Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember

TUGAS AKHIR - KI141502

PERBANDINGAN KINERJA METODE BABY-STEP GIANT-STEP DAN POLLARD RHO DENGAN BRENT CYCLE DETECTION SEBAGAI METODE PENYELESAIAN PERMASALAHAN LOGARITMA DISKRET: STUDI KASUS PERSOALAN "DSA ATTACK" PADA TIMUS ONLINE JUDGE

MUHAMMAD GHAZIAN
NRP 5114100158

Dosen Pembimbing 1
Rully Sulaiman, S.Kom.,M.Kom.

Dosen Pembimbing 2
Ridho Rahman Hariadi, S.Kom., M.Sc.

DEPARTEMEN INFORMATIKA
Fakultas Teknologi Informasi dan Komunikasi
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya, 2018

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

TUGAS AKHIR - KI141502

PERBANDINGAN KINERJA METODE BABY-STEP GIANT-STEP DAN POLLARD RHO DENGAN BRENT CYCLE DETECTION SEBAGAI METODE PENYELESAIAN PERMASALAHAN LOGARITMA DISKRET: STUDI KASUS PERSOALAN "DSA ATTACK" PADA TIMUS ONLINE JUDGE

MUHAMMAD GHAZIAN
NRP 5114100158

Dosen Pembimbing 1
Rully Sulaiman, S.Kom.,M.Kom.

Dosen Pembimbing 2
Ridho Rahman Hariadi, S.Kom., M.Sc.

DEPARTEMEN INFORMATIKA
Fakultas Teknologi Informasi dan Komunikasi
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya, 2018

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

UNDERGRADUATE THESES - KI141502

PERFORMANCE COMPARISON BETWEEN BABY-STEP GIANT-STEP AND POLLARD RHO WITH BRENT CYCLE DETECTION TO SOLVE DISCRETE LOGARITHM PROBLEM : CASE STUDY OF "DSA ATTACK" PROBLEM FROM TIMUS ONLINE JUDGE

MUHAMMAD GHAZIAN
NRP 5114100158

Supervisor 1
Rully Sulaiman, S.Kom.,M.Kom.

Supervisor 2
Ridho Rahman Hariadi, S.Kom., M.Sc.

INFORMATICS DEPARTMENT
Faculty of Information Technology and Communication
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya, 2018

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

LEMBAR PENGESAHAN

PERBANDINGAN KINERJA METODE BABY-STEP GIANT-STEP DAN POLLARD RHO DENGAN BRENT CYCLE DETECTION SEBAGAI METODE PENYELESAIAN PERMASALAHAN LOGARITMA DISKRET: STUDI KASUS PERSOALAN "DSA ATTACK" PADA TIMUS ONLINE JUDGE

TUGAS AKHIR

Diajukan Guna Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Komputer
pada
Bidang Studi Algoritma Pemrograman
Program Studi S-1 Departemen Informatika
Fakultas Teknologi Informasi dan Komunikasi
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:
Muhammad Ghazian
NRP. 5114100158

Disetujui oleh Dosen Pembimbing Tugas Akhir:

Rully Sulaiman, S.Kom., M.Kom. .....

NIP. 19700213194021001 (Pembimbing 1)

Ridho Rahman Hariadi, S.Kom., M.Sc. .....

NIP. 198702132014041001 (Pembimbing 2)

SURABAYA
MARET 2018

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

ABSTRAK

PERBANDINGAN KINERJA METODE BABY-STEP GIANT-STEP DAN POLLARD RHO DENGAN BRENT CYCLE DETECTION SEBAGAI METODE PENYELESAIAN PERMASALAHAN LOGARITMA DISKRET: STUDI KASUS PERSOALAN ”DSA ATTACK” PADA TIMUS ONLINE JUDGE

Nama	:	Muhammad Ghazian
NRP	:	5114100158
Departemen	:	Departemen Informatika, Fakultas Teknologi Informasi dan Komunikasi, ITS
Pembimbing I	:	Rully Sulaiman, S.Kom.,M.Kom.
Pembimbing II	:	Ridho Rahman Hariadi, S.Kom., M.Sc.

Abstrak

Permasalahan logaritma diskret merupakan permasalahan yang sulit untuk diselesaikan. Pada dunia kriptografi, hal ini sering dimanfaatkan untuk mengamankan subjek sekuritas. Banyak studi telah dilakukan terkait topik logaritma diskret, dan dari studi tersebut dihasilkan banyak metode untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Tugas akhir ini mengulas dua metode tersebut, yaitu metode Baby-step Giant-step dan Pollard Rho dengan varian Brent Cycle Detection. Melalui pengujian dan studi kasus, didapat hasil bahwa kedua metode memiliki fungsi pertumbuhan yang relatif sama, namun waktu yang dibutuhkan oleh Baby-step Giant-step untuk menyelesaikan permasalahan lebih stabil dibandingkan Pollard Rho.

Kata Kunci: baby-step giant-step; pollard rho; brent; logaritma diskret; teori bilangan; kriptografi;

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

ABSTRACT

PERFORMANCE COMPARISON BETWEEN BABY-STEP GIANT-STEP AND POLLARD RHO WITH BRENT CYCLE DETECTION TO SOLVE DISCRETE LOGARITHM PROBLEM : CASE STUDY OF "DSA ATTACK" PROBLEM FROM TIMUS ONLINE JUDGE

Name	:	Muhammad Ghazian
Student ID	:	5114100158
Department	:	Informatics Department, Faculty of Information Technology and Communication, ITS
Supervisor I	:	Rully Sulaiman, S.Kom.,M.Kom.
Supervisor II	:	Ridho Rahman Hariadi, S.Kom., M.Sc.

Abstract

Discrete logarithm problem is a difficult task to solve. In cryptography, the hardness nature of discrete logarithm is utilized as a mean to improve security. A numerous study has been undertaken regarding discrete logarithm problem, and from which, a handful of method has been constructed to solve such problem. This thesis reviews two methods to solve discrete logarithm problem, namely Baby-step Giant-step and Pollard Rho with Brent Cycle Detection variant. According to subsequent testing and case study, it appears that both method have relatively similar growth function. Baby-step Giant-step's running time, however, is much more stable compared to Pollard Rho.

Keywords: baby-step giant-step; pollard rho; brent; discrete logarithm; number theory; cryptography;

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa. Atas rahmat dan kasih sayangNya, penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dan laporan akhir dalam bentuk buku ini.

Pengerjaan buku ini penulis tujukan untuk mengeksplorasi lebih mendalam topik-topik yang tidak diwadahi oleh kampus, namun banyak menarik perhatian penulis. Selain itu besar harapan penulis bahwa pengerjaan tugas akhir sekaligus pengerjaan buku ini dapat menjadi batu loncatan penulis dalam menimba ilmu yang bermanfaat.

Penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada banyak pihak yang telah membimbing, menemani dan membantu penulis selama masa pengerjaan tugas akhir maupun masa studi.

1. Ibu Lathifah Ratna Wardhany, selaku ibu penulis yang senantiasa menanyakan ”sudah bab berapa?”, sehingga memecut penulis untuk segera merampungkan pengerjaan tugas akhir. Juga pihak yang selalu mengingatkan untuk berdzikir saat bekerja agar dimudahkan dalam mengerjakan tugas akhir.
2. Bapak Priyandoko, selaku ayah penulis yang selalu mengingatkan untuk berkunjung ke sanak saudara di Sidoarjo.
3. Ibu Ir. Endah Wismawati MT., beserta keluarga, selaku pihak yang begitu banyak membantu penulis dalam mengarungi dunia perkuliahan, baik bantuan moral maupun materi. Pengerjaan buku ini penulis persembahkan sebagai rasa hormat dan terima kasih kepada beliau sekeluarga.
4. Bapak Rully Soelaiman S.Kom.,M.Kom., selaku pembimbing penulis. Berkat bimbingan beliau, lama pengerjaan tugas akhir ini dapat ditekan dari tujuh bulan menjadi satu minggu. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan atas segala perhatian, didikan, pengajaran, dan nasihat yang telah diberikan oleh be-

liau selama masa studi penulis.

5. Bapak Ridho Rahman Hariadi, S.Kom., M.Sc., selaku pembimbing penulis yang telah memberikan arahan semasa pengerjaan tugas akhir.
6. Arya Putra Kurniawan, selaku teman satu kos yang hebat karena bisa (dan mau) banyak bergaul dengan penulis selama empat tahun, juga selaku pihak yang telah sangat banyak membantu penulis menjaga asupan gizi dengan mengajak makan hampir setiap malam.
7. Petrus Damianus W., selaku teman seperjuangan di kampus yang telah banyak bertukar pikiran dengan penulis.
8. Rekan-rekan satu angkatan 2014 mahasiswa Teknik Informatika yang tidak lelah membantu penulis semasa masa studi, juga karena kesabaran mereka yang luar biasa dalam menghadapi kelakuan penulis.
9. Abdul Majis Hasani, Theo Pratama, dan Prasetyo Nugrohadi yang telah membantu penulis dalam membuat laporan tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa buku ini jauh dari kata sempurna. Maka dari itu, penulis memohon maaf apabila terdapat salah kata maupun makna pada buku ini. Akhir kata, penulis mempersembahkan buku ini sebagai wujud nyata kontribusi penulis dalam ilmu pengetahuan.

Surabaya, Maret 2018

Muhammad Ghazian

DAFTAR ISI

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR KODE SUMBER

DAFTAR NOTASI

$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat.
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat positif hingga n eksklusif.
$\mathbb{Z}_n^*$	Sebuah *multiplicative group* dengan himpunan beranggotakan bilangan bulat hingga n eksklusif.
ord(g)	Order sebuah bilangan g, yaitu berapa kali g harus dioperasikan dengan g agar menghasilkan elemen identitas.
$\phi(n)$	*Euler Totient Function* atau *Euler Phi*. Menotasikan banyaknya nilai yang koprima dengan n.
ω	Sebuah bilangan pada $\mathbb{Z}_n^*$ dengan order sebesar h dimana $h < \phi(n)$.
$\mathbb{H}_{(a,n)}$	Himpunan yang anggotanya merupakan elemen $\mathbb{Z}_n$. Himpunan ini berisi seluruh nilai yang mungkin dibangun dari $a^i \ (mod\ n)$ untuk seluruh nilai $0 \leq i < n$.
$\mathbb{H}_{(\omega,n)}$	Himpunan yang anggotanya merupakan elemen $\mathbb{Z}_n$. Himpunan ini berisi seluruh nilai yang mungkin dibangun dari $\omega^i \ (mod\ n)$ untuk seluruh nilai $0 \leq i < \frac{\phi(n)}{h}$ dimana $ord(\omega) = h$.
$[k]_n$	Sebuah kelas residu k dengan modulus m, yaitu himpunan $k + in \ : \ i \in \mathbb{Z}$.
p_{turtle}	Sebuah *pointer* suku sebuah deret yang dibangun oleh suatu random function $f_n(x)$. *Pointer* suku ini bergerak satu langkah setiap iterasinya.
p_{hare}	Sebuah *pointer* suku sebuah deret yang dibangun oleh suatu random function $f_n(x)$. *Pointer* suku ini bergerak setiap 2^i iterasi untuk i yang terus bertambah.

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini, akan dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, Batasan masalah, tujuan, metodologi pengerjaan, dan sistematika penulisan tugas akhir.

1.1. Latar Belakang

Pengiriman pesan oleh dua pihak (sebut saja, Alice sebagai pengirim dan Bob sebagai penerima) yang berada di mesin (komputer) yang berbeda memiliki beberapa masalah pada aspek keamanan. Salah satunya adalah mengenai integritas pesan. Tidak ada jaminan bahwa pesan yang diterima Bob merupakan pesan yang sama yang dikirimkan oleh Alice. Selain itu, tidak ada jaminan juga bahwa pesan yang diterima Bob memang benar berasal dari Alice. Kedua masalah ini membuka celah terjadinya tindak kriminal atau tersiarnya informasi yang bersifat rahasia. Kedua masalah ini dapat ditangani dengan menggunakan skema Digital Signature dalam mengirimkan pesan. [1]

Digital Signature merupakan skema untuk memastikan keotentikan sebuah dokumen dan keotentikan sumber pengiriman [1]. *Signing* akan dilakukan pada pesan yang akan dikirimkan. Hasil *signing* tersebut akan dikirimkan bersama pesan. Penerima pesan dapat dengan mudah memvalidasi apakah *signature* pesan yang diterima sesuai dengan *signature* yang datang bersama pesan tersebut. Namun bahkan dengan skema Digital Signature, keotentikan pesan yang diterima tidak sepenuhnya terjamin. Ada kemungkinan bahwa pihak ketiga membuat sebuah *signature* berdasarkan pesan palsu, sehingga Bob sebagai penerima pesan melihat bahwa pesan yang diterima seolah-olah datang dari Alice. Sebuah *signature* dikatakan dipalsukan apabila untuk sembarang pesan, sebuah *signature* **baru** untuk pesan tersebut berhasil dibuat [2].

Terdapat beberapa jenis skema Digital Signature, seperti ElGamal, Schnorr, dan DSA (Digital Signature Algorithm). Tugas akhir ini berfokus pada skema yang ditetapkan sebagai standar Digital Signature: Digital Signature Algorithm [1].

Digital Signature Algorithm menggunakan *public-key cryptosystem*, yaitu penggunaan pasangan kunci publik dan kunci privat. *Public-key cryptosystem* yang digunakan Digital Signature Algorithm menggunakan penjelasan berikut.

Diberikan tiga buah nilai, g, x, dan p dimana terdapat sebuah nilai q yang memenuhi persamaan $g^q \equiv 1 \ (mod\ p)$. Hitung nilai y menggunakan persamaan

$$y = g^x \ (mod\ p) \text{ untuk } g, x, \text{ dan } p \text{ tertentu}$$

Maka *public key* yang terbentuk adalah $\langle p, q, g, y \rangle$ dan private key yang terbentuk adalah x.

Salah satu hal penting untuk menjamin efektifitas skema DSA adalah kunci privat tidak boleh diketahui oleh pihak luar. *Total Break* adalah kejadian saat kunci privat milik seorang pengguna berhasil dicari oleh pihak ketiga [2]. Dengan didapatnya kunci privat ini, pihak ketiga dengan bebas bisa membuat *signature* untuk seluruh pesan yang diinginkan.

Pencarian kunci privat pada skema Digital Signature Algorithm adalah pencarian nilai x pada persamaan $y = g^x \ (mod\ p)$. Permasalahan ini umum disebut dengan permasalahan logaritma diskret. Permasalahan ini merupakan permasalahan yang sulit untuk diselesaikan [1]. Meskipun begitu, Pollard dan Shank masing-masing mengajukan satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan logaritma diskret dengan kompleksitas yang sama, yaitu $O(n)$ [3]. Brent kemudian meningkatkan metode yang diajukan Pollard sebesar 24% [4].

Tugas akhir ini akan membangun dan membandingkan dua metode penyelesaian permasalahan logaritma diskret sebagai upaya melakukan pemalsuan *signature*: Shank's Baby-step Giant-step

dan Pollard Rho dengan deteksi siklus Brent. Tugas akhir ini akan menggunakan studi kasus *problem* DSA Attack pada situs Timus Online Judge, dimana parameter skema Digital Signature Algorithm yang digunakan lebih sederhana:

1. N, bilangan bulat yang menentukan panjang bit parameter q.
2. L, bilangan bulat yang menentukan panjang bit parameter p.
3. q, sebuah komponen *public key* berupa bilangan prima.
4. p, sebuah komponen *public key* berupa bilangan prima dimana $p - 1$ habis dibagi q.
5. g, sebuah komponen *public key* berupa bilangan dengan *multiplicative order modulo* p sebesar q.
6. y, sebuah komponen *public key* bilangan yang terbentuk dari $y = g^x \ (mod\, p)$ untuk x tertentu.
7. $H(m)$, sebuah pesan yang telah di-*hash*.

1.2. Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan diselesaikan pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana performa metode *Baby-step Giant-step* yang diimplementasikan pada saat menyelesaikan permasalahan DSA Attack?
2. Bagaimana performa metode *Pollard Rho* yang diimplementasikan pada saat menyelesaikan permasalahan DSA Attack?

1.3. Batasan Masalah

Masalah yang akan diselesaikan memiliki batasan-batasan berikut:

1. Implementasi dilakukan menggunakan bahasa pemrograman C++.
2. Nilai *hash* pesan memiliki panjang paling sedikit 3 bit, dan

paling banyak 36 bit.
3. Parameter *public key q* memiliki panjang paling sedikit 3 bit, dan paling banyak 36 bit. Panjang parameter *q* sama dengan panjang nilai *hash* pesan.
4. Parameter *public key p* memiliki panjang paling sedikit 6 bit, dan paling banyak 60 bit. Panjang *p* harus setidaknya 3 bit lebih panjang daripada *q*.
5. Parameter *public key g* memiliki rentang nilai $1 < g < p$.
6. Parameter *public key y* memiliki rentang nilai $0 \leq y < p$.

1.4. Tujuan

Tujuan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengevaluasi performa metode *Baby-step Giant-step* yang diimplementasikan untuk menyelesaikan permasalahan DSA Attack.
2. Mengevaluasi performa metode *Pollard Rho* yang diimplementasikan untuk menyelesaikan permasalahan DSA Attack.

1.5. Metodologi

Metodologi pengerjaan yang digunakan pada tugas akhir ini memiliki beberapa tahapan. Tahapan-tahapan tersebut yaitu:

1. Penyusunan proposal
   Pada tahapan ini penulis memberikan penjelasan mengenai apa yang penulis akan lakukan dan mengapa tugas akhir ini dilakukan. Penjelasan tersebut dituliskan dalam bentuk proposal tugas akhir.
2. Studi literatur
   Pada tahapan ini penulis mengumpulkan referensi yang diperlukan guna mendukung pengerjaan tugas akhir. Referensi yang digunakan dapat berupa hasil penelitian yang sudah pernah dilakukan, buku, artikel internet, atau sumber lain yang

bisa dipertanggungjawabkan.

3. Implementasi algoritma
   Pada tahapan ini penulis mulai mengembangkan algoritma yang digunakan untuk menyelesaiakan permasalahan DSA Attack.
4. Pengujian dan evaluasi
   Pada tahapan ini penulis menguji performa algoritma yang digunakan. Hasil pengujian kemudian dievaluasi untuk kemudian dipertimbangkan apakah algoritma masih bisa ditingkatkan lagi atau tidak.
5. Penyusunan buku
   Pada tahapan ini penulis menyusun hasil pengerjaan tugas akhir mengikuti format penulisan tugas akhir.

1.6. Sistematika Penulisan

Sistematika laporan tugas akhir yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

1. Bab 1. Bagian ini akan menjelaskan mengenai konteks tugas akhir yang akan dikerjakan, termasuk latar belakang, tujuan, rumusan masalah, dan metodologi.
2. Bab 2. Bagian ini akan menjelaskan mengenai dasar teori yang akan digunakan dalam pengerjaan tugas akhir.
3. Bab 3. Bagian ini akan menjelaskan mengenai desain program yang akan dibangun berdasarkan dasar teori pada bab 2.
4. Bab 4. Bagian ini akan menjelaskan implementasi desain program yang dijelaskan pada bab 3.
5. Bab 5. Bagian ini akan menjelaskan mengenai hasil pengujian program yang telah diimplementasikan pada bab 4.
6. Bab 6. Bagian ini berisi kesimpulan yang akan menjawab rumusan masalah.

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

BAB II
DASAR TEORI

Pada bab ini, dasar teori yang digunakan sebagai landasan pengerjaan tugas akhir ini akan dijabarkan. Pertama, bab ini akan menjelaskan mengenai deskripsi soal DSA Attack, dilanjutkan dengan membahas notasi yang akan banyak digunakan pada buku ini. Kemudian, pembahasan mengenai analisis soal beserta dengan beberapa metode penyelesaian yang dapat digunakan akan dijabarkan.

2.1. Deskripsi Soal

Permasalahan yang akan dibahas adalah melakukan pemalsuan *signature*, yaitu membuat pasangan nilai (r, s).

2.1.1. Parameter Masukan

Soal meminta untuk dibuatkan sebuah *signature* yang valid berdasarkan parameter berikut:

1. N, bilangan bulat yang menentukan panjang bit parameter q, $3 \leq N \leq 36$.
2. L, bilangan bulat yang menentukan panjang bit parameter p. $6 \leq L \leq 60$, $L \geq N + 3$
3. q, sebuah komponen *public key* berupa bilangan prima sepanjang N-bit.
4. p, sebuah komponen *public key* berupa bilangan prima sepanjang L-bit dimana $p - 1$ habis dibagi q.
5. g, sebuah komponen *public key* berupa bilangan dengan *multiplicative order modulo* p sebesar q, $1 < g < p$
6. y, sebuah komponen *public key* bilangan yang terbentuk dari $y = g^x \ (mod\ p)$ untuk x tertentu, $0 \leq y < p$
7. $H(m)$, sebuah pesan yang telah di-*hash*.

Parameter yang diberikan dibentuk dengan mengikuti langkah berikut.

1. Tentukan fungsi *hash* yang dapat digunakan untuk kriptografi H (contohnya SHA-2). Keluaran fungsi *hash* dapat dipangkas agar panjangnya sama dengan ukuran pasangan kunci.
2. Tentukan panjang kunci L dan N.
3. Tentukan sebuah bilangan prima sepanjang N-bit, q. N harus kurang dari atau sama dengan panjang keluaran fungsi *hash*.
4. Tentukan sebuah bilangan modulus prima sepanjang L-bit p dengan ketentuan p-1 merupakan kelipatan q.
5. Tentukan sebuah nilai g, sebuah bilangan dengan *multiplicative order modulo p* sebesar q.
6. Tentukan sebuah nilai x secara acak dimana $0 < x < q$.
7. Hitung $y = g^x (mod\ p)$.
8. *Public key* adalah $(p,\ q,\ g,\ y)$, dan *private key* adalah x.

2.1.2. Batasan Permasalahan

Batasan yang diberikan soal adalah batas runtime 1 detik, dan batas penggunaan memori 64 MB.

2.1.3. Keluaran Permasalahan

Signature yang valid dibentuk dengan langkah berikut:

1. Buat sebuah nilai k secara acak dimana $0 < k < q$
2. Hitung nilai $r = \left(g^k\ mod\ p\right)\ mod\ q$.
3. Apabila nilai $r = 0$, ulangi langkah 1 dengan nilai k yang berbeda.
4. Hitung nilai $s = k^{-1}\left(H(m) + xr\right) mod\ q$.
5. Apabila nilai $s = 0$, ulangi langkah 1 dengan nilai k yang berbeda.
6. Keluarkan pasangan nilai (r, s)

2.1.4. Lain-lain

Kebenaran *signature* yang telah dibuat bisa diverifikasi dengan melakukan prosedur berikut:

1. Tolak *signature* apabila syarat $0 < r < q$ atau $0 < s < q$ tidak terpenuhi.
2. Hitung $w = s^{-1} \; mod \; q$.
3. Hitung $u_1 = H(m) \; w \; mod \; q$.
4. Hitung $u_2 = r \; w \; mod \; q$.
5. Hitung $v = ((g^{u_1} \; y^{u_2}) \; mod \; p) \; mod \; q$.
6. *Signature* sah apabila $v == r$

2.2. Deskripsi Umum

Subbab ini akan memaparkan definisi, deskripsi dan landasan yang akan digunakan pada keseluruhan penyelesaian masalah.

2.2.1. Logaritma Diskret

Logaritma Diskret merupakan nilai x pada persamaan (2.1).

$$y = g^x \; (mod \; n), \text{untuk nilai y, g dan n tertentu} \qquad (2.1)$$

2.2.2. Modulus

Operasi pembagian dua bilangan $\frac{a}{b}$ pada dasarnya merupakan persamaan (2.2).

$$a = qb + r \qquad (2.2)$$

Nilai q pada persamaan (2.2) disebut dengan *quotient*. Nilai ini adalah hasil bagi $\frac{a}{b}$. Sedangkan nilai r pada persamaan (2.2) disebut dengan *remainder* atau *modulus*. Nilai ini adalah sisa bagi $\frac{a}{b}$. Pada aritmatika modular, hal yang seringkali disorot adalah *modulus*. Informasi lebih lengkap mengenai konsep modulus dapat merujuk pada [1]. Notasi yang umum digunakan pada aritmatika

modular bisa dilihat pada persamaan (2.3).

$$a \; mod \; b = c \tag{2.3}$$

dimana c adalah nilai r pada persamaan (2.2). Beberapa contoh bisa dilihat di bawah.

$$18 \; mod \; 13 = 5$$
$$20 \; mod \; 7 = 6$$

2.2.3. Kongruensi

Kongruensi, hubungannya dengan aritmatika modular, adalah kesamaan nilai *modulus* dua bilangan terhadap sebuah nilai pembagi. Dengan kata lain, dua buah bilangan, a dan b, memiliki kongruensi (atau cukup disebut kongruen) terhadap sebuah nilai n apabila $a \; mod \; n \; = \; b \; mod \; n$. Notasi yang umum digunakan untuk menggambarkan kongruensi dapat dilihat pada persamaan (2.4).

$$a \equiv b \; (mod \; n) \tag{2.4}$$

Kongruensi memiliki beberapa sifat.[1]

1. $a \equiv b \; (mod \; n)$ apabila $n|(a - b)$, yaitu n habis membagi $a - b$.
2. Kongruensi bersifat komutatif. Yaitu $a \equiv b \; (mod \; n)$ mengindikasikan bahwa $b \equiv a \; (mod \; n)$.
3. Kongruensi bersifat transitif. Yaitu $a \equiv b \; (mod \; n)$ dan $b \equiv c \; (mod \; n)$ mengindikasikan bahwa $a \equiv c \; (mod \; n)$.

Sisi kanan pada kongruensi $a \equiv b \; (mod \; n)$ tidak harus berada pada rentang $0 \leq b < n$.

Perhatikan bahwa penggunaan notasi *mod* memiliki dua makna:

1. Pada persamaan $a \ mod \ b = c$, operasi mod merupakan operasi biner yang menghitung hasil bagi a terhadap b (yaitu sisa bagi $\frac{a}{b}$).
2. Pada persamaan $a \equiv b \ (mod \ n)$, notasi mod disini memiliki makna $a \ mod \ n = b \ mod \ n$.

Sedangkan pada penggunaan non-notasi, definisi *modulus* memiliki dua makna:

1. Basis kongruensi, yaitu nilai n pada $a \equiv b \ (mod \ n)$
2. Sisa bagi, yaitu nilai c pada $a \ mod \ b = c$.

Untuk selanjutnya, definisi *modulus* yang digunakan adalah basis kongruensi. Untuk definisi sisa bagi, istilah *remainder* akan digunakan.

