TESIS - SM 142501

SIFAT-SIFAT ELEMENTER SEGITIGA DI RUANG BERNORMA DAN RUANG BERNORMA-2

DERI TRIANA
NRP 0611 1650 010 002

DOSEN PEMBIMBING:
Dr. Mahmud Yunus, M.Si.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI, DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018

THESIS - SM 142501

ELEMENTARY PROPERTIES OF TRIANGLE IN NORMED AND 2-NORMED SPACES

DERI TRIANA
NRP 0611 1650 010 002

SUPERVISOR:
Dr. Mahmud Yunus, M.Si.

MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTING, AND DATA SCIENCE
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2018

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

oleh:
DERI TRIANA
NRP. 0611 1650 010 002

Tanggal Ujian	**: 17 Januari 2018**
Periode Wisuda	**: Maret 2018**

Disetujui oleh:

Dr. Mahmud Yunus, M.Si. **(Pembimbing)**
NIP. 19620407 198703 1 005

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. **(Penguji)**
NIP. 19660414 199102 2 001

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si. **(Penguji)**
NIP. 19830517 200812 1 003

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
FAKULTAS MATEMATIKA

Dekan FMKSD,

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

SIFAT-SIFAT ELEMENTER SEGITIGA DI RUANG BERNORMA DAN RUANG BERNORMA-2

Nama Mahasiswa	:	DERI TRIANA
NRP	:	0611 1650 010 002
Pembimbing	:	Dr. Mahmud Yunus, M.Si.

Abstrak

Telah diketahui bahwa di bidang datar dapat dibangun konsep trigonometri, yang menjelaskan tentang sifat-sifat elementer segitiga. Di ruang hasil kali dalam, konsep segitiga berhasil dikonstruksi dengan memperkenalkan definisi $\Delta[a, b, c]$ *sebagai perumuman definisi segitiga di bidang datar, dan telah diperoleh beberapa hasil mengenai sifat-sifat elementer segitiga di ruang hasil kali dalam, yang bersesuaian dengan sifat-sifat elementer segitiga yang ada pada bidang datar.*

*Dengan adanya definisi sudut Wilson dan sudut Isosceles di ruang bernorma, serta definisi sudut-D di ruang bernorma-*2*, pada penelitian ini dibangun definisi segitiga yang bersesuaian dengan definisi segitiga di ruang hasil kali dalam.*

Pada ruang bernorma, melalui definisi sudut Wilson, telah berhasil diperoleh interpretasi geometris hukum jajar genjang di ruang bernorma. Pada pengertian segitiga menggunakan sudut Wilson, dapat dibuktikan ekivalensi antara Aturan Cosinus, Aturan Sinus, dan Rumus Sisi Segitiga. Juga telah berhasil dibuktikan bahwa jumlah besar sudut segitiga adalah sebesar π*. Hasil ini bersesuaian dengan yang telah ada di bidang datar. Selanjutnya, melalui pendefinisian segitiga dengan sudut Isoceles, telah berhasil diperoleh bentuk Aturan Cosinus dan telah diperoleh fakta bahwa di dalam himpunan yang anggotanya adalah semua segitiga dengan sudut Isosceles tidak memuat segitiga samasisi.*

*Sedangkan di ruang bernorma-*2 *untuk segitiga dengan sudut* D*, hanya berhasil diperoleh keujudan Aturan Sinus.*

Kata-kunci: *Ruang Bernorma, Ruang Bernorma-2, Segitiga.*

ELEMENTARY PROPERTIES OF TRIANGLE IN NORMED AND 2-NORMED SPACES

Name	:	DERI TRIANA
NRP	:	0611 1650 010 002
Supervisor	:	Dr. Mahmud Yunus, M.Si.

Abstract

From the elementary trigonometry in the plane, we move to the inner product spaces and normed spaces to make the extention and to construct the triangle concept in the plane. Several elementary properties of triangle in inner product spaces and in normed spaces are already obtained.

Some of them are the geometrical interpretation of Paralelogram Law in normed spaces, and the equivalences between Cosine, Sine and Triangle Side Formula for triangle with Wilson angle. We also have the useful formula that the sum of angle in triangle is equal π.

Even, we found that there doesn't exists the equilateral triangle if we use Isoceles angle.

For 2*-normed spaces, we only consider its Sine rule with the additional properties that our* 2*-normed spaces is also normed spaces.*

Key-words: *Normed Spaces*, *2-normed Spaces*, *Triangle.*

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan dengan lancar Tesis yang berjudul

"SIFAT-SIFAT ELEMENTER SEGITIGA DI RUANG BERNORMA DAN RUANG BERNORMA-2".

Tesis ini dibuat untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Magister Program Strata-2 Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan Tesis ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada pihak-pihak tersebut diantaranya:

1. Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2. Dekan Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
3. Kepala Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
4. Kepala Program Studi Strata-2 Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
5. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si. Selaku Dosen Pembimbing dalam penyelesaian Tesis
6. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. dan Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji dalam penyelesaian Tesis ini.
7. Bapak Prof. Basuki Widodo, M.Sc. selaku Dosen Wali selama menempuh program studi Strata-2
8. Orang tua, kakak, dan adik yang selalu memberikan do'a serta dukungan selama menempuh program studi Strata-2
9. Suamiku tercinta, Eridani. Anak-anakku tersayang Aisyah Dewi dan Prabarini Hafidzah. Terimakasih banyak atas limpahan kasih sayang, do'a dan dukungan kalian yang memberikan energi luar biasa sehingga studi selama Starta-2 ini dapat selesai dengan baik

10. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Magister Matematika. Terimakasih banyak atas semangat yang menginspirasi, dan bantuan sharing ilmu dalam diskusi, sehingga selama perkuliahan sampai Tesis ini selesai dapat berjalan dengan lancar
11. Staff Pasca Sarjana Matematika, Mbak Resty dan Mas Afif. Terimakasih banyak atas bantuan dalam menginformasikan keperluan administrasi dan bersedia menampung keluh kesah penulis selama proses penyelesaian Tesis hingga kelulusan
12. Kakak dan Adik angkatan di Program Studi Magister Matematika, serta semua pihak yang telah memberikan do'a dan dukungannya kepada penulis, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam Tesis ini masih terdapat kelemahan dan kekurangan, oleh karena itu penulis sangat terbuka menerima saran dan ide demi kesempurnaan penulisan selanjutnya. Penulis berharap semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, dan semua yang telah dikerjakan ini mendapat ridho dari Allah SWT.

Surabaya, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

Berikut ini adalah daftar notasi yang digunakan dalam penulisan tesis.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	Hasil kali dalam
$\| \cdot \|_k$	:	Norma yang berasal dari hasil kali dalam
$\| \cdot \|$	:	Norma
$\|\cdot, \cdot\|$	:	Norma-2
$\Delta[ABC]$	:	Segitiga di bidang datar
$\Delta[a,b,c]$	:	Segitiga di ruang hasil kali dalam
$\Delta_w[a, b, c]$	:	Segitiga di ruang bernorma dengan sudut Wilson
$\Delta_i[a, b, c]$	:	Segitiga di ruang bernorma dengan sudut Isosceles
$\Delta_i[W]$	:	Kumpulan semua $\Delta_i[a, b, c]$
$\Delta_D[a, b, c]$	:	Segitiga di ruang bernorma-2 dengan sudut D
$\angle_w(x, y)$	:	Sudut Wilson antara vektor $x, y \in W \setminus \{0\}$
$\angle_i(x, y)$	:	Sudut Isosceles antara vektor $x, y \in W \setminus \{0\}$
$\angle_D(x, y)$	:	Sudut D antara vektor $x, y \in H \setminus \{0\}$

BAB 1
PENDAHULUAN

Pada bab ini, dijelaskan mengenai hal-hal yang menjadi latar belakang penelitian. Selain itu, dirumuskan masalah-masalah yang berkaitan tentang topik penelitian, ditunjukkan pula tujuan dan manfaat dari penyusunan penelitian.

1.1 Latar Belakang

Penggunaan awal geometri dimulai pada peradaban Mesir kuno dan Babilonia, dimana penggunaannya terbatas hanya untuk perhitungan panjang segmen-segmen garis, luas benda datar, dan volume benda pejal. Sekitar tahun 300 SM, Euclid menulis buku "*The Element*" yang didalamnya telah diperkenalkan konsep trigonometri di bidang datar, dalam bentuk aksiomatis. Ini berarti trigonometri disajikan diawali dengan seperangkat aksioma dan definisi tentang hal-hal yang diperlukan, lalu dilanjutkan dengan penyajian sifat-sifat benda yang dimaksud dalam bentuk teorema. Buku ini mampu bertahan sebagai buku pelajaran di sekolah menengah di Eropa, sampai pada awal abad ke-20.

Berdasarkan informasi di atas, pengertian dan sifat-sifat elementer segitiga di bidang datar sudah lama dikenal. Oleh karena itu, dengan memandang bahwa bidang datar merupakan ruang vektor berdimensi dua atas lapangan real, yang dinotasikan dengan $\mathbf{R}^2$, pada perkembangan lainnya telah dilakukan penelitian terkait pengertian dan sifat-sifat elementer segitiga pada ruang yang lebih umum. Diantaranya, Habiburrahman (2014) telah mengkonstruksi pengertian dan beberapa sifat-sifat elementer segitiga di ruang hasil kali dalam. Kemudian dilanjutkan oleh Kamaliyah (2015), yang mengkonstruksi hal serupa dengan segitiga yg lebih spesifik, yaitu segitiga sama kaki. Eridani (2017), menjelaskan mengenai konsep trigonometri di $\mathbf{R}^2$, yaitu perihal ekivalensi aturan Cosinus, aturan Sinus, rumus sisi segitiga, dan rumus Phytagoras. Lebih lanjut lagi, karena $\mathbf{R}^2$ adalah salah satu contoh ruang hasil kali dalam, juga telah diperoleh hasil mengenai aturan Cosinus di ruang hasil kali dalam, yang ternyata sejalan dengan aturan Cosinus yang dipunyai oleh segitiga di bidang datar.

Dalam ruang bernorma, Gunawan (2008) dan pada penelitian yang lain telah banyak membahas mengenai definisi sudut dan keortogonalan vektor-vektor di ruang tersebut. Oleh karena itu, Jaelani dkk (2016) tertarik untuk mengkaji pengertian segitiga dan sifat-sifatnya pada ruang bernorma, sehingga pada penelitian ini telah berhasil dikonstruksi beberapa sifat elementer segitiga di ruang bernorma, namun masih ditemukan kesalahan dalam perhitungan.

Dari Gunawan (2008), diketahui bahwa dari pengertian hasil kali dalam, telah berhasil dibangun pengertian hasil kali dalam-2 klasik dan norma-2 klasik. Ini membuka kemungkinan untuk memperluas pengertian segitiga tidak hanya dari ruang hasil kali dalam ke ruang bernorma, tetapi juga memperluas konsep segitiga dan memeriksa keberlakuan sifat-sifat elementernya ke ruang bernorma-2 klasik, yang biasa disebut sebagai ruang bernorma-2.

Dari uraian tersebut diatas, penulis tertarik untuk meneliti lebih lanjut, yaitu dengan pengertian segitiga yang serupa dan beberapa pengertian sudut yang berbeda, apakah sifat-sifat elementer segitiga masih berlaku di ruang bernorma dan ruang bernorma-2?.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, berikut ini dikemukakan beberapa masalah pada penelitian ini, diantaranya:

1. Bagaimana bentuk Aturan Cosinus, Aturan Sinus, dan Rumus sisi segitiga di ruang bernorma?, apakah ketiga sifat elementer segitiga tersebut ekivalen?.

2. Berapa jumlah besar sudut sebarang segitiga di ruang bernorma?.

3. Bagaimana bentuk aturan Sinus di ruang bernorma-2?.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menjawab permasalah yang telah dikemukakan dalam rumusan masalah.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah, menunjukkan perkembangan bahwa konsep trigonometri di bidang datar yang telah lama dipelajari, ternyata bisa dikonstruksi pada ruang yang lain yaitu di ruang bernorma dan ruang bernorma-2.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, dipaparkan mengenai penelitian-penelitian terdahulu yang berkaitan dengan topik penelitian. Selain itu, juga ditunjukkan beberapa teori yang menjadi landasan yang dibutuhkan dalam menyelesaikan masalah yang telah dipaparkan pada rumusan masalah.

Diantaranya mengenai trigonometri elementer di bidang datar, definisi ruang vektor, definisi segitiga dan definisi sudut di ruang hasil kali dalam, definisi ruang bernorma dan ruang bernorma-2. Definisi dan teorema pada literatur yang telah penulis pelajari pada ruang vektor, berlaku skalarnya atas lapangan komplek dan lapangan real, tetapi definisi dan teorema yang disajikan dalam bab ini mengalami penyederhanaan sesuai dengan keperluan, yaitu skalarnya adalah bilangan real.

2.1 Penelitian-Penelitian Terkait

Pada sub bab ini, dipaparkan mengenai penelitian-penelitian yang berkaitan dengan topik penelitian. Penelitian-penelitian tersebut diantaranya berkaitan dengan konsep trigonometri di bidang datar, konsep trigonometri pada ruang hasil kali dalam dan ruang bernorma.

(a). Pada penelitian yang dilakukan oleh Habiburrahman (2014) dalam skripsinya yang berjudul "*Pengertian Segitiga di Ruang Hasil Kali Dalam dan Sifat-Sifat Elementernya*", telah dibangun definisi segitiga di ruang hasil kali dalam, selanjutnya dari definisi tersebut didapatkan beberapa hasil elementer seperti aturan Sinus dan Rumus Heron, yang ternyata sifatnya sejalan dengan yang sudah ada di bidang datar. Selain itu, juga didapatkan sifat-sifat elementer terkait segmen garis di ruang hasil kali dalam.

