



TESIS - SS142501

**PENAKSIRAN PARAMETER DAN STATISTIK UJI
BIVARIATE GAMMA REGRESSION
(Studi Kasus : Pencemaran Air Sungai di
Surabaya Tahun 2016)**

JAUHARA RANA BUDIANI
NRP. 06211650010036

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Purhadi, M.Sc.
Santi Wulan Purnami, M.Si, Ph.D.

**PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018**



TESIS - SS142501

**PENAKSIRAN PARAMETER DAN STATISTIK UJI
BIVARIATE GAMMA REGRESSION
(Studi Kasus : Pencemaran Air Sungai di
Surabaya Tahun 2016)**

Jauhara Rana Budiani
NRP. 06211650010036

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Purhadi, M.Sc.
Santi Wulan Purnami, M.Si, Ph.D.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI, DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018



THESIS - SS14 2501

PARAMETER ESTIMATION AND TEST STATISTICS
BIVARIATE GAMMA REGRESSION
(Case Study: River Water Pollution in Surabaya
2016)

Jauhara Rana Budiani
NRP. 06211650010036

SUPERVISOR
Dr. Purhadi, M.Sc.
Santi Wulan Purnami, M.Si, Ph.D.

MAGISTER PROGRAMME
DEPARTMENT OF STATISTICS
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTING AND DATA SCIENCE
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018

**PENAKSIRAN PARAMETER DAN STATISTIK UJI
BIVARIATE GAMMA REGRESSION
(Studi Kasus : Pencemaran Air Sungai di Surabaya Tahun 2016)**

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Master Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

oleh :
JAUHARA RANA BUDIANI
NRP. 06211650010036

Tanggal Ujian : 12 Juli 2018
Periode Wisuda : September 2018


Disetujui oleh:


1. **Dr. Purnadi, M.Sc.**
NIP: 19620204 198701 1 001

(Pembimbing I)


2. **Santi Wulan Purnami, M.Si., Ph.D.**
NIP: 19720923 199803 2 001

(Pembimbing II)


3. **Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.**
NIP: 19681124 199412 1 001

(Penguji)


4. **Dr. Setiawan, MS.**
NIP: 19601030 198701 1 001

(Penguji)


Dekan
Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember


Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP: 19650605 198903 1 002

PENAKSIRAN PARAMETER DAN STATISTIK UJI *BIVARIATE GAMMA REGRESSION*

(Studi Kasus : Pencemaran Air Sungai di Surabaya Tahun 2016)

Nama Mahasiswa : Jauhara Rana Budiani
NRP : 06211650010036
Pembimbing : Dr. Purhadi, M.Sc.
Co. Pembimbing : Santi Wulan Purnami, M.Si., Ph.D.

ABSTRAK

Pada umumnya analisis regresi yang digunakan adalah regresi linier yang harus memenuhi asumsi klasik salah satunya adalah *error* berdistribusi normal. Akan tetapi dalam kenyataan terdapat hasil eksperimen yang dilakukan, *error* tidak mengikuti distribusi normal. Hal tersebut karena distribusi data bersifat asimetris dan bahkan bisa lebih tebal atau lebih tipis dari distribusi normal. Distribusi data yang mampu menangkap pola dan ketebalan asimetris pada ekor salah satu datanya adalah distribusi Gamma. Regresi gamma merupakan regresi yang menjelaskan hubungan antara satu atau lebih variabel prediktor dengan suatu variabel respon yang mengikuti distribusi gamma. Variabel gamma yang hanya melibatkan satu variabel respon akan tidak dapat diterapkan pada beberapa kasus, karena pada kenyataannya beberapa kasus akan melibatkan lebih dari satu variabel respon. Pada penelitian ini dikembangkan model bivariat menggunakan dua variabel. Hasil dari penelitian ini adalah didapatkan penaksir parameter model dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan iterasi Newton-Raphson, serta mendapatkan statistik uji pada model *Bivariate Gamma Regression* dengan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Pada penerapannya model BGR pada pencemaran air sungai di Surabaya menghasilkan faktor-faktor yang mempengaruhi BOD dan DO adalah Fosfat, Nitrit, Nitrat, pH Air, dan Temperatur.

Kata Kunci : *Bivariate Gamma, Bivariate Gamma Regression, Maximum Likelihood Estimation* (MLE), Newton-Raphson

PARAMETER ESTIMATION AND TEST STATISTICS

BIVARIATE GAMMA REGRESSION

(Case Study: River Water Pollution in Surabaya 2016)

Student Name : Jauhara Rana Budiani
Student Identity Number : 06211650010036
Supervisor : Dr. Purhadi, M.Sc.
Co. Supervisor : Santi Wulan Purnami, M.Si., P.hD.

ABSTRACT

Generally, regression analysis used is linear regression that must meet the classical assumption one of them is normal distributed error. but in reality there are experimental results performed, the error does not follow the normal distribution. This is because the data distribution is asymmetric and can even be thicker or thinner than the normal distribution. The distribution of data capable of capturing the asymmetric pattern and thickness in the tail of one of the data is the Gamma distribution. Gamma regression is a regression that explains the relationship between one or more predictor variables with a response variable following the gamma distribution. One is gamma regression, a regression that explains the relationship between one or more predictor variables with a response variable following the gamma distribution. A gamma variable that involves only one response variable will not be applicable in some cases, as in reality some cases will involve more than one response variable. In this research developed bivariate model using two variables. The result of this research is got the model parameter estimator with the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method and Newton-Reaphson iteration and obtain test statistics on Bivariate Gamma Regression model. In the application of BGR model on river water pollution in Surabaya produce factors that influence BOD and DO are Phosphate, Nitrite, Nitrate, Water pH, and Temperature.

Keywords : Bivariate Gamma, Bivariate Gamma Regression, Maximum Likelihood Estimation (MLE), Newton-Raphson

KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadiran Allah SWT atas rahmat dan ridho-Nya sehingga pengerjaan serta penulisan Tesis dengan judul **Penaksiran Parameter dan Statistik Uji Bivariate Gamma Regression (Studi Kasus : Pencemaran Air Sungai di Surabaya Tahun 2016)** dapat terselesaikan dengan baik.

Penulisan Tesis ini adalah salah satu syarat yang harus dipenuhi dalam memperoleh gelar Magister sesuai dengan kurikulum Departemen Statistika FMKSD-ITS Surabaya. Tersusunnya Tesis ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Untuk itu penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada :

1. Bapak Dr. Suhartono, M.Sc. selaku Ketua Departemen Statistika ITS yang telah banyak memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk belajar.
2. Bapak Dr. Purnadi, M.Sc. dan Ibu Santi Wulan Purnami, M.Si, P.hD selaku dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan masukan selama pengerjaan Tesis.
3. Bapak Dr. Bambang W. Otok, M.Si. dan Dr. Setiawan, MS. selaku dosen penguji yang telah memberikan banyak koreksi dan masukan.
4. Bapak Dr. rer.pol. Heri Kuswanto, M.Si. selaku Ketua Program Studi Pascasarjana Statistika ITS yang memberikan motivasi dalam pendidikan.
5. Bapak Dr. Agnes Tuti Rumiati, M.Si. selaku dosen wali yang telah membimbing dan mengarahkan dalam perkuliahan.
6. Seluruh dosen pengajar serta karyawan di departemen Statistika ITS, yang telah memberikan bantuan dan ilmunya sebagai bekal dalam pengerjaan Tesis.
7. Ayah, ibu, kakak, serta adik, yang telah memberikan segala dukungan, kesabaran, dan pengorbanan untuk penulis dalam menempuh studi.
8. Seluruh keluarga Statistika S2 2016 segala perjuangan, serta semangat yang tak akan berhenti untuk belajar.
9. Pihak-pihak yang telah mendukung dan membantu dalam penyusunan Tesis.