2.2.4. Aritmatika Modular

Sistem kongruensi dapat dioperasikan menggunakan operasi matematika pada umumnya [1], yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

1. Penjumlahan
   Diberikan dua kongruensi dengan nilai *modulus* yang sama, $a \ (mod \ n)$ dan $b \ (mod \ n)$,

   $$a \ (mod \ n) + b \ (mod \ n) \equiv a + b \ (mod \ n) \tag{2.5}$$

   Persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai persamaan (2.6).

   $$[a \ (mod \ n) + b \ (mod \ n)] \ (mod \ n) \equiv a + b \ (mod \ n) \tag{2.6}$$

2. Pengurangan
   Diberikan dua kongruensi dengan nilai *modulus* yang sama, $a \ (mod \ n)$ dan $b \ (mod \ n)$,

   $$a \ (mod \ n) - b \ (mod \ n) \equiv a - b \ (mod \ n) \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) dapat ditulis sebagai persamaan (2.8).

$$[a\ (mod\ n) - b\ (mod\ n)]\ (mod\ n) \equiv a - b\ (mod\ n) \quad (2.8)$$

3. Perkalian
   Diberikan dua kongruensi dengan nilai *modulus* yang sama, $a\ (mod\ n)$ dan $b\ (mod\ n)$,

$$a\ (mod\ n) * b\ (mod\ n) \equiv a * b\ (mod\ n) \quad (2.9)$$

   Persamaan (2.9) dapat ditulis sebagai persamaan (2.10).

$$[a\ (mod\ n) * b\ (mod\ n)]\ (mod\ n) \equiv a * b\ (mod\ n) \quad (2.10)$$

Operasi pembagian membutuhkan penjelasan lebih mendalam, dan akan dijelaskan pada subbab yang mendatang.

2.2.5. Kelas Residu

Apabila diberikan sistem kongruen $a \equiv b\ (mod\ n)$, nilai b dapat diubah menjadi nilai yang berada pada rentang $0 \leq b < n$, mengingat sistem kongruen terbentuk dari persamaan (2.11)

$$a = qn + b \quad (2.11)$$

Diberikan suatu nilai a dan n, terdapat banyak pasangan (q, b) yang memenuhi persamaan (2.11). Namun ada satu pasangan yang memberikan nilai b non-negatif yang paling kecil, dimana b berada pada rentang $0 \leq b < n$. Kesamaan nilai b untuk nilai n tertentu dan beberapa sembarang nilai a dapat disampaikan dengan konsep kelas residu. Kelas residu adalah sebuah himpunan yang merepresentasikan sekumpulan nilai, dimana setiap nilai tersebut memiliki *remainder* b terhadap pembagi n [1], [5]. Nilai yang digunakan sebagai representasi umumnya bilangan non-negatif yang kurang dari n. Secara formal penjelasan ini dapat ditulis sebagai persamaan (2.12)

$$[r]_n = \{qn + r\ :\ q \in \mathbb{Z}\}, \text{untuk sebuah nilai n tertentu} \quad (2.12)$$

Anggota tiap kelas residu kongruen terhadap satu sama lain. Contoh penggunaan kelas residu pada nilai pembagi $n = 7$ seperti:

$18\ mod\ 7 \in [4]_7$. Artinya 18 kongruen terhadap 4 (mod 7)
$92\ mod\ 10 \in [2]_{10}$. Artinya 92 kongruen terhadap 2 (mod 10)

Kelas residu akan digunakan untuk menyederhanakan penjelasan pada bahasan-bahasan selanjutnya. Semua nilai a dan b pada persamaan kongruensi (2.11) akan diasumsikan bernilai $0 \leq a, b < n$ untuk melambangkan bahwa a dan b merupakan anggota kelas residu tertentu, kecuali disebutkan sebaliknya secara eksplisit.

2.2.6. Sistem Residu

Sistem residu adalah sebuah himpunan yang anggotanya adalah kelas residu [1], [5]. Sistem residu yang akan digunakan pada bahasan-bahasan selanjutnya adalah sistem residu yang anggotanya semua kelas residu dari 0 hingga $n - 1$. Pernyataan ini dapat dinyatakan secara formal menggunakan persamaan (2.13)

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\} \tag{2.13}$$

2.3. Strategi Penyelesaian Umum

Tujuan permasalahan ini adalah membuat sepasang nilai *signature (r, s)* menurut prosedur yang dijelaskan. Berdasarkan prosedur pada subbab 2.1.3, beberapa variabel disebutkan, diantaranya q, p, g, Hm, k, r, s, dan x. Untuk variabel q, p, g, dan Hm, nilai variabel tersebut telah diberikan oleh soal sebagai parameter masukan. Untuk variabel k, r, dan s, nilai variabel tersebut terbentuk seiring proses *signing*. Hanya nilai x yang tidak diberikan oleh soal maupun tidak terdefinisi pada prosedur *signing*. Namun untuk nilai x, soal memberikan penjelasan bagaimana nilai x terbentuk.

1. Tentukan nilai x secara acak dimana $0 < x < q$.

2. Hitung $y = g^x \ mod \ p$.
3. Nilai *public key* adalah (p, q, g, y). Nilai *private key* adalah x.

Untuk mampu membuat *signature*, terlebih dahulu dicari nilai x pada persamaan $y = g^x \ mod \ p$. Cara menemukan nilai x pada persamaan tersebut akan dijelaskan pada subbab 2.6. Setelah menemukan nilai x, langkah selanjutnya cukup mengikuti proses yang dijelaskan pada soal.

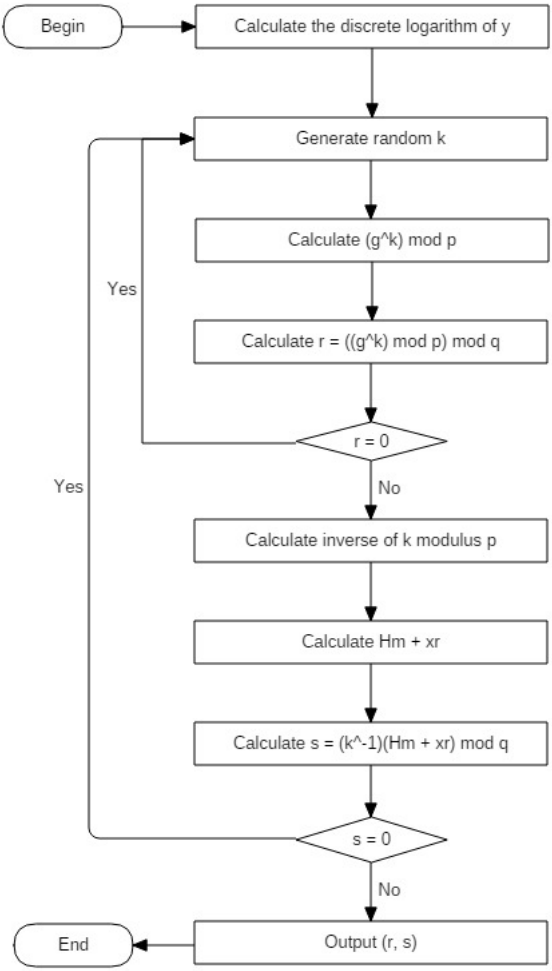
Ringkasnya, permasalahan ini dapat diselesaikan dengan prosedur di gambar 2.1. Terdapat beberapa *bottleneck* pada prosedur pembuatan signature, di antaranya penghitungan logaritma diskret y, penghitungan nilai $g^k \ mod \, p$, dan penghitungan invers $k \ (mod \ p)$. Selain proses yang telah dipaparkan pada gambar 2.1, terdapat sebuah proses yang merentang di tiap tahapan pembuatan *signature*.

Soal menyiratkan bahwa parameter p memiliki nilai paling tinggi sekitar 2^{60} sedangkan pada waktu penulisan, nilai *integer* yang paling besar yang dapat ditampung pada mesin adalah 2^{64}. Konsekuensi tingginya parameter p adalah akan ada parameter lain yang memiliki batas atas nilai yang tinggi pula. Hal ini dapat menyebabkan masalah pada saat melakukan perkalian.

Perkalian dua nilai yang mendekati 2^{60} dapat mengakibatkan *integer overflow*. Maka pada proses perkalian di seluruh tahapan pembuatan *signature*, prosedur perkalian harus menggunakan metode yang dapat menghindari *integer overflow*.

Berdasarkan penjelasan yang telah dijabarkan, hal-hal yang diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan DSA Attack adalah sebagai berikut.

1. Strategi penghitungan logaritma diskret, akan dibahas pada subbab 2.6.
2. Strategi pemangkatan modular (penghitungan nilai $g^k \ mod \, p$), akan dibahas pada subbab 2.4.



Gambar 2.1: Diagram Alur Penyelesaian Permasalahan

```
   NAIVE-MODULAR-EXPONENTIATION (a, k, m)
1  let temp_h = 1
2  for i = 1 to k
3    temp_h = temp_h * a
4    temp_h = temp_h mod m
5  return temp_h
```

Gambar 2.2: Pseudocode Penyelesaian Pemangkatan Modular Secara Naif

3. Strategi penghitungan invers k $(mod\ p)$, akan dibahas pada subbab 2.5.
4. Strategi perkalian modular (penghitungan nilai $a * b\ mod\ p$), akan dibahas pada subbab 2.7.

2.4. Strategi Penyelesaian Pemangkatan Modular

Bagian ini akan menjelaskan beberapa variasi penyelesaian pencarian hasil pemangkatan pada persamaan kongruen yang dijabarkan pada persamaan (2.14).

$$h \equiv a^k\ mod\ m, \text{untuk a, k, dan m yang ditentukan} \qquad (2.14)$$

2.4.1. Strategi Penyelesaian Pemangkatan Modular secara Naif

Pencarian hasil persamaan (2.14) dapat dicari secara iteratif. Hasil perkalian disimpan pada sebuah variabel sementara, $temp_h$. Nilai $temp_h$ secara berkala dikalikan dengan a sebanyak k kali. Setelah pemangkatan selesai dilakukan, nilai $temp_h$ dimodulus dengan m. Prosedur ini ditunjukkan pada pseudocode 2.2.

Strategi ini membutuhkan $O(k)$ iterasi. Untuk nilai k yang besar, metode ini tidak cukup baik untuk digunakan mengingat ada tahapan lain yang membutuhkan waktu komputasi yang tinggi. Untuk itu sebuah strategi alternatif akan diajukan pada subbab 2.4.2.

2.4.2. Strategi Penyelesaian Pemangkatan Modular dengan Repeated Squaring

Metode ini memanfaatkan representasi biner indeks pangkat k dalam melakukan pemangkatan. Diberikan tiga masukan: *generator*, *exponent*, dan p yang mengikuti persamaan (2.14).

$$h \equiv generator^{exponent} \, mod \, p \tag{2.15}$$

Gambar 2.3 menjabarkan prosedur metode ini.

Strategi ini memiliki kompleksitas $O\,(log_2\, p)$.

2.4.3. Penjelasan Strategi Penyelesaian Pemangkatan Modular dengan Repeated Squaring

Strategi ini berangkat dari perkalian berulang sebuah nilai a (pada Gambar 2.3 dinotasikan dengan $generator$) sebanyak k (pada Gambar **??** dinotasikan dengan $exponent$) kali. Dengan kata lain, dibutuhkan k proses perkalian dengan nilai a. Hal ini ditunjukkan pada strategi pemangkatan modular naif. Kendati begitu, ada cara lain dimana walaupun proses pemangkatan membutuhkan k proses perkalian, pada praktiknya proses perkalian yang terjadi tidak sampai k kali.

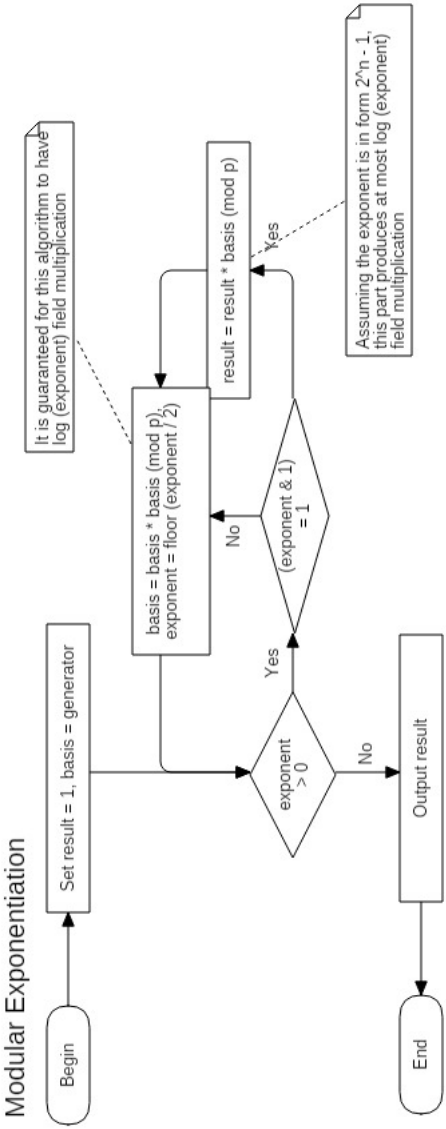
Ide strategi ini adalah dengan memecah pemangkatan menjadi komponen yang lebih kecil. Pemecahan tersebut ditunjukkan pada persamaan (2.16).

$$a^q = a^{e_1} * a^{e_2} * \ldots * a^{e_n}, \text{ dimana } q = e_1 + e_2 + \ldots + e_n \tag{2.16}$$

Setelah ini akan dijelaskan mengenai nilai e_i.

Pemangkatan memiliki sifat-sifat operasi layaknya aritmatika pada umumnya, dengan syarat basis pemangkatan harus sama. Strategi ini memanfaatkan sifat perkalian indeks pemangkatan seperti yang ditunjukkan pada persamaan (2.17).

$$a^r = a^{s*t} = (a^s)^t \tag{2.17}$$



Gambar 2.3: Diagram Alur Pemangkatan Modular dengan *Repeated Squaring*

Substitusi nilai s menjadi $\frac{r}{2}$ dan t menjadi 2.

$$a^r = a^{\frac{r}{2}*2} = (a^{\frac{r}{2}})^2 \tag{2.18}$$

Penghitungan nilai $g^{\frac{r}{2}}$ dilakukan dengan menggunakan bentuk persamaan (2.18), hingga didapat nilai $\frac{r}{2} = 1$. Perkalian secara rekursif ini memiliki jumlah perkalian mengikuti relasi rekurens berikut.

$$O(r) = \begin{cases} O(1), & \text{if } r = 1 \\ O(\frac{r}{2} + 1), & \text{if } r > 1 \end{cases} \tag{2.19}$$

Berdasarkan relasi rekurens (2.19), jumlah perkalian yang dibutuhkan untuk melakukan pemangkatan dengan metode ini adalah $O(log_2\ r)$ dimana r merupakan bilangan pangkat 2.

Telah dijelaskan bagaimana mencari hasil pangkat dimana indeks pangkat r berupa bilangan pangkat 2. Metode pemangkatan dengan *repeated squaring* juga dapat digunakan untuk mencari hasil pangkat dengan indeks pangkat r bukan bilangan pangkat 2. Pertama, representasi biner dari q dicari terlebih dahulu. Diberikan sebuah representasi biner r, $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ yang mengikuti persamaan (2.20).

$$r = (2^0 * r_0) + (2^1 * r_1) + (2^2 * r_2) + \cdots + (2^n * r_n) \tag{2.20}$$

Nilai r pada persamaan (2.20) kemudian dimasukkan ke a^r menjadi

$$a^r = a^{(2^0*r_0)+(2^1*r_1)+(2^2*r_2)+\cdots+(2^n*r_n)} \tag{2.21}$$

$$a^r = a^{2^0*r_0} * a^{2^1*r_1} * a^{2^2*r_2} * \cdots * a^{2^n*r_n} \tag{2.22}$$

$$a^r = (a^{2^0})^{r_0} * (a^{2^1})^{r_1} * (a^{2^2})^{r_2} * \cdots * (a^{2^n})^{r_n} \tag{2.23}$$

$$a^r = (a^1)^{r_0} * (a^2)^{r_1} * (a^4)^{r_2} * \cdots * (a^{2^{log_2\ r}})^{r_n} \tag{2.24}$$

$$a^r = y_0^{r_0} * y_1^{r_1} * y_2^{r_2} * \cdots * y_n^{r_n}, \text{untuk } y_i = a^{2^i} \tag{2.25}$$

Persamaan (2.25) menunjukkan transformasi penghitungan pemangkatan dengan r menjadi sederet perkalian. Perlu diperhatikan bahwa penghitungan nilai $(a^2)^i$ membutuhkan $O(log_2\ 2^i)$ perkalian. Maka penghitungan $y_i = a^{2^i}$ juga membutuhkan $O(log_2\ 2^i)$ perkalian. Dari penjabaran ini, untuk menghitung semua nilai y_i pada persamaan (2.25) membutuhkan perkalian sebanyak

$$\sum_{i=1}^{n} log_2\ 2^i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.26}$$

Perhatikan bahwa y_0 tidak diikutsertakan pada penghitungan karena $y_0 = a^{2^0} = a^1$, sehingga tidak dibutuhkan perkalian apapun. Total perkalian yang dibutuhkan untuk menghitung $y_i = a^{2^i}$ pada persamaan (2.25) adalah $\frac{n(n+1)}{2} \in O(n^2)$. Metode ini tentu tidak lebih baik dari metode pemangkatan naif dimana dibutuhkan $O\,(n)$ perkalian. Maka dari itu perlu dilakukan perubahan mengenai cara penghitungan y_i.

Untuk menekan jumlah perkalian, penghitungan y_i dapat diubah menjadi relasi rekurens (2.27).

$$y_i = \begin{cases} a, & \text{if } i = 0 \\ y_{i-1} * a, & \text{if } i > 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

Untuk mencari nilai y_i, cukup menggunakan nilai y_{i-1} dan dikalikan dengan a. Konsekuensi yang dimiliki cara ini adalah nilai y_i dapat digunakan untuk mendapatkan nilai y_{i+1}. Maka sebetulnya untuk menghitung nilai y_i, tidak perlu menghitung dari y_0. Apabila nilai y_{i-1} sudah diketahui, cukup mengalikan nilai tersebut dengan a.

Pemanfaatan relasi rekurens (2.27) dapat dilakukan dengan menggunakan nilai y_i dan variabel $temp$ yang berfungsi untuk menyimpan hasil perkalian. Mulai dari $i = 0$, pangkatkan y_i dengan r_i. Pemangkatan ini hanya memiliki dua hasil seperti yang ditunjukkan

pada persamaan (2.28).

$$f_y(i) = \begin{cases} 1, & \text{if } r_i = 0 \\ y_i, & \text{if } r_i = 1 \end{cases} \tag{2.28}$$

Hasil pemangkatan (yaitu nilai $f_y(i)$) digabungkan ke $temp$ dengan cara dikalikan.

Dari penjabaran tersebut, penghitungan persamaan (2.25) dengan metode ini membutuhkan hanya satu kali perhitungan nilai y_i, yaitu penghitungan y_i pada $i = n$. Proses penghitungan y_n juga menghitung nilai y_0 hingga y_{n-1}. Sehingga dengan menghitung y_n, nilai y_0 hingga y_{n-1} juga didapat. Jumlah perkalian menggunakan relasi rekurens (2.27) adalah $O(n)$ dimana $n = log_2\, r$ untuk sebuah indeks pangkat r (atau bisa ditulis $O\,(log_2\,(r))$). Cara pemangkatan ini lebih cepat dibandingkan cara pemangkatan naif.

2.5. Strategi Penyelesaian Invers Modulus

Permasalahan pencarian invers modulus adalah mencari nilai a' pada persamaan (2.29).

$$a * a' \equiv 1\ (mod\ m), \text{untuk nilai a dan m tertentu} \tag{2.29}$$

Invers modulus adalah analog dari pembagian pada $\mathbb{Z}_n$.

Sebelum mencari nilai a', hal yang perlu diketahui terlebih dahulu adalah apakah benar ada nilai a' yang bisa membuat persamaan (2.29) bernilai benar. Pertanyaan ini bisa dijawab dengan menggunakan Identitas Bezout.

2.5.1. Identitas Bezout

Identitas Bezout berbicara mengenai persamaan berkaitan dengan faktor persekutuan terbesar dua bilangan [6]. Notasi yang digunakan untuk menyatakan faktor persekutuan terbesar dapat dilihat pada persamaan (2.30).

$$\gcd\ (a, b) = \max R,\ R = \{r : r|a \text{ dan } r|b\} \tag{2.30}$$

Identitas Bezout adalah sebuah persamaan yang menghasilkan faktor persekutuan terbesar dua bilangan.

$$ax + by = \text{gcd}(a, b), \text{untuk nilai a dan b tertentu} \quad (2.31)$$

Sisi kanan persamaan (2.31) tidak akan memiliki nilai kurang dari gcd(a, b). Dengan kata lain nilai terkecil bukan nol yang mungkin untuk sisi kanan persamaan (2.31) adalah gcd(a, b).

Kembali ke persamaan (2.29), Identitas Bezout menjamin adanya sebuah nilai a' yang menyebabkan persamaan (2.29) bernilai benar dengan syarat gcd$(a, m) = 1$. Pembuktian klaim ini dapat dilihat pada penjabaran berikut.

$$a * a' \equiv 1 \ (mod\ m) \quad (2.32)$$

$$aa' = qm + 1 \quad (2.33)$$

$$1 = aa' + (-q)m \quad (2.34)$$

Persamaan (2.34) memiliki bentuk persamaan (2.31). Sisi kiri persamaan (2.34) merupakan sisi kanan persamaan (2.31), atau dengan kata lain gcd$(a, m) = 1$. Perhatikan bahwa hasil akhir penjabaran di atas merupakan persamaan (2.31), yaitu Identitas Bezout. Dari sini dapat disimpulkan bahwa gcd$(a, m) = 1$. Artinya syarat untuk sebuah nilai a memiliki invers modulus adalah a harus koprima dengan modulus m. ■

2.5.2. Strategi Penyelesaian Invers Modulus secara Naif

Pencarian invers modulus dapat dilakukan dengan *brute force*. Semua nilai a' dicoba dan diperiksa apakah hasil perkalian persamaan (2.29) menghasilkan $1\ (mod\ m)$. Gambar 2.4 memaparkan langkah yang dijelaskan.

Strategi ini membutuhkan $O(m)$ percobaan. Strategi ini mudah untuk diimplementasikan karena cukup mencoba nilai a' satu per satu hingga ditemukan nilai a' yang memenuhi persamaan

```
   NAIVE-MODULAR-INVERSE (a, m)
1  if gcd(a,m) != 1
2    return "NOT "INVERTIBLE
3  for a' = 1 to m-1
4    if (a * a') mod m == 1
5      return a'
```

Gambar 2.4: Pseudocode Pencarian Modular Invers Naif

(2.29). Untuk mereduksi daerah pencarian, pencarian invers modulus dapat dibatasi supaya hanya dilakukan untuk pasangan a dan m dimana gcd $(a, m) = 1$. Untuk m yang besar, strategi ini tidak cukup baik untuk digunakan mengingat masih ada proses lain yang membutuhkan waktu komputasi yang tinggi. Maka dari itu, strategi lain yang lebih baik akan dijabarkan pada subbab selanjutnya.

2.5.3. Strategi Penyelesaian Invers Modulus dengan Extended Euclidean

Strategi ini memanfaatkan Identitas Bezout, yaitu mencari nilai a dan b untuk x dan y tertentu pada persamaan (2.31). Gambar 2.5 merupakan pseudocode yang menggambarkan metode pencarian invers modulus menggunakan *Extended Eucliean*.

Strategi ini membutuhkan $O((log_2\ n)^2)$ operasi bit. [7]

2.5.4. Penjelasan Strategi Penyelesaian Invers Modulus dengan Extended Euclidean

Ide strategi ini adalah dengan mentransformasi nilai a dan b menjadi sebuah nilai dimana a habis dibagi oleh b. Tiap langkah transformasi akan ditulis menggunakan persamaan (2.2), yaitu bentuk umum pembagian.

$$a = qb + r$$

Persamaan (2.2) diberi batasan, yaitu nilai r harus kurang dari

```
   MODULAR-INVERSE-WITH-EXTENDED-EUCLIDEAN (a = qb +
       r)
1  let EQUATION[] be a new array
2  let i = 0
3  while r != 0
4    EQUATION[i] = (a = qb + r)
5    find equation b = qr + m for some q and m
6    i = i + 1
7  for i = EQUATION.len - 1 downto 1
8    substitute EQUATION[i].b with EQUATION[i+1].r
9  return (EQUATION[1].x, EQUATION[1].y)
```

Gambar 2.5: Pseudocode *Extended Euclidean*

b. Langkah transformasi adalah sebagai berikut.

1. Cari nilai q dan r yang memenuhi persamaan (2.2).
2. Simpan nilai a, b, q, dan r sebagai nilai persamaan iterasi ke-i.
3. Cari bentuk persamaan (2.2) untuk b dengan cara melakukan modulus b dengan r
4. Ulangi langkah 2 hingga ditemukan r bernilai 0.

Tabel 2.1 mengilustrasikan langkah ini. Diberikan $a = 97$ dan $b = 35$. Nilai q sengaja tidak dimasukkan pada kolom *persamaan* untuk memperjelas bentuk persamaan (2.2)

Tabel 2.1: Contoh Proses Transformasi

Iterasi	a	b	r	q	Persamaan
1	97	35	27	2	$97 = 35 * q + 27$
2	35	27	8	1	$35 = 27 * q + 8$
3	27	8	3	3	$27 = 8 * q + 3$
4	8	3	2	2	$8 = 3 * q + 2$
5	3	2	1	1	$3 = 2 * q + 1$
6	2	1	0	2	$2 = 1 * q + 0$

Pada iterasi 6, didapat nilai $r = 0$. Maka proses transformasi berhenti pada iterasi ini. Kemudian, dengan persamaan yang telah terbentuk di tiap iterasi, setiap persamaan dapat diangkat ke persamaan pada satu iterasi sebelumnya dengan cara substitusi. Berikut contoh pengangkatan iterasi 6 ke iterasi 5.

$$2 = 1(2) + 0 \tag{2.35}$$
$$0 = 2 - 1(2) \tag{2.36}$$
$$0 = 2 - (3 - 2(1))(2) \tag{2.37}$$
$$0 = 2 - 3(2) + 2(2) \tag{2.38}$$
$$0 = 2(3) - 3(2) \tag{2.39}$$

Hasil akhir pengangkatan tersebut (persamaan (2.39)) adalah bentuk persamaan pada iterasi 5, hanya saja nilai pada sisi kiri persamaan tertambah perkalian dengan 2 (persamaan (2.39) dapat ditulis menjadi $3(2) = 2(2) + 0$).

