi bertujuan untuk memperoleh estimasi parameter yang sesuai dengan bentuk kurva regresi. Untuk memperoleh estimasi kurva regresi digunakan tiga pendekatan, yaitu pendekatan regresi parametrik, regresi semiparametrik, dan regresi nonparametrik. Apabila diasumsikan bentuk kurva regresi diketahui, maka dapat digunakan pendekatan regresi parametrik, namun apabila diasumsikan bentuk kurva regresi sebagian diketahui, maka dapat digunakan pendekatan regresi semiparametrik, dan apabila diasumsikan bentuk kurva regresi tidak diketahui, maka digunakan pendekatan regresi nonparametrik (Eubank, 1999; Budiantara, 2005).

Pendugaan bentuk kurva regresi digunakan untuk menjelaskan hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor. Salah satu pendekatan yang paling sering digunakan adalah pendekatan regresi parametrik, dimana asumsi yang mendasari pendekatan ini adalah bahwa bentuk kurva regresi dapat digambarkan oleh sekumpulan parameter tertentu atau dapat digambarkan dalam pola tertentu (Hardle, 1990). Pengetahuan terhadap bentuk kurva regresi dapat memudahkan

dalam memilih salah satu bentuk keluarga kurva atau fungsi regresi yang memungkinkan dari berbagai alternatif yang ada, kemudian menempatkan fungsi regresi tersebut ke dalam proses suatu inferensi. Jika bentuk kurva atau fungsi regresi yang dipilih bisa tepat, maka analisis regresi parametrik akan lebih menguntungkan, khususnya metode inferensi dan interpretasi parameteranya akan lebih sederhana. Oleh karena itu, analisis regresi parametrik lebih sering digunakan apabila terdapat informasi tentang bentuk kurva regresinya (Eubank, 1999).

Pendekatan model regresi parametrik memiliki sifat yang sangat baik dalam statistik inferensia misalnya sederhana, mudah interpretasinya, tak bias, estimator linier, efisien, konsisten, dan *Best Linier Unbiased Estimator* (BLUE) yang tidak dimiliki oleh pendekatan model regresi nonparametrik (Budiantara, 2009). Secara matematis, fungsi regresi parametrik linier atau kurva regresi parametrik bisa ditulis dengan persamaan sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

dimana y_i merupakan variabel respon, β_0 dan β_1 adalah parameter-parameter yang tidak diketahui dan *error random* ε_i diasumsikan identik, independen, dan berdistribusi normal dengan mean adalah nol dan varians σ^2 atau $N(0, \sigma^2)$. Persamaan (2.1) merupakan bentuk umum regresi parametrik untuk satu variabel prediktor.

Salah satu bentuk regresi parametrik yang sering digunakan adalah regresi linier berganda. Kelebihannya adalah sederhana dalam penghitungannya dan mudah dalam interpretasinya. Bentuk umum persamaan regresi linier berganda dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Model regresi linier berganda dari persamaan (2.2) dapat disederhanakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_i &= \tilde{X}_i^T \tilde{\beta} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n \\ \tilde{y} &= \mathbf{X} \tilde{\beta} + \tilde{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.3)$$

dengan:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ \mathbf{1} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \text{ dan } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan estimator parameter-parameter dari persamaan (2.3) biasanya digunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS) atau *Maximum Likelihood* (Wahba, 1990). Estimator untuk parameter β adalah:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{y}}$$

2.2. Regresi Nonparametrik *Spline truncated* untuk Data Cross Section

Bentuk kurva regresi antara variabel prediktor dan variabel respon tidak selalu diketahui bentuknya. Jika memaksakan menggunakan regresi parametrik maka model yang dihasilkan tidak sesuai dengan bentuk pola hubungannya, sehingga menghasilkan *error* yang cukup besar. Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor yang tidak diketahui informasi masa lalunya yang lengkap adalah dengan regresi nonparametrik Eubank (1999). Berdasarkan kenyataan tersebut, maka secara visual pola yang diberikan oleh variabel prediktor z dan variabel respon y tidak mempunyai pola yang jelas. Pendekatan regresi nonparametrik memiliki fleksibilitas yang tinggi, karena data diharapkan mencari sendiri bentuk estimasi kurva regresinya tanpa dipengaruhi oleh faktor subyektifitas peneliti (Eubank, 1999).

Secara umum model regresi nonparametrik memiliki bentuk fungsi sebagai berikut:

$$y_i = f(z_i) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

dengan y_i adalah variabel respon ke- i , sedangkan fungsi $f(z_i)$ merupakan kurva regresi, dengan z_i sebagai variabel prediktor dan ε_i adalah *error random* yang diasumsikan identik, independen, dan berdistribusi normal dengan rata-rata adalah nol dan varians σ^2 (Wahba, 1990). Persamaan (2.4) disebut juga persamaan regresi nonparametrik univariabel karena terdiri dari satu variabel respon dan satu variabel prediktor. Jika dalam regresi nonparametrik terdapat satu variabel respon dan lebih

dari satu variabel prediktor, maka disebut regresi nonparametrik multivariabel (Budiantara, 2004). Jika diberikan data berpasangan $(z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{ip}, y_i)$ dan asumsikan kurva regresi f bersifat *additive*, maka hubungan antara $(z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{ip})$ dan y_i dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_i &= f(z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{ip}) + \varepsilon_i \\ &= \sum_{l=1}^p f(z_{il}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.5)$$

dengan y_i adalah variabel respon dan f adalah kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya.

Ada banyak pendekatan dalam regresi nonparametrik, misalnya spline, kernel, deret *fourier*, *wavelet*, dan lain-lain. Spline merupakan pendekatan yang sering digunakan dalam regresi nonparametrik. Regresi spline mempunyai suatu basis fungsi yang dalam proses estimasi parameternya menggunakan optimasi. Dalam *spline truncated* terdapat dua komponen yaitu komponen polinomial dan komponen *truncated*. Regresi spline mempunyai keunggulan dalam menyesuaikan pola data yang perubahannya tajam dengan menggunakan titik-titik knot. Titik knot adalah titik yang menunjukkan perubahan data pada sub-sub interval (Budiantara, 2009). Secara umum, bentuk fungsi *spline truncated* dengan derajat m dengan titik-titik knot k_1, k_2, \dots, k_r dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(z_i) = \sum_{q=1}^m \beta_q z_i^q + \sum_{l=1}^r \gamma_l (z_i - k_l)_+^m, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

dengan:

$\sum_{q=1}^m \beta_q z_i^q$ merupakan komponen polinomial dan $\sum_{l=1}^r \gamma_l (z_i - k_l)_+^m$ merupakan komponen *truncated* dengan:

$$(z_i - k_l)_+^m = \begin{cases} (z_i - k_l)^m, & z_i \geq k_l \\ 0, & z_i < k_l \end{cases}$$

Jika kurva regresi $f(z_i)$ dalam model regresi pada persamaan (2.5) dihipotesiskan dengan fungsi *spline truncated* pada persamaan (2.6) maka didapat model regresi *spline truncated*.

2.3. Regresi Nonparametrik *Spline truncated* pada Data Longitudinal

Data longitudinal adalah data dari hasil pengamatan dan pengukuran suatu individu yang sama pada beberapa periode waktu tertentu, yang berbeda dengan

data *cross section* adalah dimana data dari masing-masing individu diamati hanya sekali waktu (Diggle dkk, 2002). Pada data longitudinal, antar subyek yang diamati diasumsikan independen satu sama lainnya, tetapi terdapat korelasi antar pengamatan di dalam subyek yang sama (Wu dan Zhang, 2006). Adanya korelasi antar pengamatan di dalam subyek yang sama berpengaruh terhadap metode yang digunakan untuk mendapatkan estimasi parameter. Perbedaan antara data longitudinal dan data *time series* adalah data longitudinal tersusun atas sejumlah runtun waktu data yang pendek, karena memungkinkan hanya terdiri dari dua waktu pengukuran yang berbeda untuk setiap obyeknya, sedangkan data *time series* kumpulan datanya berdasarkan *series* waktu yang relatif lebih panjang dan dapat terdiri dari satu obyek saja, misalnya data inflasi Kota Jayapura tahun 2005-2015 yang menyajikan data inflasi bulanan dengan *series* yang cukup panjang

Data longitudinal menyajikan data dengan wilayah yang lebih banyak, namun biasanya dengan *series* yang lebih pendek, contohnya adalah data pertumbuhan ekonomi kabupaten/kota di Provinsi Papua tahun 2011-2015. Persamaan (2.6) merupakan suatu bentuk model regresi *spline truncated* dengan menggunakan data *cross section*. Model tersebut menggunakan n obyek pengamatan pada suatu waktu tertentu. Jika n obyek tersebut diamati secara berulang dalam kurun waktu tertentu, maka model tersebut dapat dikembangkan menjadi model regresi *spline truncated* pada data longitudinal. Secara umum, model regresi *spline truncated* pada data longitudinal dapat dituliskan pada persamaan berikut:

$$y_{ij} = f(z_{ij}) + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, t$$

dengan:

$$f(z_{ij}) = \sum_{q=1}^m \beta_{qi} z_{ij}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{li} (z_{ij} - k_{li})_+^m, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, t \quad (2.7)$$

$\sum_{q=1}^m \beta_{qi} z_{ij}^q$ merupakan komponen polinomial, sedangkan $\sum_{l=1}^r \gamma_{li} (z_{ij} - k_{li})_+^m$ merupakan komponen *truncated* dengan:

$$(z_{ij} - k_{li})_+^m = \begin{cases} (z_{ij} - k_{li})^m, & z_{ij} \geq k_{(l+m)i} \\ 0, & z_{ij} < k_{(l+m)i} \end{cases}$$

Persamaan (2.7) merupakan bentuk regresi *spline truncated* longitudinal dengan satu variabel prediktor. Jika variabel prediktor yang digunakan sebanyak p , maka

menghasilkan model regresi *spline truncated* multivariabel longitudinal sebagai berikut:

$$f(z_{ij}) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{qi} z_{ijk}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{li} (z_{ijk} - k_{li})_+^m \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, t$$

Salah satu metode untuk mendapatkan estimasi parameter dalam analisis regresi adalah *Least Square*. Ada perbedaan penggunaan antara metode *Least Square* pada data *cross section* dan data longitudinal. Pada data *cross section*, estimasi parameter bisa menggunakan *Ordinary Least Square* (OLS). Metode *Least Square* pada data longitudinal harus mempertimbangkan korelasi antar pengamatan dalam subyek yang sama sehingga metode yang digunakan adalah *Weighted Least Square* (WLS). Persamaan (2.7) jika dituliskan dalam bentuk notasi matriks adalah sebagai berikut:

$$\tilde{y} = \mathbf{Z}\tilde{\beta} + \mathbf{Z}(\tilde{k})\tilde{\gamma} + \tilde{\varepsilon}. \quad (2.8)$$

dengan:

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix}; \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{z}_n \end{bmatrix}; \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_n \end{bmatrix}; \mathbf{Z}(\tilde{k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(\tilde{k}) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_1(\tilde{k}) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{z}_1(\tilde{k}) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_1 \\ \tilde{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}_n \end{bmatrix}; \tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 \\ \tilde{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\varepsilon}_n \end{bmatrix}; \tilde{k} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{rn} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan model persamaan (2.8), estimator $\tilde{\delta}$ diperoleh dengan menyelesaikan optimasi WLS sebagai berikut:

$$\min_{\tilde{\beta} \in R, \tilde{\gamma} \in R} \left\{ (\tilde{y} - \mathbf{Z}\tilde{\beta} - \mathbf{Z}(\tilde{k})\tilde{\gamma})^T \mathbf{W}(\tilde{y} - \mathbf{Z}\tilde{\beta} - \mathbf{Z}(\tilde{k})\tilde{\gamma}) \right\} \quad (2.9)$$

dimana \tilde{y} merupakan vektor yang memuat respon berukuran $nt \times 1$, matriks \mathbf{Z} merupakan matriks yang memuat prediktor berukuran $nt \times ((m+r)np)$ yang tergantung pada banyaknya titik knot. $\tilde{\delta}$ merupakan vektor yang memuat parameter berukuran $((m+r)np) \times 1$, $\tilde{\varepsilon}$ merupakan vektor error berukuran $nt \times 1$ dan \mathbf{W} adalah matriks pembobot berukuran $nt \times nt$ dan berisi diagonal $(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_n)$.

Wu dan Zhang (2006) menyatakan ada tiga metode dalam menentukan matriks bobot, yaitu:

1. $\mathbf{W}_i = N^{-1}\mathbf{I}_{n_i}$, bobot ini memberikan perlakuan yang sama pada setiap pengamatan.
2. $\mathbf{W}_i = n^{-1}\mathbf{I}_{n_i}$, bobot ini memberikan perlakuan yang sama setiap pengamatan dalam subyek.
3. $\mathbf{W}_i = \widehat{cov}(\tilde{\mathbf{y}})$, bobot ini memperhitungkan korelasi dalam subyek pengamatan.

Berdasarkan kajian yang telah dilakukan oleh Astuti (2017), telah diperoleh penyelesaian optimasi persamaan (2.9) untuk memperoleh estimasi parameter untuk $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{Z}\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{Z}(\tilde{k})\tilde{\boldsymbol{\gamma}})^T \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{Z}\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{Z}(\tilde{k})\tilde{\boldsymbol{\gamma}}) &= (\tilde{\mathbf{y}}^T - \tilde{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{Z}^T - \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{Z}(\tilde{k})^T) \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{Z}\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{Z}(\tilde{k})\tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \\
&= \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{W} \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\beta}} - \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \tilde{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\beta}} + \tilde{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \\
&\quad - \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\beta}} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \\
&= \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{y}} - 2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\beta}} + 2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \\
&\quad - 2\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \\
&= A(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}})
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan estimasi $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ pada persamaan (2.8), dilakukan turunan parsial $A(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}})$ terhadap $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$, sehingga diperoleh estimator untuk $\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}$ dan $\hat{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} = \mathbf{U}(\tilde{k})\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$$

$$\text{dengan } \mathbf{U}(\tilde{k}) = \mathbf{A}(\mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z})^{-1} \left\{ \mathbf{Z}^T \mathbf{W} - \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \left(\mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \right)^{-1} \mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \right\}$$

$$\text{dan } \mathbf{A} = \left\{ \mathbf{I} - (\mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \left(\mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \right)^{-1} \mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \mathbf{Z} \right\}^{-1}.$$

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}} = \mathbf{V}(\tilde{k})\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$$

$$\text{dengan } \mathbf{V}(\tilde{k}) = \mathbf{A} \left(\mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \right)^{-1} \left\{ \mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} - \mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \right\}$$

$$\text{dan } \mathbf{B} = \left\{ \mathbf{I} - \left(\mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \right)^{-1} \left(\mathbf{Z}(\tilde{k})^T \mathbf{W} \mathbf{Z} \right) \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z}(\tilde{k}) \right\}^{-1}$$

Setelah memperoleh estimator $\hat{\beta}$ dan $\hat{\gamma}$, maka model regresi *spline truncated* pada data longitudinal dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} &= \mathbf{Z}\hat{\beta} + \mathbf{Z}(\tilde{k})\hat{\gamma} \\ &= \mathbf{ZU}(\tilde{k})\tilde{\gamma} + \mathbf{Z}(\tilde{k})\mathbf{V}(\tilde{k})\tilde{\gamma} \\ &= \left(\mathbf{ZU}(\tilde{k}) + \mathbf{Z}(\tilde{k})\mathbf{V}(\tilde{k})\right)\tilde{\gamma} \\ &= \left(\mathbf{M}(\tilde{k}) + \mathbf{N}(\tilde{k})\right)\tilde{\gamma} \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}\end{aligned}$$

dengan:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\tilde{k}) &= \mathbf{ZU}(\tilde{k}) \\ \mathbf{N}(\tilde{k}) &= \mathbf{Z}(\tilde{k})\mathbf{V}(\tilde{k})\end{aligned}$$

2.4. Pemilihan Titik Knot Optimal pada Data Longitudinal

Pemilihan titik knot yang optimal merupakan hal penting dalam regresi nonparametrik spline. Salah satu metode yang digunakan untuk memilih titik knot optimal adalah *Generalized Cross Validation* (GCV). Titik knot optimal dalam menentukan model spline terbaik diperoleh dari nilai GCV terkecil (Budiantara, 2005). Fungsi GCV untuk data longitudinal diberikan oleh persamaan berikut:

$$GCV(\tilde{k}) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{[1 - n^{-1} \text{trace}(A(\tilde{k}))]^2}$$

dengan $GCV(\tilde{k})$ merupakan vektor yang memuat nilai GCV dari titik-titik knot, n adalah banyaknya pengamatan, $A(\tilde{k})$ merupakan matriks yang memuat titik knot $\tilde{k} = [k_1, k_2, \dots, k_r]^T$, dimana $A(\tilde{k}) = \mathbf{X}(k) \left[\mathbf{X}(k)^T \mathbf{X}(k) \right]^{-1} \mathbf{X}(k)^T$. Titik knot optimal diperoleh dengan mencari nilai GCV terkecil atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\min_{k_1, k_2, \dots, k_r} GCV(\tilde{k}) = \min_{k_1, k_2, \dots, k_r} \left\{ \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{[1 - n^{-1} \text{trace}(A(\tilde{k}))]^2} \right\}$$

Berdasarkan kajian (Astuti, 2016) tentang regresi nonparametrik spline truncated untuk data longitudinal, diperoleh formula GCV untuk data longitudinal yaitu:

$$\min_{k_{11}, k_{21}, \dots, k_{rn}} GCV(\tilde{k}) = \min_{k_{11}, k_{21}, \dots, k_{rn}} \left\{ \frac{n^{-1} \left\| \left(I - (M(\tilde{k}) + N(\tilde{k})) \right) \tilde{y} \right\|^2}{\left[1 - n^{-1} \text{trace}(N(\tilde{k}) + N(\tilde{k})) \right]^2} \right\}$$

2.5. Likelihood Ratio Test (LRT)

Jika X_1, X_2, \dots, X_n adalah sampel random dari populasi dengan *probability density function* (pdf) $f(x|\theta)$ (θ mungkin suatu vektor), maka fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai berikut (Casella dan Berger, 2001):

$$L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = L(\theta|x) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

Selanjutnya, *likelihood ratio test* statistik untuk pengujian $H_0: \theta \in \Theta_0$ melawan $H_1: \theta \in \Theta_0^c$ dengan Θ adalah seluruh ruang parameter adalah:

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta|x)}{\sup_{\Theta} L(\theta|x)}.$$

LRT adalah suatu alat uji statistik yang mempunyai daerah penolakan dari bentuk $\{x: \lambda(x) \leq c\}$, dimana c adalah konstanta yang memenuhi $0 \leq c \leq 1$.

Jika dilakukan maksimalisasi baik itu pada seluruh ruang parameter (*unrestricted maximization*) maupun pada subset ruang parameter (*restricted maximization*), maka akan ada hubungan yang jelas antara LRT dan *Maximum Likelihood Estimator* (MLE). Anggap bahwa θ merupakan estimator untuk θ yang diperoleh dari metode *Maximum Likelihood Estimator* (MLE), dengan *unrestricted maximization* dari $L(\theta|x)$. Selain itu, anggap juga bahwa $\hat{\theta}$ merupakan estimator untuk θ yang diperoleh dari metode MLE, dengan *restricted maximization* pada ruang parameter Θ_0 dimana $\theta_0 = \theta_0(x)$ adalah nilai dari $\theta \in \Theta_0$ yang memaksimumkan $L(\theta|x)$. Sehingga, formula LRT statistik adalah sebagai berikut:

$$\lambda(x) = \frac{L(\theta_0|x)}{L(\theta|x)}.$$

2.6. Pengujian Parameter dalam Regresi Parametrik

Untuk mengetahui apakah suatu variabel memberikan pengaruh yang signifikan dalam model regresi parametrik atau tidak, maka dilakukan suatu pengujian parameter. Terdapat dua macam pengujian parameter yaitu pengujian parameter secara simultan atau serentak dan pengujian parameter secara parsial atau individu.

2.6.1. Uji Simultan/Serentak

Misalkan diberi suatu model regresi multivariabel sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Hipotesis yang digunakan untuk menguji model secara simultan atau serentak adalah sebagai berikut:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

$$H_1: \text{minimal terdapat satu } \beta_j \neq 0, \text{ dimana } j = 1, 2, \dots, p$$

Statistik uji yang digunakan adalah uji F yaitu:

$$F_{hitung} = \frac{MSR}{MSE} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{p} \right) / \left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p-1} \right).$$

Banyaknya variabel prediktor adalah p , sedangkan observasi pengamatan sebanyak n . Dengan daerah penolakan adalah jika $F_{hitung} > F_{\alpha, (p, n-p-1)}$ atau tolak H_0 jika $p - \text{value} < \alpha$ yang mengindikasikan bahwa paling sedikit terdapat satu parameter yang tidak sama dengan nol atau minimal ada satu variabel prediktor yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

Tabel 2.1 Analisis Varians Model regresi

Sumber Variansi	Derajat Kebebasan	Jumlah Kuadrat	Rata-rata Kuadrat	F_{hitung}
Regresi	P	$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{p}$	
Error	n-p-1	$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p-1}$	$\frac{MSR}{MSE}$
Total	n-1	$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$		

Sumber: Drapper & Smith, 1992

Pada penelitian ini, berdasarkan pengujian hipotesis simultan untuk data *cross section* dengan multivariabel, maka akan dilakukan pengembangan lebih lanjut untuk melakukan kajian hipotesis simultan parameter multivariabel pada data longitudinal. Pengujian hipotesis simultan parameter data longitudinal ini akan dikaji untuk model regresi nonparametrik *spline truncated*.

2.6.2. Uji Parsial/Individu

Uji parsial atau individu merupakan suatu pengujian untuk parameter kurva regresi secara individu dengan menggunakan uji *t*. Hipotesis yang digunakan untuk menguji model secara parsial adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_0: \beta_1 &= 0 \text{ dan } H_1: \beta_1 \neq 0 \\ H_0: \beta_2 &= 0 \text{ dan } H_1: \beta_2 \neq 0 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ H_0: \beta_p &= 0 \text{ dan } H_1: \beta_p \neq 0 \end{aligned}$$

Statistik uji yang digunakan adalah uji *t*, dengan rumus sebagai berikut:

$$t_{hitung} = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)}$$

Dimana $se(\hat{\beta}_j)$ adalah standar error dari $\hat{\beta}_j$, dan daerah penolakan uji *t* yaitu tolak H_0 jika $|t_{hitung}| > t_{\frac{\alpha}{2}, (n-p-1)}$ atau tolak H_0 jika $p - value < \alpha$.

2.7. Teorema Dasar Terkait Aljabar Matriks

Berdasarkan Rencher dan Scaalje (2007), terdapat beberapa teorema dasar terkait dengan aljabar matriks yang digunakan untuk menyelesaikan estimasi parameter dan pengujian hipotesis secara simultan yaitu:

1. Inverse

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \text{ dan } (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

2. Idempotent

$$\text{Matriks } \mathbf{A} \text{ dikatakan idempotent jika } \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$$

3. Teorema 2.11

$$\text{Jika } \mathbf{A} \text{ adalah } n \times p \text{ dan } \mathbf{B} \text{ adalah } p \times n, \text{ maka } \text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$$

4. Teorema 2.13d

Jika matriks \mathbf{A} mempunyai rank r serta simetris dan *idempotent*, maka $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}) = r$

5. Teorema 2.14a

Jika $u = a^T x = x^T a$ dimana $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ adalah vektor konstan. Maka,

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(a^T x)}{dx} = \frac{d(x^T a)}{dx} = a$$

6. Teorema 2.14b

Jika $u = \tilde{x}^T A \tilde{x}$, dimana \mathbf{A} adalah matriks simetris konstan, maka

$$u = \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial(\tilde{x}^T A \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = 2\mathbf{A}\tilde{x}.$$

7. Teorema 2.2a

Jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah matriks dengan ukuran $n \times m$, maka $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

8. Teorema 2.2b

Jika \mathbf{A} adalah matriks ukuran $n \times p$ dan \mathbf{B} adalah matriks berukuran $p \times m$, maka $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

9. Teorema 5.5

Corollary 2 menyatakan bahwa jika $\tilde{y} \sim N(\tilde{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I})$ dan \mathbf{A} matriks simetris dengan rank r , maka $\tilde{y}^T \mathbf{A} \tilde{y} / \sigma^2$ adalah $\chi^2(r, \tilde{\mu}^T \mathbf{A} \tilde{\mu} / 2\sigma^2)$, jika dan hanya jika \mathbf{A} adalah *idempotent*.

10. Teorema 5.6b

Corollary 1 menyatakan bahwa jika $\tilde{y} \sim N(\tilde{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I})$, maka $\tilde{y}^T \mathbf{A} \tilde{y}$ dan $\tilde{y}^T \mathbf{B} \tilde{y}$ adalah *idempotent* jika dan hanya jika $\mathbf{AB} = 0$ (atau ekuivalen dengan $\mathbf{BA} = 0$)

2.8. Definisi dan Teori Pertumbuhan Ekonomi serta Faktor-Faktor yang Berpengaruh

Pertumbuhan ekonomi merupakan suatu proses perubahan kondisi perekonomian suatu Negara yang berkesinambungan menuju keadaan yang lebih baik selama periode tertentu. Pertumbuhan ekonomi berarti perkembangan kegiatan dalam perekonomian yang menyebabkan barang dan jasa yang diproduksi dalam masyarakat bertambah dan kemakmuran masyarakat meningkat. Dalam analisis makro, tingkat pertumbuhan ekonomi yang dicapai oleh suatu negara diukur dari perkembangan pendapatan nasional riil yang dicapai suatu

negara/daerah (Sukirno dalam Rustiono, 2008). Menurut Schumpeter menjelaskan bahwa pertumbuhan ekonomi diartikan sebagai peningkatan output masyarakat yang disebabkan oleh semakin banyaknya faktor produksi yang dipergunakan dalam proses produksi tanpa ada perubahan cara-cara atau teknologi itu sendiri (Boediono dalam Rustiono, 2008).

Secara umum pertumbuhan ekonomi dapat diartikan sebagai perkembangan kegiatan dalam perekonomian yang menyebabkan barang dan jasa yang diproduksi dalam masyarakat bertambah dan kemakmuran masyarakat meningkat. Istilah pertumbuhan ekonomi menerangkan atau mengukur prestasi dan perkembangan suatu perekonomian. Pertumbuhan ekonomi dapat diartikan sebagai *Gross National Product* (GNP) atau *Gross Domestic Product* (GDP) tanpa memandang apakah kenaikan itu lebih besar atau lebih kecil dari tingkat pertumbuhan penduduk, atau apakah perubahan struktur ekonomi terjadi atau tidak (Arsyad dalam Setiyawati dan Hamzah, 2007).

Salah satu indikator untuk mengukur keberhasilan pembangunan adalah pertumbuhan ekonomi (BPS, 2016). Pertumbuhan ekonomi merupakan tingkat kegiatan ekonomi yang berlaku dari tahun ke tahun. Suatu perekonomian dikatakan mengalami pertumbuhan jika tingkat kegiatan ekonominya adalah lebih tinggi dari pencapaian tahun sebelumnya. Untuk mengetahui tingkat pertumbuhan ekonomi harus dibandingkan dengan pendapatan nasional atau regional dari berbagai tahun. Laju pertumbuhan PDRB akan memperlihatkan proses kenaikan output perkapita dalam jangka panjang. Penekanan pada “proses” karena mengandung unsur dinamis, perubahan atau perkembangan. Oleh karena itu, pemahaman indikator pertumbuhan ekonomi biasanya dilihat dalam kurun waktu tertentu, misalnya tahunan. Aspek tersebut relevan untuk dianalisa sehingga kebijakan-kebijakan ekonomi yang diterapkan oleh pemerintah untuk mendorong aktivitas perekonomian domestik dapat dinilai efektifitasnya.

Kinerja perekonomian pada skala nasional digunakan data Produk Domestik Bruto (PDB), sedangkan pada skala regional digunakan data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB). Untuk penghitungan PDRB, ada tiga pendekatan yang digunakan yaitu pendekatan lapangan usaha, pendekatan pengeluaran dan pendekatan pendapatan. Sampai saat ini, pendekatan yang masih digunakan adalah

pendekatan lapangan usaha dan pendekatan pengeluaran. Penghitungan PDB dan PDRB menurut lapangan usaha dilakukan dengan menghitung nilai tambah bruto dari 17 kategori yaitu: Pertanian, kehutanan dan perikanan; Pertambangan dan penggalian; Industri pengolahan; Pengadaan listrik dan gas; Konstruksi; Perdagangan besar dan eceran, reparasi mobil dan sepeda motor; Transportasi dan pergudangan; Informasi dan komunikasi; Jasa keuangan dan asuransi; Real estate; Jasa perusahaan; Administrasi pemerintahan, pertahanan dan jaminan sosial wajib; Jasa pendidikan; Jasa kesehatan dan kegiatan lainnya; dan Jasa lainnya. Untuk PDRB menurut pengeluaran dihitung dari komponen penyusunannya yaitu Pengeluaran konsumsi rumah tangga; Pengeluaran konsumsi lembaga non profit yang melayani rumah tangga; Pengeluaran konsumsi pemerintah; Pembentukan modal tetap bruto; Perubahan inventori; Ekspor barang dan jasa; dan Impor barang dan jasa. Dari hasil yang penghitungan yang diperoleh, maka dalam penyajiannya ada dua macam yaitu PDRB atas dasar harga berlaku dan PDRB atas dasar harga konstan. Perbedaan kedua jenis penyajian tersebut yaitu penggunaan harga dan penghitungannya. Untuk PDRB atas dasar harga konstan menggunakan harga pada tahun tertentu sebagai tahun dasar dan saat ini tahun dasar yang digunakan adalah tahun dasar 2010, sedangkan PDRB atas dasar harga berlaku menggunakan harga pada tahun yang bersangkutan.

Penghitungan laju pertumbuhan ekonomi pada skala regional dapat didekati dengan laju PDRB atas dasar harga konstan. Pertumbuhan ekonomi menunjukkan pertumbuhan barang dan jasa di suatu wilayah perekonomian dalam selang waktu tertentu (BPS, 2010). Pertumbuhan yang dimaksud adalah pertumbuhan riil yang tidak terkena pengaruh perubahan harga. Secara matematis, penghitungan pertumbuhan ekonomi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\text{Laju Pertumbuhan Ekonomi (LPE)} = \frac{PDRB_t - PDRB_{t-1}}{PDRB_{t-1}} 100\%$$

dengan $PDRB_t$ adalah PDRB atas dasar harga konstan pada tahun ke t dan $PDRB_{t-1}$ adalah PDRB atas dasar harga konstan pada tahun ke t-1.

Untuk mendukung dan mendasari suatu pertumbuhan ekonomi khususnya di suatu daerah, beberapa ahli ekonomi telah membangun suatu teori pertumbuhan ekonomi regional. Pertumbuhan ekonomi regional merupakan suatu proses

pemerintah daerah dan masyarakatnya dalam mengelola sumber daya yang ada untuk menciptakan lapangan kerja baru dan merangsang perkembangan kegiatan ekonomi dalam wilayah tersebut (Arsyad dalam Rustiono, 2008). Hal ini sangat bermanfaat karena dapat melihat faktor-faktor penentu kenaikan output perkapita saling berinteraksi sehingga terjadi suatu proses pertumbuhan.

a. Angkatan Kerja dan Pertumbuhan Ekonomi

Pertumbuhan penduduk dan pertumbuhan Angkatan Kerja (AK) secara tradisional dianggap sebagai salah satu faktor positif yang memacu pertumbuhan ekonomi. Jumlah tenaga kerja yang lebih besar berarti akan menambah tingkat produksi, sedangkan pertumbuhan penduduk yang lebih besar berarti ukuran pasar domestiknya lebih besar. Selanjutnya dikatakan bahwa pengaruh positif atau negatif dari pertumbuhan penduduk tergantung pada kemampuan sistem perekonomian daerah tersebut dalam menyerap dan secara produktif memanfaatkan pertambahan tenaga kerja tersebut. Kemampuan tersebut dipengaruhi oleh tingkat dan jenis akumulasi modal dan tersedianya input dan faktor penunjang seperti kecakapan manajerial dan administrasi (Todaro, 2000).