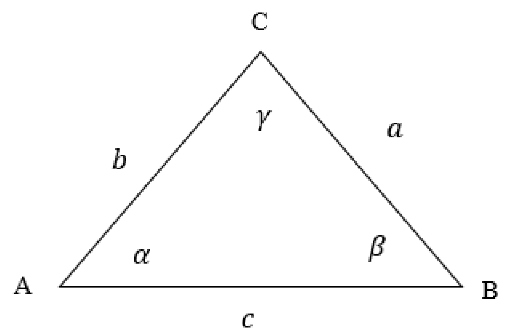
(b). Pada penelitian yang dilakukan oleh Kamaliyah (2015) dalam skripsinya yang berjudul "*Segitiga Sama Kaki di Ruang Hasil Kali Dalam dan Sifat-Sifatnya*", telah diperoleh hasil mengenai karakteristik utama dari segitiga sama kaki di ruang hasil kali dalam, dan karakteristik dari segitiga sama sisi di ruang hasil kali dalam yaitu mengenai besar ketiga sudutnya yang sama, yaitu $\frac{\pi}{3}$. Sementara itu, juga diperoleh kesimpulan bahwa jumlah besar sudut pada sebarang segitiga di ruang hasil kali dalam adalah sama dengan π.

(c). Pada penelitian yang dilakukan oleh Jaelani, dkk (2016), dalam makalahnya yang berjudul "*Segitiga Pada Ruang Bernorma*", telah diperoleh hasil mengenai definisi segitiga di ruang bernorma dengan menggunakan sudut (Isosceles), serta telah dibuktikan Aturan Sinus dan luas segitiga pada ruang bernorma, namun masih ditemukan kesalahan dalam perhitungan.

(d). Pada penelitian yang dilakukan oleh Eridani (2017), dalam makalahnya yang dipresentasikan pada *Workshop on Mathematical Analysis and Its Applications*, dijelaskan mengenai konsep trigonometri pada bidang datar, yaitu perihal ekivalensi aturan Cosinus, aturan Sinus, dan Rumus sisi segitiga. Lebih lanjut lagi, karena $\mathbf{R}^2$ adalah salah satu contoh ruang hasil kali dalam, juga telah diperoleh hasil mengenai aturan Cosinus di ruang hasil kali dalam, yang ternyata sejalan dengan aturan Cosinus yang dipunyai oleh segitiga di bidang datar.

2.2 Trigonometri elementer di bidang datar

(Greenberg, 1994) Pada bidang datar, didefinisikan suatu segitiga, yang dinotasikan sebagai $\Delta[ABC]$, dengan a, b, dan c menyatakan panjang sisi-sisi segitiga, serta α, β, dan γ berturut-turut menyatakan besar sudut yang berhadapan dengan sisi yang panjangnya a, b, dan c. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2.1: $\Delta[ABC]$ (Segitiga di Bidang Datar)

Selanjutnya, disajikan beberapa sifat-sifat elementer segitiga pada bidang datar yang nantinya digunakan dalam penelitian ini sebagai teorema pendukung untuk membuktikan keterkaitan atau hubungan dengan hasil penelitian.

Teorema 2.2.1. (Jumlah besar sudut segitiga)
Pada sebarang $\Delta[ABC]$ *berlaku* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Teorema 2.2.2. (Rumus Identitas Trigonometri)
Untuk setiap $0 \leq \alpha \leq \pi$, *berlaku :*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Definisi 2.2.3. (Segitiga Samakaki)
Suatu segitiga dengan dua sisi yang sama panjang disebut segitiga sama kaki.

Teorema 2.2.4. *Diberikan suatu segitiga sama kaki, berlaku:*
$a = b$ *jika dan hanya jika* $\alpha = \beta$.

Definisi 2.2.5. (Segitiga Samasisi)
Suatu segitiga yang ketiga sisinya sama panjang disebut segitiga sama sisi.

Berdasarkan definisi 2.2.5 segitiga sama sisi merupakan bentuk khusus dari segitiga sama kaki. Oleh karena itu, berlaku akibat berikut ini:

Akibat 2.2.6. *Suatu segitiga merupakan segitiga sama sisi jika dan hanya jika besar ketiga sudutnya sama, yaitu* $\frac{\pi}{3}$.

Teorema 2.2.7. (Aturan Cosinus)
Pada sebarang $\Delta[ABC]$ *berlaku:*

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\,\alpha, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\,\beta, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\,\gamma. \end{cases}$$

Teorema 2.2.8. (Aturan Sinus)
Pada sebarang $\Delta[ABC]$ *berlaku*

$$\frac{\sin\,\alpha}{a} = \frac{\sin\,\beta}{b} = \frac{\sin\,\gamma}{c}.$$

Teorema 2.2.9. (Rumus Sisi Segitiga)
Pada sebarang $\Delta[ABC]$ *berlaku*

$$\begin{cases} a = b\cos\,\gamma + c\cos\,\beta, \\ b = a\cos\,\gamma + c\cos\,\alpha, \\ c = a\cos\,\beta + b\cos\,\alpha. \end{cases}$$

Teorema 2.2.10. (Eridani, 2017) *Pada sebarang* $\Delta[ABC]$, *ketiga pernyataan berikut ekivalen:*

(a). *Aturan Cosinus,*

(b). *Aturan Sinus,*

(c). *Rumus Sisi Segitiga.*

Bukti.
(a) $\Longrightarrow$ (c). Jika diketahui Aturan Cosinus, maka

$$b\cos\,\gamma + c\cos\,\beta = b\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) + c\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) = \frac{2a^2}{2a} = a.$$

Dengan menggunakan Aturan Cosinus yang lain, akan diperoleh pula Rumus sisi segitiga yang lainnya, secara lengkap.

(c) $\Longrightarrow$ (a). Dengan menggunakan Rumus sisi segitiga, diperoleh

$$\begin{cases} a^2 = a(b\cos\gamma + c\cos\beta) = ab\cos\gamma + ac\cos\beta, \\ b^2 = b(a\cos\gamma + c\cos\alpha) = ab\cos\gamma + bc\cos\alpha, \\ c^2 = c(a\cos\beta + b\cos\alpha) = ac\cos\beta + bc\cos\alpha, \end{cases}$$

sehingga $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma$ atau $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Dengan perhitungan yang serupa, yaitu terhadap $a^2 + c^2 - b^2$ dan $b^2 + c^2 - a^2$, dapat melengkapi Aturan Cosinus yang dimaksud.

(a) $\Longrightarrow$ (b). Diketahui Aturan Cosinus, dan dengan mengingat $2s := a+b+c$, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha &= 1 - \cos^2\alpha = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} \\ &= \frac{[2bc - (b^2+c^2-a^2)]\cdot[2bc + (b^2+c^2-a^2)]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{[a^2 - (b-c)^2]\cdot[(b+c)^2 - a^2]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}, \end{aligned}$$

yang akan membawa kepada

$$bc\ \sin\alpha = ac\ \sin\gamma = ab\ \sin\gamma = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

yang merupakan bentuk ekivalen Aturan Sinus.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Misalkan dalam segitiga berlaku

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = k > 0.$$

Oleh karena $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, maka $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, dan ini berarti

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma, \quad \text{dan} \quad \cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma.$$

Cukup jelas bahwa $k^2[a^2+b^2-c^2] = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma$, dan akibatnya

$$\begin{aligned} k^2[a^2+b^2-c^2] &= 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \\ &= 2\sin\alpha\sin\beta[\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta] \\ &= 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 2k^2ab\ \cos\gamma, \end{aligned}$$

maka diperoleh $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$.

Dengan cara yang serupa, yaitu perhitungan pada $k^2[b^2+c^2-a^2]$ dan $k^2[a^2+c^2-b^2]$ dapat melengkapi Aturan Cosinus yang dimaksud. $\square$

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.3.1. (Arifin, 2001) *Ruang vektor* X *atas lapangan* $\mathbf{R}$ *adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi yaitu penjumlahan vektor dan perkalian skalar dengan vektor yang memenuhi sifat:*

(a). *Terhadap operasi penjumlahan, untuk setiap* $x, y, z \in X$, *berlaku:*

- (i). $x + y \in X$
- (ii). $x + y = y + x$
- (iii). $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (iv). $0 + x = x$, *dengan* $0 \in X$ *adalah unsur identitas terhadap operasi penjumlahan.*
- (v). *Untuk setiap* $x \in X$ *terdapat* $-x \in X$, *yang memenuhi* $x+(-x) = 0$.

(b). *Terhadap operasi perkalian skalar dengan vektor, untuk setiap* $x, y \in X$ *dan* $r, s \in \mathbf{R}$, *berlaku:*

- (i). $rx \in X$
- (ii). $(rs)x = r(sx)$
- (iii). $r(x + y) = rx + ry$
- (iv). $(r + s)x = rx + sx$
- (v). $1x = x$, *dengan* $1 \in \mathbf{R}$ *adalah unsur identitas terhadap operasi perkalian.*

2.4 Ruang Hasil Kali Dalam

Pada latar belakang, disebutkan bahwa mengenai konsep-konsep trigonometri elementer pada bidang datar telah lama dikenal. Selanjutnya, bidang datar juga bisa dilengkapi dengan sistem koordinat kartesius. Bidang datar yang dilengkapi dengan sistem koordinat biasa dinotasikan dengan $\mathbf{R}^2$, dan didefinisikan sebagai

$$\mathbf{R}^2 := \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}.$$

Telah diketahui bahwa $\mathbf{R}^2$ merupakan ruang vektor berdimensi dua atas lapangan real $\mathbf{R}$.

$\mathbf{R}^2$ adalah salah satu contoh ruang hasil kali dalam. Berikut ini, penulis menyajikan beberapa definisi dan teorema yang berhubungan dengan ruang hasil kali dalam, norma, dan sudut diantara dua vektor di ruang hasil kali dalam.

Definisi 2.4.1. (Ruang Hasil Kali Dalam)
(Kreyszig, 1978) *Misalkan* V *adalah ruang vektor atas lapangan* $\mathbf{R}$. *Hasil kali dalam pada* V *adalah fungsi :* $V \times V \to \mathbf{R}$, *dinotasikan* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *dimana untuk setiap* $u, v \in V$ *dan* $r, s \in \mathbf{R}$ *dipenuhi :*

(i). $\langle v, v\rangle \geq 0$ *dan* $\langle v, v\rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $v = 0$.

(ii). $\langle u, v\rangle \ = \langle v, u\rangle$

(iii). $\langle ru + sv, w\rangle \ = r\langle u, w\rangle + s\langle v, w\rangle$

Suatu ruang vektor V, yang dilengkapi dengan operasi hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam, yang dinotasikan sebagai $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Definisi 2.4.2. (Kreyszig, 1978) *Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam, sebuah vektor $x \in V$ dikatakan ortogonal pada sebuah vektor $y \in V$, jika $\langle x, y\rangle = 0$, dan dinotasikan dengan $x \perp y$.*

Teorema 2.4.3. (Kreyszig, 1978) *Jika V adalah suatu ruang hasil kali dalam, maka norma atau panjang vektor dari $x \in V$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$\|x\|_k := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Teorema 2.4.4. (Kreyszig, 1978) *Jika V adalah suatu ruang hasil kali dalam, norma yang berasal dari hasil kali dalam haruslah memenuhi aturan jajar genjang berikut ini.*

$$\|x + y\|_k^2 + \|x - y\|_k^2 = 2(\|x\|_k^2 + \|y\|_k^2)$$

Dengan kata lain, jika hukum jajar genjang berlaku di dalam ruang bernorma, maka ruang tersebut merupakan ruang hasil kali dalam.

Selanjutnya, disajikan ketaksamaan Cauchy-Schwarz yang mendasari konsep sudut antara dua vektor di ruang hasil kali dalam.

Teorema 2.4.5. (Cauchy-Schwarz)
(Kreyszig, 1978) *Untuk setiap $x, y \in V$, berlaku $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_k\|y\|_k$.*

Definisi 2.4.6. (Kreyszig, 1978) *Besar sudut yang dibentuk oleh dua vektor x dan y di ruang hasil kali dalam yang dinotasikan dengan $\angle(x, y)$, didefinisikan sebagai:*

$$\cos\angle(x, y) := \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|_k\|y\|_k}$$

Teorema 2.4.7. *Untuk sebarang $a, b, c \in V$, diperoleh*

$$\angle(a, b) + \angle(a, c) = \pi,$$

jika dan hanya jika $b = t_0 c$ untuk suatu $t_0 < 0$, atau dengan kata lain, $\{b, c\}$ bergantung linier dan berlawanan arah.

Sebagai akibat dari teorema 2.4.7, didapatkan sifat berikut.

Akibat 2.4.8. *Untuk sebarang $a, b \in V$, selalu berlaku*

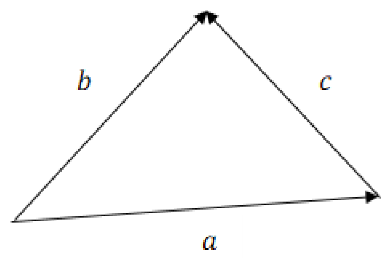
$$\angle(a, b) + \angle(a, -b) = \pi.$$

Sejalan dengan yang sudah ada di bidang datar, telah didefinisikan segitiga di ruang hasil kali dalam, sebagai berikut.