Perhatikan penggunaan tanda kurung pada proses pengangkatan. Nilai pada tanda kurung bermakna variabel, sedangkan nilai yang berada di luar kurung bermakna koefisien. Pada proses pengangkatan, substitusi persamaan dengan persamaan pada iterasi lain hanya boleh dilakukan pada koefisien. Namun, penyederhanaan persamaan tidak boleh mengubah konstanta. Artinya, penyederhanaan persamaan hanya bekerja pada variabel.

Di baris ketiga contoh pengangkatan (persamaan (2.37)) merupakan proses substitusi. Nilai 1 diubah menjadi $3 - 2(1)$. Kemudian, dilakukan distribusi untuk mengeluarkan persamaan substitusi dari kurung. Pada baris kelima contoh pengangkatan di atas merupakan proses penyederhanaan. Perhatikan bagaimana nilai 2 tidak digabungkan ke $3(2)$, melainkan ke $2(2)$. Hal ini disebabkan nilai $3(2)$ memiliki koefisien 3, sedangkan nilai yang akan digabungkan memiliki koefisien 2. Untuk itu, nilai 2 dimasukkan ke nilai yang sama-sama memiliki koefisien 2.

Pengangkatan dilakukan dari iterasi sebelum iterasi terakhir.

Pada contoh di atas, iterasi terakhir terdapat pada iterasi ke-6. Maka iterasi sebelum iterasi terakhir adalah iterasi ke-5. Hal ini bertujuan agar persamaan (2.31) terpenuhi. Proses pengangkatan dilakukan hingga iterasi pertama.

Langkah seluruh pengangkatan dapat dijabarkan sebagai berikut.

1. Ubah semua persamaan $a = qb + r$ menjadi $r = a - qb$.
2. Substitusi nilai b pada iterasi sekarang dengan nilai r pada iterasi selanjutnya.
3. Lakukan penyederhanaan dengan menggabungkan konstanta yang sama
4. Ulangi langkah 2 dan 3 hingga seluruh iterasi telah dilewati.

Tabel 2.2 berisi contoh pengangkatan berdasarkan hasil transformasi sebelumnya.

Tabel 2.2: Contoh Proses Pengangkatan

Iterasi	a	b	r	q	Persamaan	Pers. Akhir
5	3	2	1	1	$1 = 3 - 2(1)$	$1 = 3 - 2(1)$
4	8	3	2	2	$2 = 8 - 3(2)$	$1 = 3(3) - 8(1)$
3	27	8	3	3	$3 = 27 - 8(3)$	$1 = 27(3) - 8(10)$
2	35	27	8	1	$8 = 35 - 27(1)$	$1 = 27(13) - 35(10)$
1	97	35	27	2	$27 = 97 - 35(2)$	$1 = 97(13) - 35(36)$

Maka didapat persamaan akhir $1 = 97(13) - 35(36)$. Persamaan ini dapat ditulis agar mengikuti persamaan (2.31). Penulisan persamaan tersebut yaitu $1 = 97(13) - 35(36) \Rightarrow 1 = 97(13) + 35(-36)$. Pasangan setiap konstanta – variabel merupakan invers untuk satu sama lain. 97 merupakan invers dari 13, dan 35 merupakan invers dari -36. Seringkali nilai invers yang diinginkan berupa nilai positif. Untuk mengatasi hal itu, cukup mencari kelas residu dari -36. Pada kasus ini $-36 \in [3]_{13}$ dan $-36 \in [61]_{97}$. Maka $-36 \equiv 3 \ (mod\ 13)$ dan $-36 \equiv 61 \ (mod\ 97)$. Efisiensi strategi ini jauh lebih baik daripada strategi naif.

2.6. Strategi Penyelesaian Logaritma Diskret

Permasalahan logaritma diskret adalah mencari nilai x pada persamaan (2.1)

$$y \equiv g^x \ (mod\ n), \text{untuk nilai y, g dan n tertentu}$$

Penghitungan nilai logaritma diskret menjawab dua pertanyaan:

1. Apakah ada sebuah nilai x yang bisa menyebabkan persamaan (2.1) benar?
2. Nilai x apa yang mampu membuat persamaan (2.1) benar?

Pertanyaan 1 membutuhkan ulasan yang panjang. Penyebab panjangnya ulasan ini adalah ada permutasi g, n, dan y yang tidak menjamin terdapat nilai x yang bisa menyebabkan persamaan (2.1) benar. Kendati begitu, pertanyaan 1 dapat dijawab secara ringkas dengan memperhatikan penjelasan soal.

Sebelumya disebutkan bahwa permutasi g, n, dan y menentukan ada atau tidaknya nilai x yang sesuai. Pada soal disebutkan bahwa parameter *private key* dan *public key* yang diberikan dijamin dibentuk dengan langkah berikut.

1. Tentukan sebuah nilai x secara acak dimana $0 < x < q$.
2. Hitung $y = g^x \ (mod\ p)$.
3. *Public key* adalah (p, q, g, y), dan *private key* adalah x.

Artinya untuk *public key* (p, q, g, y) dijamin terdapat sebuah *private key* x yang cocok dengan *public key* tersebut. Maka persamaan (2.1) dijamin memiliki sebuah nilai x yang menyebabkan persamaan tersebut benar. Pertanyaan berikutnya adalah nilai x apa yang memenuhi persamaan (2.1) (yaitu pertanyaan 2).

Bab ini akan menjelaskan beberapa variasi penyelesaian logaritma diskret. Sebelum itu, perlu dijelaskan beberapa hal yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan logaritma diskret.

2.6.1. Teorema Euler

Teorema Euler berbicara mengenai periodisitas nilai hasil pemangkatan pada persamaan kongruensi. Teorema Euler menggunakan sebuah fungsi yang disebut *Euler Totient Function*.[1]

$$\phi(n) = |S| \text{ , dimana } S = \{r \ : \ \text{gcd}(r, n) = 1; 0 < r < n\} \tag{2.40}$$

Perhatikan bahwa apabila n merupakan bilangan prima, maka $\phi(n) = n - 1$.

Teorema Euler dapat ditulis sebagai berikut. Diketahui terdapat dua nilai: sebuah basis pangkat a, dan sebuah modulus n

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (mod\, n), \qquad \text{gcd}(a, n) = 1 \tag{2.41}$$

Persamaan (2.41) menjelaskan bahwa sebuah bilangan a dimana a koprima dengan n, apabila dipangkatkan dengan $\phi(n)$ akan menghasilkan nilai $t \in [1]_n$. Artinya, $a^{\phi(n)} \ mod \ n = 1$. Maksud persamaan (2.41) adalah apabila perkalian dengan a diulang sebanyak $\phi(n)$ kali dimana n adalah modulus yang digunakan, semua nilai yang mungkin dari perkalian modular tersebut telah dihasilkan. Perkalian lebih lanjut hanya akan mengulang nilai-nilai tersebut.

Persamaan (2.41) tidak menjamin seluruh anggota himpunan $\mathbb{Z}_n^* = \{i : 1 \leq i < n\}$ telah dihasilkan. Apa yang dijamin oleh persamaan (2.41) adalah terdapat sebuah himpunan $\mathbb{H}_{(a,n)}$ yang memenuhi persamaan (2.42).

$$\mathbb{H}_{(a,n)} = \left\{a^i \ (mod\, n) \ : \ 0 \leq i < \phi(n)\right\} \tag{2.42}$$

$\mathbb{H}_{(a,n)}$ dapat didefinisikan sebagai sebuah himpunan yang anggotanya adalah semua nilai yang dapat dibentuk dari $a^i(\ mod\ n)$ untuk seluruh nilai i. Pada proses pemangkatan $a^{\phi(n)}$, seluruh anggota himpunan $\mathbb{H}_{(a,n)}$ telah dihasilkan.

Himpunan $\mathbb{H}_{(a,n)}$ tidak selalu sama dengan himpunan $\mathbb{Z}_n^*$. Kasus yang menggambarkan pernyataan ini yaitu pemangkatan pada persamaan kongruensi modulo 7, dimana $\phi(7) = |\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}|$

$= 6$. Dengan mengambil contoh $a = 6$, didapat bahwa himpunan $\mathbb{H}_{(a=6,n=7)} = \{1, 6, 1, 6, 1, 6\}$. Penjelasan lebih lanjut mengenai perbedaan himpunan $\mathbb{H}_{(a,n)}$ dengan $\mathbb{Z}_n^*$ akan dijabarkan pada bab 2.6.2.

Persamaan (2.41) dapat diubah menjadi bentuk logaritmik.

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n) \tag{2.43}$$

$$a^{\phi(n)} \equiv a^0 \ (mod\ n) \tag{2.44}$$

$$\phi(n) \equiv 0 \ (mod\ \phi(n)) \tag{2.45}$$

Perhatikan perubahan persamaan (2.41) menjadi (2.45) mengubah nilai modulus. Hal ini disebabkan terdapat perubahan domain dimana persamaan (2.45) bekerja, yaitu dari domain hasil pemangkatan menjadi domain indeks pangkat. Teorema Euler memicu perubahan nilai modulus, dimana pemangkatan sebuah bilangan dengan $\phi(n)$ bermakna sama dengan pemangkatan sebuah bilangan dengan 0. Penjelasan ini merupakan definisi persamaan (2.45).

2.6.2. Order Sebuah Elemen

Definisi order sebuah elemen a adalah sebuah nilai h positif terkecil dimana apabila a dioperasikan dengan a sebanyak h kali akan menghasilkan elemen identitas operasi e.[8]

$$ord(a) = h, \text{ dimana } \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{\text{h operasi}} = e \tag{2.46}$$

Definisi ini terlalu luas untuk digunakan pada permasalahan logaritma diskret. Untuk itu, definisi tersebut bisa dipersempit: Order sebuah elemen a adalah suatu nilai h positif terkecil dimana apabila a dipangkatkan dengan h akan menghasilkan $1 \ (mod\ n)$. Secara formal, penjelasan ini dapat ditulis menjadi persamaan (2.47).

$$a^h \equiv 1 \ (mod\ n) \tag{2.47}$$

Apabila sebuah elemen a memiliki order senilai $\phi(n)$, elemen tersebut dinamakan *primitive root modulo n*. Perhatikan bahwa persamaan (2.47) mirip dengan persamaan (2.41). Kedua persamaan tersebut mengimplikasikan bahwa $h \mid \phi(n)$ atau $\phi(n)$ merupakan kelipatan h, untuk $h \leq \phi(n)$. Pembuktian klaim tersebut dapat dilihat pada penjabaran persamaan (2.48) sampai (2.52).

Pertama asumsikan sebuah nilai g yang memiliki order sebesar h pada *group* $\mathbb{Z}_n$, dan sebuah *primitive root* a.

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n) \tag{2.48}$$
$$a^{\phi(n)} \equiv g^h \ (mod\ n) \tag{2.49}$$
$$\phi(n) \equiv (\log_a g) * h \ (mod\ \phi(n)) \tag{2.50}$$
$$0 \equiv (\log_a a^x) * h \ (mod\ \phi(n)) \tag{2.51}$$
$$0 \equiv x * h \ (mod\ \phi(n)) \tag{2.52}$$

Pada subbab 2.6.1 telah dijelaskan mengenai himpunan $\mathbb{H}_{(a,n)}$ (perhatikan kembali persamaan (2.42)) dan bagaimana himpunan $\mathbb{H}_{(a,n)}$ tidak selalu sama dengan himpunan Z_n^*. Hal ini berhubungan dengan sifat *order* h, yaitu $h \mid \phi(n)$. Sifat ini dapat ditulis menjadi persamaan (2.53).

$$\phi(n) = x * h, \text{untuk x tertentu} \tag{2.53}$$

Kemudian dengan memasukkan *primitive root* ke persamaan (2.53), didapat persamaan (2.56).

$$a^{\phi(n)} = a^{xh} \tag{2.54}$$
$$a^{\phi(n)} = (a^x)^h \tag{2.55}$$
$$a^{\phi(n)} = \omega^h \tag{2.56}$$

Maka dari penjabaran di atas, sebuah elemen a yang memiliki order h (yaitu ω) sebenarnya adalah sebuah *primitive root* yang telah dipangkatkan dengan suatu nilai x. ■

Himpunan $\mathbb{H}_{(\omega,n)}$ adalah semua nilai yang dapat dibentuk oleh a^{xi} untuk $0 \leq i < \frac{\phi(n)}{x} \Rightarrow 0 \leq i < h$. Artinya, anggota $\mathbb{H}_{(\omega,n)}$ hanyalah nilai yang dapat dibentuk oleh pangkat kelipatan x. Nilai lain bukan merupakan anggota himpunan $\mathbb{H}_{(\omega,n)}$. Secara formal penjelasan ini dapat ditulis menjadi persamaan (2.57).

$$\mathbb{H}_{(\omega,n)} = \left\{ \omega^i \ (mod\ n) \ : \ 0 \leq i \leq \frac{\phi(n)}{h} \right\} \tag{2.57}$$

dimana $\omega = a^h$ untuk a sebuah *primitive root modulo n* dan h tertentu.

Dari pemaparan di atas, hubungan himpunan $\mathbb{Z}_n^*$, $\mathbb{H}_{(a,n)}$ dimana a sebuah *primitive root*, dan $\mathbb{H}_{(\omega,n)}$ dimana ω sebuah elemen dengan order h dapat dilihat pada relasi (2.58).

$$\mathbb{Z}_n^* \supseteq \mathbb{H}_{(a,n)} \supseteq \mathbb{H}_{(\omega,n)} \tag{2.58}$$

$\mathbb{H}_{(a,n)}$ akan sama dengan $\mathbb{Z}_n^*$ apabila a merupakan *primitive root*. $\mathbb{H}_{(\omega,n)}$ akan sama dengan $\mathbb{H}_{(a,n)}$ apabila order ω adalah $\phi(n)$.

2.6.3. Strategi Penyelesaian Naif Untuk Logaritma Diskret

Pencarian nilai x pada persamaan (2.1) bisa dilakukan dengan mencoba semua nilai $x = 0$ hingga $n - 1$. Hitung setiap nilai $g^x \ (mod\ n)$ dan bandingkan dengan y. Apabila keduanya bernilai sama, maka nilai x tersebut merupakan nilai logaritma diskret dari y. Gambar 2.6 menggambarkan prosedur yang dijelaskan. Strategi ini memiliki kompleksitas sebesar $O(n)$.

Metode ini tidak begitu baik apabila n bernilai besar. Untuk itu, domain i dapat diperkecil. Karena g memiliki *order* sebesar q, maka *brute force* dilakukan dengan memangkatkan g dengan i dimana $0 \leq i < ord(g)$ atau $0 \leq i < q$ karena semua nilai yang mungkin dibentuk oleh pemangkatan dengan basis g berada pada rentang tersebut. Pengecilan domain i menyebabkan kompleksitas metode ini turun menjadi $O(q)$. Walau telah dilakukan peningkatan,

```
   NAIVE-DISCRETE-LOGARITHM (g, y, n)
1  result = 1
2  for i = 0 to n-1
3    if result == y
4      return i
5    result = (result * g) mod n
6  return "NOT FOUND"
```

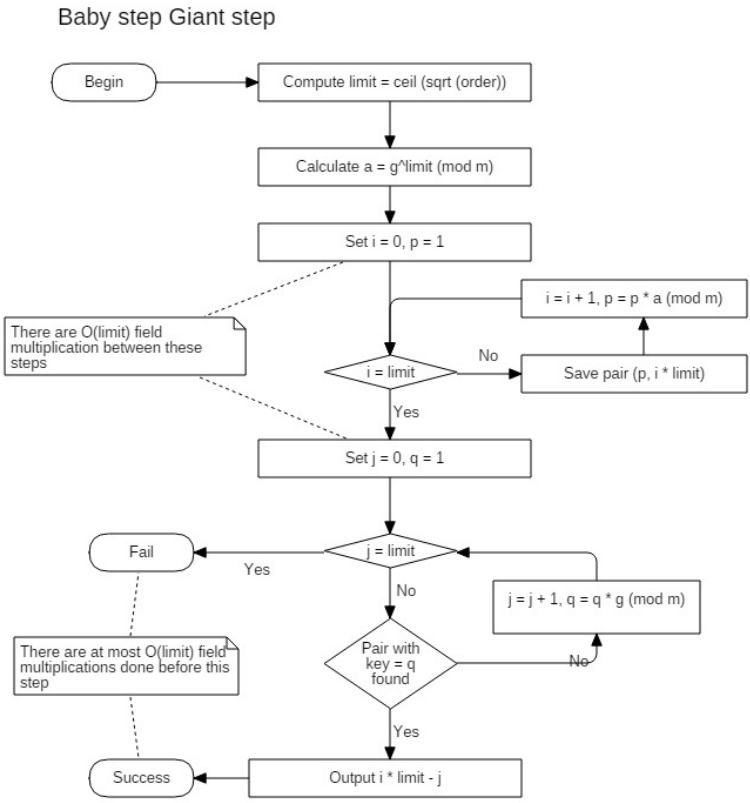
Gambar 2.6: Pseudocode Pencarian Logaritma Diskret Secara Naif

metode ini masih membutuhkan waktu yang relatif besar. Untuk itu alternatif strategi lain akan diajukan pada subbab berikutnya.

2.6.4. Strategi Penyelesaian Logaritma Diskret dengan Baby-step Giant-step

Penyelesaian ini memanfaatkan metode *Baby-step Giant-step* dimana metode ini bertujuan memperkecil daerah pencarian hingga $\sqrt{n}$ dimana n merupakan order sebuah elemen g. Gambar 2.7 memaparkan cara kerja metode ini.

Kompleksitas strategi ini bergantung pada metode pencarian di percabangan kedua ("*pair with key = q found*"). Umumnya metode ini menggunakan metode pencarian *binary search*. Konsekuensinya, penyimpanan pasangan *(p, i * limit)* dilakukan secara terurut dan seluruh proses ini membutuhkan waktu $O(\sqrt{n}\, log\, n)$. Kemudian dengan menggunakan *binary search* pencarian dapat dilakukan dengan kompleksitas $O(log\ n)$. Selain *binary search*, dapat juga digunakan *hash table* sebagai alternatif dimana pencarian dapat dilakukan selama $O(1)$. Penggunaan salah satu dari kedua metode pencarian tersebut mengakibatkan kompleksitas metode *Baby-step Giant-step* secara keseluruhan menjadi $O(\sqrt{n})$.



Gambar 2.7: Diagram Alur Metode Penyelesaian Logaritma Diskret dengan *Baby-step Giant-Step*

2.6.5. Penjelasan Strategi Penyelesaian Logaritma Diskret dengan Baby-step Giant-step

Persamaan (2.2) mendasari metode *Baby-step Giant-step*, yaitu pembagian dua bilangan. Diberikan sebuah bilangan a, apabila dibagi dengan sebuah bilangan tertentu x, akan membentuk persamaan (2.59)

$$a = qx + r \tag{2.59}$$

Pada persamaan (2.59), q berada pada rentang $0 \leq q \leq a$ dan r berada pada rentang $0 \leq r < x$. Umpamakan proses pencarian q dan r tidak dapat dilakukan dengan operasi pembagian dan mod. Pencarian nilai q dan r maka harus menggunakan pendekatan *brute force*, yaitu mencoba semua kombinasi q dan r yang menyebabkan persamaan (2.59) bernilai benar. Mengingat nilai q dan r bergantung pada nilai x yang digunakan, maka perlu dipilih sebuah nilai x yang menyebabkan daerah pencarian q dan r minimal. Variabel pada persamaan (2.59) yaitu q, x, dan r memiliki hubungan satu sama lainnya. Hubungan ini dapat dilihat pada proporsi (2.60).

$$\frac{1}{q} \propto x \propto r \tag{2.60}$$

Variabel q dan x memiliki proporsi saling terbalik, yaitu apabila nilai q naik, nilai x akan turun. Kasus sebaliknya juga berlaku. Sedangkan variabel x dan r memiliki proporsi langsung, yaitu apabila nilai x naik, nilai r akan naik juga. Kasus sebaliknya juga berlaku. Untuk menghasilkan kombinasi q dan r yang minimal, nilai x harus dipilih supaya q dan r kurang lebih bernilai sama. Nilai x yang dapat digunakan adalah $\sqrt{a}$, dimana $q = \sqrt{a}$, dan $x = r = \sqrt{a}$. Untuk menjamin $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}_n$, hasil $\sqrt{a}$ dibulatkan ke atas. Persamaan (2.59) kini dapat ditulis menjadi persamaan (2.61).

$$a = q\sqrt{a} + r \tag{2.61}$$

Sekarang, andaikata nilai a pada persamaan di atas merupakan nilai a yang sama pada persamaan logaritma diskret $y \equiv g^a \ (mod\ n)$

(persamaan (2.1)), persamaan di atas dapat diubah menjadi

$$log_g\ y = q\sqrt{a} + r \tag{2.62}$$

$$y \equiv g^{q\sqrt{a}+r}\ (mod\ p) \tag{2.63}$$

$$y * g^{-r} \equiv g^{q\sqrt{a}}\ (mod\ p) \tag{2.64}$$

Maka apabila ditemukan nilai r dan q tertentu yang memenuhi bentuk persamaan (2.68), logaritma diskret y dapat dihitung dengan menghitung $q\sqrt{a} + r$. Sayangnya proses penghitungan $q\sqrt{a} + r$ membutuhkan pencarian invers modulus g^r, sebuah proses yang membutuhkan waktu komputasi yang cukup mahal. Hal ini dapat dihindari dengan sedikit mengubah persamaan (2.68).

$$a = q\sqrt{a} - r \tag{2.65}$$

Dengan mengikuti proses transformasi persamaan (2.61) menjadi persamaan (2.64), persamaan (2.65) dapat diubah menjadi persamaan (2.68).

$$log_g\ y = q\sqrt{a} - r \tag{2.66}$$

$$y \equiv g^{q\sqrt{a}-r}\ (mod\ n) \tag{2.67}$$

$$y * g^r \equiv g^{q\sqrt{a}}\ (mod\ n) \tag{2.68}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.68), logaritma diskret y dapat dicari tanpa harus mencari invers modulus g^r. Yang perlu dilakukan sekarang adalah mencari pasangan r dan q yang memenuhi persamaaan (2.68). Disinilah alasan metode ini disebut *Baby-step Giant-step*. Pada sisi kiri persamaan (2.68), nilai $y * g^r$ dicari. Bagian ini merupakan *baby-step* karena interval pangkat untuk basis g yang digunakan adalah 1 (nilai pangkat yang digunakan adalah $\{0, 1, 2, \ldots, \sqrt{a} - 1\}$). Bagian sisi kanan persamaan (2.68) disebut *giant-step* karena untuk mencari nilai $g^{q\sqrt{a}}$, interval pangkat untuk basis g yang digunakan adalah $\sqrt{a}$ (nilai pangkat yang digunakan adalah $\{0, \sqrt{a}, 2\sqrt{a}, \ldots, (\sqrt{a}-1)\sqrt{a}\}$). Persamaan (2.64) dan persamaan (2.68) menyebabkan daerah pencarian r dan q turun menjadi $O(\sqrt{a})$.

2.6.6. Strategi Penyelesaian Logaritma Diskret dengan Pollard Rho

Metode *Pollard Rho* awalnya adalah metode untuk melakukan faktorisasi bilangan [4]. Namun metode ini dapat dimodifikasi agar dapat digunakan untuk melakukan pencarian logaritma diskret. Diberikan sebuah *random function* $f_n(x)$.

$$f_n(x) = \begin{cases} (\beta * x) \ mod \ n, & \text{if } x \in S_1 \\ (x * x) \ mod \ n, & \text{if } x \in S_2 \\ (\alpha * x) \ mod \ n, & \text{if } x \in S_3 \end{cases} \tag{2.69}$$

Terdapat tiga himpunan, S_1, S_2, dan S_3, masing-masing merupakan himpunan bagian $\mathbb{Z}$, yang digunakan untuk menentukan persamaan $f_n(x)$ yang digunakan. Tidak ada batasan yang terlalu mengikat dalam menentukan anggota ketiga himpunan ini selain ketiga himpunan ini harus memiliki kardinalitas yang kurang lebih sama, dan $1 \notin S_2$.

Fungsi $f_n(x)$ akan digunakan untuk proses *step*. Proses ini dapat dijabarkan sebagai berikut.

1. Tentukan nilai $f_n(x_0) = 1$
2. Cari nilai $x_{i+1} = f_n(x_i)$

Fungsi $f_n(x)$ akan bekerja pada sistem modulus n (yaitu $\mathbb{Z}_n^*$). Apabila proses *step* dilakukan terus menerus, suatu saat akan ada nilai $f_n(x_s)$ yang bernilai sama dengan $f_n(x_t)$, $s > t$. Hal ini disebabkan $f_n(x) \in \mathbb{Z}_n$, dan himpunan $\mathbb{Z}_n$ memiliki jumlah anggota berhingga. Suatu saat keluaran fungsi $f_n(x)$ telah merentang seluruh nilai $\mathbb{Z}_n$ yang mungkin dibentuk, sehingga *step-step* selanjutnya hanya mengulang permutasi nilai yang dihasilkan oleh $f_n(x)$.[4]

Dengan diketahui dua nilai $f_n(x_s)$ dan $f_n(x_t)$, nilai logaritma diskret y dapat diketahui. Untuk itu, fungsi $f_n(x)$ untuk suatu x perlu ditulis dengan persamaan (2.70).

$$f_n(x) \equiv \alpha^a \beta^b \ (mod \ n) \tag{2.70}$$

Kemudian jabarkan persamaan $f_n(x_s) = f_n(x_t)$, $s > t$ dalam bentuk persamaan (2.70).

$$f_n(x_s) \equiv f_n(x_t)\ (mod\ n) \tag{2.71}$$
$$\alpha^{a_s} * \beta^{b_s} \equiv \alpha^{a_t} * \beta^{b_t}\ (mod\ n) \tag{2.72}$$
$$\alpha^{a_s - a_t} \equiv \beta^{b_t - b_s}\ (mod\ n) \tag{2.73}$$
$$a_s - a_t \equiv log_\alpha \beta * (b_t - b_s)\ (mod\ \phi(n)) \tag{2.74}$$

Dengan memasukkan nilai $\alpha = g$ dan $\beta = y$, persamaan (2.74) memberikan nilai logaritma diskret y.