Penulis berharap laporan Tesis ini dapat memberikan manfaat bagi masyarakat dan ilmu pengetahuan. Penulis juga mengharapkan saran dan kritik yang membangun untuk perbaikan di masa yang akan datang.

Surabaya, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL.....	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Batasan Penelitian.....	4
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Distribusi Gamma.....	5
2.2 Distribusi Gamma Bivariat.....	7
2.3 Uji Distribusi Gamma Bivariat.....	12
2.4 Regresi Gamma Univariat	13
2.4.1 Estimasi Parameter Model Regresi Gamma.....	14
2.5 Pengujian Parameter Model Regresi Gamma.....	16
2.6 Interpretasi Model BGR	17
2.7 Pencemaran Sungai.....	18
BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN.....	21
3.1 Langkah-Langkah Penaksiran Parameter <i>Bivariate Gamma Regression</i>	21
3.2 Penerapan <i>Bivariate Gamma Regression</i> pada Pencemaran Air Sungai di Surabaya	23
3.2.1 Sumber Data.....	23
3.2.2 Variabel Penelitian	24

3.2.3 Penerapan Gamma Bivariat Regression pada Data Pencemaran Sungai di Surabaya	24
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN	27
4.1 Estimasi Parameter pada Model BGR	27
4.2 Statistik Uji pada Model BGR	32
4.2.1 Pengujian Hipotesis Parameter Secara Serentak	32
4.3 Aplikasi <i>Bivariate Gamma Regression</i> (BGR) pada Studi Kasus Pencemaran Air Sungai di Surabaya.....	38
4.3.1 <i>Goodness of Fit Test</i> Distribusi Gamma.....	38
4.3.2 Deskripsi Pencemaran Air Sungai di Surabaya	40
4.3.3 Pengujian Korelasi Variabel Respon	41
4.3.4 Pengujian Multikolinieritas	42
4.3.5 Pemodelan <i>Bivariate Gamma Regression</i> pada Pencemaran Air Sungai di Surabaya Menggunakan Estimasi MLE	42
4.3.6 Pengujian Hipotesis Secara Serentak dengan <i>Maximum Likelihood Ratio Test</i> (MLRT)	44
4.3.7 Pengujian Hipotesis Secara Parsial.....	45
4.3.8 Intepretasi Model <i>Bivariate Gamma Regression</i> pada Pencemaran Air Sungai di Surabaya	47
BAB 5	49
KESIMPULAN DAN SARAN	49
5.1 Kesimpulan	49
5.2 Saran.....	50
DAFTAR PUSTAKA.....	51
LAMPIRAN	55
BIODATA PENULIS.....	71

DAFTAR TABEL

Tabel 3. 1 Variabel Penelitian.....	24
Tabel 3. 2 Struktur Data	24
Tabel 4. 1 <i>Goodness of Fit Test</i> Variabel Respon.....	38
Tabel 4. 2 Uji Distribusi Gamma Bivariat Menggunakan Kolmogorov-Smirnov	39
Tabel 4. 3 Deskripsi Karakteristik Sungai di Surabaya Tahun 2016	41
Tabel 4. 4 Nilai VIF Variabel Prediktor.....	42
Tabel 4. 5 Estimasi Parameter Model BGR.....	43
Tabel 4. 6 Hasil Pengujian Serentak Menggunakan MLRT	44
Tabel 4. 7 Pengujian Parsial Estimasi Parameter Dispersi	45
Tabel 4. 8 Pengujian Parsial Estimasi Parameter Model BGR	46
Tabel 4. 9 Nilai Rasio Metode BGR	47

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Kurva Distribusi Gamma (a) $\alpha = 3, \theta = 0,25$; (b) $\alpha = 3, \theta = 0,5$; (c) $\alpha = 2, \theta = 0,25$; (d) $\alpha = 2, \theta = 0,5$	6
Gambar 3. 1 Peta Sungai di Kota Surabaya	23
Gambar 3. 2 Tahapan dari analisis Bivariate Gamma Regression.....	26
Gambar 4. 1 Grafik Kadar BOD pada Titik Pengamatan Sungai di Surabaya	40
Gambar 4. 2 Grafik Kadar DO pada Titik Pengamatan Sungai di Surabaya.....	41

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Kadar BOD, DO dan Zat Pencemar Sungai Surabaya Tahun 2016	55
Lampiran 2. Pengujian Distribusi Data, Korelasi Variabel Respon, dan Korelasi Variabel Prediktor	56
Lampiran 3. Syntax Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah Populasi Menggunakan R	59
Lampiran 4. Output Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah Populasi Menggunakan R	62
Lampiran 5. Matrix <i>Fisher Information</i> untuk Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah Populasi	63
Lampiran 6. Syntax Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah H_0 Menggunakan R	64
Lampiran 7. Output Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah H_0 Menggunakan R	67
Lampiran 8. Matrix <i>Fisher Information</i> untuk Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah H_0	68
Lampiran 9. Syntax Menghitung PDF Menggunakan R	69

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi adalah metode analisis pemodelan yang sering digunakan dalam berbagai bidang. Pada umumnya analisis regresi yang digunakan adalah regresi linier. Jika menggunakan regresi linier harus memenuhi asumsi klasik salah satunya adalah *error* berdistribusi normal. Asumsi *error* distribusi normal sering digunakan karena sebagian besar fenomena yang terjadi mengikuti distribusi normal, akan tetapi dalam kenyataan terdapat hasil eksperimen yang dilakukan, *error* tidak mengikuti distribusi normal. Hal tersebut karena distribusi data bersifat asimetris dan bahkan bisa lebih tebal atau lebih tipis dari distribusi normal. Ada beberapa distribusi data yang mampu menangkap pola dan ketebalan asimetris pada ekor salah satu datanya adalah distribusi Gamma. Regresi yang menjelaskan hubungan antara satu atau lebih variabel prediktor dengan suatu variabel respon yang mengikuti distribusi gamma disebut regresi gamma.

Distribusi gamma adalah salah satu distribusi kontinu dengan dua parameter positif dan bentuk generalisasi dari distribusi eksponensial (Tripathi, Gupta, & Pair, 1993). Fungsi distribusi gamma pertama kali diperkenalkan oleh ahli Matematika berkebangsaan Swiss, Leonhard Euler (1707-1783). Distribusi gamma mempunyai peranan penting dalam teori antrian dan teori keandalan atau reliabilitas. Distribusi gamma sering terjadi pada model yang digunakan dalam bidang rekayasa seperti waktu untuk kegagalan peralatan dan tingkat beban untuk layanan telekomunikasi, bidang meteorologi seperti curah hujan, serta bidang bisnis seperti klaim asuransi dan default pinjaman. Variabel pada distribusi gamma selalu positif dan hasilnya adalah miring atau tidak seimbang (Hosch, 2017). Beberapa penelitian pengembangan dan penerapan pemodelan distribusi gamma telah dilakukan. Xie dan Wu (2017) telah melakukan pemodelan interval kondisional *autoregressive* dengan distribusi gamma untuk memodelkan volatilitas keuangan. Yang, Yu, dan Zhang (2017) menggunakan distribusi gamma dibidang komunikasi, yaitu memodelkan rangkaian jaringan komunikasi. Penggunaan distribusi gamma untuk mengevaluasi polutan air di Waduk Asejire,

pernah dilakukan oleh Lawal, Adalakun, dan Obisesan (2013). Penelitian yang dilakukan oleh Lawal dkk, menggunakan variabel kekeruhan air, pH, warna, DO, dan alkalinitas. Alvarez, Ferreira, dan Hube (2011) melakukan penelitian estimasi parameter distribusi gamma untuk analisis data pencemaran pada air hujan. Penelitian distribusi gamma yang lain yaitu penilaian metode statistik untuk pemantauan kualitas air di saluran air pasang di Maryland dilakukan oleh Le, Rackauckas, Ross, dan Ulloa (2012).