Definisi 2.4.9. (Segitiga di ruang hasil kali dalam)
(Habiburrahman, 2014) *Dalam* $V := (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *didefinisikan segitiga yang dinotasikan* $\Delta[a, b, c]$*, untuk sebarang* $a, b, c \in V \backslash \{0\}$ *sebagai kumpulan* $\{a, b, c\}$ *yang memenuhi* $a + c = b$ *dan dilengkapi dengan sudut-sudut didalamnya, yaitu* $\angle(a, b),\ \angle(c, -a),\ \angle(b, c)$*. Untuk alasan kesederhanaan, didefinisikan*

$$0 < \angle(a, b), \angle(c, -a), \angle(b, c) < \pi.$$

Segitiga pada ruang hasil kali dalam dapat diilustrasikan dalam gambar sebagai berikut.



Gambar 2.2: $\Delta[a, b, c]$ (Segitiga di Ruang Hasil Kali Dalam)

Sejalan dengan sifat-sifat elementer segitiga yang ada di bidang datar, pada ruang hasil kali dalam juga dipenuhi sifat-sifat berikut.

Teorema 2.4.10. (Aturan Sinus)
(Habiburrahman, 2014) *Pada sebarang* $\Delta[a, b, c]$*, berlaku*

$$\|b\|_k \|c\|_k \cdot \sin \angle(b, c) = \|a\|_k \|c\|_k \cdot \sin \angle(c, -a) = \|a\|_k \|b\|_k \cdot \sin \angle_w(a, b)$$

Teorema 2.4.11. (Aturan Cosinus).
(Eridani, 2017) *Pada sebarang* $\Delta[a, b, c]$ *berlaku*

$$\begin{cases} \|a\|_k^2 = \|b\|_k^2 + \|c\|_k^2 - 2\|b\|_k \cdot \|c\|_k \cos \angle(b, c), \\ \|b\|_k^2 = \|a\|_k^2 + \|c\|_k^2 - 2\|a\|_k \cdot \|c\|_k \cos \angle(c, -a), \\ \|c\|_k^2 = \|a\|_k^2 + \|b\|_k^2 - 2\|a\|_k \cdot \|b\|_k \cos \angle(a, b), \end{cases}$$

Teorema 2.4.12. (Rumus Sisi Segitiga).
Pada sebarang $\Delta[a, b, c]$*, aturan Cosinus ekivalen dengan*

$$\begin{cases} \|a\|_k = \|b\|_k \cos \angle(a, b) + \|c\|_k \cos \angle(c, -a), \\ \|b\|_k = \|a\|_k \cos \angle(a, b) + \|c\|_k \cos \angle(b, c), \\ \|c\|_k = \|a\|_k \cos \angle(c, -a) + \|b\|_k \cos \angle(b, c). \end{cases}$$

Pada penelitian yang dilakukan oleh Kamaliyah pada tahun 2015, telah diperoleh beberapa hasil mengenai karakterisasi segitiga samakaki di ruang hasil kali dalam, serta jumlah besar ketiga sudut segitiga pada ruang hasil kali dalam adalah sebesar π. Untuk keperluan penyelesaian masalah dalam penelitian ini, berikut ini penulis membuktikan teorema-teorema mengenai sifat sudut-sudut segitiga dengan cara yang lebih sederhana.

Dari aturan Cosinus pada $\Delta[a,b,c]$, misalkan diberikan $\|a\|_k = \|b\|_k$, maka diperoleh $\|b\|_k^2 + \|c\|_k^2 - 2\|b\|_k\|c\|_k \cos\angle(b,c) = \|a\|_k^2 + \|c\|_k^2 - 2\|a\|_k\|c\|_k \cos\angle(c,-a)$, yang mengakibatkan $\cos\angle(b,c) = \cos\angle(c,-a)$, atau $\angle(b,c) = \angle(c,-a)$. Karena pernyataan tersebut berlaku sebaliknya, maka diperoleh fakta berikut.

Teorema 2.4.13. (Karakterisasi Segitiga Samakaki).
(Kamaliyah, 2015) *Dalam* $\Delta[a,b,c]$ *berlaku*

$$\|a\|_k = \|b\|_k \quad \Leftrightarrow \quad \angle(b,c) = \angle(c,-a).$$

Selanjutnya, ditinjau mengenai sifat elementer pada segitiga samasisi. Misalkan $\|a\|_k = \|b\|_k = \|c\|_k$, maka dari aturan Cosinus diperoleh

$$\cos\angle(b,c) = \frac{\|c\|_k^2 + \|b\|_k^2 - \|a\|_k^2}{2\|c\|_k\|b\|_k} = \frac{1}{2} = \cos\angle(b,a) = \cos\angle(c,-a).$$

Hal ini berarti, jika $\Delta[a,b,c]$ adalah segitiga samasisi, yaitu

$$\|a\|_k = \|b\|_k = \|c\|_k,$$

maka diperoleh

$$\angle(a,b) + \angle(c,-a) + \angle(b,c) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi. \tag{2.1}$$

Hasil pada (2.1) tersebut, dapat diformulasikan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 2.4.14. (Kamaliyah, 2015) *Pada* $\Delta[a,b,c]$ *samasisi berlaku*

$$\angle(a,b) + \angle(c,-a) + \angle(b,c) = \pi.$$

Kemudian, sifat elementer segitiga samasisi tersebut ditinjau ulang untuk segitiga siku-siku, sehingga diperoleh sifat berikut.

Teorema 2.4.15. *Dalam* $\Delta[a,b,c]$ *siku-siku berlaku*

$$\angle(a,b) + \angle(c,-a) + \angle(b,c) = \pi.$$

Bukti. Untuk $\angle(a,b) = \pi/2$, jika dimasukkan ke dalam aturan Cosinus, maka $\|c\|_k^2 = \|a\|_k^2 + \|b\|_k^2$. Dengan demikian, diperoleh

$$\cos\angle(b,c) = \frac{\|c\|_k^2 + \|b\|_k^2 - \|a\|_k^2}{2\|c\|_k\|b\|_k} = \frac{\|b\|_k}{\|c\|_k} \tag{2.2}$$

dan

$$\cos \angle(c,-a) = \frac{\|c\|_k^2 + \|a\|_k^2 - \|b\|_k^2}{2\|c\|_k\|a\|_k} = \frac{\|a\|_k}{\|c\|_k}. \tag{2.3}$$

Dari (2.2) dan (2.3), akan mengarahkan kepada

$$\cos^2 \angle(b,c) + \cos^2 \angle(c,-a) = 1, \quad \text{atau} \quad \cos^2 \angle(b,c) = \sin^2 \angle(c,-a).$$

Oleh karena $\cos \angle(b,c) = -\sin \angle(c,-a)$ menghasilkan suatu kontradiksi, maka dapat disimpulkan bahwa $\cos \angle(b,c) = \sin \angle(c,-a)$, atau

$$\angle(b,c) = \pi/2 - \angle(c,-a).$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\angle(b,a) + \angle(c,-a) + \angle(b,c) = \pi/2 + \pi/2 = \pi,$$

yang merupakan akhir pembuktian.

□

Setelah menyelidiki jumlah besar sudut segitiga, dalam hal segitiga tersebut adalah segitiga samasisi atau segitiga siku-siku, selanjutnya diselidiki sifat serupa untuk sebarang segitiga di ruang hasil kali dalam, yang dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 2.4.16. (Jumlah besar sudut segitiga)
(Kamaliyah, 2015) *Dalam sebarang* $\Delta[a,b,c]$ *berlaku*

$$\angle(a,b) + \angle(c,-a) + \angle(b,c) = \pi.$$

Segitiga dalam penelitian ini berada pada ranah ruang bernorma dan ruang bernorma-2. Oleh karena itu, selanjutkan disajikan mengenai definisi ruang bernorma dan ruang bernorma-2.

2.5 Ruang Bernorma

Definisi 2.5.1. (Teschl, 2010) *Misalkan* W *adalah ruang vektor atas lapangan* $\mathbf{R}$. *Didefinisikan fungsi norma* $\|\cdot\| : W \longrightarrow \mathbf{R}^+ \cup 0$, *dimana untuk setiap* $x, y \in W$ *dan* $r \in \mathbf{R}$ *memenuhi sifat-sifat:*

(i). $\|x\| \geq 0$ *dan* $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii). $\|rx\| = |r|\|y\|$

(iii). $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Suatu ruang vektor W, *yang dilengkapi dengan fungsi norma disebut ruang bernorma, yang dinotasikan sebagai* $(W, \|\cdot\|)$.

2.5.1 Sudut-Sudut di Ruang bernorma

Definisi 2.5.2. (Sudut Wilson)
(Gunawan, 2008) *Misalkan diberikan ruang bernorma* $W := (W, \|\cdot\|)$ *atas lapangan* $\mathbf{R}$. *Sudut Wilson dari vektor* $x, y \in W \setminus \{0\}$ *yang dinotasikan* $\angle_w(x, y)$, *didefinisikan sebagai*

$$\angle_w(x, y) := \arccos \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2}{2\|x\|\|y\|}.$$

Definisi 2.5.3. (Sudut Isosceles)
(Gunawan, 2008) *Misalkan diberikan ruang bernorma* $W := (W, \|\cdot\|)$ *atas lapangan* $\mathbf{R}$. *Sudut Isosceles dari vektor* $x, y \in W \setminus \{0\}$ *yang dinotasikan* $\angle_i(x, y)$, *didefinisikan sebagai*

$$\angle_i(x, y) := \arccos \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4\|x\|\|y\|}.$$

Definisi 2.5.4. (Gunawan, 2008) *Misalkan diberikan ruang bernorma* $W := (W, \|\cdot\|)$ *atas lapangan* $\mathbf{R}$, *berlaku:*

(a). (Ortogonalitas pada sudut Wilson)
Sebuah vektor $x \in W \setminus \{0\}$ *dikatakan ortogonal pada sebuah vektor* $y \in W \setminus \{0\}$, *jika* $[x, y]_w = 0$, *dan dinotasikan dengan* $x \perp_w y$.

(b). (Ortogonalitas pada sudut Isosceles)
Sebuah vektor $x \in W \setminus \{0\}$ *dikatakan ortogonal pada sebuah vektor* $y \in W \setminus \{0\}$, *jika* $[x, y]_i = 0$, *dan dinotasikan dengan* $x \perp_i y$.

Teorema 2.5.5. (Gunawan, 2008) *Misalkan diberikan ruang bernorma* $W := (W, \|\cdot\|)$ *atas lapangan* $\mathbf{R}$, *untuk setiap* $x, y \in W \setminus \{0\}$, *berlaku:*

(a). (Ortogonalitas pada sudut Wilson)

$$x \perp_w y \Leftrightarrow \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(b). (Ortogonalitas pada sudut Isosceles)

$$x \perp_i y \Leftrightarrow \|x + y\| = \|x - y\|.$$

Setiap ruang hasil kali dalam merupakan ruang bernorma, tetapi ada ruang bernorma yang bukan merupakan ruang hasil kali dalam. Berdasarkan teorema 2.4.4, untuk membuktikan bahwa suatu ruang bernorma bukan merupakan ruang hasil kali dalam, harus dibuktikan bahwa ruang bernorma tersebut tidak memenuhi hukum jajar genjang.

Berikut ini, diberikan contoh ruang bernorma yang bukan merupakan ruang hasil kali dalam.

Contoh 2.5.6. Diberikan ruang bernorma $\mathcal{C}[0,1]$. Misalkan untuk setiap $f \in \mathcal{C}[0,1]$ didefinisikan norma berikut ini

$$\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|. \tag{2.4}$$

Akan dibuktikan bahwa ruang bernorma $\mathcal{C}[0,1]$ dengan definisi norma tersebut tidak memenuhi hukum jajar genjang.

Bukti. Jika dipilih $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$, $f(t) = 1$ dan $g(t) = t$, maka $\|f\| = 1$, $\|g\| = 1$, $f(t) + g(t) = 1 + t$ dan $f(t) - g(t) = 1 - t$. Dengan demikian $\|f + g\| = 2$ dan $\|f - g\| = 1$, sehingga diperoleh

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 5 \neq 4 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Terbukti bahwa ruang bernorma tersebut tidak memenuhi hukum jajar genjang. Jadi dapat disimpulkan ruang bernorma $\mathcal{C}[0,1]$ dengan definisi norma pada (2.4) bukan merupakan ruang hasil kali dalam.

□

2.6 Ruang Bernorma-2

Definisi 2.6.1. (Gunawan, 2008) *Misalkan $H := (H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ adalah ruang vektor atas lapangan real $\mathbf{R}$. Didefinisikan norma-2 pada H adalah fungsi $\|\cdot,\cdot\| : H \times H \longrightarrow \mathbf{R}^+ \cup 0$. Dengan*

$$\|x, y\| := \sqrt{\|x\|_k^2 \|y\|_k^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

merepresentasikan luas jajargenjang yang direntang oleh vektor x dan y, dimana untuk setiap $x, y, x_1, x_2 \in H$, dan $r \in \mathbf{R}$, memenuhi sifat-sifat:

(i). $\|x, y\| \geq 0$ *dan* $\|x, y\| = 0 \iff \{x, y\}$ *bergantung linier,*

(ii). $\|x, y\| = \|y, x\|$,

(iii). $\|rx, y\| = |r|\|x, y\|$,

(iv). $\|x_1 + x_2, y\| \leq \|x_1, y\| + \|x_2, y\|$.

Suatu ruang vektor H, yang dilengkapi dengan fungsi norma-2 disebut ruang bernorma-2, yang dinotasikan sebagai $(H, \|\cdot,\cdot\|)$.

Definisi 2.6.2. (Sudut di Ruang Bernorma-2) (Gunawan, 2008) *Misalkan diberikan ruang bernorma-2 $H := (H, \|\cdot,\cdot\|)$ atas lapangan $\mathbf{R}$. Sudut D dari vektor $x, y \in H \setminus \{0\}$ yang dinotasikan $\angle_d(x, y)$, didefinisikan sebagai*

$$\angle_D(x, y) := \arcsin \frac{\|x, y\|}{\|x\|_k \|y\|_k},$$

yang bersifat $\angle_d(x, y) = \frac{1}{2}\pi$, jika dan hanya jika $\|x, y\| = \|x\|_k \|y\|_k$.