Untuk menggunakan metode ini, dibutuhkan sebuah cara untuk mencari $f_n(x_s)$ dan $f_n(x_t)$ secara efisien. Subbab selanjutnya akan menjelaskan cara untuk menemukan $f_n(x_s)$ dan $f_n(x_t)$.

2.6.7. Brent Cycle Detection

Cara ini menggunakan dua buah *pointer*, p_{turtle} dan p_{hare}. Setiap proses *step*, p_{turtle} melakukan 1 *step*. Pointer p_{hare} bergerak setiap iterasi step ke 2^i dengan menyamakan posisinya dengan p_1. Gambar 2.8 menjabarkan metode ini secara detail.

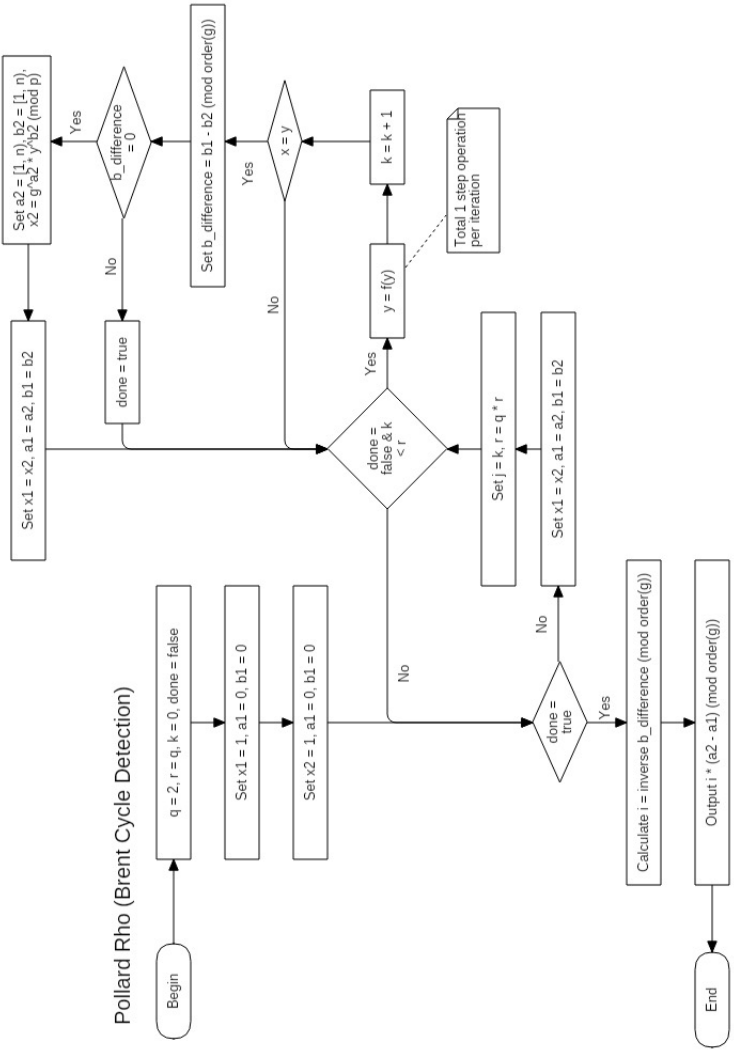
Cara ini bisa gagal apabila selisih indeks pangkat β bernilai $0\ (mod\ n)$. Apabila hal tersebut terjadi, ulangi pencarian nilai $p_{\text{turtle}} = p_{\text{hare}}$ dari awal, namun kedua *pointer* dimulai dari $f(x) = \alpha^i \beta^j\ (mod\ n)$, dimana $0 \leq i < n$ dan $0 \leq j < n$. *Brent Cycle Detection* memiliki kompleksitas sebesar $O(\sqrt{n})$.

2.7. Strategi Perkalian Modular

Perkalian modular adalah persamaan (2.75).

$$a * b = c\ (mod\ n) \tag{2.75}$$

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa terdapat kemungkinan terjadinya *integer overflow* karena besarnya nilai p. Maka perlu digunakan sebuah metode perkalian yang dapat menghindari kasus *integer overflow*. Mengingat proses perkalian merupakan proses yang



Gambar 2.8: Diagram Alur Metode Deteksi Siklus Brent

sering terjadi, metode tersebut juga sebaiknya memiliki kecepatan yang tinggi. Pada subbab ini akan dijabarkan dua metode perkalian yang dapat digunakan.

2.7.1. Strategi Naif Perkalian Modular

Strategi naif ini sebenarnya adalah persamaan (2.9) yang ditulis dalam bentuk persamaan (2.10). Hal ini berguna untuk menekan nilai a dan b yang tinggi. Setelah dilakukan perkalian, terdapat kemungkinan hasil perkalian melebihi nilai modulus n. Maka dari itu, hasil perkalian a dan b kembali dimodulus sekali lagi dengan n. Gambar 2.9 memaparkan strategi yang dimaksud.

```
   NAIVE-MODULAR-MULTIPLICATION (a, b, n)
1  return ((a mod n) * (b mod n)) mod n
```

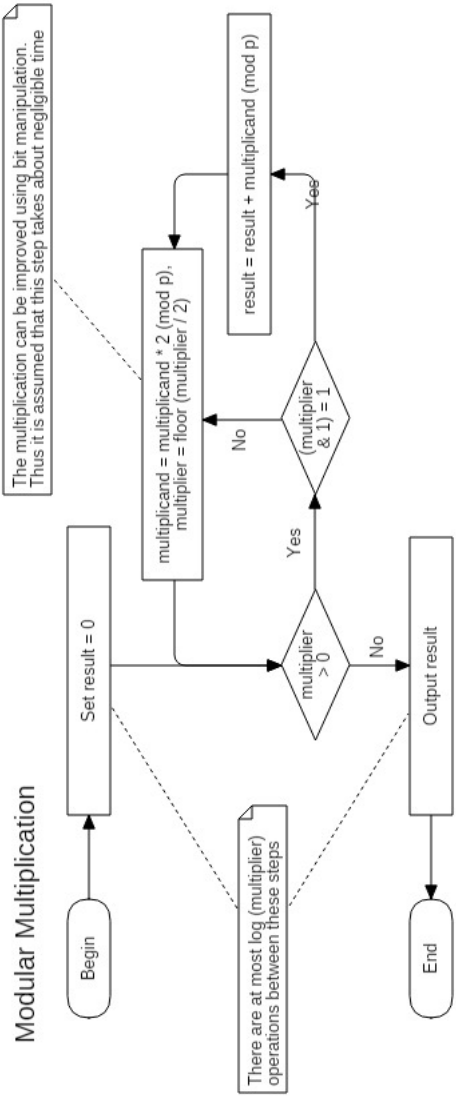
Gambar 2.9: Pseudocode Metode Perkalian Modular Naif

Metode ini dapat digunakan untuk $n \leq 2^{32}$ karena hasil terbesar yang mungkin didapat dari perkalian modular dimana $n \leq 2^{32}$ adalah $a * b = c \Rightarrow (2^{32} - 1) * (2^{32} - 1) = 2^{64} - 2^{33} + 1$. Nilai ini masih dapat ditampung menggunakan 64-bit *integer*.

2.7.2. Strategi Perkalian Modular dengan Logarithmic Modular Multiplication

Metode *Logarithmic Modular Multiplication* merupakan analog dari *Modular Expontiation* [9]. Yang membedakan adalah ketimbang pemangkatan, *Logarithmic Modular Multiplication* melakukan perkalian seperti yang ditunjukkan persamaan (2.75). Gambar 2.10 menjelaskan langkah metode ini.

Strategi ini memiliki kompleksitas $O(log\ b)$.



Gambar 2.10: Diagram Alur *Logarithmic Modular Multiplication*

2.7.3. Penjelasan Strategi Perkalian Modular dengan Logarithmic Modular Multiplication

Nilai b pada persamaan (2.75) pertama-tama diubah menjadi sebuah polinomial (2.76).

$$b = 2^0 * b_0 + 2^1 * b_1 + 2^2 * b_2 + \ldots + 2^t * b_t \tag{2.76}$$

Kemudian kalikan kedua sisi persamaan dengan a.

$$ab = a2^0 * b_0 + a2^1 * b_1 + \ldots + a2^t * b_t \tag{2.77}$$

$$ab = \sum_{i=0}^{t} a2^i * b_i \tag{2.78}$$

Maka perhitungan perkalian a dengan b merupakan persamaan (2.78). Nilai a secara perlahan dikalikan dengan nilai 2^i. Metode penghitungan persamaan (2.78) sama dengan cara penghitungan persamaan (2.25). Apabila $a_i = a * 2^i$, maka dengan memanfaatkan proses perkalian 2^i yang saling *overlap* (seperti penghitungan 2^7 pasti membutuhkan hasil penghitungan 2^4) nilai a_i dapat ditulis dengan relasi (2.79).

$$a_i = \begin{cases} a, & \text{if } i = 0 \\ a_{i-1} * 2 & \text{if } i > 0 \end{cases} \tag{2.79}$$

Kemudian diberikan sebuah nilai $term(x) = a_x * b_x$. Maka $term(x)$ dapat ditulis menjadi persamaan (2.80).

$$term(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } b_x = 0 \\ a_i & \text{if } b_x = 1 \end{cases} \tag{2.80}$$

Sehingga persamaan (2.78) dapat ditulis menjadi persamaan (2.81).

$$ab = \sum_{i=0}^{t} term(i) \tag{2.81}$$

Untuk menghitung nilai a_i, kalikan nilai a_{i-1} yang tersimpan dengan 2. Cara ini dapat digunakan hingga $a_{(\log b)}$ sehingga penghitungan $f(n)$ akan membutuhkan $O(\log b)$ proses perkalian dengan dua. Konsekuensinya, persamaan (2.80) membutuhkan $O(\log b)$ proses perkalian. Metode ini dapat digunakan untuk perkalian hingga 63-bit.

2.8. Landasan Terkait Pengujian Kebenaran Program

Keluaran program yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan perlu diujikan kebenarannya. Untuk itu perlu dibuat masukan yang mengikuti penjelasan soal seperti yang telah diterangkan pada subbab 2.1.1. Beberapa teori dan landasan yang akan dimanfaatkan untuk membuat parameter masukan akan dijabarkan pada subbab ini.

2.8.1. Miller-Rabin Primality Test

Subbab ini menjelaskan sebuah metode untuk melakukan pengecekan keprimaan sebuah bilangan, yaitu *Miller-Rabin Primality Test*. Metode ini akan digunakan untuk membangun beberapa parameter.

Metode pengecekan keprimaan *Miller-Rabin* digunakan sebagai alternatif metode pengecekan keprimaan secara naif (dimana metode tersebut memiliki kompleksitas $O(\sqrt{n})$). Metode ini menggunakan dasar bahwa apabila terdapat sebuah bilangan ganjil n, kemudian dicari nilai s dan r yang memenuhi persamaan $n-1 = 2^s r$, dan apabila n merupakan bilangan prima, maka setidaknya salah satu dari kedua persamaan berikut akan bernilai benar. [1], [10]

$$a^r \equiv 1 \ (mod\ n), \qquad \gcd(a, n) = 1 \tag{2.82}$$

$$a^{2^j r} \equiv -1 \ (mod\ n), \quad \gcd(a, n) = 1,\ 0 \leq j < s-1 \tag{2.83}$$

Persamaan (2.82) dan (2.83) memberi batasan tersirat $a > 0$. Untuk seterusnya, nilai a akan diasumsikan jatuh pada rentang $1 \leq a < n$.

Untuk n yang berupa bilangan prima, salah satu dari persamaan di atas pasti akan terpenuhi. Namun untuk n yang bukan merupakan bilangan prima, terdapat nilai a yang memenuhi kedua persamaan di atas. Bilangan a ini umum disebut dengan *strong liar* terhadap keprimaan n. Artinya, bilangan a seolah-olah menunjukkan bahwa nilai n merupakan bilangan prima sebab nilai a tersebut memenuhi persamaan (2.82) atau (2.83). Kehadiran *strong liar* untuk n paling banyak berjumlah $\frac{1}{4}\phi(n)$ dimana $\phi(n)$ merupakan *Euler Totient Function*. Artinya kemungkinan nilai komposit n dianggap sebagai bilangan prima paling besar adalah 25%. [10]

Kemungkinan terjadinya galat pada metode *Miller-Rabin* dapat diperkecil dengan beberapa kali mengecek nilai a yang berbeda-beda. Untuk t kali percobaan, kemungkinan terjadinya galat pada metode *Miller-Rabin* adalah paling banyak $(\frac{1}{4})^t$. Semakin besar nilai t, semakin kecil kemungkinan terjadinya galat. [10]

Miller-Rabin awalnya adalah metode probabilistik untuk menentukan keprimaan sebuah bilangan. Namun dengan membatasi nilai yang akan diperiksa jatuh pada rentang $2 \leq n < 2^{64}$, metode *Miller-Rabin* berubah menjadi metode deterministik. Online Encyclopedia of Integer Sequence [11] menjabarkan sederet nilai yang merupakan nilai batas atas pengujian Miller-Rabin yang tidak akan menghasilkan keluaran yang salah jika diujikan dengan himpunan nilai a tertentu. Himpunan ini merupakan i bilangan prima pertama dimana i adalah suku ke-i pada deretan nilai batas atas. Tabel 2.3 berisi himpunan yang dimaksud.

2.8.2. Polinomial Pembuat Bilangan Prima

Pencarian bilangan prima dapat dilakukan dengan mencoba nilai satu per satu dan mengecek apakah nilai tersebut merupakan bilangan prima atau bukan. Cara ini cenderung tidak efektif. Untuk mempersingkat waktu pencarian bilangan prima, digunakan sebuah polinomial penghasil prima.

Tabel 2.3: Himpunan Bilangan Pengecek Keprimaan Miller Rabin Jika N Kurang Dari Batas Atas

i	Batas Atas	{a}
1	2047	2
2	1373653	2, 3
3	25326001	2, 3, 5
4	3215031751	2, 3, 5, 7
5	2152302898747	2, 3, 5, 7, 11
6	3474749660383	2, 3, 5, 7, 11, 13
7	341550071728321	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17
8	341550071728321	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
9	3825123056546413051	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23
10	3825123056546413051	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
11	3825123056546413051	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31
12	318665857834031151167461	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37

Polinomial pembuat bilangan prima yang digunakan adalah polinomial (2.84). [12]

$$f(n) = n^2 + n + 41 \tag{2.84}$$

Walaupun polinomial (2.84) disebut dengan polinomial penghasil prima, keluaran polinomial ini belum tentu selalu bilangan prima sehingga perlu dilakukan pengecekan keprimaan. Kendati begitu, penggunaan polinomial ini mampu mempercepat pencarian bilangan prima dibandingkan metode naif.

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

BAB III
DESAIN

Pada bab ini akan dijelaskan desain algoritma yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan.

3.1. Deskripsi Umum Sistem

Sistem akan menerima tujuh nilai masukan: N, L, q, p, g, y, Hm. Nilai masukan ini mengikuti penjelasan pada subbab 2.1.1. Kemudian sistem akan mencari sebuah nilai x pada persamaan $y = g^x \ (mod\ p)$. Nilai x ini akan digunakan pada tahapan pembuatan *signature*, mengacu pada prosedur yang dijabarkan pada subbab 2.1.3. Seusai pembuatan *signature*, sistem akan mengeluarkan *signature* yang telah dibuat yaitu sepasang nilai *(r, s)*.

Pada tahap penyelesaian logaritma diskret, sistem menggunakan dua metode yang berbeda. Masing-masing metode akan digunakan untuk dibandingkan kinerja satu sama lainnya.

3.2. Desain Program Utama

Subbab ini akan menjelaskan desain fungsi yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan.

3.2.1. Desain Fungsi Main

Pada fungsi ini, semua tahapan komputasi berjalan. Termasuk pada tahapan ini yaitu pencarian logaritma diskret dan pembuatan *signature*. Fungsi ini menerima parameter secara interaktif dari pengguna, dan mengeluarkan hasil *signature (r, s)* secara interaktif kepada pengguna. Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.1.

```
  MAIN
1 let n, l, q, p, g, y, Hm = Input()
2 let x = DISCRETE-LOG (q, p, g, y)
3 let r, s = SIGN (q, p, g, Hm, x)
4 output (r, s)
```

Gambar 3.1: Desain Fungsi *Main*

3.2.2. Desain Fungsi Pencarian Logaritma Diskret

Terdapat dua metode pencarian logaritma diskret yang akan diujikan pada penyelesaian permasalahan. Subbab ini akan menjelaskan desain masing-masing metode.

3.2.2.1. Desain Fungsi Baby-step Giant-step

Subbab ini akan menjabarkan desain fungsi *Baby-step Giant-step* menurut penjelasan pada subbab 2.6.4 dalam bentuk *pseudo-code*. Fungsi ini menerima tiga *integer*, yaitu g, y, n. Keluaran fungsi ini adalah sebuah *integer* x. Masukan dan keluaran fungsi ini mengacu pada persamaan (2.1). Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.2. Algoritma ini mengikuti penjelasan di [3].

3.2.2.2. Desain Fungsi Pollard Rho dengan Brent Cycle Detection

Subbab ini akan menjabarkan desain fungsi *Pollard Rho* dengan *Brent Cycle Detection* menurut penjelasan pada subbab 2.6.6 dan 2.6.7. Fungsi ini menerima tiga *integer*, yaitu g, y, dan n. Keluaran fungsi ini adalah *integer* x. Masukan dan keluaran fungsi ini mengacu pada persamaan (2.1). Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.3. Algoritma ini mengikuti penjelasan di [3], [4].

```
   BABY-STEP-GIANT-STEP (g, y, n)
 1 let limit = sqrt (ord(g)) rounded upward
 2 let GIANTSTEPS[] be a new array
 3 let BABYSTEPS[] be a new array
 4 for i = 0 to limit-1
 5   store pair ⟨s = limit * i, t = g^(limit*i)⟩ into GIANTSTEPS
 6 for j = 0 to limit-1
 7   store pair <s = j, t = y * g^j> into BABYSTEPS
 8 find a match between GIANTSTEPS and BABYSTEPS on
       the t.
 9 if a pair (x, y) such that said match exist
10   return GIANTSTEPS[x].s - BABYSTEPS[y].s
11 return "NOT FOUND"
```

Gambar 3.2: Desain Fungsi *Baby-step Giant-step*

```
   POLLARD-RHO-BRENT (g, y, n)
 1 let p1 = 1, p2 = 1
 2 let i = 2
 3 let iteration = 0
 4 do
 5   move p1 forward once
 6   iteration = iteration + 1
 7   if iteration == 2^i
 8     move p2 to p1
 9     i = i + 1
10     iteration = 0
11 while p1 != p2
12 let inverse = (p1.b - p2.b)-1 (mod n)
13 return (p2.a - p1.a) * inverse (mod n)
```

Gambar 3.3: Desain Fungsi *Pollard Rho* dengan *Brent Cycle Detection*

3.2.2.3. Desain Fungsi Step Untuk Pollard Rho

Subbab ini akan menjabarkan desain fungsi *Step* pada *Pollard Rho*. Pada subbab 2.6.6. dijelaskan bahwa fungsi step butuh mem-

partisikan himpunan $\mathbb{Z}_p$ menjadi tiga himpunan. Partisi ini dapat dilakukan dengan mudah dengan melakukan modulus setiap elemen $\mathbb{Z}_p$ dengan 3, sehingga terbentuk tiga kelas residu: $[0]_3, [1]_3, [2]_3$. Ketiga kelas residu ini merepresentasikan tiga himpunan yang digunakan fungsi step, dimana $S_1 = [1]_3$, $S_2 = [0]_3$, dan $S_3 = [2]_3$.

Fungsi ini menerima empat *integer* sebagai parameter. Keluaran fungsi ini adalah sebuah *integer* hasil proses *step*. Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.4.

```
  STEP (value, alpha, beta, modulus)
1 let class = value mod 3
2 if class == 0
3   value = MODULAR-MULTIPLICATION (value, value,
        modulus)
4 else if class == 1
5   value = MODULAR-MULTIPLICATION (value, beta,
        modulus)
6 else
7   value = MODULAR-MULTIPLICATION (value, alpha,
        modulus)
8 return value
```

Gambar 3.4: Desain Fungsi *Step*

3.2.3. Desain Fungsi Sign

Subbab ini akan menjabarkan desain fungsi Sign yang mengikuti prosedur pada subbab 2.1.3. Fungsi ini menerima lima *integer* sebagai parameter dan dua *integer* sebagai keluaran. Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.5.

3.2.4. Desain Fungsi Modular Exponentiation

Subbab ini akan menjabarkan desain fungsi *Modular Exponentiation*, mengacu pada penjelasan pada subbab 2.4.2. Fungsi ini

```
   SIGN (globalMod, keyMod, g, hash, x)
 1 let i = 1
 2 let r, s = 0, 0
 3
 4 while r == 0 do
 5   i = i + 1
 6   r = MODULAR-EXPONENTIATION (g, i, keyMod,
         globalMod)
 7   if r != 0
 8     let inverse = MODULAR-INVERSE (generator,
           keyMod)
 9     s = (hash + r * x) mod q
10     s = (s * inverse) mod q
11     if s != 0
12       return (r, s)
13   r = 0
```

Gambar 3.5: Desain Fungsi *Sign*

menghitung $g^k \ mod \ p$, dimana g memiliki order elemen q. Fungsi ini menerima empat *integer* sebagai input dan mengeluarkan sebuah *integer* sebagai hasil penghitungan pemangkatan modular. Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.6.

```
   MODULAR-EXPONENTIATION (g, k, p, q)
 1 let result = 1
 2 let basis = 1
 3 k = k mod q
 4 let ⟨k_0, k_1, ..., k_n⟩ be a bit representation of k
       where ki is the ith bit.
 5 for i = 1 to n
 6   basis = (basis * g) mod p
 7     if k_i == 1
 8     result = (result * basis) mod p
 9 return result
```

Gambar 3.6: Desain Fungsi *Modular Exponentiation*

3.2.5. Desain Fungsi Logarithmic Modular Multiplication

Subbab ini akan menjabarkan desain fungsi *Logarithmic Modular Multiplication* mengikuti penjelasan pada subbab 2.7.2. Fungsi ini menerima tiga masukan: sebuah nilai yang dikali a, sebuah nilai pengali b, dan sebuah modulus n. Keluaran fungsi ini adalah sebuah *integer* hasil perkalian. Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.7. Algoritma ini mengikuti penjelasan di [9].

```
   LOGARITHMIC-MODULAR-MULTIPLICATION (a, b, n)
1  let result = 1, basis = a
2  let ⟨b_1, b_2, ..., b_t⟩ be the i-th bit representation
       for b
3  for i = 1 to t
4    if b_i == 1
5      result = (result + basis) mod n
6    basis = (basis * 2) mod n
7  return result
```

Gambar 3.7: Desain Fungsi Modular Multiplication

3.2.6. Desain Fungsi Invers Modulus

Fungsi ini digunakan pada banyak bagian penyelesaian permasalahan. Cara kerja fungsi ini mengacu pada penjelasan di subbab 2.5.3. Fungsi menerima sebuah persamaan 2.2. Keluaran metode ini adalah koefisien sebuah nilai a dan sebuah modulus b. Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.8. Algoritma ini didapat dari [7].

3.2.7. Desain Fungsi Uji Kebenaran

Fungsi uji kebenaran digunakan untuk melakukan uji coba kebenaran keseluruhan program pada tahapan komputasi utama. Fungsi ini akan digunakan sebagai *catch-all error detection* untuk mem-

```
  MODULAR-INVERSE (a = qb + r)
1 let EQUATION[] be a new array
2 let i = 0
3 while r != 0
4   EQUATION[i] = (a = qb + r)
5   find equation b = qr + m for some q and m
6   i = i + 1
7 for i = EQUATION.len - 2 downto 0
8   substitute EQUATION[i].b with EQUATION[i+1].r
9 return (EQUATION[0].a.coefficient,
     EQUATION[0].b.coefficient)
```

Gambar 3.8: Desain Fungsi Invers Modulus

bantu proses *debugging*. Fungsi ini bekerja mengikuti prosedur pada subbab 2.1.4.

Fungsi ini menerima tujuh *integer* sebagai masukan dimana lima pertama merupakan masukan soal, dan dua selanjutnya merupakan *signature* yang dibuat. Keluaran fungsi ini adalah enumerasi benar–salah. Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.9.

```
  VERIFY (q, p, g, y, Hm, r, s)
1 let w = MODULAR-INVERSE (s, q)
2 let u1 = MODULAR-MULTIPLICATION (w, Hm, q)
3 let u2 = MODULAR-MULTIPLICATION (w, r, q)
4 let g' = MODULAR-EXPONENTIATION (g, u1, p, p-1)
5 let y' = MODULAR-EXPONENTIATION (y, u2, p, p-1)
6 let v = MODULAR-MULTIPLICATION ('g, 'y, q)
7 if v == r
8   return "SIGNATURE CORRECT"
9 return "SIGNATURE INCORRECT"
```

Gambar 3.9: Desain Fungsi Uji Kebenaran

3.3. Desain Program Pembuat Data Uji

Program tahapan komputasi utama memiliki masukan yang tidak sembarangan. Masukan program memiliki sifat-sifat yang dijelaskan pada subbab 2.1.1. Program ini membentuk data uji untuk membantu memeriksa kebenaran program utama.

3.3.1. Desain Fungsi Main Program Pembuat Data Uji

Semua hal yang berkaitan dengan pembuatan data uji berjalan pada fungsi ini. Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.10.

```
   MAIN
1  let begin = Input()
2  let end = Input()
3  let bitDifference = Input()
4  let limit = Input()
5  let Hm = Input()
6  for i = begin to end
7    GENERATE (i, i + bitDifference, Hm, limit)
```

Gambar 3.10: Desain Fungsi Utama Pembuat Data Uji

3.3.2. Desain Fungsi Pengecekan Keprimaan

Subbab ini akan menjelaskan metode pengecekan keprimaan berdasarkan penjelasan pada subbab 2.8.1. Masukan fungsi ini adalah sebuah bilangan *integer*. Keluaran fungsi ini adalah enumerasi prima–komposit. Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.11.

