



TESIS - SM 142501

PENGGUNAAN ALJABAR *MAX PLUS* DAN *PETRI NET* UNTUK ESTIMASI LAMANYA SISTEM PELAYANAN DAN KERJA KARYAWAN PEMASANGAN INSTALASI DI PDAM

MARGARETHA DWI CAHYANI
NRP 1213 201 004

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Subiono, M.S.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015



THESIS - SM 142501

**MAX PLUS ALGEBRA AND PETRI NET APPLICATION
FOR LENGTH ESTIMATION OF SERVICE SYSTEM
AND INSTALLATION EMPLOYEE'S WORK AT PDAM**

MARGARETHA DWI CAHYANI
NRP 1213 201 004

SUPERVISOR
Dr. Subiono, M.S.

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCE
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGI
SURABAYA
2015

**PENGGUNAAN ALJABAR MAX PLUS DAN PETRI NET UNTUK
ESTIMASI LAMANYA SISTEM PELAYANAN DAN KERJA
KARYAWAN PEMASANGAN INSTALASI DI PDAM**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

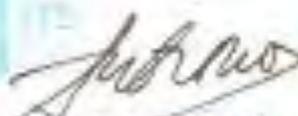
MARGARETHA DWI CAHYANI

NRP. 1213 201 004

Tanggal Ujian : 13 Januari 2015

Periode Wisuda : Maret 2015

Disetujui oleh:



Dr. Subiono, M.S.

NIP. 19570411198403 1 001

(Pembimbing)



Prof. Dr. M. Isa Irawan, M.T.

NIP. 19631225 198903 1 001

(Penguji)


Subchan, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19710513 199702 1 001

(Penguji)



Dr. Hartyanto, M.Si.

NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana,



Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.

NIP. 19640405 199002 1 001

PENGGUNAAN ALJABAR *MAX PLUS* DAN *PETRI NET* UNTUK ESTIMASI LAMANYA SISTEM PELAYANAN DAN KERJA KARYAWAN PEMASANGAN INSTALASI DI PDAM

Nama : Margaretha Dwi Cahyani
NRP : 1213 201 004
Dosen Pembimbing : Dr. Subiono, MS

ABSTRAK

Air merupakan salah satu kebutuhan utama bagi setiap orang. Distribusi air minum untuk masyarakat diatur oleh Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM). Pada penelitian ini akan dibangun alur *Petri Net* dari sistem pelayanan pasang baru, pelayanan perbaikan instalasi, penjadwalan lamanya kerja karyawan, dan sistem pelayanan pelanggan menggunakan delapan kelompok pekerja di PDAM. Selanjutnya dari alur *Petri Net* yang telah dibuat tersebut dibangun *Coverability Tree* untuk menganalisis *Liveness* dan *Deadlocks*, kemudian dibuat model Aljabar *Max Plus* nya. Proses selanjutnya yaitu dilakukan analisis dan simulasi model Aljabar *Max Plus* yang telah dibuat, kemudian membuat penyusunan hasil penelitian. Dari hasil analisis alur *Petri Net* pelayanan pasang baru, pelayanan perbaikan instalasi, penjadwalan lamanya kerja karyawan, dan pelayanan pelanggan menggunakan delapan kelompok pekerja yang telah dibuat adalah *Petri net* yang tidak pernah *Deadlocks* dan tetap *Liveness*, serta simulasi dan analisis model Aljabar *Max Plus* diperoleh bahwa untuk satu kali proses pelayanan pasang instalasi baru dari mulai pendaftaran hingga terpasangannya instalasi yang baru dibutuhkan waktu 1075 menit atau 2 hari lebih 1 jam 55 menit, untuk satu kali proses pelayanan perbaikan instalasi dibutuhkan waktu 940 menit atau 1 hari lebih 7 jam 40 menit, untuk penjadwalan lamanya kerja karyawan lapangan dibutuhkan waktu 375 menit untuk karyawan bekerja berpasangan dalam melakukan pelayanan, sedangkan untuk pelayanan pelanggan dengan menggunakan delapan kelompok pekerja membutuhkan waktu 380 menit.

Kata Kunci : Aljabar *Max Plus*, *Coverability Tree*, *Deadlocks*, *Liveness*, *Petri Net*

MAX PLUS ALGEBRA AND PETRI NET APPLICATION FOR LENGTH ESTIMATION OF SERVICE SYSTEM AND INSTALLATION EMPLOYEE'S WORK AT PDAM

Name : Margaretha Dwi Cahyani
Student Identity Number : 1213 201 004
Supervisor : Dr. Subiono, MS

ABSTRACT

Water is our society primary need. Water distribution for our society managed by Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM). In this research plan, one will try to build Petri Net's flows for system of new installation service, system of repairing service, length scheduling of employee's working, and system of field service using eight groups of workers at PDAM. Futhermore, from Petri Net's flows that has been made, it will be built coverability tree to analyze liveness and deadlocks, then create Max Plus Algebra model. Next process is analyze and simulating Max Plus Algebra model that has been made. The final step is composed the result of research. The analyze result of Petri Net's flows of system of new installation service, system of repairing service, length scheduling of employee's working, and system of field service using eight groups of workers is the Petri Net never get deadlocks and always liveness, also the simulation and analyze from Max Plus algebra model deliver that for one time of installing service system start from registration till installed the new installation need 1075 minutes or two days 1 hours and 55 minutes, one time of repairing service system need 940 minutes or one day 7 hours and 40 minutes, and for length scheduling of employee's work which employee work in pair for one time need 375 minutes, while for field service using eight groups of workers need 380 minutes.

Key Words : Coverability Tree, Deadlocks, Liveness, Max Plus Algebra, Petri Net

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan berkat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul **“PENGUNAAN ALJABAR *MAX PLUS* DAN *PETRI NET* UNTUK ESTIMASI LAMANYA SISTEM PELAYANAN DAN KERJA KARYAWAN PEMASANGAN INSTALASI DI PDAM”** ini tepat pada waktunya. Tesis ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar Magister di Program Studi Magister Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan Tesis ini tidak lepas dari bimbingan, bantuan, dan dukungan moral maupun spiritual dari banyak pihak. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu beserta keluarga tercinta yang selalu memberikan dukungan, doa, dan motivasi agar penulis dapat menyelesaikan Tesis ini.
2. Dr. Subiono, M.S. selaku dosen wali dan dosen pembimbing tesis yang telah memberikan motivasi, arahan, masukan, dan bimbingan selama penulis menempuh kuliah dan menyelesaikan Tesis ini.
3. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
4. Prof. Dr. M. Isa Irawan, M.T., Subchan, M.Sc, Ph.D , dan Dr. Hariyanto, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan juga motivasi kepada penulis sehingga Tesis ini dapat selesai tepat pada waktunya.
5. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf administrasi Program Studi Magister Matematika atas segala bantuannya.
6. Andi Asrafiani A, Restu Ria Wantika, Zunif Ermayanti, Kadek Frisca Ayu Devi, Putri Pradika Wanti, Etriana Meirista, Moh. Athoillah, Wawan Hafid dan sahabat penulis lainnya atas semua dukungan, bantuan, dan semangatnya selama proses penulisan Tesis ini.

7. Keluarga besar Pascasarjana Matematika 2013 ITS, dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan Tesis ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terima kasih.

Semoga Tuhan memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tesis ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan kedepannya. Akhirnya semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, 13 Januari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xiii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Batasan Masalah	5
1.4 Tujuan Penelitian	5
1.5 Manfaat Penelitian	6
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Sebelumnya	7
2.2 Alur Proses Pelayanan di PDAM	8
2.3 Aljabar <i>Max-Plus</i>	12
2.4 <i>Petri Net</i>	15
BAB 3 METODE PENELITIAN	29
3.1 Tahapan Penelitian	29
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN	31
4.1 <i>Petri Net</i> Alur Pelayanan Pasang Baru	31
4.2 <i>Petri Net</i> Alur Pelayanan Perbaikan Instalasi	62

4.3 <i>Petri Net</i> Alur Penjadwalan Lamanya Kerja Karyawan	103
4.4 <i>Petri Net</i> Alur Pelayanan dengan Delapan Kelompok Pekerja ..	124
BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN	145
5.1 Kesimpulan	145
5.2 Saran	146
DAFTAR PUSTAKA	147

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Penjadwalan pelayanan untuk pelanggan yang telah mendaftar pada hari Senin 15 Desember 2014 sampai hari Rabu 17 Desember 2014 dengan delapan tim karyawan lapangan	97
Tabel 4.2 Penjadwalan pelayanan untuk pelanggan yang telah mendaftar pada hari Senin 15 Desember 2014 sampai hari Rabu 17 Desember 2014 dengan sebelas tim karyawan lapangan	100

DAFTAR GAMBAR

2.1 Diagram Alur Pelayanan Pasang Baru	11
2.2 Diagram Alur Pelayanan Perbaikan Instalasi	12
2.3 Gambar contoh	17
2.4 <i>Petri Net</i> yang <i>enabled</i>	19
2.5 <i>Petri Net</i> yang tidak <i>enabled</i>	19
2.6 <i>Petri Net</i> yang <i>enabled</i>	20
2.7 <i>Petri Net</i> yang telah <i>difire</i>	20
2.8 Gambar contoh	22
2.9 Gambar contoh	23
2.10 <i>Petri Net</i> yang memiliki transisi yang <i>enabled</i> dan tidak <i>enabled</i>	24
2.11 <i>Petri Net Unbounded</i>	25
2.12 <i>Petri Net</i> setelah t_1 <i>difire</i>	26
2.13 <i>Coverability Tree</i> dari <i>Petri Net Unbounded</i> (Gambar 2.2.9)	27
4.1 <i>Petri Net</i> Terintegrasi Pasang Baru, Perbaikan Instalasi, Pelayanan Pelanggan dengan Menggunakan Delapan Kelompok Pekerja	32
4.1.1 <i>Coverability Tree Petri Net</i> alur Pelayanan Pasang Baru ketika t_1 <i>difire</i>	42
4.1.2 <i>Coverability Tree Petri Net</i> alur Pelayanan Pasang Baru ketika t_1 tidak <i>difire</i> dan t_2 <i>difire</i>	44
4.1.3 <i>Coverability Tree Petri Net</i> alur Pelayanan Pasang Baru ketika t_1 <i>difire</i> dan t_2 <i>difire</i>	46
4.2.1 <i>Coverability Tree Petri Net</i> alur Pelayanan Perbaikan Instalasi ketika t_{17} <i>difire</i>	71
4.2.2 <i>Coverability Tree Petri Net</i> alur Pelayanan Perbaikan Instalasi ketika t_{17} tidak <i>difire</i> dan t_{18} <i>difire</i>	73

4.2.3 <i>Coverability Tree Petri Net</i> alur Pelayanan Perbaikan Instalasi ketika t_{17} tidak <i>difire</i> dan t_{19} <i>difire</i>	75
4.2.4 <i>Coverability Tree Petri Net</i> alur Pelayanan Perbaikan Instalasi ketika t_{17} <i>difire</i> dan t_{18} <i>difire</i>	77
4.2.5 <i>Coverability Tree Petri Net</i> alur Pelayanan Perbaikan Instalasi ketika t_{17} <i>difire</i> dan t_{19} <i>difire</i>	79
4.3 <i>Petri Net</i> Penjadwalan Kerja Karyawan	103
4.4.1 <i>Coverability Tree Petri Net</i> Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak <i>difire</i> dan t_{31} <i>difire</i>	131
4.4.2 <i>Coverability Tree Petri Net</i> Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak <i>difire</i> dan t_{32} <i>difire</i>	132
4.4.3 <i>Coverability Tree Petri Net</i> Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak <i>difire</i> dan t_{33} <i>difire</i>	133
4.4.4 <i>Coverability Tree Petri Net</i> Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak <i>difire</i> dan t_{34} <i>difire</i>	134
4.4.5 <i>Coverability Tree Petri Net</i> Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak <i>difire</i> dan t_{35} <i>difire</i>	135
4.4.6 <i>Coverability Tree Petri Net</i> Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak <i>difire</i> dan t_{36} <i>difire</i>	136
4.4.7 <i>Coverability Tree Petri Net</i> Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak <i>difire</i> dan t_{37} <i>difire</i>	137
4.4.8 <i>Coverability Tree Petri Net</i> Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak <i>difire</i> dan t_{38} <i>difire</i>	138
4.4.9 <i>Coverability Tree Petri Net</i> Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} <i>difire</i>	138

BAB 1

PENDAHULUAN

Pada bab pertama ini dibahas mengenai latar belakang yang mendasari penelitian pada Tesis ini. Selain itu diberikan beberapa informasi tentang Alur Pelayanan Pasang Baru atau Perbaikan Instalasi di kantor PDAM. Dari informasi-informasi tersebut dibuat rumusan masalah, tujuan, dan manfaat dari penelitian ini.

1.1 Latar Belakang

Air adalah kebutuhan utama setiap orang baik untuk kebutuhan di dalam rumah tangga maupun untuk kebutuhan yang berada diluar urusan rumah tangga seperti kebutuhan akan air di sekolah, kebutuhan akan air di rumah sakit, kebutuhan air di perkantoran, kebutuhan air di tempat industri, dan kebutuhan air untuk sarana umum lainnya. Pertumbuhan penduduk pada akhir-akhir ini sangat pesat dan tingkat pencemaran air pun juga semakin meningkat, sehingga semakin hari kebutuhan akan air bersih meningkat, masyarakat semakin banyak untuk memasang instalasi PDAM terlebih masyarakat kota. Pembangunan fasilitas-fasilitas umum yang baru seperti sekolah, perkantoran, kamar mandi umum di sejumlah SPBU, pabrik-pabrik pasti memerlukan adanya kebutuhan air bersih, sehingga memerlukan pemasangan instalasi PDAM yang baru. Selain itu juga masih banyak rumah tangga yang belum mendapatkan air bersih sehingga harus memasang instalasi PDAM baru. Tidak hanya pemasangan instalasi PDAM yang baru, tetapi ada juga terjadi kerusakan pada instalasi PDAM yang dialami oleh pelanggan sehingga memerlukan perbaikan.

Pasang baru atau perbaikan instalasi PDAM memiliki beberapa golongan, antara lain: pertama adalah golongan pelayanan sosial yaitu pemasangan baru atau perbaikan instalasi PDAM yang dilakukan di sekolah, panti asuhan, rumah ibadah, rumah sakit pemerintah, dan sarana sosial lainnya; kedua adalah golongan Non Niaga yaitu pemasangan baru atau perbaikan instalasi PDAM yang dilakukan di rumah tangga dan instansi pemerintahan; ketiga adalah

golongan Niaga yaitu pemasangan baru atau perbaikan instalasi PDAM yang dilakukan di kantor swasta, praktik dokter swasta, biro jasa, rumah makan, ekspedisi, hotel, dan bentuk niaga lainnya; keempat adalah golongan Industri yaitu pemasangan baru atau perbaikan instalasi PDAM yang dilakukan di Industri kerajinan tangan, peternakan, usaha industri kecil, pabrik mobil, pertambangan, dan bentuk industri lainnya; dan yang terakhir adalah golongan khusus yaitu pemasangan baru atau perbaikan instalasi PDAM yang dilakukan di Mobil tangki. Diantara semua golongan tersebut, masing-masing golongan memiliki kebijakan yang berbeda-beda dalam menentukan kelayakan untuk pasang baru atau perbaikan instalasi (Pengumuman Nomor: 001/PENG/411.702/2011. PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk).

Mayoritas masyarakat yang menggunakan layanan PDAM tidak mengetahui dengan jelas alur dari proses pelayanan, sehingga hanya menebak lamanya waktu pelayanan dari awal pendaftaran hingga selesainya pelayanan (terpasangnya instalasi PDAM baru). Selain itu di PDAM juga terdapat masalah karyawan atau petugas yang bertugas memasang instalasi ke rumah-rumah pelanggan. Kuantitas petugas tersebut tidak sama rata atau seimbang (jumlah pemasangan berbeda-beda). Apa lagi bila terdapat kerusakan instalasi PDAM milik pelanggan.

Rencana penelitian yang akan dilakukan yaitu di PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk. Pelanggan yang menginginkan pasang baru atau perbaikan instalasi PDAM harus mengikuti prosedur proses yang ada di PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk. Alur proses pasang baru adalah sebagai berikut (sumber dari file PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk): calon pelanggan yang ingin melakukan pasang baru dapat datang langsung ke Pelayanan Pelanggan (PP) kantor PDAM Tirta Dharma kabupaten Nganjuk dengan membawa syarat pendaftaran, selanjutnya petugas memeriksa berkas persyaratan calon pelanggan. Jika belum lengkap, berkas dikembalikan dan calon pelanggan diminta untuk melengkapinya. Jika sudah lengkap, petugas memberikan Formulir Pendaftaran Pasang Baru kepada calon pelanggan. Calon pelanggan mengisi Formulir Pendaftaran, jika sudah selesai, Formulir Pendaftaran diserahkan kembali kepada petugas. Petugas memberikan Nomor Pendaftaran setelah

melakukan pemeriksaan isian Formulir Pendaftaran. Selanjutnya, berkas pendaftaran diproses oleh PDAM. Kepala Sub Bagian Pelanggan menerima berkas pendaftaran pemasangan sambungan baru dari calon pelanggan, lalu dibuatkan SPL (Surat Permohonan menjadi Langganan Air Minum) dan PL (Pernyataan Pelanggan) yang kemudian ditandatangani oleh calon pelanggan bermaterai. Calon pelanggan kemudian melakukan pembayaran biaya pendaftaran ke Pelaksana Keuangan(Kasir) dengan membawa SPL dan PL. Kemudian bukti Penerimaan Pendaftaran berupa SPL dan PL diserahkan kepada Kepala Sub Bagian Pelanggan untuk diteruskan kepada Kepala Sub Bagian Perencanaan. Kepala Sub Bagian Perencanaan memberikan surat perintah kepada petugas perencanaan untuk meninjau lokasi calon pelanggan. Jika hasil survey menunjukkan adanya permasalahan sehingga pemasangan sambungan baru ke lokasi calon pelanggan tidak bisa dilayani, maka PDAM akan memberikan Surat Pemberitahuan kepada calon pelanggan mengenai hal tersebut. Jika hasil survey tidak ada permasalahan, maka petugas memberikan laporan hasil survey kepada Kepala Sub Bagian Perencanaan. Kepala Sub Bagian Perencanaan membuat Biaya Pemasangan dengan membuat ABP (Anggaran Biaya Pemasangan) dan RKP (Rekapitulasi Keperluan Peralatan), baik Sambungan Rumah maupun Sambungan Pipa jika memang diperlukan atas persetujuan Direktur dan kemudian diteruskan kepada Kepala Sub Bagian Pelanggan. Kepala Sub Bagian Pelanggan menyerahkan ABP dan RKP kepada bagian Pembukuan sebagai dasar pembuatan rekening dan selanjutnya rekening diserahkan kepada Kepala Sub Bagian Keuangan sebagai dasar bukti penerimaan biaya sambungan baru pada saat calon pelanggan melakukan pembayaran. Setelah calon pelanggan menyetujui Bukti Persetujuan Penyambungan Instalasi (BPPI) dan melunasi biaya pemasangan, Kepala Sub Bagian Palanggan meregister SPL, PL, dan BPPI kemudian meneruskan ABP dan RKP kepada Kepala bagian Teknik. Setelah menerima ABP dan RKP Kepala Bagian Teknik membuat surat perintah kerja kepada Kepala Sub Bagian Transmisi dan Distribusi untuk melaksanakan pemasangan baru. Kepala Sub Bagian Transmisi dan Distribusi mengajukan Bon Permintaan Barang (BPB) kepada Pengurus Gudang/Barang sesuai dengan RKP yang dibuat oleh Kepala Sub Bagian Perencanaan, kemudian memberikan perintah kepada Petugas

Lapangan untuk melakukan pemasangan sambungan pasang baru ke lokasi calon pelanggan. Sedangkan untuk alur proses perbaikan instalasi PDAM adalah sebagai berikut: pelanggan menyampaikan pengaduan secara langsung atau melalui telepon atas permasalahan yang dihadapi. Kepala Sub Bagian Pelanggan menerima pengaduan dari pelanggan atau petugas PDAM yang dituangkan dalam Laporan Kerusakan/Pengaduan ke Kepala Sub Bagian Meter Segel. Kepala Sub Bagian Meter Segel setelah menerima Laporan Kerusakan/Pengaduan dari Kepala Sub Bagian Pelanggan segera memeriksa jenis kerusakan. Jika kerusakan terjadi pada jaringan pipa dinas atau pipa persil karena bukan kesalahan pelanggan, maka penanganan dilakukan secara langsung. Namun jika kerusakan disebabkan oleh kesalahan pelanggan maka pelanggan diminta untuk membayar dahulu barang yang rusak ke Pelaksanan Keuangan (Kasir). Setelah pelanggan melunasi biaya penggantian barang yang rusak, Kepala Sub Bagian Meter Segel mengajukan BPP (Bon Permintaan Barang) ke Pengurus Barang/Gudang dan selanjutnya memberikan surat perintah kepada Petugas Perbaikan Lapangan untuk melaksanakan perbaikan serta membuat Berita Acara Penyelesaian Pengaduan Pelanggan yang disampaikan kepada Kepala Sub Bagian Pelanggan dan arsip. Penyelesaian atas penanganan kerusakan langsung yang terjadi pada jaringan pipa dinas atau pipa persil karena bukan kesalahan pelanggan, maka dibuatkan Berita Acara Penyelesaian yang kemudian akan dilakukan perbaikan oleh pihak PDAM.

Pada tesis ini akan dibuat alur *Petri Net* dari sistem pelayanan pasang baru, perbaikan instalasi, penjadwalan lamanya kerja karyawan, dan pelayanan lapangan menggunakan delapan kelompok pekerja. Dari alur *Petri Net* yang dibuat tersebut dibangun *Coverability Tree* untuk mengetahui *Liveness* dan *Deadlocksnya*, kemudian dibangun modelnya dengan menggunakan Aljabar *Max Plus*

1.2 Rumusan masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah:

- a. Bagaimana membangun alur *Petri Net* untuk sistem pelayanan pasang baru, perbaikan instalasi, penjadwalan lamanya kerja karyawan, dan pelayanan lapangan menggunakan delapan kelompok pekerja agar tidak terjadi *Deadlocks* dan tetap *Liveness*.
- b. Bagaimana membangun model Aljabar *Max Plus* dari alur *Petri Net* yang telah dibuat.

1.3 Batasan masalah

Untuk membatasi ruang lingkup penelitian maka digunakan beberapa batasan berikut ini.

- a. *Study* kasus dilakukan di kantor PDAM TIRTA DHARMA Kabupaten Nganjuk
- b. Waktu istirahat dan libur diabaikan
- c. Semua karyawan diasumsikan masuk
- d. Pemasangan alat atau instalasi diasumsikan paling cepat selama 3 jam
- e. Golongan yang dianalisa pada penelitian ini adalah golongan Non Niaga Rumah Tangga.
- f. Jumlah karyawan lapangan adalah 16 orang, dengan ketentuan untuk menyelesaikan satu proyek pasang baru atau perbaikan instalasi dibutuhkan dua orang tenaga.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

- a. Diperoleh alur *Petri Net* untuk sistem pelayanan pasang baru, perbaikan instalasi, penjadwalan lamanya kerja karyawan, dan pelayanan lapangan menggunakan delapan kelompok pekerja yang tidak *deadlocks* dan tetap *liveness*.
- b. Diperoleh model Aljabar *Max Plus* dari alur *Petri Net* yang telah dibuat.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang akan diberikan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Pengaturan sistem pelayanan dapat dimaksimalkan sehingga dapat meningkatkan kinerja karyawan.
- b. Pengaturan jadwal shift kerja karyawan pasang baru atau perbaikan kerusakan instalasi dapat dimaksimalkan sehingga dapat meningkatkan kinerja karyawan.
- c. Analisa pemodelan dan penjadwalan yang digunakan dapat dikembangkan untuk penelitian lebih lanjut, sehingga pada penelitian berikutnya dapat lebih memberi manfaat bagi pihak yang membutuhkan.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bab ini dijelaskan beberapa pustaka dan dasar teori yang dikaji untuk digunakan dalam pembahasan selanjutnya. Diantaranya adalah: penelitian sebelumnya yang dijadikan dasar untuk melakukan penelitian yang diusulkan, definisi Aljabar *Max Plus*, pengertian Matriks dan Graf pada Aljabar *Max Plus*, pengertian *Petri Net*, pengertian *Deadlocks* dan *Liveness* serta pengertian dan cara membangun *Coverability Tree* dari alur *Petri Net* yang sedang dibuat.

2.1 Penelitian Sebelumnya

Penelitian mengenai penjadwalan telah banyak dilakukan, namun penjadwalan dengan menggunakan Aljabar *Max-Plus* dan *Petri Net* baru sedikit diterapkan. Penelitian sebelumnya yang dijadikan sebagai dasar untuk melakukan penelitian yang diusulkan ini adalah: penelitian oleh Adzkiya (2008) tentang membangun model *Petri Net* lampu lalu lintas dan simulasinya. Adzkiya (2008) menggunakan *Petri Net* untuk menentukan penjadwalan nyala lampu lalu lintas dengan tujuan memberikan kepastian waktu tunggu pengguna dan mengurangi waktu tunggu di persimpangan. Talehala (2010) menggunakan Aljabar *Max Plus* untuk membuat desain penjadwalan kegiatan pembelajaran sekolah pada kelas *moving* dan hasil yang didapatkan adalah optimalisasi jumlah tenaga pengajar dan ruang belajar serta dapat menempatkan rombongan belajar ke kelas yang tepat. Suyanto (2011) menggunakan Aljabar *Max Plus* untuk membuat desain penjadwalan kegiatan belajar mengajar di Sekolah Menengah Atas Katolik (SMAK) St. Louis I, Surabaya yang mengacu pada pembagian yang merata dalam hal bobot kesulitan materi pelajaran. Penelitian lainnya yaitu penelitian yang dilakukan oleh Widayanti (2013) yaitu menggunakan *Petri Net* dan Aljabar *Max Plus* untuk merancang penjadwalan sistem pelayanan pasang baru atau perubahan daya listrik dan penjadwalan kerja karyawan pemasangan instalasi di Perusahaan Listrik Negara (PLN). Penelitian yang dilakukan Widayanti untuk layanan pasang baru atau perubahan daya listrik menggunakan sistem yang sama sehingga

alur *Petri Net* yang terbentuk juga sama. Dari kajian penelitian-penelitian sebelumnya tersebut, maka diajukan penelitian tentang penggunaan *Petri Net* dan Aljabar *Max Plus* untuk penjadwalan sistem pelayanan dan penjadwalan kerja karyawan pemasangan instalasi di PDAM, dengan sistem pelayanan untuk pasang baru dan perbaikan instalasi menggunakan sistem yang berbeda.

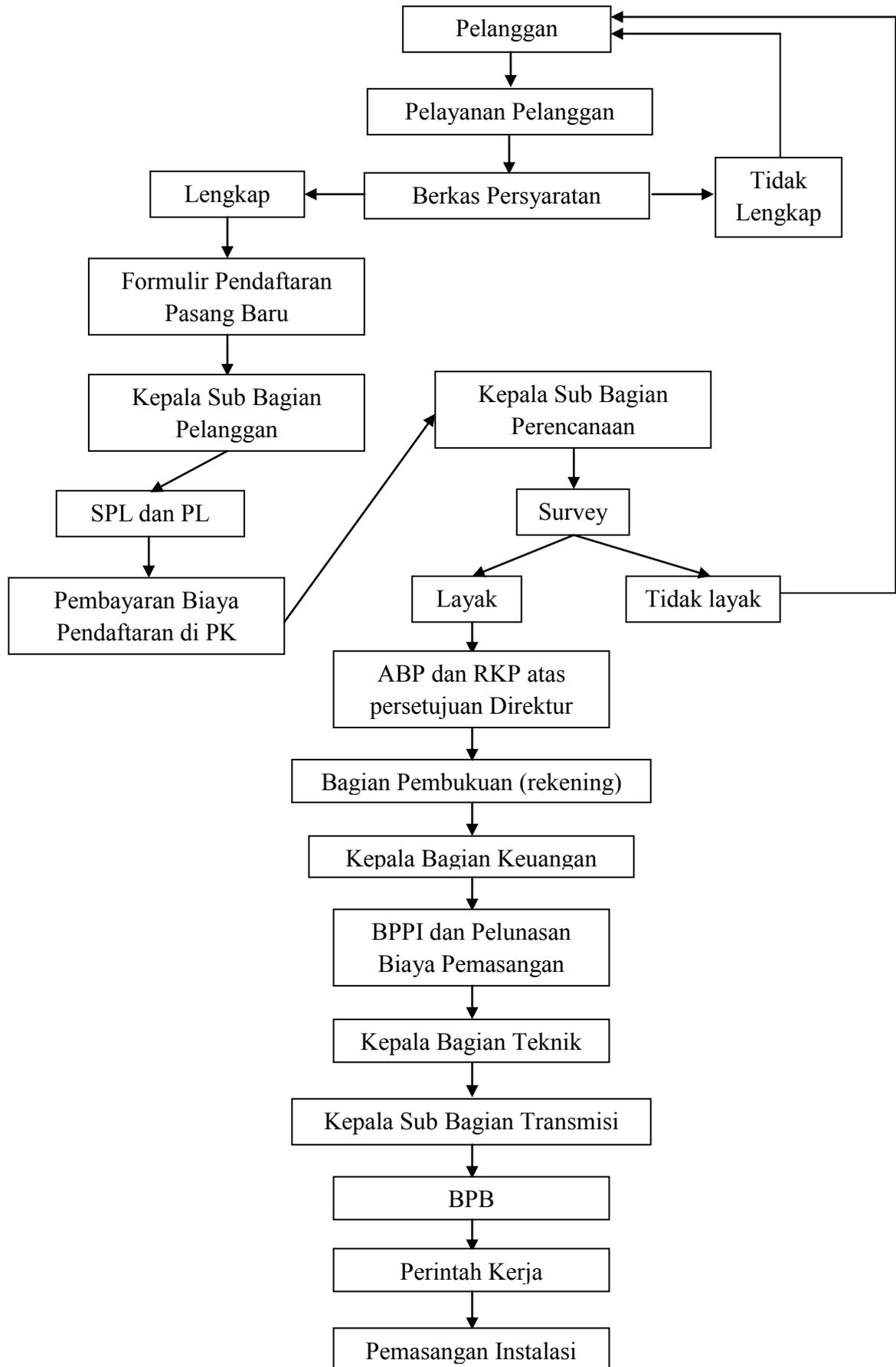
2.2 Alur Proses Pelayanan di PDAM

Alur proses pelayanan di PDAM berbeda-beda menurut kebijakan masing-masing kantor PDAM. Alur proses pelayanan yang berlaku di kantor PDAM Kabupaten Nganjuk berbeda dengan alur proses di kantor PDAM di Kabupaten/Kota lain. Selain itu kriteria uji kelayakan tempat di Kabupaten Nganjuk juga berbeda dengan Kabupaten/Kota lain karena kondisi daerah yang berbeda. Berikut ini diberikan alur pelayanan di PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk. Calon pelanggan yang menginginkan pasang baru atau perbaikan instalasi harus mengikuti prosedur proses yang ada di PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk. Alur proses pasang baru adalah sebagai berikut (sumber dari file PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk): calon pelanggan yang ingin melakukan pasang baru dapat datang langsung ke Pelayanan Pelanggan (PP) kantor PDAM Tirta Dharma kabupaten Nganjuk dengan membawa syarat pendaftaran, selanjutnya petugas memeriksa berkas persyaratan calon pelanggan. Jika belum lengkap, berkas dikembalikan dan calon pelanggan diminta untuk melengkapinya. Jika sudah lengkap, petugas memberikan Formulir Pendaftaran Pasang Baru kepada calon pelanggan. Calon pelanggan mengisi Formulir Pendaftaran, jika sudah selesai, Formulir Pendaftaran diserahkan kembali kepada petugas. Petugas memberikan Nomor Pendaftaran setelah melakukan pemeriksaan isian Formulir Pendaftaran. Selanjutnya, berkas pendaftaran diproses oleh PDAM. Kepala Sub Bagian Pelanggan menerima berkas pendaftaran pemasangan sambungan baru dari calon pelanggan, lalu dibuatkan SPL (Surat Permohonan menjadi Langganan Air Minum) dan PL (Pernyataan Pelanggan) yang kemudian ditandatangani oleh calon pelanggan bermaterai. Calon pelanggan kemudian melakukan pembayaran biaya pendaftaran ke Pelaksana Keuangan(Kasir) dengan membawa SPL dan PL. Kemudian bukti Penerimaan Pendaftaran berupa SPL dan

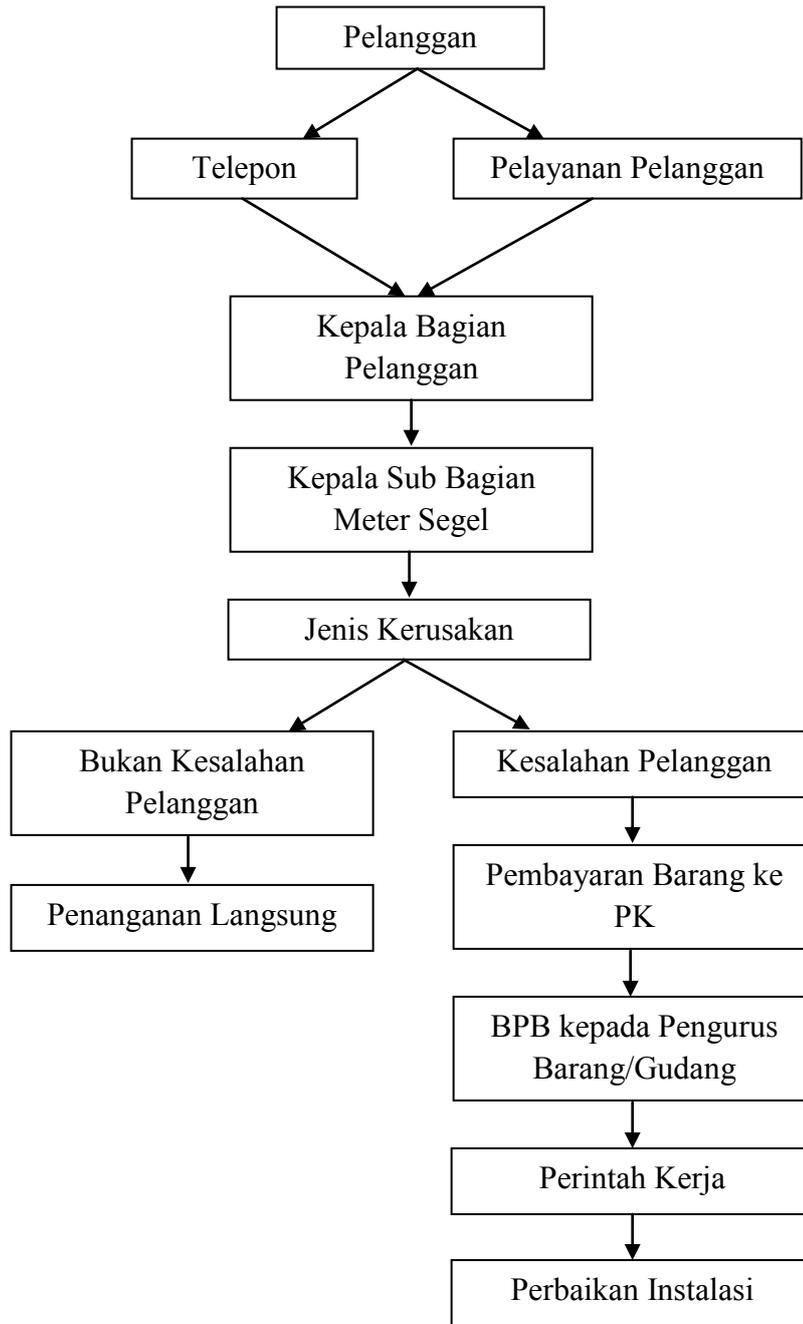
PL diserahkan kepada Kepala Sub Bagian Pelanggan untuk diteruskan kepada Kepala Sub Bagian Perencanaan. Kepala Sub Bagian Perencanaan memberikan surat perintah kepada petugas perencanaan untuk meninjau lokasi calon pelanggan. Jika hasil survey menunjukkan adanya permasalahan sehingga pemasangan sambungan baru ke lokasi calon pelanggan tidak bisa dilayani, maka PDAM akan memberikan Surat Pemberitahuan kepada calon pelanggan mengenai hal tersebut. Jika hasil survey tidak ada permasalahan, maka petugas memberikan laporan hasil survey kepada Kepala Sub Bagian Perencanaan. Kepala Sub Bagian Perencanaan membuat Biaya Pemasangan dengan membuat ABP (Anggaran Biaya Pemasangan) dan RKP (Rekapitulasi Keperluan Peralatan), baik Sambungan Rumah maupun Sambungan Pipa jika memang diperlukan atas persetujuan Direktur dan kemudian diteruskan kepada Kepala Sub Bagian Pelanggan. Kepala Sub Bagian Pelanggan menyerahkan ABP dan RKP kepada bagian Pembukuan sebagai dasar pembuatan rekening dan selanjutnya rekening diserahkan kepada Kepala Sub Bagian Keuangan sebagai dasar bukti penerimaan biaya sambungan baru pada saat calon pelanggan melakukan pembayaran. Setelah calon pelanggan menyetujui Bukti Persetujuan Penyambungan Instalasi (BPPI) dan melunasi biaya pemasangan, Kepala Sub Bagian Palanggan meregister SPL, PL, dan BPPI kemudian meneruskan ABP dan RKP kepada Kepala bagian Teknik. Setelah menerima ABP dan RKP Kepala Bagian Teknik membuat surat perintah kerja kepada Kepala Sub Bagian Transmisi dan Distribusi untuk melaksanakan pemasangan baru. Kepala Sub Bagian Transmisi dan Distribusi mengajukan Bon Permintaan Barang (BPB) kepada Pengurus Gudang/Barang sesuai dengan RKP yang dibuat oleh Kepala Sub Bagian Perencanaan, kemudian memberikan perintah kepada Petugas Lapangan untuk melakukan pemasangan sambungan pasang baru ke lokasi calon pelanggan. Sedangkan untuk alur proses perbaikan instalasi PDAM adalah sebagai berikut: pelanggan menyampaikan pengaduan secara langsung ke Pelayanan Pelanggan atau melalui telepon atas permasalahan yang dihadapi. Kepala Sub Bagian Pelanggan menerima pengaduan dari pelanggan atau petugas PDAM yang dituangkan dalam Laporan Kerusakan/Pengaduan ke Kelapa Sub Bagian Meter Segel. Kepala Sub Bagian Meter Segel setelah menerima Laporan Kerusakan/Pengaduan dari Kepala Sub

Bagian Pelanggan segera memeriksa jenis kerusakan. Jika kerusakan terjadi pada jaringan pipa dinas atau pipa persil karena bukan kesalahan pelanggan, maka penanganan dilakukan secara langsung. Namun jika kerusakan disebabkan oleh kesalahan pelanggan maka pelanggan diminta untuk membayar dahulu barang yang rusak ke Pelaksanan Keuangan (Kasir). Setelah pelanggan melunasi biaya penggantian barang yang rusak, Kepala Sub Bagian Meter Segel mengajukan BPB (Bon Permintaan Barang) ke Pengurus Barang/Gudang dan selanjutnya memberikan surat perintah kepada Petugas Perbaikan Lapangan untuk melaksanakan perbaikan serta membuat Berita Acara Penyelesaian Pengaduan Pelanggan yang disampaikan kepada Kepala Sub Bagian Pelanggan dan arsip. Penyelesaian atas penanganan kerusakan langsung yang terjadi pada jaringan pipa dinas atau pipa persil karena bukan kesalahan pelanggan, maka dibuatkan Berita Acara Penyelesaian yang kemudian akan dilakukan perbaikan oleh pihak PDAM.