Contoh 2.6.3. (Gunawan, 2001) Misalkan diberikan ruang bernorma-2 $\mathbf{R}^2$ yang dilengkapi dengan definisi norma-2 sebagai berikut, $\|x, y\|$ merepresentasikan luas jajar genjang yang dibangun oleh vektor x dan y, yang luasnya dua kali luas segitiga yang mempunyai titik simpul $\mathbf{0} = (0, 0)$, x dan y. Didefinisikan sebagai $\|x, y\| := |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Bukti. Diambil sebarang $x, y, z \in \mathbf{R}^2$ dan $r \in \mathbf{R}$, dengan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, dan $z = (z_1, z_2)$.

Pertama-tama, akan dibuktikan bahwa $\sqrt{\|x\|_k^2 \|y\|_k^2 - \langle x, y\rangle^2}$ ekivalen dengan $|x_1 y_2 - x_2 y_1|$.
$(\|x\|_k^2 \|y\|_k^2 - \langle x, y\rangle^2)^{\frac{1}{2}} = ((x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
&= \left(x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 - (x_1^2 y_1^2 + 2 x_1 y_1 x_2 y_2 + x_2^2 y_2^2)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2 x_1 y_1 x_2 y_2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left((x_1 y_2 - x_2 y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |x_1 y_2 - x_2 y_1|,
\end{aligned}$$

maka terbukti bahwa $\sqrt{\|x\|_k^2 \|y\|_k^2 - \langle x, y\rangle^2}$ ekivalen dengan $|x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\|x, y\| := |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ memenuhi sifat-sifat norma-2 sesuai Definisi 2.6.1.

(i). Karena $|x_1 y_2 - x_2 y_1| \geq 0$, maka $\|x, y\| \geq 0$. Selanjutnya, akan dibuktikan $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika $\{x, y\}$ bergantung linier.
($\Longrightarrow$) Misalkan $\|x, y\| = 0$, maka $|x_1 y_2 - x_2 y_1| = 0$, karena berlaku $|x_1 y_2 - x_2 y_1| = 0$, jika dan hanya jika $(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
x_1 y_2 &= x_2 y_1 \\
\frac{x_1}{y_1} &= \frac{x_2}{y_2} = r \\
x_1 &= r y_1, \; x_2 = r y_2
\end{aligned}$$

Jadi $(x_1, x_2) = (r y_1, r y_2)$ atau $x = r y$, yang berarti $\{x, y\}$ bergantung linier.
($\Longleftarrow$) Misalkan x, y bergantung linier, maka $x = r y$, sehingga

$$\begin{aligned}
\|x, y\| &= \|r y, y\| \\
&= |r y_1 y_2 - r y_2 y_1| \\
&= |r y_1 y_2 - r y_1 y_2| \\
&= |0| = 0
\end{aligned}$$

(ii). Akan ditunjukkan $\|x, y\| = \|y, x\|$
$\|x, y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1| = |y_2 x_1 - y_1 x_2| = |-(y_1 x_2 - y_2 x_1)|$
$= |-1| \, |(y_1 x_2 - y_2 x_1)| = |(y_1 x_2 - y_2 x_1)| = \|y, x\|$.

(iii). Akan ditunjukkan $\|rx, y\| = |r|\|x, y\|$

$$\|rx, y\| = |rx_1y_2 - rx_2y_1| = |r(x_1y_2 - x_2y_1)| = |r|\,|x_1y_2 - x_2y_1| = |r|\|x, y\|.$$

(iv). Akan ditunjukkan $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$.

$$\begin{aligned}
\|x + y, z\| &= |(x_1 + y_1)z_2 - (x_2 + y_2)z_1| \\
&= |(x_1z_2 + y_1z_2) - (x_2z_1 + y_2z_1)| \\
&= |(x_1z_2 - x_2z_1) + (y_1z_2 - y_2z_1)| \\
&\leq |x_1z_2 - x_2z_1| + |y_1z_2 - y_2z_1| = \|x, z\| + \|y, z\|.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\|x, y\| := |x_1y_2 - x_2y_1|$ memenuhi sifat-sifat norma-2 sesuai definisi 2.6.1.

$\square$

BAB 3
METODE PENELITIAN

Pada bab ini, dijelaskan tentang tahapan-tahapan penelitian yang dilakukan untuk menyelesaikan masalah yang telah dikemukakan pada rumusan masalah.

3.1 Tahapan Penelitian

Tahapan-tahapan yang dilakukan pada penelitian ini, meliputi:

(a). Studi literatur, dengan tahapan sebagai berikut:

  (i). Mempelajari konsep trigonometri di bidang datar, yaitu menggali sifat-sifat elementer segitiga, diantaranya mengenai aturan Cosinus, aturan Sinus, rumus sisi segitiga, jumlah besar sudut segitiga, dan sifat-sifat elementer segitiga yang lain.

  (ii). Mempelajari perkembangan konsep trigonometri yang telah dipelajari di bidang datar ke ruang hasil kali dalam, diantaranya pengkonstruksian definisi segitiga, beserta sifat-sifat elementernya.

(b). Berdasarkan beberapa definisi yang telah ada mengenai sudut di ruang bernorma, selanjutnya semua konsep trigonometri yang telah dipelajari di bidang datar dibawa ke ruang bernorma, dimana pada penelitian ini digunakan definisi sudut Wilson dan sudut Isosceles, untuk menyelidiki lebih lanjut sifat-sifat elementer segitiga, dengan tahapan sebagai berikut:

  (i). Pada literatur yang penulis pelajari, perihal definisi sudut di ruang bernorma telah lama ada, namun belum dibahas mengenai hal yang mendasari munculnya konsep sudut tersebut, oleh karena itu penulis mengawali dengan mendefinisikan suatu fungsional, dalam penelitian ini penulis menyebut fungsional tersebut dengan nama fungsional Wilson.

  (ii). Menemukan ketaksamaan yang serupa dengan ketaksamaan Chauchy-Schwarz, kemudian membuktikan keberlakuannya pada ruang bernorma.

  (iii). Ketaksamaan tersebut yang mendasari munculnya konsep sudut di ruang bernorma, sehingga selanjutnya dalam pembahasan disajikan definisi sudut Wilson.

  (iv). Dengan menggunakan definisi sudut Wilson, dibangun suatu definisi segitiga di ruang bernorma.

(v). Kemudian, dengan menggunakan definisi sudut Wilson dan definisi segitiga tersebut, dilakukan eksplorasi perihal sifat-sifat elementer segitiga di ruang bernorma. Pertama-tama dibentuk aturan Cosinus, kemudian dibuktikan bahwa dari aturan Cosinus dapat diperoleh aturan Sinus, selanjutnya dibuktikan bahwa aturan Cosinus ekivalen dengan Rumus sisi segitiga.

(vi). Untuk membuktikan bahwa dari Aturan Sinus dapat diperoleh Aturan Cosinus, sulit jika dibuktikan secara langsung, oleh karena itu terlebih dahulu digali sifat sudut-sudut segitiga, yaitu diawali dengan membuktikan keberadaan segitiga samasisi dan segitiga siku-siku di ruang bernorma, sampai diperoleh bukti bahwa jumlah besar ketiga sudut sebarang segitiga adalah π. Dengan memanfaatkan fakta bahwa jumlah besar ketiga sudut segitiga adalah π, kemudian dibuktikan bahwa dari aturan Sinus dapat diperoleh aturan Cosinus. Jika hasil-hasil tersebut telah terbukti, maka diperoleh suatu akibat bahwa Aturan Cosinus, Aturan Sinus, dan Rumus sisi segitiga terbukti ekivalen.

(vii). Pada tahap ini, penulis melakukan kembali langkah-langkah b.(i) sampai b.(vi), yaitu dengan menggunakan definisi sudut Isosceles, kemudian dilanjutkan menggali sifat sudut-sudut segitiga, yang diawali dengan membuktikan keberadaan segitiga samasisi pada himpunan yang anggotanya adalah semua $\Delta_i[a, b, c]$.

(c). Dengan adanya pengertian sudut D di ruang bernorma-2, semua konsep trigonometri di atas dicoba dikembangkan di dalam ruang bernorma-2.

BAB 4
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, diuraikan mengenai hasil dari penelitian yang merupakan solusi dari masalah yang telah penulis tuangkan dalam rumusan masalah, hasil-hasil yang penulis peroleh penulis tuangkan dalam teorema-teorema. Penelitian ini, proses penyelesaiannya sesuai dengan langkah-langkah yang telah penulis uraikan dalam metode penelitian.

Pada penelitian ini, untuk membangun definisi segitiga dan menyelidiki sifat-sifat elementer segitiga, di ruang bernorma digunakan sudut Wilson dan sudut Isosceles, sedangkan di ruang bernorma-2 digunakan sudut D.

Untuk selanjutnya, pada bab ini π merupakan perumuman dari "panjang busur setengah lingkaran" yang berjari-jari 1.

4.1 Segitiga di Ruang Bernorma

Pada subbab ini, digunakan definisi sudut Wilson dan sudut Isosceles, sebagai alat untuk menyelidiki sifat-sifat elementer segitiga dan sifat-sifat sudut segitiga di ruang bernorma. Untuk lebih lengkapnya, penulis uraikan sebagai berikut.

4.1.1 Sudut Wilson

Pada subbab ini, dijelaskan mengenai asal mula munculnya definisi sudut Wilson, yang kemudian dengan menggunakan definisi sudut tersebut dibangun suatu definisi segitiga pada ruang bernorma.

Pada ruang bernorma $W = (W, \|\cdot\|)$, dapat didefinisikan suatu fungsional, yang disebut sebagai fungsional Wilson, dengan definisi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot]_w : W \times W &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x,y) &\longmapsto [x,y]_w := \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2}{2}. \end{aligned}$$

Berikut ini disampaikan tentang beberapa sifat elementer fungsional Wilson.

Teorema 4.1.1. *Untuk setiap $x, y \in W$ dan $\lambda \in \mathbf{R}$, dipenuhi sifat-sifat berikut ini:*

(i). $[x,x]_w = \|x\|^2 \geq 0$ *dan* $[x,x]_w = 0 \iff x = 0$,

(ii). $[x,y]_w = [y,x]_w$,

(iii). $[\lambda x, \lambda y]_w = \lambda^2 [x,y]_w$, *Bukti.* Pembuktian (i), (ii), dan (iii), dapat dibuktikan melalui definisi fungsional Wilson dan sifat-sifat norma pada definisi 2.5.1.

(i.) Untuk $y = x$, jika disubstitusikan ke dalam $[x, y]_w$, maka diperoleh

$$2[x, x]_w = \|x\|^2 + \|x\|^2 - \|x - x\|^2 = 2\|x\|^2, \quad \text{atau} \quad [x, x]_w = \|x\|^2 \geq 0.$$

Dalam ruang bernorma, dipenuhi sifat $\|x\| = 0$ jika dan hanya jiak $x = 0$. Dengan demikian, karena $[x, x]_w = \|x\|^2$, maka dipenuhi $x = 0$ jika dan hanya jika $[x, x]_w = 0$.

(ii.) Oleh karena $\|x - y\| = \|y - x\|$, maka

$$2[x, y]_w = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 - \|y - x\|^2 = 2[y, x]_w$$

atau

$$[x, y]_w = [y, x]_w.$$

(iii.) Untuk sebarang $\lambda \in \mathbf{R}$, diperoleh

$$\begin{aligned} [\lambda x, \lambda y]_w &= \frac{\|\lambda x\|^2 + \|\lambda y\|^2 - \|\lambda x - \lambda y\|^2}{2} \\ &= \lambda^2 \frac{\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right)}{2} = \lambda^2 [x, y]_w. \end{aligned}$$

□

Seperti pada ruang hasil kali dalam, pada subbab ini disajikan ketaksamaan yang sejenis dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz, yang mendasari konsep sudut antara dua vektor di ruang bernorma.

Teorema 4.1.2. *Untuk setiap $x, y \in W$, berlaku $\big|[x, y]_w\big| \leq \|x\|\|y\|$.*

Bukti. Karena $\big|[x, y]_w\big| \leq \|x\|\|y\|$ berarti

$$-\|x\|\|y\| \leq [x, y]_w \leq \|x\|\|y\|, \quad x, y \in W.$$

Misalkan $x, y \in W$. Karena $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$, maka

$$\begin{aligned} & \big|\|x\| - \|y\|\big|^2 \leq \|x - y\|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \leq \|x - y\|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & [x, y]_w \leq \|x\|\|y\|. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Di sisi yang lain, karena $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \|x - y\|^2 \leq \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \|x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \leq 2\|x\|\|y\| \\ \Leftrightarrow \quad & -[x, y]_w \leq \|x\|\|y\| \text{ atau } -\|x\|\|y\| \leq [x, y]_w. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dari hasil (4.1) dan (4.2), telah terbukti bahwa $\big|[x, y]_w\big| \leq \|x\|\|y\|$. □

Berikut ini adalah definisi sudut Wilson di ruang bernorma.

Definisi 4.1.3. (Sudut Wilson)
Misalkan diberikan ruang bernorma $W := (W, \|\cdot\|)$ atas lapangan $\mathbf{R}$. Sudut Wilson dari vektor $x, y \in W \setminus \{0\}$ yang dinotasikan $\angle_w(x, y)$, didefinisikan sebagai

$$\angle_w(x,y) := \arccos \frac{[x,y]_w}{\|x\|\|y\|} = \arccos \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2}{2\|x\|\|y\|}.$$

Selanjutnya, diuraikan mengenai beberapa sifat dari sudut Wilson, yang tertuang dalam teorema-teorema berikut ini.