3.3.3. Desain Fungsi Polinomial Prima

Fungsi ini mengevaluasi polinomial pada persamaan (2.84) pada subbab 2.8.2 untuk membentuk bilangan prima. Fungsi ini

```
   IS-PRIME (value)
 1 if value == 2
 2   return "PRIME"
 3 if value < 2 or value is divisible with 2
 4   return "COMPOSITE"
 5 let s = 0
 6 let r = value - 1
 7 while r is divisible with 2
 8   s = s + 1
 9   r = r / 2
10 let PRIMES be array of 12 first primes
11 let LIMITS be array of 12 Miller-Rabin upper
       limits
12 let limit = first index where value <
       LIMITS[index]
13 for i = 0 to limit - 1
14   let m = MODULAR-EXPONENTIATION (value, a[i], r,
         r-1)
15   if y != 1 or y != (value - 1)
16     let j = 1
17     while j < s-1 and y != (value - 1)
18       y = (y * y) mod value
19       if y == 1
20         return "PRIME"
21       j = j + 1
22     if y != (value - 1)
23       return "COMPOSITE"
24 return "PRIME"
```

Gambar 3.11: Desain Fungsi Pengecekan Keprimaan Miller Rabin

menerima sebuah *integer* sebagai masukan, dan mengeluarkan *integer* sebagai keluaran. Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.12.

```
   POLY-PRIME (n)
1  return n*n + n + 41
```

Gambar 3.12: Desain Fungsi Polinomial Pembuat Bilangan Prima

3.3.4. Desain Fungsi Generate

Fungsi ini bertujuan untuk membuat data uji dengan karakteristik masukan yang diberikan. Dalam satu pemanggilan fungsi, akan dibuatkan paling banyak sebanyak *limit* data uji yang memenuhi karakteristik masukan. Fungsi ini menerima empat *integer* sebagai masukan, dan delapan *integer* sebagai keluaran. Tujuh dari delapan *integer* pertama merupakan nilai masukan soal mengikuti penjelasan di subbab 2.1.1. Desain fungsi ini dapat dilihat pada gambar 3.13.

```
   GENERATE (N, L, Hm, limit)
 1 let NLimit be the highest N-bit value possible
 2 let LLimit be the highest L-bit value possible
 3 let NBegin be the highest (N-1)-bit value possible
 4 let LBegin be the highest (L-1)-bit value possible
 5 let q = 0
 6 let i = sqrt (NBegin)
 7 while q < NLimit
 8   q = POLY-PRIME (i)
 9   i = i + 1
10   if IS-PRIME (q) == "COMPOSITE" or q < NBegin
11     continue
12   for p = LBegin + q - (LBegin mod q) to LLimit
13     if IS-PRIME (p) == "COMPOSITE" or p is not
           divisible with q
14       continue
15     let g = 1
16     for k = 2 to q-1
17     find a value of g = k^(p/q) mod (p+1) that
           'doesnt result in 1 and g^q mod (p+1)
           results in 1
18     if such g found
19       let x a random value between 1 and q-1
             inclusive
20       let y = MODULAR-EXPONENTIATION (g, x, j +
             1, j)
21       output (N, L, q, j + 1, g, y, Hm, x)
22       limit = limit - 1
23       if limit == 0
24         quit function
```

Gambar 3.13: Desain Fungsi *Generate*

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

BAB IV
IMPLEMENTASI

4.1. Lingkungan implementasi

Lingkungan implementasi dan pengembangan yang dilakukan adalah sebagai berikut.

1. Perangkat Keras
   (a) Processor Intel® Core™ i5-7400 CPU @ 3.00GHz (4 CPUs), 3.0GHz
   (b) Random Access Memory 8192MB
2. Perangkat Lunak
   (a) Sistem Operasi Windows 10 Pro 64-bit
   (b) IDE CodeBlocks 17.12
   (c) Bahasa Pemrograman C++
   (d) MinGW 64-bit

4.2. Implementasi Program Utama

Subbab ini menjelaskan implementasi program utama. Program ini merupakan program yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan DSA Attack.

4.2.1. Penggunaan Library, Tipe data, dan Struct

Program ini menggunakan beberapa *library* dan tipe data seperti yang ditunjukkan pada kode sumber 4.1.

Untuk mengakomodasi aritmatika modular, sebuah *struct* dengan tujuan tersebut diimplementasikan. Kode sumber 4.2 sampai 4.6 menjelaskan implementasi *struct* yang dimaksud.

```
 1 #include <cstdio>
 2 #include <cstdlib>
 3 #include <unordered_map>
 4 #include <utility>
 5 #include <cmath>
 6 #include <vector>
 7
 8 typedef unsigned long long uint64;
 9 typedef          long long int64;
```

Kode Sumber 4.1: *Header* Program Utama

```
   ZElement
 1 uint64 character;
 2 uint64 element;
 3 uint64 order;
 4
 5 ZElement (uint64 character, uint64 element,
       uint64 order = 0)
 6 {
 7   this->character = character;
 8   this->element = element % character;
 9   this->order = (order == 0) ? character - 1 :
         order; // Assumes the element is primitive
         element
10 }
11
12 ZElement (const ZElement & other)
13 {
```

Kode Sumber 4.2: *Struct* ZElement (bg. 1)

```
14   this->character = other.character;
15   this->element = other.element;
16   this->order = other.order;
17 }
18
19 ZElement ()
20 {   character = 0; element = 0; order = 0; }
21
22 ZElement & operator = (const uint64 & other)
23 {
24   this->element = other % character;
25   return *this;
26 }
27
28 ZElement operator + (const uint64 & other)
29 {
30   uint64 output = (element + (other % character))
         % character;
31   return ZElement (character, output);
32 }
33
34 // TODO: may fail when other >= 2 * character
35 ZElement operator - (const uint64 & other)
36 {
37   uint64 output = (element >= other) ?
38   element - other :
39   element - other + character;
40   return ZElement (character, output);
41 }
42
43 ZElement operator * (const uint64 & other)
44 {
45   return ZElement (character,
         modularMultiplication (element, other,
         character));
```

Kode Sumber 4.3: *Struct* ZElement (bg. 2)

```
46 }
47
48 ZElement operator + (const ZElement & other)
49 {
50   return *this + other.element;
51 }
52
53 ZElement operator - (const ZElement & other)
54 {
55   return *this - other.element;
56 }
57
58 ZElement operator * (const ZElement & other)
59 {
60   return *this * other.element;
61 }
62
63 ZElement & operator += (const uint64 & other)
64 {
65   this->element = (element + (other % character))
       % character;
66   return *this;
67 }
68
69 // TODO: may fail when other >= 2 * character
70 ZElement & operator -= (const uint64 & other)
71 {
72   this->element = (element >= other) ?
73   element - other :
74   element - other + character;
75   return *this;
76 }
77
78 ZElement & operator *= (const uint64 & other)
79 {
```

Kode Sumber 4.4: *Struct* ZElement (bg. 3)

```
 80   ZElement result = ZElement (character,
          modularMultiplication (element, other,
          character));
 81   this->element = result.element;
 82   return *this;
 83 }
 84
 85 ZElement & operator += (const ZElement & other)
 86 {
 87   *this += other.element;
 88   return *this;
 89 }
 90
 91 // TODO: may fail when other >= 2 * character
 92 ZElement & operator -= (const ZElement & other)
 93 {
 94   *this -= other.element;
 95   return *this;
 96 }
 97
 98 ZElement & operator *= (const ZElement & other)
 99 {
100   *this *= other.element;
101   return *this;
102 }
103
104 bool operator < (const ZElement & other) const
105 {
106   return element < other.element;
107 }
108
109 bool operator == (const ZElement & other) const
110 {
111   return element == other.element;
112 }
```

Kode Sumber 4.5: *Struct* ZElement (bg. 4)

```
113
114 bool operator != (const ZElement & other) const
115 {
116   return element != other.element;
117 }
118
119 ZElement invert ()
120 {
121   return ZElement (character, modularInverse
          (element, character));
122 }
```

Kode Sumber 4.6: *Struct* ZElement (bg. 5)

4.2.2. Implementasi Fungsi Main

Subbab ini menjabarkan implementasi fungsi *main* yang dijelaskan pada subbab 3.2.1. Implementasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.7.

```
   int main()
 1 uint64  N, // Number of bit for q
 2 L, // Number of bit for p
 3 q, // Global basis
 4 p, // Public key modulus
 5 g, // Generator
 6 y, // Public key query i.e. moduled generator
 7 M; // Hashed message
 8
 9 scanf ("%llu%llu%llu%llu%llu%llu%llu", &N, &L,
       &q, &p, &g, &y, &M);
10 uint64 index = BSGS (g, p, y, q);
11
12 auto signedPair = sign (M, q, g, p, index);
13
14 printf ("%llu %llu\n", signedPair.first.element,
       signedPair.second.element);
```

Kode Sumber 4.7: Fungsi Main

4.2.3. Implementasi Fungsi Baby-step Giant-step

Subbab ini menjabarkan implementasi fungsi *Baby-step Giant-step* yang dijelaskan pada subbab 3.2.2.1. Implementasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.8 sampai 4.9.

```
   uint64 BSGS (const uint64 & generator, const
       uint64 & modulo, const uint64 & query, const
       uint64 & order)
 1 typedef ZElement key_t;   // Will contain
       g^(limit * i) mod p
 2 typedef ZElement value_t; // Will contain limit *
       i mod q
 3
 4 std::unordered_map <key_t, value_t,
       ZElement_hash> giantStep;
 5
 6 uint64 limit = std::ceil (std::pow (order, 0.5));
 7
 8 ZElement giantStepSize = modularExponentiation
       (ZElement (modulo, generator, order), limit);
 9 key_t   currentGiantStepKey (modulo, 1);
10 value_t currentGiantStepValue (order, 0);
11
12 for (uint64 i = 0; i <= limit; i++)
13 {
14   giantStep[ currentGiantStepKey ] =
         currentGiantStepValue;
15   currentGiantStepKey *= giantStepSize;
16   currentGiantStepValue += limit;
17 }
18
19 key_t poweredResult (modulo, query);
20 for (uint64 i = 0; i < limit; i++)
21 {
```

Kode Sumber 4.8: Fungsi *Baby-step Giant-step* (bg. 1)

```
22   auto it = giantStep.find ( poweredResult );
23   if (it != giantStep.end())
24   return (it->second - i).element;
25   poweredResult *= generator;
26 }
27
28 return -1;
```

Kode Sumber 4.9: Fungsi *Baby-step Giant-step* (bg. 2)

Fungsi ini menggunakan *library* `unordered_map`. Untuk itu, dibutuhkan sebuah fungsi untuk menghasilkan *hash value* dari tipe data `ZElement`. Fungsi tersebut dapat dilihat pada kode sumber 4.10.

```
   struct ZElement_hash
 1 size_t operator () (const ZElement & in) const
 2 {
 3   return  std::hash <uint64> () (in.character) ^
 4   std::hash <uint64> () (in.element) ^
 5   std::hash <uint64> () (in.order);
 6 }
```

Kode Sumber 4.10: Penghitung Nilai *Hash* Tipe Data ZElement

4.2.4. Implementasi Fungsi Pollard Rho

Subbab ini akan menjelaskan bagaimana desain fungsi *Pollard Rho* akan diimplementasikan. Fungsi ini merupakan sebuah modul yang komponennya sangat berkaitan. Untuk itu, segala hal yang berkaitan dengan *Pollard Rho* dikumpulkan dalam sebuah *struct* pada kode sumber 4.11.

4.2.4.1. Penggunaan Struct Step

Sebuah *struct* untuk akan digunakan untuk melakukan proses *step*. Selain itu, *struct* ini juga berfungsi untuk menyimpan histori

```
  struct pollardRho
1 /// variable
2 // ...
3 // ...
4
5 /// static functions
6 // ...
7 // ...
```

Kode Sumber 4.11: Struktur *Struct Pollard Rho*

step setiap *pointer*. *Struct* ini merupakan implementasi desain pada subbab 3.2.2.3. Implementasi *struct* ini dapat dilihat pada kode sumber 4.12 dan 4.13.

Struct ini memiliki tiga variabel yang penting dalam melakukan proses *step*. Nilai ini tertera pada tabel 4.1. Nilai A dan B akan ditentukan mengikuti penjelasan pada subbab 2.6.6.

Tabel 4.1: Variabel Struct Step

No	Nama	Deskripsi
1	*value*	Menyimpan nilai $v = A^{\alpha}B^{\beta} \ (mod\ m)$
2	*alpha*	Menyimpan berapa kali step ini telah dikalikan dengan A
3	*beta*	Menyimpan berapa kali step ini telah dikalikan dengan B

4.2.4.2. Implementasi Fungsi Pollard Rho dengan Brent Cycle Detection

Subbab ini menjabarkan implementasi fungsi *Pollard Rho* dengan *Brent Cycle Detection* yang dijelaskan pada subbab 3.2.2.2. Implementasi fungsi ini dapat dapat dilihat pada kode sumber 4.14 dan 4.15.

```
   struct step
 1 ZElement value;
 2 ZElement alpha;
 3 ZElement beta;
 4
 5 step (ZElement value, ZElement alpha, ZElement
       beta)
 6 {
 7   this->value = value;
 8   this->alpha = alpha;
 9   this->beta = beta;
10 }
11
12 step ()
13 {
14   this->value = ZElement (1, 0);
15   this->alpha = ZElement (1, 0);
16   this->beta = ZElement (1, 0);
17 }
18
19 void stepPartitionOne (const uint64 & betaValue)
20 {
21   beta += 1;
22   value *= betaValue;
23 }
24
25 void stepPartitionTwo ()
26 {
27   alpha += alpha;
28   beta += beta;
29   value *= value;
30 }
```

Kode Sumber 4.12: Struct *Step* (bg. 1)

```
31 void stepPartitionThree (const uint64 &
       alphaValue)
32 {
33   alpha += 1;
34   value *= alphaValue;
35 }
36
37 /**
38 *  Defines the step function
39 *  S1 consists of residue class [1]
40 *  S2 consists of residue class [0]
41 *  S3 consists of residue class [2]
42 */
43 step & goForward (const uint64 & A, const uint64
       & B)
44 {
45   int residue = value.element & 3;
46   if      (residue == 1) stepPartitionOne(B);
47   else if (residue == 0) stepPartitionTwo();
48   else                   stepPartitionThree(A);
49
50   return *this;
51 }
```

Kode Sumber 4.13: Struct *Step* (bg. 2)

```
   static uint64 brent (const uint64 & generator,
       const uint64 & modulo, const uint64 & query,
       const uint64 & order)
 1 uint64 nextCheckpoint = 1;
 2 uint64 currentIteration = 0;
 3
 4 step lastCheckpointStep;
 5 step currentStep (ZElement (modulo, 1), ZElement
       (order, 0), ZElement (order, 0));
```

Kode Sumber 4.14: Fungsi *Pollard Rho* dengan *Brent Cycle Detection* (bg. 1)

```
 6 ZElement betaDifference;
 7
 8 bool done = false;
 9
10 while ( ! done )
11 {
12   lastCheckpointStep = currentStep;
13   nextCheckpoint = nextCheckpoint * 2;
14
15   for (; ( !done ) && currentIteration <
         nextCheckpoint; currentIteration++)
16   {
17     currentStep.goForward(generator, query);
18     if (currentStep.value ==
           lastCheckpointStep.value)
19     {
20       betaDifference = lastCheckpointStep.beta -
             currentStep.beta;
21
22       if (betaDifference.element == 0)
23       {
24         currentStep = randomizeStartingStep
               (generator, order, modulo, query);
25       }
26       else
27       {
28         done = true;
29       }
30     }
31   }
32 }
33
34 ZElement result = betaDifference.invert();
35 result *= (currentStep.alpha -
       lastCheckpointStep.alpha);
36
37 return result.element;
```

Kode Sumber 4.15: Fungsi *Pollard Rho* dengan *Brent Cycle Detection* (bg. 2)

4.2.4.3. Implementasi Fungsi Pengacakan Posisi Awal

Subbab ini menjabarkan implementasi fungsi pengacakan posisi awal yang akan digunakan apabila terjadi kasus yang menyebabkan metode *Pollard Rho* gagal memberikan keluaran yang benar seperti yang dijelaskan pada subbab 2.6.7. Implemetasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.16

```
   static step randomizeStartingStep (const uint64 &
       generator, const uint64 & order, const uint64
       & modulo, const uint64 & query)
 1 uint64 upperLimit = order - 1;
 2 ZElement alpha (order, 1 + (rand() % upperLimit));
 3 ZElement beta (order, 1 + (rand() % upperLimit));
 4
 5 ZElement poweredAlpha = modularExponentiation
       (ZElement (modulo, generator, order),
       alpha.element);
 6 ZElement poweredBeta = modularExponentiation
       (ZElement (modulo, query, order),
       beta.element);
 7
 8 ZElement value = poweredAlpha * poweredBeta;
 9
10 return step (value, alpha, beta);
```

Kode Sumber 4.16: Fungsi Pengacakan Posisi Awal

4.2.5. Implementasi Fungsi Pemangkatan Modular

Subbab ini menjabarkan implementasi fungsi pemangkatan modular yang dijelaskan pada subbab 3.2.4. Implementasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.17.

4.2.6. Implementasi Fungsi Perkalian Modular dengan Logarithmic Modular Multiplication

Subbab ini menjabarkan implementasi fungsi *Logarithmic Modular Multiplication* yang dijelaskan pada subbab 3.2.5. Implemen-

```
   ZElement modularExponentiation (ZElement
       generator, uint64 exponent)
 1 ZElement result (generator.character, 1);
 2 if (exponent >= generator.order)
 3 exponent = exponent % generator.order;
 4
 5 for (; exponent > 0; exponent = exponent >> 1)
 6 {
 7   if (exponent & 1 == 1)
 8   {
 9     result = result * generator;
10   }
11
12   generator = generator * generator;
13 }
14
15 return result;
```

Kode Sumber 4.17: Fungsi Pemangkatan Modular

tasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.18.

Untuk mempercepat kinerja fungsi, *sentinel* perulangan yang digunakan adalah nilai terkecil antara *multiplier* dan *multiplicand*.

4.2.7. Implementasi Fungsi Invers Modulus

Subbab ini menjabarkan implementasi fungsi invers modulus yang dijelaskan pada subbab 3.2.6. Implementasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.19.

4.2.8. Implementasi Fungsi Sign

Subbab ini menjabarkan implementasi fungsi *Sign* yang dijelaskan pada subbab 3.2.3. Implementasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.20.

```
   uint64 modularMultiplication (uint64 multiplier,
       uint64 multiplicand, uint64 modulo)
 1 multiplier = multiplier % modulo;
 2 multiplicand = multiplicand % modulo;
 3
 4 if ( multiplier < multiplicand )
 5 std::swap (multiplier, multiplicand);
 6
 7 uint64 result = 0;
 8
 9 while (multiplier > 0)
10 {
11   if ( multiplier & 1 == 1 )
12   {
13     result = (result + multiplicand) % modulo;
14   }
15
16   multiplier >>= 1;
17   multiplicand = (multiplicand << 1) % modulo;
18 }
19
20 return result;
```

Kode Sumber 4.18: Fungsi *Logarithmic Modular Multiplication*

```
   uint64 modularInverse (uint64 value, uint64
       modulus)
 1 int64 valueCoeff, modulusCoeff;
 2 extendedEuclidean (modulus, value % modulus,
       modulusCoeff, valueCoeff);
 3
 4 return (valueCoeff < 0) ? valueCoeff + (int64)
       modulus : valueCoeff;
```

Kode Sumber 4.19: Fungsi Invers Modulus

```
   std::pair <ZElement, ZElement> sign (const uint64
       & message, const uint64 & globalModulo, const
       uint64 & generator, const uint64 & keyModulo,
       const uint64 & index)
 1 std::pair <ZElement, ZElement> output ((ZElement)
       {globalModulo, 0}, (ZElement) {globalModulo,
       0});
 2
 3 ZElement temporalKeypair (globalModulo, 1);
 4 do
 5 {
 6   temporalKeypair += 1;
 7
 8   output.first = modularExponentiation (ZElement
         (keyModulo, generator, globalModulo),
         temporalKeypair.element);
 9   output.first = ZElement (globalModulo,
         output.first.element);
10
11   if (output.first.element == 0)
12   {
13     continue;
14   }
15
16   ZElement inverseTemporalKeypair =
         temporalKeypair.invert();
17   ZElement transformedMessage = ZElement
         (globalModulo, message + (output.first *
         index).element);
18
19   output.second = inverseTemporalKeypair *
         transformedMessage;
20
21   if (output.second.element == 0)
22   {
23     output.first.element = 0;
24     continue;
25   }
26 } while (output.first.element == 0);
27
28 return output;
```

Kode Sumber 4.20: Fungsi *Sign*

4.2.9. Implementasi Fungsi Uji Kebenaran

Subbab ini menjabarkan implementasi fungsi uji kebenaran yang dijelaskan pada subbab 3.2.7. Implementasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.21.

```
   bool verify (const uint64 & globalModulo, const
       uint64 & keyModulo, const uint64 & generator,
       const uint64 & query, const uint64 & message,
       std::pair <ZElement, ZElement> signature)
1  ZElement w = signature.second.invert();
2  ZElement u1 = w * message;
3  ZElement u2 = w * signature.first;
4  ZElement poweredG = modularExponentiation
       (ZElement (keyModulo, generator, keyModulo -
       1), u1.element);
5  ZElement poweredY = modularExponentiation
       (ZElement (keyModulo, query, keyModulo - 1),
       u2.element);
6  ZElement v (globalModulo, (poweredG *
       poweredY).element);
7  return v.element == signature.first.element;
```

Kode Sumber 4.21: Fungsi Uji Kebenaran

4.3. Implementasi Program Pembuat Data Uji

Subbab ini akan menjelaskan mengenai implementasi program pembuatan data uji, mengikuti penjelasan pada subbab 3.3.

4.3.1. Penggunaan Library, Konstanta, dan Struct

Program ini menggunakan *library* bawaan C++, yaitu `cstdio` yang digunakan untuk menerima dan mengeluarkan hasil luaran program, `cstdlib` yang digunakan untuk melakukan randomisasi, `ctime` sebagai *library* untuk melakukan *random seeding*, dan `utility` yang digunakan untuk melakukan penukaran dua variabel. Selain *library*, sebuah tipe data *unsigned integer* 64-bit juga didefinisikan

dengan nama `uint64`. Keseluruhan penggunaan *library* dan konstanta dapat dilihat pada kode sumber 4.22.

```
1 #include <cstdio>
2 #include <cstdlib>
3 #include <ctime>
4 #include <utility>
5
6 #define uint64 unsigned long long
```

Kode Sumber 4.22: *Header* Program Pembuat Data Uji

4.3.2. Implementasi Fungsi Main

Fungsi ini merupakan inti seluruh program. Fungsi ini tidak menerima masukan. Masukan akan diberikan secara *hard-coded*. Masukan tersebut diantaranya adalah nilai N , nilai L, dan banyaknya pasangan data menurut masukan N dan L. Pada kode sumber berikut ini, nilai N adalah 7, nilai L adalah 10 hingga 60, dan banyaknya pasangan data menurut masukan N dan L adalah 7. Kode sumber yang dimaksud dapat dilihat pada kode sumber 4.23

```
  int main()
1 srand (time(NULL));
2 for (int i = 10; i <= 60; i++)
3 {
4   printf ("[N = %d, L = %d]\n", 7, i);
5   generateKeypair(7, i, 7);
6 }
7
8 return 0;
```

Kode Sumber 4.23: Fungsi *Main* Program Pembuat Data Uji

4.3.3. Implementasi Fungsi Perkalian Modular

Fungsi ini merupakan implementasi desain fungsi *Logarithmic Modular Multiplication* pada subbab 3.2.5. Implementasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.24

```
   uint64 modularMultiplication (const uint64 &
       cMultiplicand, const uint64 & cMultiplier,
       const uint64 & modulus)
 1 uint64 multiplicand = cMultiplicand % modulus;
 2 uint64 multiplier = cMultiplier % modulus;
 3
 4 if ( multiplier < multiplicand )
 5 std::swap (multiplier, multiplicand);
 6
 7 uint64 result = 0;
 8
 9 while ( multiplier > 0 )
10 {
11   if ( multiplier & 1 == 1 )
12   {
13     result = (result + (multiplicand % modulus))
           % modulus;
14   }
15
16   multiplier >>= 1;
17   multiplicand = (multiplicand << 1) % modulus;
18 }
19
20 return result;
```

Kode Sumber 4.24: Fungsi *Logarithmic Modular Multiplication*

4.3.4. Implementasi Fungsi Pemangkatan Modular

Fungsi ini merupakan implementasi desain pada subbab 3.2.4. Terdapat sedikit penyederhanaan pada parameter masukan, yaitu hilangnya parameter *order*. Fungsi ini mengasumsikan *order* sebuah elemen adalah $modulo - 1$. Implementasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.25.

```
   uint64 modularExponentiation (uint64 modulo,
       uint64 generator, uint64 index)
 1 uint64 result = 1;
 2 index = index % (modulo - 1);   //  Fermat's
       little theorem
 3
 4 for (uint64 basis = generator; index > 0; index =
       index >> 1)
 5 {
 6   if (index & 1 == 1)
 7   result = modularMultiplication (result, basis,
         modulo);
 8   basis = modularMultiplication (basis, basis,
         modulo);
 9 }
10
11 return result;
```

Kode Sumber 4.25: Fungsi Pemangkatan Modular

4.3.5. Implementasi Fungsi Pengecekan Keprimaan

Fungsi ini mengikuti desain pada subbab 3.3.2. Implementasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.26 dan 4.27.

```
   bool isPrime (uint64 value)
 1 if ( value < 2 ) return false;
 2 if ( value == 2 ) return true;
 3 if ( value % 2 == 0 ) return false;
 4
 5 static uint64 primeLimit[12] = {2047, 1373653,
       25326001, 3215031751, 2152302898747,
       3474749660383, 341550071728321,
       341550071728321, 3825123056546413051,
       3825123056546413051, 3825123056546413051};
 6
 7 int limit;
```

Kode Sumber 4.26: Fungsi Pengecekan Keprimaan (bg. 1)

```
 8 for (limit = 0; limit < 12; limit++)
 9   if (value < primeLimit[limit])
10     break;
11 uint64 s = 0;
12 uint64 r = value - 1;
13 while ( (r % 2) == 0 )
14 {
15   s++;
16   r = r >> 1;
17 }
18
19 static uint64 setA[12] = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,
       19, 23, 29, 31, 37};
20
21 for (int i = 0; i < limit; i++)
22 {
23   uint64 a = setA[i];
24   uint64 y = modularExponentiation(value, a, r);
25
26   if ( (y != 1) && (y != (value - 1)) )
27   {
28     for (uint64 j = 0; j < s - 1 && y != value -
           1; j++)
29     {
30       y = modularMultiplication(y, y, value);
31       if ( y == 1 ) return false;
32     }
33     if ( y != (value-1) ) return false;
34   }
35 }
36
37 return true;
```

Kode Sumber 4.27: Fungsi Pengecekan Keprimaan (bg. 2)

4.3.6. Implementasi Fungsi Polinomial Pembuat Bilangan Prima

Fungsi ini merupakan implementasi desain pada subbab 3.3.3. Implementasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.28.

```
   uint64 primePolynomial (uint64 n)
 1 return n * n + n + 41;
```

Kode Sumber 4.28: Fungsi Polinomial Pembuat Bilangan Prima

4.3.7. Implementasi Fungsi Pembuat Data Uji

Fungsi ini merupakan implementasi desain pada subbab 3.3.4. Terdapat sedikit penyesuaian di implementasi ini, yaitu parameter masukan Hm kini merupakan variabel yang nilainya dimasukkan secara *hard-code* karena nilai ini tidak banyak berpengaruh pada proses pembuatan data uji. Selain itu, inkrementasi nilai p dilakukan dengan q untuk menjaga nilai p selalu habis dibagi dengan q. Implementasi fungsi ini dapat dilihat pada kode sumber 4.29 dan 4.30.

```
   void generateKeypair (int N, int L, int limit)
 1 uint64 Hm = 101;
 2 uint64 NLimit = 1ULL << N;
 3 uint64 LLimit = 1ULL << L;
 4 uint64 lowerNLimit = 1ULL << (N - 1);
 5 uint64 lowerLLimit = 1ULL << (L - 1);
 6 uint64 q = 0;
 7 int i = std::floor (std::pow (lowerNLimit, 0.5));
 8 for (; limit > 0 && q < NLimit; )
 9 {
10   q = primePolynomial(i++);
```

Kode Sumber 4.29: Fungsi Pembuat Data Uji (bg. 1)

```
11
12    if ( q < lowerNLimit || ! isPrime (q) )
          continue;
13
14    uint64 p = lowerLLimit;
15    for (p += q - (p % q); p < LLimit && limit > 0;
          p += q)
16    {
17      if ( ! isPrime (p + 1)) continue;
18
19      uint64 g = 1;
20      bool solved = false;
21      for (uint64 h = 2; h < q; h += 1)
22      {
23        g = modularExponentiation (p + 1, h, p / q);
24        if ( g != 1 && modularExponentiation (p +
              1, g, q) == 1 )
25        {
26          solved = true;
27          break;
28        }
29      }
30
31      if ( g == 1 || !solved ) continue;
32
33      uint64 x = 1 + rand() % (q - 1);
34      uint64 y = modularExponentiation (p + 1, g,
            x);
35
36      printf ("%d %d %llu %llu %llu %llu %llu
            [%llu]\n", N, L, q, p + 1, g, y, Hm, x);
37      limit--;
38    }
39  }
```

Kode Sumber 4.30: Fungsi Pembuat Data Uji (bg. 2)

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

BAB V
UJI COBA DAN EVALUASI

5.1. Lingkungan Uji Coba

Uji coba dilakukan pada perangkat dengan spesifikasi berikut.