Proses pelayanan pada PDAM memiliki ketentuan berlaku yang berbeda-beda disetiap kantor PDAM. Dari keterangan tentang alur pelayanan pasang baru atau perbaikan instalasi yang telah diberikan pada paragraf pertama dibuat dalam bentuk diagram alur, maka secara garis besar hasilnya ditunjukkan pada gambar sebagai berikut ini:



Gambar 2.1 Diagram Alur Pelayanan Pasang Baru



Gambar 2.2 Diagram Alur Pelayanan Perbaikan Instalasi

2.3 Aljabar Max Plus

Pada subbab ini diberikan definisi mengenai Aljabar Max Plus. Sebelum mendefinisikan mengenai Aljabar Max Plus, pertama akan didefinisikan terlebih dahulu mengenai pengertian semiring (Subiono, 2013)

Definisi 2.1

Suatu semiring $(\mathcal{S}, +, \times)$ adalah suatu himpunan tak kosong \mathcal{S} disertai dengan dua operasi biner $+$ dan \times , yang memenuhi aksioma berikut:

- i. $(\mathcal{S}, +)$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral 0 , yaitu $\forall x, y, z \in \mathcal{S}$ memenuhi:

$$x + y = y + x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + 0 = 0 + x = x$$

- ii. (\mathcal{S}, \times) adalah semigrup dengan elemen satuan 1 , yaitu $\forall x, y, z \in \mathcal{S}$ memenuhi:

$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

$$x \times 1 = 1 \times x$$

- iii. Sifat penyerapan elemen netral 0 terhadap operasi \times , yaitu $\forall x \in \mathcal{S}$ memenuhi:

$$x \times 0 = 0 \times x = 0$$

- iv. Operasi \times distribusi terhadap $+$, yaitu $\forall x, y, z \in \mathcal{S}$ memenuhi:

$$(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$$

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$$

Selanjutnya diberikan pengertian dari aljabar Max Plus (Subiono,2013)

Definisi 2.2

Diberikan $\mathbb{R}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan \mathbb{R} adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$. Pada \mathbb{R}_ε didefinisikan operasi berikut: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$

$$x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x, y\} \text{ dan } x \otimes y \stackrel{\text{def}}{=} x + y$$

Selanjutnya ditunjukkan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring dengan elemen netral ε dan elemen satuan $e = 0$, kerana untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}_\varepsilon$ berlaku :

- i. $x \oplus y = \max\{x, y\} = y \oplus x$

$$(x \oplus y) \oplus z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, \max\{y, z\}\} = x \oplus (y \oplus z)$$

$$x \oplus \varepsilon = \max\{x, -\infty\} = \max\{-\infty, x\} = \varepsilon \oplus x = x$$

- ii. $(x \otimes y) \otimes z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \otimes (y \otimes z)$
 $x \otimes e = x + 0 = 0 + x = e \otimes x = x$
- iii. $x \otimes \varepsilon = x + (-\infty) = -\infty + x = \varepsilon \otimes x$
- iv. $(x \oplus y) \otimes z = \max\{x, y\} + z = \max\{x + z, y + z\} = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$
 $x \otimes (y \oplus z) = x + \max\{y, z\} = \max\{x + y, x + z\}$
 $= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Pangkat yang digunakan dalam Aljabar *Max Plus* biasanya diperkenalkan dengan menggunakan sifat assosiatif. Himpunan bilangan asli digabung dengan nol dinotasikan oleh \mathbb{N} sementara itu didefinisikan untuk $x \in \mathbb{R}_{max}$ dan untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 0$.

$$x^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_n$$

$$= \underbrace{x + x + \dots + x}_n = n \times x$$

Jika $n = 0$ maka $x^{\otimes 0} = 0$. Misalkan A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ maka dapat ditulis

$$\underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_n = A^{\otimes n}$$

Selanjutnya diberikan sebuah algoritma dalam menentukan nilai karakteristik dan vektor karakteristik. Misalkan A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ dan misalkan

$$x(k+1) = A \otimes x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Dimana x adalah perputaran vektor dengan $x(0) \neq \varepsilon$, sehingga algoritmanya adalah sebagai berikut: (Subiono, 2013)

- i. Ambil sembarang $x(0) \neq \varepsilon$
- ii. Lakukan iterasi dengan menggunakan persamaan (2.1) sampai diperoleh hasil yang periodik $x(p) = c \otimes x(q)$ dengan $p > q \geq 0$ dan c adalah bilangan real
- iii. Hitung nilai karakteristik $\lambda = \frac{c}{p-q}$
- iv. Hitung vektor karakteristik ,dimana $i \geq p - q$

$$\bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1))$$

Matriks dan Graf dalam Aljabar Max Plus

Misalkan matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ suatu graf berarah dari matriks A adalah $G(A) = (E, V)$. Graf berarah $G(A)$ mempunyai n titik, dengan himpunan semua titik dari $G(A)$ dinyatakan oleh V . Suatu garis dari titik j ke titik i ada bila $a_{ij} \neq \varepsilon$, garis ini dinotasikan oleh (j, i) . Himpunan semua garis dari graf berarah $G(A)$ dinotasikan dengan E . Bobot dari garis yang menghubungkan titik j ke titik $i(j, i)$ adalah nilai dari a_{ij} yang dinotasikan oleh $w(j, i) = a_{ij} \in \mathbb{R}_{max}$. Bila $a_{ij} = \varepsilon$, maka garis yang menghubungkan titik j ke titik $i(j, i)$ tidak ada (Subiono, 2013). Matrik pada aljabar *Max Plus* secara umum dapat dinotasikan sebagai berikut :

$$x(p + 1) = A \otimes x(p) \quad (2.2)$$

Keterangan:

$x(p + 1)$: suatu keadaan pada waktu ke $(p + 1)$

A : matriks $(n \times n)$

$x(p)$: suatu keadaan pada waktu ke (p)

Operasi \oplus dan \otimes pada matriks atas aljabar maxplus didefinisikan sebagai berikut:

1. $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$
2. $(A \otimes B)_{ij} = \oplus (A_{ik} \otimes B_{kj})$

Operasi \oplus dan \otimes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \otimes e \oplus b \otimes g & a \otimes f \oplus b \otimes h \\ c \otimes e \oplus d \otimes g & c \otimes f \oplus d \otimes h \end{bmatrix}$$

Dengan matriks identitas untuk aljabar maxplus adalah:

$$\begin{bmatrix} 0 & - \\ - & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Petri Net

Petri Net adalah Graf Bipartisi. Himpunan V dipartisi menjadi dua himpunan bagian P dan T yang masing-masing menyatakan *place* dan transisi. *Place* dapat berfungsi sebagai input atau output suatu transisi. *Place* sebagai input menyatakan keadaan yang harus dipenuhi agar transisi dapat terjadi. Setelah

transisi terjadi maka keadaan akan berubah. *Place* yang menyatakan keadaan tersebut adalah output dari transisi.

Definisi 2.3 (Cassandras and Lafortune, 2008) *Petri net* adalah 4-tuple (P, T, A, w) dengan

- P : himpunan berhingga *place*, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$,
- T : himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$,
- A : himpunan *arc*, $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$,
- w : fungsi bobot, $w : A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$.

Berdasarkan definisi maka himpunan *place* dan transisi tidak harus berupa himpunan berhingga melainkan bisa berupa himpunan tak hingga terhitung (*countable sets*).

Petri net dapat digambarkan sebagai graf berarah. *Node/Vertex/Simpul* dari graf berupa *place* yang diambil dari himpunan *place* P atau transisi yang diambil dari himpunan transisi T . Pada *Petri net*, graf diperbolehkan menggunakan beberapa *arc* untuk menghubungkan dua *node* atau ekuivalen dengan memberikan bobot ke setiap *arc* yang menyatakan jumlah *arc*. Struktur ini dikenal dengan struktur *multigraph*.

Dalam membahas representasi *Petri net* secara grafik akan digunakan notasi $I(t_j)$ dan $O(t_j)$ yang masing-masing menyatakan himpunan *place* input dan output ke transisi t_j . Secara matematis definisi tersebut dapat ditulis menjadi persamaan berikut. (Cassandras and Lafortune, 2008)

$$\begin{aligned} I(t_j) &= \{p_i : (p_i, t_j) \in A\} \\ O(t_j) &= \{p_i : (t_j, p_i) \in A\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Notasi yang sama dapat digunakan untuk mendeskripsikan input dan output transisi untuk *place* p_i sebagai berikut (Adzkiya, 2008).

$$\begin{aligned} I(p_i) &= \{t_j : (t_j, p_i) \in A\} \\ O(p_i) &= \{t_j : (p_i, t_j) \in A\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Grafik *Petri net* terdiri dari dua macam *node* yaitu lingkaran dan garis. Lingkaran menyatakan *place* sedangkan garis menyatakan transisi. *Arc* disimbolkan dengan panah yang menghubungkan *place* dan transisi. *Arc* yang menghubungkan *place* p_i ke transisi t_j berarti $p_i \in I(t_j)$. Jika bobot *arc* dari *place* p_i ke transisi t_j adalah k ditulis $w(p_i, t_j) = k$ maka terdapat k *arc* dari *place* p_i ke transisi t_j atau sebuah *arc* dengan bobot k .

Contoh 2.1:

Misal terdapat *Petri Net* yang menggambarkan alur dari calon pelanggan pasang baru yang akan mendaftar sebagai pelanggan PDAM. $P0$ menunjukkan calon pelanggan, $P1$ adalah Bagian Pelayanan Pelanggan, sedangkan $T0$ adalah proses pemeriksaan berkas-berkas pendaftaran.



Gambar 2.3

Dari gambar 2.3, $P0$ dan $P1$ bisa ditulis $P = \{P0, P1\}$ dan satu transisi yaitu $T0$, atau bisa ditulis $T = \{T0\}$. *Arc* dinyatakan dengan pasangan berurutan. Elemen pertama menyatakan asal dan elemen kedua menyatakan tujuan misalnya *arc* dari place $P0$ ke transisi $T0$ ditulis $(P0, T0)$ yang menggambarkan calon pelanggan datang ke kantor PDAM membawa berkas-berkas pendaftaran dan $(T0, P1)$ menyatakan *arc* dari transisi $T0$ ke place $P1$ yang menggambarkan berkas pendaftaran dari calon pelanggan diterima oleh bagian Pelayanan Pelanggan PDAM. Secara lengkap ditulis $A = \{(P0, T0), (T0, P1)\}$. Bobot *arc* dari place $P0$ ke transisi $T0$ adalah satu yaitu $w(P0, T0) = 1$ yang berarti bahwa loket pendaftaran pasang baru di PDAM hanya menerima satu berkas pendaftaran dari calon pelanggan yang datang untuk setiap satu kali proses pelayanan dan bobot dari transisi $T0$ ke place $P1$ adalah satu yaitu $w(T0, P1) = 1$ yang berarti bahwa bagian Pelayanan Pelanggan hanya memeriksa satu berkas pendaftaran untuk

setiap satu kali proses pelayanan pendaftaran. Pada contoh ini $I(T0) = \{P0\}$ dan $O(T0) = \{P1\}$.

Yang perlu diperhatikan adalah antara *Petri net* yang *pure* dan *impure*. *Petri net* disebut *pure* jika tidak ada *place* yang menjadi input dan output untuk suatu transisi. Jika terdapat *place* yang menjadi input dan output untuk transisi tertentu maka *Petri net* dikatakan *impure*. Secara formal *petri net* pure dapat ditulis (Adzkiya, 2008)

$$\nexists p_i \in P, t_j \in T \ni \{(p_i, t_j), (t_j, p_i)\} \subseteq A \quad (2.5)$$

Tanda Petri Net dan Ruang Keadaan

Token adalah sesuatu yang diletakkan di *place* yang menyatakan terpenuhi tidaknya suatu kondisi. Secara grafik token digambarkan dengan *dot* dan diletakkan di dalam *place*. Jika jumlah token besar maka dituliskan dengan angka.

Penanda (*marking*) x pada *petri net* adalah fungsi $x = P\{0,1,2, \dots\}$. Penanda dinyatakan dengan vektor yang berisi bilangan bulat taknegatif yang menyatakan jumlah token yaitu $x = [x(p_1), x(p_2), \dots, x(p_n)]^T$. Jumlah elemen x sama dengan banyak *place* di *Petri net*. Elemen ke- i pada vektor ini merupakan jumlah token pada *place* p_i , $x(p_i) \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

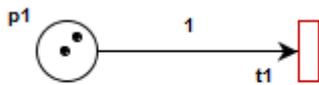
Petri net bertanda (*marked*) adalah 5-tuple (P, T, A, w, x_0) dimana (P, T, A, w) adalah *Petri net* dan x_0 adalah penanda awal. Seperti pemodelan sistem pada umumnya, maka harus didefinisikan keadaan (*state*) pada *Petri net*. Keadaan pada *Petri net* adalah penanda *Petri net*. Jumlah token pada *place* adalah sebarang bilangan bulat taknegatif, tidak harus terbatas (*bounded*). Secara umum jumlah penanda yang mungkin adalah takhingga. Ruang keadaan (*state space*) X pada *Petri net* bertanda dengan n *place* didefinisikan oleh semua vektor berdimensi n dengan elemen bilangan bulat tak negatif, sehingga $X = \{0,1,2, \dots\}^n$. Jika semua keadaan yang diperlukan sudah terpenuhi maka transisi dapat terjadi. Dalam hal ini keadaan merupakan *place* input dari transisi. Bobot *arc* dari *place* input ke transisi menunjukkan jumlah token minimum di *place* agar

transisi *enabled*. Jika semua *place* input mempunyai token lebih dari atau sama dengan jumlah token minimum yang dibutuhkan maka transisi *enabled*.

Definisi 2.4 (Cassandras and Lafortune , 2008) Fungsi perubahan keadaan pada Petri Net bertanda (P, T, A, w, x_0) yaitu $f = \{0,1,2, \dots\}^n \times T \rightarrow \{0,1,2, \dots\}^n$ terdefinisi untuk transisi $t_j \in T$ jika dan hanya jika

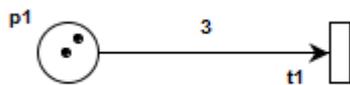
$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j), \forall p_i \in I(t_j) \quad (2.6)$$

Contoh 2.2 : Perhatikan gambar *Petri Net* di bawah ini:



Gambar 2.4 *Petri Net* yang *enabled*

Petri net pada gambar 2.4 dalam kondisi *enabled* karena $x(p_1) > w(p_1, t_1)$, hal ini terjadi misalkan sudah ada dua orang calon pelanggan (p_1) yang sudah mengantri untuk memasukkan berkas pendaftaran pasang baru dan proses pelayanan bisa berjalan karena dalam setiap satu kali proses hanya satu berkas pendaftaran saja yang bisa masuk ke loket.



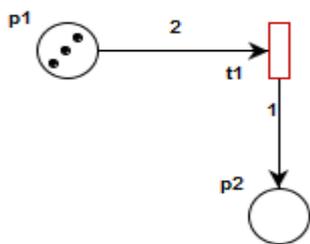
Gambar 2.5 *Petri Net* yang tidak *enabled*

Petri net pada gambar 2.5 dalam kondisi tidak *enabled* karena $x(p_1) < w(p_1, t_1)$, hal ini terjadi misalkan sudah ada dua orang calon pelanggan (p_1) yang sudah mengantri untuk memasukkan berkas pendaftaran pasang baru, tetapi proses pelayanan belum bisa dilakukan karena setiap satu kali proses pelayanan bisa berjalan dengan syarat jika ada tiga berkas pendaftaran yang masuk ke loket.

Dinamika Petri Net

Hanya transisi *enabled* yang dapat *difire*. Transisi *difire* saat *event* yang dinyatakan oleh transisi terjadi. Semua token di *place* input dikurangi/diambil sebanyak bobot *arc* yang menghubungkannya. Jumlah token di *place* input setelah dikurangi adalah bilangan bulat taknegatif. Token di *place* output ditambah sebanyak bobot *arc* yang menghubungkannya.

Contoh 2.3 : Misal ada tiga calon pelanggan pasang baru instalasi PDAM (p_1) yang sudah mengantri di loket pendaftaran, proses pelayanan dapat mulai berjalan karena setiap satu kali proses pemasukan berkas pendaftaran, loket menerima sebanyak dua buah berkas. Sedangkan (p_2) adalah bagian Pelayanan Pelanggan yang menerima satu berkas pendaftaran untuk diperiksa pada setiap satu kali proses pelayanan.

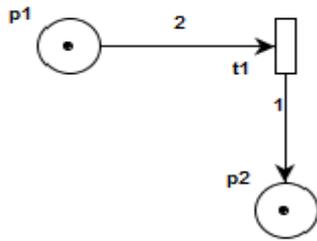


Gambar 2.6 Petri Net yang *enabled*

Pada Petri net gambar 2.6, semua transisi berstatus *enabled*. Keadaan awal dari Petri net ini

$$x_0 = \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Proses selanjutnya t_1 akan *difire* yaitu saat dua berkas pendaftaran sudah masuk ke loket pendaftaran dan bagian Pelayanan Pelanggan (p_2) mulai memeriksa berkas satu persatu. Maka hasilnya adalah



Gambar 2.7 Petri Net yang telah difire

Petri net gambar 2.7 menunjukkan bahwa t_1 telah difire, maka jumlah token pada p_1 dikurangi dengan dua karena $w(p_1, t_1) = 2$, sehingga jumlah token pada p_1 akhirnya berjumlah satu. Sedangkan pada p_2 terjadi penambahan jumlah token sebanyak satu karena $w(t_1, p_2) = 1$, sehingga pada p_2 terdapat token berjumlah satu, atau dapat dikatakan

$$x_1 = \begin{bmatrix} x(p_1) \\ x(p_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Representasi Petri Net Menggunakan Matriks

Petri net dapat direpresentasikan dalam dua matriks yang disebut *backward incidence* dan *forward incidence*. Kedua matriks ini masing-masing berukuran $n \times m$ dengan n adalah jumlah *place* dan m adalah jumlah transisi. Elemen matriks ini adalah bilangan bulat taknegatif.

Matriks *backward incidence* dan *forward incidence* masing-masing serupa dengan definisi *place* input dan output. Elemen pada matriks *backward incidence* merupakan bobot *arc* yang menghubungkan *place* ke transisi. Jika tidak ada *arc* yang menghubungkan *place* ke transisi maka bobot *arc* diisi nol. Sehingga *place* ini adalah *place* input dari transisi. Definisi serupa juga digunakan untuk matriks *forward incidence*. Bedanya elemen pada matriks ini merupakan bobot *arc* yang menghubungkan transisi ke *place* sehingga merupakan *place* output dari transisi. Matriks *backward incidence* dinotasikan dengan $A_b(i, j)$ sedangkan *forward incidence* dinotasikan dengan $A_f(i, j)$.

Matriks A disebut matriks *combined incidence* atau *matriks incidence*. Elemen matriks ini adalah bilangan bulat yang merupakan selisih bobot *arc* *place* input dan output yaitu $A(i, j) = w(t_j, p_i) - w(p_i, t_j)$. Atau dengan kata lain nilai

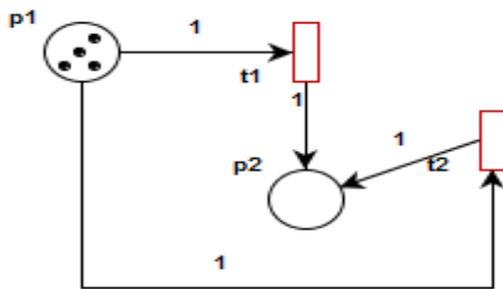
dari matriks A adalah matriks *Forward incidence* dikurangi dengan matriks *backward incidence* (Cassandras and Lafortune , 2008).

Sedangkan untuk mencari x' setelah proses *fire* adalah

$$x(p + 1) = x(p) + Au \quad (2.7)$$

dengan u menyatakan matriks $m \times 1$, dengan elemen 0 dan 1. Dimana elemen 1 hanya muncul pada transisi yang di*fire*.

Contoh 2.4 : Mencari keadaan x_1 saat t_1 di*fire* dengan menggunakan matriks *Backward incidence* dan *Forward Incidence*. Misalkan sudah ada empat calon pelanggan p_1 yang mengantri untuk memasukkan berkas pendaftaran pasang baru. Ada dua loket (t_1 dan t_2) dengan ketentuan setiap satu kali proses pelayanan, setiap loket hanya menerima satu berkas pendaftaran yang kemudian akan diperiksa oleh bagian Pelayanan Pelanggan (p_2). Gambar alur *Petri net* nya adalah sebagai berikut :



Gambar 2.8

Petri net pada gambar 2.8 adalah kondisi awal dengan $x_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, kemudian t_1

di*fire* atau dengan kata lain loket pertama dibuka, maka

Matriks *Backward incidence*:

$$A_b = w(p_i, t_j)$$

$$A_b(1,1) = w(p_1, t_1) = 1$$

$$A_b(1,2) = w(p_1, t_2) = 1$$

$$A_b(2,1) = w(p_2, t_1) = 0$$

$$A_b(2,2) = w(p_2, t_2) = 0$$

Sehingga $A_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriks *Forward incidence* :

$$A_f = w(t_j, p_i)$$

$$A_f(1,1) = w(t_1, p_1) = 0$$

$$A_f(1,2) = w(t_1, p_2) = 1$$

$$A_f(2,1) = w(t_2, p_1) = 0$$

$$A_f(2,2) = w(t_2, p_2) = 1$$

Sehingga $A_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

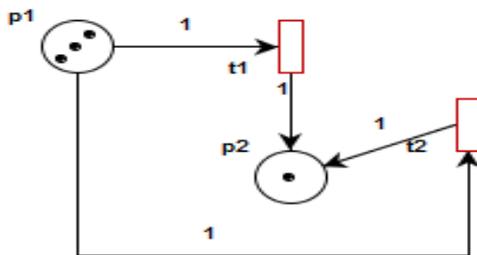
Matriks $A =$ matriks *Forward* - matriks *Backward* = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_0 + Au = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pada program Petri net setelah t_1 *difire*, ternyata hasilnya sama dengan hitungan

manual yaitu: $x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$



Gambar 2.9

Liveness dan Deadlocks

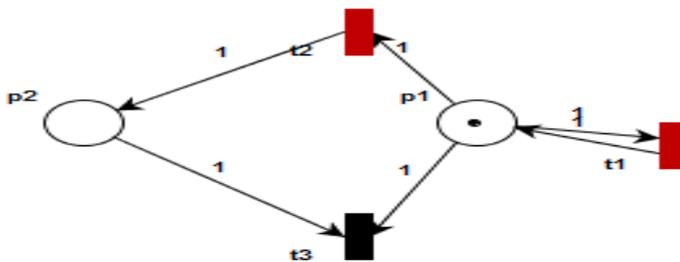
Sebuah keadaan dikatakan *deadlocks* ketika transisi tertentu atau himpunan transisi tertentu pada *Petri Net* tidak dapat *difire* sama sekali. *Deadlocks* dapat disebabkan karena persaingan mendapatkan token. Ketika semua *place* tidak mendapatkan token maka transisi tidak ada yang dapat *difire* sehingga terjadi *deadlocks*. Transisi yang tidak berhubungan dengan *deadlocks* disebut *live*. Istilah *liveness* dapat diartikan sebagai transisi yang mungkin *enable*. Idealnya setiap transisi pada *petri net* dapat *difire*. Hal ini menjamin *deadlocks* tidak terjadi.

Definisi 2.4 (Cassandras and Lafortune , 2008) Sebuah *Petri Net* dengan keadaan awal x_0 disebut *live* jika terdapat beberapa *sample path* sedemikian sehingga selalu terdapat transisi yang dapat *difire* untuk setiap keadaan yang dapat dicapai dari x_0

Diberikan keadaan awal x_0 , berikut merupakan klasifikasi dari *liveness* dari suatu transisi *Petri Net* (Cassandras and Lafortune , 2008)

- i. *Dead* atau *LO-Live*, jika transisi tidak pernah dapat *difire* dengan keadaan awal ini.
- ii. *L1-Live*, jika terdapat beberapa urutan pemfiringan dari x_0 sedemikian hingga transisi ini dapat *difire* paling tidak sekali.
- iii. *L2-Live*, jika transisi dapat *difire* paling tidak sebanyak k kali dengan k adalah bilangan bulat positif.
- iv. *L3-Live*, jika terdapat tak hingga urutan pemfiringan dengan pemfiringan transisi sebanyak tak hingga.
- v. *Live* atau *L4-Live*, jika transisi ini *L1-Live* untuk semua kemungkinan keadaan yang dapat dicapai dari x_0 .

Contoh 2.5 :



Gambar 2.10 *Petri Net* yang memiliki transisi yang *enabled* dan tidak *enabled*

Transisi t_3 merupakan transisi yang *dead* karena tidak pernah dapat *difire*. Transisi t_2 merupakan *L1-Live* karena hanya dapat *difire* sekali. Transisi t_1 merupakan *L3-Live* karena dapat *difire* sampai tak hingga. Tidak ada *L4-Live* karena terdapat t_3 tidak dapat *difire*.

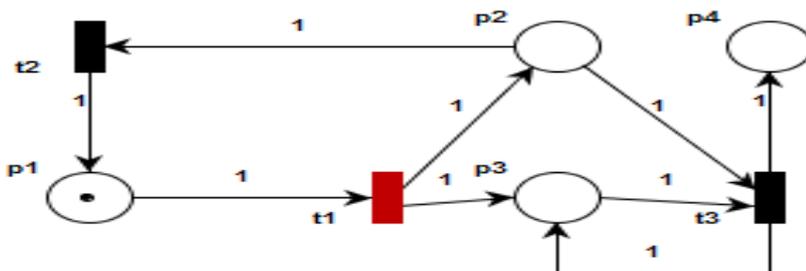
Coverability Tree

Coverability Tree merupakan teknik yang digunakan untuk menyelesaikan beberapa aspek analisis pada sistem *event* diskrit. Setiap node pada *coverability tree* menyatakan keadaan dari *Petri net*. *Coverability tree* dapat dibangun dari keadaan awal sebuah *Petri Net*. Keadaan awal *Petri Net* didefinisikan sebagai *node root*. Anak dari *node root* merupakan keadaan yang dapat dicapai dari keadaan awal dengan memfire sebuah transisi (jika hanya terdapat satu transisi *enable*) atau memfire salah satu transisi (jika terdapat beberapa transisi yang *enable*). Keadaan-keadaan ini dihubungkan ke *node root* dengan *edge*. Setiap *edge* pada *Coverability tree* mempunyai bobot sebuah transisi yaitu transisi yang *enable* dan siap untuk difire untuk mencapai keadaan tersebut.

Pemilihan transisi yang akan difire sangat mempengaruhi *coverability tree*. Jika terdapat beberapa transisi yang *enable* maka pemfirean transisi harus dilakukan dengan memilih salah satu dari beberapa transisi yang *enable* tersebut. Pemilihan transisi yang akan difire satu sama lain menghasilkan keadaan yang berbeda pada matriks yang menyusun *coverability tree*. Sebuah alur *Petri Net* dikatakan *Liveness* atau tidak *Deadlock* ketika *coverability tree* membentuk *looping*. *Coverability tree* yang membentuk *looping* disebabkan dari pemfirean transisi pada alur *Petri Net* yang tidak pernah berhenti.

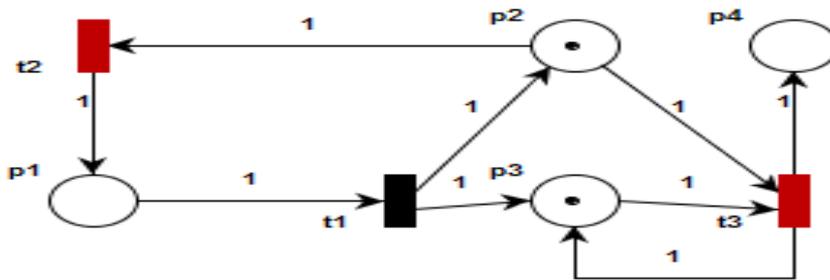
Banyak *node* dan *edge* pada *coverability tree* tidak berhingga jika *Petri Net* tidak terbatas (*unbounded*) yaitu terdapat *place* yang tidak terbatas. Dengan menggunakan metode membangun *coverability tree* yang dibahas pada (Widayanti, 2013) dapat dicari representasi hingga dari *coverability tree*.

Contoh 2.6 : Perhatikan gambar 2.11 di bawah ini



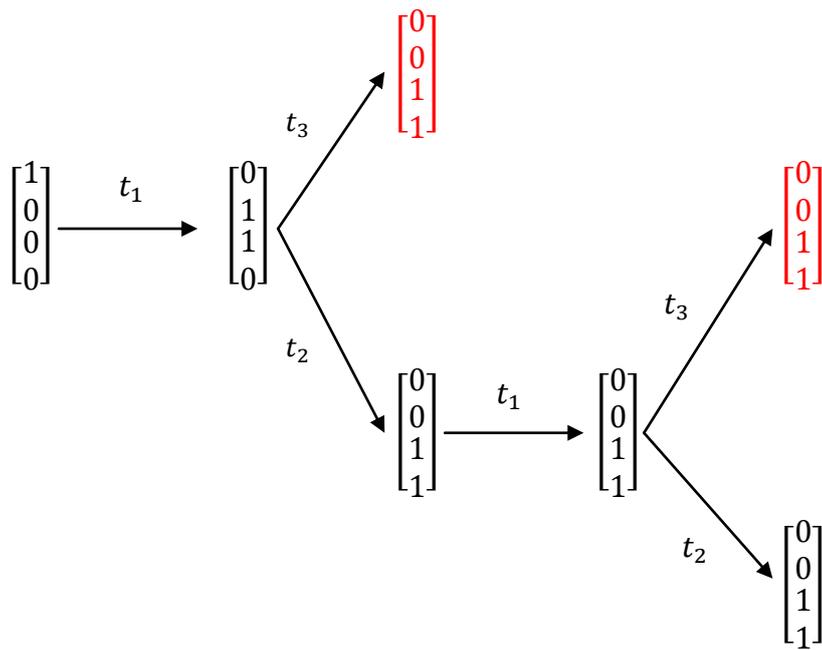
Gambar 2.11 *Petri Net Unbounded*

Keadaan awal Petri Net pada *coverability tree* $x_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ dimana keadaan awal tersebut sebagai *root*. Jelas terlihat bahwa pada keadaan ini hanya transisi t_1 yang *enabled*. Setelah transisi t_1 *difire* keadaan *Petri Net* menjadi $x_1 = [0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$ dan keadaan berubah terdapat dua transisi yang dapat *difire* yaitu t_2 dan t_3 seperti yang ditunjukkan gambar 2.12 berikut.



Gambar 2.12 *Petri Net* setelah t_1 *difire*

Hal ini dapat digambarkan pada *coverability tree* dengan menuliskan $x_{1,2} = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ dan $x_{1,3} = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ sebagai anak dari keadaan x_1 . Tidak ada transisi yang *enabled* pada keadaan $x_{1,3}$ sehingga keadaan ini tidak mempunyai anak sedangkan keadaan $x_{1,2}$ mempunyai sebuah anak yaitu keadaan $x_{1,2,1} = [0 \ 1 \ 2 \ 0]^T$ yang merupakan keadaan setelah transisi t_1 *difire*. Pada keadaan $x_{1,2,1}$ transisi t_2 dan t_3 *enabled* dan jika *difire* diperoleh keadaan masing-masing $x_{1,2,1,2} = [1 \ 0 \ 2 \ 0]^T$ dan $x_{1,2,1,3} = [0 \ 0 \ 2 \ 1]^T$. Terlihat bahwa ada *looping* ketika t_1 dan t_2 *difire* secara bergantian tidak pernah berhenti (*liveness*). Sehingga hasil *coverability tree* untuk *Petri Net* gambar 2.11 adalah sebagai berikut



Gambar 2.13 *Coverability Tree* dari *Petri Net Unbounded* (Gambar 2.11)

BAB 3

METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan metodologi penelitian Tesis yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada Tesis ini.

3.1 Tahapan Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi tahapan-tahapan sebagai berikut:

A. Mempelajari Teori Aljabar *Max Plus* dan *Petri Net*

Pada tahap ini diawali dengan mempelajari teori-teori Aljabar *Max Plus*, *Petri Net* serta mempelajari penelitian sebelumnya yaitu: Membangun model *Petri Net* dan Simulasinya (Adzkiya, 2008), Model Penjadwalan Kegiatan Pembelajaran Sekolah pada Kelas *Moving* dengan Menggunakan Aljabar *Max Plus* (Talehala, 2010), Penjadwalan Kegiatan Belajar Mengajar di Sekolah Menengah Atas Katolik (SMAK) St. Louis I Surabaya (Suyanto, 2011), dan Penjadwalan Sistem Pelayanan dan Kerja Karyawan di PLN (Widayanti, 2013).

B. Pengumpulan data

Pada tahap ini dilakukan pengambilan beberapa data di kantor PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk seperti alur atau urutan pelanggan dari permintaan pemasangan baru atau perbaikan instalasi PDAM, alur atau urutan pekerja dari menerima adanya permintaan pemasangan baru atau perbaikan instalasi PDAM sampai terpasang atau instalasi sudah baik, data lama waktu yang diperlukan pekerja pada masing-masing bagian untuk menyelesaikan pekerjaannya pada setiap pelanggan.

C. Penyusunan Alur *Petri Net*

Menyusun alur *Petri Net* dari data yang telah dikumpulkan yaitu alur pelayanan pasang baru, pelayanan perbaikan instalasi, penjadwalan kerja karyawan, dan pelayanan dengan menggunakan delapan kelompok pekerja.

Place menunjukkan keadaan tentang keberadaan pelanggan sedangkan transisi menunjukkan keadaan sedang berlangsungnya sebuah proses.

- D. Menganalisis *Liveness* dan *Deadlocks* dari masing-masing alur *Petri Net*.
- E. Membuat model Aljabar *Max Plus* dari alur *Petri Net* yang telah dibuat.
- F. Analisis hasil simulasi model Aljabar *Max Plus* yang telah dibuat.
- G. Penyusunan paper
- H. Seminar Nasional
- I. Penyusunan Hasil Penelitian

Pada tahap ini dilakukan penulisan laporan hasil penelitian yang dilakukan mulai dari tahap study literatur, pengambilan data, pengolahan data dan analisis hasil simulasi model *Petri Net* dan Aljabar *Max Plus* dari penjadwalan pelayanan pasang baru, penjadwalan pelayanan perbaikan instalasi, penjadwalan kerja karyawan, dan penjadwalan pelayanan lapangan menggunakan delapan kelompok pekerja.

BAB 4

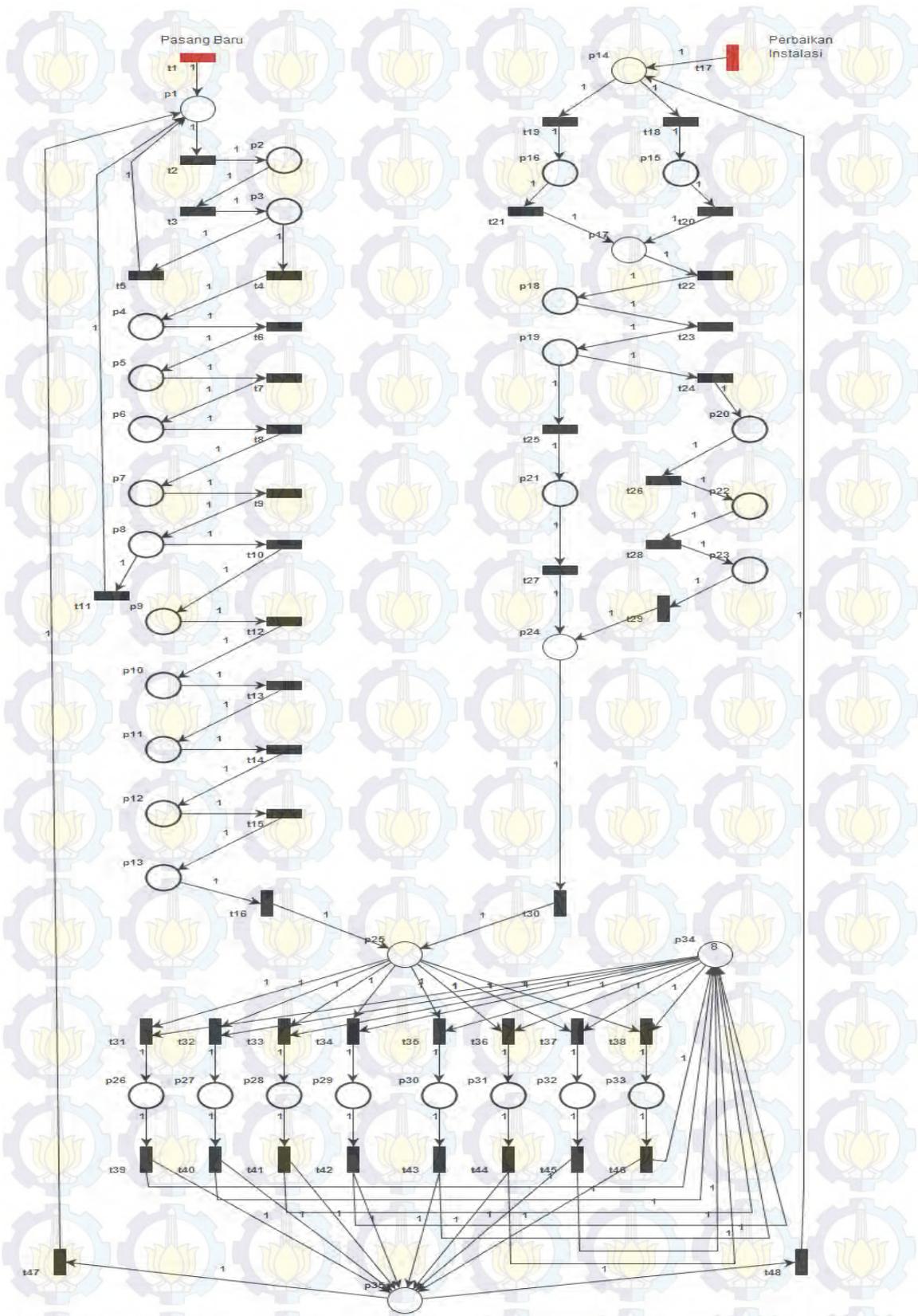
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai alur pelayanan pasang baru, pelayanan perbaikan instalasi, penjadwalan lamanya kerja karyawan, dan pelayanan pelanggan dengan menggunakan delapan kelompok pekerja di PDAM dengan menggunakan *Petri Net*. Selanjutnya dari *Petri Net* yang telah dibuat tersebut akan dianalisis tentang *Liveness* dan *Deadlocks*nya. Kemudian setelah diperoleh alur *Petri Net* yang tidak *Deadlocks* akan dibangun model Aljabar *Max Plus* nya.