Pengembangan pemodelan distribusi gamma telah dilakukan, salah satunya pemodelan *bivariate gamma*. *Bivariate gamma* yaitu pemodelan regresi gamma dengan dua variabel respon. Penelitian mengenai model *bivariate gamma* pernah dilakukan oleh Yue, Ouarda, dan Bobee (2001), yaitu penerapan distribusi gamma bivariat pada bidang hidrologi. Penelitian tersebut menyimpulkan bahwa distribusi gamma bivariat yang dibangun dari marginal gamma tertentu dapat menjelaskan sifat probabilitas dari kejadian hidrologi multivariat.

Berdasarkan penelitian sebelumnya, penerapan pemodelan distribusi gamma banyak digunakan pada kasus hidrologi dan pencemaran air. Kasus pencemaran air sungai sesuai dengan karakteristik distribusi gamma yaitu teori keandalan atau reliabilitas. Pada suatu waktu tertentu kualitas air akan berfungsi sesuai dengan peruntukannya dalam periode waktu tertentu. Namun pada suatu waktu tertentu kualitas air tersebut dapat menurun karena pengaruh berbagai faktor (Smol, 2008).

Pencemaran air adalah masuknya makhluk hidup, zat, energi, dan atau komponen lain ke dalam air oleh kegiatan manusia, sehingga kualitas air turun sampai ke tingkat tertentu yang menyebabkan air tidak berfungsi lagi sesuai dengan peruntukannya. Pencemaran air sungai dapat diakibatkan oleh limbah industri, pertanian, dan rumah tangga. Pencemaran air dapat diketahui melalui pemeriksaan secara fisik, kimiawi, maupun biologi. Indikator pencemaran air yang umum digunakan adalah *Biological Oxygen Demand (BOD)*, *Dissolved Oxygen (DO)*, *Chemical Oxygen Demand (COD)*, *Total Suspended Solid (TSS)*, dan sebagainya. Pengawasan kualitas air dengan mengendalikan pencemaran air sungai di Kota Surabaya menjadi sangat penting untuk diperhatikan oleh pemerintah dan semua pihak. Berbagai aktivitas masyarakat yaitu pemukiman,

transportasi, industri, pertanian, peternakan dan sebagainya berhubungan langsung dengan aliran sungai di Surabaya. Berbagai aktivitas tersebut akan memperparah pencemaran sungai jika tidak dilakukan pengendalian. Hal pertama untuk mengendalikan pencemaran sungai yang dilakukan adalah mengetahui faktor apa saja yang mempengaruhi pencemaran sungai di Surabaya.

Penelitian sebelumnya yaitu pemodelan regresi gamma pada kasus pencemaran air sungai di kota Surabaya yang dilakukan oleh (Nasution, 2016). Penelitian bertujuan menentukan estimasi parameter dan pengujian hipotesis dari model regresi Gamma menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Weighted Least Square* (WLS). Estimator yang diperoleh tidak *close form* sehingga untuk menyelesaikannya dilakukan dengan metode iterasi Newton-Raphson. Penelitian lain pernah dilakukan oleh (Putri, 2016) yaitu melakukan pemodelan distribusi gamma pada kasus pencemaran sungai dengan menambahkan efek spasial, dari penelitian tersebut faktor yang berpengaruh adalah kedalaman sungai, kecepatan aliran sungai, nitrit, dan amonia.

Penelitian sebelumnya yang hanya menggunakan satu variabel respon tidak dapat diterapkan pada beberapa kasus yang melibatkan lebih dari satu variabel respon, sehingga pada penelitian yang akan dilakukan menggunakan dua variabel respon. Dua variabel respon pencemaran air, yaitu *Biological Oxygen Demand* (BOD) dan *Dissolved Oxygen* (DO). BOD merupakan jumlah oksigen terlarut yang dibutuhkan oleh mikroorganisme hidup untuk memecah atau mengoksidasi bahan organik dalam air. DO merupakan jumlah oksigen yang terlarut dalam perairan (Dinas Lingkungan Hidup Surabaya, 2016). Kadar BOD dan DO yang selalu bernilai positif selain itu juga digunakan dalam pengendalian pencemaran air sungai. Salah satu distribusi yang digunakan dalam pengendalian atau keandalan adalah distribusi Gamma (Kleinbaum dan Klein, 2012). Pendekatan yang dilakukan menggunakan *Bivariate Gamma Regression* (BGR). Variabel prediktor yang akan digunakan adalah fosfat, nitrit, nitrat, pH, dan temperatur.

Tujuan penelitian untuk menentukan penaksir parameter model dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan menggunakan iterasi Newton Raphson. Tujuan kedua adalah mendapatkan statistik uji pada model BGR,

selanjutnya mendapatkan model regresi dari faktor-faktor yang mempengaruhi tingkat pencemaran sungai.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian, maka rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana mendapatkan penaksir parameter dan statistik uji model *Bivariate Gamma Regression*. Penerapan penaksiran parameter dan statistik uji *Bivariate Gamma Regression* dilakukan pada kasus tingkat pencemaran sungai, dengan indikator *Biological Oxygen Demand* (BOD) dan *Dissolved Oxygen* (DO).

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah penelitian yang telah dipaparkan, tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Menentukan penaksir parameter model *Bivariate Gamma Regression*.
2. Mendapatkan statistik uji pada model *Bivariate Gamma Regression*.
3. Mendapatkan model tingkat pencemaran sungai dengan pendekatan *Bivariate Gamma Regression*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Mengetahui teori dan penerapan metode *Bivariate Gamma Regression* pada pencemaran air sungai.
2. Hasil penelitian ini dapat digunakan oleh Badan Lingkungan Hidup dan instansi lainnya dalam rangka mendapatkan alternatif metode dan penyediaan informasi untuk evaluasi atau pengambilan keputusan terkait pencemaran sungai.

1.5 Batasan Penelitian

Batasan masalah penelitian ini yaitu metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter regresi distribusi gamma bivariat adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan menggunakan metode iterasi Newton Raphson. Studi kasus yang digunakan adalah pencemaran air sungai di kota Surabaya dengan kadar BOD dan DO sebagai indikatornya.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Gamma

Distribusi gamma pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler (1707-1783) seorang matematikawan asal Swiss. Kemudian dikembangkan oleh ilmuan lainnya, seperti Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Friedrich (1777-1855), Christoph Gudermann (1798-1833), Joseph Liouville (1809-1882) dan lain-lain.

Fungsi gamma dengan parameter α dan dinotasikan dengan $\Gamma(\alpha)$ adalah sebagai berikut.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy, \text{ dengan } \alpha > 0 \quad (2.1)$$

Fungsi gamma memiliki beberapa sifat (Siegrist, 1997).

1. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
2. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0$
3. $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!, \alpha > 1$

Terdapat dua parameter pada fungsi distribusi gamma yaitu $\alpha > 0$ dan $\theta > 0$, fungsi gamma dapat didefinisikan sebagai berikut.