1. Perangkat Keras
   (a) Processor Intel® Core™ i5-7400 CPU @ 3.00GHz (4 CPUs), 3.0GHz
   (b) Random Access Memory 8192MB
2. Perangkat Lunak
   (a) Sistem Operasi Windows 10 Pro 64-bit

5.2. Skenario Uji Coba

Subbab ini akan menjelaskan hasil pengujian program penyelesaian permasalahan. Pengujian dilakukan untuk dua metode: metode *Baby-step Giant-step* dan metode *Pollard Rho*. Ada dua metode pengujian yang akan digunakan:

1. Pengujian lokal. Pengujian ini menggunakan mesin yang digunakan dalam pengembangan untuk mengukur kebenaran dan informasi lain mengenai program.
2. Pengujian luar. Pengujian ini menggunakan Online Judge untuk mengukur kebenaran dan informasi lain mengenai program.

Pada pengujian lokal, dibutuhkan beberapa data sebagai masukan. Untuk itu program pembuat data uji akan digunakan dimana program tersebut diatur supaya menghasilkan kelompok data masukan dengan karakteristik berikut.

1. Kelompok data masukan dengan nilai N tetap. Nilai masukan lain menyesuaikan.
2. Kelompok data masukan dengan nilai L tetap. Nilai masukan lain menyesuaikan.

Untuk lebih merepresentasikan data masukan, nilai q dan p pada tiap data masukan diatur supaya berada pada rentang $2^{N-1} \leq q < 2^N$ dan $2^{L-1} \leq p < 2^L$. Data masukan didesain agar merentang sebanyak mungkin kasus uji. Pada data masukan dimana N bernilai tetap, nilai L merentang pada nilai $N + 3 \leq L \leq 60$[1]. Sedangkan pada data masukan dimana L bernilai tetap, nilai N merentang pada nilai $10 \leq N < L$. Setiap pasangan parameter (*N, L*), dibuatkan maksimal 10 kasus uji yang berbeda-beda.

5.3. Uji Coba Kebenaran

Kebenaran setiap metode diujikan dengan mengirim kode sumber terkait ke Timus Online Judge. Berikut bukti hasil pengujian.

1. Kode sumber dengan metode Pollard Rho. (Gambar 5.1)

7762635	13:35:57 16 Feb 2018	Muhammad Ghazian	1598	G++ 7.1	Time limit exceeded	23	1.029	296 KB

Gambar 5.1: Umpan Balik Online Judge Metode Pollard Rho

2. Kode sumber dengan metode Baby-step Giant-step. (Gambar 5.2)

7756064	21:14:01 11 Feb 2018	Muhammad Ghazian	1598	G++ 7.1	Accepted		0.811	20 848 KB

Gambar 5.2: Umpan Balik Online Judge Metode *Baby-Step Giant-Step*

[1]Pada praktiknya, pengujian dilakukan hanya sampai $N = 53$ karena keterbatasan sumber daya

Umpan balik yang didapat kode sumber dengan metode *Pollard Rho* adalah *Time Limit Exceeded*. Karena pengujian kebenaran metode tersebut tidak dapat dilakukan dengan pengujian luar, pengujian lokal akan digunakan. Hasil pengujian metode tersebut untuk setiap kelompok masukan dapat dilihat pada tabel 5.1 dan 5.2.

Tabel 5.1: Uji Kebenaran Metode Pollard Rho Dengan Data Masukan L Tetap

N	L	Jumlah Kasus Uji	Jumlah Benar	N	L	Jumlah Kasus Uji	Jumlah Benar
10	60	10	10	32	60	10	10
11	60	10	10	33	60	10	10
12	60	10	10	34	60	10	10
13	60	10	10	35	60	10	10
14	60	10	10	36	60	10	10
15	60	10	10	37	60	10	10
16	60	10	10	38	60	10	10
17	60	10	10	39	60	10	10
18	60	10	10	40	60	10	10
19	60	10	10	41	60	10	10
20	60	10	10	42	60	10	10
21	60	10	10	43	60	10	10
22	60	10	10	44	60	10	10
23	60	10	10	45	60	10	10
24	60	10	10	46	60	10	10
25	60	10	10	47	60	10	10
26	60	10	10	48	60	10	10
27	60	10	10	49	60	10	10
28	60	10	10	50	60	10	10
29	60	10	10	51	60	10	10
30	60	10	10	52	60	10	10
31	60	10	10	53	60	10	10

Tabel 5.2: Uji Kebenaran Pollard Rho Dengan Data Masukan N Tetap

N	L	Jumlah Kasus Uji	Jumlah Benar	N	L	Jumlah Kasus Uji	Jumlah Benar
10	13	7	7	10	37	10	10
10	14	8	8	10	38	10	10
10	15	10	10	10	39	10	10
10	16	10	10	10	40	10	10
10	17	10	10	10	41	10	10
10	18	10	10	10	42	10	10
10	19	10	10	10	43	10	10
10	20	10	10	10	44	10	10
10	21	10	10	10	45	10	10
10	22	10	10	10	46	10	10
10	23	10	10	10	47	10	10
10	24	10	10	10	48	10	10
10	25	10	10	10	49	10	10
10	26	10	10	10	50	10	10
10	27	10	10	10	51	10	10
10	28	10	10	10	52	10	10
10	29	10	10	10	53	10	10
10	30	10	10	10	54	10	10
10	31	10	10	10	55	10	10
10	32	10	10	10	56	10	10
10	33	10	10	10	57	10	10
10	34	10	10	10	58	10	10
10	35	10	10	10	59	10	10
10	36	10	10	10	60	10	10

Perhatikan bahwa di tabel 5.1 dan 5.2 nilai jumlah benar setiap kelompok masukan (yaitu pasangan N dan L) selalu sama dengan jumlah kasus uji yang digunakan. Maka dari itu, disimpulkan bahwa metode *Pollard Rho* yang digunakan memberikan hasil yang benar. Detail terkait pengujian ini dapat dilihat pada lampiran A dan lampiran B.

5.4. Uji Coba Kinerja

Subbab ini akan menjabarkan kinerja setiap metode dengan lebih mendalam. Uji coba kinerja dilakukan melalui pengujian lokal. Menggunakan kasus uji yang sama dengan kasus uji pada subbab 5.3, akan dilakukan pengukuran waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan permasalahan untuk setiap metode.

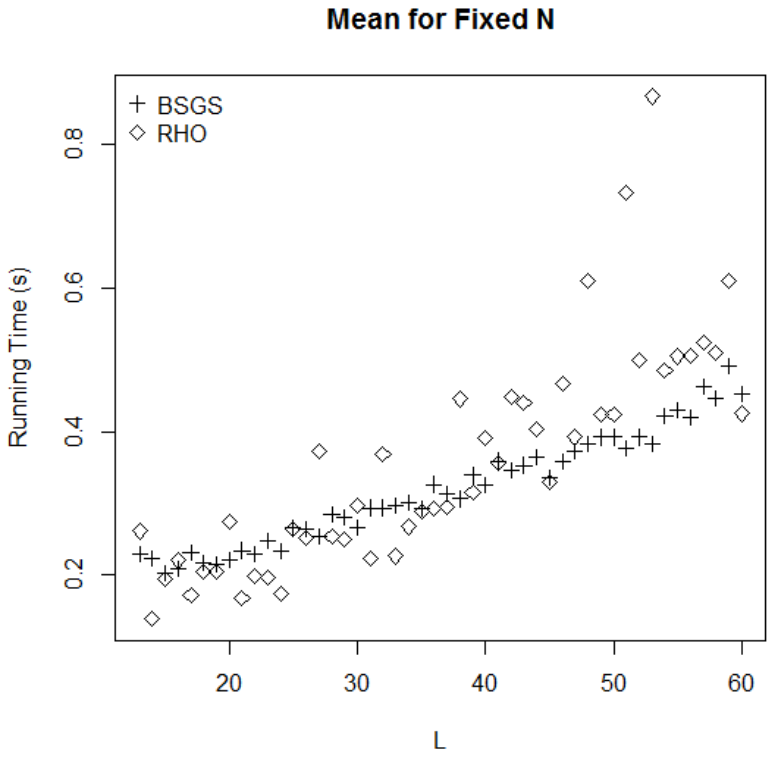
5.4.1. Pengujian Menggunakan Parameter Masukan dengan N Tetap

Pengujian menggunakan parameter masukan dengan N tetap dilakukan dengan langkah berikut.

1. Rekam waktu tepat sebelum komputasi penyelesaian masalah dilakukan.
2. Lakukan komputasi terkait penyelesaian masalah untuk sebuah masukan yang sama sebanyak 10000 kali secara berturut-turut
3. Rekam waktu tepat setelah komputasi penyelesaian masalah dilakukan.
4. Kurangi waktu saat selesai komputasi dengan waktu saat sebelum komputasi.
5. Ulangi untuk seluruh kasus uji.

Prosedur ini penting untuk dilakukan untuk memperjelas fluktuasi waktu yang dibutuhkan dalam menyelesaikan permasalahan. Keluaran prosedur ini yaitu lamanya waktu yang dibutuhkan untuk

menyelesaikan permasalahan untuk 10000 kali percobaan. Perlu diperhatikan bahwa penggunaan metode *Pollard Rho* menggunakan fungsi *pseudorandom*, sehingga beberapa percobaan dengan satu masukan yang sama menggunakan metode *Pollard Rho* sangat mungkin menghasilkan waktu yang berbeda.



Gambar 5.3: Grafik Rata-rata Kinerja Dua Metode Untuk Kelompok Masukan N Tetap

Grafik 5.3 menampilkan rata-rata kinerja masing-masing me-

tode apabila parameter masukan N bernilai tetap. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa rata-rata *running time* yang dimiliki kedua metode tidak berbeda jauh. Pada sekitar $L \geq 40$, rata-rata *running time* metode *Pollard Rho* cenderung lebih besar daripada *Baby-step Giant-step*. Selain itu, *running time* metode *Pollard Rho* pada $L \geq 40$ cenderung berpencar, kontras dengan *running time Baby-step Giant-step* yang cenderung stabil.

Pertanyaan berikutnya adalah seberapa dekat *running time* yang akan didapat antara rata-rata kinerja metode dengan *actual running time* untuk kelompok masukan tertentu. Pertanyaan ini dapat dijawab dengan grafik 5.4.

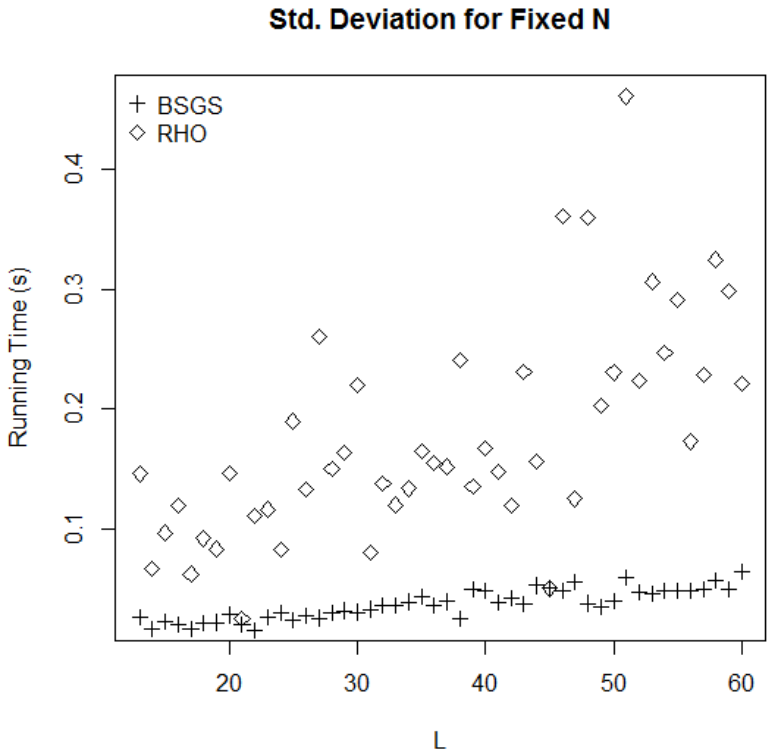
Pada grafik 5.4, standar deviasi metode *Pollard Rho* selalu berada di atas metode *Baby-step Giant-step*. Standar deviasi metode *Pollard Rho* juga relatif tinggi untuk kelompok masukan N tetap, namun masih di bawah batas atas permasalahan yaitu 1 detik. Di sisi lain, metode *Baby-step Giant-step* memiliki standar deviasi yang kecil (kurang dari 0.1 detik). Artinya, metode *Baby-step Giant-step* apabila digunakan untuk kelompok masukan N tetap akan menghasilkan *running time* yang tidak jauh dari rata-rata *running time* kelompok masukan N tersebut.

Secara umum, dampak besarnya L terhadap pertumbuhan *running time* permasalahan untuk dua metode tersebut tidak begitu besar: hingga L terbesar yang mematuhi batasan soal, rata-rata *running time* kedua metode tidak ada yang mencapai 1 detik. Selain itu, pertumbuhan fungsi rata-rata kedua metode cenderung linear.

5.4.2. Pengujian Menggunakan Parameter Masukan dengan L Tetap

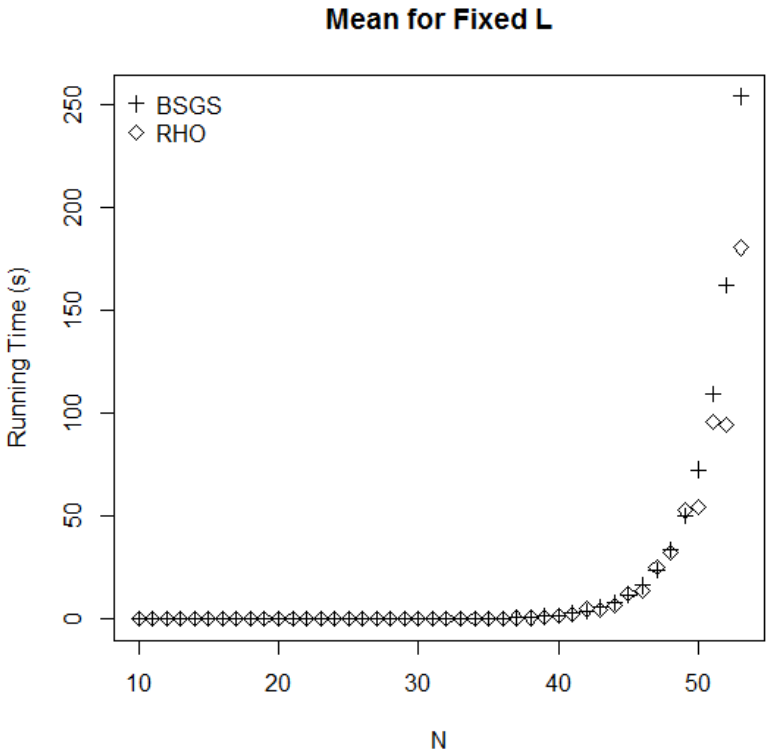
Grafik perbandingan kinerja dua metode 5.5 dan 5.6 menampilkan hasil pengujian untuk parameter masukan dengan nilai L tetap.

Grafik 5.5 menunjukkan bahwa kedua metode memiliki per-



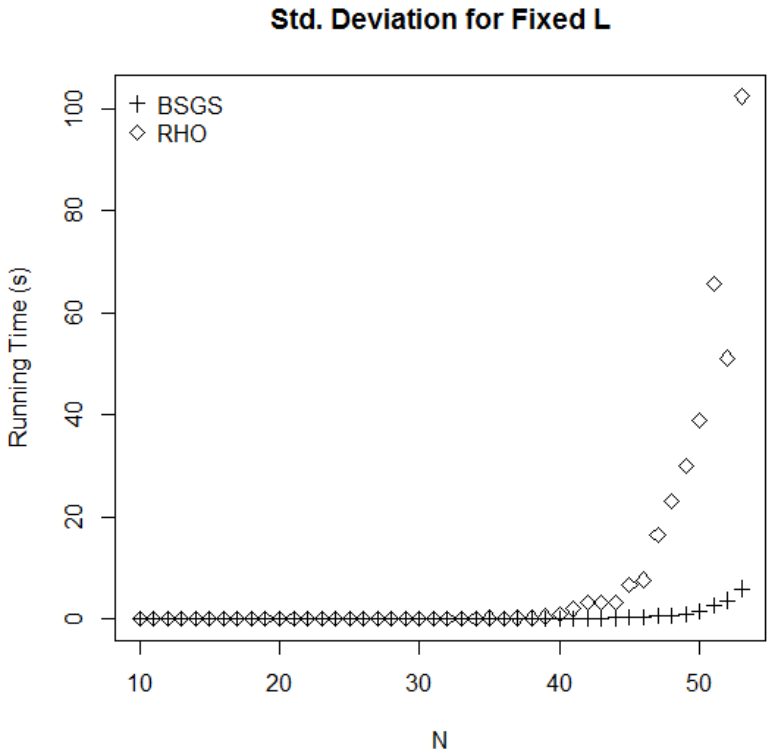
Gambar 5.4: Grafik Standar Deviasi Kinerja Dua Metode Untuk Kelompok Masukan N Tetap

tumbuhan fungsi yang relatif sama. Pada $N \geq 40$, kedua grafik mulai melonjak naik namun terdapat sedikit perbedaan di antara keduanya, yaitu metode rata-rata *running time Pollard Rho* lebih kecil daripada *Baby-step Giant-step*. Berikutnya, grafik 5.6 akan menjelaskan mengenai standar deviasi kedua metode untuk kelompok masukan L tetap.



Gambar 5.5: Grafik Rata-rata Kinerja Dua Metode Untuk Kelompok Masukan L Tetap

Berdasarkan grafik 5.6, pertumbuhan standar deviasi metode *Pollard Rho* lebih besar dibanding metode *Baby-step Giant-step*. Hal ini dapat dilihat pada $N \geq 40$.



Gambar 5.6: Grafik Standar Deviasi Kinerja Dua Metode Untuk Kelompok Masukan L Tetap

5.4.3. Analisis Uji Kinerja

Dari pengujian kinerja, terdapat kesamaan antara metode *Baby-step Giant-step* dan *Pollard Rho* terlepas dari jenis masukan yang digunakan.

1. Rata-rata kinerja metode *Baby-step Giant-step* dan *Pollard Rho* relatif sama.

2. Standar deviasi metode *Pollard Rho* cenderung lebih tinggi daripada *Baby-step Giant-step*.
3. Fungsi pertumbuhan standar deviasi suatu metode sama dengan fungsi pertumbuhan rata-rata metode tersebut.

Poin yang perlu disoroti adalah pada standar deviasi kedua metode. Hasil pengujian menjabarkan bahwa standar deviasi metode Pollard Rho memiliki tren lebih besar dibandingkan Baby-step Giant-step. Hal ini menunjukkan bahwa metode Pollard Rho relatif tidak stabil: pada satu kasus, *running time* yang dibutuhkan sangat kecil, namun di waktu lain, *running time* yang dibutuhkan bisa sangat tinggi.

Selain itu berdasarkan uji kinerja dapat ditarik beberapa kesimpulan terkait waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan permasalahan.

1. Penyelesaian permasalahan dengan *Baby-step Giant-step* akan membutuhkan waktu yang mendekati rata-rata *running time* metode tersebut.
2. Penyelesaian permasalahan dengan *Pollard Rho* dapat berjalan jauh lebih cepat atau jauh lebih lambat dari rata-rata *running time* metode tersebut.
3. Besarnya L memiliki pengaruh yang tidak begitu signifikan terhadap lamanya waktu penyelesaian.
4. Besarnya N memiliki pengaruh yang signifikan terhadap lama waktu penyelesaian.

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

BAB VI
KESIMPULAN

Berdasarkan penjabaran di bab-bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa poin terkait penyelesaian permasalahan DSA Attack.

1. Permasalahan pembuatan *signature* menggunakan kunci publik tanpa mengetahui kunci privat dapat diselesaikan menggunakan *Baby-step Giant-step*, perkalian modular dengan *Logarithmic Modular Multiplication*, pemangkatan modular dengan *Repeated Squaring*, dan pencarian invers modulus dengan *Extended Euclidean* dengan kompleksitas waktu sebesar $O(\sqrt{q}\log p) + O(\log k * \log p) + O(\log k + \log p)$.
2. Metode *Pollard Rho* kurang cocok digunakan sebagai solusi penyelesaian permasalahan DSA Attack karena kemungkinan waktu yang dibutuhkan bisa sangat tinggi.
3. Penyelesaian permasalahan dengan *Baby-step Giant-step* akan membutuhkan waktu yang mendekati rata-rata *running time* yang dimiliki metode tersebut.

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

DAFTAR PUSTAKA

[1] W. Stallings, *Cryptography and Network Security Principles and Practice*, 5th ed. 2011, ch. 4.

[2] S. Goldwasser, S. Micali, and R. L. Rivest, "A Digital Signature Scheme Secure Against Adaptive Chosen-Message Attacks", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 17, no. 2, 1988. [Online]. Available: https://people.csail.mit.edu/silvio/Selected%20Scientific%20Papers/Digital%20Signatures/A_Digital_Signature_Scheme_Secure_Against_Adaptive_Chosen-Message_Attack.pdf.

[3] A. Menezes, P. van Oorschot, and S. Vanstone, "Number Theoretic Reference Problems", in *Handbook of Applied Cryptography*. CRC Press, 1996, ch. 3. [Online]. Available: http://cacr.uwaterloo.ca/hac/about/chap3.pdf.

[4] R. P. Brent, "An improved Monte Carlo factorization algorithm", *BIT Numerical Mathematics*, vol. 20, pp. 176–184, 2. [Online]. Available: http://maths-people.anu.edu.au/~brent/pd/rpb051i.pdf.

[5] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithm*, 3rd ed. 2009, ch. 31.

[6] M. B, A. Shikarkhane, S. Khan, I. Singh, P. Biswas, J. X. Salvat, C. Lin, M. Li, A. Kau, E. Ross, and J. Khim. (n.d.). Bezout's Identity, [Online]. Available: https://brilliant.org/wiki/bezouts-identity/.

[7] A. Menezes, P. van Oorschot, and S. Vanstone, "Mathematical Background", in *Handbook of Applied Cryptography*. CRC Press, 1996, ch. 2. [Online]. Available: http://cacr.uwaterloo.ca/hac/about/chap2.pdf.

[8] H. Niederreiter and A. Winterhof, *Applied Number Theory*. 2015, ISBN: 978-3-319-22321-6. DOI: 10.1007/978-3-319-22321-6.

[9] G. F. Geeks. (2018). How to avoid overflow in modular multiplication?, [Online]. Available: https://www.geeksforgeeks.org/how-to-avoid-overflow-in-modular-multiplication/.

[10] A. Menezes, P. van Oorschot, and S. Vanstone, "Public Key Parameters", in *Handbook of Applied Cryptography*. CRC Press, 1996, ch. 4. [Online]. Available: http://cacr.uwaterloo.ca/hac/about/chap4.pdf.

[11] OEIS. (2015). Smallest odd number for which Miller-Rabin primality test on bases <= n-th prime does not reveal compositeness. version 51, [Online]. Available: https://oeis.org/A014233.

[12] E. W. Weisstein. (n.d.). Prime-Generating Polynomial, [Online]. Available: http://mathworld.wolfram.com/Prime-GeneratingPolynomial.html.