Penduduk berumur 10 tahun ke atas terbagi sebagai Angkatan Kerja (AK) dan bukan AK. AK dikatakan bekerja bila seseorang melakukan pekerjaan dengan maksud memperoleh atau membantu memperoleh pendapatan atau keuntungan dan lamanya bekerja paling sedikit 1 jam secara terus menerus (kontinyu) selama seminggu yang lalu. Sedangkan penduduk yang tidak bekerja tetapi sedang mencari pekerjaan disebut menganggur (BPS, 2016). Jumlah AK yang bekerja merupakan gambaran kondisi dari lapangan pekerjaan yang tersedia. Semakin bertambah besar lapangan pekerjaan yang tersedia, maka akan menyebabkan semakin meningkatkan total produksi di suatu daerah.

b. Modal Manusia dan Pertumbuhan Ekonomi

Modal manusia dalam terminology ekonomi sering digunakan untuk bidang Pendidikan, kesehatan dan berbagai kapasitas manusia lainnya yang ketika bertambah dapat meningkatkan produktivitas. Pendidikan memainkan peran kunci dalam hal kemampuan suatu perekonomian untuk mengadopsi teknologi modern dan dalam membangun kapasitasnya bagi pembangunan dan

pertumbuhan ekonomi yang berkelanjutan. Kesuksesan dalam pendidikan bergantung juga pada kondisi kesehatan. Kesehatan merupakan prasyarat untuk peningkatan produktivitas. Dengan demikian, kesehatan dan Pendidikan dapat juga dilihat sebagai komponen vital dalam pertumbuhan dan pembangunan ekonomi (Todaro, 2000).

Hubungan antara pertumbuhan ekonomi dan pembangunan manusia merupakan hubungan dua arah yang kuat. Di satu sisi pertumbuhan ekonomi menyediakan sumber-sumber yang memungkinkan terjadinya perkembangan secara berkelanjutan dalam pembangunan manusia. Sementara di sisi lain, pengembangan kualitas modal manusia secara berkelanjutan merupakan contributor penting bagi pertumbuhan ekonomi. Hubungan antara pertumbuhan ekonomi dan pembangunan manusia berlangsung melalui penciptaan lapangan kerja. Aspek ini sangat penting karena penciptaan lapangan pekerjaan merupakan jembatan utama yang mengaitkan antara keduanya (UNDP dalam Rustiono, 2008).

c. Investasi dan Pertumbuhan Ekonomi

Teori ekonomi mendefinisikan investasi sebagai pengeluaran-pengeluaran untuk membeli barang-barang modal dan peralatan produksi dengan tujuan untuk mengganti dan terutama menambah barang-barang modal dalam perekonomian yang akan digunakan untuk memproduksi barang dan jasa di masa depan. Kegiatan investasi memungkinkan suatu masyarakat terus menerus meningkatkan kegiatan ekonomi dan kesempatan kerja, meningkatkan pendapatan nasional dan meningkatkan taraf kemakmuran masyarakat. Peranan ini bersumber dari tiga fungsi penting dari kegiatan investasi, yaitu (1) investasi merupakan salah satu komponen dari pengeluaran agregat, sehingga kenaikan investasi akan meningkatkan permintaan agregat, pendapatan nasional serta kesempatan kerja; (2) penambahan barang modal sebagai akibat investasi akan menambah kapasitas produksi; (3) investasi selalu diikuti oleh perkembangan teknologi (Sukirno, 2004). Dengan semakin besarnya investasi pemerintah pada barang publik maka diharapkan akan mendorong pertumbuhan sektor swasta dan rumah tangga dalam mengalokasikan sumber daya yang ada di suatu

daerah, sehingga pada akhirnya akan menyebabkan makin meningkatnya PDRB.

d. Pengeluaran Pemerintah dan Pertumbuhan Ekonomi

Pemerintah melakukan banyak sekali pengeluaran untuk membiayai kegiatan-kegiatannya. Pengeluaran tersebut selain untuk menjalankan roda pemerintah sehari-hari, juga untuk membiayai kegiatan-kegiatan yang harus menggerakkan dan merangsang perekonomian (Dumairy dalam Suryanto, 2011). Pengeluaran pemerintah adalah bagian dari kebijakan fiskal yaitu suatu tindakan pemerintah untuk mengatur jalannya perekonomian dengan cara menentukan besarnya penerimaan untuk nasional dan Anggaran Pendapatan Belanja Daerah (APBD) untuk daerah/regional (Sukirno, 2000). Tujuan dari kebijakan fiskal ini adalah dalam rangka menstabilkan harga, tingkat output maupun kesempatan kerja dan memacu pertumbuhan ekonomi.

e. Jumlah Penduduk dan Pertumbuhan Ekonomi

Menurut Solow dan Swan dalam Boediono (1999) dan Sandhika (2012) menyatakan bahwa pertumbuhan ekonomi tergantung pada penyedia faktor yang berupa penduduk, tenaga kerja, dan akumulasi modal. Berdasarkan penelitian Ansley dan Edgar di India dengan menggunakan model ekonomi makro, diperoleh bahwa pengurangan tingkat kelahiran di India akan mempercepat pertumbuhan pendapatan perkapita. Ada dua alasan yang menghasilkan kesimpulan ini. Pertama, pertumbuhan penduduk yang rendah akan mengurangi *dependency ratio* dan hal ini akan mengurangi tingkat konsumsi dan menaikkan tabungan pada setiap tingkat pendapatan yang tertentu. Kedua, pertumbuhan penduduk yang rendah juga mengurangi sumber-sumber daya yang dialokasikan ke sektor publik yang digunakan untuk menyediakan jasa-jasa sosial, dan oleh karena itu dapat dialihkan untuk investasi sehingga bias menaikkan pendapatan (Gills dalam Widarjono, 1999)

f. Ketimpangan Pendapatan dan Pertumbuhan Ekonomi

Pemerataan yang lebih adil di negara berkembang merupakan suatu kondisi atau syarat yang menunjang pertumbuhan ekonomi. Dengan demikian, semakin timpang distribusi pendapatan di suatu negara akan berdampak negatif terhadap pertumbuhan ekonomi. Semakin tidak merata pola distribusi pendapatan,

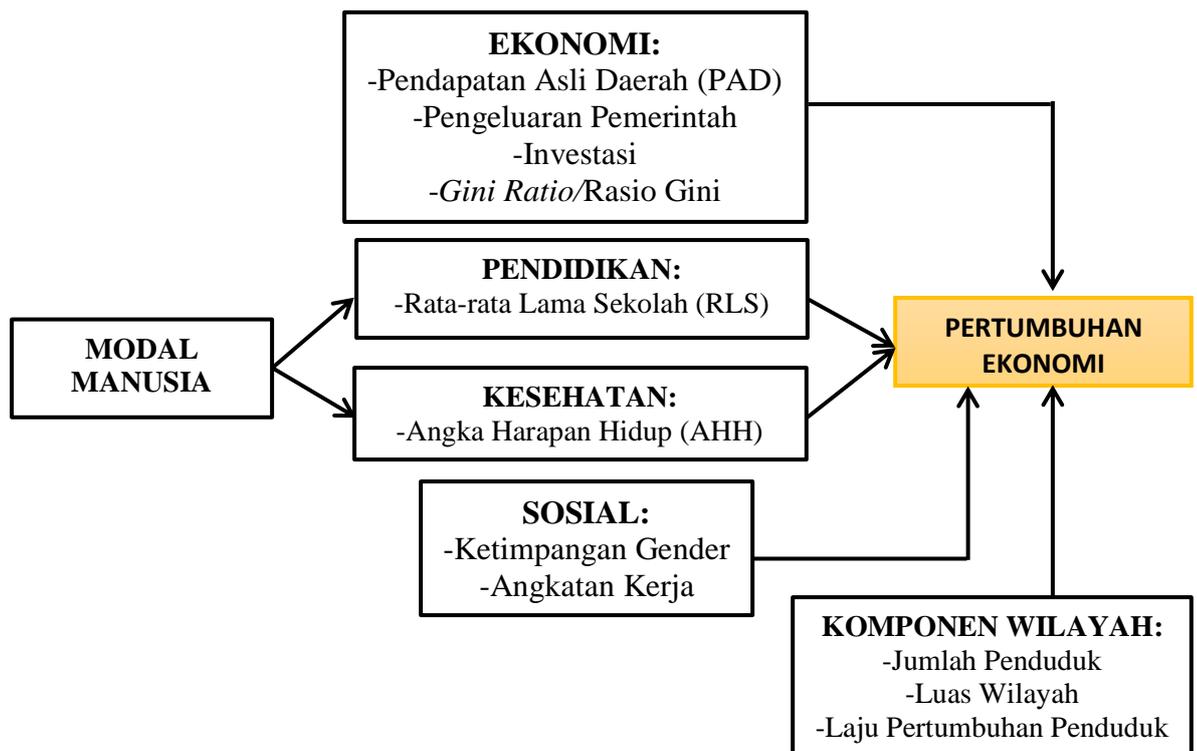
semakin tinggi pula laju pertumbuhan ekonomi, karena orang-orang kaya memiliki rasio tabungan yang lebih tinggi daripada orang-orang miskin sehingga akan meningkatkan *aggregate saving rate* yang diikuti oleh peningkatan investasi dan pertumbuhan ekonomi (Kaldor dalam Retnosari, 2006).

g. Ketimpangan Gender dan Pertumbuhan Ekonomi

Seguino dalam Harahap (2014) menyatakan beberapa argumentasi yang menjelaskan ketimpangan gender dapat berdampak negatif bagi pertumbuhan ekonomi, antara lain.

1. Kesenjangan gender dalam Pendidikan akan mengurangi jumlah rata-rata modal manusia dalam masyarakat.
2. Adanya eksternalitas dari Pendidikan kaum wanita bagi penurunan tingkat fertilitas, tingkat kematian anak, dan mendorong Pendidikan yang lebih baik bagi generasi mendatang. Penurunan fertilitas memberikan eksternalitas positif bagi penurunan angka beban ketergantungan dalam angkatan kerja.
3. Pemerataan kesempatan dalam sector Pendidikan dan pekerjaan bagi setiap gender memberikan dampak positif bagi kemampuan bersaing suatu negara dalam perdagangan internasional.
4. Bekal Pendidikan dan kesempatan kerja di sector formal yang lebih besar bagi kaum wanita akan meningkatkan *bargaining power* mereka dalam keluarga. Hal ini penting karena perbedaan pola antara perempuan dan laki-laki dalam perilaku menabung dan investasi ekonomi dan non ekonomi seperti kesehatan dan Pendidikan anak yang akan meningkatkan modal manusia generasi mendatang dan pada akhirnya mendorong pertumbuhan ekonomi.

Berdasarkan teori-teori pertumbuhan ekonomi dari para ahli, maka diperoleh beberapa faktor yang dapat mempengaruhi laju pertumbuhan ekonomi pada suatu wilayah tertentu seperti yang termuat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Skema Teori Pertumbuhan Ekonomi

2.9. Penelitian-Penelitian Terdahulu Mengenai Pertumbuhan Ekonomi

Ketimpangan distribusi pendapatan yang diukur dengan gini ratio berjalan searah dengan laju pertumbuhan ekonomi di Jawa Barat. Semakin tinggi tingkat ketimpangan pendapatan, maka pertumbuhan ekonomi di Provinsi Jawa Barat akan semakin meningkat pula (Retnosari, 2006). Selain itu juga, dari hasil penelitiannya menunjukkan bahwa laju pertumbuhan penduduk memiliki pengaruh yang negatif dan signifikan terhadap laju pertumbuhan ekonomi, yang berarti jika laju pertumbuhan penduduk meningkat maka laju pertumbuhan ekonomi Jawa Barat akan semakin menurun. Penelitian yang dilakukan oleh Ranis dan Steward (2000) mengenai pertumbuhan ekonomi Negara-negara berkembang di Amerika Latin menunjukkan bahwa kemampuan baca tulis, angka harapan hidup, investasi dan distribusi pendapatan berpengaruh positif signifikan terhadap pertumbuhan ekonomi.

Angka harapan hidup telah menjadi *proxy* yang layak dalam menentukan kondisi kesehatan terhadap pertumbuhan ekonomi. Barro dan Lee (1996) menggunakan angka harapan hidup sebagai salah satu variabel dalam menentukan

tingkat pertumbuhan ekonomi. Angka harapan hidup memiliki hubungan yang positif dan kuat dengan pertumbuhan ekonomi. Karena angka harapan hidup tidak hanya mewakili kesehatan yang baik tetapi juga kinerja seseorang. Sebagai contoh, angka harapan hidup yang tinggi mungkin beriringan dengan perilaku kerja dan kemampuan yang tinggi. Rasio angka harapan hidup perempuan dan laki-laki menjadi variabel yang mewakili ketimpangan gender dalam kesehatan.

Semakin tinggi Pendapatan Asli Daerah (PAD), maka tingkat ketergantungan fiskal daerah tersebut kepada pusat semakin berkurang. Selanjutnya, daerah lebih leluasa dan fleksibel dalam merencanakan alokasi anggaran sesuai dengan agenda ekonominya. Melalui belanja rutin, belanja pembangunan/infrastruktur, ataupun belanja lainnya, PAD sebagai sumber pembiayaan daerah diharapkan mampu menciptakan sejumlah aktivitas ekonomi baru dalam masyarakat. Dengan meningkatnya aktivitas ekonomi pada masyarakat, akan terjadi peningkatan jumlah output barang dan/atau jasa yang diikuti pula dengan meningkatnya jumlah uang yang beredar dari segi pembelanjaan yang dilakukan oleh pemerintah daerah. Selanjutnya hasil tersebut akan meningkatkan nilai PDRB dan tingkat kesejahteraan masyarakat.

Penelitian oleh Brata (2004) menemukan bahwa PAD berpengaruh signifikan dan positif terhadap pertumbuhan ekonomi. Hal ini terjadi karena daerah lebih leluasa dalam memanfaatkan PAD sesuai dengan agenda pembangunan ekonominya. Akan tetapi, hubungan antara PAD dan pertumbuhan ekonomi tersebut dapat mengarah ke hubungan negatif jika daerah tersebut terlalu ofensif dalam upaya meningkatkan penerimaan daerahnya. Sebagaimana diketahui, belakangan ini banyak pihak khususnya dunia usaha, yang mengeluhkan begitu banyaknya pajak dan/atau retribusi yang justru menekan daya saing daerah.

Kristiana (2008) meneliti tentang pengaruh faktor-faktor demografi terhadap pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Cianjur tahun 1983-2003, yang menghasilkan bahwa variabel tingkat pertumbuhan penduduk dan kepadatan penduduk berpengaruh signifikan terhadap pertumbuhan ekonomi Kabupaten Cianjur yang diukur dengan PDRB riil/kapita.

Setiati (1996) melakukan penelitian tentang pertumbuhan ekonomi di 25 Provinsi di Indonesia dengan menggunakan variabel demografi yaitu kepadatan penduduk

dan dihasilkan bahwa kepadatan penduduk berpengaruh di daerah tertentu dan relatif terhadap pertumbuhan ekonomi regional, dan secara statistik kepadatan penduduk berpengaruh positif terhadap PDRB riil. Selain itu, *dependency ratio* (rasio ketergantungan) usia tua dan muda memiliki pengaruh yang berbeda di setiap daerah penelitian.

Berdasarkan teori-teori ahli ekonomi dan penelitian-penelitian sebelumnya mengenai pertumbuhan ekonomi, maka saat ini peneliti akan melakukan penelitian mengenai rendahnya sumber daya manusia, rendahnya capaian pendidikan di suatu wilayah, adanya ketimpangan distribusi pendapatan, belum optimalnya penggunaan APBD pemerintah mencapai target, serta rendahnya capaian kualitas kesehatan terhadap pertumbuhan ekonomi. Variabel-variabel yang digunakan berdasarkan kondisi di Provinsi Papua yang menggambarkan faktor-faktor tersebut. Adapun beberapa variabel prediktor yang akan digunakan pada penelitian ini adalah:

1. Rata-rata Lama Sekolah (RLS)

Sumber daya manusia merupakan salah satu modal dalam suatu pembangunan ekonomi. Kualitas pembangunan manusia dapat dilihat dari sisi pendidikan, kesehatan dan ekonomi. Salah satu indikator untuk mengukur kualitas sumber daya manusia dari sisi pendidikan adalah rata-rata lama sekolah. Penghitungan Rata-rata Lama Sekolah (RLS) bersumber dari data Survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS). Indikator RLS menggambarkan stok yang terjadi pada dunia pendidikan. Penghitungan RLS awalnya berdasar penduduk berusia 15 tahun ke atas, namun mengalami perubahan sejak tahun 2010 yang menggunakan penduduk berusia 25 tahun ke atas tidak bersekolah lagi. Perubahan cakupan penghitungan RLS didasarkan atas rekomendasi UNDP (*United Nations Development Programme*). Rata-rata Lama Sekolah (RLS) didefinisikan sebagai jumlah tahun yang digunakan penduduk dalam menjalani pendidikan formal yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Rata – rata Lama Sekolah (RLS)} = \frac{\sum_{i=1}^n ALS_i}{n}$$

dimana:

ALS_i : Angka Lama Sekolah penduduk berusia 25 tahun ke atas ke i di suatu daerah

n : Jumlah penduduk yang berusia 25 tahun ke atas di suatu daerah.

2. Angka Harapan Hidup

Adalah rata-rata tahun hidup yang masih akan dijalani oleh seseorang yang telah berhasil mencapai umur x pada suatu tahun tertentu, dalam situasi mortalitas yang berlaku di lingkungan masyarakatnya. Idealnya angka harapan hidup dihitung berdasarkan angka kematian menurut umur (*Age Specific Death Rate/ASDR*) yang datanya diperoleh dari catatan registrasi kematian secara bertahun-tahun, sehingga dimungkinkan dibuat tabel kematian. Angka harapan hidup merupakan alat untuk mengevaluasi kinerja pemerintah dalam meningkatkan kesejahteraan penduduk pada umumnya dan meningkatkan derajat kesehatan pada khususnya. Angka harapan hidup yang rendah di suatu daerah harus diikuti dengan program pembangunan kesehatan, dan program sosial lainnya termasuk kesehatan lingkungan, kecukupan gizi dan kalori termasuk program pemberantasan kemiskinan. Sumber data lain untuk mendapatkan variabel penyusun angka harapan hidup adalah Sensus Penduduk (SP) dan Survei Penduduk Antar Sensus (SUPAS).

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Sumber Data

Data yang akan digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder kabupaten/kota di Provinsi Papua tahun 2011-2016 yang diperoleh dari publikasi dan *website* resmi Badan Pusat Statistik. Jumlah subyek dalam penelitian ini sebanyak 29 kabupaten/kota dengan pengamatan dari tahun 2011-2016 ($t = 6$).

3.2. Variabel Penelitian

Pada penelitian ini, variabel respon dan variabel prediktor yang digunakan adalah sebagai berikut:

Variabel Respon:

Y_{ij} : Laju Pertumbuhan Ekonomi (LPE)

Variabel Prediktor:

Z_{ij1} : Rata-rata Lama Sekolah (RLS)

Z_{ij2} : Angka Harapan Hidup (AHH)

dimana ij adalah indeks untuk kabupaten/kota ke- i dan pada tahun ke- j .

Berikut adalah konsep dan definisi operasional yang digunakan untuk setiap variabel penelitian yang digunakan, yaitu:

1. Laju Pertumbuhan Ekonomi (LPE)

Merupakan pertumbuhan produksi barang dan jasa di suatu wilayah perekonomian dalam selang waktu tertentu yang diperoleh dari penghitungan PDRB atas dasar harga konstan masing-masing tahun dibandingkan dengan tahun sebelumnya dan dinyatakan dalam persen.

2. Rata-rata Lama Sekolah (RLS)

Merupakan rata-rata jumlah tahun yang dihabiskan oleh penduduk berusia 25 tahun ke atas untuk menempuh semua jenis pendidikan formal yang pernah dijalani.

3. Angka Harapan Hidup (AHH)

Merupakan perkiraan rata-rata tambahan usia seseorang yang diharapkan dapat terus hidup. Angka harapan hidup juga dapat didefinisikan sebagai rata-rata jumlah tahun yang dijalani oleh seseorang setelah orang tersebut mencapai ulang tahun yang ke-x.

Struktur data longitudinal yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Struktur Data Penelitian

Kabupaten/Kota (i)	Tahun (j)	$y_{i,j}$	$z_{i,j,1}$	$z_{i,j,2}$	
1	1	$y_{1,1}$	$z_{1,1,1}$	$z_{1,1,2}$	
	2	$y_{1,2}$	$z_{1,2,1}$	$z_{1,2,2}$	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	6	$y_{1,6}$	$z_{1,6,1}$	$z_{1,6,2}$	
	2	1	$y_{2,1}$	$z_{2,1,1}$	$z_{2,1,2}$
		2	$y_{2,2}$	$z_{2,2,1}$	$z_{2,2,2}$
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	
	6	$y_{2,6}$	$z_{2,6,1}$	$z_{2,6,2}$	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	29	1	$y_{29,1}$	$z_{29,1,1}$	$z_{29,1,2}$
2		$y_{29,2}$	$z_{29,2,1}$	$z_{29,2,2}$	
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	
	6	$y_{29,6}$	$z_{29,6,1}$	$z_{29,6,2}$	

3.3. Tahapan Penelitian

Pada penelitian ini, memiliki dua tujuan yang ingin dihasilkan. Tujuan pertama adalah menurunkan pengujian hipotesis simultan untuk parameter dalam model regresi nonparametrik *spline truncated* pada data longitudinal. Oleh karena itu, tahapan penelitian yang dilakukan untuk mencapai tujuan pertama adalah sebagai berikut:

1. Buat pasangan data longitudinal $(z_{ij1}, z_{ij2}, \dots, z_{ijp}, y_{ij})$
2. Asumsikan data berpasangan pada tahapan 1 mengikuti model regresi nonparametrik multivariabel pada data longitudinal, yaitu:

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^p f(z_{ij}) + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, t; k = 1, 2, \dots, p$$

dimana $f(z_{ij})$ merupakan kurva regresi.

3. Kurva regresi $f(z_{ij})$ dihampiri dengan fungsi *spline truncated* derajat m dan titik-titik knot $k_{11}, \dots, k_{r1}, \dots, k_{1n}, \dots, k_{rn}$:

$$f(z_{ij}) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{qi} z_{ijk}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{li} (z_{ijk} - k_{li})_+^m \right)$$

4. Misalkan $\tilde{y} = \mathbf{Z}\tilde{\delta} + \tilde{\varepsilon}$, dimana $\tilde{\delta}$ adalah vektor yang memuat parameter $\tilde{\beta}$ dan $\tilde{\gamma}$, maka mencari estimasi parameter $\hat{\tilde{\beta}}$ dan $\hat{\tilde{\gamma}}$ dengan metode *Weighted Least Square* dengan menyelesaikan persamaan optimasi:

$$\min_{\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}} \{ (\tilde{y} - \mathbf{Z}\tilde{\beta} - \mathbf{Z}(\tilde{k})\tilde{\gamma})^T \mathbf{W} (\tilde{y} - \mathbf{Z}\tilde{\beta} - \mathbf{Z}(\tilde{k})\tilde{\gamma}) \}$$

5. Buat hipotesis penelitian untuk parameter model dalam regresi nonparametrik *spline truncated* untuk data longitudinal sebagai berikut:

$$H_0 : \mathbf{A}\tilde{\beta} = \tilde{c}$$

$$H_1 : \mathbf{A}\tilde{\beta} \neq \tilde{c},$$

Dimana \mathbf{A} adalah suatu matriks identitas, dan \tilde{c} adalah suatu vektor nol.

6. Tentukan ruang parameter di bawah $H_0(\omega)$

$$\omega = \{ (\mathbf{A}\tilde{\beta}, \sigma^2); \mathbf{A}\tilde{\beta} = \tilde{c}, \sigma^2 \}$$

7. Buat fungsi *likelihood* di bawah ruang ω
8. Maksimumkan fungsi *likelihood* di bawah ω ($L(\hat{\omega})$)
9. Tentukan ruang parameter di bawah Ω
10. Maksimumkan fungsi *likelihood* di bawah Ω ($L(\hat{\Omega})$)
11. Buat Rasio *likelihood* kedua komponen:

$$\lambda(z, z(\tilde{k}), y) = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}, 0 \leq \lambda \leq 1$$

12. Buat statistik uji berdasarkan langkah nomor 10
13. Dapatkan distribusi dari statistik uji.

14. Tentukan daerah kritis untuk penolakan hipotesis H_0 , melalui:

$$\lambda(z_1, z_2, \dots, z_p, y) < c \text{ untuk suatu konstanta } c$$

Tujuan kedua penelitian ini adalah memodelkan laju pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua tahun 2011-2015 menggunakan regresi nonparametrik *spline truncated* dan menyelidiki variabel-variabel yang berpengaruh terhadap pertumbuhan ekonomi. Adapun tahapan penelitian yang dilakukan untuk mencapai tujuan tersebut adalah sebagai berikut:

1. Buat *scatter plot* pasangan data antara variabel respon (y) dengan masing-masing variabel prediktor pada masing-masing tahun,

$$(z_{i1}, y_i), (z_{i2}, y_i), (z_{i3}, y_i), (z_{i4}, y_i), \text{ dan } (z_{i5}, y_i) , i = 1, 2, \dots, n$$

2. Buat *scatter plot* pasangan data antara variabel respon (y) dengan masing-masing variabel prediktor tiap-tiap subyek pengamatan untuk *series* tahun 2011-2015,

$$(z_{j1}, y_j), (z_{j2}, y_j), (z_{j3}, y_j), (z_{j4}, y_j), \text{ dan } (z_{j5}, y_j) , j = 1, 2, \dots, t$$

3. Modelkan hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor menggunakan estimator nonparametrik *spline truncated*, dengan menggunakan 1 titik knot, 2 titik knot, 3 titik knot dan kombinasi titik knot.
4. Pilih titik knot optimal berdasarkan metode GCV yang terkecil.
5. Lakukan uji signifikansi parameter secara simultan.
6. Lakukan uji terhadap asumsi independen, identik, dan mengikuti distribusi normal untuk residualnya.
7. Buat interpretasi model regresi nonparametrik *spline truncated* dalam memodelkan pertumbuhan ekonomi Provinsi Papua tahun 2011-2015.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan tujuan penelitian yang ingin diperoleh, maka dalam bab ini akan berisikan kajian tentang pengujian hipotesis secara simultan dalam regresi nonparametrik *spline truncated* pada data longitudinal. Hasil dari kajian pengujian hipotesis simultan tersebut akan diaplikasikan pada data pertumbuhan ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016.

4.1 Estimasi Model Regresi Nonparametrik *Spline truncated* pada Data Longitudinal

Diberikan data berpasangan longitudinal $(z_{ij1}, z_{ij2}, \dots, z_{ijp}, y_{ij})$, dan hubungan data berpasangan tersebut mengikuti model regresi nonparametrik *spline truncated* sebagai berikut:

$$y_{ij} = f(z_{ij}) + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, t \quad (4.1)$$

persamaan (4.1) merupakan bentuk regresi *spline truncated* dengan satu variabel prediktor. Jika variabel prediktor yang digunakan sebanyak p , maka model regresi *spline truncated* akan menjadi:

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^p f(z_{ijk}) + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, t \quad (4.2)$$

untuk $i = 1, y_{1j} = f(z_{1j1}) + f(z_{1j2}) + \varepsilon_{1j}$

$j = 1, y_{11} = f(z_{111}) + f(z_{112}) + \varepsilon_{11}$

$j = 2, y_{1j} = f(z_{121}) + f(z_{122}) + \varepsilon_{12}$

⋮

$j = t, y_{1t} = f(z_{1t1}) + f(z_{1t2}) + \varepsilon_{1t}$

untuk $i = 2, y_{2j} = f(z_{2j1}) + f(z_{2j2}) + \varepsilon_{2j}$

$j = 1, y_{21} = f(z_{211}) + f(z_{212}) + \varepsilon_{21}$

$j = 2, y_{22} = f(z_{221}) + f(z_{222}) + \varepsilon_{22}$

⋮

$j = t, y_{2t} = f(z_{2t1}) + f(z_{2t2}) + \varepsilon_{2t}$

⋮

untuk $i = n, y_{nj} = f(z_{nj1}) + f(z_{nj2}) + \varepsilon_{nj}$

$j = 1, y_{n1} = f(z_{n11}) + f(z_{n12}) + \varepsilon_{n1}$

$$j = 2, y_{n2} = f(z_{n21}) + f(z_{n22}) + \varepsilon_{n2}$$

$$\vdots$$

$$j = t, y_{nt} = f(z_{nt1}) + f(z_{nt2}) + \varepsilon_{nt}$$

dimana kurva regresi $f(z_1, \dots, z_p, y)$ dihampiri dengan fungsi *spline truncated* dengan derajat m dan titik-titik knot $k_{11}, \dots, k_{r1}, \dots, k_{1n}, \dots, k_{rn}$ sebagai berikut:

$$\sum_{k=1}^p f(z_{ijk}) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{qi} z_{ijk}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{li} (z_{ijk} - k_{li})_+^m \right) \quad (4.3)$$

Berdasarkan persamaan (4.2) dan (4.3), maka persamaan (4.1) akan menjadi:

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{qi} z_{ijk}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{li} (z_{ijk} - k_{li})_+^m \right) + \varepsilon_{ij} \quad (4.4)$$

dengan $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \dots, \beta_{mi}, \gamma_{1i}, \gamma_{2i}, \dots, \gamma_{ri}$ adalah parameter-parameter yang tidak diketahui, sehingga model pada persamaan (4.4) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_{11} &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{q1} z_{11k}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{l1} (z_{11k} - k_{l1})_+^m \right) + \varepsilon_{11} \\ &= \beta_{11} z_{111}^q + \gamma_{11} (z_{111} - k_{11})_+^1 + \beta_{11} z_{111}^q + \gamma_{21} (z_{111} - k_{21})_+^1 + \dots + \\ &\quad \beta_{11} z_{111}^q + \gamma_{r1} (z_{111} - k_{r1})_+^1 + \beta_{11} z_{112}^q + \gamma_{11} (z_{112} - k_{11})_+^1 + \dots + \\ &\quad \beta_{11} z_{115}^q + \gamma_{r1} (z_{115} - k_{r1})_+^1 \\ y_{12} &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{q1} z_{12k}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{l1} (z_{12k} - k_{l1})_+^m \right) + \varepsilon_{12} \\ &= \beta_{11} z_{121}^q + \gamma_{11} (z_{121} - k_{11})_+^1 + \beta_{11} z_{121}^q + \gamma_{21} (z_{121} - k_{21})_+^1 + \dots + \\ &\quad \beta_{11} z_{121}^q + \gamma_{r1} (z_{121} - k_{r1})_+^1 + \beta_{11} z_{122}^q + \gamma_{11} (z_{122} - k_{11})_+^1 + \dots + \\ &\quad \beta_{11} z_{125}^q + \gamma_{r1} (z_{125} - k_{r1})_+^1 \\ &\vdots \\ y_{1t} &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{q1} z_{1tk}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{l1} (z_{1tk} - k_{l1})_+^m \right) + \varepsilon_{1t} \\ &= \beta_{11} z_{1t1}^q + \gamma_{11} (z_{1t1} - k_{11})_+^1 + \beta_{11} z_{1t1}^q + \gamma_{21} (z_{1t1} - k_{21})_+^1 + \dots + \\ &\quad \beta_{11} z_{1t1}^q + \gamma_{r1} (z_{1t1} - k_{r1})_+^1 + \beta_{11} z_{1t2}^q + \gamma_{11} (z_{1t2} - k_{11})_+^1 + \dots + \\ &\quad \beta_{11} z_{1t5}^q + \gamma_{r1} (z_{1t5} - k_{r1})_+^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{21} &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{q2} z_{21k}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{l2} (z_{21k} - k_{l2})_+^m \right) + \varepsilon_{21} \\
&= \beta_{12} z_{211}^q + \gamma_{12} (z_{211} - k_{12})_+^1 + \beta_{12} z_{211}^q + \gamma_{22} (z_{211} - k_{22})_+^1 + \cdots + \\
&\quad \beta_{12} z_{211}^q + \gamma_{r2} (z_{211} - k_{r2})_+^1 + \beta_{12} z_{212}^q + \gamma_{12} (z_{212} - k_{12})_+^1 + \cdots + \\
&\quad \beta_{12} z_{2t5}^q + \gamma_{r2} (z_{2t5} - k_{r2})_+^1 \\
y_{22} &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{q2} z_{22k}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{l2} (z_{22k} - k_{l2})_+^m \right) + \varepsilon_{22} \\
&= \beta_{12} z_{221}^q + \gamma_{12} (z_{221} - k_{12})_+^1 + \beta_{12} z_{221}^q + \gamma_{22} (z_{221} - k_{22})_+^1 + \cdots + \\
&\quad \beta_{12} z_{221}^q + \gamma_{r2} (z_{221} - k_{r2})_+^1 + \beta_{12} z_{222}^q + \gamma_{12} (z_{222} - k_{12})_+^1 + \cdots + \\
&\quad \beta_{12} z_{225}^q + \gamma_{r2} (z_{225} - k_{r2})_+^1 \\
&\vdots \\
y_{2t} &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{q2} z_{2tk}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{l2} (z_{2tk} - k_{l2})_+^m \right) + \varepsilon_{2t} \\
&= \beta_{12} z_{2t1}^q + \gamma_{12} (z_{2t1} - k_{12})_+^1 + \beta_{12} z_{2t1}^q + \gamma_{22} (z_{2t1} - k_{22})_+^1 + \cdots + \\
&\quad \beta_{12} z_{2t1}^q + \gamma_{r2} (z_{2t1} - k_{r2})_+^1 + \beta_{12} z_{2t2}^q + \gamma_{12} (z_{2t2} - k_{12})_+^1 + \cdots + \\
&\quad \beta_{12} z_{2t5}^q + \gamma_{r2} (z_{2t5} - k_{r2})_+^1 \\
&\vdots \\
y_{n1} &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{qn} z_{n1k}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{ln} (z_{n1k} - k_{ln})_+^m \right) + \varepsilon_{n1} \\
&= \beta_{1n} z_{n11}^q + \gamma_{1n} (z_{n11} - k_{1n})_+^1 + \beta_{1n} z_{n11}^q + \gamma_{2n} (z_{n11} - k_{2n})_+^1 + \cdots + \\
&\quad \beta_{1n} z_{n11}^q + \gamma_{rn} (z_{n11} - k_{rn})_+^1 + \beta_{1n} z_{n12}^q + \gamma_{1n} (z_{n12} - k_{1n})_+^1 + \cdots + \\
&\quad \beta_{1n} z_{nt5}^q + \gamma_{rn} (z_{nt5} - k_{rn})_+^1 \\
y_{n2} &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{qn} z_{n2k}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{ln} (z_{n2k} - k_{ln})_+^m \right) + \varepsilon_{n2} \\
&= \beta_{2n} z_{n21}^q + \gamma_{1n} (z_{n21} - k_{1n})_+^1 + \beta_{1n} z_{n21}^q + \gamma_{2n} (z_{n21} - k_{2n})_+^1 + \cdots + \\
&\quad \beta_{1n} z_{n21}^q + \gamma_{rn} (z_{n21} - k_{rn})_+^1 + \beta_{1n} z_{n22}^q + \gamma_{1n} (z_{n22} - k_{1n})_+^1 + \cdots + \\
&\quad \beta_{1n} z_{n25}^q + \gamma_{rn} (z_{n25} - k_{rn})_+^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
y_{nt} &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{q=1}^m \beta_{qn} z_{ntk}^q + \sum_{l=1}^r \gamma_{ln} (z_{ntk} - k_{ln})_+^m \right) + \varepsilon_{nt} \\
&= \beta_{1n} z_{nt1}^q + \gamma_{1n} (z_{nt1} - k_{1n})_+^1 + \beta_{1n} z_{nt1}^q + \gamma_{2n} (z_{nt1} - k_{2n})_+^1 + \dots + \\
&\quad \beta_{1n} z_{nt1}^q + \gamma_{rn} (z_{nt1} - k_{rn})_+^1 + \beta_{1n} z_{nt2}^q + \gamma_{1n} (z_{nt2} - k_{1n})_+^1 + \dots + \\
&\quad \beta_{1n} z_{nt5}^q + \gamma_{rn} (z_{nt5} - k_{rn})_+^1
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, maka model pada persamaan (4.2) dapat disajikan dalam bentuk vektor dan matriks sebagai berikut:

Vektor respon:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_1 &= (y_{11} \quad y_{12} \quad \dots \quad y_{1t})^T \\
\tilde{y}_2 &= (y_{21} \quad y_{22} \quad \dots \quad y_{2t})^T \\
&\vdots \\
\tilde{y}_n &= (y_{n1} \quad y_{n2} \quad \dots \quad y_{nt})^T
\end{aligned}$$

Matriks prediktor:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \begin{bmatrix} z_{111} & \dots & z_{111}^m & \dots & z_{11p} & \dots & z_{11p}^m \\ z_{121} & \dots & z_{121}^m & \dots & z_{12p} & \dots & z_{12p}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{1t1} & \dots & z_{1t1}^m & \dots & z_{1tp} & \dots & z_{1tp}^m \end{bmatrix} \\
Z_2 &= \begin{bmatrix} z_{211} & \dots & z_{211}^m & \dots & z_{21p} & \dots & z_{21p}^m \\ z_{221} & \dots & z_{221}^m & \dots & z_{22p} & \dots & z_{22p}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{2t1} & \dots & z_{2t1}^m & \dots & z_{2tp} & \dots & z_{2tp}^m \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
Z_n &= \begin{bmatrix} z_{n11} & \dots & z_{n11}^m & \dots & z_{n1p} & \dots & z_{n1p}^m \\ z_{n21} & \dots & z_{n21}^m & \dots & z_{n2p} & \dots & z_{n2p}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{nt1} & \dots & z_{nt1}^m & \dots & z_{ntp} & \dots & z_{ntp}^m \end{bmatrix} \\
Z_1(\tilde{k}) &= \begin{bmatrix} (z_{111} - k_{11})_+^m & \dots & (z_{111} - k_{r1})_+^m & \dots & (z_{111} - k_{1p})_+^m & \dots & (z_{111} - k_{rp})_+^m \\ (z_{121} - k_{11})_+^m & \dots & (z_{121} - k_{r1})_+^m & \dots & (z_{121} - k_{1p})_+^m & \dots & (z_{121} - k_{rp})_+^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (z_{1t1} - k_{11})_+^m & \dots & (z_{1t1} - k_{r1})_+^m & \dots & (z_{1t1} - k_{1p})_+^m & \dots & (z_{1t1} - k_{rp})_+^m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$Z_2(\tilde{k}) = \begin{bmatrix} (z_{211} - k_{11})_+^m & \dots & (z_{211} - k_{r1})_+^m & \dots & (z_{211} - k_{1p})_+^m & \dots & (z_{211} - k_{rp})_+^m \\ (z_{221} - k_{11})_+^m & \dots & (z_{221} - k_{r1})_+^m & \dots & (z_{221} - k_{1p})_+^m & \dots & (z_{221} - k_{rp})_+^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (z_{2t1} - k_{11})_+^m & \dots & (z_{2t1} - k_{r1})_+^m & \dots & (z_{2t1} - k_{1p})_+^m & \dots & (z_{2t1} - k_{rp})_+^m \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$Z_n(\tilde{k}) = \begin{bmatrix} (z_{n11} - k_{11})_+^m & \dots & (z_{n11} - k_{r1})_+^m & \dots & (z_{n11} - k_{1p})_+^m & \dots & (z_{n11} - k_{rp})_+^m \\ (z_{n21} - k_{11})_+^m & \dots & (z_{n21} - k_{r1})_+^m & \dots & (z_{n21} - k_{1p})_+^m & \dots & (z_{n21} - k_{rp})_+^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (z_{nt1} - k_{11})_+^m & \dots & (z_{nt1} - k_{r1})_+^m & \dots & (z_{nt1} - k_{1p})_+^m & \dots & (z_{nt1} - k_{rp})_+^m \end{bmatrix}$$

Vektor parameter:

$$\tilde{\beta}_1 = (\beta_{11}, \dots, \beta_{m1}, \dots, \beta_{1p}, \dots, \beta_{mp})^T$$

$$\tilde{\beta}_2 = (\beta_{12}, \dots, \beta_{m2}, \dots, \beta_{2p}, \dots, \beta_{mp})^T$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\beta}_n = (\beta_{1n}, \dots, \beta_{mn}, \dots, \beta_{np}, \dots, \beta_{mp})^T$$

$$\tilde{\gamma}_1 = (\gamma_{11}, \dots, \gamma_{r1}, \dots, \gamma_{1p}, \dots, \gamma_{rp})^T$$

$$\tilde{\gamma}_2 = (\gamma_{12}, \dots, \gamma_{r2}, \dots, \gamma_{2p}, \dots, \gamma_{rp})^T$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\gamma}_n = (\gamma_{1n}, \dots, \gamma_{rn}, \dots, \gamma_{np}, \dots, \gamma_{rp})^T$$

Vektor error:

$$\tilde{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{12} \quad \dots \quad \varepsilon_{1t})^T$$

$$\tilde{\varepsilon}_2 = (\varepsilon_{21} \quad \varepsilon_{22} \quad \dots \quad \varepsilon_{2t})^T$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\varepsilon}_n = (\varepsilon_{n1} \quad \varepsilon_{n2} \quad \dots \quad \varepsilon_{nt})^T$$

Dari uraian vektor dan matriks tersebut, maka persamaan (4.2) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\tilde{y} = \mathbf{Z}\tilde{\beta} + \mathbf{Z}(\tilde{k})\tilde{\gamma} + \tilde{\varepsilon} \quad (4.5)$$

dengan:

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix}; \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{z}_n \end{bmatrix}; \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_n \end{bmatrix}; \mathbf{Z}(\tilde{k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(\tilde{k}) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_1(\tilde{k}) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{z}_1(\tilde{k}) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix}; \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 \\ \tilde{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\varepsilon}_n \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{rn} \end{bmatrix}$$

4.1.1 Perumusan Uji Hipotesis

Diberikan model regresi nonparametrik *spline truncated* pada data longitudinal dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{k}})) \tilde{\boldsymbol{\delta}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.10)$$

dengan

$$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix}_{nt \times 1}; \mathbf{T} = [\mathbf{Z} \quad \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{k}})]_{nt \times (np+nrp)}; \tilde{\boldsymbol{\delta}} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \end{bmatrix}_{(np+nrp) \times 1}; \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 \\ \tilde{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\varepsilon}_n \end{bmatrix}_{nt \times 1}$$

respon $\tilde{\mathbf{y}}$ merupakan vektor berukuran $nt \times 1$, matriks $\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{k}})) = (\mathbf{Z} \quad \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{k}}))$, \mathbf{Z} merupakan matriks yang memuat prediktor komponen polinomial yang berukuran $nt \times 1$ dan $\mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{k}})$ adalah matriks yang memuat komponen truncated nonparametrik yang berukuran $nt \times nrp$ yang tergantung pada titik-titik knot $\tilde{\mathbf{k}}$ yang diberikan yaitu $\tilde{\mathbf{k}}$ adalah titik-titik knot dari $k_{11}, \dots, k_{r1}, \dots, k_{1n}, \dots, k_{rn}$. $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ merupakan vector yang memuat parameter yang berukuran $\tilde{\beta}$ dan $\tilde{\gamma}$ yang berukuran $(np + nrp) \times 1$, dan $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ merupakan vector *error*. Jika diketahui $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim N(\tilde{\mathbf{0}}, \sigma^2 \mathbf{W})$, maka $\tilde{\mathbf{y}} \sim N(\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{k}})) \tilde{\boldsymbol{\delta}}, \sigma^2 \mathbf{W})$,

dimana

$$\tilde{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \vdots \\ \tilde{0} \end{pmatrix} \text{ dan } \sigma^2 \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \mathbf{W}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{W}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \sigma^2 \mathbf{W}_n \end{bmatrix}$$

maka rumusan hipotesis simultan yang digunakan untuk menguji signifikansi parameter model regresi nonparametrik *spline truncated* pada data longitudinal yaitu:

$$H_0: \tilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{0}$$

$$H_1: \text{minimal ada satu komponen dalam } \tilde{\boldsymbol{\delta}} \neq \mathbf{0} \quad (4.11)$$

dimana

$$\tilde{\delta} = \begin{pmatrix} \beta_{11}, \dots, \beta_{m1}, \dots, \beta_{1p}, \dots, \beta_{mp} \\ \beta_{12}, \dots, \beta_{m2}, \dots, \beta_{2p}, \dots, \beta_{mp} \\ \vdots \\ \beta_{1n}, \dots, \beta_{mn}, \dots, \beta_{np}, \dots, \beta_{mp} \\ \gamma_{11}, \dots, \gamma_{r1}, \dots, \gamma_{1p}, \dots, \gamma_{rp} \\ \vdots \\ \gamma_{1n}, \dots, \gamma_{rn}, \dots, \gamma_{np}, \dots, \gamma_{rp} \end{pmatrix}'$$

ruang parameter di bawah $H(\Omega)$ adalah sebagai berikut:

$$\Omega = \{\tilde{\delta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n), \sigma^2 \mathbf{W}\} \quad (4.12)$$

sedangkan, ruang parameter di bawah $H_0(\omega)$ adalah sebagai berikut:

$$\omega = \{(\tilde{\delta}, \sigma^2 \mathbf{W}), \tilde{\delta} = \tilde{0}\} = \{\sigma^2 \mathbf{W}\} \quad (4.13)$$

4.1.2 Estimasi Parameter di bawah $H(\Omega)$ dan $H_0(\omega)$

Untuk mendapatkan estimasi parameter di bawah $H(\Omega)$ pada data longitudinal salah satu caranya adalah dengan menggunakan metode WLS. Berdasarkan persamaan (4.10), maka model di bawah ruang $H(\Omega)$ adalah:

$$\tilde{y} = \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega + \tilde{\varepsilon} \quad (4.14)$$

sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega \quad (4.15)$$

Selanjutnya adalah diberikan persamaan jumlah kuadrat error dengan matriks penimbang \mathbf{W} adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}' \mathbf{W}^{-1} \tilde{\varepsilon} &= (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega)' \mathbf{W}_\Omega^{-1} (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega) \\ &= (\tilde{y}' - \tilde{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))) \mathbf{W}_\Omega^{-1} (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega) \\ &= \tilde{y}' \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{y} - \tilde{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{y} - \tilde{y}' \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega + \\ &\quad \tilde{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega \\ &= \tilde{y}' \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{y} - 2 \tilde{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{y} + \tilde{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega \quad (4.16) \end{aligned}$$

$$= Q(\tilde{\delta}_\Omega) \quad (4.17)$$

Dari persamaan (4.17) akan diderivatif secara parsial terhadap $\tilde{\delta}_\Omega$ untuk memperoleh estimasi dari parameter di bawah ruang Ω , yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial(Q(\tilde{\delta}_\Omega))}{\partial(\tilde{\delta}_\Omega)} = \frac{\partial(\tilde{y}' \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{y} - 2 \tilde{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{y} + \tilde{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega)}{\partial(\tilde{\delta}_\Omega)}$$

$$= -2\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{\mathbf{y}} + 2\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega$$

jika hasil derivatif parsial tersebut disamakan dengan nol, maka diperoleh suatu persamaan dari estimator parameter di bawah ruang Ω yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} -2\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{\mathbf{y}} + 2\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega &= 0 \\ \hat{\tilde{\delta}}_\Omega &= \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.18) \end{aligned}$$

Jika diberikan fungsi likelihood untuk ruang parameter Ω sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L(\tilde{\delta}_\Omega, \mathbf{W}_\Omega) &= \prod_{i=1}^n f(\tilde{y}_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi|\mathbf{W}_{\Omega i}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{y}_i - \mathbf{T}_i(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_{\Omega i})' \mathbf{W}_{\Omega i}^{-1}(\tilde{y}_i - \mathbf{T}_i(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_{\Omega i})} \\ &= (2\pi|\mathbf{W}_\Omega|)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_\Omega)' \mathbf{W}_\Omega^{-1}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_\Omega)} \\ &= (2\pi|\mathbf{W}_\Omega|)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{\mathbf{y}} - 2\tilde{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\Omega)} \quad (4.19) \end{aligned}$$

kemudian, jika persamaan (4.19) diturunkan terhadap \mathbf{W}_Ω , maka akan diperoleh persamaan estimator untuk $\hat{\mathbf{W}}_\Omega$ sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{W}}_\Omega = \frac{(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\tilde{\delta}}_\Omega)' (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\tilde{\delta}}_\Omega)}{n} \quad (4.20)$$

Jika dimisalkan $(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\tilde{\delta}}_\Omega) = \mathbf{A}$ dan $(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\tilde{\delta}}_\Omega)' = \mathbf{A}'$, maka dengan mensubstitusikan persamaan (4.20) ke persamaan (4.19) maka persamaan nilai maksimum dari fungsi likelihood menjadi:

$$\max_{\hat{\tilde{\delta}}_\Omega} L(\hat{\tilde{\delta}}_\Omega, \hat{\mathbf{W}}_\Omega) = (2\pi|\hat{\mathbf{W}}_\Omega|)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}(\mathbf{A}'(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A})} \quad (4.21)$$

dengan mengikuti sifat-sifat operasi matriks bahwa $\mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-1} = \mathbf{I}$ dan $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, maka persamaan (4.21) menjadi:

$$\max_{\hat{\tilde{\delta}}_\Omega} L(\hat{\tilde{\delta}}_\Omega, \hat{\mathbf{W}}_\Omega) = (2\pi|\hat{\mathbf{W}}_\Omega|)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} \quad (4.22)$$

Langkah selanjutnya adalah memperoleh estimasi parameter di bawah $H_0(\omega)$ dengan menggunakan metode Fungsi Multiplier Lagrange (LM), karena terdapat syarat (konstrain). Diberikan fungsi LM sebagai berikut:

$$F(\tilde{\delta}_\omega, \theta) = V(\tilde{\delta}_\omega) + 2\theta'(\tilde{\delta}_\omega) \quad (4.23)$$

dimana:

$$V(\tilde{\delta}_\omega) = (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_\omega)' \mathbf{W}_\omega^{-1} (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_\omega) \quad (4.24)$$

dengan syarat $(\tilde{\delta}_\omega)$. Sehingga, persamaan (4.24) akan dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\delta}_\omega) &= (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_\omega)' \mathbf{W}_\omega^{-1} (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_\omega) \\ &= \tilde{y}' \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} - \tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} - \tilde{y}' \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\omega + \\ &\quad \tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\omega \\ &= \tilde{y}' \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} - 2\tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} + \tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \\ &\quad \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\omega \end{aligned} \quad (4.25)$$

selanjutnya, dengan mensubstitusi persamaan (4.25) ke dalam persamaan (4.23), akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F(\tilde{\delta}_\omega, \theta) &= \tilde{y}' \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} - 2\tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} + \\ &\quad \tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\omega + 2\theta'(\tilde{\delta}_\omega) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dari persamaan (4.26) akan diderivatif secara parsial terhadap $\tilde{\delta}_\omega$ untuk memperoleh estimasi dari parameter di bawah ruang ω , yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (F(\tilde{\delta}_\omega, \theta))}{\partial (\tilde{\delta}_\omega)} &= \frac{\partial (\tilde{y}' \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} - 2\tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} + \tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\omega + 2\theta'(\tilde{\delta}_\omega))}{\partial (\tilde{\delta}_\omega)} \\ &= -2\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} + 2\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\omega + 2\theta \end{aligned} \quad (4.27)$$

jika persamaan (4.27) disamakan dengan nol, maka persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned} -2\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} + 2\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\omega + 2\theta &= 0 \\ \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\omega &= \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} - \theta \end{aligned}$$

sehingga akan memperoleh $\hat{\tilde{\delta}}_\omega$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\delta}}_\omega &= \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} - \theta \right) \\ &= \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} - \\ &\quad \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \theta \\ &= \hat{\tilde{\delta}}_\Omega - \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \theta \end{aligned} \quad (4.28)$$

kemudian, jika persamaan (4.26) diturunkan terhadap θ , maka akan didapatkan persamaan:

$$\frac{\partial (F(\tilde{\delta}_\omega, \theta))}{\partial (\theta)} = 2\tilde{\delta}_\omega \quad (4.29)$$

jika persamaan (4.29) disamakan dengan nol, maka akan menjadi:

$$\hat{\delta}_\omega = 0 \quad (4.30)$$

kemudian persamaan (4.30) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.28) akan diperoleh nilai θ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{\delta}_\Omega - \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \theta \\ \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \theta &= \hat{\delta}_\Omega \\ \theta &= \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega \\ \theta &= \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \end{aligned} \quad (4.31)$$

sehingga, persamaan (4.28) menjadi:

$$\hat{\delta}_\omega = \hat{\delta}_\Omega - \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \quad (4.32)$$

Jika diberikan fungsi likelihood di bawah ruang parameter ω sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L(\tilde{\delta}_\omega, \mathbf{W}_\omega) &= \prod_{i=1}^n f(\tilde{y}_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi|\mathbf{W}_{\omega i}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{y}_i - \mathbf{T}_i(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_{\omega i})' \mathbf{W}_{\omega i}^{-1}(\tilde{y}_i - \mathbf{T}_i(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_{\omega i})} \\ &= (2\pi|\mathbf{W}_\omega|)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_\omega)' \mathbf{W}_\omega^{-1}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\tilde{\delta}_\omega)} \\ &= (2\pi|\mathbf{W}_\omega|)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{\mathbf{y}} - 2\tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\omega)} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \log L(\tilde{\delta}_\omega, \mathbf{W}_\omega) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi|\mathbf{W}_\omega|) - \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{\mathbf{y}} - 2\tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{\mathbf{y}} + \\ &\quad \tilde{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\delta}_\omega) \end{aligned} \quad (4.34)$$

kemudian jika persamaan (4.34) diturunkan secara parsial terhadap \mathbf{W}_ω , maka akan diperoleh persamaan estimator untuk $\hat{\mathbf{W}}_\omega$ sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{W}}_\omega = \frac{(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_\omega)' (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_\omega)}{n} \quad (4.35)$$

Jika dimisalkan $(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_\omega) = \mathbf{B}$ dan $(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_\omega)' = \mathbf{B}'$, maka dengan mensubstitusikan persamaan (4.35) ke persamaan (4.33) maka persamaan nilai maksimum dari fungsi likelihood menjadi:

$$\max_{\omega} L(\hat{\delta}_\omega, \hat{\mathbf{W}}_\omega) = (2\pi|\hat{\mathbf{W}}_\omega|)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}(\mathbf{B}'(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B})} \quad (4.36)$$

dengan mengikuti sifat-sifat operasi matriks bahwa $B'(B')^{-1} = I$ dan $B^{-1}B = I$, maka persamaan (4.36) menjadi:

$$\max_{\omega} L(\hat{\delta}_{\omega}, \hat{\mathbf{W}}_{\omega}) = (2\pi|\hat{\mathbf{W}}_{\omega}|)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} \quad (4.37)$$

4.1.3 Menentukan Statistik Uji Hipotesis

Tahapan selanjutnya yaitu mengkaji untuk memperoleh statistik uji dari hipotesis dari persamaan (4.11) dengan menggunakan metode *Likelihood Ratio Test* (LRT). Berdasarkan ruang parameter yang telah disusun yaitu pada persamaan (4.12) dan (4.13), dan telah diperoleh estimasi parameter dari masing-masing ruang Ω dan ω , maka dapat dihitung ratio likelihood dengan cara membagi persamaan (4.37) terhadap persamaan (4.22) sebagai berikut:

$$\lambda(z, z(\tilde{k}), y) = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{(2\pi|\hat{\mathbf{W}}_{\omega}|)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}}{(2\pi|\hat{\mathbf{W}}_{\Omega}|)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}} = \left(\frac{|\hat{\mathbf{W}}_{\omega}|}{|\hat{\mathbf{W}}_{\Omega}|} \right)^{-\frac{n}{2}} \quad (4.38)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.35) dan (4.20), maka persamaan (4.38) menjadi:

$$\begin{aligned} \lambda(z, z(\tilde{k}), y) &= \left(\frac{\frac{(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\omega})' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\omega})}{n}}{\frac{(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega})' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega})}{n}}}{\frac{(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\omega})' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\omega})}{n}}{\frac{(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega})' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega})}{n}})} \right)^{-\frac{n}{2}} \\ &= \left(\frac{(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\omega})' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\omega})}{(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega})' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega})} \right)^{-\frac{n}{2}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

untuk mendapatkan hasil dari ratio likelihood pada persamaan (4.39), terlebih dahulu akan dilakukan proses penjabaran pada pembilangnya dengan dimisalkan diberi inisial G menjadi:

$$G = (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\omega})' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\omega})$$

kemudian dengan mensubstitusikan $(-\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega} + \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega})$ ke dalam G, maka akan menjadi:

$$\begin{aligned} G &= (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega} + \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\omega})' \\ &\quad (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega} + \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\omega}) \\ &= (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta}_{\Omega} + \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))(\hat{\delta}_{\Omega} - \hat{\delta}_{\omega}))' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega + \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega) \right) \\
&= \left(\left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \right)' + (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega)' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right) \\
& \quad \left(\left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \right) + \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega) \right) \\
&= \left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \right)' \left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \right) + \\
& \quad \left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \right)' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega) + \\
& \quad (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega)' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \right) + \\
& \quad (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega)' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega) \\
&= \left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \right)' \left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \right) + \mathbf{P} (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega) + \\
& \quad (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega)' \mathbf{Q} + (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega)' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega) \quad (4.40)
\end{aligned}$$

selanjutnya akan dijabarkan komponen pada ruas kedua dan ketiga pada persamaan (4.40), dimana $\mathbf{P} = \left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \right)' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))$ dan $\mathbf{Q} = \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \right)$ dengan mensubstitusikan nilai $\hat{\delta}_\Omega$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} \right) \right)' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \\
&= \tilde{y}' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) - \tilde{y}' \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \\
& \quad \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \\
&= \tilde{y}' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) - \tilde{y}' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} \right) \right) \\
&= \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{y} - \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \\
& \quad \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \tilde{y} \right) \\
&= \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{y} - \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dari hasil penjabaran ruas dua dan tiga dari persamaan (4.40), maka persamaan (4.40) menjadi:

$$G = (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega)' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega) + (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega)' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega) = K + L \quad (4.41)$$

dimana:

$$K = (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega)' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega) \text{ dan}$$

$$L = (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega)' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) (\hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\omega)$$

dan dengan mensubstitusikan persamaan (4.32) ke persamaan L, maka akan didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$L = \hat{\delta}_\Omega' E F \hat{\delta}_\Omega$$

dengan

$$E = \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right)^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1}$$

dan,

$$F = \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right)^{-1}$$

sehingga akan menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$L = \hat{\delta}_\Omega' \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega$$

dan persamaan G akan menjadi:

$$G = (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega)' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega) + \hat{\delta}_\Omega' \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega$$

selanjutnya persamaan G akan disubstitusikan ke ruas pembilang pada persamaan (4.39) sebagai berikut:

$$\lambda(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k}), y) = \left(\frac{(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega)' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega) + \hat{\delta}_\Omega' \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega}{(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega)' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega)} \right)^{-\frac{n}{2}} \\ = \left(1 + \frac{\hat{\delta}_\Omega' \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega}{(\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega)' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega)} \right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{1 + \frac{\tilde{\delta}'_{\Omega} \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\bar{k})) \mathbf{W}_{\omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\bar{k})) \right)^{-1} \right)^{-1} \tilde{\delta}_{\Omega}}{(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\bar{k})) \tilde{\delta}_{\Omega})' (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\bar{k})) \tilde{\delta}_{\Omega})}} \right)^{-\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{1 + \frac{M_1}{M_2}} \right)^{-\frac{n}{2}} \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.42), maka dapat dicari satatistik uji dari hipotesis $H_0: \tilde{\delta} = 0$ melawan H_1 : minimal ada satu komponen parameter dalam $\tilde{\delta} \neq 0$ dengan proses sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1 + \frac{M_1}{M_2}} \right)^{-\frac{n}{2}} < k \\
&\frac{1}{\left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{n}{2}}} < k \\
&\frac{1}{k} < \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

Bila kedua ruas dikalikan dengan pangkat $\frac{2}{n}$ maka persamaan tersebut menjadi:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{2}{n}} < \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right)^1 \\
&1 + \frac{M_1}{M_2} > \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{2}{n}}
\end{aligned}$$

kemudian jika kedua ruas dikalikan dengan $(df2)/(df1)$, maka persamaannya akan menjadi:

$$\frac{M_1/df1}{M_2/df2} > \left(\left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \frac{(df2)}{(df1)} \tag{4.43}$$

dan jika dimisalkan $\frac{M_1/df1}{M_2/df2} = V$, maka persamaan (4.43) dapat dituliskan menjadi:

$$V > \left(\left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{n}{2}} - 1 \right) \frac{(df2)}{(df1)}$$

$$V > k^*$$

sehingga dapat dinyatakan bahwa k^* adalah suatu statistik uji, dimana

$$k^* = \left(\left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{n}{2}} - 1 \right) \frac{(df2)}{(df1)}$$

4.1.4 Mendapatkan Distribusi Statistik Uji Hipotesis

Berdasarkan persamaan (4.42) diperoleh suatu persamaan yang dilambangkan dengan Q seperti di bawah ini:

$$Q = \frac{M_1}{M_2} = \frac{\hat{\delta}_\Omega' \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega}{(\hat{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega)' (\hat{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega)} \quad (4.44)$$

Tahapan selanjutnya adalah ingin mendapatkan distribusi dari statistik uji, maka yang perlu dilakukan adalah menjabarkan persamaan M_1 dan M_2 pada persamaan (4.44). Berikut ini adalah proses penjabaran untuk persamaan M_1 , yaitu:

$$M_1 = \hat{\delta}_\Omega' \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega \quad (4.45)$$

dengan mensubstitusikan $\hat{\delta}_\Omega$ pada M_1 , maka persamaan (4.45) menjadi:

$$M_1 = \hat{\delta}_\Omega' \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega$$

$$M_1 = \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \hat{y} \right)' \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right)^{-1}$$

$$\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \hat{y}$$

$$= \hat{y}' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))$$

$$\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \hat{y}$$

$$= \hat{y}' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \hat{y} \quad (4.46)$$

Dari persamaan (4.46), jika dimisalkan:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1}$$

Dan akan dibuktikan bahwa matrik \mathbf{A} adalah simetris dan idempotent. Matrik \mathbf{A} simetris jika $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$. Pembuktiannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= \left(\mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \right)' \\
&= \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \\
&= \mathbf{A} \text{ (terbukti)}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Dari hasil penjabaran persamaan (4.47) dapat dibuktikan bahwa $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, dengan \mathbf{A} adalah matrik berukuran $n \times n$, sehingga terbukti bahwa matriks \mathbf{A} adalah simetris. Selanjutnya adalah ingin membuktikan bahwa matriks \mathbf{A} adalah idempotent. Pembuktiannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= \left(\mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \right)^2 \\
&= \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \times \\
&\quad \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \\
&= \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \\
&= \mathbf{A} \text{ (terbukti)}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Dari persamaan (4.47) dan (4.48), telah terbukti bahwa matriks \mathbf{A} adalah simetris dan idempotent maka M_1 juga simetris dan idempotent, sehingga dapat dinyatakan bahwa:

$$\frac{M_1}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(r_1, \tilde{\mu}' A \tilde{\mu} / 2\sigma^2)} \tag{4.49}$$

selanjutnya ingin diperoleh nilai r_1 dan $\tilde{\mu}' A \tilde{\mu} / 2\sigma^2$. Karena matrik \mathbf{A} adalah simetris dan idempotent, maka $r_1 = \text{rank}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$.