Teorema 4.1.4. *Untuk setiap $x, y \in W \setminus \{0\}$, berlaku*

(i). $x \perp_w y \;\Leftrightarrow\; y \perp_w x \;\Leftrightarrow\; x \perp_w (-y) \;\Leftrightarrow\; (-x) \perp_w y \;\Leftrightarrow\; (-x) \perp_w (-y)$,

(ii). *Jika* $\{x, y\}$ *bergantung linier, maka* $\angle_w(x, y) = 0$, *atau* $\angle_w(x, y) = \pi$.

Bukti.

(i). Menurut sifat norma pada definisi 2.5.1 dipenuhi $\|-x\| = \|x\|$, dan $\|-y\| = \|y\|$. Oleh karena itu, didapatkan

$$\|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\| = \|-(-y)-x\| = \|-x-(-y)\|.$$

Kemudian, dengan teorema 2.5.5 (a), yaitu

$$x \perp_w y \;\Leftrightarrow\; \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

dapat diperoleh

$$\|x-y\|^2 = \|-(y-x)\|^2 = \|y-x\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

yang berarti bahwa $x \perp_w y$ jika dan hanya jika $y \perp_w x$.

Selanjutnya, juga diperoleh

$$\|y-(-x)\|^2 = \|y\|^2 + \|-x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2,$$

yang berarti $x \perp_w y$ jika dan hanya jika $(-x) \perp_w y$, dan

$$\|y-(-x)\|^2 = \|y+x\|^2 = \|x-(-y)\|^2 = \|x\|^2 + \|-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

yang berarti $x \perp_w y$ jika dan hanya jika $x \perp_w (-y)$.

Pada akhirnya, diperoleh

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= \|-(y-x)\|^2 = \|y-x\|^2 = \|-(-y)-x\|^2 \\ &= \|-x-(-y)\|^2 = \|-x\|^2 + \|-y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2, \end{aligned}$$

yang berarti $x \perp_w y$ jika dan hanya jika $(-x) \perp_w (-y)$.

(ii). Misalkan $y = kx$, untuk suatu $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Maka

$$\begin{aligned}
\cos \angle_w (x,y) = \frac{[x,y]_w}{\|x\|\|y\|} &= \frac{[x,kx]_w}{\|x\|\|kx\|} \\
&= \frac{\|x\|^2 + |k|^2\|x\|^2 - (1-k)^2\|x\|^2}{2|k|\|x\|^2} \\
&= \frac{1 + k^2 - (1-k)^2}{2|k|} = \frac{2k}{2|k|} = \frac{k}{|k|},
\end{aligned}$$

yang berarti $\cos \angle_w (x,y)$ bernilai 1 atau -1, sehingga diperoleh $\angle_w (x,y) = 0$ atau $\angle_w (x,y) = \pi$. $\square$

Di ruang hasil kali dalam, hukum jajar genjang mempunyai interpretasi geometris tentang jumlah kuadrat diagonal dari jajar genjang yang sama dengan dua kali jumlah kuadrat panjang sisi-sisinya. Sedangkan pada ruang bernorma, hukum tersebut mempunyai interpretasi geometris yang berbeda.

Hasil berikut ini merupakan interpretasi geometris dari "*Hukum Jajar genjang*" pada ruang bernorma.

Teorema 4.1.5. *Untuk setiap $a, b \in W$, berlaku*

$$\angle_w (a,b) + \angle_w (a,-b) = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Bukti.
($\Longrightarrow$) Misalkan $\angle_w (a,b) + \angle_w (a,-b) = \pi$, akan ditunjukkan bahwa

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Karena $\angle_w (a,b) + \angle_w (a,-b) = \pi$, maka $\angle_w (a,b) = \pi - \angle_w (a,-b)$, atau

$$\begin{aligned}
\cos \angle_w (a,b) &= \cos(\pi - \angle_w (a,-b)) \\
&= \cos \pi \cdot \cos \angle_w (a,-b) + \sin \pi \cdot \sin \angle_w (a,-b) \\
&= -\cos \angle_w (a,-b),
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\cos \angle_w (a,b) + \cos \angle_w (a,-b) = 0. \tag{4.3}$$

Kemudian, dari definisi sudut Wilson diperoleh

$$\begin{aligned}
\cos \angle_w (a,b) &+ \cos \angle_w (a,-b) \\
&= \frac{\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a-b\|^2}{2\|a\|\|b\|} + \frac{\|a\|^2 + \|-b\|^{-2} \|a-(-b)\|^2}{2\|a\|\|b\|} \\
&= \frac{2(\|a\|^2 + \|b\|^2) - (\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2)}{2\|a\|\|b\|},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

dari (4.3) dan (4.4) diperoleh $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$.

($\Longleftarrow$) Misalkan berlaku $\|a+b\|^2+\|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2+\|b\|^2)$, akan ditunjukkan $\angle_w(a,b)+\angle_w(a,-b)=\pi$.

Karena $\|a+b\|^2+\|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2+\|b\|^2)$, maka

$$\begin{aligned} 2(\|a\|^2+\|b\|^2)-\|a+b\|^2-\|a-b\|^2 &= 0 \\ \frac{\|a\|^2+\|b\|^2-\|a-b\|^2}{2\|a\|\|b\|}+\frac{\|a\|^2+\|-b\|^{-2}\|a-(-b)\|^2}{2\|a\|\|b\|} &= 0 \\ \cos\angle_w(a,b)+\cos\angle_w(a,-b) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \cos\angle_w(a,b) &= -\cos\angle_w(a,-b) \\ &= \cos(\pi-\angle_w(a,-b)), \end{aligned}$$

karena $0<\angle_w(a,b),\angle_w(a,-b)<\pi$, maka $\angle_w(a,b)=\pi-\angle_w(a,-b)$, atau

$$\angle_w(a,b)+\angle_w(a,-b)=\pi.$$

Akhir pembuktian. $\square$

Selanjutnya, dengan menggunakan definisi sudut Wilson, berikut ini didefinisikan pengertian segitiga pada ruang bernorma.

Definisi 4.1.6. (Segitiga di ruang bernorma menggunakan sudut Wilson)
Dalam ruang bernorma $W := (W, \|\cdot\|)$, notasi $\Delta_w[a,b,c]$, untuk sebarang $a,b,c\in W\setminus\{0\}$, menyatakan kumpulan $\{a,b,c\}$ yang memenuhi $a+c=b$ dan dilengkapi dengan sudut-sudut $\angle_w(a,b)$, $\angle_w(c,-a)$, $\angle_w(b,c)$. Didefinisikan

$$0<\angle_w(a,b),\angle_w(c,-a),\angle_w(b,c)<\pi.$$

Dengan menggunakan definisi segitiga tersebut di atas, dapat dibuktikan beberapa sifat elementer segitiga yang berlaku pada bidang datar, juga berlaku di ruang bernorma, di antaranya mengenai aturan Cosinus, aturan Sinus, dan Rumus sisi segitiga.

Teorema 4.1.7. (Aturan Cosinus)
Pada sebarang $\Delta_w[a,b,c]$, berlaku

$$\begin{cases} \|a\|^2=\|b\|^2+\|c\|^2-2\|b\|\|c\|\cos\angle_w(b,c), \\ \|b\|^2=\|a\|^2+\|c\|^2-2\|a\|\|c\|\cos\angle_w(c,-a), \\ \|c\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2-2\|a\|\|b\|\cos\angle_w(a,b), \end{cases}$$

Bukti. Dari definisi sudut Wilson, untuk sudut diantara vektor $b,c\in W$ diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\cos\angle_w(b,c)=\frac{\|b\|^2+\|c\|^2-\|b-c\|^2}{2\|b\|\|c\|}.$$

Karena $\|b\|\|c\| \neq 0$ dan dengan mensubstitusikan $b - c = a$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} 2\|b\|\|c\| \cos \angle_w(b,c) &= \|b\|^2 + \|c\|^2 - \|b-c\|^2 \\ \|b-c\|^2 &= \|b\|^2 + \|c\|^2 - 2\|b\|\|c\| \cos \angle_w(b,c) \\ \|a\|^2 &= \|b\|^2 + \|c\|^2 - 2\|b\|\|c\| \cos \angle_w(b,c), \end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa, diperoleh

$$\begin{aligned} \|b\|^2 &= \|a\|^2 + \|c\|^2 - 2\|a\|\|c\| \cos \angle_w (c,-a), \\ \|c\|^2 &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos \angle_w (a,b), \end{aligned}$$

Akhir pembuktian. □

Setelah mendapatkan aturan Cosinus, maka rumus tersebut dapat digunakan untuk mendapatkan aturan Sinus.

Teorema 4.1.8. (Aturan Sinus)
Pada sebarang $\Delta_w[a,b,c]$, berlaku:

$$\frac{\sin \angle_w (a,b)}{\|c\|} = \frac{\sin \angle_w (c,-a)}{\|b\|} = \frac{\sin \angle_w (b,c)}{\|a\|}.$$

Bukti. Dari Aturan Cosinus pada $\Delta_w(a,b,c)$ dan dengan memanfaatkan identitas trigonometri yang berlaku di bidang datar, diperoleh

$$\begin{aligned} &\sin^2 \angle_w (a,b) \\ = \ & 1 - \cos^2 \angle_w (a,b) = 1 - \left(\frac{\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|c\|^2}{2\|a\|\|b\|} \right)^2 \\ = \ & \frac{(2\|a\|\|b\|)^2 - (\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|c\|^2)^2}{4\|a\|^2\|b\|^2} \\ = \ & \frac{(2\|a\|\|b\| - (\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|c\|^2))(2\|a\|\|b\| + (\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|c\|^2))}{4\|a\|^2\|b\|^2} \\ = \ & \frac{(\|c\|^2 - (\|a\| - \|b\|)^2)((\|a\| + \|b\|)^2 - \|c\|^2)}{4\|a\|^2\|b\|^2}. \end{aligned}$$

Dengan memisalkan $2s := \|a\| + \|b\| + \|c\|$, diperoleh

$$\begin{aligned} &\sin^2 \angle_w (a,b) \\ = \ & \frac{(\|c\| - \|a\| + \|b\|)(\|c\| + \|a\| - \|b\|)(\|a\| + \|b\| - \|c\|)(\|a\| + \|b\| + \|c\|)}{4\|a\|^2\|b\|^2} \\ = \ & \frac{(2s - 2\|a\|)(2s - 2\|b\|)(2s - 2\|c\|)(2s)}{4\|a\|^2\|b\|^2} \\ = \ & \frac{(2s)2(s - \|a\|)2(s - \|b\|)2(s - \|c\|)}{4\|a\|^2\|b\|^2} \\ = \ & \frac{(16s)(s - \|a\|)(s - \|b\|)(s - \|c\|)}{4\|a\|^2\|b\|^2} \\ = \ & \frac{4s(s - \|a\|)(s - \|b\|)(s - \|c\|)}{\|a\|^2\|b\|^2}, \end{aligned}$$

karena $a, b \in W \setminus \{0\}$, maka $\|a\|^2\|b\|^2 \neq 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2 \angle_w (a,b) &= 4s(s-\|a\|)(s-\|b\|)(s-\|c\|) \\ \|a\|\|b\| \sin \angle_w (a,b) &= 2\sqrt{s(s-\|a\|)(s-\|b\|)(s-\|c\|)}, \end{aligned}$$

kemudian, kedua ruas dibagi dengan $\|a\|\|b\|\|c\|$, sehingga diperoleh

$$\frac{\sin \angle_w (a,b)}{\|c\|} = \frac{K}{\|a\|\|b\|\|c\|},$$

dengan $K := 2\sqrt{s(s-\|a\|)(s-\|b\|)(s-\|c\|)}$.

Selanjutnya, dengan cara yang serupa, diperoleh

$$\frac{\sin \angle_w (c,-a)}{\|b\|} = \frac{\sin \angle_w (b,c)}{\|a\|} = \frac{K}{\|a\|\|b\|\|c\|}.$$

□

Selanjutnya, disajikan fakta bahwa aturan Cosinus ekivalen dengan Rumus Sisi Segitiga.

Teorema 4.1.9. (Rumus Sisi Segitiga)
Pada sebarang $\Delta_w(a,b,c)$, Aturan Cosinus ekivalen dengan

$$\begin{cases} \|a\| = \|b\| \cos \angle_w (a,b) + \|c\| \cos \angle_w (c,-a), \\ \|b\| = \|a\| \cos \angle_w (a,b) + \|c\| \cos \angle_w (b,c), \\ \|c\| = \|a\| \cos \angle_w (c,-a) + \|b\| \cos \angle_w (b,c). \end{cases}$$

Bukti. Dari aturan Cosinus, diperoleh

$$\cos \angle_w (a,b) = \frac{\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|c\|^2}{2\|a\| \cdot \|b\|}, \quad \text{dan} \quad \cos \angle_w (c,-a) = \frac{\|a\|^2 + \|c\|^2 - \|b\|^2}{2\|a\| \cdot \|c\|}.$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} & \|b\| \cos \angle_w (a,b) + \|c\| \cos \angle_w (c,-a) \\ = & \|b\| \left(\frac{\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|c\|^2}{2\|a\| \cdot \|b\|} \right) + \|c\| \left(\frac{\|a\|^2 + \|c\|^2 - \|b\|^2}{2\|a\| \cdot \|c\|} \right) \\ = & \frac{\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|c\|^2 + \|a\|^2 + \|c\|^2 - \|b\|^2}{2\|a\|} = \frac{2\|a\|^2}{2\|a\|} = \|a\|. \end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa, diperoleh pula

$$\begin{aligned} \|b\| &= \|a\| \cos \angle_w (a,b) + \|c\| \cos \angle_w (b,c), \\ \|c\| &= \|a\| \cos \angle_w (c,-a) + \|b\| \cos \angle_w (b,c). \end{aligned}$$

Selanjutnya, dibuktikan bahwa dari Rumus sisi segitiga dapat diperoleh aturan Cosinus.