LAMPIRAN A: Hasil Pengujian Untuk Kelompok N Tetap

Tabel A.1: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 1)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
1	333	99	PASS	333	99	PASS
2	178	199	PASS	178	199	PASS
3	111	406	PASS	111	406	PASS
4	684	631	PASS	684	631	PASS
5	212	33	PASS	212	33	PASS
6	256	760	PASS	256	760	PASS
7	997	392	PASS	997	392	PASS
8	397	393	PASS	397	393	PASS
9	486	323	PASS	486	323	PASS
10	477	469	PASS	477	469	PASS
11	38	479	PASS	38	479	PASS
12	132	350	PASS	132	350	PASS
13	134	781	PASS	134	781	PASS
14	638	169	PASS	638	169	PASS
15	1013	865	PASS	1013	865	PASS
16	517	159	PASS	517	159	PASS
17	200	502	PASS	200	502	PASS
18	157	159	PASS	157	159	PASS
19	241	272	PASS	241	272	PASS
20	111	11	PASS	111	11	PASS
21	466	285	PASS	466	285	PASS
22	142	633	PASS	142	633	PASS
23	580	394	PASS	580	394	PASS
24	344	368	PASS	344	368	PASS
25	179	149	PASS	179	149	PASS

Tabel A.2: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 2)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
26	476	152	PASS	476	152	PASS
27	68	140	PASS	68	140	PASS
28	372	351	PASS	372	351	PASS
29	195	371	PASS	195	371	PASS
30	535	532	PASS	535	532	PASS
31	485	437	PASS	485	437	PASS
32	122	573	PASS	122	573	PASS
33	590	508	PASS	590	508	PASS
34	58	389	PASS	58	389	PASS
35	194	189	PASS	194	189	PASS
36	69	20	PASS	69	20	PASS
37	277	423	PASS	277	423	PASS
38	463	8	PASS	463	8	PASS
39	126	249	PASS	126	249	PASS
40	253	360	PASS	253	360	PASS
41	121	249	PASS	121	249	PASS
42	203	283	PASS	203	283	PASS
43	126	356	PASS	126	356	PASS
44	470	385	PASS	470	385	PASS
45	36	568	PASS	36	568	PASS
46	433	494	PASS	433	494	PASS
47	107	546	PASS	107	546	PASS
48	395	509	PASS	395	509	PASS
49	37	224	PASS	37	224	PASS
50	125	75	PASS	125	75	PASS

Tabel A.3: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 3)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
51	321	118	PASS	321	118	PASS
52	128	214	PASS	128	214	PASS
53	32	542	PASS	32	542	PASS
54	165	305	PASS	165	305	PASS
55	224	228	PASS	224	228	PASS
56	132	51	PASS	132	51	PASS
57	284	14	PASS	284	14	PASS
58	250	352	PASS	250	352	PASS
59	165	363	PASS	165	363	PASS
60	488	464	PASS	488	464	PASS
61	56	312	PASS	56	312	PASS
62	469	98	PASS	469	98	PASS
63	415	359	PASS	415	359	PASS
64	546	173	PASS	546	173	PASS
65	480	534	PASS	480	534	PASS
66	415	257	PASS	415	257	PASS
67	144	267	PASS	144	267	PASS
68	500	434	PASS	500	434	PASS
69	336	235	PASS	336	235	PASS
70	281	68	PASS	281	68	PASS
71	293	88	PASS	293	88	PASS
72	500	539	PASS	500	539	PASS
73	264	510	PASS	264	510	PASS
74	534	253	PASS	534	253	PASS
75	457	501	PASS	457	501	PASS

Tabel A.4: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 4)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
76	465	253	PASS	465	253	PASS
77	226	365	PASS	226	365	PASS
78	467	62	PASS	467	62	PASS
79	421	276	PASS	421	276	PASS
80	284	127	PASS	284	127	PASS
81	340	419	PASS	340	419	PASS
82	256	216	PASS	256	216	PASS
83	325	89	PASS	325	89	PASS
84	446	243	PASS	446	243	PASS
85	332	427	PASS	332	427	PASS
86	355	290	PASS	355	290	PASS
87	170	119	PASS	170	119	PASS
88	521	29	PASS	521	29	PASS
89	299	484	PASS	299	484	PASS
90	37	274	PASS	37	274	PASS
91	485	504	PASS	485	504	PASS
92	204	392	PASS	204	392	PASS
93	476	466	PASS	476	466	PASS
94	291	546	PASS	291	546	PASS
95	302	318	PASS	302	318	PASS
96	357	190	PASS	357	190	PASS
97	180	385	PASS	180	385	PASS
98	102	301	PASS	102	301	PASS
99	429	124	PASS	429	124	PASS
100	430	402	PASS	430	402	PASS

Tabel A.5: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 5)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
101	156	537	PASS	156	537	PASS
102	5	239	PASS	5	239	PASS
103	260	379	PASS	260	379	PASS
104	38	459	PASS	38	459	PASS
105	33	447	PASS	33	447	PASS
106	473	105	PASS	473	105	PASS
107	198	327	PASS	198	327	PASS
108	264	123	PASS	264	123	PASS
109	22	247	PASS	22	247	PASS
110	364	168	PASS	364	168	PASS
111	319	494	PASS	319	494	PASS
112	131	30	PASS	131	30	PASS
113	281	45	PASS	281	45	PASS
114	34	297	PASS	34	297	PASS
115	102	15	PASS	102	15	PASS
116	86	151	PASS	86	151	PASS
117	289	463	PASS	289	463	PASS
118	543	473	PASS	543	473	PASS
119	225	531	PASS	225	531	PASS
120	240	174	PASS	240	174	PASS
121	140	99	PASS	140	99	PASS
122	57	323	PASS	57	323	PASS
123	65	46	PASS	65	46	PASS
124	528	302	PASS	528	302	PASS
125	77	356	PASS	77	356	PASS

Tabel A.6: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 6)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
126	158	241	PASS	158	241	PASS
127	76	231	PASS	76	231	PASS
128	179	181	PASS	179	181	PASS
129	522	114	PASS	522	114	PASS
130	247	272	PASS	247	272	PASS
131	428	189	PASS	428	189	PASS
132	381	52	PASS	381	52	PASS
133	121	144	PASS	121	144	PASS
134	267	167	PASS	267	167	PASS
135	428	114	PASS	428	114	PASS
136	228	281	PASS	228	281	PASS
137	351	126	PASS	351	126	PASS
138	151	535	PASS	151	535	PASS
139	523	432	PASS	523	432	PASS
140	262	538	PASS	262	538	PASS
141	46	501	PASS	46	501	PASS
142	448	489	PASS	448	489	PASS
143	18	186	PASS	18	186	PASS
144	416	118	PASS	416	118	PASS
145	412	198	PASS	412	198	PASS
146	382	397	PASS	382	397	PASS
147	107	429	PASS	107	429	PASS
148	242	215	PASS	242	215	PASS
149	238	126	PASS	238	126	PASS
150	299	349	PASS	299	349	PASS

Tabel A.7: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 7)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
151	221	345	PASS	221	345	PASS
152	306	26	PASS	306	26	PASS
153	510	374	PASS	510	374	PASS
154	266	163	PASS	266	163	PASS
155	376	229	PASS	376	229	PASS
156	423	401	PASS	423	401	PASS
157	11	221	PASS	11	221	PASS
158	18	22	PASS	18	22	PASS
159	353	334	PASS	353	334	PASS
160	69	46	PASS	69	46	PASS
161	373	418	PASS	373	418	PASS
162	105	478	PASS	105	478	PASS
163	382	21	PASS	382	21	PASS
164	119	529	PASS	119	529	PASS
165	348	448	PASS	348	448	PASS
166	296	84	PASS	296	84	PASS
167	493	72	PASS	493	72	PASS
168	74	287	PASS	74	287	PASS
169	349	423	PASS	349	423	PASS
170	399	427	PASS	399	427	PASS
171	538	187	PASS	538	187	PASS
172	110	349	PASS	110	349	PASS
173	359	105	PASS	359	105	PASS
174	176	187	PASS	176	187	PASS
175	335	208	PASS	335	208	PASS

Tabel A.8: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 8)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
176	212	469	PASS	212	469	PASS
177	439	516	PASS	439	516	PASS
178	237	394	PASS	237	394	PASS
179	239	303	PASS	239	303	PASS
180	279	323	PASS	279	323	PASS
181	327	135	PASS	327	135	PASS
182	282	163	PASS	282	163	PASS
183	503	306	PASS	503	306	PASS
184	387	362	PASS	387	362	PASS
185	543	284	PASS	543	284	PASS
186	247	182	PASS	247	182	PASS
187	141	342	PASS	141	342	PASS
188	231	38	PASS	231	38	PASS
189	244	91	PASS	244	91	PASS
190	80	422	PASS	80	422	PASS
191	189	71	PASS	189	71	PASS
192	426	427	PASS	426	427	PASS
193	357	172	PASS	357	172	PASS
194	526	43	PASS	526	43	PASS
195	492	483	PASS	492	483	PASS
196	137	23	PASS	137	23	PASS
197	528	91	PASS	528	91	PASS
198	216	492	PASS	216	492	PASS
199	360	147	PASS	360	147	PASS
200	309	96	PASS	309	96	PASS

Tabel A.9: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 9)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
201	526	311	PASS	526	311	PASS
202	431	287	PASS	431	287	PASS
203	307	323	PASS	307	323	PASS
204	390	90	PASS	390	90	PASS
205	333	186	PASS	333	186	PASS
206	207	365	PASS	207	365	PASS
207	71	437	PASS	71	437	PASS
208	243	246	PASS	243	246	PASS
209	6	189	PASS	6	189	PASS
210	470	314	PASS	470	314	PASS
211	53	417	PASS	53	417	PASS
212	162	535	PASS	162	535	PASS
213	529	266	PASS	529	266	PASS
214	426	484	PASS	426	484	PASS
215	490	69	PASS	490	69	PASS
216	502	251	PASS	502	251	PASS
217	129	16	PASS	129	16	PASS
218	121	519	PASS	121	519	PASS
219	154	173	PASS	154	173	PASS
220	74	452	PASS	74	452	PASS
221	395	464	PASS	395	464	PASS
222	450	56	PASS	450	56	PASS
223	52	207	PASS	52	207	PASS
224	168	153	PASS	168	153	PASS
225	363	244	PASS	363	244	PASS

Tabel A.10: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 10)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
226	441	454	PASS	441	454	PASS
227	163	376	PASS	163	376	PASS
228	237	109	PASS	237	109	PASS
229	493	84	PASS	493	84	PASS
230	118	149	PASS	118	149	PASS
231	252	8	PASS	252	8	PASS
232	346	340	PASS	346	340	PASS
233	304	389	PASS	304	389	PASS
234	320	266	PASS	320	266	PASS
235	334	432	PASS	334	432	PASS
236	404	135	PASS	404	135	PASS
237	29	217	PASS	29	217	PASS
238	346	64	PASS	346	64	PASS
239	523	431	PASS	523	431	PASS
240	192	140	PASS	192	140	PASS
241	90	256	PASS	90	256	PASS
242	139	442	PASS	139	442	PASS
243	219	443	PASS	219	443	PASS
244	522	148	PASS	522	148	PASS
245	341	524	PASS	341	524	PASS
246	296	249	PASS	296	249	PASS
247	472	271	PASS	472	271	PASS
248	417	419	PASS	417	419	PASS
249	179	473	PASS	179	473	PASS
250	178	129	PASS	178	129	PASS

Tabel A.11: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 11)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
251	327	129	PASS	327	129	PASS
252	243	361	PASS	243	361	PASS
253	543	204	PASS	543	204	PASS
254	207	215	PASS	207	215	PASS
255	61	24	PASS	61	24	PASS
256	503	20	PASS	503	20	PASS
257	356	543	PASS	356	543	PASS
258	461	195	PASS	461	195	PASS
259	542	497	PASS	542	497	PASS
260	531	148	PASS	531	148	PASS
261	515	244	PASS	515	244	PASS
262	191	380	PASS	191	380	PASS
263	124	117	PASS	124	117	PASS
264	431	238	PASS	431	238	PASS
265	508	54	PASS	508	54	PASS
266	114	335	PASS	114	335	PASS
267	210	387	PASS	210	387	PASS
268	30	487	PASS	30	487	PASS
269	13	61	PASS	13	61	PASS
270	323	177	PASS	323	177	PASS
271	229	527	PASS	229	527	PASS
272	67	188	PASS	67	188	PASS
273	511	178	PASS	511	178	PASS
274	360	292	PASS	360	292	PASS
275	424	186	PASS	424	186	PASS

Tabel A.12: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 12)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
276	198	291	PASS	198	291	PASS
277	332	121	PASS	332	121	PASS
278	249	76	PASS	249	76	PASS
279	525	61	PASS	525	61	PASS
280	230	447	PASS	230	447	PASS
281	119	498	PASS	119	498	PASS
282	479	251	PASS	479	251	PASS
283	532	220	PASS	532	220	PASS
284	349	164	PASS	349	164	PASS
285	492	173	PASS	492	173	PASS
286	207	79	PASS	207	79	PASS
287	514	315	PASS	514	315	PASS
288	351	540	PASS	351	540	PASS
289	344	249	PASS	344	249	PASS
290	309	264	PASS	309	264	PASS
291	246	427	PASS	246	427	PASS
292	280	30	PASS	280	30	PASS
293	75	477	PASS	75	477	PASS
294	436	372	PASS	436	372	PASS
295	300	304	PASS	300	304	PASS
296	501	102	PASS	501	102	PASS
297	273	275	PASS	273	275	PASS
298	269	103	PASS	269	103	PASS
299	514	65	PASS	514	65	PASS
300	419	195	PASS	419	195	PASS

Tabel A.13: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 13)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
301	541	478	PASS	541	478	PASS
302	112	237	PASS	112	237	PASS
303	38	59	PASS	38	59	PASS
304	518	101	PASS	518	101	PASS
305	48	421	PASS	48	421	PASS
306	97	339	PASS	97	339	PASS
307	117	275	PASS	117	275	PASS
308	535	220	PASS	535	220	PASS
309	266	136	PASS	266	136	PASS
310	159	391	PASS	159	391	PASS
311	391	144	PASS	391	144	PASS
312	55	458	PASS	55	458	PASS
313	209	218	PASS	209	218	PASS
314	482	50	PASS	482	50	PASS
315	544	237	PASS	544	237	PASS
316	39	92	PASS	39	92	PASS
317	346	472	PASS	346	472	PASS
318	268	178	PASS	268	178	PASS
319	251	293	PASS	251	293	PASS
320	424	311	PASS	424	311	PASS
321	304	468	PASS	304	468	PASS
322	62	539	PASS	62	539	PASS
323	231	546	PASS	231	546	PASS
324	93	227	PASS	93	227	PASS
325	176	193	PASS	176	193	PASS

Tabel A.14: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 14)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
326	137	291	PASS	137	291	PASS
327	479	51	PASS	479	51	PASS
328	446	86	PASS	446	86	PASS
329	315	100	PASS	315	100	PASS
330	100	536	PASS	100	536	PASS
331	88	150	PASS	88	150	PASS
332	438	346	PASS	438	346	PASS
333	505	13	PASS	505	13	PASS
334	190	189	PASS	190	189	PASS
335	278	43	PASS	278	43	PASS
336	175	76	PASS	175	76	PASS
337	381	537	PASS	381	537	PASS
338	292	216	PASS	292	216	PASS
339	401	428	PASS	401	428	PASS
340	407	1	PASS	407	1	PASS
341	433	493	PASS	433	493	PASS
342	476	56	PASS	476	56	PASS
343	481	406	PASS	481	406	PASS
344	44	36	PASS	44	36	PASS
345	430	224	PASS	430	224	PASS
346	17	483	PASS	17	483	PASS
347	304	469	PASS	304	469	PASS
348	437	3	PASS	437	3	PASS
349	256	170	PASS	256	170	PASS
350	283	145	PASS	283	145	PASS

Tabel A.15: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 15)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
351	499	143	PASS	499	143	PASS
352	90	71	PASS	90	71	PASS
353	46	118	PASS	46	118	PASS
354	23	143	PASS	23	143	PASS
355	268	531	PASS	268	531	PASS
356	534	310	PASS	534	310	PASS
357	443	244	PASS	443	244	PASS
358	20	55	PASS	20	55	PASS
359	477	333	PASS	477	333	PASS
360	151	355	PASS	151	355	PASS
361	256	59	PASS	256	59	PASS
362	241	235	PASS	241	235	PASS
363	268	70	PASS	268	70	PASS
364	536	50	PASS	536	50	PASS
365	430	208	PASS	430	208	PASS
366	332	303	PASS	332	303	PASS
367	204	42	PASS	204	42	PASS
368	537	278	PASS	537	278	PASS
369	233	399	PASS	233	399	PASS
370	178	377	PASS	178	377	PASS
371	196	297	PASS	196	297	PASS
372	148	237	PASS	148	237	PASS
373	421	450	PASS	421	450	PASS
374	472	449	PASS	472	449	PASS
375	286	140	PASS	286	140	PASS

Tabel A.16: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 16)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
376	237	138	PASS	237	138	PASS
377	133	397	PASS	133	397	PASS
378	37	405	PASS	37	405	PASS
379	209	176	PASS	209	176	PASS
380	348	123	PASS	348	123	PASS
381	309	374	PASS	309	374	PASS
382	314	444	PASS	314	444	PASS
383	492	226	PASS	492	226	PASS
384	505	297	PASS	505	297	PASS
385	149	153	PASS	149	153	PASS
386	211	480	PASS	211	480	PASS
387	446	481	PASS	446	481	PASS
388	133	292	PASS	133	292	PASS
389	349	67	PASS	349	67	PASS
390	234	345	PASS	234	345	PASS
391	183	376	PASS	183	376	PASS
392	527	496	PASS	527	496	PASS
393	244	213	PASS	244	213	PASS
394	435	395	PASS	435	395	PASS
395	197	218	PASS	197	218	PASS
396	398	412	PASS	398	412	PASS
397	97	85	PASS	97	85	PASS
398	470	494	PASS	470	494	PASS
399	77	23	PASS	77	23	PASS
400	338	468	PASS	338	468	PASS

Tabel A.17: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 17)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
401	478	34	PASS	478	34	PASS
402	412	86	PASS	412	86	PASS
403	163	202	PASS	163	202	PASS
404	469	9	PASS	469	9	PASS
405	301	126	PASS	301	126	PASS
406	33	408	PASS	33	408	PASS
407	70	35	PASS	70	35	PASS
408	176	363	PASS	176	363	PASS
409	312	496	PASS	312	496	PASS
410	249	215	PASS	249	215	PASS
411	173	172	PASS	173	172	PASS
412	204	5	PASS	204	5	PASS
413	165	358	PASS	165	358	PASS
414	180	192	PASS	180	192	PASS
415	495	481	PASS	495	481	PASS
416	38	357	PASS	38	357	PASS
417	250	525	PASS	250	525	PASS
418	237	358	PASS	237	358	PASS
419	257	286	PASS	257	286	PASS
420	98	196	PASS	98	196	PASS
421	244	267	PASS	244	267	PASS
422	458	482	PASS	458	482	PASS
423	348	6	PASS	348	6	PASS
424	334	182	PASS	334	182	PASS
425	265	262	PASS	265	262	PASS

Tabel A.18: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 18)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
426	313	197	PASS	313	197	PASS
427	516	243	PASS	516	243	PASS
428	54	137	PASS	54	137	PASS
429	253	76	PASS	253	76	PASS
430	492	531	PASS	492	531	PASS
431	235	379	PASS	235	379	PASS
432	1	113	PASS	1	113	PASS
433	353	31	PASS	353	31	PASS
434	73	537	PASS	73	537	PASS
435	242	135	PASS	242	135	PASS
436	131	332	PASS	131	332	PASS
437	190	340	PASS	190	340	PASS
438	155	238	PASS	155	238	PASS
439	243	277	PASS	243	277	PASS
440	11	224	PASS	11	224	PASS
441	143	100	PASS	143	100	PASS
442	414	541	PASS	414	541	PASS
443	421	177	PASS	421	177	PASS
444	376	534	PASS	376	534	PASS
445	35	393	PASS	35	393	PASS
446	148	331	PASS	148	331	PASS
447	273	48	PASS	273	48	PASS
448	194	433	PASS	194	433	PASS
449	155	465	PASS	155	465	PASS
450	82	311	PASS	82	311	PASS

Tabel A.19: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 19)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
451	186	505	PASS	186	505	PASS
452	35	394	PASS	35	394	PASS
453	75	3	PASS	75	3	PASS
454	308	150	PASS	308	150	PASS
455	382	413	PASS	382	413	PASS
456	372	287	PASS	372	287	PASS
457	419	110	PASS	419	110	PASS
458	469	48	PASS	469	48	PASS
459	538	49	PASS	538	49	PASS
460	224	107	PASS	224	107	PASS
461	104	277	PASS	104	277	PASS
462	513	198	PASS	513	198	PASS
463	378	294	PASS	378	294	PASS
464	257	156	PASS	257	156	PASS
465	222	363	PASS	222	363	PASS
466	109	471	PASS	109	471	PASS
467	51	511	PASS	51	511	PASS
468	478	228	PASS	478	228	PASS
469	248	469	PASS	248	469	PASS
470	6	314	PASS	6	314	PASS
471	198	369	PASS	198	369	PASS
472	240	108	PASS	240	108	PASS
473	228	68	PASS	228	68	PASS
474	149	394	PASS	149	394	PASS
475	25	378	PASS	25	378	PASS

[*Halaman ini sengaja dikosongkan*]

LAMPIRAN B: Hasil Pengujian Untuk Kelompok L Tetap

Tabel B.1: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 1)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
1	109	541	PASS	109	541	PASS
2	51	285	PASS	51	285	PASS
3	478	376	PASS	478	376	PASS
4	248	195	PASS	248	195	PASS
5	6	24	PASS	6	24	PASS
6	198	129	PASS	198	129	PASS
7	240	494	PASS	240	494	PASS
8	228	39	PASS	228	39	PASS
9	149	202	PASS	149	202	PASS
10	25	465	PASS	25	465	PASS
11	1002	338	PASS	1002	338	PASS
12	830	980	PASS	830	980	PASS
13	699	693	PASS	699	693	PASS
14	573	853	PASS	573	853	PASS
15	202	461	PASS	202	461	PASS
16	960	72	PASS	960	72	PASS
17	237	724	PASS	237	724	PASS
18	528	718	PASS	528	718	PASS
19	675	78	PASS	675	78	PASS
20	170	692	PASS	170	692	PASS
21	1353	1607	PASS	1353	1607	PASS
22	950	1134	PASS	950	1134	PASS
23	1269	1820	PASS	1269	1820	PASS
24	858	753	PASS	858	753	PASS
25	1512	2014	PASS	1512	2014	PASS

Tabel B.2: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 2)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
26	1327	698	PASS	1327	698	PASS
27	663	1144	PASS	663	1144	PASS
28	1706	77	PASS	1706	77	PASS
29	1332	2083	PASS	1332	2083	PASS
30	1012	1057	PASS	1012	1057	PASS
31	498	2767	PASS	498	2767	PASS
32	1068	3418	PASS	1068	3418	PASS
33	3613	238	PASS	3613	238	PASS
34	759	3252	PASS	759	3252	PASS
35	1115	1580	PASS	1115	1580	PASS
36	379	137	PASS	379	137	PASS
37	528	576	PASS	528	576	PASS
38	3506	2935	PASS	3506	2935	PASS
39	3508	3113	PASS	3508	3113	PASS
40	3653	735	PASS	3653	735	PASS
41	5898	2012	PASS	5898	2012	PASS
42	5251	7545	PASS	5251	7545	PASS
43	4692	4724	PASS	4692	4724	PASS
44	4712	3848	PASS	4712	3848	PASS
45	2630	1695	PASS	2630	1695	PASS
46	2285	8031	PASS	2285	8031	PASS
47	3800	5225	PASS	3800	5225	PASS
48	1213	515	PASS	1213	515	PASS
49	4767	4156	PASS	4767	4156	PASS
50	1256	106	PASS	1256	106	PASS

Tabel B.3: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 3)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
51	3938	2324	PASS	3938	2324	PASS
52	10688	13518	PASS	10688	13518	PASS
53	2518	3102	PASS	2518	3102	PASS
54	7213	4570	PASS	7213	4570	PASS
55	11443	4971	PASS	11443	4971	PASS
56	14736	8664	PASS	14736	8664	PASS
57	616	9672	PASS	616	9672	PASS
58	13610	15765	PASS	13610	15765	PASS
59	9148	2658	PASS	9148	2658	PASS
60	10354	10865	PASS	10354	10865	PASS
61	32865	21567	PASS	32865	21567	PASS
62	17371	17041	PASS	17371	17041	PASS
63	17091	13632	PASS	17091	13632	PASS
64	24894	21677	PASS	24894	21677	PASS
65	24134	26932	PASS	24134	26932	PASS
66	7464	24248	PASS	7464	24248	PASS
67	24418	25151	PASS	24418	25151	PASS
68	8520	18746	PASS	8520	18746	PASS
69	18946	494	PASS	18946	494	PASS
70	20082	14747	PASS	20082	14747	PASS
71	40041	38151	PASS	40041	38151	PASS
72	28665	53134	PASS	28665	53134	PASS
73	56242	21508	PASS	56242	21508	PASS
74	55689	53756	PASS	55689	53756	PASS
75	42511	30448	PASS	42511	30448	PASS

Tabel B.4: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 4)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
76	56416	22516	PASS	56416	22516	PASS
77	20370	65537	PASS	20370	65537	PASS
78	37776	12030	PASS	37776	12030	PASS
79	5151	58176	PASS	5151	58176	PASS
80	27415	53192	PASS	27415	53192	PASS
81	117815	49879	PASS	117815	49879	PASS
82	38977	110802	PASS	38977	110802	PASS
83	95404	13712	PASS	95404	13712	PASS
84	114494	83109	PASS	114494	83109	PASS
85	98695	81235	PASS	98695	81235	PASS
86	121234	59371	PASS	121234	59371	PASS
87	25906	35431	PASS	25906	35431	PASS
88	103773	98744	PASS	103773	98744	PASS
89	98369	18734	PASS	98369	18734	PASS
90	62918	53945	PASS	62918	53945	PASS
91	81121	26175	PASS	81121	26175	PASS
92	81955	140985	PASS	81955	140985	PASS
93	255369	115304	PASS	255369	115304	PASS
94	78800	228116	PASS	78800	228116	PASS
95	114674	72778	PASS	114674	72778	PASS
96	88285	221843	PASS	88285	221843	PASS
97	176452	119326	PASS	176452	119326	PASS
98	84677	223315	PASS	84677	223315	PASS
99	93932	145509	PASS	93932	145509	PASS
100	80916	113876	PASS	80916	113876	PASS