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr} \left(\mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \right)$$

Jika $\mathbf{B} = \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1}$ dan $\mathbf{C} = \mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1}$, maka $\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{BC}) = \text{tr}(\mathbf{CB})$, sehingga,

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathbf{A}) &= \text{tr} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right) \\
&= \text{tr}(\mathbf{I}_{(np+nrp)}) \\
&= (np + nrp)
\end{aligned}$$

Jadi, $r_1 = \text{rank}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}) = (np + nrp)$.

Selanjutnya akan dicari nilai dari $\tilde{\mu}' A \tilde{\mu} / 2\sigma^2$ sebagai berikut:

$$\frac{\tilde{\mu}' A \tilde{\mu}}{2\sigma^2} = \frac{(\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\omega)' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) (\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\omega}{2\sigma^2}$$

kemudian akan dilakukan penjabaran pembilang sebagai berikut:

$$\tilde{\mu}' A \tilde{\mu} = (\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\omega)' \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\omega = \hat{\delta}_\omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\omega \quad (4.50)$$

jika $\hat{\delta}_\omega$ disubstitusikan ke persamaan (4.50), maka persamaannya akan menjadi:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}' A \tilde{\mu} &= \left(\hat{\delta}_\Omega - (\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \left((\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega \right)' \times \\ &\quad \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\hat{\delta}_\Omega - (\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \left((\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega \right) \\ &= \left[\hat{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) - \hat{\delta}_\Omega' \left((\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right] \times \\ &\quad \left[\hat{\delta}_\Omega - (\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \left((\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega \right] \\ &= \hat{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\Omega' \left((\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega + \\ &\quad - \hat{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) (\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \left((\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega + \\ &\quad \hat{\delta}_\Omega' \left((\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left((\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega \\ &= \hat{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega - \hat{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega + \\ &\quad - \hat{\delta}_\Omega' \left((\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega + \hat{\delta}_\Omega' \left((\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \right)^{-1} \hat{\delta}_\Omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

sehingga dapat dinyatakan bahwa:

$$\frac{M_1}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}_{(np+nrp)}^2 \quad (4.51)$$

Tahapan selanjutnya yaitu menjabarkan ruas M_2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_2 &= (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega)' (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega) \\ &= \left(\tilde{y}' - \hat{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right) (\tilde{y} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega) \\ &= \tilde{y}' \tilde{y} - 2 \hat{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{y} + \hat{\delta}_\Omega' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega \end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan $\hat{\delta}_\Omega$ maka akan didapatkan persamaan:

$$M_2 = \tilde{y}' \tilde{y} - 2 \left((\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})))^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{y} \right)' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) +$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \tilde{\mathbf{y}} \right)' \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \\
& \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \tilde{\mathbf{y}} \\
& = \tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{I} \tilde{\mathbf{y}} - 2 \tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) + \\
& \tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \times \\
& \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \tilde{\mathbf{y}} \\
& = \tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{I} \tilde{\mathbf{y}} - 2 \tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) + \\
& \tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\mathbf{y}} \\
& = \tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{I} \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \tilde{\mathbf{y}} \\
& = \tilde{\mathbf{y}}' \left[\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right] \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.52)
\end{aligned}$$

$$= \tilde{\mathbf{y}}' \mathbf{B} \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.53)$$

Dari persamaan (4.53) dapat disimpulkan jika:

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))$$

selanjutnya akan dibuktikan bahwa \mathbf{B} matrik yang simetris dan idempotent. Matrik \mathbf{B} simetris jika $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$, dan berikut adalah penjabarannya.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}' & = \left(\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)' \\
& = \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \\
& = \mathbf{B} \text{ (terbukti)} \quad (4.54)
\end{aligned}$$

Dari penjabaran persamaan (4.54) terbukti bahwa $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ dengan \mathbf{B} adalah matrik yang berukuran $n \times n$, sehingga \mathbf{B} adalah matrik simetris. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa matrik \mathbf{B} adalah idempotent. Berikut ini adalah penjabarannya:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^2 & = \left(\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^2 \\
& = \mathbf{I} - 2 \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) + \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \\
& \quad \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \\
& \quad \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{I} - 2\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) + \\
&\quad \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \\
&= \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \\
&= \mathbf{B} \text{ (terbukti)}
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa \mathbf{B} adalah matrik idempotent. Karena M_2 adalah simetris dan idempotent, maka dapat dinyatakan bahwa:

$$\frac{M_2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(r_2, \tilde{\mu}'\mathbf{B}\tilde{\mu}/2\sigma^2)} \quad (4.55)$$

Selanjutnya akan mencari nilai untuk r_2 dan $\tilde{\mu}'\mathbf{B}\tilde{\mu}/2\sigma^2$. Oleh karena \mathbf{B} adalah matrik simetris dan idempotent, maka $r_2 = \text{rank}(\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B})$.

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathbf{B}) &= \text{tr} \left(\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1} \right) \\
&= \text{tr}(\mathbf{I}) - \text{tr} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \right) \\
&= \text{tr}(\mathbf{I}_{ntp}) - \text{tr}(\mathbf{I}_{(np+nrp)}) \\
&= ntp - (np + nrp)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa:

$$r_2 = \text{rank}(\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}) = ntp - (np + nrp)$$

dan selanjutnya akan dicari nilai dari $\tilde{\mu}'\mathbf{B}\tilde{\mu}/2\sigma^2$ yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mu}'\mathbf{B}\tilde{\mu}}{2\sigma^2} &= \frac{\left(\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta} \right)' \left[\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right] \left(\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta} \right)}{2\sigma^2} \\
&= \frac{\hat{\delta}'\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta} \right) - \hat{\delta}'\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\mathbf{W}_\Omega^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta} \right)}{2\sigma^2} \\
&= \frac{\hat{\delta}'\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta} \right) - \hat{\delta}'\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))\hat{\delta} \right)}{2\sigma^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

sehingga, dapat dinyatakan bahwa:

$$\frac{M_2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(ntp-(np+nrp))} \quad (4.56)$$

Tahapan selanjutnya yaitu membuktikan bahwa M_1 dan M_2 saling bebas (independen). Berdasarkan Teorema 5.6b Corollary 1 pada Rencher, dkk (2007),

dengan menggunakan persamaan (4.46) dan (4.52), matrik \mathbf{A} dan \mathbf{B} saling bebas jika $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. Berikut ini adalah proses pembuktian M_1 dan M_2 saling bebas adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1}$$

dan

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k}))$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{x}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \\ = & \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \\ & \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \\ & \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \\ = & \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} + \\ & - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \\ = & \mathbf{0} \end{aligned}$$

karena $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, maka M_1 dan M_2 saling bebas (independen). Dari beberapa penjabaran persamaan di atas, diperoleh hasil sebagai berikut:

1. $\frac{M_1}{\sigma^2} \sim \chi_{(np+nrp)}^2$
2. $\frac{M_2}{\sigma^2} \sim \chi_{(ntp-(np+nrp))}^2$
3. M_1 dan M_2 saling bebas (independen)

sehingga, berdasarkan Rencher (2007) yang menyatakan bahwa jika u adalah $\chi_{(p)}^2$, v adalah $\chi_{(q)}^2$, serta u dan v saling bebas (independen), maka:

$$V = \frac{u/p}{v/q} \sim F_{(p,q)}$$

dan berdasarkan dari ketiga hasil yang telah diperoleh, dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned} V &= \frac{(M_1/\sigma^2)/(np + nrp)}{(M_2/\sigma^2)/(ntp - (np + nrp))} \sim F_{((np+nrp), ntp-(np+nrp))} \\ &= \frac{M_1/(np + nrp)}{M_2/(ntp - (np + nrp))} \sim F_{((np+nrp), ntp-(np+nrp))} \end{aligned}$$

jadi, distribusi statistik uji yang diperoleh adalah:

$$V = \frac{M_1/(np+nrp)}{M_2/(ntp-(np+nrp))} \sim F_{((np+nrp), ntp-(np+nrp))} \quad (4.57)$$

dengan

$$M_1 = \tilde{y}' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \tilde{y}$$

$$M_2 = \tilde{y}' \left[\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right] \tilde{y}$$

4.1.5 Menentukan Daerah Penolakan Uji Hipotesis H_0

Daerah penolakan $\lambda < k$, dimana $\lambda < k < 1$, dan k adalah konstanta, sehingga:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} < k$$

Berdasarkan persamaan (4.57), maka daerah kritis untuk uji $H_0: \tilde{\delta} = 0$, dan H_1 : minimal ada satu komponen parameter dalam $\tilde{\delta} \neq 0$ adalah

$$V = \{(z_{ij1}, z_{ij2}, \dots, z_{ijp}); V > k^*\} \quad (4.58)$$

Jika diberikan tingkat kepercayaan α , maka:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{menolak } H_0 | H_0 \text{ benar}) \\ &= P(V > k^* | \tilde{\delta}_i = 0) \end{aligned} \quad (4.59)$$

dengan

$$V = \frac{M_1/(np+nrp)}{M_2/(ntp-(np+nrp))} \sim F_{((np+nrp), ntp-(np+nrp))}$$

dimana

$$M_1 = \tilde{y}' \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \tilde{y}$$

$$M_2 = \tilde{y}' \left[\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_{\Omega}^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right] \tilde{y}$$

sehingga, daerah kritis untuk menolak H_0 diberikan jika statistik uji V (F hitung) lebih besar dari k^* (F tabel).

4.2 Aplikasi pada Data Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016

Pemodelan dan pengujian hipotesis simultan regresi nonparametrik *spline truncated* pada penelitian ini diaplikasikan pada data pertumbuhan ekonomi tahun

2011-2016 di Provinsi Papua. Analisis yang akan digunakan pertama adalah regresi linier berganda yang kemudian akan dilanjutkan dengan regresi nonparametrik *spline truncated* khususnya data longitudinal, dan dari kedua analisis regresi tersebut akan dilakukan perbandingan hasil.

4.2.1 Analisis Deskriptif

Untuk melihat gambaran pertumbuhan ekonomi kabupaten/kota di Provinsi Papua selama tahun 2011-2016, maka perlu dilakukan analisis deskriptif terlebih dahulu sebagai tahapan *preprocessing* data yang hasilnya akan menunjukkan pola perilaku data sehingga bisa dijadikan dasar untuk tahapan analisis selanjutnya yaitu dengan melihat dari karakteristik datanya seperti nilai minimum, nilai maksimum, rata-rata, Koefisien Variasi (KV), simpangan baku, kuartil satu (Q1), kuartil dua (Q2), dan kuartil tiga (Q3). Berikut pada Tabel 4.1 disajikan karakteristik-karakteristik data pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua tahun 2011-2016.

Tabel 4.1. Statistik Deskriptif Pertumbuhan Ekonomi Kabupaten/Kota Se-Provinsi Papua Tahun 2011-2016

No.	Kabupaten/Kota	Min	Maks	Rata-rata	Koefisien Variasi	Simpangan Baku	Q1	Q2	Q3
1	Merauke	6,03	8,49	7,34	11,43	0,839	6,67	7,46	7,93
2	Jayawijaya	4,70	7,67	6,52	16,49	0,439	5,81	6,64	7,40
3	Kabupaten Jayapura	8,54	11,46	10,43	10,64	0,453	9,60	10,68	11,32
4	Nabire	6,88	9,27	7,59	11,33	0,351	7,08	7,35	7,97
5	Kepulauan Yapen	5,36	7,35	6,34	12,88	0,333	5,41	6,50	7,04
6	Biak	4,07	7,19	5,86	21,66	1,269	4,73	5,96	7,06
7	Paniai	4,12	9,82	7,24	27,26	1,974	5,78	7,25	8,97
8	Puncak Jaya	2,05	7,39	4,59	36,93	1,694	3,81	4,52	5,34
9	Mimika	-16,36	12,84	1,01	1.075,94	10,88	-8,46	2,97	10,32
10	Boven Digoel	3,83	6,65	5,14	22,08	1,134	3,96	5,11	6,26
11	Mappi	4,86	8,26	6,31	20,19	1,273	5,12	6,30	7,26
12	Asmat	4,79	8,78	6,42	21,79	1,398	5,30	6,16	7,54
13	Yahukimo	5,2	11,96	8,18	32,53	2,66	6,37	7,09	11,22
14	Pegunungan Bintang	5,86	8,25	6,56	13,07	0,858	6,06	6,31	6,95
15	Tolikara	0,32	7,96	5,11	51,72	2,65	3,59	5,51	7,03
16	Sarmi	5,2	7,14	6,40	10,59	0,678	5,88	6,60	6,86
17	Keerom	5,74	9,59	8,18	18,07	1,478	6,69	8,86	9,16
18	Waropen	9,48	11,76	10,61	9,14	0,971	9,62	10,54	11,72

Tabel 4.1 Statistik Deskriptif Pertumbuhan Ekonomi Kabupaten/Kota Se-Provinsi Papua Tahun 2011-2016 (Lanjutan)

No.	Kabupaten/Kota	Min	Maks	Rata-rata	Koefisien Variasi	Simpangan Baku	Q1	Q2	Q3
19	Supiori	4,25	10,16	6,29	39,14	2,46	4,26	5,45	8,67
20	Mamberamo Raya	8,41	12,55	10,26	15,05	1,54	8,98	9,92	11,82
21	Nduga	6,83	14,47	10,38	25,86	2,68	8,37	9,86	12,88
22	Lanny Jaya	5,72	16,39	9,91	39,44	3,91	6,19	9,85	12,57
23	Mamberamo Tengah	6,56	16,3	10,83	34,02	3,68	7,42	10,37	14,31
24	Yalimo	5,81	29,75	12,49	75,16	9,39	6,40	7,88	20,20
25	Puncak	5,32	10,24	8,31	20,86	1,73	7,16	8,57	9,61
26	Dogiyai	7,56	11,05	8,97	13,31	1,19	7,97	8,97	9,63
27	Intan Jaya	7,79	19,00	11,66	35,34	4,12	7,88	11,21	14,40
28	Deiyai	7,17	25,28	13,58	48,31	6,56	9,36	10,98	19,03
29	Kota Jayapura	7,23	10,66	9,46	14,06	1,33	8,17	10,02	10,43

Dari hasil olah data yang tersaji pada Tabel 4.1 menggambarkan bahwa selama tahun 2011-2016 pertumbuhan ekonomi yang tertinggi terjadi di Kabupaten Yalimo yaitu 29,75 persen tepatnya pada tahun 2011, sedangkan Kabupaten Mimika mengalami pertumbuhan ekonomi yang sangat lambat sebesar -16,36 persen di tahun 2011. Secara rata-rata selama tahun 2011-2016, Kabupaten Deiyai mengalami pertumbuhan ekonomi yang tertinggi yaitu mencapai 13,58 persen, sedangkan pertumbuhan ekonomi yang terendah terjadi di Kabupaten Mimika yaitu 1,01 persen. Jika dilihat persebaran nilai pertumbuhan ekonomi terhadap rata-ratanya, yang memiliki variasi terbesar adalah Kabupaten Mimika sebesar 1.075,94, ini dapat diartikan bahwa pergerakan pertumbuhan ekonomi yang terjadi di Kabupaten Mimika selama tahun 2011-2016 sangatlah berfluktuasi dan konvergen menuju pertumbuhan yang lebih cepat, sedangkan yang memiliki variasi terkecil adalah Kabupaten Waropen sebesar 9,14 persen, artinya bahwa pergerakan pertumbuhan ekonomi yang terjadi cenderung stabil selama tahun 2011-2016.

Dilihat dari nilai simpangan baku, beberapa daerah memiliki variasi yang cukup lebar dan ada juga yang tidak, hal ini mengindikasikan bahwa pergerakan pertumbuhan ekonomi kabupaten/kota di Papua ada yang stabil seperti di Kabupaten Kepulauan Yapen, Nabire, Jayawijaya, serta Jayapura, dan ada juga yang pertumbuhan ekonominya berfluktuasi seperti di Kabupaten Deiyai, Yalimo, serta Mimika. Jika dilihat dari hasil Q1, Q2, Q3 dibandingkan dengan nilai rata-ratanya, dapat dinyatakan bahwa sebagian besar distribusi datanya membentuk distribusi normal, dan hanya di beberapa kabupaten/kota saja yang distribusi

datanya membentuk pola menceng kanan dan menceng kiri. Interpretasi di Kabupaten Merauke untuk Q1 senilai 6,668 adalah bahwa sebanyak 25 persen kelompok data pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Merauke berkisar 6,668 persen. Kemudian jika nilai Q2 adalah 7,455 artinya bahwa sebanyak 50 persen kelompok data pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Merauke sebesar 7,455 persen, dan jika nilai Q3 adalah 7,928 artinya bahwa sebanyak 75 persen kelompok data pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Merauke berkisar 7,928 persen.

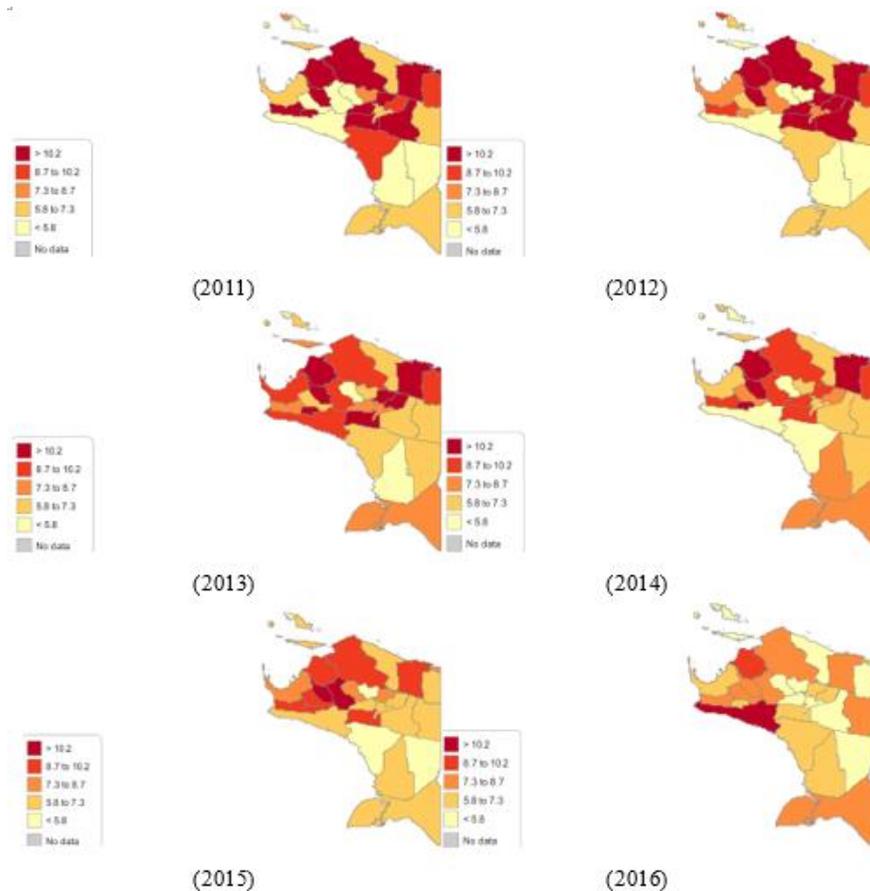
Tabel 4.2. Statistik Deskriptif Variabel Respon dan Variabel Prediktor

No.	Variabel	Minimum	Maksimum	Rata-rata	Simpangan Baku
1	Y_{i1}	-16.36	29.75	8.89	7.78
2	Z_{i11}	0.37	10.71	4.89	2.98
3	Z_{i12}	53.09	71.78	63.88	4.34
4	Y_{i2}	-5.82	17.02	8.61	4.96
5	Z_{i21}	0.49	10.80	5.11	2.96
6	Z_{i22}	53.42	71.81	63.96	4.27
7	Y_{i3}	4.26	12.35	8.35	2.22
8	Z_{i31}	0.60	10.88	5.30	2.96
9	Z_{i32}	53.54	71.85	64.01	4.24
10	Y_{i4}	-0,55	11.52	7.82	2.46
11	Z_{i41}	0.63	11.09	5.47	3.04
12	Z_{i42}	53.60	71.87	64.03	4.22
13	Y_{i5}	4,25	12.87	7.61	1,99
14	Z_{i51}	0.64	11.11	5.56	3.04
15	Z_{i52}	53.60	71.89	64.24	4.14
16	Y_{i6}	4,07	12.84	6,70	1,86
17	Z_{i61}	0.70	11.14	5.64	3.02
18	Z_{i62}	54,50	71.90	64.38	4.01

Berdasarkan Tabel 4.2 dapat menggambarkan karakteristik masing-masing variabel respon dan variabel prediktor setiap tahunnya selama tahun 2011-2016. Secara rata-rata, pertumbuhan ekonomi dari tahun 2011-2016 selalu mengalami perlambatan. Hal ini dapat menjelaskan bahwa sebagian besar kabupaten/kota di Papua rata-rata mengalami pertumbuhan ekonomi yang semakin lambat dibandingkan dengan yang mengalami pertumbuhan yang cepat mulai dari tahun 2011 menuju tahun 2016.

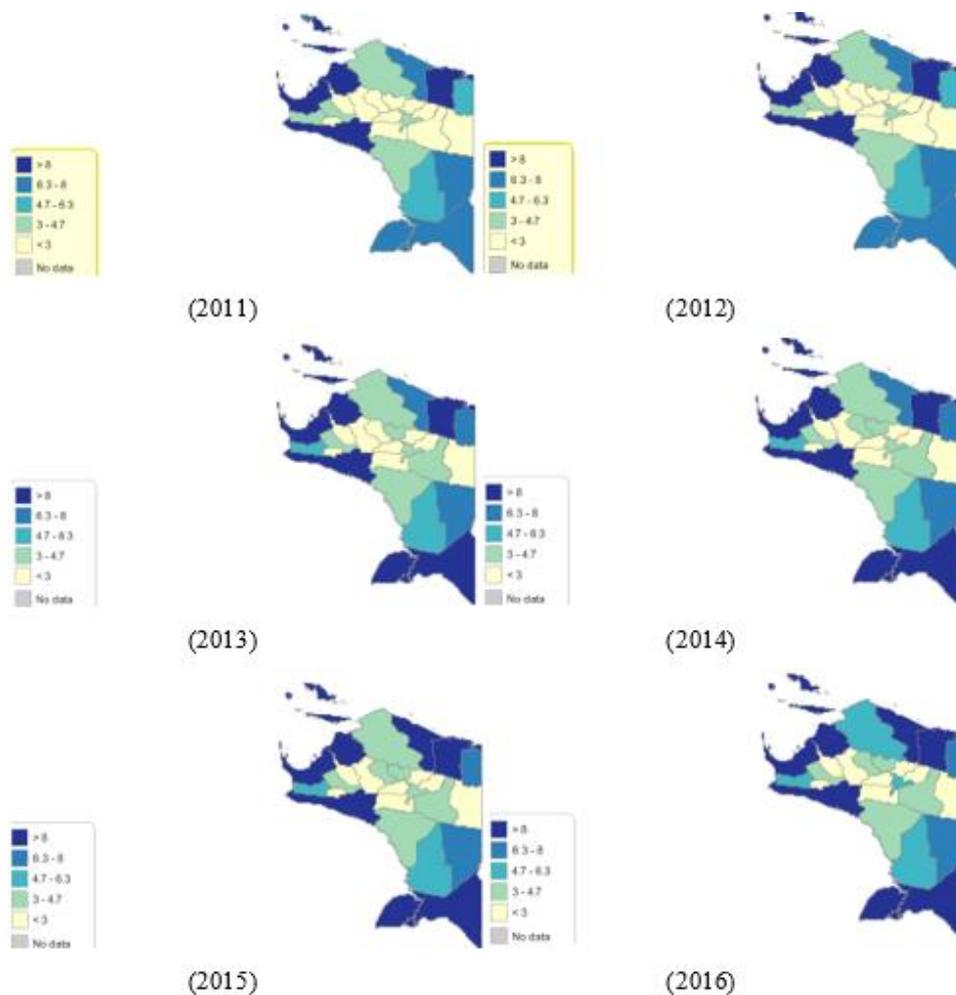
Berikut ini adalah beberapa gambaran karakteristik selama tahun 2011-2016 untuk masing-masing variabel prediktor yaitu rata-rata lama sekolah (Z_{ij1}), angka harapan hidup (Z_{ij2}), dan *gini ratio*/rasio gini (Z_{ij3}) adalah sebagai berikut:

- Rata-rata lama sekolah yang tertinggi di Provinsi Papua selama tahun 2011-2016 sebesar 11,14 tahun yaitu tepatnya di Kota Jayapura tahun 2016, sedangkan yang terendah sebesar 0,37 tahun yaitu di Kabupaten Nduga tahun 2011. Rata-rata dari rata-rata lama sekolah Provinsi Papua mengalami peningkatan yaitu dari 4,89 tahun pada tahun 2011 menjadi 5,64 tahun di tahun 2016 dengan besaran simpangan baku berada di antara 2,96 dan 3,04 tahun.
- Angka harapan hidup yang tertinggi di Papua selama tahun 2011-2016 sebesar 71,90 tahun yaitu tepatnya di Kabupaten Mimika tahun 2016, sedangkan yang terendah sebesar 53,09 tahun yaitu di Kabupaten Nduga tahun 2011. Rata-rata angka harapan hidup Provinsi Papua mengalami peningkatan yaitu dari 63,88 tahun di tahun 2011 menjadi 64,38 tahun di tahun 2016 dengan besaran simpangan baku berada di antara 4,01 dan 4,34 tahun.



Gambar 4.1 Pertumbuhan Ekonomi di Provinsi Papua Tahun 2011-2016

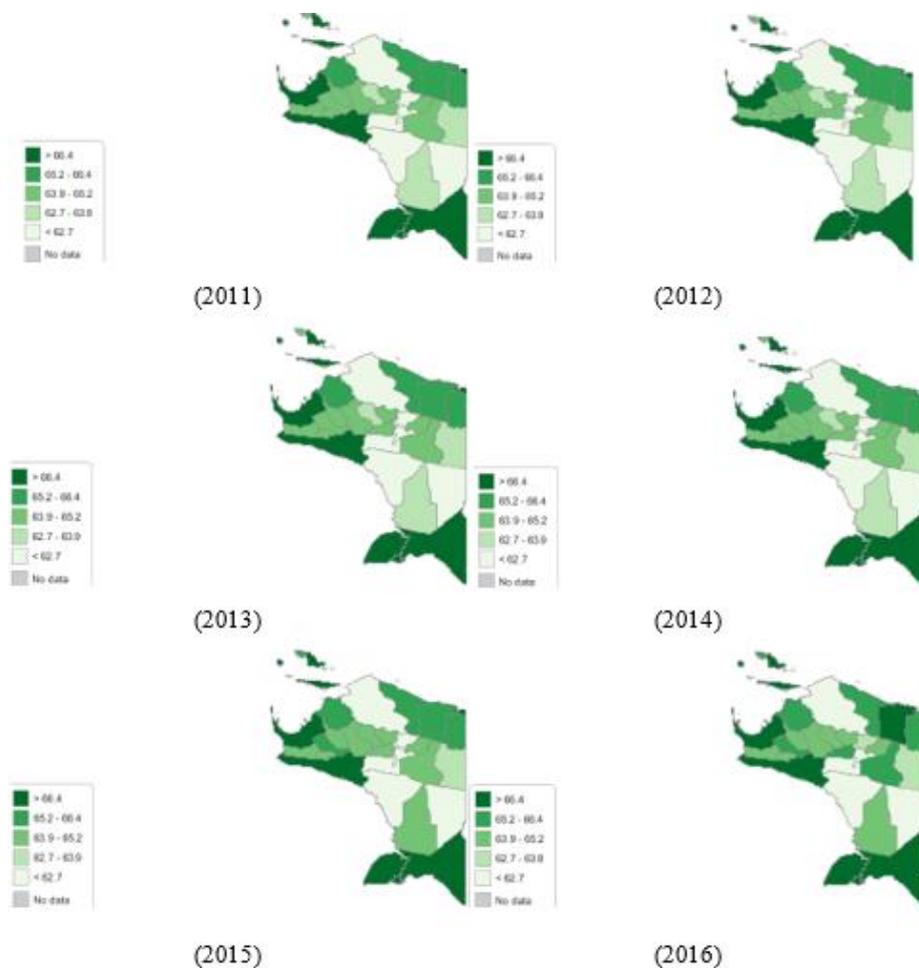
Gambar 4.1 menunjukkan pertumbuhan ekonomi di masing-masing tahun 2011 hingga 2016 sebagai *cut off point*. Wilayah yang berwarna putih mengindikasikan angka pertumbuhan ekonomi kurang dari 5,8 persen, kemudian wilayah yang berwarna biru muda mengindikasikan pertumbuhan ekonomi yang berada di antara 5,8 dan 7,3 persen, wilayah yang berwarna biru mengindikasikan pertumbuhan ekonomi yang berada di antara 8,7 dan 10,2 persen, dan wilayah yang berwarna biru tua mengindikasikan pertumbuhan ekonomi yang di atas 10,2 persen. Dapat dijelaskan bahwa pergerakan pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua dari tahun 2011 hingga 2016 mengalami “kelesuan”, pada gambar ditunjukkan dengan semakin berkurangnya gradasi warna yang merah tua menjadi orange dan lebih banyak yang berwarna krem.



Gambar 4.2 Rata-Rata Lama Sekolah di Provinsi Papua Tahun 2011-2016

Gambar 4.2 menunjukkan rata-rata lama sekolah di Provinsi Papua pada masing-masing tahun 2011 hingga 2016 sebagai *cut off point*. Wilayah yang

berwarna krem mengindikasikan rata-rata lama sekolah yang kurang dari 3 tahun, kemudian wilayah yang berwarna hijau mengindikasikan rata-rata lama sekolah dari 3 tahun hingga kurang dari 4,7 tahun, wilayah yang berwarna biru dongker mengindikasikan rata-rata lama sekolah dari 4,7 tahun hingga kurang dari 6,3 tahun, wilayah yang berwarna biru mengindikasikan rata-rata lama sekolah dari 6,3 tahun hingga kurang dari 8 tahun, dan wilayah yang berwarna biru tua mengindikasikan rata-rata lama sekolah 8 tahun ke atas. Rata-rata lama sekolah di Provinsi Papua dari tahun 2011 hingga 2016 menunjukkan peningkatan yang lebih baik yang berarti secara rata-rata bahwa penduduk usia sekolah di Provinsi Papua dari terhitung mulai sekolah (SD kelas 1) hingga putus/berhenti sekolah memiliki rentang waktu yang semakin lebar. Hal ini ditunjukkan pada gambar dengan berubahnya gradasi warna pada peta dari tahun 2011 ke 2016 menjadi berwarna biru dan biru tua.