4.1 *Petri Net* Alur Pelayanan Pasang Baru

Pada alur pelayanan pasang baru yang telah dijelaskan di subbab 2.2 dapat dibuat alur *Petri Net*. Sebelum membuat alur *Petri Net*, diberikan terlebih dahulu keterangan mengenai variabel yang digunakan dalam *Petri Net*. $p_i, i = 1, 2, 3, \dots$ merupakan variabel *place* atau sebuah keadaan dimana pelanggan berada, sedangkan $t_j, j = 1, 2, 3, \dots$ merupakan variabel transisi atau sebuah keadaan dimana sedang terjadi sesuatu pada pelanggan (alur proses yang sedang dialami oleh pelanggan)

Variabel *place* (p_i) digambarkan berupa lingkaran sedangkan variabel transisi (t_j) digambarkan sebagai persegi panjang berwarna hitam. Peletakan token pada sebuah *place* diletakkan diawal *place* yaitu tempat dimana pelanggan memulai proses pendaftaran pada pelayanan. Bobot yang digunakan pada alur *Petri Net* merupakan lama waktu yang dibutuhkan untuk setiap proses pelayanan. Sehingga *Petri Net* dari alur pelayanan di PDAM diberikan sebagai berikut:



Gambar 4.1: Petri Net Terintegrasi Pasang Baru, Perbaikan Instalasi, Pelayanan Pelanggan dengan Menggunakan Delapan Kelompok Pekerja

Keterangan Gambar 4.1 Petri Net Pelayanan Pasang Baru

t_1 = proses antrian calon pelanggan

t_2 = proses berkas persyaratan pasang baru masuk

t_3 = pemeriksaan berkas persyaratan

t_4 = pengisian formulir pendaftaran oleh calon pelanggan

t_5 = pengembalian berkas persyaratan ke calon pelanggan

t_6 = berkas pendaftaran diserahkan ke Kepala Sub Bagian Pelayanan Pelanggan

t_7 = pembuatan SPL dan PL kemudian diserahkan ke Pelaksana Keuangan

t_8 = pembayaran biaya pendaftaran kemudian SPL dan PL diserahkan ke Kepala Sub Bagian Perencanaan

t_9 = survey lokasi calon pelanggan

t_{10} = pembuatan ABP dan RKP kemudian diserahkan ke Bagian Pembukuan

t_{11} = pemberitahuan hasil survey lokasi tidak layak kepada calon pelanggan

t_{12} = pembuatan rekening kemudian diserahkan ke Kepala Sub Bagian Keuangan

t_{13} = pembuatan BPPI, pelanggan melunasi biaya pemasangan, ABP dan RKP diserahkan ke Kepala Bagian Teknik

t_{14} = pembuatan surat perintah untuk Kepala Sub Bagian Transmisi dan Distribusi untuk melaksanakan pemasangan

t_{15} = proses pembuatan BPB dan surat perintah untuk petugas lapangan

t_{16} = proses mempersiapkan alat-alat untuk pasang baru

t_i = proses perjalanan menuju ke lokasi pelanggan dan pengerjaan permintaan pelanggan oleh tim i dengan $31 \leq i \leq 38$

t_{i+38} = proses tim i telah selesai mengerjakan permintaan pelanggan, konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan selesai, dan perjalanan kembali ke kantor PDAM dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{47} = pelanggan keluar dari antrian

p_1 = calon pelanggan antri memasukkan berkas persyaratan

p_2 = pelayanan pelanggan

p_3 = berkas persyaratan yang sudah diperiksa

p_4 = berkas pendaftaran yang siap untuk diserahkan kepada Kepala Sub Bagian Pelayanan Pelanggan

- p_5 = Kepala Sub Bagian Pelanggan yang telah menerima berkas pendaftaran
 p_6 = Bagian Pelaksana Keuangan yang telah menerima SPL dan PL
 p_7 = Kepala Sub Bagian Perencanaan yang telah menerima SPL dan PL
 p_8 = Hasil Survey dari petugas perencanaan
 p_9 = Bagian Pembukuan yang telah menerima ABP dan RKP
 p_{10} = Kepala Sub Bagian Keuangan yang telah menerima rekening pelanggan
 p_{11} = Kepala Bagian Teknik yang telah menerima ABP dan RKP
 p_{12} = Kepala Sub Bagian Transmisi dan Distribusi yang telah menerima surat perintah dari Kepala Bagian Teknik
 p_{13} = Bagian Gudang yang telah menerima BPB
 p_{25} = Antrian permintaan pelanggan yang menunggu untuk dilayani oleh petugas lapangan
 p_i = pelayanan lapangan oleh tim i selesai dikerjakan dengan $26 \leq i \leq 33$
 p_{34} = tim 1 - tim 8 selesai mengerjakan permintaan pelanggan dan siap mengerjakan permintaan pelanggan lain selanjutnya (*idle*)
 p_{35} = pelanggan yang keluar dari antrian

Pada gambar 4.1 tidak ada *place* sebagai kondisi yang terhubung dengan t_1 dikarenakan transisi tersebut mempresentasikan pelanggan yang akan memulai proses pelayanan. Pelanggan yang akan mendaftarkan diri ke pelayanan PDAM dapat melakukan pendaftaran setiap hari sehingga membuat antrian dapat terisi setiap saat tanpa persyaratan. Pelanggan yang telah siap melakukan pendaftaran berada pada posisi *place* p_1 . Pelanggan tersebut dapat melakukan pendaftaran sehingga pada alur *Petri Net* terdapat transisi t_2 yaitu proses penyerahan berkas pendaftaran kepada bagian Pelayanan Pelanggan yaitu p_2 , sehingga ada garis panah penghubung antara p_1 ke t_2 dan t_2 ke p_2 . Setelah berkas pendaftaran diterima, maka bagian Pelayanan Pelanggan memeriksa berkas persyaratan. Proses pemeriksaan berkas pendaftaran adalah t_3 sehingga ada garis panah penghubung dari p_2 ke t_3 . Berkas pendaftaran yang telah diperiksa berada pada *place* p_3 . Pemeriksaan berkas ini menghasilkan dua keadaan yang berbeda yaitu berkas pendaftaran diterima atau ditolak. Jika berkas pendaftaran diterima maka

pelanggan akan melakukan proses pengisian formulir pendaftaran yaitu transisi t_4 sehingga ada garis panah penghubung dari p_3 ke t_4 . Sedangkan berkas pendaftaran yang ditolak akan dikembalikan kepada pelanggan p_1 . Proses pengembalian berkas yang ditolak kepada pelanggan adalah transisi t_5 sehingga ada garis panah penghubung dari p_3 ke t_5 dan dari t_5 ke p_1 . Formulir pendaftaran yang telah diisi oleh pelanggan berada di *place* p_4 dan akan diserahkan kepada Kepala Sub Bagian Pelanggan pada *place* p_5 . Proses penyerahan formulir pendaftaran kepada Kepala Sub Bagian Pelanggan adalah transisi t_6 sehingga ada garis panah penghubung dari p_4 ke t_6 dan dari t_6 ke p_5 . Selanjutnya Kepala Sub Bagian Pelanggan membuat SPL dan PL yang kemudian diserahkan ke Pelaksana Keuangan pada *place* p_6 . Proses pembuatan SPL dan PL yang kemudian diserahkan ke Pelaksana Keuangan adalah t_7 sehingga ada garis panah penghubung dari p_5 ke t_7 dan dari t_7 ke p_6 . Proses selanjutnya yaitu transisi t_8 adalah pelanggan melakukan pembayaran biaya pendaftaran kemudian SPL dan PL diserahkan ke Kepala Sub Bagian Perencanaan sehingga ada garis panah penghubung dari p_6 ke t_8 . Kepala Sub Bagian Perencanaan yang telah menerima SPL dan PL berada pada *place* p_7 sehingga ada garis panah penghubung dari t_8 ke p_7 . Proses selanjutnya adalah survey lokasi calon pelanggan yaitu transisi t_9 . Hasil dari survey lokasi calon pelanggan berada pada *place* p_8 jadi ada garis panah penghubung yang menghubungkan t_9 ke p_8 . Hasil survey ini menunjukkan dua keadaan yaitu layak dan tidak layak. Jika hasil survey menunjukkan layak maka proses selanjutnya adalah transisi t_{10} yaitu pembuatan ABP dan RKP kemudian diserahkan ke Bagian Pembukuan. Bagian Pembukuan yang telah menerima ABP dan RKP berada pada *place* p_9 sehingga ada garis panah penghubung dari p_8 ke t_{10} dan dari t_{10} ke p_9 . Tetapi jika hasil survey menunjukkan tidak layak maka proses akan kembali ke p_1 , proses ini yaitu transisi t_{11} sehingga ada garis panah penghubung yang menghubungkan dari p_8 ke t_{11} dan dari t_{11} ke p_1 . Setelah itu prosesnya adalah transisi t_{12} yaitu pembuatan rekening yang kemudian diserahkan ke Kepala Sub Bagian Keuangan. Kepala Sub Bagian Keuangan yang telah menerima rekening pelanggan berada pada *place* p_{10} sehingga ada garis panah penghubung dari p_9 ke t_{12} dan dari t_{12}

ke p_{10} . Proses selanjutnya yaitu transisi t_{13} adalah Kepala Sub Bagian Keuangan membuat BPPI, pelanggan melunasi biaya pemasangan, ABP dan RKP diserahkan ke Kepala Bagian Teknik jadi ada garis panah penghubung dari p_{10} ke t_{13} . Kepala Bagian Teknik yang telah menerima ABP dan RKP berada pada *place* p_{11} sehingga ada garis panah penghubung dari t_{13} ke p_{11} .

Setelah Kepala Bagian Teknik menerima ABP dan RKP maka proses selanjutnya adalah pembuatan surat perintah untuk Kepala Sub Bagian Transmisi dan Distribusi untuk melaksanakan pemasangan yaitu transisi t_{14} sehingga ada garis panah penghubung dari p_{11} ke t_{14} . Kepala Sub Bagian Transmisi dan Distribusi yang telah menerima surat perintah dari Kepala Bagian Teknik berada pada *place* p_{12} yang kemudian membuat BPB dan surat perintah untuk petugas lapangan. Proses pembuatan BPB dan surat perintah untuk petugas lapangan adalah transisi t_{15} sehingga ada garis panah yang menghubungkan dari t_{14} ke p_{12} dan dari p_{12} ke t_{15} . Bagian Gudang yang telah menerima BPB berada pada *place* p_{13} sehingga ada garis panah penghubung dari t_{15} ke p_{13} , kemudian Bagian Gudang mempersiapkan alat-alat untuk pasang baru, proses ini adalah transisi t_{16} jadi ada garis panah penghubung dari p_{13} ke t_{16} . Antrian permintaan pelanggan yang menunggu untuk dilayani oleh petugas lapangan berada pada *place* p_{25} jadi ada garis panah penghubung dari t_{16} ke p_{25} . Proses selanjutnya adalah transisi t_{31} yaitu petugas lapangan di PDAM yang berada pada *place* p_{34} menuju ke lokasi pelanggan dan mengerjakan permintaan pelanggan, sehingga ada garis panah penghubung dari p_{25} ke t_{31} dan dari p_{34} ke t_{31} . Keadaan dimana pelayanan lapangan telah selesai berada pada *place* p_{26} sehingga ada garis panah yang menghubungkan dari t_{31} ke p_{26} . Setelah pelayanan selesai maka proses selanjutnya adalah transisi t_{39} yaitu petugas melakukan konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan selesai, dan kembali ke kantor PDAM, sehingga ada garis panah penghubung dari p_{26} ke t_{39} . Petugas lapangan yang telah kembali ke PDAM berada pada *place* p_{34} dan pelanggan yang telah selesai dilayani dan akan keluar dari antrian berada pada *place* p_{35} sehingga ada garis panah penghubung dari t_{39} ke p_{34} dan t_{39} ke p_{35} . Selanjutnya yaitu proses pelanggan keluar dari

antrian dan keadaan kembali ke p_1 , proses ini adalah transisi t_{47} jadi ada garis panah yang menghubungkan t_{47} ke p_1 .

Berikutnya dilakukan analisa *Petri Net* sistem pelayanan pasang baru sebagai berikut:

➤ Himpunan *place* =

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{25}, p_{26}, p_{34}, p_{35}\}$$

➤ Himpunan transisi =

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{31}, t_{39}, t_{47}\}$$

➤ Bobot untuk masing-masing *Arc* adalah sebesar satu

➤ Keadaan awal

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_0(p_1) \\ x_0(p_2) \\ x_0(p_3) \\ x_0(p_4) \\ x_0(p_5) \\ x_0(p_6) \\ x_0(p_7) \\ x_0(p_8) \\ x_0(p_9) \\ x_0(p_{10}) \\ x_0(p_{11}) \\ x_0(p_{12}) \\ x_0(p_{13}) \\ x_0(p_{25}) \\ x_0(p_{26}) \\ x_0(p_{34}) \\ x_0(p_{35}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Setelah membuat *Petri Net* untuk alur pelayanan pasang baru, selanjutnya akan dianalisis *liveness* dan *deadlocksnya* dengan menggunakan *Coverability Tree*. Pertama dari *Petri Net* gambar 4.1 untuk pelayanan pasang baru tersebut didefinisikan terlebih dahulu matriks *Forward* (A_f) dan *Backward* (A_b). Matriks *Forward* adalah sebuah matrik ukuran $m \times n$ dimana m dan n masing-masing adalah jumlah banyaknya transisi dan *place*. Elemen-elemen yang terdapat pada matriks *Forward* merupakan ada atau tidaknya garis panah

Coverability Tree Petri Net Pelayanan Pasang Baru

Proses membangun *Coverability Tree* dapat dijelaskan sebagai berikut.

Keadaan $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 8 \ 0]^T$ didefinisikan dengan *node root*. Pada keadaan ini transisi yang *enabled* yaitu t_1 .

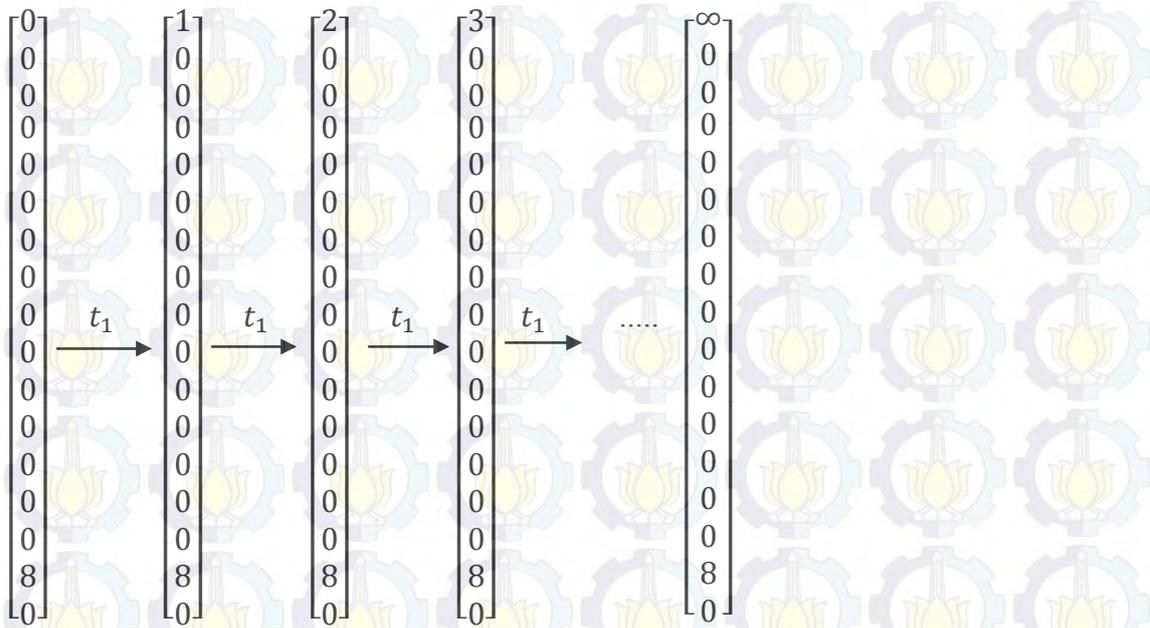
Pemfirean transisi ini menyebabkan keadaan *Petri Net* berubah. Jika t_1 difire maka keadaan petri net akan berubah menjadi $x_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 8 \ 0]^T$. Setelah transisi t_1 difire maka transisi yang *enabled* adalah t_1 dan t_2 , sehingga ada tiga pilihan untuk pemfirean yaitu : 1. t_1 difire 2. t_1 tidak difire dan t_2 difire 3. t_1 difire dan t_2 difire .

1. Ketika t_1 difire

Setelah pemfirean yang pertama maka jumlah token di p_1 adalah satu.

Apabila transisi t_1 difire berkali-kali maka jumlah token di p_1 selalu bertambah.

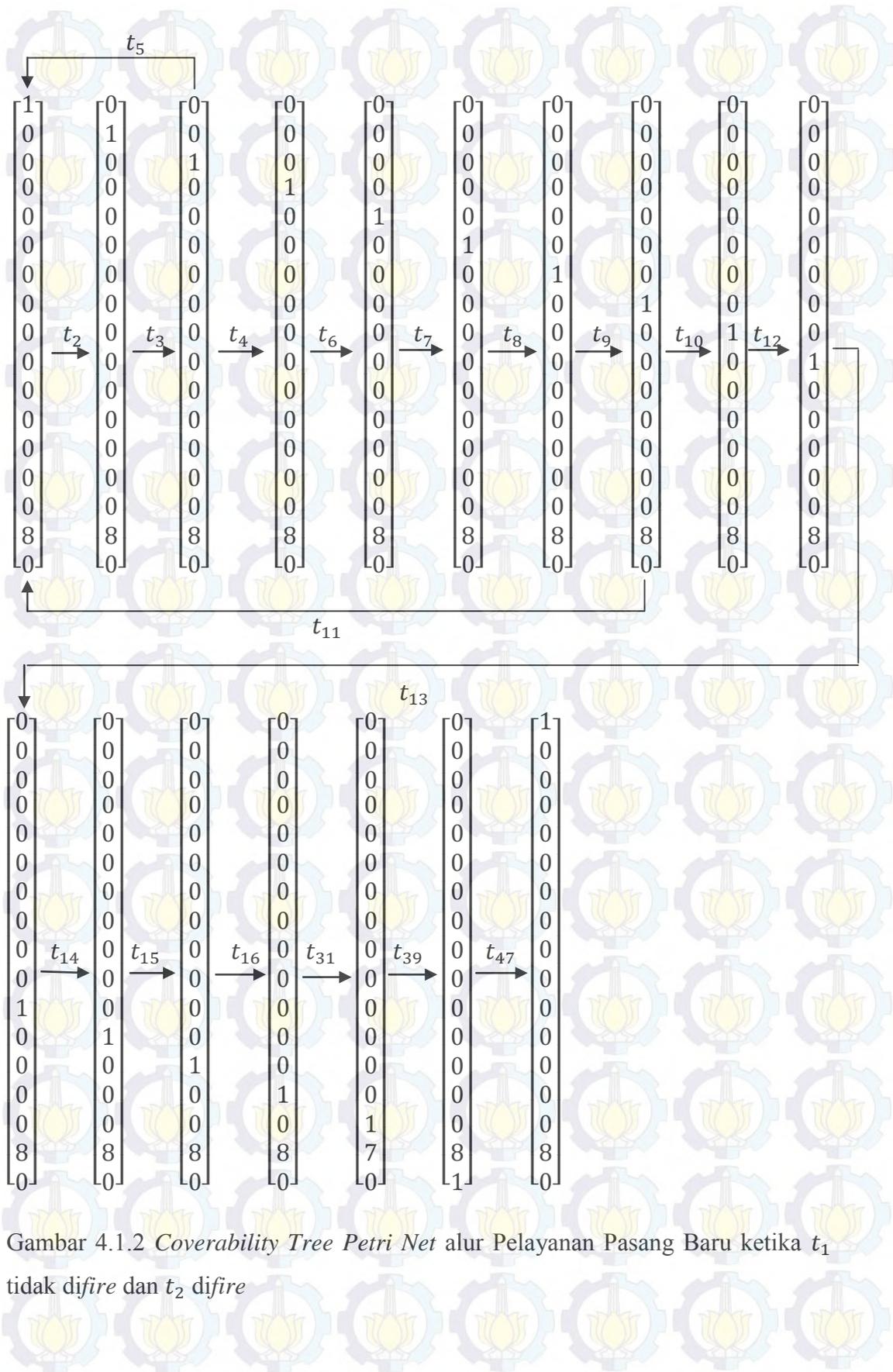
Sehingga *Coverability Tree* nya dijelaskan pada gambar 4.1.1 sebagai berikut:



Gambar 4.1.1 *Coverability Tree* Petri Net alur Pelayanan Pasang Baru ketika t_1 difire

2. Ketika t_1 tidak *difire* dan t_2 *difire*

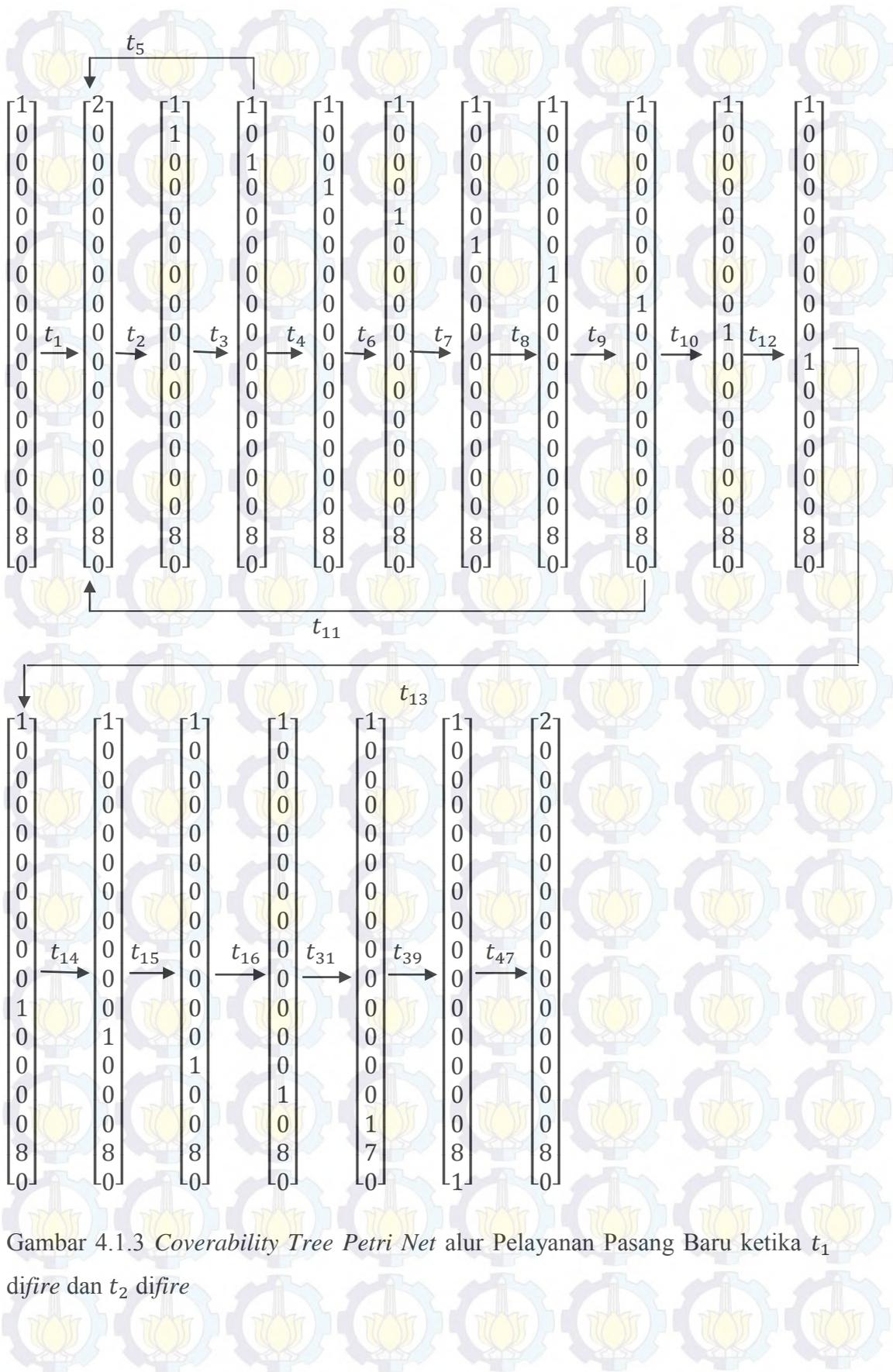
Awalnya token berada di p_1 , transisi yang *enabled* adalah t_1 dan t_2 . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_1 tidak *difire* dan t_2 *difire* seperti pada gambar 4.1.2. Jika t_2 *difire* mengakibatkan satu token berpindah ke p_2 . Kemudian t_3 *difire* dan mengakibatkan token berpindah ke p_3 . Dengan adanya token di p_3 maka ada dua transisi yang *enabled* yaitu t_4 dan t_5 . Jika t_5 *difire* maka letak token berpindah kembali ke p_1 , sedangkan jika t_4 *difire* mengakibatkan token berpindah ke p_4 sehingga transisi yang *enabled* yaitu t_6 . Ketika t_6 *difire* maka token berpindah ke p_5 yang mengakibatkan transisi t_7 *enabled*. Transisi t_7 *difire* sehingga token berpindah ke p_6 . Dengan adanya token di p_6 mengakibatkan transisi t_8 *enabled*. Ketika t_8 *difire* maka token berpindah ke p_7 yang mengakibatkan transisi t_9 *enabled*. Ketika transisi t_9 *difire* maka token berpindah ke p_8 sehingga t_{10} dan t_{11} *enabled*. Jika t_{11} *difire* maka token berpindah kembali ke p_1 , tetapi jika t_{10} *difire* maka token berpindah ke p_9 sehingga t_{12} *enabled*. Jika t_{12} *difire* maka token berpindah ke p_{10} . Selanjutnya transisi yang *enabled* yaitu transisi t_{13} *difire* maka token berpindah ke p_{11} , yang mengakibatkan transisi t_{14} *enabled*. Ketika t_{14} *difire* maka token berpindah ke p_{12} . Saat token berada di p_{12} maka t_{15} *enabled*. Transisi t_{15} di *fire* maka token berpindah ke p_{13} yang mengakibatkan transisi t_{16} *enabled*. Saat transisi t_{16} *difire* maka token berpindah ke p_{25} . Token yang berada di p_{25} mengakibatkan t_{31} *enabled*. Kemudian t_{31} *difire* sehingga token dari p_{25} dan berpindah ke p_{26} yang mengakibatkan transisi t_{39} *enabled* dan token di p_{34} yang semula berjumlah delapan berkurang satu sehingga menjadi tujuh token. Ketika t_{39} *difire* maka token berpindah ke p_{35} dan p_{34} yang memiliki tujuh token menjadi bertambah satu sehingga berjumlah delapan token. Dengan adanya token di p_{35} mengakibatkan t_{47} *enabled*, kemudian t_{47} *difire* sehingga mengakibatkan token kembali ke p_1 . Dengan adanya token di p_1 mengakibatkan t_2 kembali *enabled*. *Coverability tree* dari alur *Petri Net* ini adalah pada gambar 4.1.2 sebagai berikut:



Gambar 4.1.2 *Coverability Tree Petri Net* alur Pelayanan Pasang Baru ketika t_1 tidak difire dan t_2 difire

3. Ketika t_1 difire dan t_2 difire

Awalnya token berada di p_1 , transisi yang *enabled* adalah t_1 dan t_2 . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_1 difire dan t_2 difire seperti pada gambar 4.1.3. Jika transisi t_1 difire mengakibatkan jumlah token pada p_1 selalu bertambah. Selanjutnya t_2 difire mengakibatkan satu token berpindah ke p_2 . Kemudian t_3 difire dan mengakibatkan token berpindah ke p_3 . Dengan adanya token di p_3 maka ada dua transisi yang *enabled* yaitu t_4 dan t_5 . Jika t_5 difire maka letak token berpindah kembali ke p_1 , sedangkan jika t_4 difire mengakibatkan token berpindah ke p_4 sehingga transisi yang *enabled* yaitu t_6 . Ketika t_6 difire maka token berpindah ke p_5 yang mengakibatkan transisi t_7 *enabled*. Transisi t_7 difire sehingga token berpindah ke p_6 . Dengan adanya token di p_6 mengakibatkan transisi t_8 *enabled*. Ketika t_8 difire maka token berpindah ke p_7 yang mengakibatkan transisi t_9 *enabled*. Ketika transisi t_9 difire maka token berpindah ke p_8 sehingga t_{10} dan t_{11} *enabled*. Jika t_{11} difire maka token berpindah kembali ke p_1 , tetapi jika t_{10} difire maka token berpindah ke p_9 sehingga t_{12} *enabled*. Jika t_{12} difire maka token berpindah ke p_{10} . Selanjutnya transisi yang *enabled* yaitu transisi t_{13} difire maka token berpindah ke p_{11} , yang mengakibatkan transisi t_{14} *enabled*. Ketika t_{14} difire maka token berpindah ke p_{12} . Saat token berada di p_{12} maka t_{15} *enabled*. Transisi t_{15} di fire maka token berpindah ke p_{13} yang mengakibatkan transisi t_{16} *enabled*. Saat transisi t_{16} difire maka token berpindah ke p_{25} . Token yang berada di p_{25} mengakibatkan t_{31} *enabled*. Kemudian t_{31} difire sehingga token dari p_{25} dan berpindah ke p_{26} yang mengakibatkan transisi t_{39} *enabled* dan token di p_{34} yang semula berjumlah delapan berkurang satu ehingga menjadi tujuh token. Ketika t_{39} difire maka token berpindah ke p_{35} dan p_{34} yang memiliki tujuh token menjadi bertambah satu sehingga berjumlah delapan token. Dengan adanya token di p_{35} mengakibatkan t_{47} *enabled*, kemudian t_{47} difire sehingga mengakibatkan token kembali ke p_1 . Dengan adanya token di p_1 mengakibatkan t_2 kembali *enabled*. Coverability Tree dari alur petri net ini adalah pada gambar 4.1.3 sebagai berikut:



Gambar 4.1.3 *Coverability Tree Petri Net* alur Pelayanan Pasang Baru ketika t_1 difire dan t_2 difire

Setelah melakukan pemfirean berdasarkan ketiga pilihan tersebut, terlihat bahwa *Coverability Tree* dari *Petri Net* tersebut membentuk *looping* saat proses pemfirean yaitu proses pemfirean tidak pernah berhenti. Sehingga *Petri Net* tersebut adalah *liveness*.

Model Aljabar *Max Plus* dari Alur *Petri Net* Pelayanan Pasang Baru yang Dikaitkan dengan Waktu

Untuk mengetahui lama waktu dan waktu berakhirnya proses pelayanan pasang baru, maka petri net sistem pelayanan pasang baru diselesaikan dengan menggunakan model maxplus aljabar. Sebelumnya terlebih dahulu diberikan definisi variabel-variabel yang digunakan untuk memodelkan studi kasus. Variabel yang menunjukkan waktu, sebagai berikut:

$t_1(k)$ = waktu antri saat ke- k

$t_2(k)$ = waktu berkas persyaratan masuk saat ke- k

$t_3(k)$ = waktu pemeriksaan berkas persyaratan saat ke- k

$t_4(k)$ = waktu calon pelanggan mengisi formulir pendaftaran saat ke- k

$t_5(k)$ = waktu berkas persyaratan dinyatakan tidak lengkap dan dikembalikan ke calon pelanggan saat ke- k

$t_6(k)$ = waktu berkas pendaftaran diserahkan ke Kepala Sub Bagian Pelayanan Pelanggan saat ke- k

$t_7(k)$ = waktu pembuatan SPL dan PL kemudian diserahkan ke Pelaksanaan Keuangan saat ke- k

$t_8(k)$ = waktu calon pelanggan membayar biaya pendaftaran kemudian SPL dan PL diserahkan ke Kepala Sub Bagian Perencanaan saat ke- k

$t_9(k)$ = waktu *survey* lokasi

$t_{10}(k)$ = waktu untuk pembuatan ABP dan RKP kemudian diserahkan ke Bagian Pembukuan saat ke- k

$t_{11}(k)$ = waktu untuk pemberitahuan hasil *survey* lokasi tidak layak ke calon pelanggan saat ke- k

$t_{12}(k)$ = waktu pembuatan rekening kemudian diserahkan ke Kepala Sub Bagian Keuangan saat ke- k

$t_{13}(k)$ = waktu pembuatan BPPI dan pelanggan melunasi biaya pemasangan, kemudian ABP dan RKP diserahkan ke Kepala Bagian Teknik saat ke- k

$t_{14}(k)$ = waktu pembuatan surat perintah untuk Kepala Sub Bagian Transmisi dan Distribusi untuk melaksanakan pemasangan saat ke- k

$t_{15}(k)$ = waktu pembuatan BPB dan surat perintah kepada petugas lapangan saat ke- k

$t_{16}(k)$ = waktu mempersiapkan alat-alat untuk pasang baru saat ke- k

$t_i(k)$ = waktu perjalanan menuju ke lokasi pelanggan dan pengerjaan permintaan pelanggan oleh tim i dengan $31 \leq i \leq 38$ saat ke- k

$t_{i+38}(k)$ = waktu tim i telah selesai mengerjakan permintaan pelanggan, konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan telah selesai, dan perjalanan kembali ke kantor PDAM dengan $1 \leq i \leq 8$ saat ke- k

$t_{47}(k)$ = waktu pelanggan keluar dari antrian

Adapun variabel-variabel yang menunjukkan lama waktu dalam menjalankan setiap proses yaitu:

$v_{t_1,k}$ = lamanya proses antrian calon pelanggan

$v_{t_2,k}$ = lamanya proses memasukkan berkas persyaratan calon pelanggan ke bagian Pelayanan Pelanggan

$v_{t_3,k}$ = lamanya proses pemeriksaan berkas persyaratan

$v_{t_4,k}$ = lamanya proses calon pelanggan mengisi formulir pendaftaran

$v_{t_5,k}$ = lamanya proses berkas persyaratan yang tidak lengkap dikembalikan ke calon pelanggan

$v_{t_6,k}$ = lamanya proses berkas pendaftaran diserahkan ke Kepala Sub Bagian Pelayanan Pelanggan

$v_{t_7,k}$ = lamanya proses pembuatan SPL dan PL kemudian diserahkan ke Kepala Sub Bagian Keuangan

$v_{t_8,k}$ = lamanya proses calon pelanggan membayar biaya pendaftaran, kemudian SPL dan PL diserahkan ke Kepala Sub Bagian Perencanaan

$v_{t_9,k}$ = lamanya proses survey lokasi calon pelanggan

$v_{t_{10},k}$ = lamanya proses pembuatan ABP dan RKP kemudian diserahkan ke Bagian Pembukuan

$v_{t_{11},k}$ = lamanya proses pemberitahuan hasil survey lokasi tidak layak ke calon pelanggan

$v_{t_{12},k}$ = lamanya proses pembuatan rekening kemudian diserahkan ke Kepala Sub Bagian Keuangan

$v_{t_{13},k}$ = lamanya proses pembuatan BPPI dan pelanggan melunasi biaya pemasangan, kemudian ABP dan RKP diserahkan ke Kepala Bagian Teknik

$v_{t_{14},k}$ = lamanya proses pembuatan surat perintah untuk Kepala Sub Bagian Transmisi dan Distribusi untuk melaksanakan pemasangan instalasi baru

$v_{t_{15},k}$ = lamanya proses pembuatan BPB dan surat perintah kerja kepada petugas lapangan

$v_{t_{16},k}$ = lamanya proses mempersiapkan alat-alat untuk pasang baru

$v_{t_i,k}$ = lamanya proses perjalanan menuju ke lokasi pelanggan dan pengerjaan permintaan pelanggan oleh tim i dengan $31 \leq i \leq 38$

$v_{t_{i+38},k}$ = lamanya proses tim i telah selesai mengerjakan permintaan pelanggan, konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan telah selesai, dan perjalanan kembali ke kantor PDAM dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{47},k}$ = lamanya proses pelanggan keluar dari antrian.