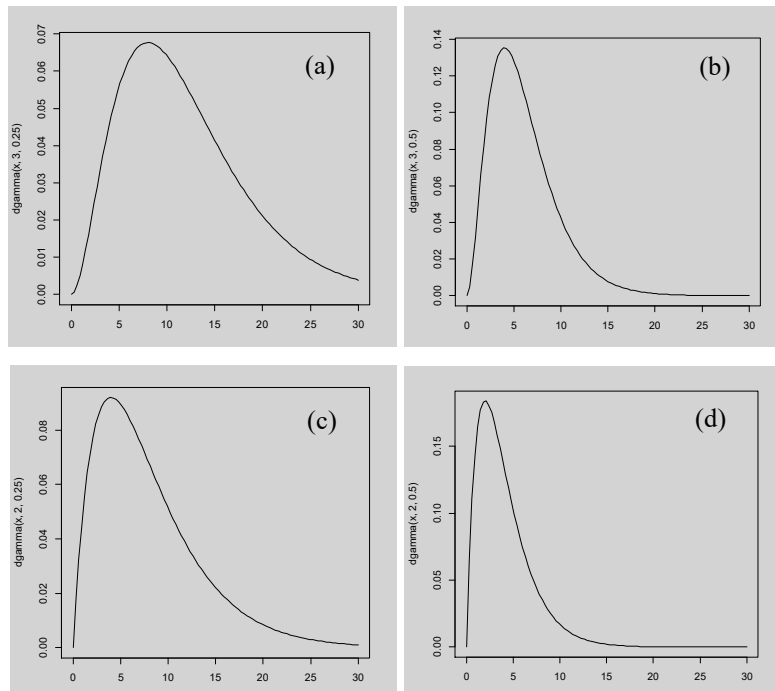
$$1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y/\theta} dy \quad (2.2)$$

Jika $x = y\theta$ sehingga didapatkan fungsi kepadatan peluang distribusi gamma sebagai berikut.

$$f(y|\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y/\theta}, & y \geq 0, \alpha > 0, \theta > 0 \\ 0, & \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases} \quad (2.3)$$

Fungsi $f(y|\alpha, \theta)$ merupakan fungsi kepadatan peluang nonnegatif dan terintegrasi satu.

Parameter α dikenal sebagai parameter bentuk (*shape*) karena paling mempengaruhi puncak keruncingan (*peaked-ness*) dari distribusi, sedangkan parameter θ disebut parameter skala (*scale*) karena berpengaruh terhadap sebaran distribusi.



Gambar 2. 1 Kurva Distribusi Gamma (a) $\alpha = 3, \theta = 0,25$; (b) $\alpha = 3, \theta = 0,5$; (c) $\alpha = 2, \theta = 0,25$; (d) $\alpha = 2, \theta = 0,5$

(Sumber : Output Software R, 2017)

Selain itu, dikenal istilah distribusi gamma dengan tiga parameter, yaitu α , θ , dan λ . Parameter λ disebut parameter lokasi (*location parameter*) yang secara grafis hanya menggeser kurva ke kiri atau ke kanan tanpa mengubah bentuk dan ukuran grafik. Secara teoritis, berdasarkan teori transformasi peubah random, peubah acak baru (misalnya Z) yang lokasinya bergeser sejauh λ terhadap peubah acak Z , diperoleh dengan mentransformasikan Y ke Z dengan $Z = Y + \lambda \Leftrightarrow Y = Z - \lambda$ sehingga menghasilkan :

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} (z - \lambda)^{\alpha-1} e^{-\frac{(z-\lambda)}{\theta}} ; \alpha, \theta > 0; \lambda < y < \infty \\ 0 & ; \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases} \quad (2.4)$$

Nilai koefisien rata-rata, varians, dan *skewness* dari distribusi gamma dengan tiga parameter α , θ , dan λ adalah (Ewemoje & Ewemooje, 2011):

$$\mu_x = \lambda + \alpha\theta ; \sigma^2_x = \alpha ; g_x = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

2.2 Distribusi Gamma Bivariat

Distribusi Gamma Bivariat mempunyai kegunaan di beberapa bidang antara lain, pemodelan curah hujan dari dua pengukur curah hujan yang berdekatan, data percobaan hujan buatan, debit sungai tahunan daerah curah hujan, dan data hembusan angin. Dasar pengkonstruksianya berdasarkan karakteristik dari distribusi Gamma dan distribusi Beta. Misal variabel acak Z berdistribusi Beta dengan parameter α dan λ mempunyai pdf sebagai berikut (Nadarajah dan Gupta, 2006).

$$f(y) = \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\theta-1}}{B(\alpha, \theta)}; 0 < y < 1, \alpha > 0, \theta > 0 \quad (2.5)$$

dimana

$$B(\alpha, \gamma) = \int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{\gamma-1} dz \text{ menyatakan fungsi Beta} \quad (2.6)$$

Demikian juga suatu variabel acak Z berdistribusi Gamma dengan parameter bentuk α dan parameter skala θ mempunyai pdf sebagai berikut.

$$f(y) = \frac{\theta^\alpha y^{\alpha-1} \exp(-\theta y)}{\Gamma(\alpha)}, \quad z > 0, \alpha > 0, \theta > 0 \quad (2.7)$$

Menurut Nadarajah dan Gupta (2006), fungsi Gamma Bivariat didefinisikan dengan:

$$\Gamma(\alpha, y) = \int_y^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (2.8)$$

dan fungsi Whittaker didefinisikan dengan :

$$W_{\lambda, \mu}(\alpha) = \frac{\alpha^{\mu+\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\mu-\lambda-\frac{1}{2}} (1+t)^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}} \exp(-\alpha t) dt \quad (2.9)$$

Menurut Yeo dan Milne (1991), diketahui U dan V saling bebas dan variabel random *non-negative*, di mana $\alpha > 0$ dan $\gamma > 0$. Dalam hal ini, terdapat tiga kondisi antara lain :

$$1. UV \sim \text{Gamma}\left(\alpha, \frac{1}{\mu}\right); 0 < \mu < \infty$$

$$2. U \sim \text{Beta}(\alpha, \gamma)$$

$$3. V \sim \text{Gamma}([\alpha + \gamma], 1/\mu)$$

Untuk menunjukkan pdf bersama dari U dan V , dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Karena U dan V saling bebas, maka :

$$\begin{aligned} f_{u,v}(u, v) &= f(u) \times f(v) \\ &= \frac{u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-1}}{B(\alpha, \gamma)} \times \frac{v^{\alpha+\gamma-1} e^{-\frac{v}{\mu}}}{\mu^{\alpha+\gamma} \Gamma(\alpha + \gamma)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Maka pdf bersama dari Y_1 dan V adalah :

$$\begin{aligned} g(y_1, v) &= f(u^{-1}, v) \cdot \frac{du}{dy_1} \\ &= f\left(\frac{y_1}{v}, v\right) \cdot \frac{1}{v} \\ &= \left[\frac{\left(\frac{y_1}{v}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{y_1}{v}\right)^{\gamma-1}}{B(\alpha, \gamma)} \times \frac{v^{\alpha+\gamma-1} e^{-\frac{v}{\mu}}}{\mu^{\alpha+\gamma} \Gamma(\alpha + \gamma)} \right] \cdot \frac{1}{v} \\ &= \frac{y_1^{\alpha-1} (v - y_1)^{\gamma-1} e^{-\frac{v}{\mu}}}{\mu^{\alpha+\gamma} \Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma)}; y_1 \leq v, v > 0 \end{aligned}$$

Diketahui U, V, W mempunyai sifat saling bebas, kontinu, dan variabel random *non-negative*. Kemudian dapat dibentuk dua distribusi Gamma bivariat baru sebagai berikut (Nadarajah dan Gupta, 2006).

Diasumsikan W berdistribusi Beta dengan parameter bentuk α dan γ . U berdistribusi Gamma dengan parameter bentuk τ dan parameter skala $\frac{1}{\mu_1}$. V

berdistribusi Gamma dengan parameter bentuk τ dan parameter skala $\frac{1}{\mu_2}$.

Sehingga dapat ditulis dengan :

$$W \sim \text{Beta}(\alpha, \gamma)$$

$$U \sim \text{Gamma}(\tau, 1/\mu_1)$$

$$V \sim \text{Gamma}(\tau, 1/\mu_2)$$

dengan $\tau = \alpha + \gamma$

$$\text{Didefinisikan } Y_1 = UW, Y_2 = VW$$

Dengan menggunakan tiga kondisi yang dikemukakan oleh Yeo dan Milne (1991), dapat diketahui bahwa Y_1 berdistribusi Gamma dengan parameter bentuk α dan parameter skala $1/\mu_1$, dan Y_2 berdistribusi Gamma dengan parameter bentuk α dan parameter skala $1/\mu_2$.