Gambar 4.3 Angka Harapan Hidup di Provinsi Papua Tahun 2011-2016

Gambar 4.3 menunjukkan angka harapan hidup di Provinsi Papua pada masing-masing tahun 2011 hingga 2016 sebagai *cut off point*. Wilayah yang berwarna putih mengindikasikan angka harapan hidup yang kurang dari 62,7 tahun, kemudian wilayah yang berwarna hijau muda mengindikasikan angka harapan hidup dari 62,7 tahun hingga kurang dari 63,9 tahun, wilayah yang berwarna hijau dongker mengindikasikan angka harapan hidup dari 63,9 tahun hingga kurang dari 65,2 tahun, wilayah yang berwarna hijau mengindikasikan angka harapan hidup dari 65,2 tahun hingga kurang dari 66,4 tahun, dan wilayah yang berwarna hijau tua mengindikasikan angka harapan hidup 66,4 tahun ke atas. Angka harapan hidup di Provinsi Papua menunjukkan kondisi yang sama dengan rata-rata lama sekolah, yaitu mengalami peningkatan yang lebih baik dari tahun 2011 menuju 2016. Hal ini berarti adanya perubahan yang kondusif terhadap kesehatan di Papua, sehingga seseorang yang lahir di Provinsi Papua memiliki peluang untuk bertahan hidup hingga usia yang semakin tinggi. Hal ini ditunjukkan pada gambar dengan adanya perubahan gradasi warna pada peta dari tahun 2011 ke 2016 menjadi lebih berwarna hijau dan hijau tua.

4.2.2 Pemodelan Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016 Menggunakan Regresi Linier Berganda

Pemodelan data pertumbuhan ekonomi Provinsi Papua tahun 2011-2016 didekati dengan model regresi linier berganda untuk data longitudinal dengan y_{ij} adalah variabel respon, $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n$ adalah parameter yang tidak diketahui, $x_{ij1}, x_{ij2}, \dots, x_{ijp}$ adalah variabel prediktor dan $\tilde{\epsilon}_{ij}$ adalah error random yang identik, independen, dan berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi $\sigma^2 \mathbf{W}$. Matriks pembobot \mathbf{W} yang digunakan adalah $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2,$ dan \mathbf{W}_3 . Dari hasil output dengan membandingkan nilai R^2 *adjusted* dari masing-masing pembobot, maka diperoleh model terbaik untuk regresi linier berganda adalah dengan menggunakan bobot \mathbf{W}_3 dengan nilai R^2 *adjusted* sebesar. Berikut adalah model estimasi kurva regresi linier berganda pada data longitudinal yang terbentuk yaitu:

$$\hat{y}_{ij} = \hat{\beta}_{i1}z_{ij1} + \hat{\beta}_{i2}z_{ij2}$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n ; j = 1, 2, \dots, t$

dimana \hat{y}_{ij} adalah pertumbuhan ekonomi masing-masing kabupaten/kota tahun 2011-2016, $\hat{\beta}_{i1}$ adalah parameter untuk variabel rata-rata lama sekolah di masing-masing kabupaten/kota, z_{ij1} adalah rata-rata lama sekolah masing-masing kabupaten/kota tahun 2011-2016, $\hat{\beta}_{i2}$ adalah parameter untuk variabel angka harapan hidup di masing-masing kabupaten/kota, serta z_{ij2} merupakan angka harapan hidup masing-masing kabupaten/kota tahun 2011-2016.

4.2.2.1 Pengujian Signifikansi Parameter secara Simultan

Untuk mengetahui apakah parameter yang digunakan signifikan terhadap model atau tidak, maka perlu dilakukan uji signifikansi parameter yaitu pengujian hipotesis secara simultan. Hasil ANOVA untuk parameter regresi linier berganda yang longitudinal dapat dilihat pada Tabel 4.3 di bawah ini. Hipotesis yang digunakan untuk masing-masing lokasi adalah sebagai berikut:

$$H_0 : \beta_{11} = \beta_{12} = \dots = \beta_{n1} = \beta_{n2} = 0$$

$$H_1 : \text{minimal terdapat satu } \beta_{ik} \neq 0, \text{ dimana } i = 1, 2, \dots, n ; k = 1, 2$$

Tabel 4.3. ANOVA Regresi Linier Berganda Data Longitudinal

Sumber Variasi	Derajat Kebebasan	Jumlah Kuadrat	Rata-rata Kuadrat	F _{hitung}	p-value
Regresi	58	2.159,0572	37,225	5,1946	2,559e-14
Error	116	831,2681	7,166		
Total	174	2988,7621			

Berdasarkan Tabel 4.3 tersebut, terlihat bahwa nilai *p-value* sebesar 2,559e-14 lebih kecil dari nilai $\alpha=5\%$, sehingga dihasilkan keputusan yaitu tolak H_0 . Dapat disimpulkan bahwa secara statistik minimal terdapat satu parameter yang signifikan di dalam model. Dari model regresi linier berganda ini terdapat nilai koefisien determinasi (R^2) sebesar 72,20 persen artinya adalah variasi dari variabel respon hanya dapat dijelaskan oleh kedua variabel prediktor sebesar 39,48 persen dan sisanya 72,20 persen dijelaskan oleh variabel lain. Nilai R^2 *adjusted* yang dihasilkan adalah 58,30 persen.

4.2.2.2 Pengujian Signifikansi Parameter secara Parsial

Setelah didapatkan hasil dari uji signifikansi parameter secara simultan yang menyatakan bahwa minimal terdapat satu variabel prediktor yang signifikan dalam model, maka selanjutnya dilakukan pengujian signifikansi parameter secara parsial yang bertujuan untuk mengetahui parameter mana saja yang signifikan terhadap model. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$H_0 : \beta_{ik} = 0$$

$$H_1 : \beta_{ik} \neq 0, \text{ dimana } i = 1, 2, \dots, n ; k = 1, 2$$

Berikut ini dalam Tabel 4.4 disajikan hasil dari pengujian signifikansi parameter secara parsial untuk Regresi Linier Berganda yang Data Longitudinal.

Tabel 4.4 Output Pengujian Hipotesis Parsial Parameter Model Terbaik Regresi Linier Berganda pada Data Longitudinal

Kabupaten/Kota	Parameter	Koefisien	t_{hitung}	$p\text{-value}$
Merauke	$\beta_{1,1}$	1,90707475	14,665	0,0001
	$\beta_{1,2}$	-0,12087617	-7,661	0,0016
Jayawijaya	$\beta_{2,1}$	-5,77414261	-35,118	3,92e-6
	$\beta_{2,2}$	0,5571772	44,018	1,59e-6
Jayapura	$\beta_{3,1}$	-2,41424326	-23,187	2,05e-5
	$\beta_{3,2}$	0,49534973	34,003	4,46e-6
Nabire	$\beta_{4,1}$	-0,77995132	-9,961	5,71e-4
	$\beta_{4,2}$	0,21832033	20,584	3,29e-5
Kepulauan Yapen	$\beta_{5,1}$	-0,81073431	-6,538	0,0028
	$\beta_{5,2}$	0,19327876	12,519	0,0002
Biak	$\beta_{6,1}$	-1,2366996	-12,872	2,10e-4
	$\beta_{6,2}$	0,25681628	19,370	4,19e-5
Paniai	$\beta_{7,1}$	28,7357859	47,484	1,18e-6
	$\beta_{7,2}$	-1,5223513	-44,250	1,56e-6
Puncak Jaya	$\beta_{8,1}$	2,8123257	25,353	1,44e-5
	$\beta_{8,2}$	-0,0546632	-10,858	4,08e-4
Mimika	$\beta_{9,1}$	20,4425394	23,342	1,99e-5

	$\beta_{9,2}$	-2,5707327	-23,199	2,05e-5
Boven Digoel	$\beta_{10,1}$	2,50425324	16,932	0,00007
	$\beta_{10,2}$	-0,2344766	-12,270	0,00025
Mappi	$\beta_{11,1}$	4,50338565	24,973	1,53e-5
	$\beta_{11,2}$	-0,31348727	-18,968	4,55e-5
Asmat	$\beta_{12,1}$	-20,5136956	-22,691	2,23e-5
	$\beta_{12,2}$	1,7327619	24,322	1,69e-5
Yahukimo	$\beta_{13,1}$	-3,11946777	-67,989	2,80e-7
	$\beta_{13,2}$	0,29227379	117,040	3,19e-8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Kota Jayapura	$\beta_{29,1}$	-5,43144657	-27,819	9,93e-6
	$\beta_{29,2}$	0,98584307	32,238	5,52e-6

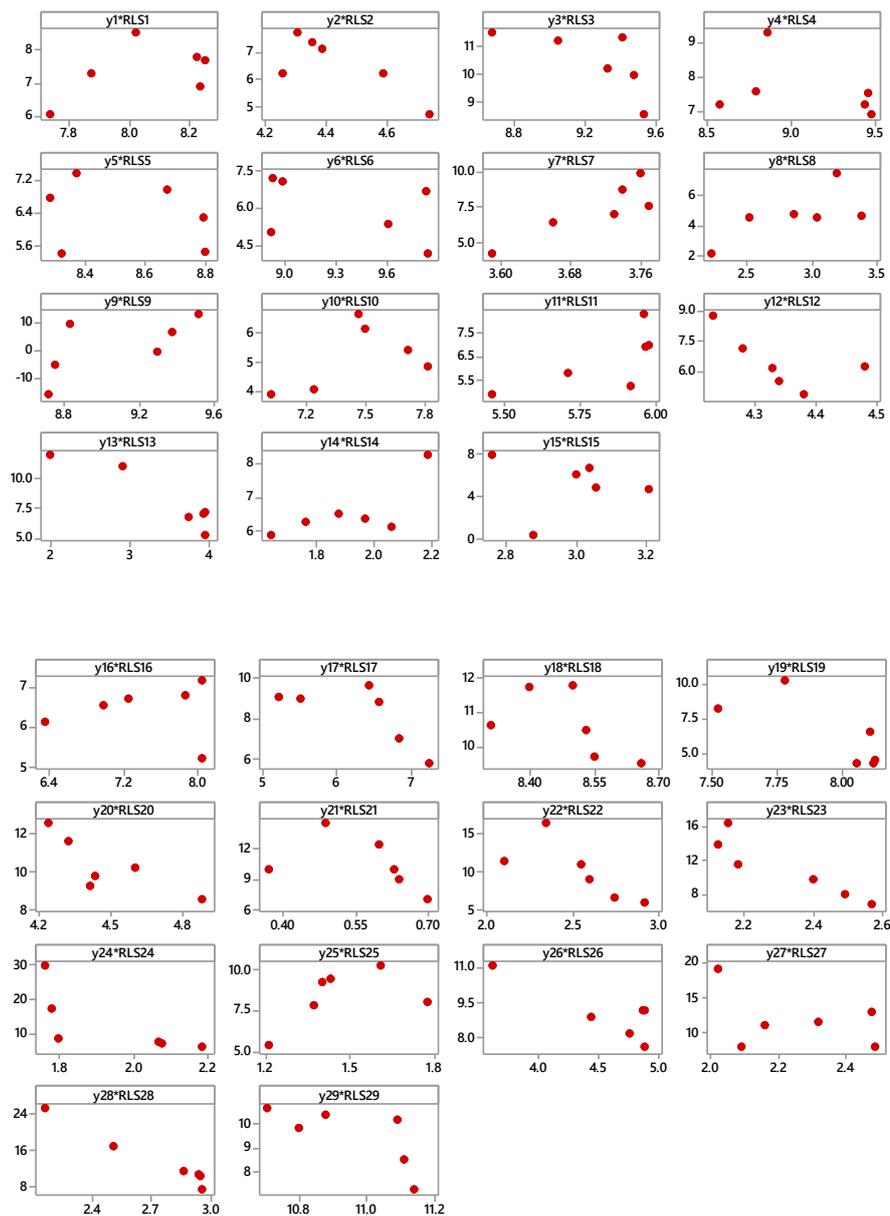
Berdasarkan hasil uji hipotesis parsial, diperoleh bahwa dari 58 parameter yang digunakan secara statistik menunjukkan terdapat 3 parameter yang tidak signifikan dan 55 parameter signifikan.

4.2.3 Pemodelan Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016 Menggunakan Model Regresi Nonparametrik *Spline Truncated Data Longitudinal*

Berdasarkan hasil analisis regresi linier berganda yang nilai R^2 sebesar 72,20 dan R^2 *adjusted* sebesar 58,30 persen, maka perlu dilakukan eksplorasi lagi untuk memperoleh hasil analisis yang lebih baik. Salah satu bentuk eksplorasi yang peneliti lakukan adalah membuat *scatter plot* untuk mengidentifikasi bentuk pola hubungan antara variabel respon dengan masing-masing variabel prediktor.

4.2.3.1 Identifikasi Variabel Komponen Nonparametrik

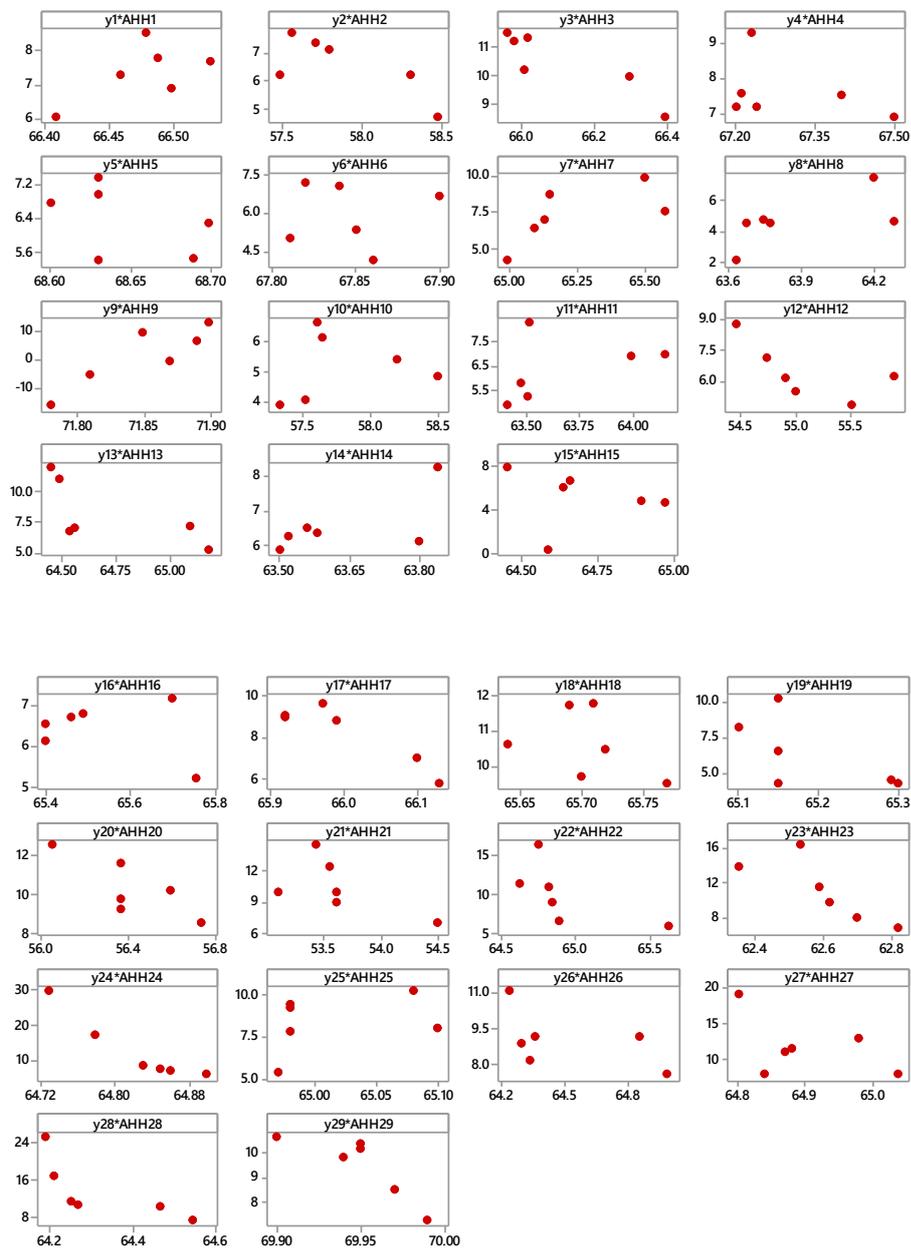
Untuk mengidentifikasi bahwa variabel penelitian merupakan komponen nonparametrik, dapat ditinjau secara visual dengan *scatter plot*. Di bawah ini terdapat beberapa *scatter plot* antara variabel respon dan variabel prediktor, baik secara *cross section* maupun longitudinal.



Gambar 4.4 Scatter Plot Pertumbuhan Ekonomi dan Variabel Rata-rata Lama Sekolah yang Diduga Berpengaruh di Kabupaten/Kota di Provinsi Papua, 2011-2016

Dari gambar 4.4 terlihat bahwa pola hubungan antara pertumbuhan ekonomi dan rata-rata lama sekolah di masing-masing kabupaten/kota Provinsi Papua dari tahun 2011-2016 cenderung tidak membentuk pola tertentu. Pola hubungan yang terlihat cenderung mengalami perubahan

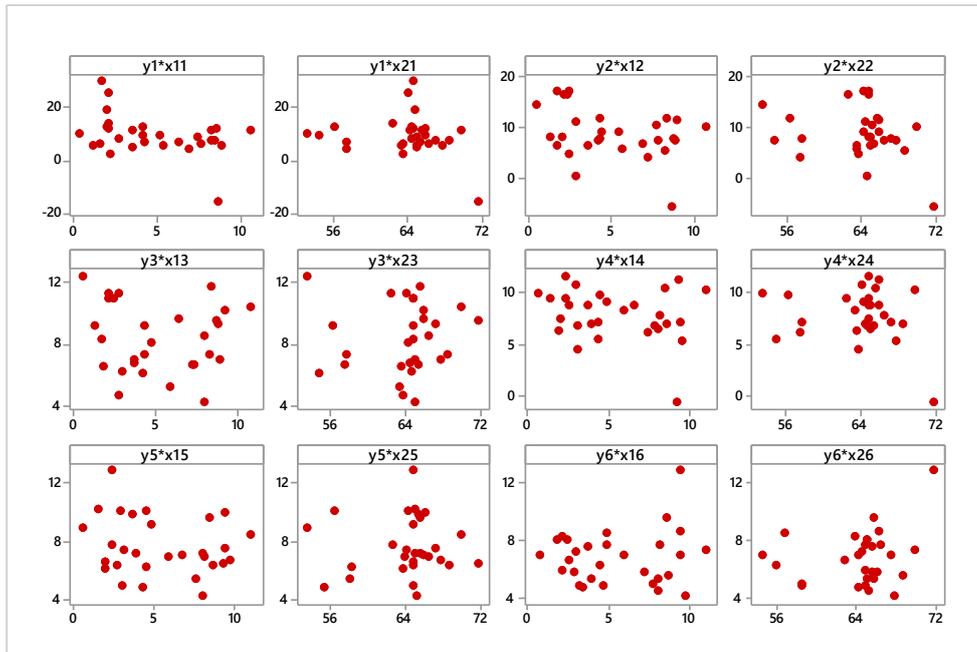
perilaku pada sub interval tertentu, sehingga variabel rata-rata lama sekolah dapat dimodelkan dengan didekati sebagai komponen nonparametrik.



Gambar 4.5 Scatter Plot Pertumbuhan Ekonomi dan Variabel Angka Harapan Hidup yang Diduga Berpengaruh di Kabupaten/Kota di Provinsi Papua, 2011-2016

Dari gambar 4.5 terlihat bahwa pola hubungan antara pertumbuhan ekonomi dan rata-rata lama sekolah di masing-masing kabupaten/kota Provinsi Papua dari tahun 2011-2016 cenderung tidak membentuk pola tertentu. Pola

hubungan yang terlihat cenderung mengalami perubahan perilaku pada sub interval tertentu, sehingga variabel angka harapan hidup dapat dimodelkan dengan didekati sebagai komponen nonparametrik.



Gambar 4.6 Scatter Plot Pertumbuhan Ekonomi dan Variabel-Variabel yang Diduga Berpengaruh pada Masing-Masing Periode.

Pada Gambar 4.6 merupakan plot yang menggambarkan bentuk pola data antara pertumbuhan ekonomi terhadap masing-masing variabel yang diduga berpengaruh pada masing-masing tahun yaitu 2011 hingga 2016. Secara visualisasi dapat diduga bahwa bentuk pola data yang terbentuk antara variabel respon terhadap masing-masing variabel prediktor adalah tidak membentuk pola tertentu, sehingga untuk analisis dari pola perilaku data tersebut dapat menggunakan pendekatan regresi nonparametrik.

4.2.3.2 Pemodelan Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016 Menggunakan Bobot W_1

Pada sub bab ini disajikan pemodelan dengan menggunakan bobot W_1 . Berikut ini adalah nilai GCV untuk satu titik knot pada model pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua yaitu:

Tabel 4.5 Nilai GCV Menggunakan Satu Titik Knot dengan Bobot W_1

Increment	Knot ($k_{l,i}, l = 1, 2; i = 1, 2, \dots, 29$)						GCV
	$K_{1,1}$...	$K_{1,29}$	$K_{2,1}$...	$K_{2,29}$	
1	7.74	...	10.71	66.41	...	69.90	0.1198
2	7.78	...	10.74	66.42	...	69.91	0.0963
3	7.81	...	10.77	66.43	...	69.91	0.1078
4	7.85	...	10.80	66.44	...	69.92	0.1602
5	7.89	...	10.83	66.44	...	69.93	0.2159
6	7.93	...	10.86	66.45	...	69.93	0.2339
7	7.96	...	10.89	66.46	...	69.94	0.2717
8	8.00	...	10.93	66.47	...	69.95	0.3751
9	8.04	...	10.96	66.48	...	69.95	0.5715
10	8.07	...	10.99	66.49	...	69.96	0.6079
11	8.11	...	11.02	66.50	...	69.96	0.5886
12	8.15	...	11.05	66.50	...	69.97	0.5565
13	8.19	...	11.08	66.51	...	69.98	0.4480
14	8.22	...	11.11	66.52	...	69.98	0.3966

Dari Tabel 4.5 diperoleh nilai GCV terkecil berada pada increment kedua yaitu 0,0963 untuk satu titik knot. Untuk titik knot di masing-masing kabupaten/kota selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 3. Nilai estimasi parameter untuk masing-masing kabupaten/kota dapat dilihat pada Lampiran 6. Model dari regresi nonparametrik spline truncated data longitudinal dengan menggunakan satu titik knot dengan dua variabel prediktor adalah sebagai berikut:

$$\hat{y}_{ij} = \hat{\beta}_{1i}z_{ij1} + \hat{\gamma}_{1i}(z_{ij1} - k_{1i})_+ + \hat{\beta}_{2i}z_{ij2} + \hat{\gamma}_{2i}(z_{ij2} - k_{2i})_+ \quad (4.60)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, 29; j = 1, 2, \dots, 6$

4.2.3.3 Pemodelan Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016 Menggunakan Bobot W_2

Berikut ini adalah nilai titik-titik knot untuk satu titik knot dengan bobot W_2 pada GCV minimum untuk model pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua yaitu:

Tabel 4.6 Nilai GCV Menggunakan Satu Titik Knot dengan Bobot W_2

Increment	Knot ($k_{l,i}, l = 1, 2; i = 1, 2, \dots, 29$)						GCV
	$K_{1,1}$...	$K_{1,29}$	$K_{2,1}$...	$K_{2,29}$	
1	7,74	...	10,71	66,41	...	69,90	0,718781
2	7,78	...	10,74	66,42	...	69,91	0,577677
3	7,81	...	10,77	66,43	...	69,91	0,646661
4	7,85	...	10,80	66,44	...	69,92	0,96104
5	7,89	...	10,83	66,44	...	69,93	1,295239
6	7,93	...	10,86	66,45	...	69,93	1,403463
7	7,96	...	10,89	66,46	...	69,94	1,629916
8	8,00	...	10,93	66,47	...	69,95	2,250731
9	8,04	...	10,96	66,48	...	69,95	3,428843
10	8,07	...	10,99	66,49	...	69,96	3,647642
11	8,11	...	11,02	66,50	...	69,96	3,531761
12	8,15	...	11,05	66,50	...	69,97	3,339258
13	8,19	...	11,08	66,51	...	69,98	2,687757
14	8,22	...	11,11	66,52	...	69,98	2,379719

Dari Tabel 4.6 diperoleh nilai GCV minimum satu titik knot dengan bobot W_2 berada pada *increment* kedua yaitu 0,5777. Untuk hasil satu titik knot di masing-masing kabupaten/kota selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 4. Model dari regresi nonparametrik spline truncated data longitudinal dengan menggunakan satu titik knot dengan dua variabel prediktor adalah sebagai berikut:

$$\hat{y}_{ij} = \hat{\beta}_{1i}z_{ij1} + \hat{\gamma}_{1i}(z_{ij1} - k_{1i})_+ + \hat{\beta}_{2i}z_{ij2} + \hat{\gamma}_{2i}(z_{ij2} - k_{2i})_+ \quad (4.61)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, 29; j = 1, 2, \dots, 6$

4.2.3.4 Pemodelan Pertumbuhan Ekonomi Provinsi Papua Tahun 2011-2016 Menggunakan Bobot W_3

Berikut ini adalah nilai titik knot pada satu titik knot dan dengan bobot W_3 pada GCV minimum untuk model pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua yaitu

Tabel 4.7 Nilai GCV Menggunakan Satu Titik Knot dengan Bobot W_3

Increment	Knot ($k_{l,i}, l = 1, 2; i = 1, 2, \dots, 29$)						GCV
	$K_{1,1}$...	$K_{1,29}$	$K_{2,1}$...	$K_{2,29}$	
1	7,74	...	10,71	66,41	...	69,90	43979,68
2	7,78	...	10,74	66,42	...	69,91	53605,86
3	7,81	...	10,77	66,43	...	69,91	68721,54
4	7,85	...	10,80	66,44	...	69,92	84104,92

Increment	Knot ($k_{l,i}, l = 1, 2; i = 1, 2, \dots, 29$)						GCV
	$K_{1,1}$...	$K_{1,29}$	$K_{2,1}$...	$K_{2,29}$	
5	7,89	...	10,83	66,44	...	69,93	88949,31
6	7,93	...	10,86	66,45	...	69,93	92484,94
7	7,96	...	10,89	66,46	...	69,94	120002,9
8	8,00	...	10,93	66,47	...	69,95	109130,9
9	8,04	...	10,96	66,48	...	69,95	98185,71
10	8,07	...	10,99	66,49	...	69,96	90986,45
11	8,11	...	11,02	66,50	...	69,96	84788,94
12	8,15	...	11,05	66,50	...	69,97	67446,75
13	8,19	...	11,08	66,51	...	69,98	60125,65
14	8,22	...	11,11	66,52	...	69,98	53233,42

Dari Tabel 4.7 diperoleh nilai GCV minimum untuk satu titik knot dengan bobot \mathbf{W}_3 berada pada *increment* pertama yaitu 43.979,68. Untuk titik knot di masing-masing kabupaten/kota selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 5. Model dari regresi nonparametrik spline truncated data longitudinal dengan menggunakan satu titik knot dengan dua variabel prediktor adalah sebagai berikut:

$$\hat{y}_{ij} = \hat{\beta}_{1i}z_{ij1} + \hat{\gamma}_{1i}(z_{ij1} - k_{1i})_+ + \hat{\beta}_{2i}z_{ij2} + \hat{\gamma}_{2i}(z_{ij2} - k_{2i})_+ \quad (4.62)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, 29; j = 1, 2, \dots, 6$

4.2.3.5 Pemilihan Model Terbaik Spline Truncated

Pada Tabel 4.8 akan disajikan perbandingan nilai GCV dalam pemodelan regresi nonparametrik spline truncated data longitudinal pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua menggunakan bobot $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$, dan \mathbf{W}_3 .

Tabel 4.8 Perbandingan Nilai GCV Model Terpilih dengan Bobot $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$, dan \mathbf{W}_3

Model	GCV Minimum
Model satu titik knot dengan bobot \mathbf{W}_1	0,0963
Model satu titik knot dengan bobot \mathbf{W}_2	0,5777
Model satu titik knot dengan bobot \mathbf{W}_3	43979,68

Berdasarkan tabel 4.8, dapat disimpulkan bahwa model regresi nonparametrik spline truncated untuk data longitudinal adalah model satu titik knot dengan bobot \mathbf{W}_1 . Secara umum, model matematis untuk regresi

nonparametrik spline truncated dengan satu titik knot dan bobot \mathbf{W}_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{y}_{ij} = \hat{\beta}_{1i}z_{ij1} + \hat{\gamma}_{1i}(z_{ij1} - k_{1i})_+ + \hat{\beta}_{2i}z_{ij2} + \hat{\gamma}_{2i}(z_{ij2} - k_{2i})_+ \quad (4.63)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, 29; j = 1, 2, \dots, 6$

4.2.3.6 Pengujian Signifikansi Parameter secara Simultan

Hipotesis untuk pengujian signifikansi parameter secara simultan pada model regresi nonparametrik spline truncated data longitudinal adalah sebagai berikut:

$$H_0: \beta_{ki} = \gamma_{li} = 0$$

$$H_1: \text{minimal ada satu } \beta_{ki} \neq 0, \gamma_{li} \neq 0$$

dimana $k = 1, 2; i = 1, 2, \dots, 29; l = 1, 2$

Hasil ANOVA pada pengujian hipotesis simultan parameter dari model terbaik regresi nonparametrik spline truncated untuk data longitudinal menggunakan bobot \mathbf{W}_1 tersaji pada Tabel 4.9 di bawah ini.

Tabel 4.9 ANOVA Model Terbaik Regresi Nonparametrik Spline Truncated Data Longitudinal.

Sumber Variasi	Derajat Kebebasan	Jumlah Kuadrat	Rata-rata Kuadrat	F _{hitung}	p-value
Regresi	116	2.880,79	24,83	2.321,47	3,056e-84
Error	58	0,62	0,011		
Total	174	2.881,41			

Pada Tabel 4.9 terlihat bahwa nilai *p-value* sebesar 3,056e-84 lebih kecil dari nilai $\alpha = 5\%$, jadi keputusan yang diperoleh adalah tolak H_0 . Dapat disimpulkan bahwa minimal terdapat satu parameter yang signifikan dalam model. Model regresi nonparametrik spline truncated dengan satu titik knot memiliki koefisien determinasi (R^2) sebesar 97,09 persen dan R^2 *adjusted* sebesar 91,27 persen. Penggunaan R^2 *adjusted* karena memperhatikan jumlah variabel dan parameter yang digunakan lebih dari satu variabel. Dari nilai R^2 *adjusted* yg dihasilkan berarti bahwa variabilitas dari variabel respon dapat dijelaskan oleh kedua variabel prediktor sebesar 91,27 persen, sedangkan sisanya 8,73 persen dijelaskan oleh variabel lain.

4.2.3.7 Pengujian Signifikansi Parameter secara Parsial

Dari hasil kesimpulan pengujian hipotesis secara simultan bahwa minimal ada satu parameter yang signifikan, maka tahapan selanjutnya dapat dilakukan pengujian hipotesis secara parsial yang bertujuan untuk mengetahui parameter yang manakah yang signifikan terhadap model. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$H_0: \beta_{ki} = 0; H_1: \beta_{ki} \neq 0$$

$$H_0: \gamma_{li} = 0; H_1: \gamma_{li} \neq 0$$

dimana $k = 1,2; i = 1,2, \dots, 29; l = 1,2$

Syntax program *R* untuk pengujian hipotesis secara parsial dapat dilihat pada Lampiran 2. Berikut ini adalah output dari pengujian hipotesis secara parsial untuk dari model terbaik regresi nonparametrik spline truncated untuk data longitudinal menggunakan bobot \mathbf{W}_1 yang disajikan pada tabel 4.10.