Variabel-variabel yang telah disebutkan di atas digunakan untuk membentuk model aljabar *Max Plus*.

$$t_1(k) = v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} t_2(k) &= v_{t_2,k} \otimes (t_1(k) \oplus t_5(k-1) \oplus t_{11}(k-1) \oplus t_{47}(k-1)) \\ &= v_{t_2,k} \otimes (v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus t_5(k-1) \oplus t_{11}(k-1) \oplus t_{47}(k-1)) \\ &= v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \oplus v_{t_2,k} \\ &\quad \otimes t_{47}(k-1) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
t_3(k) &= v_{t_3,k} \otimes t_2(k) \\
&= v_{t_3,k} \otimes (v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \\
&\quad \oplus v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1)) \\
&= v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \\
&\quad \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_4(k) &= v_{t_4,k} \otimes t_3(k) \\
&= v_{t_4,k} \otimes (v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_3,k} \\
&\quad \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1)) \\
&= v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \\
&\quad \oplus v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_5(k) &= v_{t_5,k} \otimes t_3(k) \\
&= v_{t_5,k} \otimes (v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_3,k} \\
&\quad \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1)) \\
&= v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \\
&\quad \oplus v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_6(k) &= v_{t_6,k} \otimes t_4(k) \\
&= v_{t_6,k} \otimes (v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \\
&\quad \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \\
&\quad \otimes t_{11}(k-1)) \\
&= v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \\
&\quad \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_6,k} \\
&\quad \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_7(k) &= v_{t_7,k} \otimes t_6(k) \\
&= v_{t_7,k} \otimes (v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \\
&\quad \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \\
&\quad \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1)) \\
&= v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \\
&\quad \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \\
&\quad \oplus v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_8(k) &= v_{t_8,k} \otimes t_7(k) \\
&= v_{t_8,k} \otimes (v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \\
&\quad \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \\
&\quad \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1)) \\
&= v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \\
&\quad \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \\
&\quad \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \\
&\quad \otimes t_{11}(k-1) \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_9(k) &= v_{t_9,k} \otimes t_8(k) \\
&= v_{t_9,k} \otimes (v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_7,k} \\
&\quad \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \\
&\quad \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \\
&\quad \otimes t_{11}(k-1)) \\
&= v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_9,k} \\
&\quad \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \\
&\quad \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \\
&\quad \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \\
& \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \\
= & v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \\
& \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \\
& \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \\
& \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \\
& \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \\
& \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \\
& \otimes t_{11}(k-1) \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{31}(k) = & v_{t_{31},k} \otimes (t_{16}(k) \oplus (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), \\
& t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & v_{t_{31},k} \otimes ((v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes \\
& v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes \\
& v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \\
& \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{18}(k-1) \oplus v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \\
& \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \\
& \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \\
& \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1)) \oplus (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), \\
& t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \\
= & v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \\
& \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \\
& \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \\
& \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{18}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \\
& \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \\
& \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), \\
& t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), \\
& t_{46}(k-1)))
\end{aligned} \tag{18}$$

$t_{32}(k)$ sampai $t_{38}(k)$ memiliki model aljabar maxplus yang sama dengan $t_{31}(k)$ karena memiliki *Coverability Tree* yang sama.

$$\begin{aligned}
t_{39}(k) &= v_{t_{39},k} \otimes t_{31}(k) \\
&= v_{t_{39},k} \otimes (v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \\
& \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \\
& \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \\
& \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \\
& \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \\
& \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes \\
& v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), \\
& t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), \\
& t_{46}(k-1))) \\
&= v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \\
& \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \\
& \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \\
& \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \\
& \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \\
& \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \\
& \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \oplus v_{t_{39},k}
\end{aligned}$$

$$\otimes v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \quad (19)$$

$t_{39}(k)$ sampai $t_{46}(k)$ memiliki model aljabar maxplus yang sama dengan $t_{39}(k)$ karena memiliki *Coverability Tree* yang sama.

$$\begin{aligned} t_{47}(k) &= v_{t_{47},k} \otimes t_{39}(k) \\ &= v_{t_{47},k} \otimes (v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \\ &\quad \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \\ &\quad \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \\ &\quad \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \\ &\quad \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \\ &\quad \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \\ &\quad \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \\ &\quad \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1) \\ &\quad t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1)))) \\ &= v_{t_{47},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \\ &\quad \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \\ &\quad \oplus v_{t_{47},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \\ &\quad \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{47}(k-1) \oplus v_{t_{47},k} \\ &\quad \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \\ &\quad \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_5(k-1) \oplus v_{t_{47},k} \otimes v_{t_{39},k} \\ &\quad \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \\ &\quad \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes t_{11}(k-1) \oplus v_{t_{47},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \\ &\quad \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), \\ &\quad t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1)))) \quad (20) \end{aligned}$$

Sehingga dari persamaan (1), (5), (11), (19), dan (20) diperoleh jadwal lamanya pelayanan pasang baru adalah:

$$\begin{bmatrix} t_1(k) \\ t_5(k) \\ t_{11}(k) \\ t_{39}(k) \\ t_{47}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_1,k} & a & a & a & a \\ b & c & c & d & c \\ e & f & f & g & f \\ h & i & i & j & i \\ k & l & l & n & l \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} t_1(k-1) \\ t_5(k-1) \\ t_{11}(k-1) \\ M \\ t_{47}(k-1) \end{bmatrix}$$

$$M = \ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))$$

Nilai $a = \varepsilon$ supaya:

$$v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1) \oplus a \otimes t_5(k-1) \oplus a \otimes t_{11}(k-1) \oplus a \otimes t_{47}(k-1) = v_{t_1,k} \otimes t_1(k-1)$$

Nilai b didefinisikan sebagai:

$$b = v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k}$$

Nilai c didefinisikan sebagai:

$$c = v_{t_5,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k}$$

Nilai $d = \varepsilon$ supaya:

$$b \otimes t_1(k-1) \oplus c \otimes t_5(k-1) \oplus c \otimes t_{11}(k-1) \oplus d \otimes M \oplus c \otimes t_{47}(k-1) = b \otimes t_1(k-1) \oplus c \otimes t_5(k-1) \oplus c \otimes t_{11}(k-1) \oplus c \otimes t_{47}(k-1)$$

Nilai e didefinisikan sebagai:

$$e = v_{t_{11},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k}$$

Nilai f didefinisikan sebagai:

$$f = v_{t_{11},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k}$$

Nilai $g = \varepsilon$ supaya:

$$e \otimes t_1(k-1) \oplus f \otimes t_5(k-1) \oplus f \otimes t_{11}(k-1) \oplus g \otimes M \oplus f \otimes t_{47}(k-1) = e \otimes t_1(k-1) \oplus f \otimes t_5(k-1) \oplus f \otimes t_{11}(k-1) \oplus f \otimes t_{47}(k-1)$$

Nilai h didefinisikan sebagai:

$$h = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k}$$

Nilai i didefinisikan sebagai:

$$i = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \otimes v_{t_8,k} \\ \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k}$$

Nilai j didefinisikan sebagai:

$$j = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k}$$

Nilai k didefinisikan sebagai:

$$k = v_{t_{47},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \\ \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k} \otimes v_{t_1,k}$$

Nilai l didefinisikan sebagai:

$$l = v_{t_{47},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes v_{t_{15},k} \otimes v_{t_{14},k} \otimes v_{t_{13},k} \otimes v_{t_{12},k} \otimes v_{t_{10},k} \otimes v_{t_9,k} \\ \otimes v_{t_8,k} \otimes v_{t_7,k} \otimes v_{t_6,k} \otimes v_{t_4,k} \otimes v_{t_3,k} \otimes v_{t_2,k}$$

Nilai n didefinisikan sebagai:

$$n = v_{t_{47},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k}$$

Selanjutnya misalkan diberikan lama waktu proses (dalam menit) tiap tahap ke-1

$$v_{t_1,1} = 5$$

$$v_{t_2,1} = 5$$

$$v_{t_3,1} = 10$$

$$v_{t_4,1} = 10$$

$$v_{t_5,1} = 5$$

$$v_{t_6,1} = 10$$

$$v_{t_7,1} = 20$$

$$v_{t_8,1} = 15$$

$$v_{t_9,1} = 8 \times 60 = 480$$

$$v_{t_{10},1} = 30$$

$$v_{t_{11},1} = 10$$

$$v_{t_{12},1} = 30$$

$$v_{t_{13},1} = 30$$

$$v_{t_{14},1} = 15$$

$$v_{t_{15},1} = 20$$

$$v_{t_{16},1} = 15$$

$$v_{t_{31},1} = 280$$

$$v_{t_{39},1} = 100$$

$$v_{t_{47},1} = 5$$

$$b = v_{t_{5,k}} \otimes v_{t_{3,k}} \otimes v_{t_{2,k}} \otimes v_{t_{1,k}} = 5 + 10 + 5 + 5 = 25 \text{ menit}$$

$$c = v_{t_{5,k}} \otimes v_{t_{3,k}} \otimes v_{t_{2,k}} = 5 + 10 + 5 = 20 \text{ menit}$$

$$\begin{aligned} e &= v_{t_{11,k}} \otimes v_{t_{9,k}} \otimes v_{t_{8,k}} \otimes v_{t_{7,k}} \otimes v_{t_{6,k}} \otimes v_{t_{4,k}} \otimes v_{t_{3,k}} \otimes v_{t_{2,k}} \otimes v_{t_{1,k}} \\ &= 10 + 480 + 15 + 20 + 10 + 10 + 10 + 5 + 5 = 565 = 1 \text{ hari lebih } 1 \text{ jam} \\ &\quad 25 \text{ menit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= v_{t_{11,k}} \otimes v_{t_{9,k}} \otimes v_{t_{8,k}} \otimes v_{t_{7,k}} \otimes v_{t_{6,k}} \otimes v_{t_{4,k}} \otimes v_{t_{3,k}} \otimes v_{t_{2,k}} \\ &= 10 + 480 + 15 + 20 + 10 + 10 + 10 + 5 = 560 = 1 \text{ hari lebih } 1 \text{ jam } 20 \\ &\quad \text{menit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{16,k}} \otimes v_{t_{15,k}} \otimes v_{t_{14,k}} \otimes v_{t_{13,k}} \otimes v_{t_{12,k}} \otimes v_{t_{10,k}} \otimes v_{t_{9,k}} \otimes v_{t_{8,k}} \\ &\quad \otimes v_{t_{7,k}} \otimes v_{t_{6,k}} \otimes v_{t_{4,k}} \otimes v_{t_{3,k}} \otimes v_{t_{2,k}} \otimes v_{t_{1,k}} \\ &= 100 + 280 + 15 + 20 + 15 + 30 + 30 + 30 + 480 + 15 + 20 + 10 + 10 \\ &\quad + 10 + 5 + 5 = 1075 \text{ menit} = 2 \text{ hari lebih } 1 \text{ jam } 55 \text{ menit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i &= v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{16,k}} \otimes v_{t_{15,k}} \otimes v_{t_{14,k}} \otimes v_{t_{13,k}} \otimes v_{t_{12,k}} \otimes v_{t_{10,k}} \otimes v_{t_{9,k}} \otimes v_{t_{8,k}} \\ &\quad \otimes v_{t_{7,k}} \otimes v_{t_{6,k}} \otimes v_{t_{4,k}} \otimes v_{t_{3,k}} \otimes v_{t_{2,k}} \\ &= 100 + 280 + 15 + 20 + 15 + 30 + 30 + 30 + 480 + 15 + 20 + 10 + 10 \\ &\quad + 10 + 5 = 1070 \text{ menit} = 2 \text{ hari lebih } 1 \text{ jam } 50 \text{ menit} \end{aligned}$$

$$j = v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} = 100 + 280 = 380 \text{ menit}$$

$$\begin{aligned} k &= v_{t_{47,k}} \otimes v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{16,k}} \otimes v_{t_{15,k}} \otimes v_{t_{14,k}} \otimes v_{t_{13,k}} \otimes v_{t_{12,k}} \otimes v_{t_{10,k}} \otimes v_{t_{9,k}} \\ &\quad \otimes v_{t_{8,k}} \otimes v_{t_{7,k}} \otimes v_{t_{6,k}} \otimes v_{t_{4,k}} \otimes v_{t_{3,k}} \otimes v_{t_{2,k}} \otimes v_{t_{1,k}} \\ &= 5 + 100 + 280 + 15 + 20 + 15 + 30 + 30 + 30 + 480 + 15 + 20 + 10 \\ &\quad + 10 + 10 + 5 + 5 \\ &= 1080 \text{ menit} = 2 \text{ hari lebih } 2 \text{ jam} \end{aligned}$$

$$l = v_{t_{47,k}} \otimes v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{16,k}} \otimes v_{t_{15,k}} \otimes v_{t_{14,k}} \otimes v_{t_{13,k}} \otimes v_{t_{12,k}} \otimes v_{t_{10,k}} \otimes v_{t_9,k}$$

$$\otimes v_{t_{8,k}} \otimes v_{t_{7,k}} \otimes v_{t_{6,k}} \otimes v_{t_{4,k}} \otimes v_{t_{3,k}} \otimes v_{t_{2,k}}$$

$$= 5 + 100 + 280 + 15 + 20 + 15 + 30 + 30 + 30 + 480 + 15 + 20 + 10$$

$$+ 10 + 10 + 5$$

$$= 1075 \text{ menit} = 2 \text{ hari lebih 1 jam 55 menit}$$

$$n = v_{t_{47,k}} \otimes v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} = 5 + 100 + 280 = 385 \text{ menit}$$

Untuk keadaan awal

$$\begin{bmatrix} t_1(0) \\ t_5(0) \\ t_{11}(0) \\ M \\ t_{47}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Didapatkan

$$\begin{bmatrix} t_1(1) \\ t_5(1) \\ t_{11}(1) \\ t_{39}(1) \\ t_{47}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 25 & 20 & 20 & \varepsilon & 20 \\ 565 & 560 & 560 & \varepsilon & 560 \\ 1075 & 1070 & 1070 & 380 & 1070 \\ 1080 & 1075 & 1075 & 385 & 1075 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \\ 565 \\ 1075 \\ 1080 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan tersebut dapat diperoleh bahwa: $t_1(1) = 5$ menit menunjukkan lamanya proses pelanggan untuk masuk ke dalam sistem antrian yang ke 1, lamanya proses dari pelanggan sudah masuk sistem antrian sampai pemberitahuan berkas tidak layak adalah $t_5(1) - t_1(1) = 25 - 5 = 20$ menit, lamanya proses dari pelanggan sudah masuk sistem antrian sampai pemberitahuan hasil survey lokasi tidak layak adalah $t_{11}(1) - t_1(1) = 565 - 5 = 560$ menit, lamanya proses dari pelanggan sudah masuk sistem antrian sampai petugas lapangan selesai mengerjakan permintaan pasang baru dan kembali ke kantor PDAM adalah $t_{39}(1) - t_1(1) = 1075 - 5 = 1070$ menit, sedangkan untuk proses pelayanan pasang baru mulai dari pendaftaran sampai dengan pelayanan selesai membutuhkan waktu $t_{47}(1) - t_1(1) = 1080 - 5 = 1075$ menit atau 2 hari lebih 1 jam 55 menit.

4.2 *Petri Net* Alur Pelayanan Perbaikan Instalasi

Pada subbab ini dibahas tentang alur *Petri Net* pelayanan perbaikan instalasi. *Petri Net* ini dibuat berdasarkan alur proses pelayanan perbaikan instalasi yang telah dijelaskan pada subbab 2.2. Sama seperti untuk pelayanan pasang baru, *Petri Net* pelayanan perbaikan instalasi haruslah selalu *liveness* agar proses pelayanan dapat berjalan terus. Sehingga *Petri Net* untuk pelayanan perbaikan instalasi adalah pada gambar 4.1.

Keterangan gambar 4.1 untuk *Petri Net* Perbaikan Instalasi:

t_{17} = proses pelanggan masuk ke antrian

t_{18} = proses pelanggan memberikan aduan lewat telepon

t_{19} = proses pelanggan memberikan aduan dengan datang langsung ke bagian Pelayanan Pelanggan

t_{20} = proses berkas aduan dari pelanggan telepon diserahkan ke Kepala Bagian Pelayanan

t_{21} = proses berkas aduan dari pelanggan yang datang langsung diserahkan ke Kepala Bagian Pelayanan

t_{22} = proses Kepala Bagian Pelanggan menulis laporan kerusakan kemudian diserahkan ke Kepala Sub Bagian Meter Segel.

t_{23} = proses survey kerusakan

t_{24} = proses keputusan hasil survey karena kesalahan pelanggan

t_{25} = proses keputusan hasil survey karena bukan kesalahan pelanggan

t_{26} = proses pembayaran ke bagian Pelaksana Keuangan/Kasir

t_{27} = proses pengecekan barang dan pembuatan surat perintah kerja ke bagian Petugas Lapangan

t_{28} = proses BPB (Bon Permintaan Barang) diserahkan ke Bagian Pengurus Gudang

t_{29} = proses mempersiapkan barang dan alat-alat untuk perbaikan instalasi dan pembuatan surat perintah kerja ke bagian Petugas Lapangan

t_{30} = proses petugas lapangan bersiap untuk melakukan pelayanan perbaikan

t_i = proses perjalanan menuju lokasi pelanggan dan pengerjaan permintaan pelanggan oleh tim i dengan $31 \leq i \leq 38$

t_{i+38} = proses tim i telah selesai mengerjakan permintaan pelanggan, konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan selesai, dan perjalanan kembali ke kantor PDAM dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{48} = pelanggan keluar dari antrian

p_{14} = pelanggan yang mengantri

p_{15} = pelanggan yang menelepon

p_{16} = pelanggan yang datang langsung ke bagian Pelayanan Pelanggan

p_{17} = Kepala Sub Bagian Pelanggan

p_{18} = Kepala Sub Bagian Meter Segel

p_{19} = hasil survey

p_{20} = jenis kerusakan karena kesalahan pelanggan

p_{21} = jenis kerusakan karena bukan kesalahan pelanggan

p_{22} = bagian pelaksana keuangan

p_{23} = Bagian Pengurus Gudang/Barang

p_{24} = Surat Perintah sudah diterima oleh petugas pelayanan lapangan

p_{25} = Antrian permintaan pelanggan yang menunggu untuk dilayani oleh petugas lapangan

p_i = pelayanan lapangan oleh tim i selesai dikerjakan dengan $26 \leq i \leq 33$

p_{34} = tim 1 sampai tim 8 selesai mengerjakan permintaan pelanggan dan siap mengerjakan permintaan pelanggan lain selanjutnya (*idle*)

p_{35} = pelanggan yang keluar dari antrian

Pada gambar 4.1 *Petri Net* untuk alur perbaikan instalasi, tidak ada *place* sebagai kondisi yang terhubung dengan t_{17} dikarenakan transisi tersebut mempresentasikan pelanggan yang akan memulai proses pelayanan pengaduan untuk perbaikan instalasi. Pelanggan yang akan melakukan pengaduan ke PDAM dapat melakukan pengaduan setiap hari sehingga membuat antrian dapat terisi setiap saat tanpa persyaratan. Pelanggan yang telah siap melakukan pengaduan berada pada posisi *place* p_{14} dan dapat melakukan pengaduan melalui telepon atau datang langsung ke kantor PDAM ke bagian Pelayanan Pelanggan sehingga pada alur *Petri Net* dibuat dua transisi yaitu masing masing transisi t_{18} dan t_{19} .

Pelanggan yang telah berada di antrian dapat melakukan pengaduan di salah satu fasilitas yang tersedia, sehingga pada *Petri Net* terdapat garis panah penghubung dari *place* p_{14} ke masing-masing transisi t_{18} dan t_{19} .

Pelanggan yang melakukan pengaduan melalui telepon t_{18} akan berada pada *place* p_{15} , sehingga terdapat garis panah penghubung dari t_{18} ke p_{15} . Pelanggan yang melakukan pengaduan dengan datang langsung ke bagian Pelayanan Pelanggan berada pada *place* p_{16} , sehingga terdapat garis panah penghubung dari t_{18} ke *place* p_{16} . Proses selanjutnya adalah transisi t_{20} yaitu proses berkas aduan dari pelanggan telepon diserahkan ke Kepala Bagian Pelayanan dan t_{21} yaitu proses berkas aduan dari pelanggan yang datang langsung diserahkan ke Kepala Bagian Pelayanan. Kepala Bagian Pelayanan yang telah menerima berkas pengaduan dari pelanggan berada pada *place* p_{17} sehingga terdapat garis panah penghubung dari t_{20} ke p_{17} dan dari t_{21} ke p_{17} . Selanjutnya proses kepala Bagian Pelayanan menulis laporan kerusakan kemudian diserahkan ke Kepala Sub Bagian Meter Segel adalah transisi t_{22} sehingga ada garis panah penghubung dari p_{17} ke t_{22} . Kepala bagian Sub Meter segel yang menerima laporan kerusakan berada pada *place* p_{18} , kemudian melakukan survey atas kerusakan yang terjadi. Proses survey kerusakan ini adalah transisi t_{23} , sehingga terdapat garis panah penghubung dari t_{22} ke p_{18} dan dari p_{18} ke t_{23} . Hasil survey berada pada *place* p_{19} terdapat dua keadaan yang berbeda yaitu jika kerusakan terjadi karena kesalahan pelanggan dan kerusakan terjadi karena bukan kesalahan pelanggan. Proses keputusan hasil survey karena kesalahan pelanggan adalah transisi t_{24} dan proses keputusan hasil karena bukan kesalahan pelanggan adalah transisi t_{25} sehingga ada garis panah penghubung dari *place* p_{19} ke t_{24} dan dari p_{19} ke t_{25} . Keadaan untuk jenis kerusakan karena kesalahan pelanggan berada pada *place* p_{20} dan proses selanjutnya adalah transisi t_{26} yaitu pelanggan melakukan pembayaran ke bagian Pelaksana Keuangan/Kasir sehingga ada garis panah penghubung dari p_{20} ke t_{26} . Bagian pelaksana keuangan berada pada *place* p_{22} . Proses selanjutnya adalah transisi t_{28} yaitu BPB (Bon Permintaan Barang) diserahkan ke Bagian Pengurus Gudang sehingga ada garis panah penghubung dari p_{22} ke t_{28} . Keadaan dimana Bagian Pengurus Gudang/Barang yang telah

menerima BPB berada pada *place* p_{23} . Selanjutnya adalah proses mempersiapkan barang dan alat-alat untuk perbaikan instalasi dan pembuatan surat perintah kerja ke bagian Petugas Lapangan yaitu transisi t_{29} sehingga ada garis panah penghubung dari p_{23} ke t_{29} . Sedangkan untuk jenis kerusakan karena bukan kesalahan pelanggan berada pada *place* p_{21} dan proses selanjutnya adalah transisi t_{27} yaitu pengecekan barang dan pembuatan surat perintah kerja ke bagian Petugas Lapangan sehingga ada garis panah penghubung dari p_{21} ke t_{27} . Keadaan dimana surat perintah kerja sudah diterima petugas pelayanan lapangan adalah *place* p_{24} dan kemudian petugas bersiap untuk melakukan pelayanan perbaikan adalah transisi t_{30} sehingga ada garis panah penghubung dari p_{24} ke t_{30} . Antrian permintaan pelanggan yang menunggu untuk dilayani oleh petugas lapangan berada pada *place* p_{25} jadi ada garis panah penghubung dari t_{30} ke p_{25} . Proses selanjutnya adalah transisi t_{31} yaitu petugas lapangan di PDAM yang berada pada *place* p_{34} menuju ke lokasi pelanggan dan mengerjakan permintaan pelanggan, sehingga ada garis panah penghubung dari p_{25} ke t_{31} dan dari p_{34} ke t_{31} . Keadaan dimana pelayanan lapangan telah selesai berada pada *place* p_{26} sehingga ada garis panah yang menghubungkan dari t_{31} ke p_{26} . Setelah pelayanan selesai maka proses selanjutnya adalah transisi t_{39} yaitu petugas melakukan konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan selesai, dan kembali ke kantor PDAM sehingga ada garis panah penghubung dari p_{26} ke t_{39} . Petugas lapangan yang telah kembali ke PDAM berada pada *place* p_{34} dan pelanggan yang telah selesai dilayani dan akan keluar dari antrian berada pada *place* p_{35} sehingga ada garis panah penghubung dari t_{39} ke p_{34} dan t_{39} ke p_{35} . Selanjutnya yaitu proses pelanggan keluar dari antrian dan keadaan kembali ke p_1 , proses ini adalah transisi t_{48} sehingga ada garis panah yang menghubungkan t_{48} ke p_1 .

Berikutnya dilakukan analisa *Petri Net* sistem pelayanan perbaikan instalasi sebagai berikut:

➤ Himpunan *place* =

$$P = \{p_{14}, p_{15}, p_{16}, p_{17}, p_{18}, p_{19}, p_{20}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}, p_{25}, p_{26}, p_{34}, p_{35}\}$$

➤ Himpunan transisi =

$$T = \{t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}, t_{22}, t_{23}, t_{24}, t_{25}, t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{29}, t_{30}, t_{31}, t_{39}, t_{48}\}$$

- Bobot untuk masing-masing *Arc* adalah sebesar satu
- Keadaan awal

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_0(p_{14}) \\ x_0(p_{15}) \\ x_0(p_{16}) \\ x_0(p_{17}) \\ x_0(p_{18}) \\ x_0(p_{19}) \\ x_0(p_{20}) \\ x_0(p_{21}) \\ x_0(p_{22}) \\ x_0(p_{23}) \\ x_0(p_{24}) \\ x_0(p_{25}) \\ x_0(p_{26}) \\ x_0(p_{34}) \\ x_0(p_{35}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Setelah membuat *Petri Net* untuk alur pelayanan perbaikan instalasi, selanjutnya akan dianalisis *liveness* dan *deadlocks*nya dengan menggunakan *Coverability Tree*. Pertama dari *Petri Net* gambar 4.2 tersebut didefinisikan terlebih dahulu matriks *Forward* (A_f) dan *Backward* (A_b). Matriks *Forward* adalah sebuah matriks ukuran $m \times n$ dimana m dan n masing-masing adalah jumlah banyaknya transisi dan *place*. Elemen-elemen yang terdapat pada matriks *Forward* merupakan ada atau tidaknya garis panah penghubung yang menghubungkan setiap transisi t_j ke setiap *place* p_i . Jika terdapat garis panah penghubung maka bernilai satu tetapi jika tidak ada garis panah penghubung maka bernilai nol. Sedangkan matriks *Backward* adalah sebuah matriks berukuran $m \times n$ dimana elemen-elemen penyusunnya merupakan ada atau tidaknya garis panah penghubung yang menghubungkan setiap *place* p_i ke setiap transisi t_j . Jika terdapat garis panah penghubung maka bernilai satu tetapi jika tidak ada garis panah penghubung maka bernilai nol. Sehingga pada *Petri Net* alur pelayanan perbaikan instalasi matriks *Forward* dan *Backward*nya adalah sebagai berikut:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Setelah transisi t_{17} di *fire* terdapat transisi yang *enabled* yaitu t_{18} sampai t_{19} .

Misalkan transisi t_{18} di *fire* yang berarti pelanggan melakukan pengaduan lewat telepon, didapatkan keadaan:

$$x_2 = x_1 + Au$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coverability Tree Petri Net Pelayanan Perbaikan Instalasi

Proses membangun *Coverability Tree* dapat dijelaskan sebagai berikut.

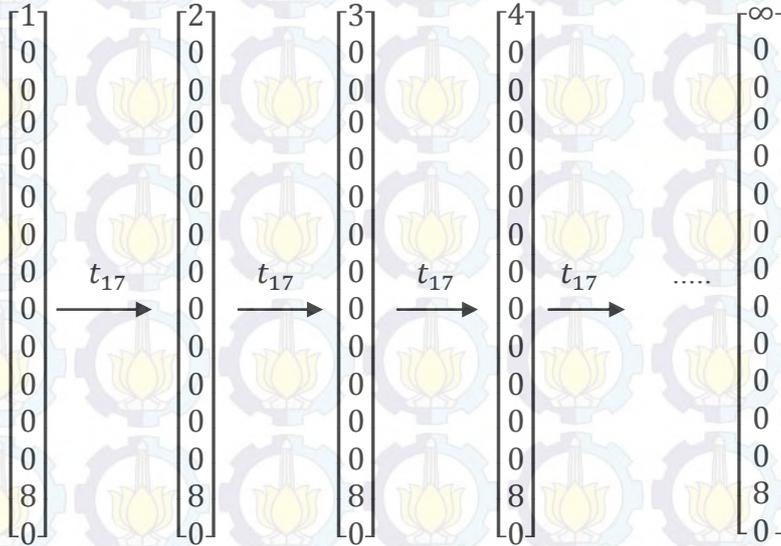
Keadaan $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 8 \ 0]^T$ didefinisikan dengan *node root*. Pada keadaan ini transisi yang *enabled* yaitu t_{17} . Pemfirean transisi ini menyebabkan keadaan *Petri Net* berubah. Jika t_1 difire maka keadaan *Petri Net* akan berubah menjadi $x_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 8 \ 0]^T$. Setelah transisi t_{17} difire maka transisi yang *enabled* adalah, t_{17} , t_{18} dan t_{19} , sehingga ada lima pilihan untuk pemfirean yaitu : 1. t_{17} difire, 2. t_{17} tidak difire dan t_{18} difire, 3. t_{17} tidak difire dan t_{19} difire, 4. t_{17} difire dan t_{18} difire, 5. t_{17} difire dan t_{19} difire.

1. Ketika t_{17} *difire*

Setelah pemfirean yang pertama maka jumlah token di p_{14} adalah satu.

Apabila transisi t_{17} *difire* berkali-kali maka jumlah token di p_{14} selalu bertambah.

Sehingga *Coverability Treenya* adalah gambar 4.2.1 sebagai berikut:



Gambar 4.2.1 *Coverability Tree Petri Net* alur Pelayanan Perbaikan Instalasi ketika t_{17} *difire*

2. Ketika t_{17} tidak *difire* dan t_{18} *difire*

Awalnya token berada di p_{14} , transisi yang *enabled* adalah t_{17} , t_{18} dan t_{19} .

Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{17} tidak *difire* dan t_{18} *difire* seperti pada gambar 4.2.2. Jika t_{18} *difire* mengakibatkan satu token berpindah ke p_{15} . Kemudian t_{20}

difire dan mengakibatkan token berpindah ke p_{17} . Dengan adanya token di p_{17}

menyebabkan t_{22} *enabled*, kemudian t_{22} *difire* sehingga token berpindah ke p_{18} .

Transisi yang *enabled* yaitu t_{23} , kemudian *difire* sehingga token berpindah ke p_{19} .

Dengan adanya token di p_{19} mengakibatkan t_{24} dan t_{25} . Kemungkinan pertama yaitu

t_{24} *difire* dan kemungkinan kedua yaitu t_{25} *difire*. Kemungkinan pertama yaitu jika

transisi t_{24} *difire* maka token akan berpindah ke p_{20} , sehingga transisi t_{26} *enabled*.

Kemudian transisi t_{26} *difire* yang mengakibatkan token berpindah ke p_{22} . Dengan

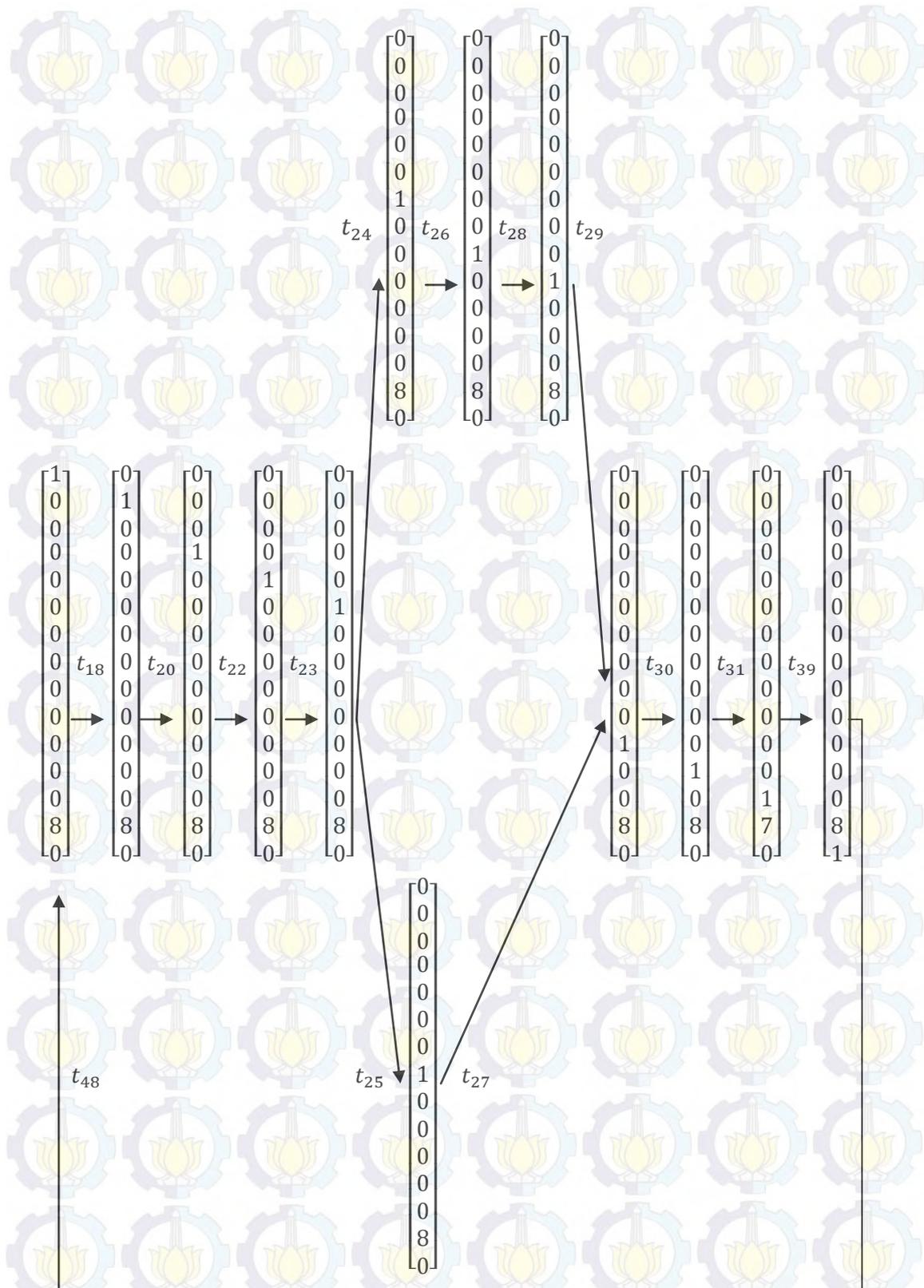
adanya token di p_{22} maka transisi t_{28} *enabled*, sehingga ketika t_{28} *difire* maka token

akan berpindah ke *place* p_{23} . Dengan adanya token di p_{23} maka transisi t_{29} *enabled*,

dan jika t_{29} *difire* maka token akan berpindah ke *place* p_{24} . Kemungkinan kedua

yaitu jika t_{25} *difire* maka token dari p_{19} pindah ke p_{21} . Dengan adanya token di p_{21} maka transisi t_{27} *difire* sehingga token berpindah ke p_{24} . Setelah token berada di p_{24} maka transisi t_{30} *enabled*, dan saat t_{30} *difire* maka token berpindah ke p_{25} . Dengan adanya token di p_{25} maka transisi t_{31} *enabled*. Kemudian t_{31} *difire* yang mengakibatkan token di p_{25} dan di p_{34} berkurang satu, sehingga jumlah token di p_{25} menjadi nol dan jumlah token di p_{34} yang semula berjumlah delapan berkurang satu menjadi delapan, sedangkan token di p_{26} yang semula berjumlah nol bertambah satu menjadi satu. Dengan adanya satu token di p_{26} maka transisi t_{39} *enabled*. Ketika transisi t_{39} *difire* maka jumlah token di p_{26} yang semula berjumlah satu berkurang satu menjadi nol, sedangkan di p_{34} yang memiliki token berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali dan di p_{35} yang semula tidak terdapat token akhirnya bertambah satu menjadi memiliki satu token. Dengan adanya token di p_{35} maka transisi t_{48} *enabled*, dan ketika *difire* maka token akan berpindah kembali ke p_{14} . Sehingga *Coverability Tree* nya adalah gambar 4.2.2 sebagai berikut:

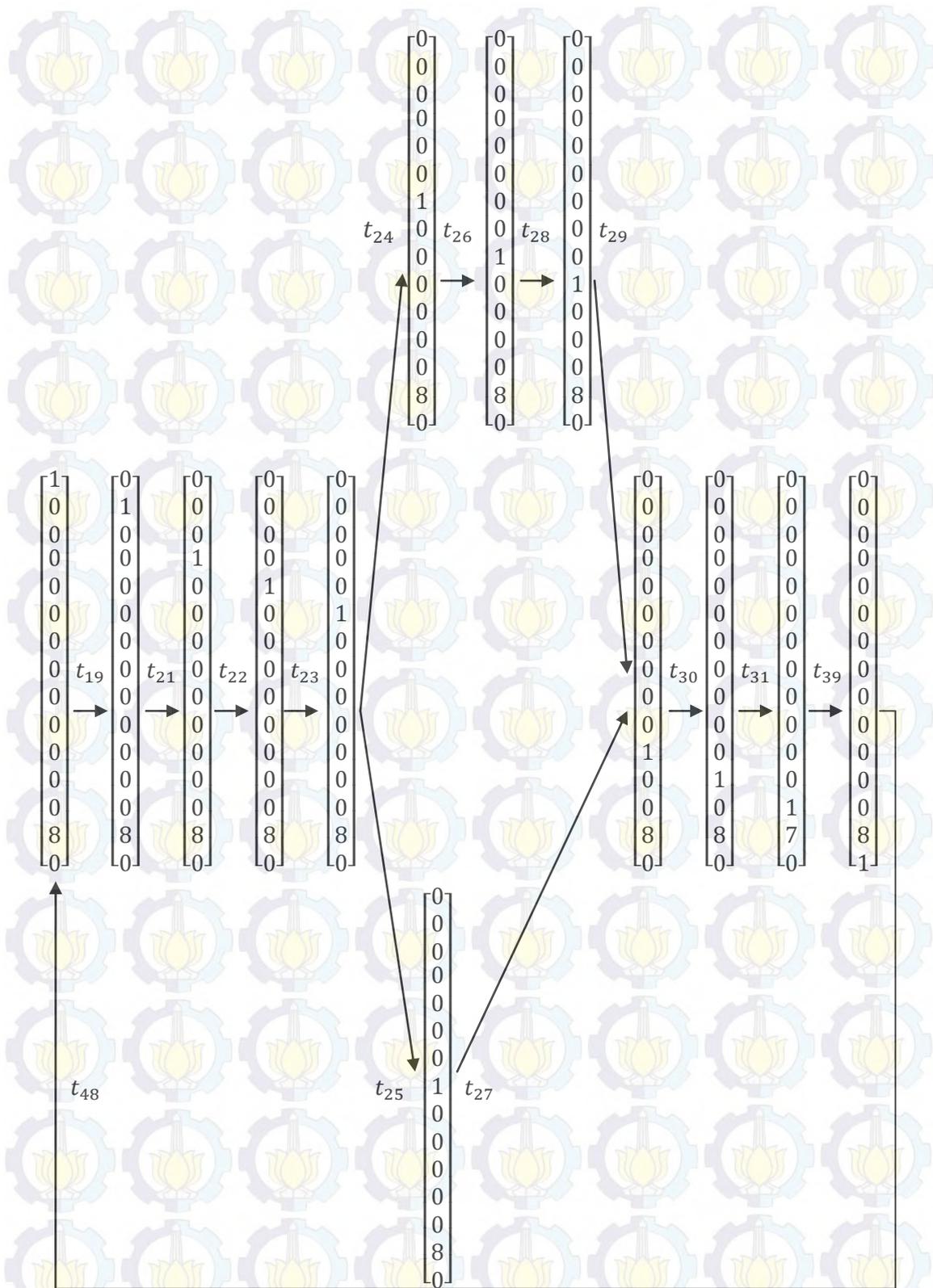




Gambar 4.2.2 *Coverability Tree Petri Net* alur Pelayanan Perbaikan Instalasi ketika t_{17} tidak difire dan t_{18} difire

3. Ketika t_{17} tidak *difire* dan t_{19} *difire*

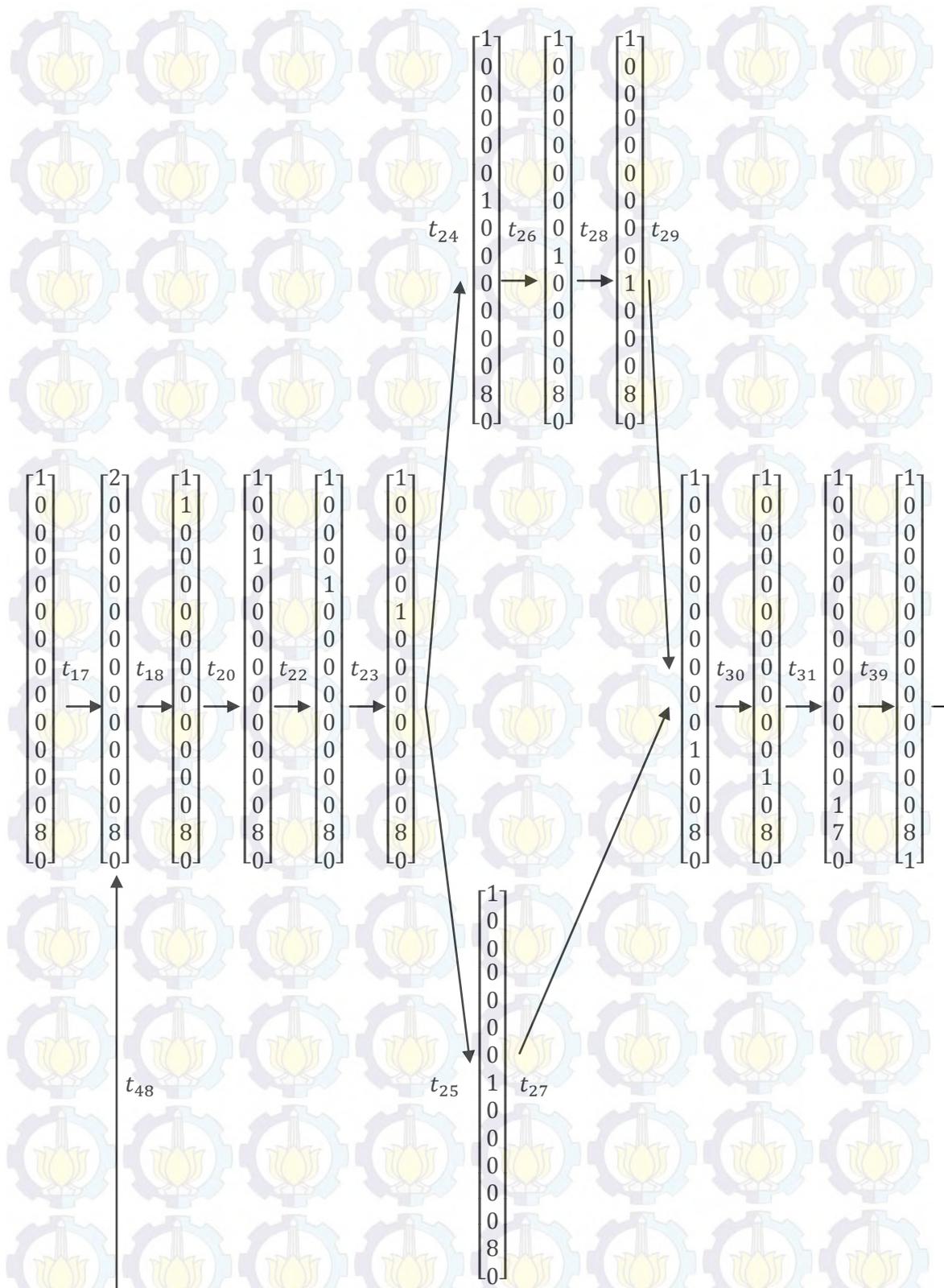
Awalnya token berada di p_{14} , transisi yang *enabled* adalah t_{17}, t_{18} dan t_{19} . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{17} tidak *difire* dan t_{19} *difire* seperti pada gambar 4.2.3. Jika t_{19} *difire* mengakibatkan satu token berpindah ke p_{16} . Kemudian t_{21} *difire* dan mengakibatkan token berpindah ke p_{17} . Dengan adanya token di p_{17} menyebabkan t_{22} *enabled*, kemudian t_{22} *difire* sehingga token berpindah ke p_{18} . Transisi yang *enabled* yaitu t_{23} , kemudian *difire* sehingga token berpindah ke p_{19} . Dengan adanya token di p_{19} mengakibatkan t_{24} dan t_{25} . Kemungkinan pertama yaitu t_{24} *difire* dan kemungkinan kedua yaitu t_{25} *difire*. Kemungkinan pertama yaitu jika transisi t_{24} *difire* maka token akan berpindah ke p_{20} , sehingga transisi t_{26} *enabled*. Kemudian transisi t_{26} *difire* yang mengakibatkan token berpindah ke p_{22} . Dengan adanya token di p_{22} maka transisi t_{28} *enabled*, sehingga ketika t_{28} *difire* maka token akan berpindah ke *place* p_{23} . Dengan adanya token di p_{23} maka transisi t_{29} *enabled*, dan jika t_{29} *difire* maka token akan berpindah ke *place* p_{24} . Kemungkinan kedua yaitu jika t_{25} *difire* maka token dari p_{19} pindah ke p_{21} . Dengan adanya token di p_{21} maka transisi t_{27} *difire* sehingga token berpindah ke p_{24} . Setelah token berada di p_{24} maka transisi t_{30} *enabled*, dan saat t_{30} *difire* maka token berpindah ke p_{25} . Dengan adanya token di p_{25} maka transisi t_{31} *enabled*. Kemudian t_{31} *difire* yang mengakibatkan token di p_{25} dan di p_{34} berkurang satu, sehingga jumlah token di p_{25} menjadi nol dan jumlah token di p_{34} yang semula berjumlah delapan berkurang satu menjadi delapan, sedangkan token di p_{26} yang semula berjumlah nol bertambah satu menjadi satu. Dengan adanya satu token di p_{26} maka transisi t_{39} *enabled*. Ketika transisi t_{39} *difire* maka jumlah token di p_{26} yang semula berjumlah satu berkurang satu menjadi nol, sedangkan di p_{34} yang memiliki token berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali dan di p_{35} yang semula tidak terdapat token akhirnya bertambah satu menjadi memiliki satu token. Dengan adanya token di p_{35} maka transisi t_{48} *enabled*, dan ketika *difire* maka token akan berpindah kembali ke p_{14} . Sehingga *Coverability Tree* nya adalah gambar 4.2.3 sebagai berikut:



Gambar 4.2.3 Coverability Tree Petri Net alur Pelayanan Perbaikan Instalasi ketika t_{17} tidak difire dan t_{19} difire

4. Ketika t_{17} *difire* dan t_{18} *difire*

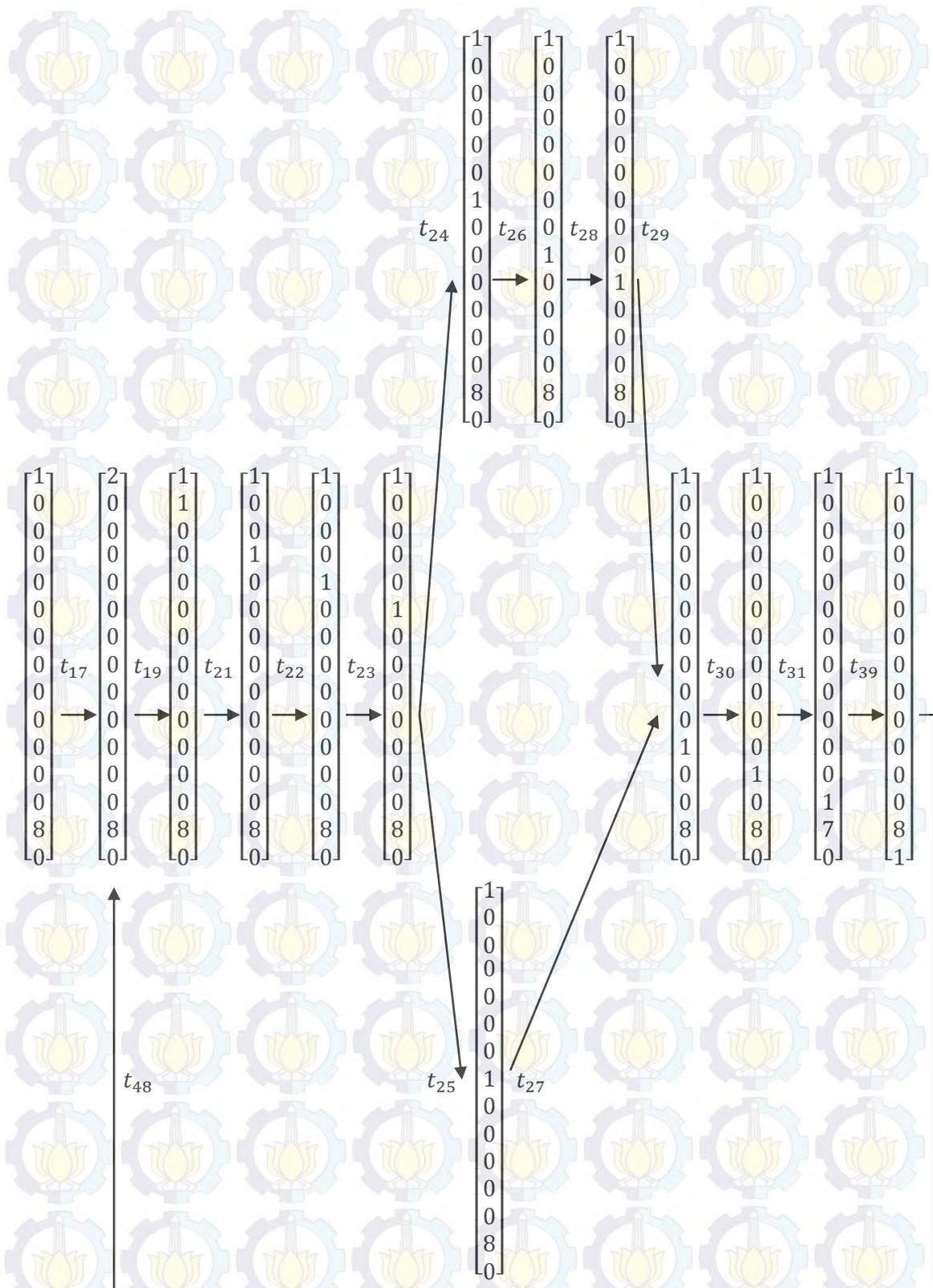
Awalnya token berada di p_{14} , transisi yang *enabled* adalah t_{17}, t_{18} dan t_{19} . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{17} *difire* dan t_{18} *difire* seperti pada gambar 4.2.4. Jika t_{17} *difire* mengakibatkan jumlah token di p_{14} bertambah satu. Kemudian t_{18} *difire* yang mengakibatkan satu token berpindah ke p_{15} . Kemudian t_{20} *difire* dan mengakibatkan token berpindah ke p_{17} . Dengan adanya token di p_{17} menyebabkan t_{22} *enabled*, kemudian t_{22} *difire* sehingga token berpindah ke p_{18} . Transisi yang *enabled* yaitu t_{23} , kemudian *difire* sehingga token berpindah ke p_{19} . Dengan adanya token di p_{19} mengakibatkan t_{24} dan t_{25} . Kemungkinan pertama yaitu t_{24} *difire* dan kemungkinan kedua yaitu t_{25} *difire*. Kemungkinan pertama yaitu jika transisi t_{24} *difire* maka token akan berpindah ke p_{20} , sehingga transisi t_{26} *enabled*. Kemudian transisi t_{26} *difire* yang mengakibatkan token berpindah ke p_{22} . Dengan adanya token di p_{22} maka transisi t_{28} *enabled*, sehingga ketika t_{28} *difire* maka token akan berpindah ke *place* p_{23} . Dengan adanya token di p_{23} maka transisi t_{29} *enabled*, dan jika t_{29} *difire* maka token akan berpindah ke *place* p_{24} . Kemungkinan kedua yaitu jika t_{25} *difire* maka token dari p_{19} pindah ke p_{21} . Dengan adanya token di p_{21} maka transisi t_{27} *difire* sehingga token berpindah ke p_{24} . Setelah token berada di p_{24} maka transisi t_{30} *enabled*, dan saat t_{30} *difire* maka token berpindah ke p_{25} . Dengan adanya token di p_{25} maka transisi t_{31} *enabled*. Kemudian t_{31} *difire* yang mengakibatkan token di p_{25} dan di p_{34} berkurang satu, sehingga jumlah token di p_{25} menjadi nol dan jumlah token di p_{34} yang semula berjumlah delapan berkurang satu menjadi tujuh, sedangkan token di p_{26} yang semula berjumlah nol bertambah satu menjadi satu. Dengan adanya satu token di p_{26} maka transisi t_{39} *enabled*. Ketika transisi t_{39} *difire* maka jumlah token di p_{26} yang semula berjumlah satu berkurang satu menjadi nol, sedangkan di p_{34} yang memiliki token berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali dan di p_{35} yang semula tidak terdapat token akhirnya bertambah satu menjadi memiliki satu token. Dengan adanya token di p_{35} maka transisi t_{48} *enabled*, dan ketika *difire* maka token akan berpindah kembali ke p_{14} . Sehingga *Coverability Tree* nya adalah gambar 4.2.4 sebagai berikut:



Gambar 4.2.4 Coverability Tree Petri Net alur Pelayanan Perbaikan Instalasi ketika t_{17} difire dan t_{18} difire

5. Ketika t_{17} difire dan t_{19} difire

Awalnya token berada di p_{14} , transisi yang *enabled* adalah t_{17}, t_{18} dan t_{19} . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{17} difire dan t_{19} difire seperti pada gambar 4.2.5. Jika t_{17} difire mengakibatkan jumlah token di p_{14} bertambah satu. Kemudian t_{19} difire yang mengakibatkan satu token berpindah ke p_{16} . Kemudian t_{21} difire dan mengakibatkan token berpindah ke p_{17} . Dengan adanya token di p_{17} menyebabkan t_{22} *enabled*, kemudian t_{22} difire sehingga token berpindah ke p_{18} . Transisi yang *enabled* yaitu t_{23} , kemudian difire sehingga token berpindah ke p_{19} . Dengan adanya token di p_{19} mengakibatkan t_{24} dan t_{25} . Kemungkinan pertama yaitu t_{24} difire dan kemungkinan kedua yaitu t_{25} difire. Kemungkinan pertama yaitu jika transisi t_{24} difire maka token akan berpindah ke p_{20} , sehingga transisi t_{26} *enabled*. Kemudian transisi t_{26} difire yang mengakibatkan token berpindah ke p_{22} . Dengan adanya token di p_{22} maka transisi t_{28} *enabled*, sehingga ketika t_{28} difire maka token akan berpindah ke *place* p_{23} . Dengan adanya token di p_{23} maka transisi t_{29} *enabled*, dan jika t_{29} difire maka token akan berpindah ke *place* p_{24} . Kemungkinan kedua yaitu jika t_{25} difire maka token dari p_{19} pindah ke p_{21} . Dengan adanya token di p_{21} maka transisi t_{27} difire sehingga token berpindah ke p_{24} . Setelah token berada di p_{24} maka transisi t_{30} *enabled*, dan saat t_{30} difire maka token berpindah ke p_{25} . Dengan adanya token di p_{25} maka transisi t_{31} *enabled*. Kemudian t_{31} difire yang mengakibatkan token di p_{25} dan di p_{34} berkurang satu, sehingga jumlah token di p_{25} menjadi nol dan jumlah token di p_{34} yang semula berjumlah delapan berkurang satu menjadi tujuh, sedangkan token di p_{26} yang semula berjumlah nol bertambah satu menjadi satu. Dengan adanya satu token di p_{26} maka transisi t_{39} *enabled*. Ketika transisi t_{39} difire maka jumlah token di p_{26} yang semula berjumlah satu berkurang satu menjadi nol, sedangkan di p_{34} yang memiliki token berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali dan di p_{35} yang semula tidak terdapat token akhirnya bertambah satu menjadi memiliki satu token. Dengan adanya token di p_{35} maka transisi t_{48} *enabled*, dan ketika difire maka token akan berpindah kembali ke p_{14} . Sehingga *Coverability Tree* nya adalah gambar 4.2.5 sebagai berikut:



Gambar 4.2.5 Coverability Tree Petri Net alur Pelayanan Perbaikan Instalasi ketika t_{17} difire dan t_{19} difire

Setelah melakukan pemfirean berdasarkan pilihan-pilihan tersebut, terlihat bahwa *Coverability Tree* dari *Petri Net* tersebut membentuk *looping* saat proses pemfirean yaitu proses pemfirean tidak pernah berhenti. Sehingga *Petri Net* tersebut adalah *liveness*.

Model Aljabar *Max Plus* dari Alur *Petri Net* Pelayanan Perbaikan Instalasi yang Dikaitkan dengan Waktu

Untuk mengetahui lama waktu dan waktu berakhirnya proses pelayanan perbaikan instalasi, maka *Petri Net* sistem pelayanan perbaikan instalasi diselesaikan dengan menggunakan model aljabar *Max Plus* sebelumnya terlebih dahulu diberikan definisi variabel-variabel yang digunakan untuk memodelkan studi kasus. Variabel yang menunjukkan waktu, sebagai berikut:

$t_{17}(k)$ = waktu pelanggan masuk ke antrian saat ke- k

$t_{18}(k)$ = waktu proses pelanggan memberikan aduan lewat telepon saat ke- k

$t_{19}(k)$ = waktu pelanggan memberikan aduan dengan datang langsung ke bagian

Pelayanan Pelanggan saat ke- k

$t_{20}(k)$ = waktu berkas aduan dari pelanggan telepon diserahkan ke Kepala

Bagian Pelayanan saat ke- k

$t_{21}(k)$ = waktu berkas aduan dari pelanggan yang datang langsung diserahkan ke

Kepala Bagian Pelayanan saat ke- k

$t_{22}(k)$ = waktu Kepala Bagian Pelanggan menulis laporan kerusakan kemudian

diserahkan ke Kepala Sub Bagian Meter Segel saat ke- k

$t_{23}(k)$ = waktu survey kerusakan saat ke- k

$t_{24}(k)$ = waktu keputusan hasil survey karena kesalahan pelanggan saat ke- k

$t_{25}(k)$ = waktu keputusan hasil survey karena bukan kesalahan pelanggan saat

ke- k

$t_{26}(k)$ = waktu pembayaran ke bagian Pelaksana Keuangan/Kasir saat ke- k

$t_{27}(k)$ = waktu pengecekan barang dan pemberian surat perintah kerja ke bagian

Petugas Lapangan saat ke- k

$t_{28}(k)$ = waktu BPB (Bon Permintaan Barang) diserahkan ke Bagian Pengurus

Gudang saat ke- k

$t_{29}(k)$ = waktu pemberian surat perintah kerja kepada Petugas Lapangan saat ke-
k

$t_{30}(k)$ = waktu petugas lapangan bersiap untuk melakukan pelayanan saat ke- k

$t_i(k)$ = waktu perjalanan menuju lokasi pelanggan dan pengerjaan permintaan
pelanggan oleh tim i dengan $31 \leq i \leq 38$ saat ke- k

$t_{i+38}(k)$ = waktu tim i telah selesai mengerjakan permintaan pelanggan,
konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan telah selesai, dan
perjalanan kembali ke kantor PDAM dengan $1 \leq i \leq 8$ saat ke- k

$t_{48}(k)$ = waktu pelanggan keluar dari antrian saat ke- k

Adapun variabel-variabel yang menunjukkan lama waktu dalam menjalankan
setiap proses yaitu:

$v_{t_1,k}$ = lamanya proses pelanggan masuk ke antrian

$v_{t_{18},k}$ = lamanya proses pelanggan memberikan aduan lewat telepon

$v_{t_{19},k}$ = lamanya proses pelanggan memberikan aduan dengan datang langsung ke
bagian Pelayanan Pelanggan

$v_{t_{20},k}$ = lamanya proses berkas aduan dari pelanggan telepon diserahkan ke
Kepala Bagian Pelayanan

$v_{t_{21},k}$ = lamanya proses berkas aduan dari pelanggan yang datang langsung
diserahkan ke Kepala Bagian Pelayanan

$v_{t_{22},k}$ = lamanya proses Kepala Bagian Pelanggan menulis laporan kerusakan
kemudian diserahkan ke Kepala Sub Bagian Meter Segel.

$v_{t_{23},k}$ = lamanya proses survey kerusakan

$v_{t_{24},k}$ = lamanya proses keputusan hasil survey karena kesalahan pelanggan

$v_{t_{25},k}$ = lamanya proses keputusan hasil survey karena bukan kesalahan
pelanggan

$v_{t_{26},k}$ = lamanya proses pembayaran ke bagian Pelaksana Keuangan/Kasir

$v_{t_{27},k}$ = lamanya proses pengecekan barang dan pemberian surat perintah kerja ke
bagian Petugas Lapangan

$v_{t_{28},k}$ = lamanya proses BPB (Bon Permintaan Barang) diserahkan ke Bagian
Pengurus Gudang

$v_{t_{29},k}$ = lamanya proses pemberian surat perintah kerja kepada Petugas Lapangan

$v_{t_{30},k}$ = lamanya petugas lapangan bersiap untuk melakukan pelayanan

$v_{t_i,k}$ = lamanya proses perjalanan menuju lokasi pelanggan dan pengerjaan
permintaan pelanggan oleh tim i dengan $31 \leq i \leq 38$

$v_{t_{i+38},k}$ = lamanya proses tim i telah selesai mengerjakan permintaan pelanggan,
konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan telah selesai, dan
perjalanan kembali ke kantor PDAM dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{48},k}$ = lamanya proses pelanggan keluar dari antrian.

a. Proses perbaikan instalasi karena bukan kesalahan pelanggan

$$t_{17}(k) = v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} t_{18}(k) &= v_{t_{18},k} \otimes (t_{17}(k) \oplus t_{48}(k-1)) \\ &= v_{t_{18},k} \otimes (v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus t_{48}(k-1)) \\ &= v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} t_{19}(k) &= v_{t_{19},k} \otimes (t_{17}(k) \oplus t_{48}(k-1)) \\ &= v_{t_{19},k} \otimes (v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus t_{48}(k-1)) \\ &= v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} t_{20}(k) &= v_{t_{20},k} \otimes t_{18}(k) \\ &= v_{t_{20},k} \otimes (v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1)) \\ &= v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} t_{21}(k) &= v_{t_{21},k} \otimes t_{19}(k) \\ &= v_{t_{21},k} \otimes (v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1)) \\ &= v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
t_{22}(k) &= v_{t_{22},k} \otimes (t_{20}(k) \oplus t_{21}(k)) \\
&= v_{t_{22},k} \otimes (v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \\
&\quad \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \\
&\quad \otimes t_{48}(k-1)) \\
&= v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \\
&\quad \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{22},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1) \tag{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{23}(k) &= v_{t_{23},k} \otimes t_{22}(k) \\
&= v_{t_{23},k} \otimes (v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \\
&\quad \oplus v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1)) \\
&= v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \\
&\quad \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1) \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{25}(k) &= v_{t_{25},k} \otimes t_{23}(k) \\
&= v_{t_{25},k} \otimes (v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{23},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1)) \\
&= v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{25},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1) \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{27}(k) &= v_{t_{27},k} \otimes t_{25}(k) \\
&= v_{t_{27},k} \otimes (v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \\
&\quad \oplus v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \\
& \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1) \\
& t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), \\
& t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \tag{11}
\end{aligned}$$

$t_{32}(k)$ sampai $t_{38}(k)$ memiliki model aljabar *Max Plus* yang sama dengan $t_{31}(k)$ karena memiliki *Coverability Tree* yang sama.

$$\begin{aligned}
t_{39}(k) &= v_{t_{39},k} \otimes t_{31}(k) \\
&= v_{t_{39},k} \otimes (v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \\
& \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \\
& \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \\
& \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \\
& \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes (\ominus \\
& (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), \\
& t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1)))) \\
&= v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \\
& \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \\
& \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \\
& \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \\
& \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \\
& \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), \\
& t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), \\
& t_{46}(k-1))) \tag{12}
\end{aligned}$$

$t_{39}(k)$ sampai $t_{46}(k)$ memiliki model aljabar *Max Plus* yang sama dengan $t_{39}(k)$ karena memiliki *Coverability Tree* yang sama.

$$\begin{aligned}
t_{48}(k) &= v_{t_{48,k}} \otimes t_{39}(k) \\
&= v_{t_{48,k}} \otimes (v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{30,k}} \otimes v_{t_{27,k}} \otimes v_{t_{25,k}} \otimes v_{t_{23,k}} \otimes v_{t_{22,k}} \otimes v_{t_{20,k}} \\
&\quad \otimes v_{t_{18,k}} \otimes v_{t_{17,k}} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{30,k}} \otimes v_{t_{27,k}} \otimes v_{t_{25,k}} \\
&\quad \otimes v_{t_{23,k}} \otimes v_{t_{22,k}} \otimes v_{t_{20,k}} \otimes v_{t_{18,k}} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{30,k}} \\
&\quad \otimes v_{t_{27,k}} \otimes v_{t_{25,k}} \otimes v_{t_{23,k}} \otimes v_{t_{22,k}} \otimes v_{t_{21,k}} \otimes v_{t_{19,k}} \otimes v_{t_{17,k}} \otimes t_{17}(k-1) \\
&\quad \oplus v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{30,k}} \otimes v_{t_{27,k}} \otimes v_{t_{25,k}} \otimes v_{t_{23,k}} \otimes v_{t_{22,k}} \otimes v_{t_{21,k}} \otimes v_{t_{19,k}} \\
&\quad \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), \\
&\quad t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), \\
&\quad t_{46}(k-1)))) \\
&= v_{t_{48,k}} \otimes v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{30,k}} \otimes v_{t_{27,k}} \otimes v_{t_{25,k}} \otimes v_{t_{23,k}} \otimes v_{t_{22,k}} \otimes v_{t_{20,k}} \\
&\quad \otimes v_{t_{18,k}} \otimes v_{t_{17,k}} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{48,k}} \otimes v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{30,k}} \otimes v_{t_{27,k}} \\
&\quad \otimes v_{t_{25,k}} \otimes v_{t_{23,k}} \otimes v_{t_{22,k}} \otimes v_{t_{20,k}} \otimes v_{t_{18,k}} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{48,k}} \otimes v_{t_{39,k}} \\
&\quad \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{30,k}} \otimes v_{t_{27,k}} \otimes v_{t_{25,k}} \otimes v_{t_{23,k}} \otimes v_{t_{22,k}} \otimes v_{t_{21,k}} \otimes v_{t_{19,k}} \otimes v_{t_{17,k}} \\
&\quad \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{48,k}} \otimes v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{30,k}} \otimes v_{t_{27,k}} \otimes v_{t_{25,k}} \otimes v_{t_{23,k}} \\
&\quad \otimes v_{t_{22,k}} \otimes v_{t_{21,k}} \otimes v_{t_{19,k}} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{48,k}} \otimes v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes \\
&\quad (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1) \\
&\quad t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \tag{13}
\end{aligned}$$

Sehingga dari persamaan (1), (12), dan (13) diperoleh untuk jadwal lamanya proses pelayanan perbaikan instalasi karena bukan kesalahan pelanggan adalah:

$$\begin{bmatrix} t_{17}(k) \\ t_{39}(k) \\ t_{48}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_{17,k}} & a & a \\ b & c & d \\ e & f & g \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} t_{17}(k-1) \\ M \\ t_{48}(k-1) \end{bmatrix}$$

$$M = \ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))$$

Nilai $a = \varepsilon$ supaya:

$$v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus a \otimes t_{48}(k-1) \oplus a \otimes M = v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1)$$

Nilai b didefinisikan sebagai:

$$b = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \\ \otimes v_{t_{17},k} \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \\ \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k}$$

Nilai c didefinisikan sebagai:

$$c = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k}$$

Nilai d didefinisikan sebagai:

$$d = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \\ \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k}$$

Nilai e didefinisikan sebagai:

$$e = v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \\ \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \oplus v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \\ \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k}$$

Nilai f didefinisikan sebagai:

$$f = v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k}$$

Nilai g didefinisikan sebagai:

$$g = v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \\ \otimes v_{t_{18},k} \oplus v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \\ \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k}$$

Selanjutnya misalkan diberikan lama waktu proses (dalam menit) tiap tahap ke-1

$$V_{t_{17},1} = 5$$

$$V_{t_{18},1} = 10$$

$$V_{t_{19},1} = 10$$

$$V_{t_{20},1} = 5$$

$$V_{t_{21},1} = 5$$

$$V_{t_{22},1} = 10$$

$$V_{t_{23},1} = 8 \times 60 = 480$$

$$V_{t_{25},1} = 5$$

$$v_{t_{27},1} = 30$$

$$v_{t_{30},1} = 15$$

$$v_{t_{31},1} = 280$$

$$v_{t_{39},1} = 100$$

$$v_{t_{48},1} = 5$$

$$b = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \\ \otimes v_{t_{17},k} \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k}$$

$$\otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k}$$

$$= 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \otimes 5 \oplus 100$$

$$\otimes 280 \otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \otimes 5 = 940 \text{ menit}$$

$$c = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} = 100 + 280 = 380 \text{ menit}$$

$$d = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k}$$

$$\oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k}$$

$$= 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \oplus 100 \otimes 280$$

$$\otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 = 935 \text{ menit}$$

$$e = v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k}$$

$$\otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \oplus v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k}$$

$$\otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k}$$

$$= 5 \otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \otimes 5 \oplus 5$$

$$\otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \otimes 5 = 945$$

menit

$$f = v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} = 5 \otimes 100 \otimes 280 = 385 \text{ menit}$$

$$g = v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k}$$

$$\begin{aligned}
& \otimes v_{t_{18},k} \oplus v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{27},k} \otimes v_{t_{25},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \\
& \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \\
& = 5 \otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \oplus 5 \otimes \\
& 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 30 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 = 940 \text{ menit}
\end{aligned}$$

Untuk keadaan awal $\begin{bmatrix} t_{17}(k) \\ M \\ t_{48}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Didapatkan

$$\begin{bmatrix} t_{17}(1) \\ t_{39}(1) \\ t_{48}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 940 & 380 & 935 \\ 945 & 385 & 940 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 940 \\ 945 \end{bmatrix}$$

Proses pelayanan perbaikan instalasi karena bukan kesalahan pelanggan mulai dari pengaduan sampai dengan pelayanan selesai membutuhkan waktu $t_{48}(1) - t_{17}(1) = 945 - 5 = 940$ menit atau 1 hari lebih 7 jam 40 menit.

b. Proses perbaikan instalasi karena kesalahan pelanggan

Dengan mendefinisikan kembali persamaan (1) yaitu:

$$t_{17}(k) = v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1)$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (2) sampai (7)

Selanjutnya didapatkan persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
t_{24}(k) &= v_{t_{24},k} \otimes t_{23}(k) \\
&= v_{t_{24},k} \otimes (v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{23},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1)) \\
&= v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{24},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \\
&\quad \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \\
&\quad \otimes t_{48}(k-1) \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \\ & \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1) \end{aligned} \quad (17)$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (14) sampai (17). Maka di dapatkan:

$$\begin{aligned} t_{30}(k) &= v_{t_{30},k} \otimes t_{29}(k) \\ &= v_{t_{30},k} \otimes (v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \\ & \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \\ & \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \\ & \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \\ & \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1)) \\ &= v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \\ & \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \\ & \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \\ & \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{30},k} \\ & \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \\ & \otimes t_{48}(k-1) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} t_{31}(k) &= v_{t_{31},k} \otimes (t_{30}(k) \oplus (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), \\ & t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1)))) \\ &= v_{t_{31},k} \otimes (v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \\ & \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \\ & \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \\ & \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \\ & \oplus v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \\ & \otimes t_{48}(k-1) \oplus (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), \\ & t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1)))) \\ &= v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \\ & \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \\ & \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \\
& \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \\
& \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), \\
& t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), \\
& t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \quad (19)
\end{aligned}$$

$t_{32}(k)$ sampai $t_{38}(k)$ memiliki model aljabar *Max Plus* yang sama dengan $t_{31}(k)$ karena memiliki *Coverability Tree* yang sama.

$$\begin{aligned}
t_{39}(k) &= v_{t_{39},k} \otimes t_{31}(k) \\
&= v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \\
& \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \\
& \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes t_{48}(k-1) \\
& \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \\
& \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \\
& \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1) \\
& \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), \\
& t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \quad (20)
\end{aligned}$$

$t_{39}(k)$ sampai $t_{46}(k)$ memiliki model aljabar *Max Plus* yang sama dengan $t_{39}(k)$ karena memiliki *Coverability Tree* yang sama.

$$\begin{aligned}
t_{48}(k) &= v_{t_{48},k} \otimes t_{39}(k) \\
&= v_{t_{48},k} \otimes (v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \\
& \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \\
& \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \\
& \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \\
& \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \\
& \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), \\
& t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), \\
& t_{46}(k-1))) \\
& = v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \\
& \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \\
& \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \\
& \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \\
& \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus v_{t_{48},k} \\
& \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \\
& \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes t_{48}(k-1) \oplus v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1) \\
& t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), \\
& t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \tag{21}
\end{aligned}$$

Sehingga dari persamaan (1), (20), dan (21) diperoleh untuk jadwal lamanya proses pelayanan perbaikan instalasi karena bukan kesalahan pelanggan adalah:

$$\begin{bmatrix} t_{17}(k) \\ t_{39}(k) \\ t_{48}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_{17},k} & h & h \\ i & j & k \\ l & n & o \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} t_{17}(k-1) \\ M \\ t_{48}(k-1) \end{bmatrix}$$

$$M = \ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))$$

Nilai $h = \varepsilon$ supaya:

$$v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1) \oplus a \otimes M \oplus a \otimes t_{48}(k-1) = v_{t_{17},k} \otimes t_{17}(k-1)$$

Nilai i didefinisikan sebagai:

$$i = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k}$$

Nilai j didefinisikan sebagai:

$$j = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k}$$

Nilai k didefinisikan sebagai:

$$k = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k}$$

Nilai l didefinisikan sebagai:

$$l = v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \oplus v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k}$$

Nilai n didefinisikan sebagai:

$$n = v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k}$$

Nilai o didefinisikan sebagai:

$$o = v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \oplus v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k}$$

Selanjutnya misalkan diberikan lama waktu proses (dalam menit) tiap tahap

ke-1

$$v_{t_{17},1} = 5$$

$$v_{t_{18},1} = 10$$

$$v_{t_{19},1} = 10$$

$$v_{t_{20},1} = 5$$

$$v_{t_{21},1} = 5$$

$$v_{t_{22},1} = 10$$

$$v_{t_{23},1} = 8 \times 60 = 480$$

$$v_{t_{24},1} = 5$$

$$v_{t_{26},1} = 10$$

$$v_{t_{28},1} = 10$$

$$v_{t_{29},1} = 10$$

$$v_{t_{30},1} = 15$$

$$v_{t_{31},1} = 280$$

$$v_{t_{39},1} = 100$$

$$v_{t_{48},1} = 5$$

$$i = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes$$

$$v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes$$

$$v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k}$$

$$= 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10$$

$$\otimes 5 \oplus 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes$$

$$5 \otimes 10 \otimes 5$$

$$= 940 \text{ menit}$$

$$j = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} = 380 \text{ menit}$$

$$k = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes$$

$$v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes$$

$$v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k}$$

$$= 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10$$

$$\oplus 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10$$

$$= 935 \text{ menit}$$

$$l = v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes$$

$$v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{20},k} \otimes v_{t_{18},k} \otimes v_{t_{17},k} \oplus v_{t_{48},k} \otimes v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes v_{t_{29},k}$$

$$\otimes v_{t_{28},k} \otimes v_{t_{26},k} \otimes v_{t_{24},k} \otimes v_{t_{23},k} \otimes v_{t_{22},k} \otimes v_{t_{21},k} \otimes v_{t_{19},k} \otimes v_{t_{17},k}$$

$$= 5 \otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \otimes 5 \oplus 5 \otimes 100 \otimes 180 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 480 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \otimes 5 = 945 \text{ menit}$$

$$n = v_{t_{48,k}} \otimes v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} = 5 \otimes 100 \otimes 280 = 385 \text{ menit}$$

$$o = v_{t_{48,k}} \otimes v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{30,k}} \otimes v_{t_{29,k}} \otimes v_{t_{28,k}} \otimes v_{t_{26,k}} \otimes v_{t_{24,k}} \otimes v_{t_{23,k}} \otimes v_{t_{22,k}} \otimes v_{t_{20,k}} \otimes v_{t_{18,k}} \oplus v_{t_{48,k}} \otimes v_{t_{39,k}} \otimes v_{t_{31,k}} \otimes v_{t_{30,k}} \otimes v_{t_{29,k}} \otimes v_{t_{28,k}} \otimes v_{t_{26,k}} \otimes v_{t_{24,k}} \otimes v_{t_{23,k}} \otimes v_{t_{22,k}} \otimes v_{t_{21,k}} \otimes v_{t_{19,k}}$$

$$= 5 \otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 1440 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 \oplus 5 \otimes 100 \otimes 280 \otimes 15 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 1440 \otimes 10 \otimes 5 \otimes 10 = 940 \text{ menit}$$

Untuk keadaan awal
$$\begin{bmatrix} t_{17}(k) \\ M \\ t_{48}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Didapatkan

$$\begin{bmatrix} t_{17}(k) \\ t_{39}(k) \\ t_{48}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 940 & 380 & 935 \\ 945 & 385 & 940 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 940 \\ 945 \end{bmatrix}$$

Proses pelayanan perbaikan instalasi karena kesalahan pelanggan mulai dari pengaduan sampai dengan pelayanan selesai membutuhkan waktu $t_{48}(1) - t_{17}(1) = 945 - 5 = 940$ menit atau 1 hari lebih 7 jam 40 menit.

Contoh Kasus 1:

Misal diasumsikan jika ada 12 pelanggan yang sudah mendaftar pada hari Senin 15 Desember 2014, 12 pelanggan yang sudah mendaftar pada hari Selasa 16 Desember 2014, dan 10 pelanggan yang sudah mendaftar pada hari Rabu 17 Desember 2014, Maka penjadwalan untuk melayani pelanggan yang telah mendaftar pada hari tersebut adalah sebagai berikut:

Tabel 4.1 Penjadwalan pelayanan untuk pelanggan yang telah mendaftar pada hari Senin 15 Desember 2014 sampai hari Rabu 17 Desember 2014 dengan delapan tim karyawan lapangan.

No antrian Pelanggan	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pasang Baru	Pendaftaran		Senin 08.00 WIB	Senin 08.10 WIB	Senin 08.30 WIB			Senin 10.00 WIB			Senin 13.00 WIB	Senin 13.30 WIB	Selasa 08.00 WIB
	Selesai Pelayanan		Rabu 09.55 WIB	Rabu 10.05 WIB	Rabu 10.25 WIB			Rabu 11.55 WIB				Rabu 14.50 WIB	Rabu 14.50 WIB
Perbaikan Instalasi	Pendaftaran	Senin 07.45 WIB	Senin 07.55 WIB			Senin 09.00 WIB	Senin 09.15 WIB		Senin 10.15 WIB	Senin 11.00 WIB			
	Selesai Pelayanan	Selasa 15.25 WIB	Selasa 15.30 WIB			Rabu 08.40 WIB	Rabu 08.55 WIB		Rabu 14.10 WIB	Rabu 14.10 WIB			
Pasang Baru	Pendaftaran			Selasa 10.00 WIB	Selasa 10.15 WIB				Selasa 11.30 WIB	Selasa 11.40 WIB			Rabu 08.00 WIB
	Selesai Pelayanan			Kamis 11.55 WIB	Kamis 12.30 WIB				Kamis 14.40 WIB	Kamis 15.05 WIB			Jumat 11.25 WIB
Perbaikan Instalasi	Pendaftaran	Selasa 08.30 WIB	Selasa 09.00 WIB	Selasa 10.45 WIB	Selasa 11.00 WIB	Selasa 11.10 WIB					Selasa 13.20 WIB	Selasa 14.00 WIB	
	Selesai Pelayanan	Kamis 08.15 WIB	Kamis 08.40 WIB	Kamis 12.30 WIB	Kamis 13.40 WIB	Kamis 14.10 WIB					Jumat 08.10 WIB	Jumat 08.30 WIB	

No antrian Pelanggan	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Pasang Baru	Pendaftaran		Rabu 08.45 WIB	Rabu 09.00 WIB				Rabu 10.50 WIB	
	Selesai Pelayanan		Jumat 13.20 WIB	Jumat 14.15 WIB				Sabtu 10.30 WIB	
Perbaikan Instalasi	Pendaftaran	Rabu 08.20 WIB			Rabu 09.30 WIB	Rabu 10.10 WIB	Rabu 10.20 WIB		Rabu 11.30 WIB
	Selesai Pelayanan	Jumat 09.10 WIB	Jumat 09.35 WIB		Jumat 10.40 WIB	Jumat 11.40 WIB	Jumat 13.10 WIB		Sabtu 10.10 WIB

Keterangan Tabel:

Warna kuning

Warna hijau

Warna biru

= Jadwal pelayanan untuk pendaftar hari senin

= Jadwal pelayanan untuk pendaftar hari selasa

= Jadwal pelayanan untuk pendaftar hari rabu

Dari tabel 4.1 dapat dilihat bahwa untuk pendaftaran pelayanan selama tiga hari yaitu mulai hari senin 15 Desember 2014 sampai hari rabu 17 Desember 2014, PDAM dapat menyelesaikan pelayanannya sampai hari sabtu 20 Desember 2014 atau dapat dikatakan bahwa membutuhkan waktu enam hari kerja untuk menyelesaikan pelayanan dengan menggunakan delapan tim keryawan lapangan.

Selanjutnya Misal diasumsikan jika kantor PDAM menambah jumlah karyawan lapangan sebanyak enam orang (3 tim). Maka penjadwalan untuk melayani pelanggan yang telah mendaftar pada hari tersebut adalah sebagai berikut:

Tabel 4.1 Penjadwalan pelayanan untuk pelanggan yang telah mendaftar pada hari Senin 15 Desember 2014 sampai hari Rabu 17 Desember 2014 dengan delapan tim karyawan lapangan.