Dari rumus sisi segitiga diperoleh

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 &= \|a\|\|b\| \cos \angle_w (a,b) + \|a\|\|c\| \cos \angle_w (c,-a) \\
\|b\|^2 &= \|a\|\|b\| \cos \angle_w (a,b) + \|c\|\|b\| \cos \angle_w (b,c) \qquad (4.5) \\
\|c\|^2 &= \|a\|\|c\| \cos \angle_w (c,-a) + \|b\|\|c\| \cos \angle_w (b,c).
\end{aligned}$$

Kemudian dengan melakukan eliminasi pada persamaan (4.5), diperoleh

$$\begin{aligned}
\|b\|^2 + \|c\|^2 - \|a\|^2 &= 2\|b\|\|c\| \cos \angle_w (b,c) \\
\|a\|^2 &= \|b\|^2 + \|c\|^2 - 2\|b\|\|c\| \cos \angle_w (b,c),
\end{aligned}$$

dengan cara yang serupa, yaitu dengan perhitungan pada $\|a\|^2 + \|c\|^2 - \|b\|^2$ dan $\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|c\|^2$ akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\|b\|^2 &= \|a\|^2 + \|c\|^2 - 2\|a\|\|c\| \cos \angle_w (c,-a), \\
\|c\|^2 &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos \angle_w (a,b).
\end{aligned}$$

Jadi, telah terbukti bahwa Aturan Cosinus ekivalen dengan Rumus sisi segitiga.

□

Selanjutnya, dengan memanfaatkan aturan Cosinus, dapat dibuktikan sifat sudut-sudut pada $\Delta_w[a,b,c]$, yaitu dengan mendefinisikan segitiga samasisi dan segitiga siku-siku.

Teorema 4.1.10. (Karakteristik Segitiga Samasisi)
Pada $\Delta_w[a,b,c]$, berlaku $\|a\| = \|b\| = \|c\|$ jika dan hanya jika

$$\angle_w (b,c) = \angle_w (c,-a) = \angle_w (a,b) = \frac{\pi}{3}.$$

Bukti.
($\Longrightarrow$) Misalkan pada $\Delta_w (a,b,c)$ diberikan $\|a\| = \|b\| = \|c\|$, hal ini mengakibatkan

$$\cos \angle_w (b,c) := \frac{\|b\|^2 + \|c\|^2 - \|a\|^2}{2\|b\|\|c\|} = \frac{1}{2}.$$

Dengan cara yang serupa, yaitu perhitungan untuk $\angle_w (c,-a)$ dan $\angle_w (a,b)$, akan diperoleh $\cos \angle_w (c,-a) = \frac{1}{2}$ dan $\cos \angle_w (a,b) = \frac{1}{2}$, atau diperoleh $\angle_w (b,c) = \angle_w (c,-a) = \angle_w (a,b) = \frac{\pi}{3}$. Selanjutnya, hasil tersebut mengakibatkan

$$\angle_w (a,b) + \angle_w (b,c) + \angle_w (c,-a) = \pi.$$

($\Longleftarrow$) Sebaliknya, fakta $\angle_w (b,c) = \angle_w (c,-a) = \angle_w (a,b)$, jika dimasukkan ke dalam Aturan Sinus, akan menghasilkan kesimpulan $\|a\| = \|b\| = \|c\|$. Akhir pembuktian.

□

Berikut ini adalah sifat sudut-sudut pada $\Delta_w[a, b, c]$ siku-siku.

Teorema 4.1.11. (Karakteristik Segitiga Siku-siku)
Pada $\Delta_w[a, b, c]$*, jika* $\angle_w(b, c) = \pi/2$*, maka* $\angle_w(c, -a) + \angle_w(a, b) = \pi/2$.

Bukti.
Misalkan $\angle_w(b, c) = \pi/2$, maka $\cos \angle_w(b, c) = \cos \pi/2 = 0$, kemudian bila dimasukkan ke dalam Aturan Cosinus diperoleh $\|a\|^2 = \|b\|^2 + \|c\|^2$, sehingga dipenuhi

$$\cos \angle_w(c, -a) := \frac{\|a\|^2 + \|c\|^2 - \|b\|^2}{2\|a\|\|c\|} = \frac{2\|c\|^2}{2\|a\|\|c\|} = \frac{\|c\|}{\|a\|},$$

dan

$$\cos \angle_w(a, b) := \frac{\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|c\|^2}{2\|a\|\|b\|} = \frac{2\|b\|^2}{2\|a\|\|b\|} = \frac{\|b\|}{\|a\|}.$$

Karena $\|a\|^2 = \|b\|^2 + \|c\|^2$, maka $\cos^2 \angle_w(c, -a) + \cos^2 \angle_w(a, b) = 1$ atau $\cos^2 \angle_w(c, -a) = 1 - \cos^2 \angle_w(a, b) = \sin^2 \angle_w(a, b)$, sehingga diperoleh $\cos \angle_w(c, -a) = -\sin \angle_w(a, b)$, atau $\cos \angle_w(c, -a) = \sin \angle_w(a, b)$.

Karena $\cos \angle_w(c, -a) = -\sin \angle_w(a, b)$, atau dengan kata lain $\sin \angle_w(a, b)$ bernilai negatif, hal ini berarti bahwa besar $\angle_w(a, b)$ lebih besar dari π, maka terjadi kontradiksi. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa

$$\cos \angle_w(c, -a) = \sin \angle_w(a, b), \quad \text{dan} \quad \angle_w(c, -a) = \pi/2 - \angle_w(a, b),$$

sehingga, untuk $\Delta_w(a, b, c)$ siku-siku, dipenuhi

$$\angle_w(b, c) + (\angle_w(a, b) + \angle_w(c, -a)) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

□

Dari hasil di atas, yaitu mengenai jumlah besar ketiga sudut pada segitiga samasisi dan segitiga siku-siku, selanjutnya diperoleh hasil mengenai jumlah besar ketiga sudut segitiga untuk sebarang segitiga $\Delta_w(a, b, c)$ yang dituangkan pada teorema berikut.

Teorema 4.1.12. *Pada sebarang* $\Delta_w(a, b, c)$*, berlaku*

$$\angle_w(a, b) + \angle_w(c, -a) + \angle_w(b, c) = \pi.$$

Bukti.
Pertama-tama, dipunyai ekivalensi berikut ini, yaitu

$$\begin{aligned}
& \angle_w(a, b) + \angle_w(b, c) + \angle_w(c, -a) = \pi \\
\Leftrightarrow\ & \cos(\angle_w(a, b) + \angle_w(b, c)) = \cos(\pi - \angle_w(c, -a)), \\
\Leftrightarrow\ & \cos \angle_w(a, b) \cos \angle_w(b, c) - \sin \angle_w(a, b) \sin \angle_w(b, c) = -\cos \angle_w(c, -a).
\end{aligned}$$

Melalui pendefinisian

$$x := \frac{\|a\|}{\|c\|}, \quad \text{dan} \quad y := \frac{\|b\|}{\|c\|},$$

dan dengan membagi kedua ruas pada aturan Cosinus dengan $\|c\|^2$, maka diperoleh aturan Cosinus dalam bentuk yang lebih sederhana, yaitu

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + 1 - 2y \cos \angle_w (b, c), \\ y^2 = x^2 + 1 - 2x \cos \angle_w (c, -a), \\ 1 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \angle_w (a, b), \end{cases}$$

Selanjutnya, dari bentuk sederhana aturan Cosinus tersebut dapat diperoleh

$$\begin{aligned} & \cos \angle_w (a, b) \cos \angle_w (b, c) - \sin \angle_w (a, b) \sin \angle_w (b, c) + \cos \angle_w (c, -a) \\ = \quad & \frac{x^2 + y^2 - 1}{2xy} \cdot \frac{y^2 + 1 - x^2}{2y} + \frac{x^2 + 1 - y^2}{2x} - \frac{K^2}{\|a\|\|b\|^2\|c\|} \\ = \quad & \frac{y^4 - (1 - x^2)^2}{4xy^2} + \frac{x^2 + 1 - y^2}{2x} + \frac{[1 - (x + y)^2][1 - (x - y)^2]}{4xy^2} \\ = \quad & \frac{[1 - (x + y)^2][1 - (x - y)^2] + y^4 - (1 - x^2)^2 + 2y^2(x^2 + 1 - y^2)}{4xy^2} \\ = \quad & 0, \end{aligned}$$

atau dengan kata lain, telah terbukti bahwa jumlah besar ketiga sudut pada sebarang $\Delta_w (a, b, c)$, adalah π. $\square$

Dengan hasil mengenai jumlah besar ketiga sudut sebarang $\Delta_w[a, b, c]$ adalah π, dapat dibuktikan bahwa dari aturan Sinus dapat diperoleh aturan Cosinus. Sehingga diperoleh suatu akibat sebagai berikut.

Akibat 4.1.13. *Pada sebarang $\Delta_w[a, b, c]$, ketiga pernyataan berikut ekivalen:*

(a). *Aturan Cosinus*

(b). *Aturan Sinus*

(c). *Rumus Sisi Segitga*

Bukti. Untuk melengkapi pembuktiannya, tinggal ditunjukkan bahwa dari aturan Sinus dapat diperoleh aturan Cosinus, berikut ini adalah uraiannya.

Oleh karena $\angle_w (a, b) + \angle_w (b, c) + \angle_w (c, -a) = \pi$, maka

$$\begin{aligned} \sin (\angle_w (b, c) + \angle_w (c, -a)) &= \sin (\pi - \angle_w (b, c) = \sin \angle_w (a, b), &(4.6) \\ \cos (\angle_w (b, c) + \angle_w (c, -a)) &= \cos (\pi - \angle_w (b, c)) = - \cos \angle_w (a, b). &(4.7) \end{aligned}$$

Melalui aturan Sinus pada $\Delta_w[a, b, c]$, yaitu

$$K = \|b\|\|c\| \sin \angle_w (b, c) = \|a\|\|c\| \sin \angle_w (c, -a) = \|a\|\|b\| \sin \angle_w (a, b),$$

diperoleh

$$\begin{aligned} K^2\|a\|^2 &= \|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2 \sin^2 \angle_w (b, c) \\ K^2\|b\|^2 &= \|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2 \sin^2 \angle_w (c, -a) \\ K^2\|c\|^2 &= \|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2 \sin^2 \angle_w (a, b). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Selanjutnya, dari persamaan (4.8), diperoleh

$$\frac{K^2(\|a\|^2+\|b\|^2-\|c\|^2)}{\|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2} = \sin^2\angle_w(b,c)+\sin^2\angle_w(c,-a)-\sin^2\angle_w(a,b). \quad (4.9)$$

Dari (4.6), diperoleh

$$\begin{aligned}
\sin^2\angle_w(a,b) &= \sin^2(\angle_w(b,c)+\angle_w(c,-a)) \\
&= (\sin\angle_w(b,c)\cos\angle_w(c,-a)+\cos\angle_w(b,c)\sin\angle_w(c,-a))^2 \\
&= \sin^2\angle_w(b,c)\cos^2\angle_w(c,-a)+\cos^2\angle_w(b,c)\sin^2\angle_w(c,-a) \\
&+ 2\sin\angle_w(b,c)\cos\angle_w(c,-a)\cos\angle_w(b,c)\sin\angle_w(c,-a),
\end{aligned}$$

kemudian dengan mensubstitusikan hasil dari $\sin^2\angle_w(a,b)$ ke dalam (4.9), diperoleh

$$\begin{gathered}
\frac{K^2(\|a\|^2+\|b\|^2-\|c\|^2)}{\|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2} = \sin^2\angle_w(b,c)+\sin^2\angle_w(c,-a) \\
-2\sin\angle_w(b,c)\cos\angle_w(c,-a)\cos\angle_w(b,c)\sin\angle_w(c,-a) \\
-\sin^2\angle_w(b,c)\cos^2\angle_w(c,-a)-\cos^2\angle_w(b,c)\sin^2\angle_w(c,-a).
\end{gathered}$$

Selanjutnya dengan memanfaatkan identitas trigonometri, maka

$$\begin{aligned}
&\frac{K^2(\|a\|^2+\|b\|^2-\|c\|^2)}{\|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2} \\
=\ & -2\sin\angle_w(b,c)\cos\angle_w(c,-a)\cos\angle_w(b,c)\sin\angle_w(c,-a) \\
+\ & \sin^2\angle_w(b,c)(1-\cos^2\angle_w(c,-a))+\sin^2\angle_w(c,-a)(1-\cos^2\angle_w(b,c)) \\
=\ & -2\sin\angle_w(b,c)\cos\angle_w(c,-a)\cos\angle_w(b,c)\sin\angle_w(c,-a) \\
+\ & 2\sin^2\angle_w(b,c)\sin^2\angle_w(c,-a). \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Dari (4.7), diperoleh

$$\begin{aligned}
\cos\angle_w(a,b) &= -\cos(\angle_w(b,c)+\angle_w(c,-a)) \\
&= -(\cos\angle_w(b,c)\cos\angle_w(c,-a)-\sin\angle_w(b,c)\sin\angle_w(c,-a)) \\
&= \sin\angle_w(b,c)\sin\angle_w(c,-a)-\cos\angle_w(b,c)\cos\angle_w(c,-a),
\end{aligned}$$

kemudian dengan mensubstitusikan nilai dari $\cos\angle_w(a,b)$ ke persamaan (4.10) dan dilakukan penyederhanaan pada (4.10), diperoleh

$$\frac{K^2(\|a\|^2+\|b\|^2-\|c\|^2)}{\|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2} = 2\sin\angle_w(b,c)\sin\angle_w(c,-a)\cos\angle_w(a,b). \quad (4.11)$$