Tabel 4.10 Output Pengujian Hipotesis secara Parsial

Variabel	Parameter	Estimator	t_{hitung}	$p\text{-value}$
\mathbf{z}_{1j1}	$\beta_{1,1}$	43,8654	111,05	2,88e-69
	$\gamma_{1,1}$	-45,2519	-116,17	2,14e-70
\mathbf{z}_{1j2}	$\beta_{1,2}$	-5,0217	-108,93	8,79e-69
	$\gamma_{1,2}$	11,4804	42,27	2,84e-45
\mathbf{z}_{2j1}	$\beta_{2,1}$	-53,1937	161,74	1,05e-78
	$\gamma_{2,1}$	-66,2964	-186,96	2,38e-82
\mathbf{z}_{2j2}	$\beta_{2,2}$	-3,8348	-156,602	6,77e-78
	$\gamma_{2,2}$	6,8769	98,263	3,35e-66
\mathbf{z}_{3j1}	$\beta_{3,1}$	-5,8281	-19,055	1,21e-26
	$\gamma_{3,1}$	5,5882	16,848	5,19e-24
\mathbf{z}_{3j2}	$\beta_{3,2}$	0,9397	23,346	3,54e-31
	$\gamma_{3,2}$	-5,8517	-94,973	2,39e-65
\mathbf{z}_{4j1}	$\beta_{4,1}$	22,9045	131,229	1,86e-73
	$\gamma_{4,1}$	-24,4389	-133,213	7,83e-74
\mathbf{z}_{4j2}	$\beta_{4,2}$	-2,8173	-125,946	2,00e-72
	$\gamma_{4,2}$	1,9980	38,109	9,39e-43

Variabel	Parameter	Estimator	t_{hitung}	$p-value$
z_{5j1}	$\beta_{5,1}$	-0,4747	-1,733	0,0885
	$\gamma_{5,1}$	2,3743	8,574	6,74e-12
z_{5j2}	$\beta_{5,2}$	0,1554	4,687	1,73e-5
	$\gamma_{5,2}$	-20,1625	-112,885	1,12e-69
z_{6j1}	$\beta_{6,1}$	2,1114	12,339	7,34e-18
	$\gamma_{6,1}$	-6,7914	-38,923	2,89e-43
z_{6j2}	$\beta_{6,2}$	-0,1909	-8,463	1,03e-11
	$\gamma_{6,2}$	54,1714	237,362	2,35e-88
z_{7j1}	$\beta_{7,1}$	89,6994	58,483	2,90e-53
	$\gamma_{7,1}$	-67,8949	-41,186	1,22e-44
z_{7j2}	$\beta_{7,2}$	-4,8915	-57,694	6,28e-53
	$\gamma_{7,2}$	4,8333	48,759	8,95e-49
z_{8j1}	$\beta_{8,1}$	41,5381	235,584	3,63e-88
	$\gamma_{8,1}$	-43,6939	-222,979	8,79e-87
z_{8j2}	$\beta_{8,2}$	-1,4300	-227,846	2,52e-87
	$\gamma_{8,2}$	6,0372	186,108	3,09e-82
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
z_{29j1}	$\beta_{29,1}$	68,4375	147,699	1,99e-76
	$\gamma_{29,1}$	-66,5005	-145,186	5,39e-76
z_{29j2}	$\beta_{29,2}$	-10,3334	-145,420	4,92e-76
	$\gamma_{29,2}$	-64,1012	-231,292	1,05e-87

Berdasarkan tabel 4.10 terlihat bahwa untuk model pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua dari tahun 2011-2016, dari 174 parameter yang digunakan menunjukkan hasil satu parameter tidak signifikan dan 173 parameter lainnya signifikan, sehingga variabel yang berpengaruh sebanyak dua variabel yaitu rata-rata lama sekolah dan angka harapan hidup.

4.2.4 Perbandingan Model

Pada subbab sebelumnya dalam bab 4 telah dilakukan analisis menggunakan metode regresi linier berganda dan regresi nonparametrik spline truncated, maka selanjutnya akan dilakukan perbandingan untuk

kedua model tersebut untuk mendapatkan model terbaik. Salah satu kriteria yang digunakan dalam pemilihan model terbaik yaitu dengan membandingkan koefisien determinasi yang disesuaikan (R^2) dari kedua model dan dicari nilai R^2 yang terbesar.

Berikut ini pada tabel 4.11 disajikan nilai R^2 pada masing-masing model kabupaten/kota.

Tabel 4.11 Nilai R^2 dan R^2 *Adjusted* Model Regresi Linier Berganda dan Nonparametrik Spline Truncated pada Data Longitudinal

Kriteria	Regresi Linier Berganda Longitudinal	Regresi Nonparametrik Spline Truncated Longitudinal
R^2	72,20	58,30
R^2 <i>Adjusted</i>	97,09	91,27

Berdasarkan Tabel 4.11 terlihat bahwa nilai R^2 dan R^2 *adjusted* pada model regresi nonparametrik spline truncated data longitudinal menghasilkan nilai yang lebih besar dibandingkan regresi linier berganda data longitudinal yaitu 97,09 persen dan 91,27 persen. Oleh karena itu, dari kriteria ini dapat ditentukan bahwa model yang lebih baik untuk data longitudinal yang digunakan adalah regresi nonparametrik spline truncated.

4.2.5 Interpretasi dan Prediksi Pertumbuhan Ekonomi menggunakan Model Terbaik Regresi Nonparametrik *Spline Truncated Data Longitudinal*

Model terbaik regresi nonparametrik spline truncated untuk data longitudinal pada kasus data pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua adalah dengan satu titik knot menggunakan bobot W_1 . Berdasarkan formula (4.63), dapat digambarkan pertumbuhan ekonomi di masing-masing kabupaten/kota di Provinsi Papua, yaitu sebagai berikut:

1. Kabupaten Merauke

$$\hat{y}_{1,j} = 43,865z_{1j1} - 45,252(z_{1j1} - 7,777)_+ - 5,022z_{1j2} + 11,48(z_{1j2} - 66,419)_+$$

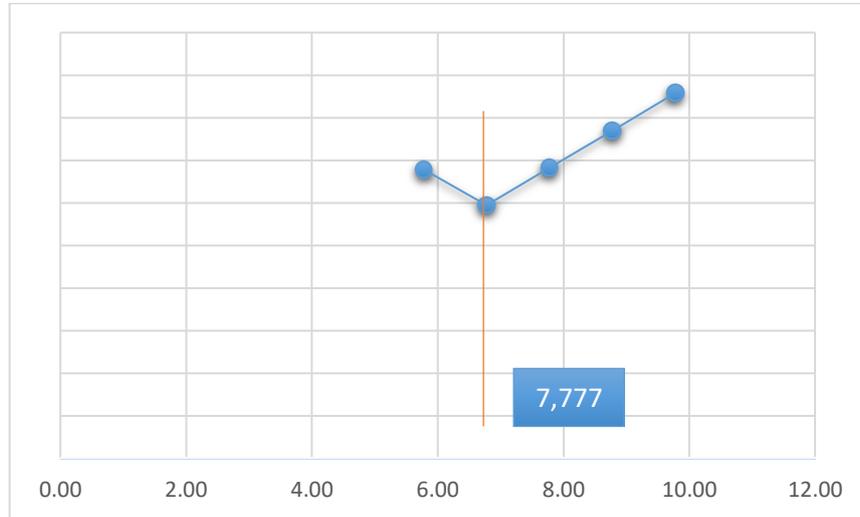
dimana $j = 1, 2, \dots, 6$

Interpretasi model regresi spline truncated data longitudinal di Kabupaten Merauke tersebut untuk variabel rata-rata lama sekolah (z_{ij1}) adalah:

$$\hat{y}_{1j} = 43,865z_{1j1} \quad ; z_{1j1} < 7,777$$

$$\hat{y}_{1j} = -1,387z_{1j1} + 351,92 \quad ; z_{1j1} \geq 7,777$$

sehingga, dapat dilihat bentuk hubungan antara rata-rata lama sekolah dengan pertumbuhan ekonomi di Merauke dengan asumsi bahwa variabel prediktor yang lain konstan pada gambar di bawah ini:



Gambar 4.7 Hubungan Antara Rata-rata Lama Sekolah dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kabupaten Merauke

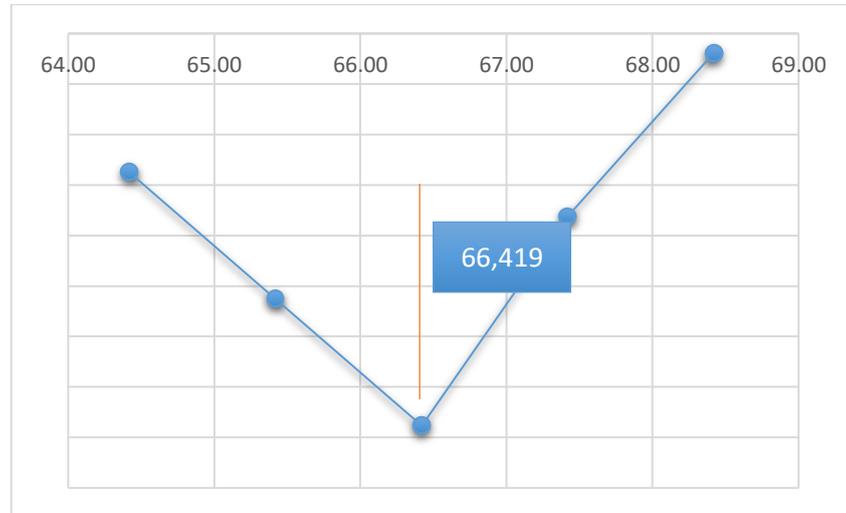
Berdasarkan Gambar 4.7 menunjukkan bahwa untuk meningkatkan pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Merauke bila dikaitkan dengan variabel rata-rata lama sekolah, maka pemerintah daerah Kabupaten Merauke harus mengupayakan agar rata-rata lama sekolah selalu berada di atas 7,777 tahun. Kabupaten Merauke sebagai salah satu contoh Kabupaten yang pertumbuhannya ekonominya dalam kategori sedang, maka hal ini masih merasa perlu untuk meningkatkan pertumbuhan ekonomi.

Kemudian interpretasi model regresi spline truncated data longitudinal di Kabupaten Merauke tersebut untuk variabel angka harapan hidup (z_{1j2}) adalah:

$$\hat{y}_{1j} = -5,022z_{1j2} \quad ; z_{1j2} < 66,419$$

$$\hat{y}_{1j} = 6,4857z_{1j2} - 762,52 \quad ; z_{1j2} \geq 66,419$$

sehingga, dapat dilihat bentuk hubungan antara angka harapan hidup dengan pertumbuhan ekonomi di Merauke dengan asumsi bahwa variabel prediktor yang lain konstan pada gambar di bawah ini:



Gambar 4.8 Hubungan Antara Angka Harapan Hidup dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kabupaten Merauke

Berdasarkan Gambar 4.8 menunjukkan bahwa untuk meningkatkan pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Merauke jika dihubungkan dengan angka harapan hidup, maka Pemerintah Daerah Kabupaten Merauke harus mengupayakan agar angka harapan hidup di atas 66,419 tahun karena akan mampu meningkatkan kualitas sumber daya manusia sehingga dapat mampu menjadi penggerak untuk meningkatkan pertumbuhan ekonomi.

2. Kabupaten Puncak Jaya

$$\hat{y}_{8,j} = 41,538z_{8j1} - 43,694(z_{8j1} - 2,32)_+ - 1,430z_{8j2} + 6,037(z_{8j2} - 63,68)_+$$

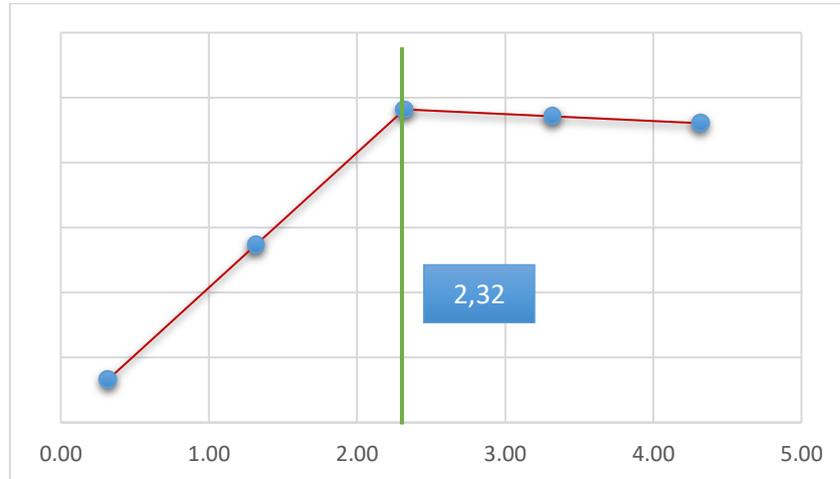
dimana $j = 1, 2, \dots, 6$

Interpretasi model regresi spline truncated data longitudinal di Kabupaten Puncak Jaya tersebut untuk variabel rata-rata lama sekolah (z_{ij1}) adalah:

$$\hat{y}_{8,j} = 41,538z_{8j1} \quad ; z_{8j1} < 2,32$$

$$\hat{y}_{8,j} = -2,156z_{8j1} + 101,37 \quad ; z_{8j1} \geq 2,32$$

sehingga, dapat dilihat bentuk hubungan antara rata-rata lama sekolah dengan pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Puncak Jaya dengan asumsi bahwa variabel prediktor yang lain konstan pada gambar di bawah ini:



Gambar 4.9 Hubungan Antara Rata-rata Lama Sekolah dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kabupaten Puncak Jaya

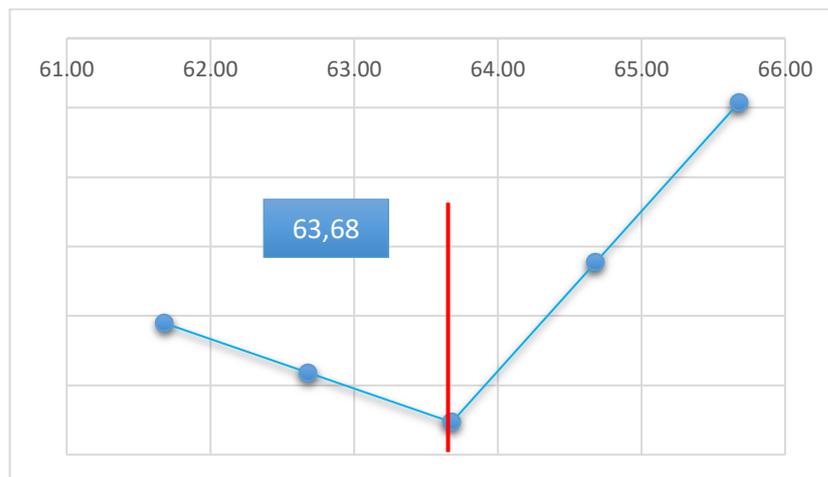
Berdasarkan Gambar 4.9 menunjukkan hubungan bahwa meningkatnya rata-rata lama sekolah tidak diikuti oleh pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Puncak Jaya, hal ini karena peningkatan rata-rata lama sekolah di Kabupaten Puncak Jaya tidak diikuti oleh pertumbuhan di sektor ekonomi, sehingga sebagai salah satu wilayah yang pertumbuhan ekonominya rendah, maka pemerintah daerah perlu mengupayakan untuk meningkatkan faktor lain yang dapat meningkatkan pertumbuhan ekonominya.

Kemudian, interpretasi model regresi spline truncated data longitudinal di Kabupaten Puncak Jaya tersebut untuk variabel angka harapan hidup (z_{ij2}) adalah:

$$\hat{y}_{8,j} = -1,430z_{8j2} \quad ; z_{8j2} < 63,68$$

$$\hat{y}_{8,j} = -1,387z_{8j2} + 101,37 \quad ; z_{8j2} \geq 63,68$$

sehingga, dapat dilihat bentuk hubungan antara angka harapan hidup dengan pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Puncak Jaya dengan asumsi bahwa variabel prediktor yang lain konstan pada gambar di bawah ini:



Gambar 4.10 Hubungan Antara Angka Harapan Hidup dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kabupaten Puncak Jaya

Berdasarkan Gambar 4.10 menunjukkan bahwa untuk meningkatkan pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Puncak Jaya, pemerintah daerah harus mengupayakan untuk meningkatkan angka harapan hidup menjadi di atas 63,68 tahun. Sebagai kabupaten yang pertumbuhan ekonominya lebih lambat dibanding daerah lainnya, sedangkan kondisi daerahnya juga masih belum begitu berkembang, maka hal ini merupakan hal yang sangat penting untuk dicapai.

3. Kota Jayapura

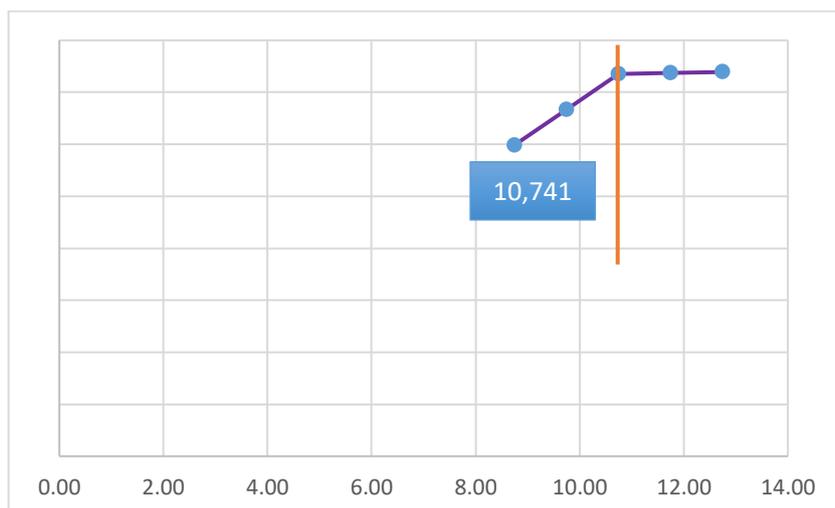
$$\hat{y}_{29j} = 68,437z_{29j1} - 66,500(z_{29j1} - 10,741)_+ - 10,333z_{29j2} - 64,101(z_{29j2} - 69,906)_+$$

dimana $j = 1, 2, \dots, 6$

Interpretasi model regresi spline truncated data longitudinal di Kota Jayapura tersebut untuk variabel rata-rata lama sekolah (z_{ij1}) adalah:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{29,j} &= 68,437z_{29j1} && ; z_{29j1} < 10,741 \\ \hat{y}_{29,j} &= -1,937z_{29j1} + 714,28 && ; z_{29j1} \geq 10,741 \end{aligned}$$

sehingga, dapat dilihat bentuk hubungan antara rata-rata lama sekolah dengan pertumbuhan ekonomi di Kabupaten Puncak Jaya dengan asumsi bahwa variabel prediktor yang lain konstan pada gambar di bawah ini:



Gambar 4.11 Hubungan Antara Rata-rata Lama Sekolah dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kota Jayapura

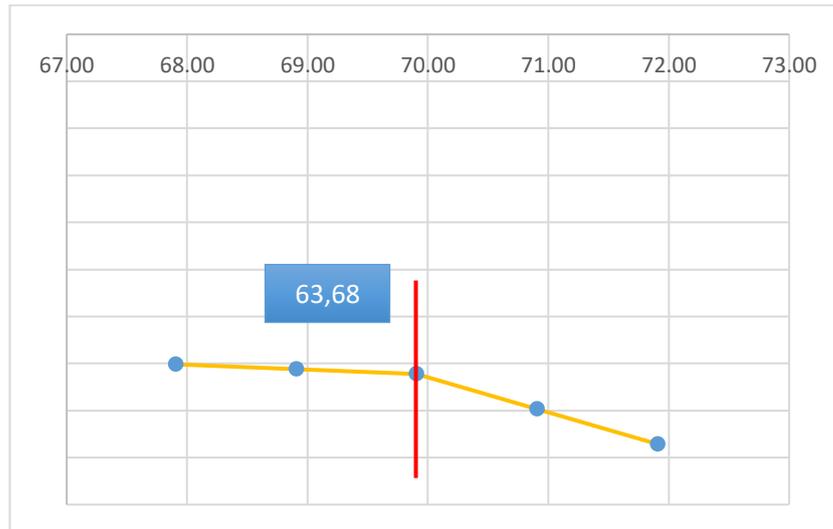
Berdasarkan Gambar 4.11 menunjukkan bahwa peningkatan rata-rata lama sekolah di Kota Jayapura tidak akan memberikan dampak yang signifikan terhadap peningkatan pertumbuhan ekonomi, namun dapat menstabilkan pertumbuhannya. Sebagai wilayah yang pertumbuhannya cukup tinggi, hal ini sangat penting untuk terus meningkatkan rata-rata lama sekolah yang berguna untuk menstabilkan pertumbuhan ekonomi di Kota Jayapura.

Kemudian, interpretasi model regresi spline truncated data longitudinal di Kota Jayapura tersebut untuk variabel angka harapan hidup (z_{ij2}) adalah:

$$\hat{y}_{29,j} = -10,333z_{29j2} \quad ; z_{29j2} < 69,906$$

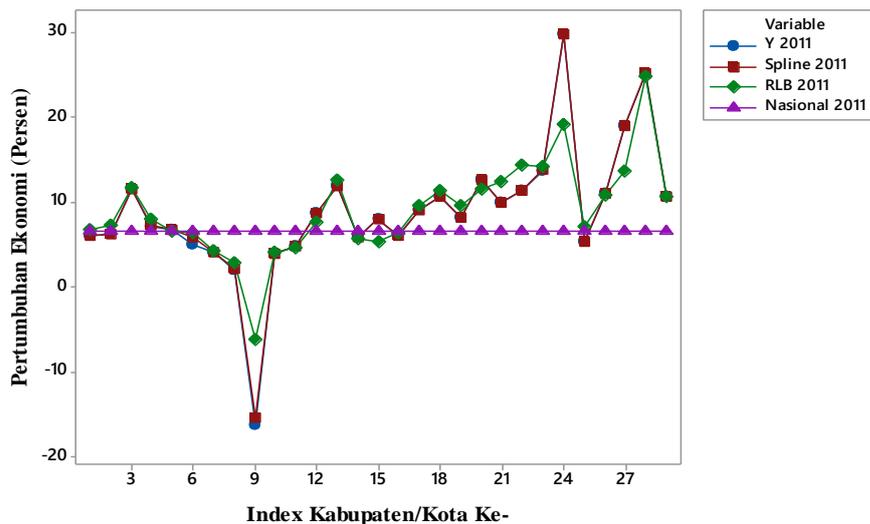
$$\hat{y}_{29,j} = -74,434z_{29j2} + 4481,04 \quad ; z_{29j2} \geq 69,906$$

sehingga, dapat dilihat bentuk hubungan antara angka harapan hidup dengan pertumbuhan ekonomi di Kota Jayapura dengan asumsi bahwa variabel prediktor yang lain konstan pada gambar di bawah ini:



Gambar 4.12 Hubungan Antara Angka Harapan Hidup dengan Pertumbuhan Ekonomi di Kota Jayapura

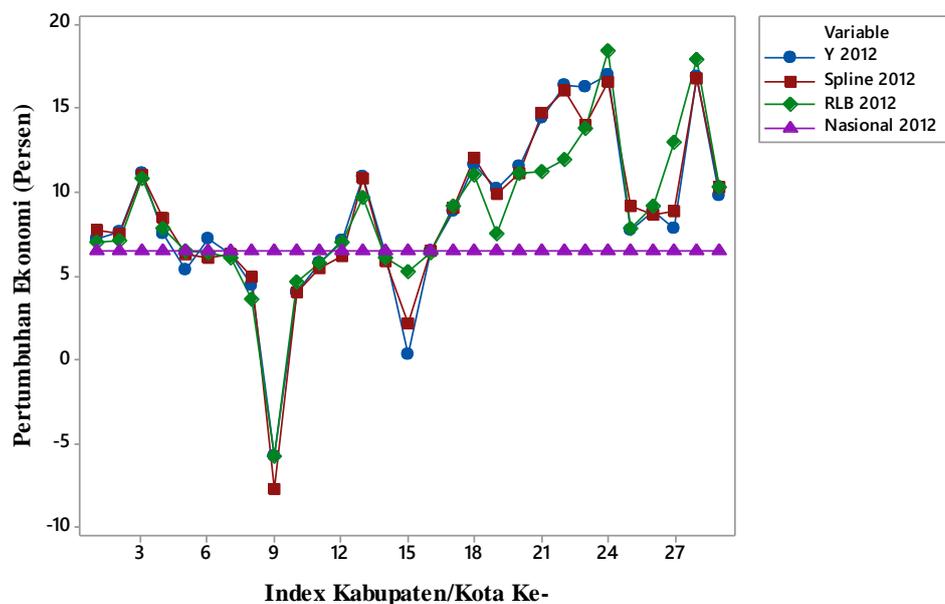
Berdasarkan Gambar 4.12 menunjukkan hubungan bahwa peningkatan angka harapan hidup di Kota Jayapura, tidak akan meningkatkan pertumbuhan ekonomi. Kota Jayapura sebagai wilayah yang pertumbuhan ekonominya tergolong tinggi, maka pemerintah daerah perlu mengupayakan target lain untuk meningkatkan dan menstabilkan pertumbuhan ekonomi di Kota Jayapura.



Gambar 4.13 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2011

Berdasarkan Gambar 4.13, menunjukkan pertumbuhan ekonomi antara data aktual dan prediksi di masing-masing kabupaten/kota pada tahun 2011. Prediksi

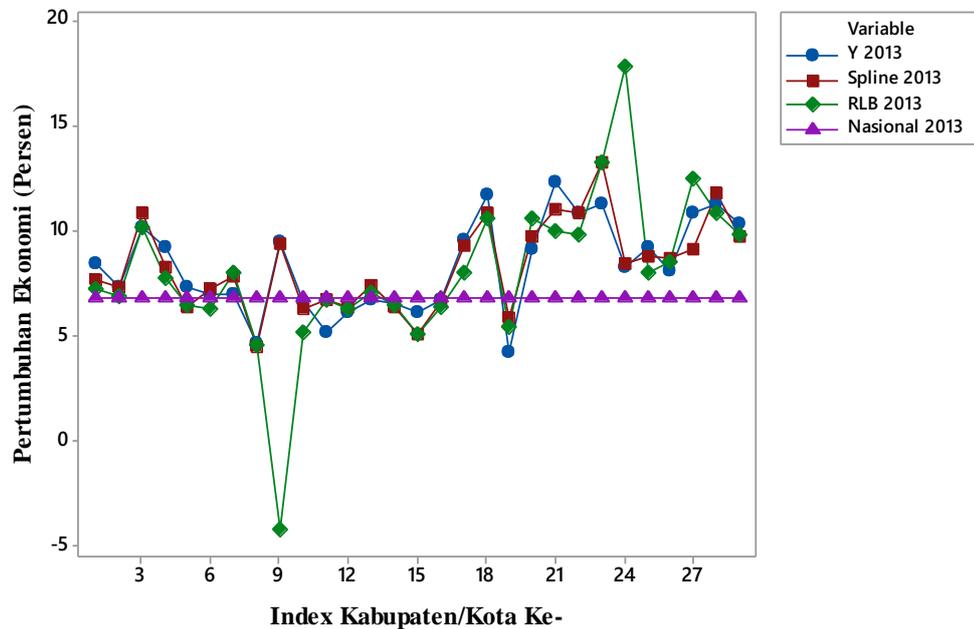
dihasilkan dari model regresi nonparametrik spline truncated yang telah diperoleh. Prediksi pertumbuhan ekonomi yang dihasilkan tidak menunjukkan perbedaan yang cukup signifikan pada beberapa kabupaten/kota, namun di beberapa daerah seperti Yalimo, Mimika, Lanny Jaya dan Intan Jaya memiliki perbedaan yang cukup signifikan antara pertumbuhan ekonomi aktual dan prediksinya. Mengacu pada target pertumbuhan ekonomi nasional yang ditetapkan di tahun 2011 sebesar 6,5 persen, maka di tahun 2011 terdapat 11 kabupaten/kota di Provinsi Papua yang pertumbuhan ekonominya masih berada di bawah target nasional yaitu Merauke, Jayawijaya, Biak, Paniai, Puncak Jaya, Mimika, Boven Digoel, Mappi, Pegunungan Bintang, Sarmi, dan Puncak.



Gambar 4.14 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2012

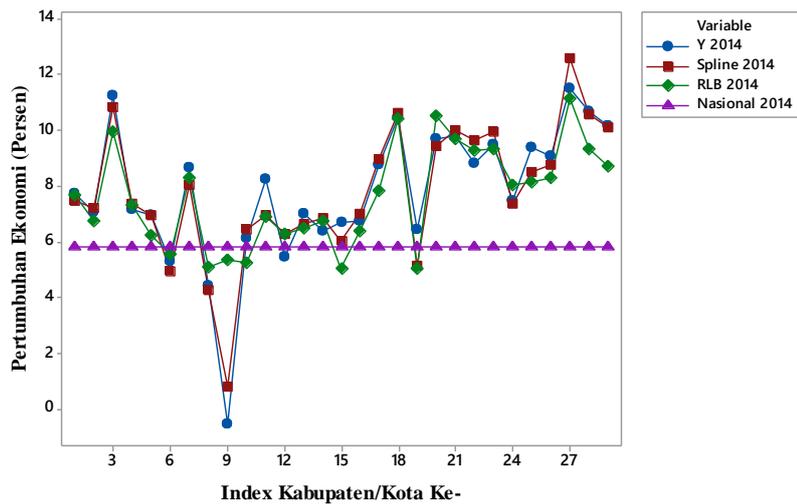
Berdasarkan Gambar 4.14, perbandingan antara pertumbuhan ekonomi aktual dan prediksinya lebih *smooth* (halus) dari tahun sebelumnya, hal ini ditunjukkan dengan melihat garis biru (data actual) dan garis merah (prediksi) hampir saling berhimpitan. Hal ini menunjukkan bahwa antara pertumbuhan ekonomi yang actual dengan prediksi di beberapa kabupaten/kota sudah searah pergerakannya, kecuali untuk beberapa kabupaten/kota tertentu seperti Yalimo, Mimika, dan Mamberamo Tengah yang agak kurang *smooth* (halus) perbedaannya.

Berdasarkan target pertumbuhan ekonomi nasional tahun 2012 ditetapkan sebesar 6,5 persen, maka terdapat 8 kabupaten/kota di Provinsi Papua yang pencapaian pertumbuhannya masih berada di bawah target nasional yaitu Kepulauan Yapen, Paniai, Puncak Jaya, Mimika, Boven Digoel, Mappi, Pegunungan Bintang, dan Tolikara.



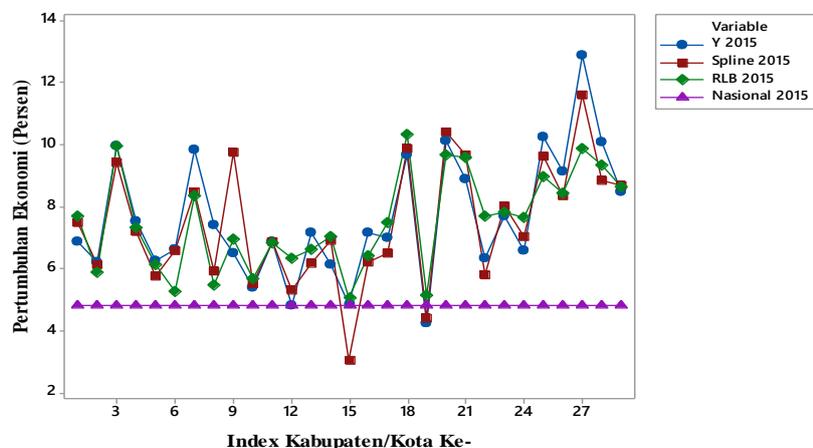
Gambar 4.15 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2013

Berdasarkan Gambar 4.15 terlihat bahwa perbandingan pertumbuhan ekonomi aktual dan prediksinya sudah searah namun belum begitu *smooth* (halus) perbedaannya. Pada tahun 2013, target pertumbuhan ekonomi nasional yang ditetapkan adalah 6,8 persen. Jika target pertumbuhan ekonomi nasional tersebut menjadi acuan untuk Provinsi Papua, maka terdapat 9 kabupaten/kota yang pencapaian pertumbuhannya masih berada di bawah target nasional, yaitu Puncak Jaya, Boven Digoel, Mappi, Asmat, Yahukimo, Pegunungan Bintang, Tolikara, Sarmi dan Supiori.