Karena U , V , dan W saling bebas, maka :

$$\begin{aligned} f_{u,v,w}(u, v, w) &= f(u) \times f(v) \times f(w) \\ &= \left(\frac{u^{\alpha+\gamma-1} e^{-\frac{u}{\mu_1}}}{\mu_1^{\alpha+\gamma} \Gamma(\alpha+\gamma)} \right) \times \left(\frac{v^{\alpha+\gamma-1} e^{-\frac{v}{\mu_2}}}{\mu_2^{\alpha+\gamma} \Gamma(\alpha+\gamma)} \right) \times \left(\frac{w^{\alpha-1} (1-w)^{\gamma-1}}{B(\alpha, \gamma)} \right) \\ &= \frac{u^{\alpha+\gamma-1} v^{\alpha+\gamma-1} w^{\alpha-1} (1-w)^{\gamma-1} e^{-\frac{u}{\mu_1} - \frac{v}{\mu_2}}}{(\mu_1 \mu_2)^{\alpha+\gamma} [\Gamma(\alpha+\gamma)]^2 \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}} \quad (2.11) \\ &= \frac{u^{\alpha+\gamma-1} v^{\alpha+\gamma-1} w^{\alpha-1} (1-w)^{\gamma-1} e^{-\frac{u}{\mu_1} - \frac{v}{\mu_2}}}{(\mu_1 \mu_2)^{\alpha+\gamma} \Gamma(\alpha+\gamma) \Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma)} \end{aligned}$$

dengan $C^{-1} = \frac{1}{C} = (\mu_1 \mu_2)^{\alpha+\gamma} \Gamma(\alpha+\gamma) \Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma)$

Sehingga berdasarkan persamaan (2.11), dapat ditulis pdf gabungan U , V , dan W sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f_{u,v,w}(u,v,w) &= C(uv)^{\alpha+\gamma-1} w^{\alpha-1} (1-w)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{u}{\mu_1} + \frac{v}{\mu_2}\right)} \\
&= C(uv)^{\tau-1} w^{\alpha-1} (1-w)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{u}{\mu_1} + \frac{v}{\mu_2}\right)}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Maka pdf gabungan Y_1 , Y_2 , dan W adalah :

$$\begin{aligned}
g(y_1, y_2, w) &= f\left(\frac{y_1}{w}, \frac{y_2}{w}, w\right) |J| \\
&= C(uv)^{\tau-1} w^{\alpha-1} (1-w)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{u}{\mu_1} + \frac{v}{\mu_2}\right)} \frac{1}{w^2} \\
&= C(y_1 y_2)^{\alpha+\gamma-1} w^{\alpha-1-2\tau} (1-w)^{\gamma-1} e^{-\frac{1}{w}\left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2}\right)}
\end{aligned}$$

Maka pdf gabungan Y_1 dan Y_2 adalah :

$$\begin{aligned}
f(y_1, y_2) &= \int_0^1 g(y_1, y_2, w) dw \\
&= \int_0^1 C(y_1 y_2)^{\alpha+\gamma-1} w^{\alpha-1-2\tau} (1-w)^{\gamma-1} e^{-\frac{1}{w}\left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2}\right)} dw
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= C(xy)^{a+b-1} \int_0^1 w^{a-1-2c} (1-w)^{b-1} e^{-\frac{1}{w}\left(\frac{x}{\mu_1} + \frac{y}{\mu_2}\right)} dw \\
&= C(xy)^{a+b-1} I(x, y)
\end{aligned}$$

(2.14)

di mana :

$$\begin{aligned}
I(y_1, y_2) &= \int_0^1 w^{\alpha-1-2\tau} (1-w)^{\gamma-1} e^{-\frac{1}{w}\left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2}\right)} dw \\
I(y_1, y_2) &= \int_0^1 w^{\alpha-1-2\tau} (1-w)^{\gamma-1} e^{-\frac{1}{w}\left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2}\right)} dw \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{u+1}\right)^{\alpha-1-2\tau} \left(1 - \frac{1}{u+1}\right)^{\gamma-1} e^{-(u+1)\left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2}\right)} \left(-\frac{du}{(u+1)^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$I(y_1, y_2) = \Gamma(\gamma) \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}-c} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)} W_{\tau-\gamma+\frac{1-\gamma}{2}, \tau-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)} \quad (2.16)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.16) ke dalam persamaan (2.14) akan diperoleh pdf distribusi Gamma Bivariat sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= C(y_1 y_2)^{\alpha+\gamma-1} I(y_1, y_2) \\ &= C(y_1 y_2)^{\alpha+\gamma-1} \Gamma(\gamma) \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}-\tau} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)} W_{\tau-\gamma+\frac{1-\alpha}{2}, \tau-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)} \quad (2.17) \\ &= C \Gamma(\gamma) (y_1 y_2)^{\tau-1} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}-c} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)} W_{\tau-\gamma+\frac{1-\alpha}{2}, \tau-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)} \end{aligned}$$

dengan $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, dimana

dimana C adalah konstanta yang memiliki persamaan sebagai berikut,

$$\frac{1}{C} = (\mu_1 \mu_2)^\tau \Gamma(\tau) \Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma)$$

Bukti: pdf bersama U, V dan W adalah

$$f(u, v, w) = C(uv)^{\tau-1} w^{\alpha-1} (1-w)^{\gamma-1} \exp \left\{ -\frac{1}{w} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right) \right\}$$

Sehingga pdf bersama Y_1 , Y_2 dan W adalah

$$f(x, y, w) = C(xy)^{\tau-1} w^{\alpha-2\tau-1} (1-w)^{\gamma-1} \exp \left\{ -\frac{1}{w} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right) \right\}; 0 < w < 1$$

Diperoleh

$$f(y_1, y_2) = C(y_1 y_2)^{\tau-1} I(y_1, y_2)$$

Dimana $I(y_1, y_2)$ menyatakan integral:

$$I(y_1, y_2) = \int_0^1 w^{\alpha-2\tau-1} (1-w)^{\gamma-1} \exp \left\{ -\frac{1}{w} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right) \right\} dw \quad (2.18)$$

Dengan mensubstitusikan $u = \frac{1}{w} - 1$ dan menggunakan definisi fungsi Whittaker, diperoleh

$$I(y_1, y_2) = \Gamma(\gamma) \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}-\tau} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right) \right\} W_{\tau-\gamma+\frac{1-\alpha}{2}, \tau-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)} \quad (2.19)$$

Hasil pada Persamaan (2.19) disubstitusikan ke Persamaan (2.18) diperoleh Persamaan (2.17).

Jika $\gamma = 1$ maka pdf bersama pada persamaan (2.17) dapat direduksi menjadi lebih sederhana yang berbentuk:

$$f(y_1, y_2) = C(y_1, y_2)^{\tau-1} \left(\frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right)^{\alpha-2\tau} \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_1}{\mu_1} + \frac{y_2}{\mu_2} \right) \quad (2.20)$$

Produk Momen

Product momen dari X dan Y yang terkait dengan persamaan (2.17) adalah

$$E(Y_1^m Y_2^n) = \frac{\mu_1^m \mu_2^n \Gamma(\tau+n) B(\alpha+m+n, \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma) \Gamma(\tau)} ; m \geq 1 \text{ dan } n \geq 1.$$

$$Cov(y_1, y_2) = \frac{\mu_1 \mu_2 \alpha \gamma}{\alpha + \gamma + 1} \quad (2.21)$$

dan

$$Corr(y_1, y_2) = \frac{\sqrt{\alpha \gamma}}{\alpha + \gamma + 1} \quad (2.22)$$

(Nadarajah & Gupta, 2006)

Fungsi Survival

Fungsi *survival* $S(y_1, y_2)$ digunakan untuk menghitung peluang suatu obyek dengan suatu nilai y_1 dan y_2 (Collet, 1994). Fungsi *survival* dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S(y_1, y_2) &= P(Y_1 > y_1, Y_2 > y_2) \\ &= 1 - P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) \\ &= 1 - F(y_1, y_2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dimana $F(y_1, y_2)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif Gamma Bivariat.