No antrian Pelanggan	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pasang Baru	Pendaftaran		Senin 08.00 WIB	Senin 08.10 WIB	Senin 08.30 WIB			Senin 10.00 WIB			Senin 13.00 WIB	Senin 13.30 WIB	Selasa 08.00 WIB
	Selesai Pelayanan		Rabu 09.55 WIB	Rabu 10.05 WIB	Rabu 10.25 WIB			Rabu 11.55 WIB				Rabu 14.50 WIB	Rabu 14.50 WIB
Perbaikan Instalasi	Pendaftaran	Senin 07.45 WIB	Senin 07.55 WIB			Senin 09.00 WIB	Senin 09.15 WIB		Senin 10.15 WIB	Senin 11.00 WIB			
	Selesai Pelayanan	Selasa 15.25 WIB	Selasa 15.30 WIB			Rabu 08.40 WIB	Rabu 08.55 WIB		Rabu 14.10 WIB	Rabu 14.10 WIB			
Pasang Baru	Pendaftaran			Selasa 10.00 WIB	Selasa 10.15 WIB				Selasa 11.30 WIB	Selasa 11.40 WIB			Rabu 08.00 WIB
	Selesai Pelayanan			Kamis 11.55 WIB	Kamis 12.30 WIB				Kamis 14.40 WIB	Kamis 15.05 WIB			Jumat 11.25 WIB
Perbaikan Instalasi	Pendaftaran	Selasa 08.30 WIB	Selasa 09.00 WIB	Selasa 10.45 WIB	Selasa 11.00 WIB	Selasa 11.10 WIB	Selasa 11.00 WIB	Selasa 11.10 WIB			Selasa 13.20 WIB	Selasa 14.00 WIB	
	Selesai Pelayanan	Kamis 08.15 WIB	Kamis 08.40 WIB	Kamis 12.30 WIB	Kamis 13.40 WIB	Kamis 14.10 WIB	Kamis 13.40 WIB	Kamis 14.10 WIB			Jumat 08.10 WIB	Jumat 08.30 WIB	

No antrian Pelanggan	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Pasang Baru	Pendaftaran		Rabu 08.45 WIB	Rabu 09.00 WIB				Rabu 10.50 WIB	
	Selesai Pelayanan		Jumat 13.20 WIB	Jumat 14.15 WIB				Sabtu 10.30 WIB	
Perbaikan Instalasi	Pendaftaran	Rabu 08.20 WIB			Rabu 09.30 WIB	Rabu 10.10 WIB	Rabu 10.20 WIB		Rabu 11.30 WIB
	Selesai Pelayanan	Jumat 09.10 WIB	Jumat 09.35 WIB		Jumat 10.40 WIB	Jumat 11.40 WIB	Jumat 13.10 WIB		Sabtu 10.10 WIB

Keterangan Tabel:

Warna kuning

Warna hijau

Warna biru

= Jadwal pelayanan untuk pendaftar hari senin

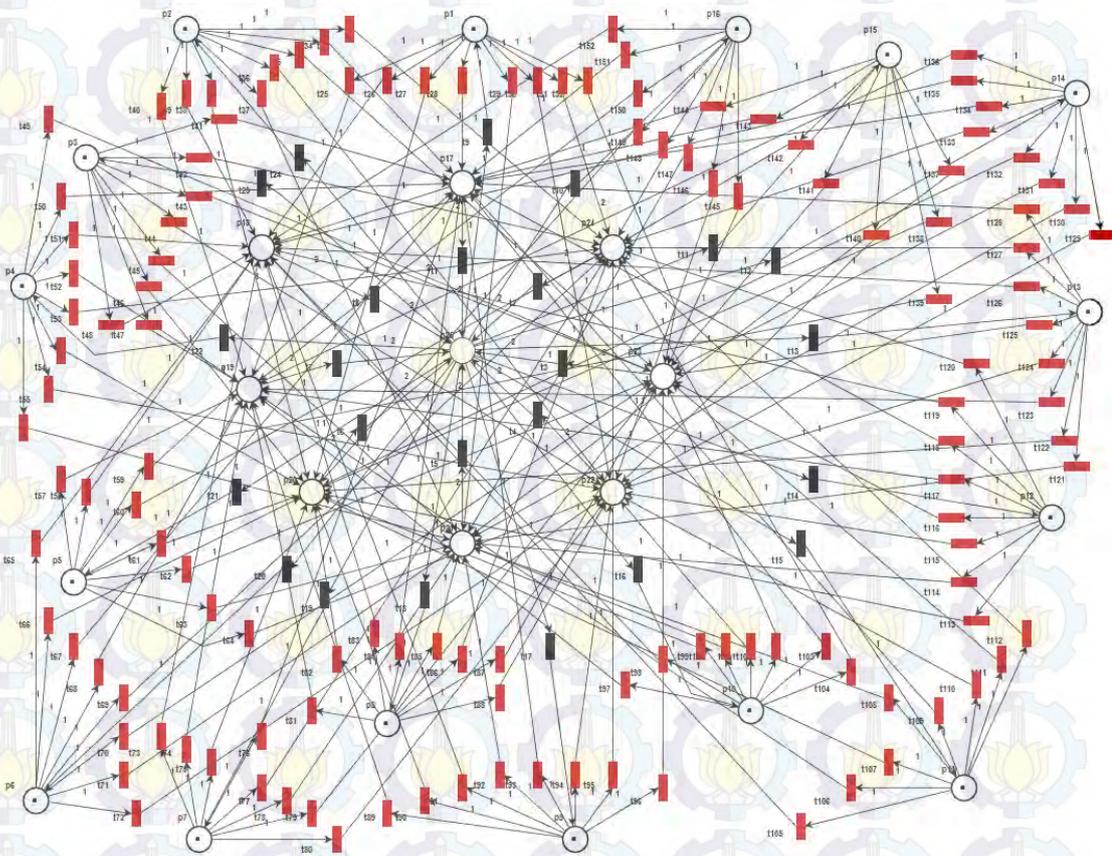
= Jadwal pelayanan untuk pendaftar hari selasa

= Jadwal pelayanan untuk pendaftar hari rabu

Dari tabel 4.2 dapat dilihat bahwa untuk pendaftaran pelayanan selama tiga hari yaitu mulai hari senin 15 Desember 2014 sampai hari rabu 17 Desember 2014, PDAM dapat menyelesaikan pelayanannya sampai hari jumat 19 Desember 2014 atau dapat dikatakan bahwa membutuhkan waktu lima hari kerja untuk menyelesaikan pelayanan dengan menggunakan sebelas tim karyawan lapangan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa dengan penambahan enam karyawan lapangan (3 tim), pelayanan kepada pelanggan dapat diselesaikan satu hari lebih cepat dibandingkan jika dengan menggunakan delapan tim karyawan lapangan. Hal ini dapat dijadikan pertimbangan bahwa penambahan karyawan lapangan dapat mempercepat proses pelayanan kepada pelanggan.

4.3 Petri Net Alur Penjadwalan Lamanya Kerja Karyawan

Pada subbab ini dibahas tentang alur *Petri Net* penjadwalan lamanya kerja karyawan. Sama seperti alur *Petri Net* pelayanan pasang baru dan perbaikan instalasi, alur *Petri Net* penjadwalan lamanya kerja karyawan haruslah tidak deadlocks. Jumlah karyawan yang dijadwalkan adalah 16 orang yang dibagi dalam delapan kelompok dengan masing-masing kelompok terdiri dari dua orang. Dengan mengasumsikan tidak ada seorang karyawan yang melakukan ijin cuti atau libur, maka alur *Petri Net* untuk penjadwalan lamanya kerja karyawan adalah sebagai berikut:



Gambar 4.3 *Petri Net* Penjadwalan Kerja Karyawan

Keterangan gambar 4.3 *Petri Net* Penjadwalan Kerja Karyawan:

p_i = petugas lapangan yang sedang menganggur dan siap untuk melayani pelanggan dengan $1 \leq i \leq 16$ (*idle*)

p_{i+16} = tim i yang sedang melayani pelanggan dengan $1 \leq i \leq 8$

p_{25} = keadaan dimana semua pekerja telah melaksanakan pekerjaannya

t_i = proses perjalanan menuju lokasi pelanggan dan pengerjaan pelayanan kepada pelanggan oleh tim i dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+8} = proses petugas lapangan telah selesai mengerjakan pekerjaannya dan kembali ke kantor PDAM dengan $1 \leq i \leq 16$

t_{i+24} = proses pengelompokan petugas lapangan pertama dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+32} = proses pengelompokan petugas lapangan kedua dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+40} = proses pengelompokan petugas lapangan ketiga dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+48} = proses pengelompokan petugas lapangan keempat dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+56} = proses pengelompokan petugas lapangan kelima dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+64} = proses pengelompokan petugas lapangan keenam dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+72} = proses pengelompokan petugas lapangan ketujuh dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+80} = proses pengelompokan petugas lapangan kedelapan dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+88} = proses pengelompokan petugas lapangan kesembilan dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+96} = proses pengelompokan petugas lapangan kesepuluh dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+104} = proses pengelompokan petugas lapangan kesebelas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+112} = proses pengelompokan petugas lapangan kedua belas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+120} = proses pengelompokan petugas lapangan ketiga belas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+128} = proses pengelompokan petugas lapangan keempat belas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+136} = proses pengelompokan petugas lapangan kelima belas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

t_{i+144} = proses pengelompokan petugas lapangan keenam belas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

Pada gambar 4.3 alur *Petri Net* untuk penjadwalan lamanya kerja karyawan terdapat 16 *place* yaitu p_1 sampai p_{16} yang masing-masing menyatakan keadaan dimana petugas lapangan menganggur dan siap untuk melakukan pelayanan kepada pelanggan. Proses selanjutnya adalah transisi t_{25} sampai t_{152} yaitu proses pengelompokan petugas lapangan, sehingga ada garis panah penghubung antara *place* yang menyatakan keadaan petugas lapangan menganggur dan siap untuk melakukan pelayanan dengan transisi proses pengelompokan petugas lapangan. *Place* p_{17} sampai p_{24} adalah keadaan dimana petugas lapangan telah berada dalam timnya masing-masing dan siap melayani pelanggan. Selanjutnya proses perjalanan menuju lokasi pelanggan dan pengerjaan pelayanan kepada pelanggan oleh tim petugas lapangan yaitu transisi t_1 sampai t_8 . Keadaan dimana semua pekerja telah melaksanakan pekerjaannya berada di *place* p_{25} , sehingga ada garis panah penghubung dari t_1 sampai t_8 ke p_{25} . Setelah pekerjaan selesai maka petugas lapangan kembali ke kantor PDAM dan bersiap untuk melakukan pelayanan kepada pelanggan lain, proses ini ditunjukkan oleh transisi t_9 sampai t_{24} , sehingga terdapat garis panah penghubung dari p_{25} ke t_9 sampai t_{24} .

Setelah membuat *Petri Net* untuk penjadwalan lamanya kerja karyawan, selanjutnya akan dianalisis *liveness* dan *deadlocks*nya. Pertama dari *Petri Net* tersebut didefinisikan matriks *Forward* (A_f) dan matriks *Backward* (A_b). Matriks *forward* (A_f) untuk *Petri Net* penjadwalan lamanya kerja karyawan berukuran 25×152 dengan semua anggotanya bernilai nol kecuali pada:

- baris ke- 1 kolom ke- 9 ($A_{f_{1,9}}$),
- baris ke- 2 kolom ke- 24 ($A_{f_{2,24}}$),
- baris ke- 3 kolom ke- 23 ($A_{f_{3,23}}$),

- baris ke- 4 kolom ke- 22 ($A_{f_{4,22}}$),
- baris ke- 5 kolom ke- 21 ($A_{f_{5,21}}$),
- baris ke- 6 kolom ke- 20 ($A_{f_{6,20}}$),
- baris ke- 7 kolom ke- 19 ($A_{f_{7,19}}$),
- baris ke- 8 kolom ke- 18 ($A_{f_{8,18}}$),
- baris ke-9 kolom ke- 17 ($A_{f_{9,17}}$),
- baris ke- 10 kolom ke- 16 ($A_{f_{10,16}}$),
- baris ke- 11 kolom ke- 15 ($A_{f_{11,15}}$),
- baris ke- 12 kolom ke- 14 ($A_{f_{12,14}}$),
- baris ke- 13 kolom ke- 13 ($A_{f_{13,13}}$),
- baris ke- 14 kolom ke- 12 ($A_{f_{14,12}}$),
- baris ke- 15 kolom ke- 11 ($A_{f_{15,11}}$),
- baris ke- 16 kolom ke- 10 ($A_{f_{16,10}}$),
- baris ke- 17 kolom ke- 28, 34, 41, 50, 59, 67, 76, 84, 93, 103, 109, 118, 128, 134, 143, 151 ($A_{f_{17,28}}; A_{f_{17,34}}; A_{f_{17,41}}; A_{f_{17,50}}; A_{f_{17,59}}; A_{f_{17,67}}; A_{f_{17,76}}; A_{f_{17,84}}; A_{f_{17,93}}; A_{f_{17,103}}; A_{f_{17,109}}; A_{f_{17,118}}; A_{f_{17,128}}; A_{f_{17,134}}; A_{f_{17,143}}; A_{f_{17,151}}$),
- baris ke- 18 kolom ke- 26, 39, 47, 51, 58, 65, 73, 83, 92, 98, 105, 119, 126, 135, 144, 152 ($A_{f_{18,26}}; A_{f_{18,39}}; A_{f_{18,47}}; A_{f_{18,51}}; A_{f_{18,58}}; A_{f_{18,65}}; A_{f_{18,73}}; A_{f_{18,83}}; A_{f_{18,92}}; A_{f_{18,98}}; A_{f_{18,105}}; A_{f_{18,119}}; A_{f_{18,126}}; A_{f_{18,135}}; A_{f_{18,144}}; A_{f_{18,152}}$),
- baris ke- 19 kolom ke- 25, 40, 46, 52, 57, 68, 74, 81, 89, 97, 106, 117, 128, 136, 139, 150 ($A_{f_{19,25}}; A_{f_{19,40}}; A_{f_{19,46}}; A_{f_{19,52}}; A_{f_{19,57}}; A_{f_{19,68}}; A_{f_{19,74}}; A_{f_{19,81}}; A_{f_{19,89}}; A_{f_{19,97}}; A_{f_{19,106}}; A_{f_{19,117}}; A_{f_{19,128}}; A_{f_{19,136}}; A_{f_{19,139}}; A_{f_{19,150}}$),
- baris ke- 20 kolom ke- 27, 38, 45, 54, 61, 66, 75, 82, 90, 99, 107, 118, 122, 132, 138, 149 ($A_{f_{20,27}}; A_{f_{20,38}}; A_{f_{20,45}}; A_{f_{20,54}}; A_{f_{20,61}}; A_{f_{20,66}}; A_{f_{20,75}}; A_{f_{20,82}}; A_{f_{20,90}}; A_{f_{20,99}}; A_{f_{20,107}}; A_{f_{20,118}}; A_{f_{20,122}}; A_{f_{20,132}}; A_{f_{20,138}}; A_{f_{20,149}}$),
- baris ke- 21 kolom ke- 29, 37, 45, 56, 63, 71, 78, 85, 92, 100, 108, 114, 121, 130, 137, 147 ($A_{f_{21,29}}; A_{f_{21,37}}; A_{f_{21,45}}; A_{f_{21,56}}; A_{f_{21,63}}; A_{f_{21,71}}; A_{f_{21,78}}; A_{f_{21,85}}; A_{f_{21,92}}; A_{f_{21,100}}; A_{f_{21,108}}; A_{f_{21,114}}; A_{f_{21,121}}; A_{f_{21,130}}; A_{f_{21,137}}; A_{f_{21,147}}$),

- baris ke- 22 kolom ke- 30, 36, 44, 55, 64, 72, 80, 88, 94, 101, 110, 115, 124, 129, 140, 146 ($A_{f_{22,30}}; A_{f_{22,36}}; A_{f_{22,44}}; A_{f_{22,55}}; A_{f_{22,64}}; A_{f_{22,72}}; A_{f_{22,80}}; A_{f_{22,88}}; A_{f_{22,94}}; A_{f_{22,101}}; A_{f_{22,110}}; A_{f_{22,115}}; A_{f_{22,124}}; A_{f_{22,129}}; A_{f_{22,140}}; A_{f_{22,146}}$),
- baris ke- 23 kolom ke- 32, 35, 43, 49, 62, 70, 79, 87, 96, 102, 111, 116, 125, 131, 141, 145 ($A_{f_{23,32}}; A_{f_{23,35}}; A_{f_{23,43}}; A_{f_{23,49}}; A_{f_{23,62}}; A_{f_{23,70}}; A_{f_{23,79}}; A_{f_{23,87}}; A_{f_{23,96}}; A_{f_{23,102}}; A_{f_{23,111}}; A_{f_{23,116}}; A_{f_{23,125}}; A_{f_{23,131}}; A_{f_{23,141}}; A_{f_{23,145}}$),
- dan baris ke- 24 kolom ke- 31, 33, 42, 53, 60, 69, 77, 86, 95, 104, 112, 120, 127, 133, 142, 148 ($A_{f_{24,31}}; A_{f_{24,33}}; A_{f_{24,42}}; A_{f_{24,53}}; A_{f_{24,60}}; A_{f_{24,69}}; A_{f_{24,77}}; A_{f_{24,86}}; A_{f_{24,95}}; A_{f_{24,104}}; A_{f_{24,112}}; A_{f_{24,120}}; A_{f_{24,127}}; A_{f_{24,133}}; A_{f_{24,142}}; A_{f_{24,148}}$) bernilai 1, sedangkan pada $A_{f_{25,1}}; A_{f_{25,2}}; A_{f_{25,3}}; A_{f_{25,4}}; A_{f_{25,5}}; A_{f_{25,6}}; A_{f_{25,7}}; A_{f_{25,8}}$ bernilai 2.

Matriks *backward* (A_b) untuk petri net penjadwalan kerja karyawan berukuran 25×152 dengan semua anggotanya bernilai nol, kecuali pada:

- baris ke- 1 kolom ke- 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 ($A_{b_{1,25}}; A_{b_{1,26}}; A_{b_{1,27}}; A_{b_{1,28}}; A_{b_{1,29}}; A_{b_{1,30}}; A_{b_{1,31}}; A_{b_{1,32}}$),
- baris ke- 2 kolom ke- 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40 ($A_{b_{2,33}}; A_{b_{2,34}}; A_{b_{2,35}}; A_{b_{2,36}}; A_{b_{2,37}}; A_{b_{2,38}}; A_{b_{2,39}}; A_{b_{2,40}}$),
- baris ke- 3 kolom ke 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48 ($A_{b_{3,41}}; A_{b_{3,42}}; A_{b_{3,43}}; A_{b_{3,44}}; A_{b_{3,45}}; A_{b_{3,46}}; A_{b_{3,47}}; A_{b_{3,48}}$),
- baris ke- 4 kolom ke- 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56 ($A_{b_{4,49}}; A_{b_{4,50}}; A_{b_{4,51}}; A_{b_{4,52}}; A_{b_{4,53}}; A_{b_{4,54}}; A_{b_{4,55}}; A_{b_{4,56}}$)
- baris ke- 5 kolom ke- 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64 ($A_{b_{5,57}}; A_{b_{5,58}}; A_{b_{5,59}}; A_{b_{5,60}}; A_{b_{5,61}}; A_{b_{5,62}}; A_{b_{5,63}}; A_{b_{5,64}}$),
- baris ke- 6 kolom ke- 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72 ($A_{b_{6,65}}; A_{b_{6,66}}; A_{b_{6,67}}; A_{b_{6,68}}; A_{b_{6,69}}; A_{b_{6,70}}; A_{b_{6,71}}; A_{b_{6,72}}$),
- baris ke- 7 kolom ke- 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80 ($A_{b_{7,73}}; A_{b_{7,74}}; A_{b_{7,75}}; A_{b_{7,76}}; A_{b_{7,77}}; A_{b_{7,78}}; A_{b_{7,79}}; A_{b_{7,80}}$),
- baris ke- 8 kolom ke- 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88 ($A_{b_{8,81}}; A_{b_{8,82}}; A_{b_{8,83}}; A_{b_{8,84}}; A_{b_{8,85}}; A_{b_{8,86}}; A_{b_{8,87}}; A_{b_{8,88}}$),

- baris ke- 9 kolom ke- 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96
($A_{b_{9,89}}; A_{b_{9,90}}; A_{b_{9,91}}; A_{b_{9,92}}; A_{b_{9,93}}; A_{b_{9,94}}; A_{b_{9,95}}; A_{b_{9,96}}$),
- baris ke- 10 kolom ke- 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104
($A_{b_{10,97}}; A_{b_{10,98}}; A_{b_{10,99}}; A_{b_{10,100}}; A_{b_{10,101}}; A_{b_{10,102}}; A_{b_{10,103}}; A_{b_{10,104}}$),
- baris ke- 11 kolom ke- 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112
($A_{b_{11,105}}; A_{b_{11,106}}; A_{b_{11,107}}; A_{b_{11,108}}; A_{b_{11,109}}; A_{b_{11,110}}; A_{b_{11,111}}; A_{b_{11,112}}$),
- baris ke- 12 kolom ke- 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120
($A_{b_{12,113}}; A_{b_{12,114}}; A_{b_{12,115}}; A_{b_{12,116}}; A_{b_{12,117}}; A_{b_{12,118}}; A_{b_{12,119}}; A_{b_{12,120}}$),
- baris ke-13 kolom ke- 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128
($A_{b_{13,121}}; A_{b_{13,122}}; A_{b_{13,123}}; A_{b_{13,124}}; A_{b_{13,125}}; A_{b_{13,126}}; A_{b_{13,127}}; A_{b_{13,128}}$),
- baris ke-14 kolom ke- 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136
($A_{b_{14,129}}; A_{b_{14,130}}; A_{b_{14,131}}; A_{b_{14,132}}; A_{b_{14,133}}; A_{b_{14,134}}; A_{b_{14,135}}; A_{b_{14,136}}$),
- baris ke- 15 kolom ke- 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144
($A_{b_{15,137}}; A_{b_{15,138}}; A_{b_{15,139}}; A_{b_{15,140}}; A_{b_{15,141}}; A_{b_{15,142}}; A_{b_{15,143}}; A_{b_{15,144}}$),
- baris ke- 16 kolom ke- 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152
($A_{b_{16,145}}; A_{b_{16,146}}; A_{b_{16,147}}; A_{b_{16,148}}; A_{b_{16,149}}; A_{b_{16,150}}; A_{b_{16,151}}; A_{b_{16,152}}$),
- baris ke- 25 kolom ke- 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24
($A_{b_{25,9}}; A_{b_{25,10}}; A_{b_{25,11}}; A_{b_{25,12}}; A_{b_{25,13}}; A_{b_{25,14}}; A_{b_{25,15}}; A_{b_{25,16}}; A_{b_{25,17}}; A_{b_{25,18}}; A_{b_{25,19}}; A_{b_{25,20}}; A_{b_{25,21}}; A_{b_{25,22}}; A_{b_{25,23}}; A_{b_{25,24}}$) adalah bernilai 1, sedangkan pada $A_{b_{17,1}}; A_{b_{18,8}}; A_{b_{19,7}}; A_{b_{20,6}}; A_{b_{21,5}}; A_{b_{22,4}}; A_{b_{23,3}}; A_{b_{24,2}}$ bernilai 2.

Matriks A diperoleh dengan cara mengurangkan matriks *forward* (A_f) dengan matriks *backward* (A_b). Maka akan didapatkan matriks berukuran 25×152 dengan semua elemen penyusunnya bernilai nol kecuali pada:

- baris ke- 1 kolom ke- 9 ($A_{1,9}$),
- baris ke- 2 kolom ke- 24 ($A_{2,24}$),
- baris ke- 3 kolom ke- 23 ($A_{3,23}$),
- baris ke- 4 kolom ke- 22 ($A_{4,22}$),
- baris ke- 5 kolom ke- 21 ($A_{5,21}$),
- baris ke- 6 kolom ke- 20 ($A_{6,20}$),
- baris ke- 7 kolom ke- 19 ($A_{7,19}$),

- baris ke- 8 kolom ke- 18($A_{8,18}$),
- baris ke-9 kolom ke- 17($A_{9,17}$),
- baris ke- 10 kolom ke- 16 ($A_{10,16}$),
- baris ke- 11 kolom ke- 15 ($A_{11,15}$),
- baris ke- 12 kolom ke- 14 ($A_{12,14}$),
- baris ke- 13 kolom ke- 13 ($A_{13,13}$),
- baris ke- 14 kolom ke- 12 ($A_{14,12}$),
- baris ke- 15 kolom ke- 11 ($A_{15,11}$),
- baris ke- 16 kolom ke- 10 ($A_{16,10}$),
- baris ke- 17 kolom ke- 28, 34, 41, 50, 59, 67, 76, 84, 93, 103, 109, 118, 128, 134, 143, 151 ($A_{17,28}$; $A_{17,34}$; $A_{17,41}$; $A_{17,50}$; $A_{17,59}$; $A_{17,67}$; $A_{17,76}$; $A_{17,84}$; $A_{17,93}$; $A_{17,103}$; $A_{17,109}$; $A_{17,118}$; $A_{17,128}$; $A_{17,134}$; $A_{17,148}$; $A_{17,151}$),
- baris ke- 18 kolom ke- 26, 39, 47, 51, 58, 65, 73, 83, 92, 98, 105, 119, 126, 135, 144, 152 ($A_{18,26}$; $A_{18,39}$; $A_{18,47}$; $A_{18,51}$; $A_{18,58}$; $A_{18,65}$; $A_{18,73}$; $A_{18,83}$; $A_{18,92}$; $A_{18,98}$; $A_{18,105}$; $A_{18,119}$; $A_{18,126}$; $A_{18,135}$; $A_{18,144}$; $A_{18,152}$),
- baris ke- 19 kolom ke- 25, 40, 46, 52, 57, 68, 74, 81, 89, 97, 106, 117, 128, 136, 139, 150 ($A_{19,25}$; $A_{19,40}$; $A_{19,46}$; $A_{19,52}$; $A_{19,57}$; $A_{19,68}$; $A_{19,74}$; $A_{19,81}$; $A_{19,89}$; $A_{19,97}$; $A_{19,106}$; $A_{19,117}$; $A_{19,128}$; $A_{19,136}$; $A_{19,139}$; $A_{19,150}$),
- baris ke- 20 kolom ke- 27, 38, 45, 54, 61, 66, 75, 82, 90, 99, 107, 118, 122, 132, 138, 149 ($A_{20,27}$; $A_{20,38}$; $A_{20,45}$; $A_{20,54}$; $A_{20,61}$; $A_{20,66}$; $A_{20,75}$; $A_{20,82}$; $A_{20,90}$; $A_{20,99}$; $A_{20,107}$; $A_{20,118}$; $A_{20,122}$; $A_{20,132}$; $A_{20,138}$; $A_{20,149}$),
- baris ke- 21 kolom ke- 29, 37, 45, 56, 63, 71, 78, 85, 92, 100, 108, 114, 121, 130, 137, 147 ($A_{21,29}$; $A_{21,37}$; $A_{21,45}$; $A_{21,56}$; $A_{21,63}$; $A_{21,71}$; $A_{21,78}$; $A_{21,85}$; $A_{21,92}$; $A_{21,100}$; $A_{21,108}$; $A_{21,114}$; $A_{21,121}$; $A_{21,130}$; $A_{21,137}$; $A_{21,147}$),
- baris ke- 22 kolom ke- 30, 36, 44, 55, 64, 72, 80, 88, 94, 101, 110, 115, 124, 129, 140, 146 ($A_{22,30}$; $A_{22,36}$; $A_{22,44}$; $A_{22,55}$; $A_{22,64}$; $A_{22,72}$; $A_{22,80}$; $A_{22,88}$; $A_{22,94}$; $A_{22,101}$; $A_{22,110}$; $A_{22,115}$; $A_{22,124}$; $A_{22,129}$; $A_{22,140}$; $A_{22,146}$),
- baris ke- 23 kolom ke- 32, 35, 43, 49, 62, 70, 79, 87, 96, 102, 111, 116, 125, 131, 141, 145 ($A_{23,32}$; $A_{23,35}$; $A_{23,43}$; $A_{23,49}$; $A_{23,62}$; $A_{23,70}$; $A_{23,79}$; $A_{23,87}$; $A_{23,96}$; $A_{23,102}$; $A_{23,111}$; $A_{23,116}$; $A_{23,125}$; $A_{23,131}$; $A_{23,141}$; $A_{23,145}$),

- dan baris ke- 24 kolom ke- 31, 33, 42, 53, 60, 69, 77, 86, 95, 104, 112, 120, 127, 133, 142, 148 ($A_{24,31}; A_{24,33}; A_{24,42}; A_{24,53}; A_{24,60}; A_{24,69}; A_{24,77}; A_{24,86}; A_{24,95}; A_{24,104}; A_{24,112}; A_{24,120}; A_{24,127}; A_{24,133}; A_{24,142}; A_{24,148}$) bernilai 1, $A_{25,1}; A_{25,2}; A_{25,3}; A_{25,4}; A_{25,5}; A_{25,6}; A_{25,7}; A_{25,8}$ bernilai 2, bernilai -1 pada:

- baris ke- 1 kolom ke- 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 ($A_{1,25}; A_{1,26}; A_{1,27}; A_{1,28}; A_{1,29}; A_{1,30}; A_{1,31}; A_{1,32}$),

- baris ke- 2 kolom ke- 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40 ($A_{2,33}; A_{2,34}; A_{2,35}; A_{2,36}; A_{2,37}; A_{2,38}; A_{2,39}; A_{2,40}$),

- baris ke- 3 kolom ke 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48 ($A_{3,41}; A_{3,42}; A_{3,43}; A_{3,44}; A_{3,45}; A_{3,46}; A_{3,47}; A_{3,48}$),

- baris ke- 4 kolom ke- 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56 ($A_{4,49}; A_{4,50}; A_{4,51}; A_{4,52}; A_{4,53}; A_{4,54}; A_{4,55}; A_{4,56}$)

- baris ke- 5 kolom ke- 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64 ($A_{5,57}; A_{5,58}; A_{5,59}; A_{5,60}; A_{5,61}; A_{5,62}; A_{5,63}; A_{5,64}$),

- baris ke- 6 kolom ke- 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72 ($A_{6,65}; A_{6,66}; A_{6,67}; A_{6,68}; A_{6,69}; A_{6,70}; A_{6,71}; A_{6,72}$),

- baris ke- 7 kolom ke- 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80 ($A_{7,73}; A_{7,74}; A_{7,75}; A_{7,76}; A_{7,77}; A_{7,78}; A_{7,79}; A_{7,80}$),

- baris ke- 8 kolom ke- 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88 ($A_{8,81}; A_{8,82}; A_{8,83}; A_{8,84}; A_{8,85}; A_{8,86}; A_{8,87}; A_{8,88}$),

- baris ke- 9 kolom ke- 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96 ($A_{9,89}; A_{9,90}; A_{9,91}; A_{9,92}; A_{9,93}; A_{9,94}; A_{9,95}; A_{9,96}$),

- baris ke- 10 kolom ke- 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104 ($A_{10,97}; A_{10,98}; A_{10,99}; A_{10,100}; A_{10,101}; A_{10,102}; A_{10,103}; A_{10,104}$),

- baris ke- 11 kolom ke- 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112 ($A_{11,105}; A_{11,106}; A_{11,107}; A_{11,108}; A_{11,109}; A_{11,110}; A_{11,111}; A_{11,112}$),

- baris ke- 12 kolom ke- 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120 ($A_{12,113}; A_{12,114}; A_{12,115}; A_{12,116}; A_{12,117}; A_{12,118}; A_{12,119}; A_{12,120}$),

- baris ke-13 kolom ke- 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128 ($A_{13,121}; A_{13,122}; A_{13,123}; A_{13,124}; A_{13,125}; A_{13,126}; A_{13,127}; A_{13,128}$),

- baris ke-14 kolom ke- 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136 ($A_{14,129}; A_{14,130}; A_{14,131}; A_{14,132}; A_{14,133}; A_{14,134}; A_{14,135}; A_{14,136}$),
- baris ke- 15 kolom ke- 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144 ($A_{15,137}; A_{15,138}; A_{15,139}; A_{15,140}; A_{15,141}; A_{15,142}; A_{15,143}; A_{15,144}$),
- baris ke- 16 kolom ke- 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152 ($A_{16,145}; A_{16,146}; A_{16,147}; A_{16,148}; A_{16,149}; A_{16,150}; A_{16,151}; A_{16,152}$),
- baris ke- 25 kolom ke- 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 ($A_{25,9}; A_{25,10}; A_{25,11}; A_{25,12}; A_{25,13}; A_{25,14}; A_{25,15}; A_{25,16}; A_{25,17}; A_{25,18}; A_{25,19}; A_{25,20}; A_{25,21}; A_{25,22}; A_{25,23}; A_{25,24}$), sedangkan $A_{b_{17,1}}; A_{b_{18,8}}; A_{b_{19,7}}; A_{b_{20,6}}; A_{b_{21,5}}; A_{b_{22,4}}; A_{b_{23,3}}; A_{b_{24,2}}$ bernilai -2.

Selanjutnya ditentukan peletakkan token pertama kali. Token pertama kali terletak pada *place* p_1 sampai p_{16} sebagai keadaan dimana pekerja pertama hingga pekerja keenam belas sedang bebas dan bersiap untuk menerima tugas.

Dari letak token pertama kali, selanjutnya dapat dibentuk matriks $x(p)$. Matriks $x(p)$ dengan $p = 0$ berukuran (25×1) . Semua elemen dari matriks $x(0)$ bernilai satu kecuali pada $x_{17,1}(0); x_{18,1}(0); x_{19,1}(0); x_{20,1}(0); x_{21,1}(0); x_{22,1}(0); x_{23,1}(0); x_{24,1}(0); x_{25,1}(0)$ bernilai nol. Peletakkan token pada *place* p_1 sampai p_{16} menyebabkan transisi t_{25} sampai t_{152} menjadi *enabled*. Misal dipilih transisi t_{28} dan t_{34} yang akan *difire*, sehingga matriks u dapat dibentuk dengan ukuran (152×1) dimana semua elemennya bernilai nol kecuali pada $u_{28,1}$ dan $u_{34,1}$ bernilai 1. Dengan menggunakan persamaan $x(p + 1) = x(p) + Au$ dan memilih $p = 0$ sehingga didapat matriks $x(1)$ yaitu sebuah matriks dengan ukuran (25×1) dimana semuanya bernilai satu kecuali pada $x_{1,1}(1); x_{2,1}(1); x_{18,1}(1); x_{19,1}(1); x_{20,1}(1); x_{21,1}(1); x_{22,1}(1); x_{23,1}(1); x_{24,1}(1); x_{25,1}(1)$ bernilai nol dan $x_{17,1}(1)$ bernilai 2.

Coverability Tree Petri Net Penjadwalan Lamanya Kerja Karyawan

Proses membangun *Coverability tree* dapat dijelaskan sebagai berikut. Keadaan $x(0)$ merupakan matriks berukuran (25×1) . Semua elemen yang menyusun matriks $x(0)$ adalah bernilai nol kecuali pada $x_{1,1}(0); x_{2,1}(0); x_{3,1}(0); x_{4,1}(0); x_{5,1}(0); x_{6,1}(0); x_{7,1}(0); x_{8,1}(0); x_{9,1}(0); x_{10,1}(0); x_{11,1}(0); x_{12,1}(0); x_{13,1}(0); x_{14,1}(0); x_{15,1}(0); x_{16,1}(0)$ bernilai 1 didefinisikan sebagai *node root*. Pada keadaan ini terdapat transisi yang *enabled* yaitu t_{25} sampai t_{152} . Pemfirean salah satu transisi ini menyebabkan keadaan *Petri Net* berubah. Perubahan keadaan *Petri Net* berbeda sesuai dengan transisi yang *difire*. Jika transisi yang *difire* adalah t_{28} dan t_{34} maka keadaan *Petri Net* akan berubah menjadi $x(1)$ yang merupakan sebuah matriks dengan ukuran (25×1) dimana semua elemennya bernilai nol kecuali $x_{3,1}(1); x_{4,1}(1); x_{5,1}(1); x_{6,1}(1); x_{7,1}(1); x_{8,1}(1); x_{9,1}(1); x_{10,1}(1); x_{11,1}(1); x_{12,1}(1); x_{13,1}(1); x_{14,1}(1); x_{15,1}(1); x_{16,1}(1)$ yang bernilai 1 dan $x_{17,1}(1)$ bernilai 2. Keadaan *Petri Net* ini mengakibatkan transisi t_1, t_{41} sampai t_{152} yang *enabled* dan dapat *difire*. Karena terdapat beberapa transisi yang *enabled* secara bersamaan, maka akan dibuat *Coverability Tree* dari berbagai kemungkinan. Karena pemfirean transisi t_{41} sampai t_{152} memiliki makna yang sama dengan pemfirean transisi t_{28} dan t_{34} yaitu untuk pengelompokan karyawan lapangan dalam bertugas, maka akan dipilih pemfirean t_1 yaitu saat dua orang karyawan sudah dalam satu tim dan akan melakukan tugasnya. Sehingga urutan pemfireannya adalah sebagai berikut: $t_{28} \rightarrow t_{34} \rightarrow t_1 \rightarrow t_9 \rightarrow t_{24}$. Saat t_1 *difire* maka keadaan petri net akan berubah menjadi $x(2)$ yang merupakan matriks dengan ukuran (25×1) dimana semua elemennya bernilai nol kecuali $x_{3,1}(2); x_{4,1}(2); x_{5,1}(2); x_{6,1}(2); x_{7,1}(2); x_{8,1}(2); x_{9,1}(2); x_{10,1}(2); x_{11,1}(2); x_{12,1}(2); x_{13,1}(2); x_{14,1}(2); x_{15,1}(2); x_{16,1}(2)$ bernilai satu dan $x_{25,1}(2)$ bernilai 2. Dengan adanya dua token di *place* p_{25} mengakibatkan transisi t_9 dan t_{24} *enabled*. Sehingga saat t_9 *difire* maka satu token di *place* p_{25} pindah ke *place* p_1 , sedangkan saat t_{24} *difire* maka satu token di *place* p_{25} pindah ke *place* p_2 , maka keadaan tersebut adalah $x(3)$ yang merupakan matriks dengan ukuran (25×1) dimana semua elemennya bernilai nol kecuali $x_{1,1}(3); x_{2,1}(3); x_{3,1}(3); x_{4,1}(3); x_{5,1}(3); x_{6,1}(3); x_{7,1}(3); x_{8,1}(3); x_{9,1}(3); x_{10,1}(3); x_{11,1}(3); x_{12,1}(3); x_{13,1}(3);$

$x_{14,1}(3); x_{15,1}(3); x_{16,1}(3)$ bernilai 1. Dengan demikian keadaan *Petri Net* kembali seperti semula.

Jika dilakukan pemilihan pemfirean pada transisi yang lain, maka akan kembali seperti keadaan awal *Petri Net*, sehingga *Coverability Tree* alur *Petri Net* untuk penjadwalan lamanya kerja karyawan selalu kembali ke keadaan awal (*looping*) jadi dapat dikatakan tidak *Deadlocks*.