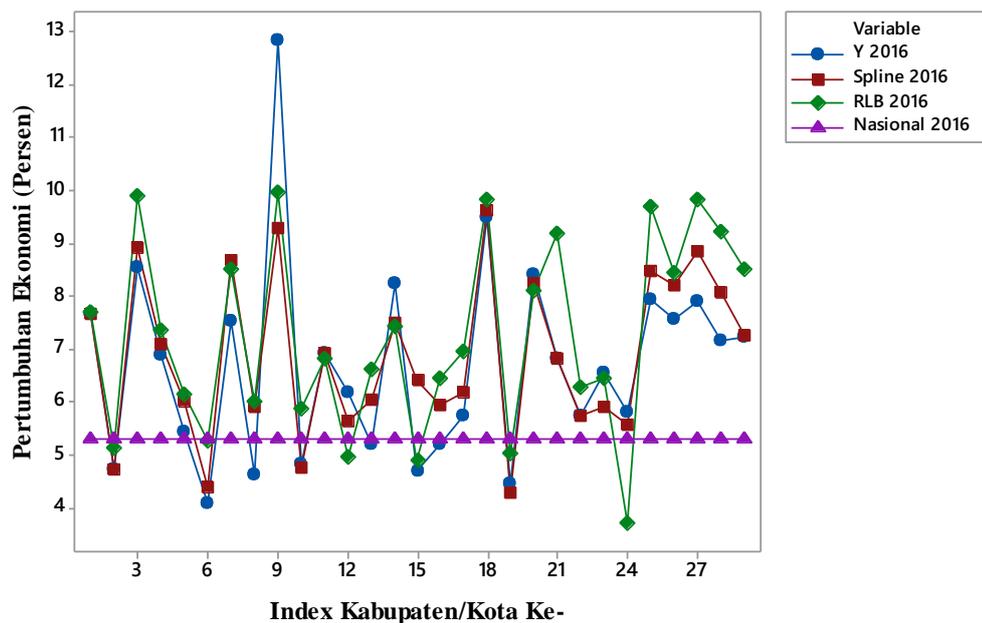
Gambar 4.16 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2014

Berdasarkan Gambar 4.16 menunjukkan perbandingan pertumbuhan ekonomi aktual dan prediksi tahun 2014 di masing-masing kabupaten/kota, dimana pergerakannya terlihat begitu *smooth* (halus), ini menunjukkan bahwa antara keduanya sudah sangat searah pergerakannya. Setelah tahun 2013, target pertumbuhan ekonomi nasional yang ditetapkan semakin berkurang dimana di tahun 2014 sebesar 5,8 persen. Berdasarkan target nasional tersebut, jika dijadikan acuan maka di Provinsi Papua masih terdapat 4 kabupaten/kota yang pencapaian pertumbuhannya di bawah target nasional yaitu Biak, Puncak Jaya, Mimika, dan Asmat.



Gambar 4.17 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2015

Berdasarkan Gambar 4.17 menunjukkan perbandingan pertumbuhan ekonomi actual dan prediksi tahun 2015 di masing-masing kabupaten/kota, terlihat bahwa pergerakannya sudah searah namun tidak *smooth* (halus). Pertumbuhan ekonomi nasional tahun 2015 ditargetkan sebesar 4,8 persen. Berdasarkan target ini, maka di Provinsi Papua masih terdapat dua kabupaten/kota yang pencapaiannya di bawah target nasional yaitu Kabupaten Asmat dan Supiori.



Gambar 4.18 Pertumbuhan Ekonomi Aktual, Prediksi dan Target Nasional Menurut Kabupaten/Kota di Provinsi Papua Tahun 2016

Berdasarkan Gambar 4.18 menunjukkan perbandingan antara pertumbuhan ekonomi aktual dan prediksi tahun 2016 di masing-masing kabupaten/kota, terlihat bahwa pergerakannya searah namun belum *smooth* (halus). Pertumbuhan ekonomi nasional di tahun 2016 ditargetkan sebesar 5,3 persen. Berdasarkan target nasional ini jika sebagai acuan, maka di Provinsi Papua tercatat masih ada 8 kabupaten/kota yang pencapaiannya masih di bawah target nasional yaitu Jayawijaya, Biak, Puncak Jaya, Boven Digoel, Yahukimo, Tolikara, Sarmi dan Supiori.

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan uraian analisis dan pembahasan pada penelitian ini, maka dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Pengujian hipotesis parameter secara simultan pada regresi nonparametrik spline truncated untuk data longitudinal dengan hipotesis

$$H_0: \tilde{\delta} = 0$$

$$H_1: \text{minimal ada satu komponen dalam } \tilde{\delta} \neq 0$$

maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

- a. Estimasi parameter regresi nonparametrik spline truncated pada ruang parameter di bawah Ω adalah

$$\hat{\delta}_\Omega = \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\Omega^{-1} \tilde{y}$$

dan estimasi parameter di bawah ruang ω adalah

$$\hat{\delta}_\omega = \hat{\delta}_\Omega - \left(\mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \right)^{-1} \mathbf{T}'(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \mathbf{W}_\omega^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(\tilde{k})) \hat{\delta}_\Omega$$

- b. Statistik uji yang diperoleh adalah:

$$V > k^*$$

sehingga dapat dinyatakan bahwa k^* adalah suatu statistik uji, dimana

$$k^* = \left(\left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{n}{2}} - 1 \right) \frac{(df2)}{(df1)}$$

- c. Distribusi dari statistik uji yang diperoleh mengikuti distribusi

$$F_{((np+nrp), ntp-(np+nrp))}$$

- d. Daerah penolakan H_0 adalah $V = \{(z_{ij1}, z_{ij2}, \dots, z_{ijp}); V > k^*\}$. Jika diberikan tingkat kepercayaan $\alpha = P(V > k^* | \tilde{\delta}_i = 0)$ atau H_0 ditolak jika

$$V(F_{hitung}) > k^*(F \text{ tabel}).$$

2. Model regresi nonparametrik spline truncated pada data longitudinal diaplikasikan pada data pertumbuhan ekonomi Provinsi Papua dengan menggunakan 3 jenis bobot yaitu \mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 , dan \mathbf{W}_3 , dan hanya menggunakan

satu titik knot. Berdasarkan nilai GCV yang terkecil, maka diperoleh model terbaik regresi nonparametrik spline truncated menggunakan satu titik knot dan bobot \mathbf{W}_1 . Secara umum, model matematis untuk model terbaik tersebut adalah sebagai berikut:

$$\hat{y}_{ij} = \hat{\beta}_{1i}z_{ij1} + \hat{\gamma}_{1i}(z_{ij1} - k_{1i})_+ + \hat{\beta}_{2i}z_{ij2} + \hat{\gamma}_{2i}(z_{ij2} - k_{2i})_+$$

dimana $i = 1, 2, \dots, 29; j = 1, 2, \dots, 6$

3. Berdasarkan hasil pengujian hipotesis dan model terbaik yang diperoleh, maka dapat dibuat beberapa kebijakan untuk masukan terhadap Pemerintah Provinsi Papua guna menstabilkan dan meningkatkan pertumbuhan ekonomi di Provinsi Papua, yaitu sebagai berikut:
 - a. Dibutuhkan upaya atau program pemerintah untuk peningkatan kualitas di bidang pendidikan, salah satunya adalah meningkatkan kemauan penduduk usia sekolah untuk mendapatkan pendidikan sehingga terjadi peningkatan rata-rata lama sekolah di masing-masing kabupaten/kota.
 - b. Dibutuhkan upaya atau program pemerintah untuk peningkatan kualitas di bidang kesehatan, salah satunya adalah menyediakan sarana dan prasarana kesehatan seperti rumah sakit, klinik, puskesmas, tenaga kesehatan (dokter spesialis, dokter umum, perawat, bidan, dan tenaga medis lainnya), obat-obatan, serta kemudahan mengakses fasilitas kesehatan, yang bertujuan untuk meningkatkan angka harapan hidup.

5.2. Saran

Berdasarkan uraian analisis dan pembahasan penelitian ini, maka terdapat beberapa saran yang dapat digunakan untuk melakukan penelitian selanjutnya, yaitu:

1. Mengembangkan regresi nonparametrik spline truncated data longitudinal yang berupa kuadratik dan kubik, untuk mengakomodir pola perilaku data yang mempunyai bentuk pola hubungan yang kuadratik dan kubik antara variabel respon dan variabel prediktor.
2. Mengembangkan regresi nonparametrik spline truncated data longitudinal dengan menambah unsur spasial dan waktu, untuk mendapatkan pengaruh dari perbedaan antar wilayah.

DAFTAR PUSTAKA

- Amelia, D., 2014. *Model Regresi Nonparametrik Multirespon Spline truncated Untuk Data Longitudinal*, Tesis: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Astuti, E. P., 2017. *Pemilihan Titik Knot Optimal Dalam Regresi Nonparametrik Spline truncated Pada Data Longitudinal (Studi Kasus: Data Pertumbuhan Ekonomi di Pulau Kalimantan)*, Tesis: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Baltagi, B. (2005). *Economic Analysis of Panel Data Third Edition*. London: John Wiley & Sons, Inc.
- Barro, R.J. and J.W. Lee., 1996. *International Measures of Schooling Years and Schooling Quality*. American Economic Review, 86(2), May: 218-223.
- Basri, H., 2009. *Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik pada Data Longitudinal dengan Pendekatan Spline*, Tesis: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Bintariningrum, M.F., 2014. *Pemodelan Regresi Nonparametrik Spline truncated dan Aplikasinya Pada Angka Kelahiran Kasar di Surabaya*, *Jurnal Sains dan Seni Promits*, Vol. 3, hal. D7-D12.
- Boediono, 1999. *Teori Pertumbuhan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE.
- BPS, 2016a. *Produk Domestik Regional Bruto Kabupaten/Kota Di Indonesia 2011-2015*. Jakarta: BPS.
- BPS, 2016b. *Produk Domestik Regional Bruto Provinsi Papua Menurut Lapangan Usaha Tahun 2011-2015*. BPS Provinsi Papua, Jayapura.
- BPS, 2017. *Statistik Keuangan Pemerintah Kabupaten/Kota Tahun 2011-2016*. BPS RI, Jakarta.
- Brata, Aloysius Gunadi, 2004. *Pengaruh Belanja Modal Pemerintah terhadap Pertumbuhan Ekonomi di Provinsi Sumatera Barat*, Tesis: Universitas Indonesia.
- Budiantara, I. N., 2004. *Spline: Historis, Motivasi dan Perannya Dalam Regresi Nonparametrik. Makalah Pembicara Utama pada Konferensi Nasional Matematika XII*. Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Udayana, Denpasar.
- Budiantara, I. N., 2005. *Model Keluarga Spline Polinomial Truncated Dalam Regresi Semiparametrik*. Semarang, Universitas Diponegoro.

- Budiantara, I. N. (2009). *Spline Dalam Regresi Nonparametrik dan Semiparametrik: Pidato Pengukuhan untuk Jabatan Guru Besar Institut Teknologi Sepuluh Nopember*. Surabaya: ITS Press.
- Diggle, P., Heagerty, P., Liang, K.Y. dan Zeger, S., 2002. *Analysis of Longitudinal Data*. Oxford: Oxford University Press.
- Draper, N., & Smith, H. (1992). *Analisis Regresi Terapan*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Eubank, R. L., (1999), *Nonparametrik Regression and Spline Smoothing*, Marcel Dekker, New York.
- Harahap, R. F. A., 2014. *Analisis Pengaruh Ketimpangan Gender Terhadap Pertumbuhan Ekonomi di Provinsi Jawa Tengah*. Skripsi: Fakultas Ekonomi Universitas Diponegoro, Semarang.
- Hardle, W., 1990. *Applied Nonparametrik Regression*, Cambridge University Press, New York.
- Hausmann, R., Rodric, D. dan Velasco, A., 2005. *Growth Diagnostic*, Boston: Harvard University.
- Jhingan, 2012. *Ekonomi Pembangunan dan Perencanaan*. Jakarta: Rajawali Pers.
- Kristiana, P. 2008. *Analisis Pengaruh Faktor-Faktor Demografi Terhadap Pertumbuhan Ekonomi di Kabupaten Cianjur Priode 1983-2007*. Skripsi Tidak Dipublikasikan. Fakultas Ekonomi Universitas Diponegoro, Semarang.
- Liang, K.Y. dan Zeger, S.L., 1993. *Regression Analysis For Data Correlated Data*. *Annu. Rev. Pub. Health*, Vol. 14, hal 43-68.
- Mariati, N. P. A. M., 2015. *Pemodelan Regresi Deret Fourier dan Spline truncated Dalam Regresi Nonparametrik Multivariabel (Studi Kasus: Data Kemiskinan Di Provinsi Papua)*, Tesis: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Merdekawati, I. P., 2013. *Pemodelan Regresi Spline truncated Multivariabel pada Faktor-Faktor yang mempengaruhi Kemiskinan di Kabupaten/Kota Provinsi Jawa Tengah*, *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, Vol. 2, hal. D19-D24.
- Montoya, E., Ulloa, N. dan Miller, V., 2014. *A Simulation Study Comparing Knot Selection Methods with Equally Spaced Knots in a Penalized Regression Spline*. *International Journal of Statistiks and Probability*, pp. Vol3, No. 3.
- Ranis, G. dan Steward, 2000. *Economic Growth and Human Development*. World Development, Vol. 28 No. 2, pp. 197-219.

- Retnosari, D., 2006. *Analisis Pengaruh Ketimpangan Distribusi Pendapatan Terhadap Pertumbuhan Ekonomi di Jawa Barat*. Skripsi: Institut Pertanian Bogor.
- Ruliana, Budiantara, I.N., Otok, B.W. dan Wibowo, W., 2016. *Simultaneous Hypothesis Testing of Spline truncated Model in Nonlinier Structural Equation Modelling (SEM)*, *Jurnal of Theoretical and Applied Information Technology*, Vol. 89, hal. 371-380.
- Rustiono, D., 2008. *Analisis Pengaruh Investasi, Tenaga Kerja dan Pengeluaran Pemerintah terhadap Pertumbuhan Ekonomi di Provinsi Jawa Tengah*, Tesis: Universitas Negeri Semarang.
- Sandhika, A. W., 2012. *Analisis Pengaruh Aglomerasi, Tenaga Kerja, Jumlah Penduduk, dan Modal Terhadap Pertumbuhan Ekonomi Kabupaten Kendal*. Skripsi: Fakultas Ekonomi Universitas Diponegoro, Semarang
- Setiati, I., 1996. *Pengaruh Penggunaan Variabel Demografi Dalam Model Pertumbuhan Ekonomi Kasus 25 Provinsi di Indonesia (1983-1992)*. *Jurnal Ekonomi dan Keuangan Indonesia*. Vol XLIV No. 2.
- Setiyawati, A. dan Hamzah, A., 2007. *Analisis Pengaruh PAD, DAU, DAK, dan Belanja Pembangunan Terhadap Pertumbuhan Ekonomi, Kemiskinan, dan Pengangguran: Pendekatan Analisis Jalur*. *Jurnal Akuntansi dan Keuangan Indonesia*. Vol. 4 No. 2, hal. 211-228.
- Sodik, J., Nuryadin, D. dan Iskandar, D., 2007. *Agglomerasi dan Pertumbuhan Ekonomi: Peran Karakteristik Regional. Parallel Session IVA, Urban dan Regional, Fakultas Ekonomi Universitas Pembangunan Nasional*.
- Sriliiana, I., 2012. *Truncated Spline Regression in Linier Partial Model for Longitudinal Data*, Tesis: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Sukirno, S., 2000. *Makroekonomi Modern: Perkembangan Pemikiran Dari Klasik Hingga Keynesian Baru*. Jakarta: Raja Grafindo Pustaka.
- Sukirno, S., 2004. *Makro Ekonomi Teori Pengantar*. Jakarta: Raja Grafindo Pustaka.
- Supartoyo, Y., Tatu, J. dan Sendouw, R., 2013. *The Economic Growth and The Regional Characteristics: The Case of Indonesia*. *Buletin Ekonomi Moneter dan Perbankan*.
- Suryanto, D., 2011. *Analisis Pengaruh Tenaga Kerja, Tingkat Pendidikan, dan Pengeluaran Pemerintah Terhadap Pertumbuhan Ekonomi di Subosuka Wonosraten Tahun 2004-2008*. Skripsi: Fakultas Ekonomi Universitas Diponegoro, Semarang

- Syafrizal, M., 2012. *Prosedur Generalized Spatial Two Stage Least Square untuk Mengestimasi Model Spatial Autoregressive Disturbance*, Tesis: Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Todaro, M., 2000. *Pembangunan Ekonomi di Dunia Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Tupen, S. N., Budiantara, I. N., 2011. *Uji Hipotesis Dalam Regresi Nonparametrik Spline*. *Prosiding Seminar Nasional Statistika ke-8*, Universitas Diponegoro, Semarang, hal. 184-199.
- Widarjono, A., 1999. *Penduduk dan Pertumbuhan Ekonomi di Indonesia: Analisis Kausalitas*. *Economic Journal of Emerging Markets*. Vol. 4 No. 2, hal. 147-157.
- Wu, H., & Zhang, J. (2006). *Nonparametrik Regression Methods for Longitudinal Data Analysis*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Lampiran 1. Data Pertumbuhan Ekonomi dan Variabel-Variabel yang Diduga Berpengaruh di Provinsi Papua Tahun 2011-2016.

Tahun	Kabupaten/Kota	y	z_1	z_2
2011	Merauke	6.03	7.74	66.41
2011	Jayawijaya	6.18	4.26	57.48
2011	Jayapura	11.46	8.67	65.96
2011	Nabire	7.18	8.58	67.20
2011	Kepulauan Yapen	6.73	8.28	68.60
2011	Biak	4.95	8.92	67.81
2011	Paniai	4.12	3.59	64.99
2011	Puncak Jaya	2.05	2.24	63.63
2011	Mimika	-16.36	8.72	71.78
2011	Boven Digoel	3.83	7.02	57.32
2011	Mappi	4.86	5.46	63.41
2011	Asmat	8.78	4.23	54.45
2011	Yahukimo	11.96	2.00	64.45
2011	Pegunungan Bintang	5.86	1.64	63.50
2011	Tolikara	7.96	2.76	64.45
2011	Sarmi	6.11	6.35	65.40
2011	Keerom	9.01	5.23	65.92
2011	Waropen	10.61	8.31	65.64
2011	Supiori	8.17	7.52	65.10
2011	Mamberamo Raya	12.55	4.24	56.06
2011	Nduga	9.89	0.37	53.09
2011	Lanny Jaya	11.30	2.11	64.63
2011	Mamberamo Tengah	13.64	2.12	62.35
2011	Yalimo	29.75	1.76	64.73
2011	Puncak	5.32	1.21	64.97
2011	Dogiyai	11.05	3.61	64.24
2011	Intan Jaya	19.00	2.02	64.80
2011	Deiyai	25.28	2.16	64.19
2011	Kota Jayapura	10.66	10.71	69.90
2012	Merauke	7.25	7.88	66.46
2012	Jayawijaya	7.67	4.31	57.56
2012	Jayapura	11.16	9.05	65.98
2012	Nabire	7.53	8.80	67.21
2012	Kepulauan Yapen	5.36	8.32	68.63
2012	Biak	7.19	8.93	67.82
2012	Paniai	6.33	3.66	65.09
2012	Puncak Jaya	4.44	2.53	63.67
2012	Mimika	-5.82	8.75	71.81
2012	Boven Digoel	4.00	7.24	57.51

Tahun	Kabupaten/Kota	y	z_1	z_2
2012	Mappi	5.74	5.71	63.48
2012	Asmat	7.13	4.28	54.73
2012	Yahukimo	10.97	2.94	64.49
2012	Pegunungan Bintang	6.25	1.76	63.52
2012	Tolikara	0.32	2.88	64.59
2012	Sarmi	6.51	7.00	65.40
2012	Keerom	8.92	5.52	65.92
2012	Waropen	11.70	8.40	65.69
2012	Supiori	10.16	7.78	65.15
2012	Mamberamo Raya	11.58	4.33	56.37
2012	Nduga	14.47	0.49	53.42
2012	Lanny Jaya	16.39	2.35	64.76
2012	Mamberamo Tengah	16.30	2.15	62.53
2012	Yalimo	17.02	1.78	64.78
2012	Puncak	7.78	1.37	64.98
2012	Dogiyai	8.83	4.44	64.30
2012	Intan Jaya	7.79	2.09	64.84
2012	Deiyai	16.94	2.51	64.21
2012	Kota Jayapura	9.84	10.80	69.94
2013	Merauke	8.49	8.03	66.48
2013	Jayawijaya	7.31	4.36	57.71
2013	Jayapura	10.20	9.33	66.01
2013	Nabire	9.27	8.87	67.23
2013	Kepulauan Yapen	7.35	8.37	68.63
2013	Biak	7.02	8.99	67.84
2013	Paniai	6.96	3.73	65.13
2013	Puncak Jaya	4.65	2.86	63.74
2013	Mimika	9.48	8.83	71.85
2013	Boven Digoel	6.65	7.47	57.60
2013	Mappi	5.21	5.92	63.51
2013	Asmat	6.14	4.33	54.91
2013	Yahukimo	6.76	3.78	64.54
2013	Pegunungan Bintang	6.52	1.88	63.56
2013	Tolikara	6.15	3.00	64.64
2013	Sarmi	6.69	7.27	65.46
2013	Keerom	9.59	6.45	65.97
2013	Waropen	11.76	8.50	65.71
2013	Supiori	4.26	8.06	65.15
2013	Mamberamo Raya	9.17	4.42	56.37
2013	Nduga	12.35	0.60	53.54
2013	Lanny Jaya	10.89	2.55	64.82

Tahun	Kabupaten/Kota	y	z_1	z_2
2013	Mamberamo Tengah	11.26	2.18	62.59
2013	Yalimo	8.31	1.80	64.83
2013	Puncak	9.19	1.40	64.98
2013	Dogiyai	8.11	4.76	64.34
2013	Intan Jaya	10.90	2.16	64.87
2013	Deiyai	11.27	2.87	64.25
2013	Kota Jayapura	10.35	10.88	69.95
2014	Merauke	7.74	8.23	66.49
2014	Jayawijaya	7.07	4.39	57.79
2014	Jayapura	11.27	9.41	66.02
2014	Nabire	7.15	9.45	67.24
2014	Kepulauan Yapen	6.93	8.68	68.63
2014	Biak	5.29	9.61	67.85
2014	Paniai	8.69	3.74	65.15
2014	Puncak Jaya	4.40	3.04	63.77
2014	Mimika	-0.55	9.30	71.87
2014	Boven Digoel	6.13	7.50	57.64
2014	Mappi	8.26	5.96	63.52
2014	Asmat	5.47	4.34	55.00
2014	Yahukimo	7.03	3.97	64.56
2014	Pegunungan Bintang	6.36	1.97	63.58
2014	Tolikara	6.72	3.04	64.66
2014	Sarmi	6.76	7.89	65.49
2014	Keerom	8.79	6.57	65.99
2014	Waropen	10.47	8.53	65.72
2014	Supiori	6.46	8.11	65.15
2014	Mamberamo Raya	9.72	4.44	56.37
2014	Nduga	9.83	0.63	53.60
2014	Lanny Jaya	8.80	2.60	64.85
2014	Mamberamo Tengah	9.48	2.40	62.62
2014	Yalimo	7.45	2.07	64.85
2014	Puncak	9.40	1.43	64.98
2014	Dogiyai	9.10	4.87	64.36
2014	Intan Jaya	11.52	2.32	64.88
2014	Deiyai	10.70	2.95	64.27
2014	Kota Jayapura	10.19	11.09	69.95
2015	Merauke	6.88	8.24	66.50
2015	Jayawijaya	6.20	4.59	58.30
2015	Jayapura	9.95	9.48	66.30
2015	Nabire	7.52	9.47	67.40
2015	Kepulauan Yapen	6.26	8.80	68.70
2015	Biak	6.62	9.83	67.90

Tahun	Kabupaten/Kota	y	z_1	z_2
2015	Paniai	9.82	3.76	65.50
2015	Puncak Jaya	7.39	3.19	64.20
2015	Mimika	6.48	9.38	71.89
2015	Boven Digoel	5.39	7.72	58.20
2015	Mappi	6.85	5.97	64.00
2015	Asmat	4.79	4.38	55.50
2015	Yahukimo	7.14	3.98	65.10
2015	Pegunungan Bintang	6.12	2.06	63.80
2015	Tolikara	4.86	3.06	64.90
2015	Sarmi	7.14	8.07	65.70
2015	Keerom	7.01	6.85	66.10
2015	Waropen	9.66	8.55	65.70
2015	Supiori	4.25	8.12	65.30
2015	Mamberamo Raya	10.11	4.61	56.60
2015	Nduga	8.88	0.64	53.60
2015	Lanny Jaya	6.35	2.75	64.90
2015	Mamberamo Tengah	7.71	2.49	62.70
2015	Yalimo	6.60	2.08	64.86
2015	Puncak	10.24	1.61	65.08
2015	Dogiyai	9.15	4.88	64.86
2015	Intan Jaya	12.87	2.48	64.98
2015	Deiyai	10.09	2.96	64.47
2015	Kota Jayapura	8.48	11.11	69.97
2016	Merauke	7.66	8.26	66.53
2016	Jayawijaya	4.70	4.74	58.48
2016	Jayapura	8.54	9.53	66.4
2016	Nabire	6.88	9.48	67.5
2016	Kepulauan Yapen	5.42	8.81	68.69
2016	Biak	4.07	9.84	67.86
2016	Paniai	7.54	3.77	65.58
2016	Puncak Jaya	4.60	3.38	64.29
2016	Mimika	12.84	9.53	71.9
2016	Boven Digoel	4.83	7.82	58.51
2016	Mappi	6.92	5.98	64.16
2016	Asmat	6.18	4.48	55.9
2016	Yahukimo	5.20	3.99	65.19
2016	Pegunungan Bintang	8.25	2.19	63.84
2016	Tolikara	4.68	3.21	64.98
2016	Sarmi	5.20	8.08	65.76
2016	Keerom	5.74	7.24	66.13
2016	Waropen	9.48	8.66	65.77

Tahun	Kabupaten/Kota	y	z_1	z_2
2016	Supiori	4.43	8.13	65.29
2016	Mamberamo Raya	8.41	4.89	56.74
2016	Nduga	6.83	0.7	54.5
2016	Lanny Jaya	5.72	2.92	65.63
2016	Mamberamo Tengah	6.56	2.57	62.82
2016	Yalimo	5.81	2.19	64.9
2016	Puncak	7.95	1.78	65.1
2016	Dogiyai	7.56	4.89	64.99
2016	Intan Jaya	7.91	2.49	65.04
2016	Deiyai	7.17	2.97	64.55
2016	Kota Jayapura	7.23	11.14	69.99

Lampiran 2. Program Regresi Nonparametrik *Spline truncated* dengan Satu Titik
Knot menggunakan Penimbang W_1 , W_2 , dan W_3

```
#library(Rcmdr)
options(digits=8)
setwd('e:/validasi/')#read directiory
library(xlsx)
library(pracma)
library(MASS)
library(gtools)
data=read.xlsx('data 21 des.xlsx',1,header=T)
alpha=0.05

run=function(data,alpha)
{
  result=satuknot(data,alpha)
}
satuknot<-function(data, alpha)
{
  y<-data[,3]
  x<-as.matrix(data[,c(1,2,3)])
  nt<-nrow(x)
  t<-max(data[,2])-min(data[,2])+1
  n<-nt/t
  Q<-ncol(x)
  m<-1
  r<-1
  #=====matrix W=====
  pembobot<-as.numeric(readline("Pembobot yang digunakan: "))
  if(pembobot==1)
  {
    W<-diag(1/nt,nt,nt)
  } else if(pembobot==2) {
    W=diag(1/n,nt,nt)
  } else {
    ww=matrix(0,n,t)
    d=n
    a=1
    for (i in 1:t)
    {
      me=mean(y[a:d])
      ww[,i]=y[a:d]-me
      a=a+n
      d=d+n
    }
    W=matrix(0,nt,nt)
    ml=diag(1,t,t)
    a=1
    c=1
    for (j in 1:n)
```

```

{
  w=as.vector(wv[j,])%*%t(as.vector(wv[j,]))
  w1=mI*diag(w)
  for (k in 1:t)
  {
    b=c
    for (l in 1:t)
    {
      W[a,b]=w1[k,l]
      b=b+1
    }
    a=a+1
  }
  c=a
}
}

```

```

#====matrix Y perkota=====

```

```

Y<-matrix(0,n,t)

```

```

d<-n

```

```

a<-1

```

```

for (i in 1:t)

```

```

{

```

```

  Y[,i]<-y[a:d]

```

```

  a<-a+n

```

```

  d<-d+n

```

```

}

```

```

Yk<-0

```

```

for (i in 1:n)

```

```

{

```

```

  Yk<-cbind(Yk,t(Y[,i]))

```

```

}

```

```

Yk<-as.vector(Yk[1,2:ncol(Yk)])

```

```

#====matrix X perkota==

```

```

  Xt<-matrix(0,n*t,Q)

```

```

  a<-1

```

```

  Xt<-matrix(0,1,Q)

```

```

for (i in 1:n)

```

```

{

```

```

  aa<-rbind(aa,x[b,])

```

```

  b<-b+n

```

```

}

```

```

aa<-aa[2:nrow(aa),]

```

```

Xt<-rbind(Xt,aa)

```

```

}

```

```

Xt<-Xt[2:nrow(Xt),]

```

```

#=====knot=====
nknot=15
nkomb=nknot
knot1=matrix(0,nkomb,1)
a=1
for (l in 1:n)
{
  xx=Xt[a:(l*t),]
  kn=matrix(0,nknot,Q)
  for (o in 1:Q)
  {
    kn[o]=seq(min(xx[o]),max(xx[o]),length.out=nknot)
  }
  knot=matrix(0,nkomb,2)
  v=1
  for (i in 1:nknot)
  {
    knot[v,]=cbind(kn[i,1],kn[i,2])
    v=v+1
  }
  knot1=cbind(knot1,knot)
  a=a+t
}
knot1=knot1[1:(nrow(knot1)-1),2:ncol(knot1)]
nknot=nrow(knot1)

#desain GCV minimum
MSE=matrix(0,nrow=nknot)
GCV=matrix(0,nrow=nknot)
Rsq=matrix(0,nrow=nknot)
Z=matrix(0,nt,(r+m)*Q*n)
for (i in 1:nknot)
{
  b=1
  a=1
  Xk=matrix(0,1,r*Q)
  for (j in 1:n)
  {
    xa=matrix(0,t)
    for (k in 1:Q)
    {
      aa=cbind(pmax(0,Xt[b:(j*t),k]-knot1[i,a]))
      xa=cbind(xa,aa)
      a=a+1
    }
  }
}