2.3 Uji Distribusi Gamma Bivariat

Sebelum melakukan permodelan dengan regresi gamma, perlu diuji apakah variabel respon (Y) sudah menyebar sesuai dengan distribusi Gamma Bivariat atau tidak. Pengujian dapat dilakukan dengan uji Kolmogorov-Smirnov. Uji Kolmogorov Smirnov pertama kali diperkenalkan oleh Kolmogorov dan Smirnov pada tahun 1973. Uji ini digunakan untuk menguji apakah data mengikuti suatu distribusi tertentu. Skala data yang digunakan minimal adalah ordinal (Daniel, 1989).

Hipotesis

$$H_0 : F_{(y_1, y_2)} = F_{y_1, y_2}^0 \text{ (Distribusi data sesuai dengan distribusi tertentu)}$$

$$H_1 : F_{(y_1, y_2)} \neq F_{y_1, y_2}^0 \text{ (Distribusi data tidak sesuai dengan distribusi tertentu)}$$

Statistik uji :

$$D = \sup_x |S(x) - F_{y_1, y_2}^0| \quad (2.24)$$

$S(x)=i/n$ merupakan fungsi peluang kumulatif pengamatan suatu sampel random, sedangkan F_{y_1, y_2}^0 merupakan fungsi distribusi kumulatif teoritis.

Keputusan:

Tolak H_0 jika $|D| > q_{(1-\alpha)}$ (tabel Kolmogorov Smirnov).

2.4 Regresi Gamma Univariat

Regresi Gamma adalah salah satu regresi yang dapat menggambarkan hubungan antara variabel Y sebagai variabel respon berdistribusi Gamma dengan variabel X_1, X_2, \dots, X_k sebagai variabel prediktor. Model regresi Gamma univariat dapat diartikan bahwa variabel respon hanya satu. Bentuk matriks dari variabel respon, variabel prediktor, dan parameter regresi gamma adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]_{n \times 1}^T; \mathbf{x}_i = [1 \ x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{ik}]_{n \times (1+k)}^T; \boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_k]_{k+1}^T \quad (2.25)$$

$$\mu = E(Y) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k)$$

Untuk $\mu = \alpha\theta$, diperoleh :

$$\alpha\theta = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k)$$

$$\alpha\theta = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})$$

$$\theta = \frac{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})}{\alpha}$$

$$\text{Jika } \theta = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k)}{\alpha} = \frac{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})}{\alpha}$$

Maka fungsi kepadatan peluang dari model regresi gamma adalah sebagai berikut.

$$f(y_i) = \frac{1}{\left[\frac{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right]^\alpha} y_i^{\alpha-1} e^{-\frac{y_i}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})/\alpha}} \Gamma(\alpha) \quad (2.26)$$

2.4.1 Estimasi Parameter Model Regresi Gamma

Estimasi parameter menggunakan *maksimum likelihood estimation* (MLE) adalah estimasi parameter yang paling sering digunakan. Metode MLE bertujuan untuk memaksimalkan nilai fungsi likelihood (Casella & Berge, 2002). Dua parameter pada distribusi gamma yaitu parameter α dan parameter β . Fungsi kepadatan peluang (fkp) bersama dari \mathbf{y} adalah :

$$f(y_i) = \frac{1}{\left[\frac{\exp(x_i^T \boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right]^\alpha \Gamma(\alpha)} y_i^{\alpha-1} e^{-\frac{y_i}{\exp(x_i^T \boldsymbol{\beta})/\alpha}} \quad (2.27)$$

Sehingga fungsi likelihood dari persamaan (2.27) adalah :

$$\begin{aligned} L(\alpha, \boldsymbol{\beta}) &= \prod_{i=1}^n f(y_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\left[\frac{\exp(x_i^T \boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right]^\alpha \Gamma(\alpha)} y_i^{\alpha-1} e^{-\frac{y_i}{\exp(x_i^T \boldsymbol{\beta})/\alpha}} \\ &= \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^n \left(\frac{\exp \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\alpha^n} \right)^{-\alpha} \left(\prod_{i=1}^n y_i^{\alpha-1} \right) \exp \sum_{i=1}^n \left(\frac{-y_i}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})/\alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Fungsi *ln likelihood* berdasarkan persamaan (2.28) adalah:

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \boldsymbol{\beta}) &= \ln \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^n \left(\frac{\exp \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\alpha^n} \right)^{-\alpha} \left(\prod_{i=1}^n y_i^{\alpha-1} \right) \exp \sum_{i=1}^n \left(\frac{-y_i}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})/\alpha} \right) \right] \\ &= -n \ln \Gamma(\alpha) - \alpha \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \alpha(n \ln \alpha) + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \ln y_i - \sum_{i=1}^n \frac{-y_i}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})/\alpha} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Estimasi parameter regresi gamma diperoleh dari memaksimalkan nilai $L(\alpha, \boldsymbol{\beta} | y_i)$ dengan syarat turunan parsial pertama fungsi *ln likelihood* terhadap tiap parameter

yaitu $\frac{\partial \ln L(\alpha, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$ dan $\frac{\partial \ln L(\alpha, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha} = 0$. Turunan parsial fungsi *ln likelihood*

terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}$ adalah :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \alpha \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i y_i (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i y_i (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))^{-1} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sedangkan turunan parsial terhadap fungsi *ln likelihood* terhadap parameter α adalah :

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha} = -n \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma'(\alpha) - \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) + (n \ln \alpha + n) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})} = 0 \quad (2.31)$$

Persamaan (2.30) dan (2.31) tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga perlu digunakan metode optimasi numerik. Sehingga perlu digunakan metode optimasi numerik dengan algoritma iterasi Newton-Raphson. Analisis numerik bertujuan untuk memaksimumkan fungsi *ln likelihood*.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_m - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m) \quad (2.32)$$

Nilai awal $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ merupakan matriks yang berisi parameter $\left[\hat{\alpha}_{(0)} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)} \right]$, dimana $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)}$ diperoleh dari estimasi parameter regresi OLS $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ sedangkan $\hat{\alpha}_{(0)}$ dan $\hat{\tau}_{(0)}$ didapatkan dari Goodness of Fit Test variabel respon.

Vektor $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m)$ merupakan vektor yang berisi turunan fungsi pertama dari fungsi *ln*

Likelihood $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m) = \left[\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right]^T$. Matriks \mathbf{H} adalah matriks hessian yang

setiap elemennya berisi turunan kedua dari fungsi *ln Likelihood*. Matriks \mathbf{H} dapat diganti dengan matriks *Fisher-Information* (\mathbf{I}), matriks \mathbf{I} memiliki elemen ekspektasi turunan pertama fungsi *ln Likelihood* dikuadratkan (Hogg & Craig, 2005).

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial(\bullet)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial(\bullet)} \end{bmatrix} \quad (2.3318)$$

Berdasarkan persamaan 2.33, fungsi iterasi Newton-Raphson persamaan 2.32 menjadi persamaan 2.34 sebagai berikut.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_m - \mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m) \quad (2.34)$$

2.5 Pengujian Parameter Model Regresi Gamma

Pengujian parameter bertujuan untuk mengetahui ada atau tidaknya pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon baik secara serentak maupun parsial. Pada penelitian ini pengujian secara serentak dilakukan dengan menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) sedangkan secara parsial menggunakan uji *Z*.

a. Uji Serentak

Pengujian secara serentak bertujuan untuk mengetahui pengaruh variabel prediktor secara bersama-sama (simultan) terhadap variabel respon menggunakan MLRT.

Hipotesis :

$$H_0 : \beta_{11} = \beta_{12} = \dots = \beta_{lk} = \beta_{21} = \beta_{22} = \dots = \beta_{2k} = 0$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \beta_j \neq 0, \text{ dimana } j = 1, 2, \dots, k, \quad l = 1, 2$$

dengan k adalah banyaknya variabel prediktor.