Menggunakan aturan Sinus pada $\Delta_w[a,b,c]$, diperoleh

$$\sin\angle_w(b,c) = \frac{K\|a\|}{\|a\|\|b\|\|c\|} \ \text{ dan } \ \sin\angle_w(c,-a) = \frac{K\|b\|}{\|a\|\|b\|\|c\|},$$

maka (4.11) menjadi

$$\frac{K^2(\|a\|^2+\|b\|^2-\|c\|^2)}{\|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2} = \frac{2K^2\|a\|\|b\|\cos\angle_w(a,b)}{\|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2}. \tag{4.12}$$

Dari (4.12) diperoleh

$$\|c\|^2 \;=\; \|a\|^2+\|b\|^2-2\|a\|\|b\|\cos\angle_w(a,b).$$

Dengan cara yang serupa, yaitu perhitungan pada (4.8) untuk

$$\frac{K^2(\|b\|^2+\|c\|^2-\|a\|^2)}{\|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2} \text{ dan } \frac{K^2(\|a\|^2+\|c\|^2-\|b\|^2)}{\|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2},$$

diperoleh

$$\begin{aligned}\|a\|^2 &= \|b\|^2+\|c\|^2-2\|b\|\|c\|\cos\angle_w(b,c),\\ \|b\|^2 &= \|a\|^2+\|c\|^2-2\|a\|\|c\|\cos\angle_w(c,-a).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa dari aturan Sinus dapat diperoleh aturan Cosinus. □

4.1.2 Sudut Isosceles

Bersesuaian dengan yang telah diuraikan pada subbab sebelumnya, pada subbab ini penulis awali dengan mendefinisikan fungsional Isosceles, kemudian menemukan ketaksamaan yang serupa dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz, menyajikan definisi sudut Isosceles, kemudian membangun definisi segitiga di ruang bernorma dengan sudut Isosceles, dilanjutkan dengan menyajikan hasil yang telah diperoleh mengenai sifat-sifat elementer segitiga menggunakan definisi sudut Isosceles. Untuk lebih jelasnya, penulis uraikan sebagai berikut.

Pada ruang bernorma $W = (W, \|\cdot\|)$, didefinisikan fungsional Isosceles:

$$\begin{aligned}[\cdot,\cdot]_i : W\times W &\rightarrow \mathbf{R}\\ (x,y) &\longmapsto [x,y]_i := \frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4}.\end{aligned}$$

Teorema 4.1.14. *Untuk setiap $x, y \in W$ dan $\lambda \in \mathbf{R}$, dipenuhi sifat-sifat berikut ini:*

(i). $[x,x]_i = \|x\|^2 \geq 0$ *dan* $[x,x]_i = 0 \iff x = 0$,

(ii). $[x,y]_i = [y,x]_i$,

(iii). $[\lambda x, \lambda y]_i = \lambda^2[x,y]_i$,

Bukti. Pembuktian (i), (ii), dan (iii), dapat dibuktikan melalui definisi fungsional Isosceles dan definisi norma.

(i.) Untuk $y = x$, jika disubstitusikan ke dalam $[x, y]_i$, maka diperoleh

$$4[x, x]_i = \|x+x\|^2 - \|x-x\|^2 = \|2x\|^2 = 4\|x\|^2, \quad \text{atau} \quad [x, x]_i = \|x\|^2 \geq 0.$$

Dalam ruang bernorma, dipenuhi sifat $\|x\| = 0$ jika dan hanya jiak $x = 0$. Dengan demikian, karena $[x, x]_i = \|x\|^2$, maka dipenuhi $x = 0$ jika dan hanya jika $[x, x]_i = 0$.

(ii.) Oleh karena $\|x + y\| = \|y + x\|$ dan $\|x - y\| = \|y - x\|$, maka

$$4[x, y]_i = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = \|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 = 4[y, x]_i$$

atau

$$[x, y]_i = [y, x]_i.$$

(iii.) Untuk sebarang $\lambda \in \mathbf{R}$, diperoleh

$$\begin{aligned}
[\lambda x, \lambda y]_i &= \frac{\|\lambda x + \lambda y\|^2 - \|\lambda x - \lambda y\|^2}{4} \\
&= \frac{\|\lambda(x + y)\|^2 - \|\lambda(x - y)\|^2}{4} = \frac{\lambda^2\|(x + y)\|^2 - \lambda^2\|(x - y)\|^2}{4} \\
&= \lambda^2 \frac{\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)}{4} = \lambda^2[x, y]_i.
\end{aligned}$$

□

Berikut ini salah satu sifat yang dipenuhi oleh fungsional Isosceles.

Teorema 4.1.15. *Untuk setiap $x, y \in W$, berlaku $|[x, y]_i| \leq \|x\|\|y\|$.*

Bukti. Menurut definisi fungsional Isosceles dan dengan menggunakan sifat ketaksamaan segitiga untuk norma, diperoleh

$$\begin{aligned}
|[x, y]_i| &= \frac{1}{4}\left|\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right| \\
&= \frac{1}{4}\left|(\|x + y\| + \|x - y\|)(\|x + y\| - \|x - y\|)\right| \\
&\leq \frac{1}{4}\left|\|x + y\| + \|x - y\|\right| \left|\|x + y\| - \|x - y\|\right|
\end{aligned}$$

Jika $\|x\| \geq \|y\|$, maka dipenuhi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left|\|x + y\| + \|x - y\|\right| \left|\|x + y\| - \|x - y\|\right| &\leq \frac{1}{4}(2\|x\| + 2\|y\|)\|2y\| \\
&\leq \frac{\|y\|}{2}(2\|x\|) = \|x\|\|y\|.
\end{aligned}$$

Jika $\|x\| \leq \|y\|$ dan $\|x - y\| = \|y - x\|$, maka dipenuhi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left|\|x + y\| + \|x - y\|\right| \left|\|x + y\| - \|x - y\|\right| \\
\leq\ &\frac{1}{4}\left|\|x + y\| + \|x - y\|\right| \left|\|x + y\| - \|y - x\|\right| \\
\leq\ &\frac{1}{4}(2\|x\| + 2\|y\|)\|2x\| \\
\leq\ &\frac{\|x\|}{2}(2\|y\|) = \|x\|\|y\|.
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $x, y \in W$, berlaku $|[x, y]_i| \leq \|x\|\|y\|$.

$\square$

Berikut ini adalah definisi sudut Isosceles di ruang bernorma.

Definisi 4.1.16. (Sudut Isosceles)
Misalkan diberikan ruang bernorma $W := (W, \|\cdot\|)$ atas lapangan $\mathbf{R}$. Sudut Isosceles dari vektor $x, y \in W \setminus \{0\}$ yang dinotasikan $\angle_i(x, y)$, didefinisikan sebagai

$$\angle_i(x, y) := \arccos \frac{[x, y]_i}{\|x\|\|y\|} = \arccos \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4\|x\|\|y\|}.$$

Selanjutnya, berikut ini didefinisikan segitiga menggunakan definisi sudut Isosceles.

Definisi 4.1.17. (Segitiga di ruang bernorma menggunakan sudut Isosceles)
Dalam ruang bernorma $W := (W, \|\cdot\|)$, notasi $\Delta_i[a, b, c]$, untuk sebarang $a, b, c \in W \setminus \{0\}$, menyatakan kumpulan $\{a, b, c\}$ yang memenuhi $a + c = b$ dan dilengkapi dengan sudut-sudut $\angle_i(a, b)$, $\angle_i(c, -a)$, $\angle_i(b, c)$. Didefinisikan

$$0 < \angle_i(a, b), \angle_i(c, -a), \angle_i(b, c) < \pi.$$

Dari definisi sudut isosceles dan dengan definisi segitiga dengan sudut Isosceles, diperoleh bentuk lain dari aturan Cosinus yang dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.18. (Aturan Cosinus)
Pada sebarang $\Delta_i[a, b, c]$, berlaku

$$\begin{cases} \|a\|^2 = \|b + c\|^2 - 4\|b\|\|c\| \cos \angle_i (b, c), \\ \|b\|^2 = \|c - a\|^2 - 4\|c\|\|a\| \cos \angle_i (c, -a), \\ \|c\|^2 = \|a + b\|^2 - 4\|a\|\|b\| \cos \angle_i (a, b). \end{cases}$$

Bukti. Dari definisi sudut isosceles, diperoleh

$$\cos \angle_i(b, c) = \frac{\|b + c\|^2 - \|b - c\|^2}{4\|b\|\|c\|}.$$

Karena $a + c = b$, sehingga diperoleh

$$\|b + c\|^2 - \|a\|^2 = 4\|b\|\|c\| \cos \angle_i (b, c)$$

atau

$$\|a\|^2 = \|b + c\|^2 - 4\|b\|\|c\| \cos \angle_i (b, c),$$

dengan cara yang serupa dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \|b\|^2 &= \|c - a\|^2 - 4\|c\|\|a\| \cos \angle_i (c, -a), \\ \|c\|^2 &= \|a + b\|^2 - 4\|a\|\|b\| \cos \angle_i (a, b). \end{aligned}$$

$\square$

Misalkan $\Delta_i[W]$ menyatakan himpunan semua $\Delta_i[a,b,c]$, sedemikian hingga $a,b,c \in W$, yang didefinisikan sebagai

$$\Delta_i[W] := \{\Delta_i[a,b,c] : a,b,c \in W \setminus \{0\}\}.$$

Selanjutnya, teorema berikut ini menunjukkan bahwa pada $\Delta_i[W]$ tidak memuat segitiga samasisi.

Teorema 4.1.19. *Jika $\Delta_i[a,b,c] \in \Delta_i[W]$, dengan $\angle_i(b,c) = \angle_i(a,b) = \angle_i(c,-a)$, maka $\angle_i(c,-a) = \angle_i(a,b) = \angle_i(b,c) = \pi/2$.*

Bukti. Karena $\angle_i(b,c) = \angle_i(a,b) = \angle_i(c,-a)$, mengakibatkan $\cos\angle_i(b,c) = \cos\angle_i(a,b) = \cos\angle_i(c,-a)$, maka

$$\frac{\|a+b\|^2 - \|c\|^2}{\|b\|} = \frac{\|c-a\|^2 - \|b\|^2}{\|c\|}, \quad \frac{\|a+b\|^2 - \|c\|^2}{\|a\|} = \frac{\|b+c\|^2 - \|a\|^2}{\|c\|},$$

$$\text{dan} \quad \frac{\|c-a\|^2 - \|b\|^2}{\|a\|} = \frac{\|b+c\|^2 - \|a\|^2}{\|b\|}. \tag{4.13}$$

Perhitungan pada (4.13), ekivalen dengan

$$\begin{cases} \|b\|^3 - \|a\|^3 = \|b\|\|c-a\|^2 - \|a\|\|b+c\|^2, \\ \|c\|^3 - \|a\|^3 = \|c\|\|a+b\|^2 - \|a\|\|b+c\|^2, \\ \|c\|^3 - \|b\|^3 = \|c\|\|a+b\|^2 - \|b\|\|c-a\|^2. \end{cases} \tag{4.14}$$

Penyederhanaan ekspresi pada (4.14) menghasilkan $\|b\| = \|c-a\|$, atau

$$\angle_i(c,-a) = \pi/2.$$

$\square$

Fakta pada teorema 4.1.19 tidak bersesuaian dengan definisi segitiga samasisi pada bidang datar, sehingga dapat disimpulakan bahwa pada $\Delta_i[W]$ tidak memuat segitiga samasisi. Fakta tersebut juga menimbulkan pertanyaan, berapakah jumlah besar ketiga sudut sebarang segitiga di $\Delta_i[W]$?. Hal ini bisa menjadi topik menarik untuk penelitian selanjutnya.

4.2 Segitiga di Ruang Bernorma-2

Dari pembahasan di atas, telah berhasil dibangun konsep trigonometri di ruang bernorma, yaitu mengenai sifat-sifat elementer segitiga. Selanjutnya, pada subbab ini, ditunjukkan bahwa konsep trigonometri di ruang bernorma dapat dikembangkan ke ruang bernorma-2. Yang diawali dengan membangun definisi segitiga di ruang bernorma-2.

Merujuk dari definsi 2.6.1, misalkan diberikan $(H, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah sebarang ruang bernorma-2, yang berarti didalamnya berlaku suatu fungsi $\|\cdot,\cdot\| : H \longrightarrow \mathbf{R}^+ \cup 0$, sehingga untuk setiap $x, y, x_1, x_2 \in H$ dan $r \in \mathbf{R}$ memenuhi sifat-sifat:

(i). $\|x,y\| \geq 0$ dan $\|x,y\| = 0 \iff \{x,y\}$ bergantung linier.

(ii). $\|x,y\| = \|y,x\|$

(iii). $\|rx,y\| = |r|\|y,x\|$

(iv). $\|x_1 + x_2, y\| \leq \|x_1, y\| + \|x_2, y\|$ (Ketaksamaan segitiga)

Selanjutnya, disajikan definisi sudut pada ruang bernorma-2, sebagai berikut.

Definisi 4.2.1. (Sudut D)
(Gunawan, 2008) *Misalkan diberikan ruang bernorma-2 $H := (H, \|\cdot,\cdot\|)$ atas lapangan $\mathbf{R}$, dan sekaligus $H := (H, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma. Sudut D dari vektor $x, y \in H \setminus \{0\}$ yang dinotasikan $\angle_D(x,y)$, didefinisikan sebagai*

$$\angle_D(x,y) := \arcsin \frac{\|x,y\|}{\|x\|\|y\|}.$$

Dengan menggunakan definisi sudut D, berikut ini didefinisikan segitiga pada ruang bernorma-2.