```

```

    xa=xa[,2:ncol(xa)]
    Xk=rbind(Xk,xa)
    b=b+t
  }
  Xk=Xk[2:nrow(Xk),]
  Xk=cbind(Xt,Xk)
  a=1
  rq=(r+m)*Q
  b=1
  for (j in 1:n)
  {
    Z[a:(j*t),b:(j*rq)]=Xk[a:(j*t),]
    a=a+t
    b=b+rq
  }
  B=pinv(t(Z)%*%ginv(W)%*%Z)%*%t(Z)%*%ginv(W)%*%Yk
  Ak=Z)%*%pinv(t(Z)%*%ginv(W)%*%Z)%*%t(Z)%*%ginv(W)
  yhat=Ak)%*%Yk
  error=Yk-yhat
  #SSE=sum((Yk-yhat)^2)
  SSE=sum(diag(W)%*%(Yk-yhat)^2)
  SSR=sum((yhat-mean(Yk))^2)
  Rsq[i]=(SSR/(SSR+SSE))*100
  MSE[i]=SSE/(nt-ncol(Z))
  db=(sum(diag(Ak))/nt)
  GCV[i]=MSE[i]/((1-db)^2)
}
optimum=cbind(knot1,MSE,Rsq,GCV)
GCVmin=optimum[order(optimum[,ncol(optimum)]),] #mengurutkan nilai GCV minimum
GCVmin[1,]
GCVprint=GCVmin[,(ncol(optimum)-2):(ncol(optimum))]
colnames(GCVprint)<- c('MSE','Rsq','GCV')

#validasi optimum
#matrix Z
b=1
a=1
Xk=matrix(0,1,r*Q)
for (j in 1:n)
{
  xa=matrix(0,t)
  for (k in 1:Q)
  {
    aa=cbind(pmax(0,Xt[b:(j*t),k]-GCVmin[1,a]))
    xa=cbind(xa,aa)
    a=a+1
  }
  xa=xa[,2:ncol(xa)]
  Xk=rbind(Xk,xa)
  b=b+t
}
Xk=Xk[2:nrow(Xk),]
Xk=cbind(Xt,Xk)
a=1
rq=(r+m)*Q
b=1
for (j in 1:n)

```

```

{
  Z[a:(j*t),b:(j*rq)]=Xk[a:(j*t),]
  a=a+t
  b=b+rq
}
B=pinv(t(Z)%*%ginv(W)%*%Z)%*%t(Z)%*%ginv(W)%*%Yk
Ak=Z%*%pinv(t(Z)%*%ginv(W)%*%Z)%*%t(Z)%*%ginv(W)
yhat=Ak%*%Yk
SSE=sum(diag(W)%*%(Yk-yhat)^2)
#SSE=sum((Yk-yhat)^2)
SSR=sum((yhat-mean(Yk))^2)
SST=sum((Yk-mean(Yk))^2)
MSE=SSE/(nrow(x)-ncol(Z))
MSR=SSR/(ncol(Z))
Rsq=(SSR/(SSR+SSE))*100
n1<-nrow(B)

#uji F (uji serentak)
Fhit=MSR/MSE
pvalue=pf(Fhit,(ncol(Z)),(nrow(x)-ncol(Z)),lower.tail=FALSE)
if (pvalue<=alpha)
{
  cat("-----","\n")
  cat("Kesimpulan hasil uji serentak seluruh kab/kota","\n")
  cat("-----","\n")
  cat("Tolak Ho yakni minimal terdapat 1 prediktor yang signifikan","\n")
  cat("","\n")
} else {
  cat("-----","\n")
  cat("Kesimpulan hasil uji serentak seluruh kab/kota","\n")
  cat("-----","\n")
  cat("Gagal Tolak Ho yakni semua prediktor tidak berpengaruh signifikan","\n")
  cat("","\n")
}
#menghitung t hitung
#hmm<-ginv(t(Z)%*%ginv(W)%*%Z)
hmm<-pinv(t(Z)%*%ginv(W)%*%Z)
MSE<-as.vector(MSE)
hm<-MSE*hmm
hm2<-sqrt(diag(hm))
error<-yhat-y
thit=rep(NA,n1)
pval=rep(NA,n1)
MSE=as.numeric(MSE)
SE=hm2#mencari nilai SE koefisien
for (i in 1:n1)
{
  thit[i]=B[i,1]/SE[i]
  pval[i]=2*(pt(abs(thit[i]),(nrow(x)-ncol(Z)),lower.tail=FALSE))
}
thit=as.matrix(thit)
pval=as.matrix(pval)
colnames(thit)<-"t_hitung"
colnames(pval)<-"p_value"
colnames(B)<-"parameter_beta"
thitung=cbind(B,thit,pval)

```

```

knotkab=matrix(ncol=3,nrow=n)
knotkab[,1]=as.character(data[1:n,1])
colnames(knotkab)<-c('kab/kota','knot var 1','knot var 2')
for ( i in 1:n)
{ knotkab[i,(2:3)]=GCVmin[1,((2*i-1):(2*i))] }
knotkab=as.data.frame(knotkab)

cat("Analysis of Variance bersama semua kab/kota ", "\n")

cat("=====\n")
cat("Source      ", "df", "\t", "\t", "SS", "\t", "\t", "MS", "\t", "\t", "Fhit", "\n")
cat("Regresi      ", ncol(Z), "\t", "SSR", "\t", "MSR", "\t", "Fhit", "\n")
cat("Error        ", (nrow(x)-ncol(Z)), "\t", "SSE", "\t", "MSE", "\n")
cat("Total        ", nrow(x), "\t", "SST", "\n")

cat("=====\n")
cat("s=", sqrt(MSE), "\t", " Rsq=", Rsq, "\n")
cat("pvalue(F)=" , pvalue, "\n")
cat("\n")
cat("Pengujian Parsial seluruh kab/kota", "\n")
print(thitung)
cat("\n")
cat("titik Knot seluruh kab/kota", "\n")
print(knotkab)
cat("\n")
cat("Nilai GCV ", "\n")
print(GCVprint)
cat("\n")
write.csv(thitung, file="B_dg_t_hitung bersama.csv")
write.csv(B, file="B bersama.csv")
write.csv(optimum, file="Optimum bersama.csv")
write.csv(yhat, file="yhat bersama.csv")
write.csv(error, file="error bersama.csv")
write.csv(knotkab, file="titik knot per kab kota.csv")
cat("\n")
cat("\n")

cat("=====\n")
cat("          Pengujian per kab/kota          ", "\n")

cat("=====\n")

cat("\n")
# uji perkab/kota
for ( i in 1:n)
{
  yhat1=yhat[(t*i-(t-1)):t*i]
  Yk1=Yk[(t*i-(t-1)):t*i]
  Ww=W[((t*i-(t-1)):t*i),((t*i-(t-1)):t*i)]
  B1=matrix(B[((n1/n)*i-((n1/n)-1):((n1/n)*i)],ncol=1)
  SSE=sum(diag(Ww)%*(Yk1-yhat1)^2)
  #SSE=sum((Yk1-yhat1)^2)
  SSR=sum((yhat1-mean(Yk1))^2)
  SST=sum((Yk1-mean(Yk1))^2)
}

```

```

MSE=SSE/(6-4)
MSR=SSR/(4)
Rsqr=(SSR/(SSR+SSE))*100
n2<-nrow(B1)
#uji F (uji serentak)
Fhit=MSR/MSE
pvalue=pf(Fhit,(4),(6-4),lower.tail=FALSE)
cat("\n")
if (pvalue<=alpha)
{

      cat("=====\n")
      cat("Kesimpulan hasil uji serentak kab/kota ",as.character(data[i,1]),"\n")

      cat("=====\n")
      cat("Tolak Ho yakni minimal terdapat 1 prediktor yang signifikan","\n")
      cat("", "\n")
} else {

      cat("=====\n")
      cat("Kesimpulan hasil uji serentak kab/kota ",as.character(data[i,1]),"\n")

      cat("=====\n")
      cat("Gagal Tolak Ho yakni semua prediktor tidak berpengaruh signifikan","\n")
      cat("", "\n")
}
cat("Analysis of Variance kab/kota ",as.character(data[i,1]), "\n")
cat("-----", "\n")
cat("Source   ", "df", "\t", "\t", "SS", "\t", "\t", "MS", "\t", "\t", "Fhit", "\n")
cat("Regresi   ", "4", "\t", "SSR", "\t", "MSR", "\t", "Fhit", "\n")
cat("Error     ", "6-4", "\t", "SSE", "\t", "MSE", "\n")
cat("Total     ", "6", "\t", "SST", "\n")
cat("-----", "\n")
cat("s=",sqrt(MSE),"\t", " Rsq=",Rsqr,"\n")
cat("pvalue(F)=",pvalue,"\n")

#menghitung t hitung
Zz=Z[((t*i-(t-1)):(t*i)),((n1/n)*i-((n1/n)-1)):(n1/n)*i]]
Ww=W[((t*i-(t-1)):(t*i)),((t*i-(t-1)):(t*i))]
#hmm<-ginv(t(Zz))%*%ginv(Ww)%*%Zz
hmm<-pinv(t(Zz))%*%ginv(Ww)%*%Zz
MSE<-as.vector(MSE)
hm<-MSE*hmm
hm2<-sqrt(diag(hm))
thit=rep(NA,n2)
pval=rep(NA,n2)
MSE=as.numeric(MSE)
SE=hm2#mencari nilai SE koefisien
for (i in 1:n2)
{
  thit[i]=B1[i,1]/SE[i]
  pval[i]=2*(pt(abs(thit[i]),(6-4),lower.tail=FALSE))
}

```

```

thit=as.matrix(thit)
pval=as.matrix(pval)
colnames(thit)<-"t_hitung"
colnames(pval)<-"p_value"
colnames(B1)<-"parameter_beta"
thitung=cbind(B1,thit,pval)
rownames(thitung)<-c('beta1','beta2','gamma1','gamma2')
print(thitung)
}
list(error=error,Z=Z,yhat=yhat,y=Yk,W=W)
}

ujiglejser=function(namakab,Z,res,alpha,W)
{
#uji glejser bersama
Z=as.matrix(Z)
res=abs(res)
res=as.matrix(res)
resbar=mean(res)
p=nrow(res)
B=pinv(t(Z)%*%ginv(W)%*%Z)%*%t(Z)%*%ginv(W)%*%res
n1=nrow(B)
yhat=Z%*%B
res1=res-yhat
#SSE=sum((res-yhat)^2)
SSE=sum(diag(W)%*%(res-yhat)^2)
SSR=sum((yhat-resbar)^2)
SST=SSR+SSE
MSE=SSE/(nrow(Z)-ncol(Z))
MSR=SSR/(ncol(Z))
#uji F (uji serentak)
Fhit=MSR/MSE
pvalue=pf(Fhit,(ncol(Z)),(nrow(Z)-ncol(Z)),lower.tail=FALSE)
cat("\n")
cat("\n")
cat("=====", "\n")
cat("      hasil uji glejser semua kab/kota ", "\n")
cat("-----", "\n")
cat("Kesimpulan hasil uji serentak semua kab/kota ", "\n")
cat("-----", "\n")

if (pvalue<=alpha)
{
cat("Tolak Ho yakni minimal terdapat 1 prediktor yang signifikan", "\n")
cat("", "\n")
} else
{
cat("Gagal Tolak Ho yakni semua prediktor tidak berpengaruh signifikan", "\n")
cat("", "\n")
}
cat("Analysis of Variance bersama", "\n")
cat("=====", "\n")
cat("Source      ", "df", "\t", "\t", "SS", "\t", "\t", "MS", "\t", "\t", "Fhit", "\n")
cat("Regresi      ", "ncol(Z)", "\t", "SSR", "\t", "MSR", "\t", "Fhit", "\n")
cat("Error        ", "(nrow(Z)-ncol(Z))", "\t", "SSE", "\t", "MSE", "\n")
cat("Total        ", "nrow(Z)", "\t", "SST", "\n")
cat("=====", "\n")

```

```

cat("Fhit", "\n")
print(Fhit)
cat("pvalue", "\n")
print(pvalue)

#uji glejser per kab/kota
for ( i in 1:29)
{
  Zz=as.matrix(Z[((i*6-5):(i*6)),((4*i-3):(4*i))])
  Ww=W[((6*i-5):(6*i)),((6*i-5):(6*i))]
  res1=matrix(abs(res[(i*6-5):(i*6)]),ncol=1)
  resbar=mean(res1)
  p=nrow(res1)
  B=pinv(t(Zz)%*%ginv(Ww)%*%Zz)%*%t(Zz)%*%ginv(Ww)%*%res1
  n1=nrow(B)
  yhat=Zz%*%B
  res2=res1-yhat
  #SSE=sum((res2-yhat)^2)
  SSE=sum(diag(Ww)%*%(res2-yhat)^2)
  SSR=sum((yhat-resbar)^2)
  SST=SSR+SSE
  MSE=SSE/(nrow(Zz)-ncol(Zz))
  MSR=SSR/(ncol(Zz))
  #uji F (uji serentak)
  Fhit=MSR/MSE
  pvalue=pf(Fhit,(ncol(Zz)),(nrow(Zz)-ncol(Zz)),lower.tail=FALSE)
  cat("\n")
  cat("\n")
  cat("=====", "\n")
  cat("hasil uji glejser kab/kota ",as.character(namakab[i]), "\n")
  cat("-----", "\n")
  cat("Kesimpulan hasil uji glejser kab/kota ",as.character(namakab[i]), "\n")
  cat("-----", "\n")
  if (pvalue<=alpha)
  {
    cat("Tolak Ho yakni minimal terdapat 1 prediktor yang signifikan", "\n")
    cat("", "\n")
  } else
  {
    cat("Gagal Tolak Ho yakni semua prediktor tidak berpengaruh signifikan", "\n")
    cat("", "\n")
  }
  cat("Analysis of Variance bersama", "\n")
  cat("=====", "\n")
  cat("Source    ", "df", "\t", "\t", "SS", "\t", "\t", "MS", "\t", "\t", "Fhit", "\n")
  cat("Regresi    ", ncol(Zz), "\t", SSR, "\t", MSR, "\t", Fhit, "\n")
  cat("Error      ", (nrow(Zz)-ncol(Zz)), "\t", SSE, "\t", MSE, "\n")
  cat("Total      ", nrow(Zz), "\t", SST, "\n")
  cat("=====", "\n")
  cat("Fhit", "\n")
  print(Fhit)
  cat("pvalue", "\n")
  print(pvalue)
}
}
ujiresi=function(namakab,residual)

```

```

{
library(nortest)
library(stats)
n=length(residual)
nk=29
for ( i in 1:29)
{
residual_kab=residual[(i*6-5):(i*6)]
mypath <- file.path(paste("plot acf residual kota kab ",
as.character(namakab[i]), ".jpg", sep = ""))
jpeg(file=mypath,width=1104,height=694)
acf1=acf(residual_kab,lag.max=((length(residual_kab))))
dev.off()

cat("\n")
cat("=====", "\n")
cat(" Test Residual Normal kab kota ",as.character(namakab[i]), "\n")
cat("=====", "\n")
kolmo=ks.test(residual_kab,'pnorm',alternative = 'two.sided')
print(kolmo)
cat(" H0 = data berdistribusi normal", "\n")
}
res1<-matrix(0,29,6)
for (j in 1:29)
{
for ( k in 1:6)
{
res1[j,k]=residual[((j-1)*6+k)]
}
}
for ( i in 1:6)
{
mypath <- file.path(paste("plot acf residual tahun ",
(2010+i), ".jpg", sep = ""))
jpeg(file=mypath,width=1104,height=694)
set.seed(1000)
residual_tahun=sample(res1[,i])
acf1=acf(residual_tahun,lag.max=((length(res1[,i]))))
dev.off()
}
#korelasi antar kota
maty=matrix(ncol=29,nrow=6)
colnames(maty)<-namakab
for ( i in 1:29)
{
maty[,i]=residual[((6*i-5):(i*6))]
}
kombi=permutations(29,2,repeats.allowed = T)
te=matrix(ncol=1,nrow=nrow(kombi))
for ( i in 1:(nrow(kombi)))
{
ii1=kombi[i,1]%%29
if (ii1==0) ii1=29
vek1=matrix(maty[,ii1],ncol=1);colnames(vek1)<-
as.character(namakab[ii1])
ii2=kombi[i,2]%%29
if (ii2==0) ii2=29
}
}

```

```

vek2=matrix(maty[,ii2],ncol=1);colnames(vek2)<-as.character(namakab[ii2])
t1=cor.test(vek1,vek2)
te[i]=t1$p.value
}
pvalkor=matrix(ncol=29,nrow=29)
for ( i in 1:29)
{
pvalkor[,i]=te[((29*i-28):(29*i))]
}
rownames(pvalkor)<-as.character(namakab)
colnames(pvalkor)<-as.character(namakab)
corel=cor(maty)
write.csv(pvalkor,'pvalue dari korelasi kabkota.csv')
write.csv(corel,'korelasi antar kabkota.csv')

#korelasi antar tahun
kombi=permutations(6,2,repats.allowed = T)
te=matrix(ncol=1,nrow=nrow(kombi))
for ( i in 1:(nrow(kombi)))
{
ii1=kombi[i,1]%%6
if (ii1==0) ii1=6
vek1=matrix(res1[,ii1],ncol=1);
ii2=kombi[i,2]%%6
if (ii2==0) ii2=6
vek2=matrix(res1[,ii2],ncol=1);
t1=cor.test(vek1,vek2)
te[i]=t1$p.value
}
pvalkor1=matrix(ncol=6,nrow=6)
for ( i in 1:6)
{
pvalkor1[,i]=te[((6*i-5):(6*i))]
}
rownames(pvalkor1)<-c(2011:2016)
colnames(pvalkor1)<-c(2011:2016)
corel1=cor(res1)
write.csv(pvalkor1,'pvalue dari korelasi tahun.csv')
write.csv(corel1,'korelasi antar tahun.csv')

}
a=run(data,alpha)

```

Lampiran 3. Output Program Titik Knot Optimal dengan Satu Titik Knot

Menggunakan Bobot W_1

i	Kabupaten/Kota	k_{1i}	k_{2i}
1	Merauke	7.777	66.419
2	Jayawijaya	4.294	57.551
3	Jayapura	8.731	65.991
4	Nabire	8.644	67.221
5	Kepulauan Yapen	8.318	68.607
6	Biak	8.986	67.816
7	Paniai	3.603	65.032
8	Puncak Jaya	2.321	63.677
9	Mimika	8.778	71.789
10	Boven Digoel	7.077	57.405
11	Mappi	5.497	63.464
12	Asmat	4.248	54.554
13	Yahukimo	2.142	64.503
14	Pegunungan Bintang	1.679	63.524
15	Tolikara	2.792	64.488
16	Sarmi	6.474	65.426
17	Keerom	5.374	65.935
18	Waropen	8.335	65.649
19	Supiori	7.564	65.114
20	Mamberamo Raya	4.286	56.109
21	Nduga	0.394	53.191
22	Lanny Jaya	2.168	64.701
23	Mamberamo Tengah	2.152	62.384
24	Yalimo	1.791	64.742
25	Puncak	1.251	64.979
26	Dogiyai	3.701	64.294
27	Intan Jaya	2.054	64.817
28	Deiyai	2.218	64.216
29	Kota Jayapura	10.741	69.906

Lampiran 4. Output Program Titik Knot Optimal dengan Satu Titik Knot

Menggunakan Bobot W_2

i	Kabupaten/Kota	k_{1i}	k_{2i}
1	Merauke	7.777	66.419
2	Jayawijaya	4.294	57.551
3	Jayapura	8.731	65.991
4	Nabire	8.644	67.221
5	Kepulauan Yapen	8.318	68.607
6	Biak	8.986	67.816
7	Paniai	3.603	65.032
8	Puncak Jaya	2.321	63.677
9	Mimika	8.778	71.789
10	Boven Digoel	7.077	57.405
11	Mappi	5.497	63.464
12	Asmat	4.248	54.554
13	Yahukimo	2.142	64.503
14	Pegunungan Bintang	1.679	63.524
15	Tolikara	2.792	64.488
16	Sarmi	6.474	65.426
17	Keerom	5.374	65.935
18	Waropen	8.335	65.649
19	Supiori	7.564	65.114
20	Mamberamo Raya	4.286	56.109
21	Nduga	0.394	53.191
22	Lanny Jaya	2.168	64.701
23	Mamberamo Tengah	2.152	62.384
24	Yalimo	1.791	64.742
25	Puncak	1.251	64.979
26	Dogiyai	3.701	64.294
27	Intan Jaya	2.054	64.817
28	Deiyai	2.218	64.216
29	Kota Jayapura	10.741	69.906

Lampiran 5. Output Program Titik Knot Optimal dengan Satu Titik Knot

Menggunakan Bobot W_3

<i>i</i>	Kabupaten/Kota	k_{1i}	k_{2i}
1	Merauke	7.74	66.41
2	Jayawijaya	4.26	57.48
3	Jayapura	8.67	65.96
4	Nabire	8.58	67.20
5	Kepulauan Yapen	8.28	68.60
6	Biak	8.92	67.81
7	Paniai	3.59	64.99
8	Puncak Jaya	2.24	63.63
9	Mimika	8.72	71.78
10	Boven Digoel	7.02	57.32
11	Mappi	5.46	63.41
12	Asmat	4.23	54.45
13	Yahukimo	2.00	64.45
14	Pegunungan Bintang	1.64	63.50
15	Tolikara	2.76	64.45
16	Sarmi	6.35	65.40
17	Keerom	5.23	65.92
18	Waropen	8.31	65.64
19	Supiori	7.52	65.10
20	Mamberamo Raya	4.24	56.06
21	Nduga	0.37	53.09
22	Lanny Jaya	2.11	64.63
23	Mamberamo Tengah	2.12	62.35
24	Yalimo	1.76	64.73
25	Puncak	1.21	64.97
26	Dogiyai	3.61	64.24
27	Intan Jaya	2.02	64.80
28	Deiyai	2.16	64.19
29	Kota Jayapura	10.71	69.90

Lampiran 6. Output Estimasi Parameter Model dengan dengan Satu Titik
Knot Menggunakan Bobot W_1

<i>i</i>	Kabupaten/Kota	β_{1i}	γ_{ii}	β_{2i}	γ_{2i}
1	Merauke	43,865	-45,252	-5,022	11,252
2	Jayawijaya	53,194	-66,296	-3,835	6,877
3	Jayapura	-5,828	5,588	0,939	-5,852
4	Nabire	22,904	-24,439	-2,817	1,998
5	Kepulauan Yapen	-0,475	2,374	0,155	-20,162
6	Biak	2,111	-6,791	-0,191	54,171
7	Paniai	89,699	-67,895	-4,892	4,833
8	Puncak Jaya	41,538	-43,694	-1,430	6,037
9	Mimika	-203,345	158,143	24,488	605,902
10	Boven Digoel	-24,413	36,811	3,057	-9,539
11	Mappi	-19,137	25,055	1,724	-2,009
12	Asmat	-265,646	282,236	20,798	-24,071
13	Yahukimo	15,147	-19,212	-0,284	-0,495
14	Pegunungan Bintang	-11,470	16,781	0,389	-2,377
15	Tolikara	-227,085	257,689	9,848	-24,922
16	Sarmi	-0,467	1,370	0,139	-4,867
17	Keerom	-0,679	1,895	0,191	-25,829
18	Waropen	68,168	-84,195	-8,468	29,885
19	Supiori	119,852	-134,365	-13,719	9,773
20	Mamberamo Raya	-113,849	98,049	8,835	7,104
21	Nduga	362,177	-395,025	-2,338	1,332
22	Lanny Jaya	170,296	-198,151	-5,385	11,737
23	Mamberamo Tengah	50,689	-64,581	-1,502	-6,907
24	Yalimo	-609,742	608,176	17,040	-49,920
25	Puncak	123,273	-133,418	-2,214	31,401
26	Dogiyai	-29,794	30,144	1,846	-2,741
27	Intan Jaya	-300,314	325,129	9,655	-59,236
28	Deiyai	-79,412	66,095	3,066	-11,054
29	Kota Jayapura	68,437	-66,500	-10,333	-64,101

Lampiran 7. Output Nilai Pertumbuhan Ekonomi Aktual dan Prediksi Menurut Kabupaten/Kota Provinsi Papua Tahun 2011-2016

KABUPATEN/KOTA	Y_{i1}	\hat{Y}_{i1}	Y_{i2}	\hat{Y}_{i2}	Y_{i3}	\hat{Y}_{i3}
Merauke	6.03	7.58	7.25	7.69	8.49	7.61
Jayawijaya	6.18	7.94	7.67	7.52	7.31	7.33
Jayapura	11.46	11.25	11.16	11.06	10.20	10.84
Nabire	7.18	8.74	7.53	8.39	9.27	8.27
Kepulauan Yapen	6.73	6.75	5.36	6.23	7.35	6.32
Biak	4.95	6.00	7.19	6.49	7.02	7.29
Paniai	4.12	4.77	6.33	6.29	6.96	7.81
Puncak Jaya	2.05	5.31	4.44	4.87	4.65	4.48
Mimika	-16.36	-30.05	-5.82	-12.49	9.48	9.11
Boven Digoel	3.83	2.56	4.00	4.06	6.65	6.32
Mappi	4.86	4.01	5.74	5.47	5.21	6.71
Asmat	8.78	6.19	7.13	6.10	6.14	6.35
Yahukimo	11.96	14.74	10.97	10.89	6.76	7.44
Pegunungan Bintang	5.86	5.29	6.25	5.89	6.52	6.45
Tolikara	7.96	0.65	0.32	2.21	6.15	5.13
Sarmi	6.11	6.08	6.51	6.67	6.69	6.63
Keerom	9.01	9.15	8.92	9.51	9.59	9.36
Waropen	10.61	12.47	11.70	12.10	11.76	10.93
Supiori	8.17	13.96	10.16	9.98	4.26	5.92
Mamberamo Raya	12.55	7.71	11.58	11.23	9.17	9.81
Nduga	9.89	19.23	14.47	14.95	12.35	11.22
Lanny Jaya	11.30	21.95	16.39	16.09	10.89	10.90
Mamberamo Tengah	13.64	16.11	16.30	14.18	11.26	13.26
Yalimo	29.75	11.60	17.02	9.92	8.31	8.25
Puncak	5.32	10.50	7.78	9.17	9.19	8.87
Dogiyai	11.05	8.44	8.83	8.67	8.11	8.75
Intan Jaya	19.00	8.96	7.79	8.72	10.90	8.97
Deiyai	25.28	21.73	16.94	16.91	11.27	11.80
Kota Jayapura	10.66	13.13	9.84	10.33	10.35	9.74

Lampiran 7. Lanjutan

KABUPATEN/KOTA	Y_{i4}	\hat{Y}_{i4}	Y_{i5}	\hat{Y}_{i5}	Y_{i6}	\hat{Y}_{i6}
Merauke	7.74	7.40	6.88	7.44	7.66	7.60
Jayawijaya	7.07	7.18	6.20	6.11	4.70	4.69
Jayapura	11.27	10.78	9.95	9.38	8.54	8.88
Nabire	7.15	7.37	7.52	7.21	6.88	7.11
Kepulauan Yapen	6.93	6.91	6.26	5.74	5.42	5.96
Biak	5.29	4.93	6.62	6.60	4.07	4.39
Paniai	8.69	8.03	9.82	8.44	7.54	8.66
Puncak Jaya	4.40	4.23	7.39	5.89	4.60	5.89
Mimika	-0.55	0.47	6.48	9.46	12.84	8.99
Boven Digoel	6.13	6.44	5.39	5.54	4.83	4.77
Mappi	8.26	6.94	6.85	6.86	6.92	6.88
Asmat	5.47	6.22	4.79	5.24	6.18	5.59
Yahukimo	7.03	6.65	7.14	6.19	5.20	6.08
Pegunungan Bintang	6.36	6.89	6.12	6.93	8.25	7.54
Tolikara	6.72	6.05	4.86	3.05	4.68	6.43
Sarmi	6.76	7.05	7.14	6.22	5.20	5.94
Keerom	8.79	8.99	7.01	6.51	5.74	6.21
Waropen	10.47	10.66	9.66	9.91	9.48	9.65
Supiori	6.46	5.20	4.25	4.46	4.43	4.35
Mamberamo Raya	9.72	9.49	10.11	10.47	8.41	8.28
Nduga	9.83	10.17	8.88	9.85	6.83	6.97
Lanny Jaya	8.80	9.70	6.35	5.84	5.72	5.74
Mamberamo Tengah	9.48	9.95	7.71	8.03	6.56	5.91
Yalimo	7.45	7.17	6.60	6.82	5.81	5.34
Puncak	9.40	8.56	10.24	9.66	7.95	8.52
Dogiyai	9.10	8.77	9.15	8.33	7.56	8.21
Intan Jaya	11.52	12.44	12.87	11.45	7.91	8.73
Deiyai	10.70	10.57	10.09	8.84	7.17	8.07
Kota Jayapura	10.19	10.14	8.48	8.69	7.23	7.26

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Departemen Statistika Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data (FMKSD) ITS :

Nama : RAFAEL LUMBAN TORUAN

NRP : 06211650017004

Program Studi : Magister Statistika / ~~Doktor Ilmu Statistik~~

menyatakan bahwa data yang digunakan dalam Tesis / ~~Disertasi~~ ini merupakan data sekunder yang diambil dari ~~penelitian / buku/ Tugas Akhir/ Thesis/ Disertasi/ publikasi~~ lainnya yaitu:

Sumber : BPS

Keterangan : Buku PDRB Kabupaten/Kota Menurut Lapangan Usaha 2011-2016
Indeks Pembangunan Manusia 2011-2016

Surat pernyataan ini dibuat dengan sebenarnya. Apabila terdapat pemalsuan data maka saya siap menerima sanksi sesuai aturan yang berlaku.

Surabaya, 24 Januari 2018

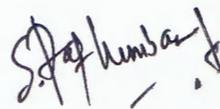
Mengetahui

Pembimbing Tesis/~~Disertasi~~



Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si.
NIP.19700910 199702 2 001

Mahasiswa



Rafael Lumban Toruan

*(coret yang tidak perlu)

** Mohon dituliskan data primer apabila datanya dikumpulkan sendiri

BIOGRAFI PENULIS



Penulis dilahirkan di Kelurahan Lingkar Timur, Kecamatan Singaranpati, Kota Bengkulu, Provinsi Bengkulu pada tanggal 15 Juli 1986, anak kelima dari lima bersaudara buah cinta pasangan Ayahanda Maruba Lumban Toruan dan Ibunda Ratnawati Maitri Mitra. Dan saat ini penulis sudah berkeluarga dengan istri bernama Engellia. Riwayat pendidikan penulis diawali dari SD St. Carolus (1992 – 1998), SMP St. Carolus (1998 – 2001), SMA Negeri 5 Kota Bengkulu (2001 – 2004), Sekolah Tinggi Ilmu Statistik (STIS) Jakarta (2004 – 2009) Jurusan Statistika Peminatan Statistik Sosial dan Kependudukan. Setelah menamatkan pendidikan DIV STIS, penulis ditugaskan bekerja pada BPS Kabupaten Asmat Provinsi Papua sebagai staf seksi Neraca Wilayah dan Analisis Statistik (Nerwilis) pada tahun 2010 – 2014. Pada tahun 2014 penulis dipindah tugaskan ke BPS Kabupaten Mimika Provinsi Papua dan di tahun yang sama juga penulis dipercayakan untuk menduduki Eselon IV sebagai Kepala Seksi Nerwilis BPS Kabupaten Mimika Provinsi Papua. Pada tahun 2016 penulis memperoleh beasiswa dari BPS untuk melanjutkan studi S2 di Departemen Statistika FMKSD ITS Surabaya. Demikian biografi singkat dari penulis, bagi pembaca yang ingin memberikan kritik, saran, dan pertanyaan mengenai penelitian ini dapat menghubungi penulis melalui email rafael@bps.go.id.

Surabaya, Januari 2018

Rafael Lumban Toruan

Halaman ini sengaja dikosongkan