Model Aljabar *Max Plus* dari alur *Petri Net* Penjadwalan Lamanya Kerja Karyawan dengan Waktu

Sebelum membuat model Aljabar *Max Plus* dari *Petri Net* dengan waktu, terlebih dahulu diberikan *Petri Net* dari penjadwalan kerja karyawan yang dikaitkan dengan waktu. Agar mendapatkan *Petri Net* dengan menggunakan waktu, maka hanya menambahkan $v_{t_1,k}$ sampai $v_{t_{152},k}$ masing-masing pada transisi t_1 sampai t_{152} . Dengan masing-masing $v_{t_1,k}$ sampai $v_{t_{152},k}$ adalah sebagai berikut:

$v_{t_i,k}$ = lamanya proses perjalanan menuju lokasi pelanggan dan pengerjaan pelayanan kepada pelanggan oleh tim i dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+8},k}$ = lamanya proses petugas lapangan telah selesai mengerjakan pekerjaannya dan kembali ke kantor PDAM dengan $1 \leq i \leq 16$

$v_{t_{i+24},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan pertama dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+32},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan kedua dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+40},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan ketiga dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+48},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan keempat dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+56},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan kelima dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+64},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan keenam dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+72},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan ketujuh dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+80},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan kedelapan dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+88},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan kesembilan dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+96},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan kesepuluh dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+104},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan kesebelas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+112},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan kedua belas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+120},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan ketiga belas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+128},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan keempat belas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+136},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan kelima belas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

$v_{t_{i+144},k}$ = lamanya proses pengelompokan petugas lapangan keenam belas dengan petugas lain dengan $1 \leq i \leq 8$

Selanjutnya model aljabar *Max Plus* dari *Petri Net* penjadwalan kerja karyawan adalah sebagai berikut:

$$t_{25}(k) = v_{t_{25},k} \otimes t_9(k-1)$$

$$t_{26}(k) = v_{t_{26},k} \otimes t_9(k-1)$$

$$t_{27}(k) = v_{t_{27},k} \otimes t_9(k-1)$$

$$t_{28}(k) = v_{t_{28},k} \otimes t_9(k-1)$$

$$t_{29}(k) = v_{t_{29},k} \otimes t_9(k-1)$$

$$t_{30}(k) = v_{t_{30},k} \otimes t_9(k-1)$$

$$t_{31}(k) = v_{t_{31},k} \otimes t_9(k-1)$$

$$t_{32}(k) = v_{t_{32},k} \otimes t_9(k-1).$$

Karena $v_{t_{25},k} = v_{t_{26},k} = v_{t_{27},k} = v_{t_{28},k} = v_{t_{29},k} = v_{t_{30},k} = v_{t_{31},k} = v_{t_{32},k} = 5$,
maka $t_{25}(k) = t_{26}(k) = t_{27}(k) = t_{28}(k) = t_{29}(k) = t_{30}(k) = t_{31}(k) = t_{32}(k)$

(1)

$$t_{33}(k) = v_{t_{33},k} \otimes t_{24}(k-1)$$

$$t_{34}(k) = v_{t_{34},k} \otimes t_{24}(k-1)$$

$$t_{35}(k) = v_{t_{35},k} \otimes t_{24}(k-1)$$

$$t_{36}(k) = v_{t_{36},k} \otimes t_{24}(k-1)$$

$$t_{37}(k) = v_{t_{37},k} \otimes t_{24}(k-1)$$

$$t_{38}(k) = v_{t_{38},k} \otimes t_{24}(k-1)$$

$$t_{39}(k) = v_{t_{39},k} \otimes t_{24}(k-1)$$

$$t_{40}(k) = v_{t_{40},k} \otimes t_{24}(k-1).$$

Karena $v_{t_{33},k} = v_{t_{34},k} = v_{t_{35},k} = v_{t_{36},k} = v_{t_{37},k} = v_{t_{38},k} = v_{t_{39},k} = v_{t_{40},k} = 5$,
maka $t_{33}(k) = t_{34}(k) = t_{35}(k) = t_{36}(k) = t_{37}(k) = t_{38}(k) = t_{39}(k) = t_{40}(k)$

(2)

$$t_{41}(k) = v_{t_{41},k} \otimes t_{23}(k-1)$$

$$t_{42}(k) = v_{t_{42},k} \otimes t_{23}(k-1)$$

$$t_{43}(k) = v_{t_{43},k} \otimes t_{23}(k-1)$$

$$t_{44}(k) = v_{t_{44},k} \otimes t_{23}(k-1)$$

$$t_{45}(k) = v_{t_{45},k} \otimes t_{23}(k-1)$$

$$t_{46}(k) = v_{t_{46},k} \otimes t_{23}(k-1)$$

$$t_{47}(k) = v_{t_{47},k} \otimes t_{23}(k-1)$$

$$t_{48}(k) = v_{t_{48},k} \otimes t_{23}(k-1).$$

Karena $v_{t_{41},k} = v_{t_{42},k} = v_{t_{43},k} = v_{t_{44},k} = v_{t_{45},k} = v_{t_{46},k} = v_{t_{47},k} = v_{t_{48},k} = 5$,
maka $t_{41}(k) = t_{42}(k) = t_{43}(k) = t_{44}(k) = t_{45}(k) = t_{46}(k) = t_{47}(k) = t_{48}(k)$

(3)

$$t_{49}(k) = v_{t_{49},k} \otimes t_{22}(k-1)$$

$$t_{50}(k) = v_{t_{50},k} \otimes t_{22}(k-1)$$

$$t_{51}(k) = v_{t_{51},k} \otimes t_{22}(k-1)$$

$$t_{52}(k) = v_{t_{52},k} \otimes t_{22}(k-1)$$

$$t_{53}(k) = v_{t_{53},k} \otimes t_{22}(k-1)$$

$$t_{54}(k) = v_{t_{54},k} \otimes t_{22}(k-1)$$

$$t_{55}(k) = v_{t_{55},k} \otimes t_{22}(k-1)$$

$$t_{56}(k) = v_{t_{56},k} \otimes t_{22}(k-1).$$

Karena $v_{t_{49},k} = v_{t_{50},k} = v_{t_{51},k} = v_{t_{52},k} = v_{t_{53},k} = v_{t_{54},k} = v_{t_{55},k} = v_{t_{56},k} = 5,$

maka $t_{49}(k) = t_{50}(k) = t_{51}(k) = t_{52}(k) = t_{53}(k) = t_{54}(k) = t_{55}(k) = t_{56}(k)$

(4)

$$t_{57}(k) = v_{t_{57},k} \otimes t_{21}(k-1)$$

$$t_{58}(k) = v_{t_{58},k} \otimes t_{21}(k-1)$$

$$t_{59}(k) = v_{t_{59},k} \otimes t_{21}(k-1)$$

$$t_{60}(k) = v_{t_{60},k} \otimes t_{21}(k-1)$$

$$t_{61}(k) = v_{t_{61},k} \otimes t_{21}(k-1)$$

$$t_{62}(k) = v_{t_{62},k} \otimes t_{21}(k-1)$$

$$t_{63}(k) = v_{t_{63},k} \otimes t_{21}(k-1)$$

$$t_{64}(k) = v_{t_{64},k} \otimes t_{21}(k-1).$$

Karena $v_{t_{57},k} = v_{t_{58},k} = v_{t_{59},k} = v_{t_{60},k} = v_{t_{61},k} = v_{t_{62},k} = v_{t_{63},k} = v_{t_{64},k} = 5,$

maka $t_{57}(k) = t_{58}(k) = t_{59}(k) = t_{60}(k) = t_{61}(k) = t_{62}(k) = t_{63}(k) = t_{64}(k)$

(5)

$$t_{65}(k) = v_{t_{65},k} \otimes t_{20}(k-1)$$

$$t_{66}(k) = v_{t_{66},k} \otimes t_{20}(k-1)$$

$$t_{67}(k) = v_{t_{67},k} \otimes t_{20}(k-1)$$

$$t_{68}(k) = v_{t_{68},k} \otimes t_{20}(k-1)$$

$$t_{69}(k) = v_{t_{69},k} \otimes t_{20}(k-1)$$

$$t_{70}(k) = v_{t_{70},k} \otimes t_{20}(k-1)$$

$$t_{71}(k) = v_{t_{71},k} \otimes t_{20}(k-1)$$

$$t_{72}(k) = v_{t_{72},k} \otimes t_{20}(k-1).$$

Karena $v_{t_{65},k} = v_{t_{66},k} = v_{t_{67},k} = v_{t_{68},k} = v_{t_{69},k} = v_{t_{70},k} = v_{t_{71},k} = v_{t_{72},k} = 5,$

$$\text{maka } t_{65}(k) = t_{66}(k) = t_{67}(k) = t_{68}(k) = t_{69}(k) = t_{70}(k) = t_{71}(k) = t_{72}(k) \quad (6)$$

$$t_{73}(k) = v_{t_{73},k} \otimes t_{19}(k-1)$$

$$t_{74}(k) = v_{t_{74},k} \otimes t_{19}(k-1)$$

$$t_{75}(k) = v_{t_{75},k} \otimes t_{19}(k-1)$$

$$t_{76}(k) = v_{t_{76},k} \otimes t_{19}(k-1)$$

$$t_{77}(k) = v_{t_{77},k} \otimes t_{19}(k-1)$$

$$t_{78}(k) = v_{t_{78},k} \otimes t_{19}(k-1)$$

$$t_{79}(k) = v_{t_{79},k} \otimes t_{19}(k-1)$$

$$t_{80}(k) = v_{t_{80},k} \otimes t_{19}(k-1).$$

Karena $v_{t_{73},k} = v_{t_{74},k} = v_{t_{75},k} = v_{t_{76},k} = v_{t_{77},k} = v_{t_{78},k} = v_{t_{79},k} = v_{t_{80},k} = 5,$

$$\text{maka } t_{73}(k) = t_{74}(k) = t_{75}(k) = t_{76}(k) = t_{77}(k) = t_{78}(k) = t_{79}(k) = t_{80}(k) \quad (7)$$

$$t_{81}(k) = v_{t_{81},k} \otimes t_{18}(k-1)$$

$$t_{82}(k) = v_{t_{82},k} \otimes t_{18}(k-1)$$

$$t_{83}(k) = v_{t_{83},k} \otimes t_{18}(k-1)$$

$$t_{84}(k) = v_{t_{84},k} \otimes t_{18}(k-1)$$

$$t_{85}(k) = v_{t_{85},k} \otimes t_{18}(k-1)$$

$$t_{86}(k) = v_{t_{86},k} \otimes t_{18}(k-1)$$

$$t_{87}(k) = v_{t_{87},k} \otimes t_{18}(k-1)$$

$$t_{88}(k) = v_{t_{88},k} \otimes t_{18}(k-1).$$

Karena $v_{t_{81},k} = v_{t_{82},k} = v_{t_{83},k} = v_{t_{84},k} = v_{t_{85},k} = v_{t_{86},k} = v_{t_{87},k} = v_{t_{88},k} = 5$,
 maka $t_{81}(k) = t_{82}(k) = t_{83}(k) = t_{84}(k) = t_{85}(k) = t_{86}(k) = t_{87}(k) = t_{88}(k)$

(8)

$$t_{89}(k) = v_{t_{89},k} \otimes t_{17}(k - 1)$$

$$t_{90}(k) = v_{t_{90},k} \otimes t_{17}(k - 1)$$

$$t_{91}(k) = v_{t_{91},k} \otimes t_{17}(k - 1)$$

$$t_{92}(k) = v_{t_{92},k} \otimes t_{17}(k - 1)$$

$$t_{93}(k) = v_{t_{93},k} \otimes t_{17}(k - 1)$$

$$t_{94}(k) = v_{t_{94},k} \otimes t_{17}(k - 1)$$

$$t_{95}(k) = v_{t_{95},k} \otimes t_{17}(k - 1)$$

$$t_{96}(k) = v_{t_{96},k} \otimes t_{17}(k - 1).$$

Karena $v_{t_{89},k} = v_{t_{90},k} = v_{t_{91},k} = v_{t_{92},k} = v_{t_{93},k} = v_{t_{94},k} = v_{t_{95},k} = v_{t_{96},k} = 5$,

maka $t_{89}(k) = t_{90}(k) = t_{91}(k) = t_{92}(k) = t_{93}(k) = t_{94}(k) = t_{95}(k) = t_{96}(k)$

(9)

$$t_{97}(k) = v_{t_{97},k} \otimes t_{16}(k - 1)$$

$$t_{98}(k) = v_{t_{98},k} \otimes t_{16}(k - 1)$$

$$t_{99}(k) = v_{t_{99},k} \otimes t_{16}(k - 1)$$

$$t_{100}(k) = v_{t_{100},k} \otimes t_{16}(k - 1)$$

$$t_{101}(k) = v_{t_{101},k} \otimes t_{16}(k - 1)$$

$$t_{102}(k) = v_{t_{102},k} \otimes t_{16}(k - 1)$$

$$t_{103}(k) = v_{t_{103},k} \otimes t_{16}(k - 1)$$

$$t_{104}(k) = v_{t_{104},k} \otimes t_{16}(k - 1).$$

Karena $v_{t_{97},k} = v_{t_{98},k} = v_{t_{99},k} = v_{t_{100},k} = v_{t_{101},k} = v_{t_{102},k} = v_{t_{103},k} = v_{t_{104},k}$

$= 5$, maka $t_{97}(k) = t_{98}(k) = t_{99}(k) = t_{100}(k) = t_{101}(k) = t_{102}(k) =$

$t_{103}(k) = t_{104}(k)$

(10)

$$t_{105}(k) = v_{t_{105},k} \otimes t_{15}(k-1)$$

$$t_{106}(k) = v_{t_{106},k} \otimes t_{15}(k-1)$$

$$t_{107}(k) = v_{t_{107},k} \otimes t_{15}(k-1)$$

$$t_{108}(k) = v_{t_{108},k} \otimes t_{15}(k-1)$$

$$t_{109}(k) = v_{t_{109},k} \otimes t_{15}(k-1)$$

$$t_{110}(k) = v_{t_{110},k} \otimes t_{15}(k-1)$$

$$t_{111}(k) = v_{t_{111},k} \otimes t_{15}(k-1)$$

$$t_{112}(k) = v_{t_{112},k} \otimes t_{15}(k-1).$$

Karena $v_{t_{105},k} = v_{t_{106},k} = v_{t_{107},k} = v_{t_{108},k} = v_{t_{109},k} = v_{t_{110},k} = v_{t_{111},k} = v_{t_{112},k} = 5$, maka $t_{105}(k) = t_{106}(k) = t_{107}(k) = t_{108}(k) = t_{109}(k) = t_{110}(k) = t_{111}(k) = t_{112}(k)$ (11)

$$t_{113}(k) = v_{t_{113},k} \otimes t_{14}(k-1)$$

$$t_{114}(k) = v_{t_{114},k} \otimes t_{14}(k-1)$$

$$t_{115}(k) = v_{t_{115},k} \otimes t_{14}(k-1)$$

$$t_{116}(k) = v_{t_{116},k} \otimes t_{14}(k-1)$$

$$t_{117}(k) = v_{t_{117},k} \otimes t_{14}(k-1)$$

$$t_{118}(k) = v_{t_{118},k} \otimes t_{14}(k-1)$$

$$t_{119}(k) = v_{t_{119},k} \otimes t_{14}(k-1)$$

$$t_{120}(k) = v_{t_{120},k} \otimes t_{14}(k-1).$$

Karena $v_{t_{113},k} = v_{t_{114},k} = v_{t_{115},k} = v_{t_{116},k} = v_{t_{117},k} = v_{t_{118},k} = v_{t_{119},k} = v_{t_{120},k} = 5$, maka $t_{113}(k) = t_{114}(k) = t_{115}(k) = t_{116}(k) = t_{117}(k) = t_{118}(k) = t_{119}(k) = t_{120}(k)$ (12)

$$t_{121}(k) = v_{t_{121},k} \otimes t_{13}(k-1)$$

$$t_{122}(k) = v_{t_{122},k} \otimes t_{13}(k-1)$$

$$t_{123}(k) = v_{t_{123},k} \otimes t_{13}(k-1)$$

$$t_{124}(k) = v_{t_{124},k} \otimes t_{13}(k-1)$$

$$t_{125}(k) = v_{t_{125},k} \otimes t_{13}(k-1)$$

$$t_{126}(k) = v_{t_{126,k}} \otimes t_{13}(k-1)$$

$$t_{127}(k) = v_{t_{127,k}} \otimes t_{13}(k-1)$$

$$t_{128}(k) = v_{t_{128,k}} \otimes t_{13}(k-1).$$

Karena $v_{t_{121,k}} = v_{t_{122,k}} = v_{t_{123,k}} = v_{t_{124,k}} = v_{t_{125,k}} = v_{t_{126,k}} = v_{t_{127,k}} = v_{t_{128,k}}$
 $= 5$, maka $t_{121}(k) = t_{122}(k) = t_{123}(k) = t_{124}(k) = t_{125}(k) = t_{126}(k) =$
 $t_{127}(k) = t_{128}(k)$ (13)

$$t_{129}(k) = v_{t_{129,k}} \otimes t_{12}(k-1)$$

$$t_{130}(k) = v_{t_{130,k}} \otimes t_{12}(k-1)$$

$$t_{131}(k) = v_{t_{131,k}} \otimes t_{12}(k-1)$$

$$t_{132}(k) = v_{t_{132,k}} \otimes t_{12}(k-1)$$

$$t_{133}(k) = v_{t_{133,k}} \otimes t_{12}(k-1)$$

$$t_{134}(k) = v_{t_{134,k}} \otimes t_{12}(k-1)$$

$$t_{135}(k) = v_{t_{135,k}} \otimes t_{12}(k-1)$$

$$t_{136}(k) = v_{t_{136,k}} \otimes t_{12}(k-1).$$

karena $v_{t_{129,k}} = v_{t_{130,k}} = v_{t_{131,k}} = v_{t_{132,k}} = v_{t_{133,k}} = v_{t_{134,k}} = v_{t_{135,k}} = v_{t_{136,k}}$
 $= 5$, maka $t_{129}(k) = t_{130}(k) = t_{131}(k) = t_{132}(k) = t_{133}(k) = t_{134}(k) =$
 $t_{135}(k) = t_{136}(k)$ (14)

$$t_{137}(k) = v_{t_{137,k}} \otimes t_{11}(k-1)$$

$$t_{138}(k) = v_{t_{138,k}} \otimes t_{11}(k-1)$$

$$t_{139}(k) = v_{t_{139,k}} \otimes t_{11}(k-1)$$

$$t_{140}(k) = v_{t_{140,k}} \otimes t_{11}(k-1)$$

$$t_{141}(k) = v_{t_{141,k}} \otimes t_{11}(k-1)$$

$$t_{142}(k) = v_{t_{142,k}} \otimes t_{11}(k-1)$$

$$t_{143}(k) = v_{t_{143,k}} \otimes t_{11}(k-1)$$

$$t_{144}(k) = v_{t_{144,k}} \otimes t_{11}(k-1)$$

Karena $v_{t_{137},k} = v_{t_{138},k} = v_{t_{139},k} = v_{t_{140},k} = v_{t_{141},k} = v_{t_{142},k} = v_{t_{143},k} = v_{t_{144},k} = 5$, maka $t_{137}(k) = t_{138}(k) = t_{139}(k) = t_{140}(k) = t_{141}(k) = t_{142}(k) = t_{143}(k) = t_{144}(k)$ (15)

$$t_{145}(k) = v_{t_{145},k} \otimes t_{10}(k-1)$$

$$t_{146}(k) = v_{t_{146},k} \otimes t_{10}(k-1)$$

$$t_{147}(k) = v_{t_{147},k} \otimes t_{10}(k-1)$$

$$t_{148}(k) = v_{t_{148},k} \otimes t_{10}(k-1)$$

$$t_{149}(k) = v_{t_{149},k} \otimes t_{10}(k-1)$$

$$t_{150}(k) = v_{t_{150},k} \otimes t_{10}(k-1)$$

$$t_{151}(k) = v_{t_{151},k} \otimes t_{10}(k-1)$$

$$t_{152}(k) = v_{t_{152},k} \otimes t_{10}(k-1).$$

Karena $v_{t_{145},k} = v_{t_{146},k} = v_{t_{147},k} = v_{t_{148},k} = v_{t_{149},k} = v_{t_{150},k} = v_{t_{151},k} = v_{t_{152},k} = 5$, maka $t_{145}(k) = t_{146}(k) = t_{147}(k) = t_{148}(k) = t_{149}(k) = t_{150}(k) = t_{151}(k) = t_{152}(k)$ (16)

$$\begin{aligned} t_1(k) &= v_{t_1,k} \otimes \{t_{28}(k) \oplus t_{34}(k) \oplus t_{41}(k) \oplus t_{50}(k) \oplus t_{59}(k) \oplus t_{67}(k) \oplus \\ &\quad t_{76}(k) \oplus t_{84}(k) \oplus t_{94}(k) \oplus t_{103}(k) \oplus t_{109}(k) \oplus t_{118}(k) \oplus t_{128}(k) \\ &\quad \oplus t_{134}(k) \oplus t_{143}(k) \oplus t_{151}(k)\} \\ &= v_{t_1,k} \otimes \{(v_{t_{28},k} \otimes t_9(k-1)) \oplus (v_{t_{34},k} \otimes t_{24}(k-1)) \oplus (v_{t_{41},k} \otimes t_{23}(k-1)) \oplus \\ &\quad \oplus (v_{t_{50},k} \otimes t_{22}(k-1)) \oplus (v_{t_{59},k} \otimes t_{21}(k-1)) \oplus (v_{t_{67},k} \otimes t_{20}(k-1)) \oplus \\ &\quad \oplus (v_{t_{76},k} \otimes t_{19}(k-1)) \oplus (v_{t_{84},k} \otimes t_{18}(k-1)) \oplus (v_{t_{94},k} \otimes t_{17}(k-1)) \oplus \\ &\quad \oplus (v_{t_{103},k} \otimes t_{16}(k-1)) \oplus (v_{t_{109},k} \otimes t_{15}(k-1)) \oplus (v_{t_{118},k} \otimes t_{14}(k-1)) \oplus \\ &\quad \oplus (v_{t_{128},k} \otimes t_{13}(k-1)) \oplus (v_{t_{134},k} \otimes t_{12}(k-1)) \oplus (v_{t_{143},k} \otimes t_{11}(k-1)) \oplus \\ &\quad \oplus (v_{t_{151},k} \otimes t_{10}(k-1))\} \end{aligned} \quad (17)$$

Dari persamaan (1) sampai (16) didapat:

$$t_1(k) = t_2(k) = t_3(k) = t_4(k) = t_5(k) = t_6(k) = t_7(k) = t_8(k), \quad (18)$$

$$t_9(k) = v_{t_9,k} \otimes \{t_1(k) \oplus t_2(k) \oplus t_3(k) \oplus t_4(k) \oplus t_5(k) \oplus t_6(k) \oplus t_7(k) \oplus t_8(k)\}, \quad (19)$$

dan

$$t_{24}(k) = v_{t_{24},k} \otimes \{t_1(k) \oplus t_2(k) \oplus t_3(k) \oplus t_4(k) \oplus t_5(k) \oplus t_6(k) \oplus t_7(k) \oplus t_8(k)\}. \quad (20)$$

Dari persamaan (18) dan misalkan tim petugas berada di p_{17} , maka persamaan (19) dan (20) bisa diubah menjadi:

$$\begin{aligned} t_9(k) &= v_{t_9,k} \otimes t_1(k) \\ &= v_{t_9,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes \{(v_{t_{28},k} \otimes t_9(k-1)) \oplus (v_{t_{34},k} \otimes t_{24}(k-1)) \oplus (v_{t_{41},k} \\ &\quad \otimes t_{23}(k-1)) \oplus (v_{t_{50},k} \otimes t_{22}(k-1)) \oplus (v_{t_{59},k} \otimes t_{21}(k-1)) \oplus (v_{t_{67},k} \\ &\quad \otimes t_{20}(k-1)) \oplus (v_{t_{76},k} \otimes t_{19}(k-1)) \oplus (v_{t_{84},k} \otimes t_{18}(k-1)) \oplus (v_{t_{94},k} \\ &\quad \otimes t_{17}(k-1)) \oplus (v_{t_{103},k} \otimes t_{16}(k-1)) \oplus (v_{t_{109},k} \otimes t_{15}(k-1)) \oplus (v_{t_{118},k} \\ &\quad \otimes t_{14}(k-1)) \oplus (v_{t_{128},k} \otimes t_{13}(k-1)) \oplus (v_{t_{134},k} \otimes t_{12}(k-1)) \oplus (v_{t_{143},k} \\ &\quad \otimes t_{11}(k-1)) \oplus (v_{t_{151},k} \otimes t_{10}(k-1))\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} t_{24}(k) &= v_{t_{24},k} \otimes t_1(k) \\ &= v_{t_{24},k} \otimes v_{t_1,k} \otimes \{(v_{t_{28},k} \otimes t_9(k-1)) \oplus (v_{t_{34},k} \otimes t_{24}(k-1)) \oplus (v_{t_{41},k} \\ &\quad \otimes t_{23}(k-1)) \oplus (v_{t_{50},k} \otimes t_{22}(k-1)) \oplus (v_{t_{59},k} \otimes t_{21}(k-1)) \oplus (v_{t_{67},k} \\ &\quad \otimes t_{20}(k-1)) \oplus (v_{t_{76},k} \otimes t_{19}(k-1)) \oplus (v_{t_{84},k} \otimes t_{18}(k-1)) \oplus (v_{t_{94},k} \\ &\quad \otimes t_{17}(k-1)) \oplus (v_{t_{103},k} \otimes t_{16}(k-1)) \oplus (v_{t_{109},k} \otimes t_{15}(k-1)) \oplus (v_{t_{118},k} \\ &\quad \otimes t_{14}(k-1)) \oplus (v_{t_{128},k} \otimes t_{13}(k-1)) \oplus (v_{t_{134},k} \otimes t_{12}(k-1)) \oplus (v_{t_{143},k} \\ &\quad \otimes t_{11}(k-1)) \oplus (v_{t_{151},k} \otimes t_{10}(k-1))\} \end{aligned} \quad (22)$$

Jika yang berada pada p_{17} adalah petugas dari p_1 dan p_2 , maka transisi yang *enabled* dan *difire* adalah t_{28} dan t_{34} , sehingga persamaan (21) dan (22) bisa diubah menjadi:

$$\begin{aligned} t_9(k) &= v_{t_9,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes \{v_{t_{28},k} \otimes t_9(k-1) \oplus v_{t_{34},k} \otimes t_{24}(k-1)\} \\ &= v_{t_9,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes t_9(k-1) \oplus v_{t_9,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{34},k} \otimes t_{24}(k-1), \end{aligned} \quad (23)$$

dan

$$\begin{aligned} t_{24}(k) &= v_{t_{24},k} \otimes v_{t_1,k} \otimes \{v_{t_{28},k} \otimes t_9(k-1) \oplus v_{t_{34},k} \otimes t_{24}(k-1)\} \\ &= v_{t_{24},k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{28},k} \otimes t_9(k-1) \oplus v_{t_{24},k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{34},k} \otimes t_{24}(k-1) \end{aligned} \quad (24)$$

Sehingga dari persamaan (1), (2), (23), dan (24) diperoleh untuk lamanya kerja petugas lapangan untuk pengelompokan petugas p_1 dan p_2 adalah:

$$\begin{bmatrix} t_{28}(k) \\ t_{34}(k) \\ t_9(k) \\ t_{24}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_{28},k} & a \\ b & v_{t_{34},k} \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} t_9(k-1) \\ t_{24}(k-1) \end{bmatrix}$$

Nilai $a = \varepsilon$ supaya:

$$v_{t_{28},k} \otimes t_9(k-1) \oplus a \otimes t_{24}(k-1) = v_{t_{28},k} \otimes t_9(k-1)$$

Begitu juga nilai $b = \varepsilon$ supaya

$$b \otimes t_9(k-1) \oplus v_{t_{34},k} \otimes t_{24}(k-1) = v_{t_{34},k} \otimes t_{24}(k-1)$$

Nilai c didefinisikan sebagai:

$$c = v_{t_9,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{28},k}$$

Nilai d didefinisikan sebagai:

$$d = v_{t_9,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{34},k}$$

Nilai e didefinisikan sebagai:

$$e = v_{t_{24},k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{28},k}$$

Nilai f didefinisikan sebagai:

$$f = v_{t_{24},k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{34},k}$$

Selanjutnya misalkan diberikan lama waktu proses (dalam menit) tiap tahap ke-1 untuk pengelompokan petugas p_1 dan p_2

$$v_{t_{28},k} = 5$$

$$v_{t_{34},k} = 5$$

$$v_{t_1,k} = 275$$

$$v_{t_9,k} = 100$$

$$v_{t_{24},k} = 100$$

$$c = v_{t_9,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{28},k} = 100 \otimes 275 \otimes 5 = 380 \text{ menit}$$

$$d = v_{t_9,k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{34},k} = 100 \otimes 275 \otimes 5 = 380 \text{ menit}$$

$$e = v_{t_{24},k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{28},k} = 100 \otimes 275 \otimes 5 = 380 \text{ menit}$$

$$f = v_{t_{24},k} \otimes v_{t_1,k} \otimes v_{t_{34},k} = 100 \otimes 275 \otimes 5 = 380 \text{ menit}$$

Untuk keadaan awal

$$\begin{bmatrix} t_{28}(0) \\ t_{34}(0) \\ t_9(0) \\ t_{24}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Didapatkan $k = 1$

$$\begin{bmatrix} t_{28}(1) \\ t_{34}(1) \\ t_9(1) \\ t_{24}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 \\ 380 & 380 \\ 380 & 380 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 380 \\ 380 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan tersebut dapat diperoleh bahwa $t_9(k) - t_{28}(k) = 380 - 5 = 375$ menit dan $t_{24}(k) - t_{34}(k) = 380 - 5 = 375$ menit menunjukkan lamanya proses pelayanan lapangan dari proses pengelompokan petugas menjadi tim i sampai tim i kembali ke kantor PDAM dan siap untuk melakukan pelayanan kepada pelanggan berikutnya. Sehingga masing-masing petugas membutuhkan waktu 375 menit untuk bekerja berpasangan dengan petugas lain hingga sampai selesai melakukan tugasnya dan kembali ke kantor PDAM, kemudian siap untuk bekerja berpasangan dengan petugas yang berbeda.

4.4 Petri Net Alur Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja

Setelah mengetahui alur *Petri Net* untuk sistem pelayanan pasang baru, pelayanan perbaikan instalasi, dan penjadwalan lamanya kerja karyawan, selanjutnya dibahas tentang *Petri Net* untuk pelayanan lapangan dengan delapan kelompok pekerja.

Pada sebuah pelayanan, antrian pelanggan tidak akan pernah berhenti, pelanggan selalu datang setiap saat. Untuk pembuatan *Petri Net* alur pelayanan pelayanan dengan delapan kelompok pekerja diasumsikan bahwa setiap pelanggan

telah melewati proses mulai dari awal pendaftaran sampai persiapan barang dan alat-alat untuk pelayanan kepada pelanggan telah selesai. Karyawan yang bekerja pada pelayanan pasang baru dan perbaikan instalasi ada 16 orang yang dibagi kedalam 8 kelompok. Sehingga *Petri Net* untuk pelayanan lapangan dengan delapan kelompok pekerja adalah pada gambar 4.1.

Keterangan gambar 4.1 untuk *Petri Net* Pelayanan dengan Delapan Kelompok Pekerja:

t_{16} dan t_{30} = proses pelayanan pelanggan sampai petugas lapangan bersiap untuk melakukan pelayanan

t_i = proses pengerjaan permintaan pelanggan oleh tim i dengan $31 \leq i \leq 38$

t_{i+38} = proses tim i telah selesai mengerjakan permintaan pelanggan, konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan selesai, dan perjalanan kembali ke kantor PDAM dengan $1 \leq i \leq 8$

p_{25} = antrian permintaan pelanggan yang menunggu untuk dilayani oleh petugas lapangan

p_i = pelayanan lapangan oleh tim i selesai dikerjakan dengan $26 \leq i \leq 33$

p_{34} = tim 1 - tim 8 selesai mengerjakan permintaan pelanggan dan siap mengerjakan permintaan pelanggan lain selanjutnya (*idle*)

Pada gambar 4.1 alur *Petri Net* untuk pelayanan lapangan dengan delapan kelompok pekerja transisi t_{16} dan t_{30} yang menyatakan proses pelayanan pelanggan sampai petugas lapangan bersiap untuk melakukan pelayanan. Keadaan dimana terdapat antrian permintaan pelanggan yang menunggu untuk dilayani oleh petugas lapangan adalah *place* p_{25} sehingga ada garis panah penghubung dari t_{16} dan t_{30} ke p_{25} . Proses selanjutnya yaitu transisi t_{31} sampai t_{38} yaitu petugas lapangan di PDAM yang berada pada *place* p_{34} menuju ke lokasi pelanggan dan mengerjakan permintaan pelanggan, sehingga ada garis panah penghubung dari p_{25} ke t_{31} sampai t_{38} dan dari p_{34} ke t_{31} sampai t_{38} . Keadaan dimana pelayanan lapangan telah selesai berada pada *place* p_{26} sampai p_{33} . Setelah pelayanan

selesai maka proses selanjutnya adalah transisi t_{39} sampai t_{46} yaitu petugas melakukan konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan selesai, dan kembali ke kantor PDAM. Petugas lapangan yang telah kembali ke PDAM berada pada *place* p_{34} dan pelanggan yang telah selesai dilayani dan akan keluar dari antrian berada pada *place* p_{35} sehingga ada garis panah penghubung dari t_{39} sampai t_{46} ke p_{34} dan t_{39} sampai t_{46} ke p_{35} .

Berikutnya dilakukan analisa *Petri Net* sistem pelayanan lapangan sebagai berikut:

➤ Himpunan *place* =

$$P = \{p_{25}, p_{26}, p_{27}, p_{28}, p_{29}, p_{30}, p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{34}\}$$

➤ Himpunan transisi =

$$T = \{t_{16}, t_{30}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34}, t_{35}, t_{36}, t_{37}, t_{38}, t_{39}, t_{40}, t_{41}, t_{42}, t_{43}, t_{45}, t_{46}\}$$

➤ Himpunan *Arc* =

$$A = \{(t_{16}, p_{25}), (t_{30}, p_{25}), (p_{25}, t_{31}), (p_{25}, t_{32}), (p_{25}, t_{33}), (p_{25}, t_{34}), (p_{25}, t_{35}), (p_{25}, t_{36}), (p_{25}, t_{37}), (p_{25}, t_{38}), (t_{31}, p_{26}), (t_{32}, p_{27}), (t_{33}, p_{28}), (t_{34}, p_{29}), (t_{35}, p_{30}), (t_{36}, p_{31}), (t_{37}, p_{32}), (t_{38}, p_{33}), (p_{26}, t_{39}), (p_{27}, t_{40}), (p_{28}, t_{41}), (p_{29}, t_{42}), (p_{30}, t_{43}), (p_{31}, t_{44}), (p_{32}, t_{45}), (p_{33}, t_{46}), (t_{39}, p_{34}), (t_{40}, p_{34}), (t_{41}, p_{34}), (t_{42}, p_{34}), (t_{43}, p_{34}), (t_{44}, p_{34}), (t_{45}, p_{34}), (t_{46}, p_{34})\}$$

➤ Bobot untuk masing-masing *Arc* adalah sebesar satu

➤ Keadaan awal

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_0(p_{25}) \\ x_0(p_{26}) \\ x_0(p_{27}) \\ x_0(p_{28}) \\ x_0(p_{29}) \\ x_0(p_{30}) \\ x_0(p_{31}) \\ x_0(p_{32}) \\ x_0(p_{33}) \\ x_0(p_{34}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Setelah membuat *Petri Net* untuk pelayanan lapangan dengan delapan kelompok pekerja, selanjutnya akan dianalisis *liveness* dan *deadlocksnya* dengan menggunakan *Coverability Tree*. Pertama dari *Petri Net* gambar 4.1 untuk alur

pelayanan lapangan dengan delapan kelompok pekerja tersebut didefinisikan terlebih dahulu matriks *Forward* (A_f) dan *Backward* (A_b). Matriks *Forward* adalah sebuah matrik ukuran $m \times n$ dimana m dan n masing-masing adalah jumlah banyaknya transisi dan *place*. Elemen-elemen yang terdapat pada matriks *Forward* merupakan ada atau tidaknya garis panah penghubung yang menghubungkan setiap transisi t_j ke setiap *place* p_i . Jika terdapat garis panah penghubung maka bernilai satu tetapi jika tidak ada garis panah penghubung maka bernilai nol. Sedangkan matriks *Backward* adalah sebuah matriks berukuran $m \times n$ dimana elemen-elemen penyusunnya merupakan ada atau tidaknya garis panah penghubung yang menghubungkan setiap *place* p_i ke setiap transisi t_j . Jika terdapat garis panah penghubung maka bernilai satu tetapi jika tidak ada garis panah penghubung maka bernilai nol. Sehingga pada *Petri Net* alur pelayanan lapangan dengan delapan kelompok pekerja, matriks *Forward* dan *Backward*nya adalah sebagai berikut:

Matriks *Backward*

$$A_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks *Forward*

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Setelah transisi t_{16} di *fire* terdapat transisi yang *enabled* yaitu t_{31} sampai t_{38} .

Misalkan transisi t_{31} di *fire* yang berarti tim 1 mulai bekerja, didapatkan keadaan:

$$x_2 = x_1 + Au$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Coverability Tree Petri Net Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja

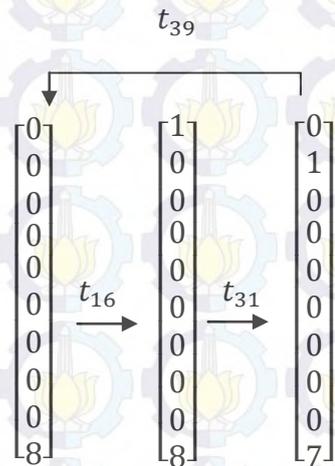
Proses membangun *Coverability Tree* dari *Petri Net* alur pelayanan lapangan dengan menggunakan delapan kelompok pekerja dapat dijelaskan sebagai berikut. Keadaan $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 8]^T$ didefinisikan dengan dengan *node root*. Pada keadaan ini transisi yang *enabled* yaitu t_{16} dan t_{30} . Pemfirean t_{16} dan t_{30} akan membentuk *Coverability Tree* yang sama karena kedua transisi tersebut memiliki arti yang sama yaitu waktu dimana petugas lapangan bersiap melayani pelanggan, sehingga yang akan dibahas hanya salah satu yaitu transisi t_{16} . Pemfirean transisi t_{16} ini menyebabkan keadaan atau letak token *Petri Net* berubah. Jika t_{16} *difire* maka keadaan *Petri Net* akan berubah menjadi $x_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 8]^T$. Keadaan *Petri Net* ini mengakibatkan transisi t_{16} , dan transisi t_{31} sampai t_{38} yang *enabled* dan siap untuk *difire* salah satunya. Karena terdapat transisi yang *enabled* secara bersamaan, maka akan dibuat *Coverability Tree* dari berbagai kemungkinan. Terdapat dua kemungkinan pemfirean yaitu (1) t_{16} tidak *difire*, ketika t_{16} tidak *difire* terdapat beberapa kemungkinan lain yaitu : (a) t_{31} *difire*, (b) t_{32} *difire*, (c) t_{33} *difire*, (d) t_{34} *difire*, (e) t_{35} *difire*, (f) t_{36} *difire*, (g) t_{37} *difire* (h) t_{38} *difire*., dan (2) t_{16} *difire* secara terus-menerus tanpa memfire transisi-transisi *enabled* yang lain.