Tabel B.5: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 5)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
101	47615	208662	PASS	47615	208662	PASS
102	361854	311289	PASS	361854	311289	PASS
103	285727	25936	PASS	285727	25936	PASS
104	368670	422121	PASS	368670	422121	PASS
105	196251	305328	PASS	196251	305328	PASS
106	9185	506580	PASS	9185	506580	PASS
107	245546	475206	PASS	245546	475206	PASS
108	197716	440801	PASS	197716	440801	PASS
109	200244	65539	PASS	200244	65539	PASS
110	58109	517360	PASS	58109	517360	PASS
111	22883	39374	PASS	22883	39374	PASS
112	855435	292024	PASS	855435	292024	PASS
113	607155	1010677	PASS	607155	1010677	PASS
114	365780	631057	PASS	365780	631057	PASS
115	522342	622348	PASS	522342	622348	PASS
116	1575	12061	PASS	1575	12061	PASS
117	765335	378131	PASS	765335	378131	PASS
118	700212	769390	PASS	700212	769390	PASS
119	771756	395187	PASS	771756	395187	PASS
120	520374	272742	PASS	520374	272742	PASS
121	2084454	1519736	PASS	2084454	1519736	PASS
122	1572832	1513382	PASS	1572832	1513382	PASS
123	628681	708786	PASS	628681	708786	PASS
124	1261487	1325647	PASS	1261487	1325647	PASS
125	1882434	1389074	PASS	1882434	1389074	PASS

Tabel B.6: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 6)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
126	288467	424841	PASS	288467	424841	PASS
127	374224	1331802	PASS	374224	1331802	PASS
128	23660	240233	PASS	23660	240233	PASS
129	1315830	283350	PASS	1315830	283350	PASS
130	1101837	1977372	PASS	1101837	1977372	PASS
131	1680879	3842373	PASS	1680879	3842373	PASS
132	3952542	4102497	PASS	3952542	4102497	PASS
133	3566820	1922644	PASS	3566820	1922644	PASS
134	76137	3331004	PASS	76137	3331004	PASS
135	445444	4015249	PASS	445444	4015249	PASS
136	3056421	3596924	PASS	3056421	3596924	PASS
137	3845065	3080891	PASS	3845065	3080891	PASS
138	2287024	369263	PASS	2287024	369263	PASS
139	164181	2436398	PASS	164181	2436398	PASS
140	1747747	3874737	PASS	1747747	3874737	PASS
141	1305828	5581042	PASS	1305828	5581042	PASS
142	6095465	47667	PASS	6095465	47667	PASS
143	5579802	4107238	PASS	5579802	4107238	PASS
144	6167423	7468993	PASS	6167423	7468993	PASS
145	319633	7681693	PASS	319633	7681693	PASS
146	2384286	4002367	PASS	2384286	4002367	PASS
147	7626619	5531871	PASS	7626619	5531871	PASS
148	5365686	542642	PASS	5365686	542642	PASS
149	6837360	506293	PASS	6837360	506293	PASS
150	2212133	6143708	PASS	2212133	6143708	PASS

Tabel B.7: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 7)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
151	10138100	6589945	PASS	10138100	6589945	PASS
152	5662161	2672069	PASS	5662161	2672069	PASS
153	1358619	12918553	PASS	1358619	12918553	PASS
154	16154373	16627699	PASS	16154373	16627699	PASS
155	11057074	7882574	PASS	11057074	7882574	PASS
156	13058900	4286437	PASS	13058900	4286437	PASS
157	12007200	16646369	PASS	12007200	16646369	PASS
158	6319242	6755746	PASS	6319242	6755746	PASS
159	16584342	2236947	PASS	16584342	2236947	PASS
160	7658982	3516685	PASS	7658982	3516685	PASS
161	9949064	28056083	PASS	9949064	28056083	PASS
162	624198	17144584	PASS	624198	17144584	PASS
163	12534308	20045882	PASS	12534308	20045882	PASS
164	30728906	26178451	PASS	30728906	26178451	PASS
165	10755464	32804031	PASS	10755464	32804031	PASS
166	15527158	23838698	PASS	15527158	23838698	PASS
167	15830992	29539660	PASS	15830992	29539660	PASS
168	30417017	1850583	PASS	30417017	1850583	PASS

Tabel B.8: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 8)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
169	32860134	16632951	PASS	32860134	16632951	PASS
170	4502675	11571054	PASS	4502675	11571054	PASS
171	16794022	20827452	PASS	16794022	20827452	PASS
172	42632957	10121900	PASS	42632957	10121900	PASS
173	12666970	52140105	PASS	12666970	52140105	PASS
174	32208124	16312879	PASS	32208124	16312879	PASS
175	18156095	32943136	PASS	18156095	32943136	PASS
176	45182729	26130305	PASS	45182729	26130305	PASS
177	52803250	44551932	PASS	52803250	44551932	PASS
178	28299812	16218241	PASS	28299812	16218241	PASS
179	29779414	40907752	PASS	29779414	40907752	PASS
180	55881025	22406446	PASS	55881025	22406446	PASS
181	98668838	55031983	PASS	98668838	55031983	PASS
182	78087687	74542798	PASS	78087687	74542798	PASS
183	10362033	113972215	PASS	10362033	113972215	PASS
184	129180136	83333411	PASS	129180136	83333411	PASS
185	60661690	93331570	PASS	60661690	93331570	PASS
186	125754579	15402793	PASS	125754579	15402793	PASS

Tabel B.9: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 9)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
187	7071321	93654106	PASS	7071321	93654106	PASS
188	55079978	91764593	PASS	55079978	91764593	PASS
189	24747269	93477858	PASS	24747269	93477858	PASS
190	2260531	14858674	PASS	2260531	14858674	PASS
191	149213151	165508008	PASS	149213151	165508008	PASS
192	56668243	18210419	PASS	56668243	18210419	PASS
193	224423343	150027430	PASS	224423343	150027430	PASS
194	38802104	137977292	PASS	38802104	137977292	PASS
195	199495941	29630156	PASS	199495941	29630156	PASS
196	19727024	255138363	PASS	19727024	255138363	PASS
197	38343360	12652194	PASS	38343360	12652194	PASS
198	246762256	126101379	PASS	246762256	126101379	PASS
199	260563559	15312774	PASS	260563559	15312774	PASS
200	249473251	227764167	PASS	249473251	227764167	PASS
201	66111473	247804757	PASS	66111473	247804757	PASS
202	338600630	95026991	PASS	338600630	95026991	PASS
203	36196630	509369069	PASS	36196630	509369069	PASS
204	97740482	315139307	PASS	97740482	315139307	PASS

Tabel B.10: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 10)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
205	500891483	384142993	PASS	500891483	384142993	PASS
206	373948078	267050867	PASS	373948078	267050867	PASS
207	476456552	8183518	PASS	476456552	8183518	PASS
208	232248747	28272436	PASS	232248747	28272436	PASS
209	139836806	156735947	PASS	139836806	156735947	PASS
210	493685823	289807993	PASS	493685823	289807993	PASS
211	20610716	7699932	PASS	20610716	7699932	PASS
212	157746122	405146495	PASS	157746122	405146495	PASS
213	986976984	299512796	PASS	986976984	299512796	PASS
214	730292857	469016820	PASS	730292857	469016820	PASS
215	561361343	420496215	PASS	561361343	420496215	PASS
216	339364343	212621209	PASS	339364343	212621209	PASS
217	667623083	631934829	PASS	667623083	631934829	PASS
218	1027674034	317989988	PASS	1027674034	317989988	PASS
219	268423493	1032060677	PASS	268423493	1032060677	PASS
220	661255322	1010624355	PASS	661255322	1010624355	PASS
221	727730147	1908752259	PASS	727730147	1908752259	PASS
222	2070745858	888256705	PASS	2070745858	888256705	PASS

Tabel B.11: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 11)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
223	2014769345	769003634	PASS	2014769345	769003634	PASS
224	541976515	883568243	PASS	541976515	883568243	PASS
225	928190361	728912549	PASS	928190361	728912549	PASS
226	1714048224	1812863211	PASS	1714048224	1812863211	PASS
227	1389658460	1220170887	PASS	1389658460	1220170887	PASS
228	402558126	1275978503	PASS	402558126	1275978503	PASS
229	1928037864	451449648	PASS	1928037864	451449648	PASS
230	1221108416	1452162173	PASS	1221108416	1452162173	PASS
231	757397928	3018697591	PASS	757397928	3018697591	PASS
232	2744476079	1992119715	PASS	2744476079	1992119715	PASS
233	2817986240	1955312229	PASS	2817986240	1955312229	PASS
234	3774097562	284722153	PASS	3774097562	284722153	PASS
235	378854104	3546440984	PASS	378854104	3546440984	PASS
236	338809105	1188039066	PASS	338809105	1188039066	PASS
237	432786141	2482058165	PASS	432786141	2482058165	PASS
238	2173615966	126926672	PASS	2173615966	126926672	PASS
239	936199509	863390944	PASS	936199509	863390944	PASS
240	3892508351	4161265323	PASS	3892508351	4161265323	PASS

Tabel B.12: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 12)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
241	5411606075	7487387890	PASS	5411606075	7487387890	PASS
242	8557091865	6355963527	PASS	8557091865	6355963527	PASS
243	6470696696	5817026392	PASS	6470696696	5817026392	PASS
244	6817234544	990699110	PASS	6817234544	990699110	PASS
245	4846560477	3780767617	PASS	4846560477	3780767617	PASS
246	2389655437	602797344	PASS	2389655437	602797344	PASS
247	5129303288	8068198307	PASS	5129303288	8068198307	PASS
248	8117876828	4865562041	PASS	8117876828	4865562041	PASS
249	7913114616	3211813974	PASS	7913114616	3211813974	PASS
250	3646532133	118686715	PASS	3646532133	118686715	PASS
251	6401965709	12335276051	PASS	6401965709	12335276051	PASS
252	9662053471	4187734040	PASS	9662053471	4187734040	PASS
253	4099905326	14040740883	PASS	4099905326	14040740883	PASS
254	10772658924	3180789427	PASS	10772658924	3180789427	PASS
255	16057687460	16732553972	PASS	16057687460	16732553972	PASS
256	10258918645	2887809885	PASS	10258918645	2887809885	PASS
257	12922017974	9855266773	PASS	12922017974	9855266773	PASS
258	16047631521	14924220331	PASS	16047631521	14924220331	PASS

Tabel B.13: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 13)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
259	6673198260	10407484594	PASS	6673198260	10407484594	PASS
260	12987464746	10684795969	PASS	12987464746	10684795969	PASS
261	32392213496	2284276442	PASS	32392213496	2284276442	PASS
262	19744592908	31420919598	PASS	19744592908	31420919598	PASS
263	9433797427	26687433143	PASS	9433797427	26687433143	PASS
264	9987401922	25633750966	PASS	9987401922	25633750966	PASS
265	13207218049	1226330109	PASS	13207218049	1226330109	PASS
266	7260112393	9553348648	PASS	7260112393	9553348648	PASS
267	26468377776	25441822034	PASS	26468377776	25441822034	PASS
268	23430727682	11012722057	PASS	23430727682	11012722057	PASS
269	21757301159	28703817164	PASS	21757301159	28703817164	PASS
270	26955065162	8357197191	PASS	26955065162	8357197191	PASS
271	65356889029	41726158387	PASS	65356889029	41726158387	PASS
272	18574408430	32855411145	PASS	18574408430	32855411145	PASS
273	41826311486	67907459992	PASS	41826311486	67907459992	PASS
274	56276237745	55902395677	PASS	56276237745	55902395677	PASS
275	419156830	40587986800	PASS	419156830	40587986800	PASS
276	63461291315	18858235083	PASS	63461291315	18858235083	PASS

Tabel B.14: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 14)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
277	35873514486	51482284981	PASS	35873514486	51482284981	PASS
278	54158512529	24319060283	PASS	54158512529	24319060283	PASS
279	10786300467	46083337553	PASS	10786300467	46083337553	PASS
280	41684118191	22782602677	PASS	41684118191	22782602677	PASS
281	95023432987	25468740874	PASS	95023432987	25468740874	PASS
282	9700349094	73143227774	PASS	9700349094	73143227774	PASS
283	29259223743	72776048315	PASS	29259223743	72776048315	PASS
284	88050811440	8767846263	PASS	88050811440	8767846263	PASS
285	12625122444	92926985367	PASS	12625122444	92926985367	PASS
286	107288244985	20035505627	PASS	107288244985	20035505627	PASS
287	26878262769	62682103674	PASS	26878262769	62682103674	PASS
288	123128706419	83757171839	PASS	123128706419	83757171839	PASS
289	99907283853	68890558965	PASS	99907283853	68890558965	PASS
290	49413183432	35008674708	PASS	49413183432	35008674708	PASS
291	116303586398	194653178784	PASS	116303586398	194653178784	PASS
292	81403150984	37255091036	PASS	81403150984	37255091036	PASS
293	182413485979	100917836432	PASS	182413485979	100917836432	PASS
294	251862127077	191069743767	PASS	251862127077	191069743767	PASS

Tabel B.15: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 15)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
295	47648955330	165713328822	PASS	47648955330	165713328822	PASS
296	138683002321	212828698111	PASS	138683002321	212828698111	PASS
297	74045161501	24334440671	PASS	74045161501	24334440671	PASS
298	44859094925	240441507040	PASS	44859094925	240441507040	PASS
299	226799322382	145369102659	PASS	226799322382	145369102659	PASS
300	154485710098	251596713885	PASS	154485710098	251596713885	PASS
301	353088968850	61997017800	PASS	353088968850	61997017800	PASS
302	353650907119	207521653913	PASS	353650907119	207521653913	PASS
303	354677441966	437218278677	PASS	354677441966	437218278677	PASS
304	28808111527	381035709519	PASS	28808111527	381035709519	PASS
305	418040386872	307545001209	PASS	418040386872	307545001209	PASS
306	279594709982	104628623995	PASS	279594709982	104628623995	PASS
307	527483346732	46140811464	PASS	527483346732	46140811464	PASS
308	290433541735	342844828995	PASS	290433541735	342844828995	PASS
309	197093187331	508671456525	PASS	197093187331	508671456525	PASS
310	146542066515	259721356437	PASS	146542066515	259721356437	PASS
311	426295662982	423738933351	PASS	426295662982	423738933351	PASS
312	463247708936	380073111677	PASS	463247708936	380073111677	PASS

Tabel B.16: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 16)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
313	303786246628	352097146249	PASS	303786246628	352097146249	PASS
314	490938871391	248096594802	PASS	490938871391	248096594802	PASS
315	300580191740	559704074165	PASS	300580191740	559704074165	PASS
316	252452296196	116088025741	PASS	252452296196	116088025741	PASS
317	1072788830693	70543298459	PASS	1072788830693	70543298459	PASS
318	52652485126	835327965849	PASS	52652485126	835327965849	PASS
319	874933822573	867992797522	PASS	874933822573	867992797522	PASS
320	547757430891	644188034375	PASS	547757430891	644188034375	PASS
321	971451321567	1343623479175	PASS	971451321567	1343623479175	PASS
322	1321550941271	1241013750802	PASS	1321550941271	1241013750802	PASS
323	657205120872	2122743806063	PASS	657205120872	2122743806063	PASS
324	1544567451385	781548097913	PASS	1544567451385	781548097913	PASS
325	258629089825	850521236234	PASS	258629089825	850521236234	PASS
326	913517890367	1689054923459	PASS	913517890367	1689054923459	PASS
327	618616006473	920404975642	PASS	618616006473	920404975642	PASS
328	2046172584371	137507650173	PASS	2046172584371	137507650173	PASS
329	1194183833655	552614213373	PASS	1194183833655	552614213373	PASS
330	146643046538	320723889461	PASS	146643046538	320723889461	PASS

Tabel B.17: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 17)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
331	2965666768226	1944390103649	PASS	2965666768226	1944390103649	PASS
332	1518680582767	2715339908490	PASS	1518680582767	2715339908490	PASS
333	1662163524342	3011224237259	PASS	1662163524342	3011224237259	PASS
334	2269109326583	4308510472347	PASS	2269109326583	4308510472347	PASS
335	3199792334103	2147478498164	PASS	3199792334103	2147478498164	PASS
336	2427813652846	2760612783290	PASS	2427813652846	2760612783290	PASS
337	3285802264102	643069883064	PASS	3285802264102	643069883064	PASS
338	1141502010622	2744455943966	PASS	1141502010622	2744455943966	PASS
339	3775083397354	2983786538285	PASS	3775083397354	2983786538285	PASS
340	3304751448562	1829486083367	PASS	3304751448562	1829486083367	PASS
341	8371119016287	8307120414373	PASS	8371119016287	8307120414373	PASS
342	7544701205554	4485789561530	PASS	7544701205554	4485789561530	PASS
343	2558294431826	638236462599	PASS	2558294431826	638236462599	PASS
344	5248938536801	3220718323807	PASS	5248938536801	3220718323807	PASS
345	6885504164993	4274527756349	PASS	6885504164993	4274527756349	PASS
346	3399378043324	1466406378015	PASS	3399378043324	1466406378015	PASS
347	7317699085753	5482719678088	PASS	7317699085753	5482719678088	PASS
348	363354238516	5269806511025	PASS	363354238516	5269806511025	PASS

Tabel B.18: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 18)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
349	3866812738896	8683125135189	PASS	3866812738896	8683125135189	PASS
350	3771467340986	8041283557193	PASS	3771467340986	8041283557193	PASS
351	9188683807847	6965518538881	PASS	9188683807847	6965518538881	PASS
352	2367884771497	6546446938534	PASS	2367884771497	6546446938534	PASS
353	16107401516279	4132053454536	PASS	16107401516279	4132053454536	PASS
354	16304805141136	15618621715633	PASS	16304805141136	15618621715633	PASS
355	1780396574738	5117368603714	PASS	1780396574738	5117368603714	PASS
356	8676868872441	17463690278320	PASS	8676868872441	17463690278320	PASS
357	8578981486719	15489285466994	PASS	8578981486719	15489285466994	PASS
358	14967193637580	4141463566791	PASS	14967193637580	4141463566791	PASS
359	4539622655438	17133032203088	PASS	4539622655438	17133032203088	PASS
360	14080362035270	4938487348444	PASS	14080362035270	4938487348444	PASS
361	26065509390271	15982905740220	PASS	26065509390271	15982905740220	PASS
362	24408983558442	26271094454805	PASS	24408983558442	26271094454805	PASS
363	3010981852188	17437011060618	PASS	3010981852188	17437011060618	PASS
364	3716136619421	13499700120892	PASS	3716136619421	13499700120892	PASS
365	10609409066982	30853325887958	PASS	10609409066982	30853325887958	PASS
366	32255054294300	13925913023585	PASS	32255054294300	13925913023585	PASS

Tabel B.19: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 19)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
367	19629535350427	26912990294037	PASS	19629535350427	26912990294037	PASS
368	27737265824131	2796930611731	PASS	27737265824131	2796930611731	PASS
369	16828432489273	3016596073943	PASS	16828432489273	3016596073943	PASS
370	31585303675147	20575060865817	PASS	31585303675147	20575060865817	PASS
371	59221930865420	37032947987091	PASS	59221930865420	37032947987091	PASS
372	27908278410750	26933120858130	PASS	27908278410750	26933120858130	PASS
373	1831949751110	23618786609149	PASS	1831949751110	23618786609149	PASS
374	13876480264682	25292398209634	PASS	13876480264682	25292398209634	PASS
375	69952861011070	42321357771229	PASS	69952861011070	42321357771229	PASS
376	21648325987454	69025998705367	PASS	21648325987454	69025998705367	PASS
377	16954747528682	27237842940837	PASS	16954747528682	27237842940837	PASS
378	65602839753932	46299196986790	PASS	65602839753932	46299196986790	PASS
379	20171238094414	7473627332577	PASS	20171238094414	7473627332577	PASS
380	3029520761157	64478696578872	PASS	3029520761157	64478696578872	PASS
381	136529648548473	138073796353178	PASS	136529648548473	138073796353178	PASS
382	60991194294665	135427868647953	PASS	60991194294665	135427868647953	PASS
383	91280776822603	2867409488742	PASS	91280776822603	2867409488742	PASS
384	33700294856190	124441603604579	PASS	33700294856190	124441603604579	PASS

Tabel B.20: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 20)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
385	123091770542011	56324451709783	PASS	123091770542011	56324451709783	PASS
386	72007844093672	44345501630291	PASS	72007844093672	44345501630291	PASS
387	38917320343255	68174009995390	PASS	38917320343255	68174009995390	PASS
388	52607976585873	41557780952133	PASS	52607976585873	41557780952133	PASS
389	65901799654834	83168809807430	PASS	65901799654834	83168809807430	PASS
390	49527864301365	80189625890905	PASS	49527864301365	80189625890905	PASS
391	272516187489891	89885302676830	PASS	272516187489891	89885302676830	PASS
392	73473706879304	212602400059393	PASS	73473706879304	212602400059393	PASS
393	144808394000157	15615812063212	PASS	144808394000157	15615812063212	PASS
394	195935380344652	54209818326353	PASS	195935380344652	54209818326353	PASS
395	17899780268273	277177132550354	PASS	17899780268273	277177132550354	PASS
396	143309380522129	266514401759177	PASS	143309380522129	266514401759177	PASS
397	86410287860773	57923757436501	PASS	86410287860773	57923757436501	PASS
398	18133114508503	280920535575155	PASS	18133114508503	280920535575155	PASS
399	92657416460148	81586844006545	PASS	92657416460148	81586844006545	PASS
400	150558692230362	47943495147437	PASS	150558692230362	47943495147437	PASS
401	286508033312352	43664768558129	PASS	286508033312352	43664768558129	PASS
402	206638708008930	268906017163358	PASS	206638708008930	268906017163358	PASS

Tabel B.21: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 21)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
403	165374958901146	284679466996617	PASS	165374958901146	284679466996617	PASS
404	57309530696663	453668668226624	PASS	57309530696663	453668668226624	PASS
405	127230098829927	52376634188990	PASS	127230098829927	52376634188990	PASS
406	404292564084724	240580835352308	PASS	404292564084724	240580835352308	PASS
407	220110332960199	348446923572307	PASS	220110332960199	348446923572307	PASS
408	397905157794727	110037652866013	PASS	397905157794727	110037652866013	PASS
409	510049187246945	152005841196311	PASS	510049187246945	152005841196311	PASS
410	488193265217347	21272666517230	PASS	488193265217347	21272666517230	PASS
411	746606505427713	369913265956421	PASS	746606505427713	369913265956421	PASS
412	450957579547550	244092443297566	PASS	450957579547550	244092443297566	PASS
413	38471255955117	1078266188167050	PASS	38471255955117	1078266188167050	PASS
414	857966567236659	698254422665847	PASS	857966567236659	698254422665847	PASS
415	212992634323097	660645577949974	PASS	212992634323097	660645577949974	PASS
416	92283886819367	428191139133707	PASS	92283886819367	428191139133707	PASS
417	370477018269742	1082785449153000	PASS	370477018269742	1082785449153000	PASS
418	912444881587832	349848960574379	PASS	912444881587832	349848960574379	PASS
419	1080351393421970	878626919711333	PASS	1080351393421970	878626919711333	PASS
420	1012252601998050	217912686921748	PASS	1012252601998050	217912686921748	PASS

Tabel B.22: Tabel hasil pengujian untuk kelompok N tetap (bg. 22)

No	BSGS			Brent		
	R	S	Verdict	R	S	Verdict
421	901490465203660	2002164777588450	PASS	901490465203660	2002164777588450	PASS
422	1699900514924990	664866451905517	PASS	1699900514924990	664866451905517	PASS
423	375718888312327	687125515587588	PASS	375718888312327	687125515587588	PASS
424	1200332611505010	1746319869703150	PASS	1200332611505010	1746319869703150	PASS
425	1856063536700100	2237991695997640	PASS	1856063536700100	2237991695997640	PASS
426	2076129577713830	462657643170032	PASS	2076129577713830	462657643170032	PASS
427	1166628140873040	585792920858825	PASS	1166628140873040	585792920858825	PASS
428	963390434399194	1999977230811850	PASS	963390434399194	1999977230811850	PASS
429	1747691904904970	1052319422873620	PASS	1747691904904970	1052319422873620	PASS
430	1934307474257550	2186087584250900	PASS	1934307474257550	2186087584250900	PASS
431	1703250383514940	3019586044379760	PASS	1703250383514940	3019586044379760	PASS
432	4030785952692380	4413974923492350	PASS	4030785952692380	4413974923492350	PASS
433	3314744762791840	202232248597497	PASS	3314744762791840	202232248597497	PASS
434	122608321780494	187827649272142	PASS	122608321780494	187827649272142	PASS
435	313359623397328	2337435997356020	PASS	313359623397328	2337435997356020	PASS
436	613233657957334	3261978850243830	PASS	613233657957334	3261978850243830	PASS
437	1166938159181410	1233145574847920	PASS	1166938159181410	1233145574847920	PASS
438	1098467589938900	1876837674848550	PASS	1098467589938900	1876837674848550	PASS
439	257880306509642	2678014826884840	PASS	257880306509642	2678014826884840	PASS
440	1756201523811940	2837275479809360	PASS	1756201523811940	2837275479809360	PASS

BIODATA PENULIS

Penulis bernama Muhammad Ghazian, putra ketiga dari empat bersaudara yang lahir pada tanggal 29 Desember 1995 di Bogor. Penulis telah mengenyam pendidikan di Sekolah Dasar Islam Terpadu Ummul Quro pada tahun 2002 hingga 2008, Sekolah Menengah Pertama Negeri 1 Bogor pada tahun 2008 hingga 2011, dan Sekolah Menengah Atas Neger 2 Bogor pada tahun 2011 hingga 2014. Pada masa penulisan, penulis sedang menempuh masa studi S1 di Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya di Departemen Informatika.

Selama masa studi, penulis memiliki ketertarikan yang dalam mengenai *Artificial Intelligence*, rancang bangun aplikasi *game*, dan rancang bangun aplikasi sistem informasi. Keinginan penulis dalam mengajar juga mendorong penulis menjadi asisten dosen pada mata kuliah Dasar Pemrograman, Struktur Data, Perancangan dan Analisis Algoritma (I), dan Perancangan dan Analisis Algoritma (II). Karya penulis semasa perkuliahan diantaranya adalah pembangunan Sistem Penilaian Unit Angka Kredit Guru untuk Kementerian Pendidikan Provinsi Jawa Timur. Selain itu, penulis juga cukup aktif membuat *game* di sela-sela waktu kosong.

Di luar kesibukan akademik, penulis cukup aktif di lembaga dakwah jurusan sebagai salah satu staf. Penulis juga berkontribusi dalam berbagai kepanitiaan, baik dalam skala kecil (yaitu dalam kampus) maupun skala nasional. Kegiatan terakhir penulis adalah membantu kegiatan pelatihan nasional bagi peserta Olimpiade Komputer Indonesia pada Februari dan Maret 2018 lalu.