Definisi 4.2.2. (Segitiga di Ruang bernorma-2)
Dalam ruang bernorma-2 $W := (W, \|\cdot,\cdot\|)$, notasi $\Delta_D[a,b,c]$, untuk sebarang $a,b,c \in W \setminus \{0\}$, menyatakan kumpulan $\{a,b,c\}$ yang memenuhi $a + c = b$ dan dilengkapi dengan sudut-sudut $\angle_D(a,b)$, $\angle_D(c,-a)$, $\angle_D(b,c)$. Didefinisikan

$$0 < \angle_D(a,b), \angle_D(c,-a), \angle_D(b,c) < \pi.$$

Dengan menggunakan definisi segitiga dan definisi sudut di ruang bernorma-2, berikut ini dapat dibuktikan Aturan Sinus yang berlaku pada sebarang $\Delta_D[a,b,c]$.

Teorema 4.2.3. (Aturan Sinus)
Pada sebarang segitiga $\Delta_D[a,b,c]$ di ruang bernorma-2, berlaku

$$\frac{\sin \angle_D(a,b)}{\|c\|} = \frac{\sin \angle_D(c,-a)}{\|b\|} = \frac{\sin \angle_D(b,c)}{\|a\|}$$

Bukti. Dari definisi sudut D diperoleh

$$\sin \angle_D(a,b) = \frac{\|a,b\|}{\|a\|\|b\|},\ \sin \angle_D(c,-a) = \frac{\|c,a\|}{\|c\|\|a\|},\ \sin \angle_D(b,c) = \frac{\|b,c\|}{\|b\|\|c\|} \tag{4.15}$$

Selanjutnya, pada (4.15) masing-masing kedua ruasnya berturut-turut dibagi dengan $\|c\|, \|b\|,$ dan $\|a\|$, sehingga diperoleh

$$\frac{\sin \angle_D(a,b)}{\|c\|} = \frac{\|a,b\|}{\|a\|\|b\|\|c\|},\quad \frac{\sin \angle_D(c,-a)}{\|b\|} = \frac{\|c,a\|}{\|a\|\|b\|\|c\|},$$
$$\text{dan } \frac{\sin \angle_D(b,c)}{\|a\|} = \frac{\|b,c\|}{\|a\|\|b\|\|c\|}.$$

Dari sifat-sifat yang berlaku pada ruang bernorma-2, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\|a,b\| = \|c,-a\|, \|b,c\| = \|c,-a\|$, dan $\|b,c\| = \|a,b\|$. Karena $\|a,b\| = \|b,a\| = \|a+c,a\| \leq \|a,a\| + \|c,a\| = \|c,a\| = \|a,c\|$, sehingga diperoleh

$$\frac{\|a,b\|}{\|a\|\|b\|\|c\|} \leq \frac{\|a,c\|}{\|a\|\|b\|\|c\|} \quad \text{atau} \quad \frac{\sin \angle_D (a,b)}{\|c\|} \leq \frac{\sin \angle_D (c,-a)}{\|b\|}.$$

Karena $\|c,-a\| = \|b-a,-a\| \leq \|b,-a\| + \|-a,-a\| = \|-a,b\| = \|a,b\|$, maka

$$\frac{\|a,c\|}{\|a\|\|b\|\|c\|} \leq \frac{\|a,b\|}{\|a\|\|b\|\|c\|} \quad \text{atau} \quad \frac{\sin \angle_D (c,-a)}{\|b\|} \leq \frac{\sin \angle_D (a,b)}{\|c\|}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\frac{\sin \angle_D (a,b)}{\|c\|} = \frac{\sin \angle_D (c,-a)}{\|b\|}.$$

Dengan cara yang serupa, diperoleh

$$\frac{\sin \angle_D (b,c)}{\|a\|} = \frac{\sin \angle_D (c,-a)}{\|b\|} \quad \text{dan} \quad \frac{\sin \angle_D (b,c)}{\|a\|} = \frac{\sin \angle_D (a,b)}{\|c\|}.$$

Jadi, didapatkan bentuk aturan Sinus berikut ini.

$$\frac{\sin \angle_D (a,b)}{\|c\|} = \frac{\sin \angle_D (c,-a)}{\|b\|} = \frac{\sin \angle_D (b,c)}{\|a\|}$$

□

Dapat dilihat bahwa aturan Sinus pada ruang bernorma-2 yang telah diperoleh, mempunyai bentuk yang bersesuaian dengan Aturan Sinus pada ruang bernorma dengan menggunakan sudut Wilson.

Pada penelitian ini, untuk sifat-sifat elementer segitiga di ruang bernorma-2, hanya diperoleh hasil berupa bentuk Aturan Sinus. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya bisa digali lebih lanjut mengenai sifat-sifat elementer segitiga yang lain. Hasil-hasil penelitian yang telah diperoleh, penulis rangkum dalam tabel berikut :

NO	Sifat-Sifat Elementer Segitiga	RUANG BERNORMA		RUANG BERNORMA-2
		SUDUT WILSON $<_w (a,b) = \arccos \frac{\|\|a\|\|^2 + \|\|b\|\|^2 - \|\|a-b\|\|^2}{2\|\|a\|\|\|\|b\|\|}$	SUDUT ISOSCELES $<_i (a,b) = \arccos \frac{\|\|a+b\|\|^2 - \|\|a-b\|\|^2}{4\|\|a\|\|\|\|b\|\|}$	SUDUT D $<_D (a,b) = \arcsin \frac{\|\|a,b\|\|}{\|\|a\|\|\,\|\|b\|\|}$
1	Aturan Cosinus	$\|\|a\|\|^2 = \|\|b\|\|^2 + \|\|c\|\|^2 - 2\|\|b\|\|\|\|c\|\| \cos <_w (b,c)$ $\|\|b\|\|^2 = \|\|a\|\|^2 + \|\|c\|\|^2 - 2\|\|a\|\|\|\|c\|\| \cos <_w (c,-a)$ $\|\|c\|\|^2 = \|\|a\|\|^2 + \|\|b\|\|^2 - 2\|\|a\|\|\,\|\|b\|\| \cos <_w (a,b)$	$\|\|a\|\|^2 = \|\|b+c\|\|^2 - 4\|\|b\|\|\|\|c\|\| \cos <_i (b,c)$ $\|\|b\|\|^2 = \|\|c-a\|\|^2 - 4\|\|c\|\|\|\|a\|\| \cos <_i (c,-a)$ $\|\|c\|\|^2 = \|\|a+b\|\|^2 - 4\|\|a\|\|\|\|b\|\| \cos <_i (a,b)$	-
2	Aturan Sinus	$\frac{\sin <_w (a,b)}{\|\|c\|\|} = \frac{\sin <_w (c,-a)}{\|\|b\|\|} = \frac{\sin <_w (b,c)}{\|\|a\|\|}$	-	$\frac{\sin <_D (a,b)}{\|\|c\|\|} = \frac{\sin <_D (c,-a)}{\|\|b\|\|} = \frac{\sin <_D (b,c)}{\|\|a\|\|}$
3	Rumus Sisi Segitiga	$\|\|a\|\| = \|\|b\|\| \cos <_w (a,b) + \|\|c\|\| \cos <_w (c,-a)$ $\|\|b\|\| = \|\|a\|\| \cos <_w (a,b) + \|\|c\|\| \cos <_w (b,c)$ $\|\|c\|\| = \|\|a\|\| \cos <_w (c,-a) + \|\|b\|\| \cos <_w (b.c)$	-	-
4	Ekivalensi (1.2, dan 3)	Akibat 4.1.13	-	-
5	Segitiga Samasisi	Teorema 4.1.10	Tidak memuat segitiga samasisi (Teorema 4.1.19)	-
6	Segitiga Siku-siku	Teorema 4.1.11	-	-
7	Jumlah Besar Sudut Segitiga	Teorema 4.1.12	-	-

Gambar 4.1: Inventarisasi Hasil Penelitian

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat ditarik kesimpulan serta saran untuk pengembangan dan perbaikan penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Hasil-hasil yang diperoleh pada penelitian ini, diantaranya :

a. Pada ruang Bernorma

   (i.) Telah diperoleh bentuk Aturan Cosinus, Aturan Sinus, dan Rumus sisi segitiga yang berlaku pada sebarang segitiga dengan sudut Wilson, dan telah terbukti bahwa ketiga sifat elementer segitiga tersebut ekivalen. Hasil ini, sejalan dengan sifat-sifat elementer segitiga yang ada pada bidang datar.

   (ii.) Pada sebarang segitiga dengan sudut Isosceles, diperoleh Aturan Cosinus dalam bentuk yang berbeda dengan Aturan Cosinus yang berlaku pada sebarang segitiga dengan sudut Wilson, dan dapat dibuktikan bahwa di dalam himpunan yang anggotanya adalah semua segitiga dengan sudut Isosceles tidak memuat segitiga samasisi.

   (iii.) Telah dibuktikan bahwa jumlah besar sudut sebarang segitiga dengan sudut Wilson adalah sebesar π. Hasil ini, bersesuaian dengan yang ada pada bidang datar.

b. Pada ruang bernorma-2, dengan menggunakan sudut D, telah dibangun pengertian segitiga, kemudian diperoleh Aturan Sinus yang bentuknya sejalan dengan Aturan Sinus pada ruang bernorma dengan menggunakan sudut Wilson, dan sejalan dengan Aturan Sinus pada bidang datar.

5.2 Saran

Saran penulis untuk penelitian selanjutnya, antara lain:

a. Pada ruang bernorma, untuk sebarang segitiga dengan sudut Isosceles, baru diperoleh hasil mengenai bentuk Aturan Cosinus dan telah diperoleh fakta bahwa di dalam himpunan yang anggotanya adalah semua segitiga dengan sudut Isosceles tidak memuat segitiga samasisi, maka untuk penelitian selanjutnya, dengan definisi segitiga tersebut, disarankan untuk menggali sifat sudut-sudut segitiga yang lain, misalnya memeriksa keberadaan segitiga siku-siku, menghitung jumlah besar sudut segitiga, dan membuktikan sifat-sifat elementer segitiga yang lain.

b. Pada ruang bernorma-2, penulis baru berhasil memperoleh satu hasil, yaitu mengenai bentuk aturan Sinus. Oleh karena itu, masih banyak sifat-sifat elementer segitiga yang bisa digali untuk topik penelitian selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Arifin, A., (2001), *Aljabar Linier*, Edisi Kedua. Penerbit ITB, Bandung, Jawa Barat.

Eridani., (2013), *Sudut Wilson di Ruang Bernorma*, Makalah, Simposium Analisis, ITB, Bandung, Jawa Barat.

Eridani., (2017), *Konsep Trigonometri Elementer di Ruang Hasil Kali Dalam*, Makalah, Workshop on Mathematical Analysis and Its Applications, Universitas Brawijaya, Malang, Jawa Timur.

Greenberg, MJ., (1994), *Euclidean and Non-Euclidean, Development and History Geometries*, Third Edition, University Of California, Santa Cruz, W.H. Freeman and Company, New york.

Gunawan, H., dan Mashadi., (2001), *On n-Normed Space*, Int J. Math. Sci. 27. Hal.631-639.

Gunawan, H., Lindiarni,J., Neswan,O., (2008), *P-,I-,g-,and D-Angles in Normed Space*, ITB J. Sci. Vol .40 A, No. 1, 2008, 24-32.

Habiburrahman, M., (2014), *Pengertian Segitiga di Ruang Hasil Kali Dalam dan Sifat-Sifat Elementernya*, Skripsi, Universitas Airlangga, Surabaya, Jawa Timur.

Jaelani, AM., Syaifuddin,Y., Zahidah,S., (2016), *Segitiga Pada Ruang Bernorma*, Makalah, Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY 2016.

Kreyszig, E., (1978), *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Willey and Son, Inc. New York.

Teschl, G., (2010), *Topics in Real and Functional Analysis*, Fakultät für Mathematik, Oskar-Mogenstern-Platz 1, Universität Wien, 1090 Wien, Austria.

Valentine, J.E., and Wayment, S.G., (1971), *Wilson Angles In Linear Normed Spaces*, Pasific Journal Of Mathematics. Vol. 36, No. 1.

BIODATA PENULIS

Penulis bernama Deri Triana, lahir di Gresik, 28 Maret 1985, merupakan anak ketiga dari empat bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di SDN Bungah Gresik, SMPN I Bungah Gresik dan SMAN I Sidayu Gresik. Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi S1 Jurusan Matematika di Universitas Airlangga pada tahun 2003-2007, dengan Tugas Akhir bidang Analisis. Menikah pada 4 Januari 2007 dengan Eridani, beliau adalah sumber inspirasi penulis untuk selalu semangat menuntut ilmu, alhamdulillah suatu kebahagiaan yang luar biasa, kami dikarunia oleh Allah buah hati yang menyejukkan hati bernama Aisyah Dewi (11 Agustus 2008), kemudian Prabirini Hafidzah (4 Juni 2011). Selama sembilan tahun penulis mengabdikan diri sebagai fulltime mother, kemudian ketika anak-anak sudah mulai mandiri, penulis bercita-cita melanjutkan impian yang belum tercapai, oleh karena itu penulis melanjutkan studi S2 Jurusan Matematika di ITS pada tahun 2016 dengan Tesis pada bidang Analisis, dan alhamdulillah lulus pada tahun 2018. Alamat email penulis adalah : deritriana85@gmail.com.