Selanjutnya dibuat *Coverability Tree* dari berbagai pilihan dan keadaan yang telah disebutkan tadi, yaitu sebagai berikut:

(1a) Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{31} *difire*

Pertama-tama dilakukan pemfirean pada transisi t_{16} . Akibat pemfirean tersebut token berada di *place* p_{25} dan p_{34} , sedangkan transisi yang *enabled* yaitu transisi t_{16} , dan transisi t_{31} sampai t_{38} . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{31} *difire* seperti pada gambar 4.4.1. Jika t_{31} *difire* mengakibatkan letak token berpindah dari *place* p_{25} ke p_{26} dan mengakibatkan berkurangnya jumlah token di *place* p_{25} dan p_{34} , jumlah token di *place* p_{34} yang semula delapan berkurang satu menjadi tujuh sedangkan token di p_{25} yang semula satu berkurang satu menjadi

nol. Dengan adanya token di *place* p_{26} maka transisi t_{39} *enabled*. Kemudian transisi t_{39} *difire* dan mengakibatkan token berpindah dari *place* p_{26} ke p_{34} . Sehingga jumlah token pada *place* p_{34} yang semula berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali (kembali ke jumlah semula), sedangkan *place* p_{26} yang semula memiliki satu token berkurang satu menjadi nol. *Coverability Tree* dari permasalahan (1a) adalah gambar 4.4.1 sebagai berikut:

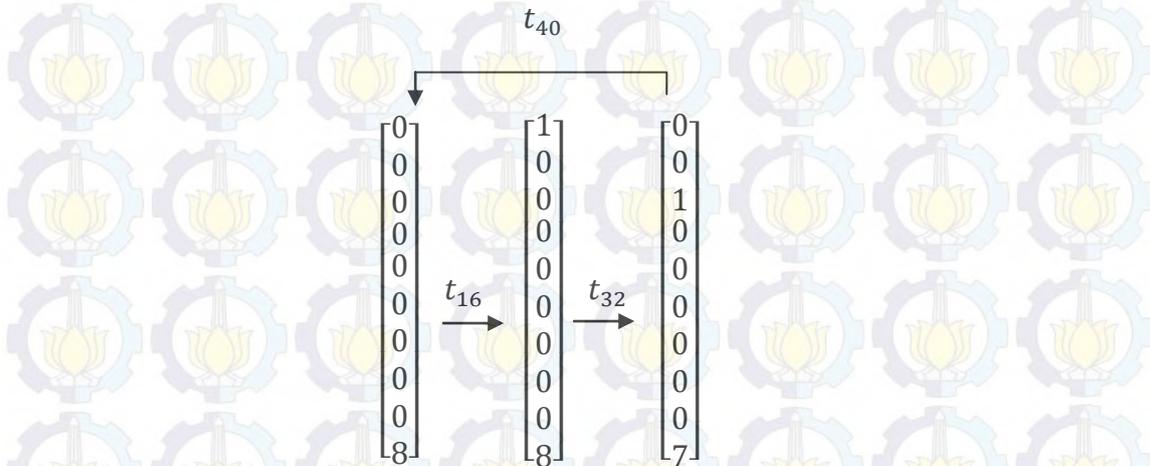


Gambar 4.4.1 *Coverability Tree* Petri Net Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{31} *difire*

(1b) Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{32} *difire*

Pertama-tama dilakukan pemfirean pada transisi t_{16} . Akibat pemfirean tersebut token berada di *place* p_{25} dan p_{34} , sedangkan transisi yang *enabled* yaitu transisi t_{16} , dan transisi t_{31} sampai t_{38} . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{32} *difire* seperti pada gambar 4.4.2. Jika t_{32} *difire* mengakibatkan letak token berpindah dari *place* p_{25} ke p_{27} dan mengakibatkan berkurangnya jumlah token di *place* p_{25} dan p_{34} , jumlah token di *place* p_{34} yang semula delapan berkurang satu menjadi tujuh sedangkan token di p_{25} yang semula satu berkurang satu menjadi nol. Dengan adanya token di *place* p_{27} maka transisi t_{40} *enabled*. Kemudian transisi t_{40} *difire* dan mengakibatkan token berpindah dari *place* p_{27} ke p_{34} . Sehingga jumlah token pada *place* p_{34} yang semula berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali (kembali ke jumlah semula), sedangkan *place* p_{27}

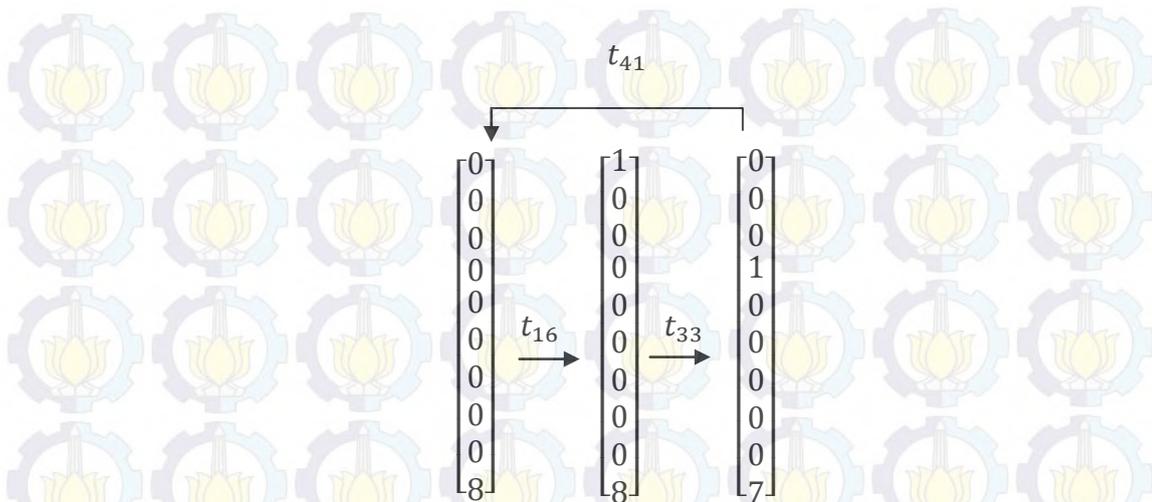
yang semula memiliki satu token berkurang satu menjadi nol. *Coverability Tree* dari permasalahan (1b) adalah gambar 4.4.2 sebagai berikut:



Gambar 4.4.2 *Coverability Tree* Petri Net Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak difire dan t_{32} difire

(1c) Ketika t_{16} tidak difire dan t_{33} difire

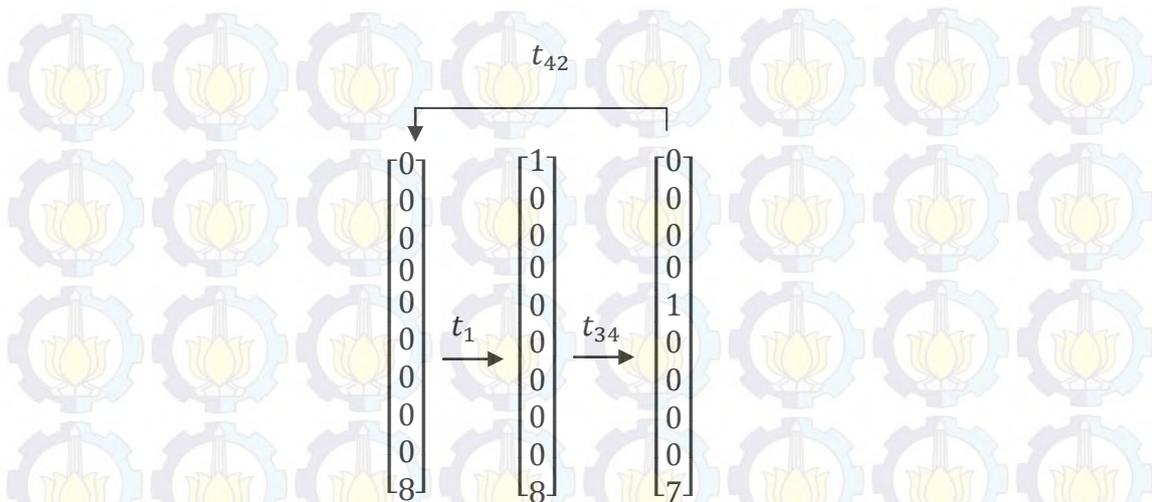
Pertama-tama dilakukan pemfirean pada transisi t_{16} . Akibat pemfirean tersebut token berada di *place* p_{25} dan p_{34} , sedangkan transisi yang *enabled* yaitu transisi t_{16} , dan transisi t_{31} sampai t_{38} . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{31} difire seperti pada gambar 4.4.3. Jika t_{33} difire mengakibatkan letak token berpindah dari *place* p_{25} ke p_{28} dan mengakibatkan berkurangnya jumlah token di *place* p_{25} dan p_{34} , jumlah token di *place* p_{34} yang semula delapan berkurang satu menjadi tujuh sedangkan token di p_{25} yang semula satu berkurang satu menjadi nol. Dengan adanya token di *place* p_{28} maka transisi t_{41} *enabled*. Kemudian transisi t_{41} difire dan mengakibatkan token berpindah dari *place* p_{28} ke p_{34} . Sehingga jumlah token pada *place* p_{34} yang semula berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali (kembali ke jumlah semula), sedangkan *place* p_{28} yang semula memiliki satu token berkurang satu menjadi nol. *Coverability Tree* dari permasalahan (1c) adalah gambar 4.4.3 sebagai berikut:



Gambar 4.4.3 *Coverability Tree Petri Net* Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{33} *difire*

(1d) Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{34} *difire*

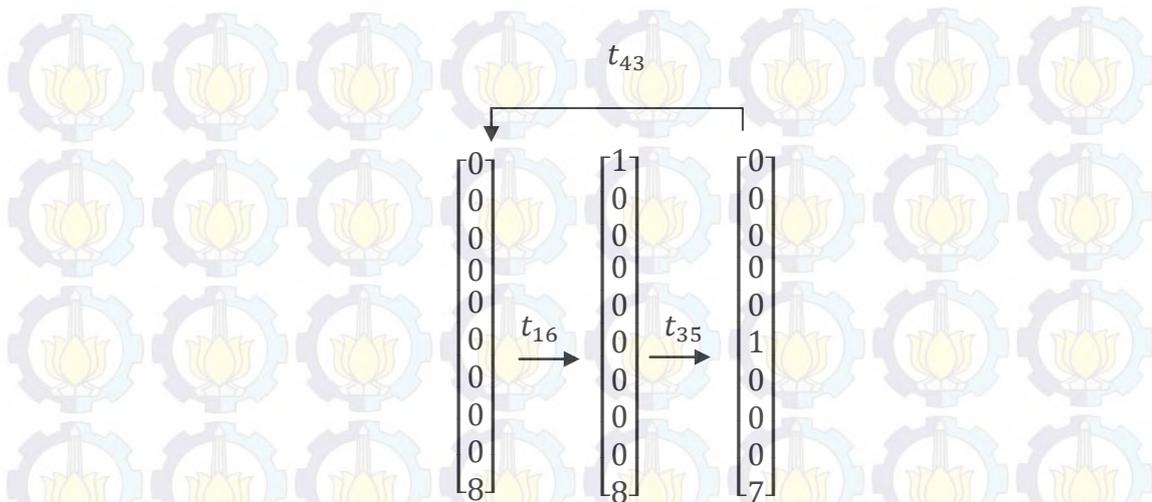
Pertama-tama dilakukan pemfirean pada transisi t_{16} . Akibat pemfirean tersebut token berada di *place* p_{25} dan p_{34} , sedangkan transisi yang *enabled* yaitu transisi t_{16} , dan transisi t_{31} sampai t_{38} . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{34} *difire* seperti pada gambar 4.4.4. Jika t_{34} *difire* mengakibatkan letak token berpindah dari *place* p_{25} ke p_{29} dan mengakibatkan berkurangnya jumlah token di *place* p_{25} dan p_{34} , jumlah token di *place* p_{34} yang semula delapan berkurang satu menjadi tujuh sedangkan token di p_{25} yang semula satu berkurang satu menjadi nol. Dengan adanya token di *place* p_{29} maka transisi t_{42} *enabled*. Kemudian transisi t_{42} *difire* dan mengakibatkan token berpindah dari *place* p_{29} ke p_{34} . Sehingga jumlah token pada *place* p_{34} yang semula berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali (kembali ke jumlah semula), sedangkan *place* p_{29} yang semula memiliki satu token berkurang satu menjadi nol. *Coverability Tree* dari permasalahan (1d) adalah gambar 4.4.4 sebagai berikut:



Gambar 4.4.4 *Coverability Tree Petri Net* Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{34} *difire*

(1e) Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{35} *difire*

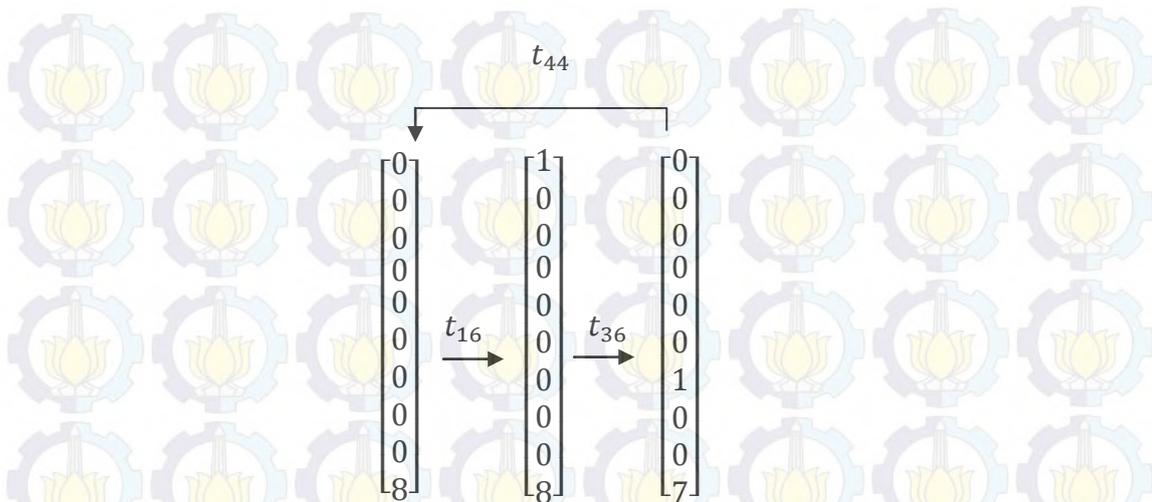
Pertama-tama dilakukan pemfirean pada transisi t_{16} . Akibat pemfirean tersebut token berada di *place* p_{25} dan p_{34} , sedangkan transisi yang *enabled* yaitu transisi t_{16} , dan transisi t_{31} sampai t_{38} . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{35} *difire* seperti pada gambar 4.4.5. Jika t_{35} *difire* mengakibatkan letak token berpindah dari *place* p_{25} ke p_{30} dan mengakibatkan berkurangnya jumlah token di *place* p_{25} dan p_{34} , jumlah token di *place* p_{34} yang semula delapan berkurang satu menjadi tujuh sedangkan token di p_{25} yang semula satu berkurang satu menjadi nol. Dengan adanya token di *place* p_{30} maka transisi t_{43} *enabled*. Kemudian transisi t_{43} *difire* dan mengakibatkan token berpindah dari *place* p_{30} ke p_{34} . Sehingga jumlah token pada *place* p_{34} yang semula berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali (kembali ke jumlah semula), sedangkan *place* p_{30} yang semula memiliki satu token berkurang satu menjadi nol. *Coverability Tree* dari permasalahan (1e) adalah gambar 4.4.5 sebagai berikut:



Gambar 4.4.5 *Coverability Tree Petri Net* Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{35} *difire*

(1f) Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{36} *difire*

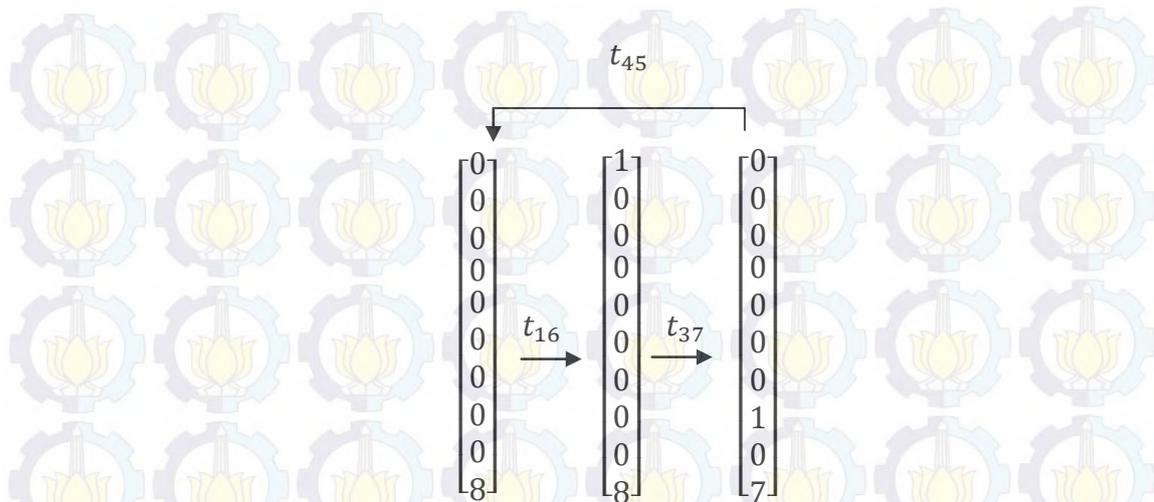
Pertama-tama dilakukan pemfirean pada transisi t_{16} . Akibat pemfirean tersebut token berada di *place* p_{25} dan p_{34} , sedangkan transisi yang *enabled* yaitu transisi t_{16} , dan transisi t_{31} sampai t_{38} . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{36} *difire* seperti pada gambar 4.4.6. Jika t_{36} *difire* mengakibatkan letak token berpindah dari *place* p_{25} ke p_{31} dan mengakibatkan berkurangnya jumlah token di *place* p_{25} dan p_{34} , jumlah token di *place* p_{34} yang semula delapan berkurang satu menjadi tujuh sedangkan token di p_{25} yang semula satu berkurang satu menjadi nol. Dengan adanya token di *place* p_{31} maka transisi t_{44} *enabled*. Kemudian transisi t_{44} *difire* dan mengakibatkan token berpindah dari *place* p_{31} ke p_{34} . Sehingga jumlah token pada *place* p_{34} yang semula berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali (kembali ke jumlah semula), sedangkan *place* p_{31} yang semula memiliki satu token berkurang satu menjadi nol. *Coverability Tree* dari permasalahan (1f) adalah gambar 4.4.6 sebagai berikut:



Gambar 4.4.6 *Coverability Tree Petri Net* Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{36} *difire*

(1g) Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{37} *difire*

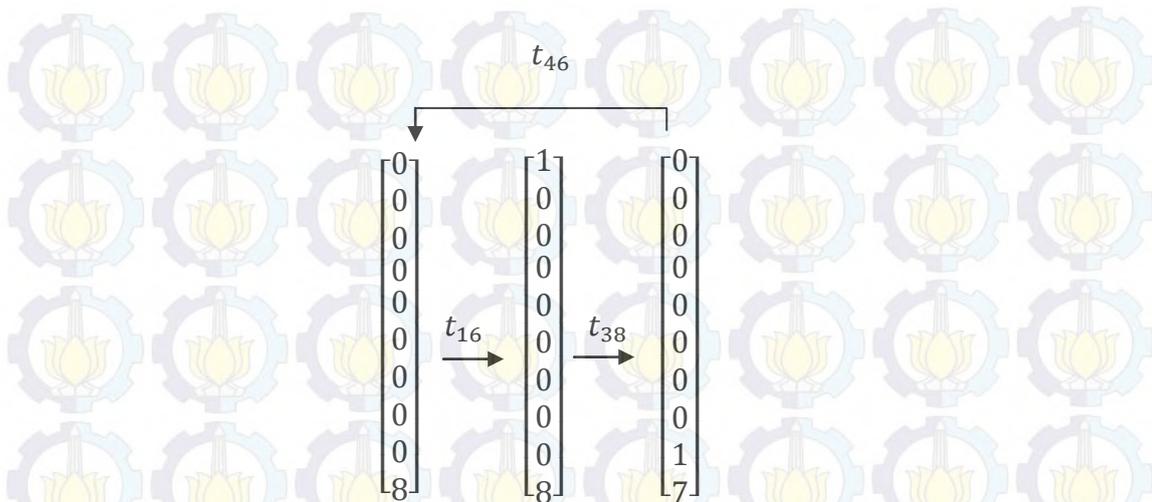
Pertama-tama dilakukan pemfirean pada transisi t_{16} . Akibat pemfirean tersebut token berada di *place* p_{25} dan p_{34} , sedangkan transisi yang *enabled* yaitu transisi t_{16} , dan transisi t_{31} sampai t_{38} . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{37} *difire* seperti pada gambar 4.4.7. Jika t_{37} *difire* mengakibatkan letak token berpindah dari *place* p_{25} ke p_{32} dan mengakibatkan berkurangnya jumlah token di *place* p_{25} dan p_{34} , jumlah token di *place* p_{34} yang semula delapan berkurang satu menjadi tujuh sedangkan token di p_{25} yang semula satu berkurang satu menjadi nol. Dengan adanya token di *place* p_{32} maka transisi t_{45} *enabled*. Kemudian transisi t_{45} *difire* dan mengakibatkan token berpindah dari *place* p_{32} ke p_{34} . Sehingga jumlah token pada *place* p_{34} yang semula berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali (kembali ke jumlah semula), sedangkan *place* p_{32} yang semula memiliki satu token berkurang satu menjadi nol. *Coverability Tree* dari permasalahan (1g) adalah gambar 4.4.7 sebagai berikut:



Gambar 4.4.7 *Coverability Tree Petri Net* Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{37} *difire*

(1h) Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{38} *difire*

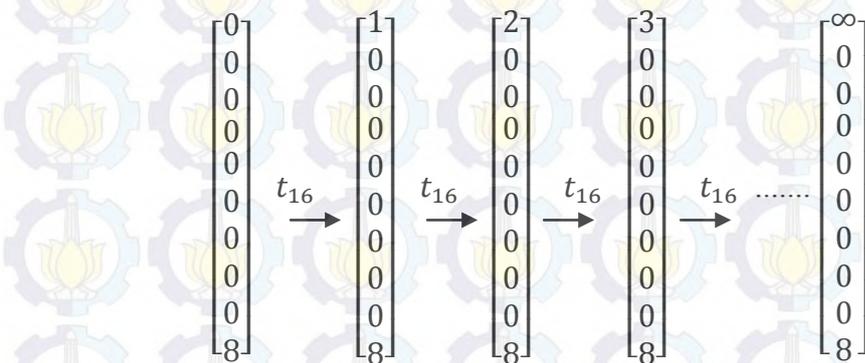
Pertama-tama dilakukan pemfirean pada transisi t_{16} . Akibat pemfirean tersebut token berada di *place* p_{25} dan p_{34} , sedangkan transisi yang *enabled* yaitu transisi t_{16} , dan transisi t_{31} sampai t_{38} . Pilihan pemfirean yaitu ketika t_{38} *difire* seperti pada gambar 4.4.8. Jika t_{38} *difire* mengakibatkan letak token berpindah dari *place* p_{25} ke p_{33} dan mengakibatkan berkurangnya jumlah token di *place* p_{25} dan p_{34} , jumlah token di *place* p_{34} yang semula delapan berkurang satu menjadi tujuh sedangkan token di p_{25} yang semula satu berkurang satu menjadi nol. Dengan adanya token di *place* p_{33} maka transisi t_{46} *enabled*. Kemudian transisi t_{46} *difire* dan mengakibatkan token berpindah dari *place* p_{33} ke p_{34} . Sehingga jumlah token pada *place* p_{34} yang semula berjumlah tujuh bertambah satu menjadi delapan kembali (kembali ke jumlah semula), sedangkan *place* p_{33} yang semula memiliki satu token berkurang satu menjadi nol. *Coverability Tree* dari permasalahan (1h) adalah gambar 4.4.8 sebagai berikut:



Gambar 4.4.8 *Coverability Tree* Petri Net Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} tidak *difire* dan t_{38} *difire*

(2) Ketika t_{16} *difire*

Awalnya token hanya ada pada *place* p_{34} sebanyak delapan buah. Pilihan *prefirean* yaitu ketika t_{16} *difire* seperti pada gambar 4.4.9. Jika transisi t_{16} *difire* maka *place* p_{25} yang tadinya tidak terdapat token menjadi mendapatkan satu token. Terdapatnya token pada p_{25} mengakibatkan perubahan transisi yang *enabled*. Transisi yang *enabled* adalah transisi t_{16} , dan transisi t_{31} sampai t_{38} . Jika transisi t_{16} *difire* lagi maka token di *place* p_{25} bertambah satu dan seterusnya. Sehingga *Coverability Tree* nya adalah gambar 4.4.9 sebagai berikut:



Gambar 4.4.9 *Coverability Tree* Petri Net Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja Ketika t_{16} *difire*

Setelah melakukan pemfirean berdasarkan pilihan-pilihan tersebut, terlihat bahwa *Coverability Tree* dari *Petri Net* tersebut membentuk *looping* saat proses pemfirean yaitu proses pemfirean tidak pernah berhenti. Sehingga *Petri Net* tersebut adalah *liveness*.

Model Aljabar Max Plus dari Alur Petri Net Pelayanan Lapangan dengan Delapan Kelompok Pekerja yang Dikaitkan dengan Waktu

Untuk mengetahui lama waktu dan waktu berakhirnya proses pelayanan lapangan dengan delapan kelompok pekerja lapangan, maka *Petri Net* pelayanan lapangan diselesaikan dengan menggunakan model Aljabar *Max Plus*. Sebelumnya terlebih dahulu diberikan definisi variabel-variabel yang digunakan untuk memodelkan studi kasus. Variabel yang menunjukkan waktu, sebagai berikut:

$t_{16}(k)$ dan $t_{30}(k)$ = waktu proses pelayanan pelanggan sampai persiapan barang dan alat-alat untuk pelayanan kepada pelanggan yang ke- k

$t_i(k)$ = waktu proses perjalanan menuju lokasi pelanggan dan pengerjaan permintaan pelanggan oleh tim i yang ke- k dengan $31 \leq i \leq 38$

$t_{i+38}(k)$ = waktu proses tim i telah selesai mengerjakan permintaan pelanggan, konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan selesai, dan perjalanan kembali ke kantor PDAM dengan $1 \leq i \leq 8$

Adapun variabel-variabel yang menunjukkan lama waktu dalam menjalankan setiap proses yaitu:

$v_{t_{16},k}$ dan $v_{t_{30},k}$ = lamanya proses pelayanan pelanggan persiapan barang dan alat-alat untuk pelayanan kepada pelanggan

$v_{t_i,k}$ = lamanya proses perjalanan menuju lokasi pelanggan dan pengerjaan permintaan pelanggan oleh tim i dengan $31 \leq i \leq 38$

$v_{t_{i+38},k}$ = lamanya proses tim i telah selesai mengerjakan permintaan pelanggan, konfirmasi ke pelanggan bahwa proses pelayanan selesai, dan perjalanan kembali ke kantor PDAM dengan $1 \leq i \leq 8$

Selanjutnya dibentuk model Aljabar *Max Plus* dari *Petri Net* sistem pelayanan lapangan dengan delapan kelompok pekerja yang dikaitkan dengan waktu. Model ini dibedakan atas delapan kejadian, yaitu (i) kejadian ketika tim 1 melakukan tugas, (ii) kejadian ketika tim 2 melakukan tugas, (iii) kejadian ketika tim 3 melakukan tugas, (iv) kejadian ketika tim 4 melakukan tugas, (v) kejadian ketika tim 5 melakukan tugas, (vi) kejadian ketika tim 6 melakukan tugas, (vii) kejadian ketika tim 7 melakukan tugas, (viii) kejadian ketika tim 8 melakukan tugas. Jika dilihat dari *Coverability Tree* nya maka kedelapan kejadian tersebut memiliki model Aljabar *Max Plus* yang sama, sehingga hanya perlu membuat sebuah model untuk salah satu kejadian tersebut. Jika dipilih kejadian (k) maka model Aljabar *Max Plus* yang dibentuk adalah:

$$t_{16}(k) = v_{t_{16},k} \otimes t_{16}(k-1) \quad (1)$$

$$t_{30}(k) = v_{t_{30},k} \otimes t_{30}(k-1) \quad (2)$$

$$t_{31}(k) = v_{t_{31},k} \otimes (t_{16}(k) \oplus (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1)))) \quad (3)$$

$$t_{31}(k) = v_{t_{31},k} \otimes (t_{30}(k) \oplus (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1)))) \quad (4)$$

$$t_{39}(k) = t_{31}(k) \otimes v_{t_{39},k} \quad (5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1) ke persamaan (3) didapat:

$$\begin{aligned} t_{31}(k) &= v_{t_{31},k} \otimes (t_{16}(k) \oplus (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), \\ &\quad t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1)))) \\ &= v_{t_{31},k} \otimes t_{16}(k) \oplus v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), \\ &\quad t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \\ &= v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes t_{16}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), \\ &\quad t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
t_{39}(k) &= t_{31}(k) \otimes v_{t_{39},k} \\
&= v_{t_{39},k} \otimes (v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes t_{16}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), \\
&\quad t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), \\
&\quad t_{46}(k-1))) \\
&= v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} \otimes t_{16}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), \\
&\quad t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), \\
&\quad t_{46}(k-1))) \tag{7}
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2) ke persamaan (4) didapat:

$$\begin{aligned}
t_{31}(k) &= v_{t_{31},k} \otimes (t_{30}(k) \oplus (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), \\
&\quad t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \\
&= v_{t_{31},k} \otimes t_{30}(k) \oplus v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), \\
&\quad t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \\
&= v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes t_{30}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), \\
&\quad t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))) \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{39}(k) &= t_{31}(k) \otimes v_{t_{39},k} \\
&= v_{t_{39},k} \otimes (v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes t_{30}(k-1) \oplus v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), \\
&\quad t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), \\
&\quad t_{46}(k-1))) \\
&= v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} \otimes t_{30}(k-1) \oplus v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes (\ominus (t_{39}(k-1), \\
&\quad t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), \\
&\quad t_{46}(k-1))) \tag{9}
\end{aligned}$$

Sehingga dari persamaan (1),(3),(5) sampai (7) dapat dibuat matriks dari model Aljabar *Max Plus* dari *Petri Net* sistem Pelayanan Lapangan dengan delapan kelompok pekerja untuk pasang baru dengan tim 1 yang dikaitkan dengan waktu yaitu:

$$\begin{bmatrix} t_{16}(k) \\ t_{39}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_{16},k} & a \\ b & c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} t_{16}(k-1) \\ M \end{bmatrix} \tag{10}$$

Dengan:

$$M = \ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))$$

Nilai $a = \varepsilon$ supaya:

$$v_{t_{16},k} \otimes t_{16}(k-1) \oplus a \otimes M = v_{t_{16},k} \otimes t_{16}(k-1)$$

Nilai b didefinisikan sebagai:

$$b = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k}$$

Nilai c didefinisikan sebagai:

$$c = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k}$$

Selanjutnya misalkan diberikan lama waktu proses (dalam menit) tiap tahap ke-1

$v_{t_{16},k}$ = lamanya proses pelayanan pelanggan sampai persiapan barang dan alat-alat untuk pelayanan kepada pelanggan pasang baru = 695 menit

$$v_{t_{31},k} = 280$$

$$v_{t_{39},k} = 100$$

$$b = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k} = 100 \otimes 280 \otimes 695 = 1075 \text{ menit}$$

$$c = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} = 100 \otimes 280 = 380 \text{ menit}$$

$$\text{Untuk keadaan awal } \begin{bmatrix} t_{16}(0) \\ t_{39}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = 0$$

Didapatkan $k = 1$

$$\begin{bmatrix} t_{16}(1) \\ t_{39}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 695 & \varepsilon \\ 1075 & 380 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 695 \\ 1075 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan (2),(4),(5),(8),(9) dapat dibuat matriks dari model Aljabar *Max Plus* dari *Petri Net* sistem Pelayanan Lapangan dengan delapan kelompok pekerja untuk perbaikan instalasi dengan tim 1 yang dikaitkan dengan waktu yaitu:

$$\begin{bmatrix} t_{30}(k) \\ t_{39}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_{30},k} & d \\ e & f \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} t_{30}(k-1) \\ M \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dengan:

$$M = \ominus (t_{39}(k-1), t_{40}(k-1), t_{41}(k-1), t_{42}(k-1), t_{43}(k-1), t_{44}(k-1), t_{45}(k-1), t_{46}(k-1))$$

Nilai $d = \varepsilon$ supaya:

$$v_{t_{30},k} \otimes t_{30}(k-1) \oplus d \otimes M = v_{t_{30},k} \otimes t_{30}(k-1)$$

Nilai e didefinisikan sebagai:

$$e = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{16},k}$$

Nilai f didefinisikan sebagai:

$$f = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k}$$

Selanjutnya misal diberikan lama waktu proses (dalam menit) tiap tahap ke-1

$v_{t_{30},k}$ = lamanya proses pelayanan pelanggan sampai petugas lapangan bersiap untuk melayani perbaikan instalasi = 560 menit

$$v_{t_{31},k} = 280$$

$$v_{t_{39},k} = 100$$

$$e = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} \otimes v_{t_{30},k} = 100 \otimes 280 \otimes 560 = 940 \text{ menit}$$

$$f = v_{t_{39},k} \otimes v_{t_{31},k} = 100 \otimes 280 = 380 \text{ menit}$$

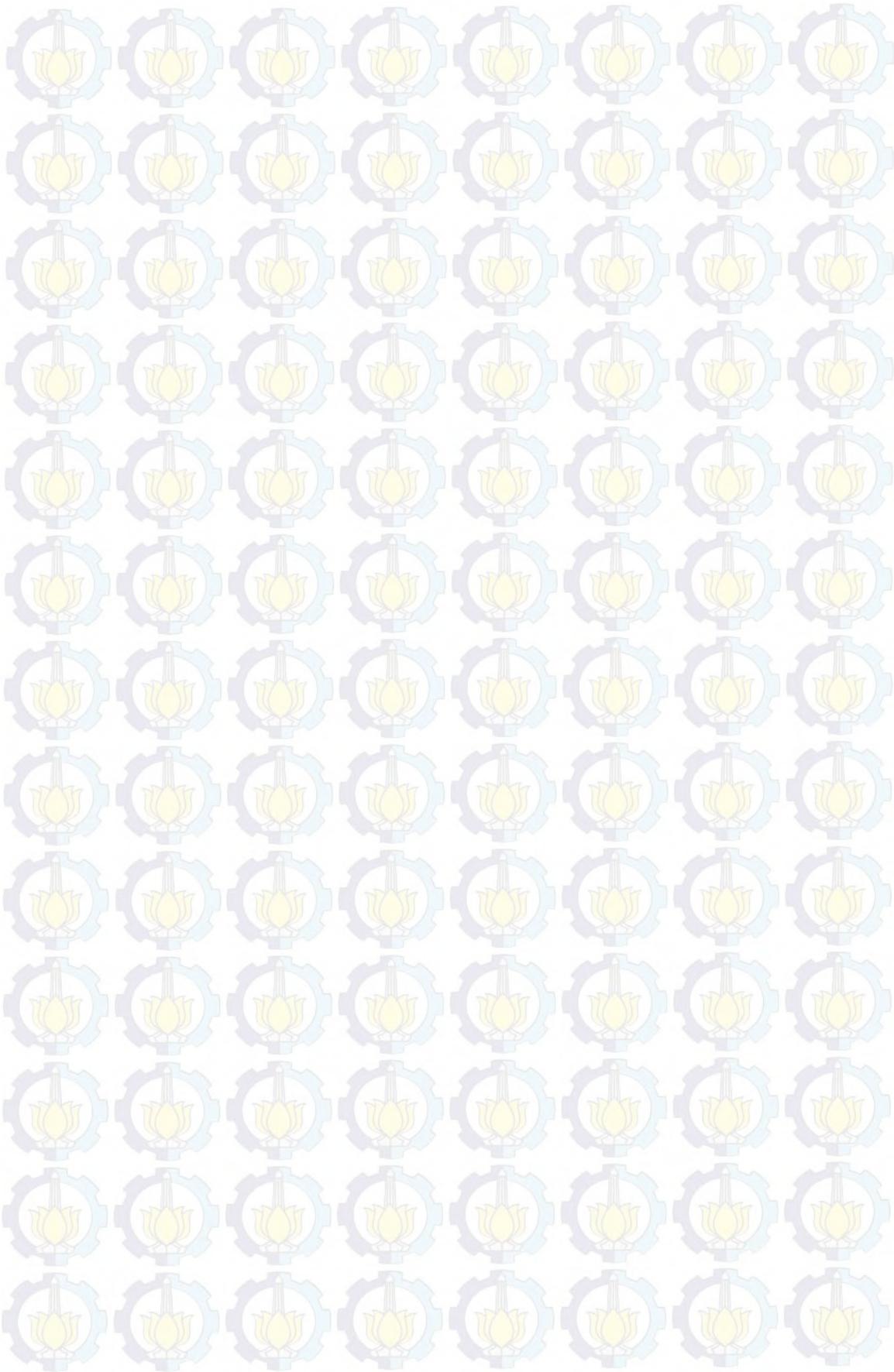
Untuk keadaan awal $\begin{bmatrix} t_{30}(0) \\ t_{39}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$M = 0$$

Didapatkan $k = 1$

$$\begin{bmatrix} t_{30}(1) \\ t_{39}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 560 & \varepsilon \\ 940 & 380 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 560 \\ 940 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan tersebut dapat diperoleh bahwa $t_{39}(k) - t_{16}(k) = 1075 - 695 = 380$ menit dan $t_{39}(k) - t_{30}(k) = 940 - 560 = 380$ menit menunjukkan lamanya proses pelayanan lapangan dengan delapan kelompok pekerja baik pasang baru ataupun pelayanan perbaikan instalasi sampai tim i kembali ke kantor PDAM dan siap untuk melakukan pelayanan kepada pelanggan berikutnya.



BAB 5

Kesimpulan dan Saran

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah penelitian ini, maka disimpulkan bahwa:

- a. *Petri Net* sistem pelayanan pasang baru dan perbaikan instalasi dibuat terintegrasi dengan sistem pelayanan lapangan dengan delapan kelompok pekerja. Alur *Petri Net* sistem pelayanan pasang baru dianalisis dengan *Coverability Tree* hasilnya adalah selalu *Liveness* dan tidak pernah *Deadlocks*. Berdasarkan hasil analisis model aljabar *Max plusnya* diperoleh bahwa untuk satu kali proses pelayanan pasang baru mulai dari pendaftaran pelanggan sampai instalasi selesai dipasang membutuhkan waktu 1075 menit atau 2 hari lebih 1 jam 55 menit.
- b. Alur *Petri Net* sistem pelayanan perbaikan instalasi dianalisis dengan *Coverability Tree* hasilnya adalah *Liveness* dan tidak pernah *Deadlocks*. Hasil analisis model aljabar *Max Plusnya* diperoleh bahwa untuk satu kali proses pelayanan perbaikan instalasi mulai dari pendaftaran aduan dari pelanggan sampai instalasi selesai diperbaiki membutuhkan waktu 940 menit atau 1 hari lebih 7 jam 40 menit.
- c. Alur *Petri Net* untuk penjadwalan lamanya kerja karyawan merupakan alur yang terbatas (*bounded*) karena jumlah karyawan lapangan sudah pasti enam belas orang (terdapat 16 *place* dengan masing-masing *place* memiliki satu token). Jumlah kemungkinan pemilihan kelompok karyawan ada $16 \times 8 = 128$ cara. Setelah dianalisis dengan menggunakan *Coverability Tree* diperoleh bahwa *Petri Net* penjadwalan lamanya kerja karyawan adalah selalu *Liveness* dan tidak pernah *Deadlocks*. Berdasarkan hasil analisis model aljabar *Max plusnya* diperoleh bahwa untuk satu kali proses bekerja, setiap petugas bagian lapangan membutuhkan waktu 375 menit untuk bekerja berpasangan dengan petugas lain sampai selesai melakukan tugasnya dan kembali ke kantor PDAM, kemudian siap untuk bekerja berpasangan dengan petugas yang berbeda.

- d. Alur *Petri Net* sistem pelayanan lapangan dengan delapan kelompok pekerja dianalisis dengan *Coverability Tree* hasilnya adalah selalu *Liveness* dan tidak pernah *Deadlocks*. Hasil analisis model aljabar *Max Plus*nya diperoleh bahwa untuk satu kali proses pelayanan lapangan baik pasang baru atau perbaikan instalasi dibutuhkan waktu 380 menit sampai tim pekerja tersebut kembali ke kantor PDAM dan siap untuk melakukan pelayanan kepada pelanggan berikutnya.
- e. Dengan penambahan enam karyawan lapangan (3 tim), pelayanan kepada pelanggan dapat diselesaikan satu hari lebih cepat dibandingkan jika dengan menggunakan delapan tim karyawan lapangan. Hal ini dapat dijadikan pertimbangan bahwa penambahan karyawan lapangan dapat mempercepat proses pelayanan kepada pelanggan.

5.2 Saran

Penelitian ini dilakukan di PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk untuk perancangan lamanya sistem pelayanan pasang baru, sistem pelayanan perbaikan instalasi, sistem penjadwalan lamanya kerja karyawan, dan sistem pelayanan lapangan menggunakan delapan kelompok pekerja, sehingga penelitian ini juga dapat dikembangkan ke penelitian lain seperti perancangan lamanya sistem pelayanan di kantor PDAM lain karena setiap kantor PDAM memiliki prosedur pelayanan yang berbeda, perancangan lamanya sistem pelayanan di kantor instansi lain, atau pada sistem penjadwalan lainnya. Pada penelitian ini karyawan yang diteliti adalah karyawan lapangan yang berjumlah enam belas orang dan dibagi menjadi delapan kelompok kerja yang bertugas melakukan pasang baru dan perbaikan instalasi ke rumah pelanggan. Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan menambah jumlah karyawan.

DAFTAR PUSTAKA

- Adzkiya, D. (2008), *Membangun Model Petri Net Lampu Lalu Lintas dan Simulasinya*, Thesis S2, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Cassandras, C.G. dan Lafortune, S. (2008), *Introduction to Discrete Event Systems. Second Edition*, Springer Science+Business Media, New York.
- PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk. (2013), *Prosedur Kegiatan Baku*, PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk, Nganjuk.
- PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk. (2011). *Pengumuman Nomor: 001/PENG/411.702/2011 Tentang:Penyesuaian Tarip Air Minum*, PDAM Tirta Dharma Kabupaten Nganjuk, Nganjuk.
- Subiono. (2013), *Aljabar Maxplus dan Terapannya. Version 1.1.1*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Suyanto, Y.H. (2011), *Penjadwalan Kegiatan Belajar Mengajar di Sekolah Menengah Atas Katolik (SMAK) St. Louis I Surabaya*, Thesis S2, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Talehala, M.M. (2010), *Model Penjadwalan Kegiatan Pembelajaran Sekolah pada Kelas Moving dengan Menggunakan Aljabar Max Plus*, Thesis S2, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Widayanti, D.N. (2013), *Perancangan Penjadwalan Sistem Pelayanan dan Kerja Karyawan Pemasangan Instalasi di PLN menggunakan Aljabar Max-Plus dan Petri Net*, Thesis S2, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Margaretha Dwi Cahyani lahir di Nganjuk, 20 Maret 1988. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari SDN Sugihwaras I, SMPN 1 Prambon, dan SMAN 2 Kediri. Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Universitas Negeri Surabaya dan diterima sebagai mahasiswa angkatan 2007. Penulis lulus sarjana dengan delapan semester dan wisuda pada bulan

Oktober 2011 dengan mendapat gelar Sarjana Pendidikan. Dengan gelar Sarjana, penulis mendapat pekerjaan sebagai guru matematika di IPH School Surabaya pada tahun 2011 hingga 2014. Penulis melanjutkan studi S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya pada tahun 2013 hingga tahun 2015 dengan NRP 1213201104. Selama kuliah S2 di jurusan matematika, penulis mengambil bidang Aljabar. Kritik dan saran ataupun pertanyaan yang berhubungan dengan tesis ini dapat menghubungi penulis melalui email margarethadwicaahyani@yahoo.com.