Statistik uji yang digunakan:

$$G^2 = -2 \ln \Lambda = -2 \ln(L(\hat{\omega}) - L(\hat{\Omega})) \quad (2.35)$$

Dimana (Λ) merupakan *odd ratio*,

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \ln(L(\hat{\omega}) - L(\hat{\Omega})) \quad (2.36)$$

Nilai $L(\hat{\Omega})$ dan $L(\hat{\omega})$ diperoleh dengan memaksimumkan nilai *likelihood* menggunakan MLE dengan metode optimasi Newton-Raphson sehingga diperoleh nilai untuk masing-masing parameter. G^2 mengikuti distribusi χ^2 $G_{hitung}^2 > \chi_{k,\alpha}^2$. dengan derajat bebas k , di mana k adalah banyaknya prediktor.

Kriteria pengambilan keputusan adalah tolak H_0 apabila

b. Uji Parsial

Pengujian secara parsial bertujuan untuk mengetahui pengaruh variabel prediktor secara individual terhadap variabel respons. Uji ini dilakukan apabila pada pengujian secara serentak yang dilakukan sebelumnya diputuskan untuk menolak H_0 .

Hipotesis :

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0, \text{ dimana } j = 1, 2, \dots, k, \quad l = 1, 2$$

Statistik uji :

$$Z = \frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)}; \text{ dimana } SE(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_j)} \quad (2.37)$$

$\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ merupakan elemen diagonal utama matriks $\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ dengan indeks yang sesuai . Daerah penolakan, tolak H_0 jika nilai $|z| > z_{(\alpha/2)}$.

2.6 Interpretasi Model BGR

Interpretasi model BGR dilakukan terhadap model survival. Perubahan nilai μ karena perubahan nilai kovariat tertentu dari x_k ke $x_{ki} + \Delta$ diberikan oleh

$$\ln \mu_l(\mathbf{x} | x_j + \Delta) - \ln \mu_l(\mathbf{x} | x_j) = \Delta \beta_{lj},$$

atau ekuivalen

$$R_{\mu_l}(x_j) = \frac{\mu_l(\mathbf{x} | x_j + \Delta)}{\mu_l(\mathbf{x} | x_j)} = \exp(\Delta \beta_{lj}), \quad l = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2.38)$$

dimana $R_{\mu_l}(x_j)$ menyatakan rasio nilai parameter μ . Berdasarkan persamaan 2.38, dapat dijelaskan bahwa setiap kenaikan nilai kovariat x_j sebesar Δ satuan, maka nilai parameter μ menjadi $\exp(\Delta \beta_{lj})$ kali (Hosmer, Lemeshow, & Mary, 2008).

2.7 Pencemaran Sungai

Sungai adalah sistem pengaliran air dari mulai mata air sampai ke muara dengan dibatasi kanan kirinya serta sepanjang pengalirannya oleh sempadan sungai (Sudaryoko, 1986). Menurut Dinas Pekerjaan Umum, sungai sebagai salah satu sumber air mempunyai fungsi yang sangat penting bagi kehidupan dan penghidupan masyarakat. Menurut Peraturan Pemerintah Nomor 35 Tahun 1991 tentang Sungai, sungai merupakan tempat-tempat dan wadah-wadah serta jaringan pengaliran air mulai dari mata air sampai muara dengan dibatasi kanan dan kirinya serta sepanjang pengalirannya oleh garis sempadan.

Sungai yang masih alamiah dapat berfungsi sebagai aerasi alamiah yang akan meningkatkan atau menjaga kandungan oksigen air di sungai. Menurut sungai merupakan bagian lingkungan yang paling cepat mengalami perubahan jika terdapat aktivitas manusia di sekitarnya. Sungai yang menerima bahan pencemar mampu memulihkan diri (*self-purification*) dengan cepat, terutama terhadap limbah penyebab penurunan kadar oksigen (*oxygen demanding wastes*) dan limbah panas. Kemampuan sungai dalam memulihkan diri dari pencemaran tergantung pada ukuran sungai dan laju aliran air sungai dan volume serta frekuensi limbah yang masuk (Miller, 1975).

Indikator atau tanda bahwa air lingkungan telah tercemar adalah adanya perubahan atau tanda yang dapat diamati dari parameter fisika, kimia maupun biologi. Indikator yang umum diketahui pada pemeriksaan pencemaran air adalah oksigen terlarut (*Dissolved Oxygen* atau DO), kebutuhan oksigen biokimia (*Biochemiycal Oxygen Demand* atau BOD), kebutuhan oksigen kimiawi (*Chemical Oxygen Demand* atau COD) dan total padatan tersuspensi (*Total Suspended Solid*). Penelitian ini menggunakan beberapa faktor-faktor yang digunakan untuk pemodelan, diantaranya :

a. *Biochemiycal Oxygen Demand* (BOD)

BOD merupakan kebutuhan oksigen biologis menunjukkan jumlah oksigen terlarut yang dibutuhkan oleh mikroorganisme hidup untuk memecah atau mengoksidasi bahan organik dalam air. Jumlah BOD dalam perairan berbanding terbalik dengan jumlah DO, maka apabila dalam suatu perairan memiliki jumlah

BOD yang tinggi maka secara tidak langsung kebutuhan oksigen terlarut dalam air berkurang yang mengakibatkan terancamnya kehidupan biota perairan (Dinas Lingkungan Hidup Surabaya, 2016).

b. *Dissolved Oxygen (DO)*

DO merupakan banyaknya oksigen terlarut dalam suatu perairan. Semakin besar nilai kandungan DO, maka kualitas air tersebut semakin bagus. Oksigen terlarut sangat berperan pada proses respirasi atau pernapasan oleh biota air karena merupakan sumber oksigen yang berada dalam air (Dinas Lingkungan Hidup Surabaya, 2016).

c. Suhu

Pengamatan suhu dimaksudkan untuk mengetahui kondisi perairan dan interaksi antara suhu dengan aspek kesehatan habitat dan biota air lainnya. Suhu air buangan kebanyakan lebih tinggi daripada suhu badan air. Kenaikan suhu air akan menimbulkan jumlah oksigen terlarut di dalam air menurun, kecepatan reaksi kimia meningkat, kehidupan ikan dan hewan air lainnya terganggu. Jika batas suhu yang mematikan terlampaui, ikan dan hewan air lainnya akan mati.

d. Nitrit

Nitrit merupakan bentuk nitrogen yang hanya sebagian teroksidasi. Nitrit tidak ditemukan dalam air limbah yang segar, melainkan dalam limbah yang sudah basi atau lama. Nitrit tidak dapat bertahan lama dan merupakan keadaan sementara proses oksidasi antara amoniak dan nitrat. Nitrit bersumber dari bahan-bahan yang bersifat korosif dan banyak dipergunakan di pabrik-pabrik. Nitrit tidak tetap dan dapat berubah menjadi amoniak atau dioksidasi menjadi nitrat. Pengaruh nitrit pada kesehatan manusia, yaitu dapat menyebabkan methemoglobinemia dan efek racun kandungan nitrit dalam air lebih besar dari 0 mg/L.

e. Nitrat

Nitrat (NO_3) adalah bentuk utama nitrogen di perairan alami, bersifat stabil, dan mudah larut dalam air. Senyawa ini dihasilkan dari proses oksidasi sempurna senyawa nitrogen di perairan. Bila terjadi hujan lebat, air akan membawa nitrat dari tanah masuk ke dalam aliran sungai, danau, dan waduk. Kemudian menuju lautan dalam kadar yang cukup tinggi. Hal ini akan merangsang tumbuhnya algae dan tanaman air lainnya. Kelimpahan unsur nutrisi nitrat ini dalam air disebut *Eutrophication*. Pengaruh negatif eutropikasi ini ialah terjadinya perubahan keseimbangan kehidupan antara tanaman air dan hewan air.

f. Fosfat

Fosfat adalah bentuk fosfor yang dapat dimanfaatkan oleh tumbuhan dan merupakan unsur esensial bagi tumbuhan tingkat tinggi dan algae sehingga dapat mempengaruhi tingkat produktivitas perairan. Fosfat yang terkandung dalam air laut, baik bentuk terlarut maupun tersuspensi, keduanya berada dalam bentuk organik dan anorganik. Keberadaan fosfat yang berlebihan di badan air menyebabkan suatu fenomena eutrofikasi atau perkembangan tumbuhan alga di permukaan air tidak terkendali, sehingga dapat menutup permukaan air. Terjadinya eutrofik akan menyebabkan kadar oksigen dan sinar matahari berkurang karena terhalangi oleh tumbuhan air yang berkembang pesat. Air dikatakan eutrofik apabila konsentrasi total fosfat dalam air 35-100 $\mu\text{g/L}$. Kondisi eutrofik akan menyebabkan kerusakan yang terjadi di wilayah sungai tersebut, misalnya erosi dan sedimentasi yang mengakibatkan banjir (Yogiarti, Setiawan, & Parthasutema, 2007).

g. pH Air

Derajat keasaman atau pH air akan sangat menentukan aktivitas mikroorganisme. Air normal yang memenuhi syarat untuk suatu kehidupan mempunyai pH sekitar 6,5 – 7,5, pada pH tersebut aktivitas mikroorganisme sangat baik. Pada pH yang sangat kecil atau sangat besar, mikroorganisme tidak aktif, atau bahkan akan mati (Sugiharto, 1987).

BAB 3

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai langkah-langkah penaksiran parameter dan statistik uji model *Bivariate Gamma regression*, serta tahapan penerapannya pada kasus pencemaran air sungai di Surabaya.

3.1 Langkah-Langkah Penaksiran Parameter *Bivariate Gamma Regression*

Langkah-langkah untuk memperoleh bentuk penaksiran parameter pada model BGR sebagai berikut :

1. Mengestimasi parameter model *Bivariate Gamma Regression* dengan langkah-langkah sebagai berikut :
 - a. Membentuk model *Bivariate Gamma Regression*.

Y_{1i} dan Y_{2i} adalah variabel respon berdistribusi gamma dan $\mathbf{x}_i = [1 \ x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{ik}]^T$ variabel prediktor. Jika parameter skala distribusi bivariate gamma adalah μ_1 dan μ_2 sebagai fungsi variabel prediktornya, sehingga model *Bivariate Gamma Regression* adalah,

$E(Y_1) = \mu_1 = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_1)$ dan $E(Y_2) = \mu_2 = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_2)$, dan fungsi model *Bivariate Gamma Regression* yaitu,

$$f(y_1, y_2) = C(y_1 y_2)^{\tau-1} \left(\frac{y_1}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_2}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)^{\alpha-2\tau} \times \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_1}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_2}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)$$

- b. Membentuk model fungsi logaritma natural likelihood dari model *Bivariate Gamma Regression*.

$$\begin{aligned}
\ln L(\alpha, \tau, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) &= \ln \left[\prod_{i=1}^n C_i (y_{1i} y_{2i})^{\tau-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)^{\alpha-2\tau} \times \right. \\
&\quad \left. \prod_{i=1}^n \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \ln C_i + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i}, y_{2i}) + \\
&\quad (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \right) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)
\end{aligned}$$

- c. Mencari turunan parsial pertama fungsi *ln likelihood* terhadap tiap parameter yaitu $\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial \ln L}{\partial \tau} = 0, \frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = 0, \frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = 0$.
- d. Apabila langkah sebelumnya tidak menghasilkan bentuk yang *close form*, maka dilakukan estimasi menggunakan metode optimasi Newton Raphson.
2. Mendapatkan statistik uji pada model *Bivariate Gamma Regression* dengan langkah-langkah sebagai berikut :

- Membentuk hipotesis

$$H_0 : \beta_{11} = \beta_{12} = \dots = \beta_{1k} = \beta_{21} = \beta_{22} = \dots = \beta_{2k} = 0$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \beta_j \neq 0, \text{ dimana } j = 1, 2, \dots, k, l = 1, 2$$

- Menentukan himpunan parameter di bawah populasi (Ω) adalah:

$$\Omega = \{ \alpha, \tau, \beta_{10}, \beta_{11}, \dots, \beta_{1k}, \beta_{20}, \beta_{21}, \dots, \beta_{2k} \} = \{ \alpha, \tau, \boldsymbol{\beta} \}$$

- Menentukan himpunan parameter di bawah $H_0(\omega)$ adalah:

$$\omega = \{ \alpha, \tau, \beta_{10}, \beta_{20} \}$$

- Langkah selanjutnya adalah memaksimumkan fungsi *likelihood* di bawah populasi ($L(\Omega)$)

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^n f(y_{1i}, y_{2i} | \Omega)$$

$$L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} L(\Omega)$$

- Memaksimumkan fungsi *likelihood* di bawah $H_0(L(\omega))$.

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^n f(y_{1i}, y_{2i} | \omega)$$

$$L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} L(\omega)$$

- Menentukan Statistik uji

$$G^2 = -2 \ln \Lambda = -2 \ln(L(\hat{\omega}) - L(\hat{\Omega}))$$

- Menentukan daerah penolakan

Kriteria pengambilan keputusan adalah tolak H_0 apabila $G_{hitung}^2 >$

$$\chi_{2k, \alpha}^2$$

3.2 Penerapan *Bivariate Gamma Regression* pada Pencemaran Air Sungai di Surabaya

3.2.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Dinas Lingkungan Hidup Kota Surabaya. Data yang digunakan adalah data indikator pencemaran air sungai yaitu *Biological Oxygen Demand* (BOD) dan *Dissolved Oxygen* (DO) serta faktor-faktor yang mempengaruhinya. antara lain: fosfat, pH air, nitrat, nitrit, dan temperatur atau suhu. Jumlah data yang digunakan sebanyak 30 data dari lokasi dan waktu pengambilan sampel yang berbeda. Pengambilan data dilakukan selama pada waktu yang berbeda, perlu dipastikan terlebih dahulu tidak ada dependensi waktu melalui uji autokorelasi.



Gambar 3. 1 Peta Sungai di Kota Surabaya

(Sumber : Dinas Lingkungan Hidup Surabaya, 2016)

3.2.2 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

Tabel 3. 1 Variabel Penelitian

Kode	Variabel	Satuan	Definisi Operasional
Y ₁	BOD	mg/L	Jumlah oksigen yang dibutuhkan mikroorganisme dalam 1 liter air sungai
Y ₂	DO	mg/L	Jumlah oksigen dalam 1 liter air sungai
X ₁	Fosfat	mg/L	Jumlah oksigen yang terkandung dalam 1 liter air
X ₂	pH air	-	Kandungan pH air dalam perairan sungai
X ₃	Nitrat	mg/L	Jumlah nitrat dalam 1 liter air sungai
X ₄	Nitrit	mg/L	Jumlah nitrat dalam 1 liter air sungai
X ₅	Temperatur	⁰ C	Suhu air dalam perairan sungai

Penelitian ini menggunakan kandungan BOD dan DO sebagai variabel respon. Sedangkan variabel prediktornya adalah kandungan fosfat, pH air, nitrat, nitrit, dan temperatur.

Tabel 3. 2 Struktur Data

Sampel Sungai	Respon		Prediktor			
(i)	Y ₁	Y ₂	X ₁	X ₂	...	X _p
1	Y _{1,1}	Y _{1,2}	X _{1,1}	X _{1,2}	...	X _{1,p}
2	Y _{2,1}	Y _{2,2}	X _{2,1}	X _{2,2}	...	X _{2,p}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	Y _{n,1}	Y _{n,2}	X _{n,1}	X _{n,2}	...	X _{n,p}

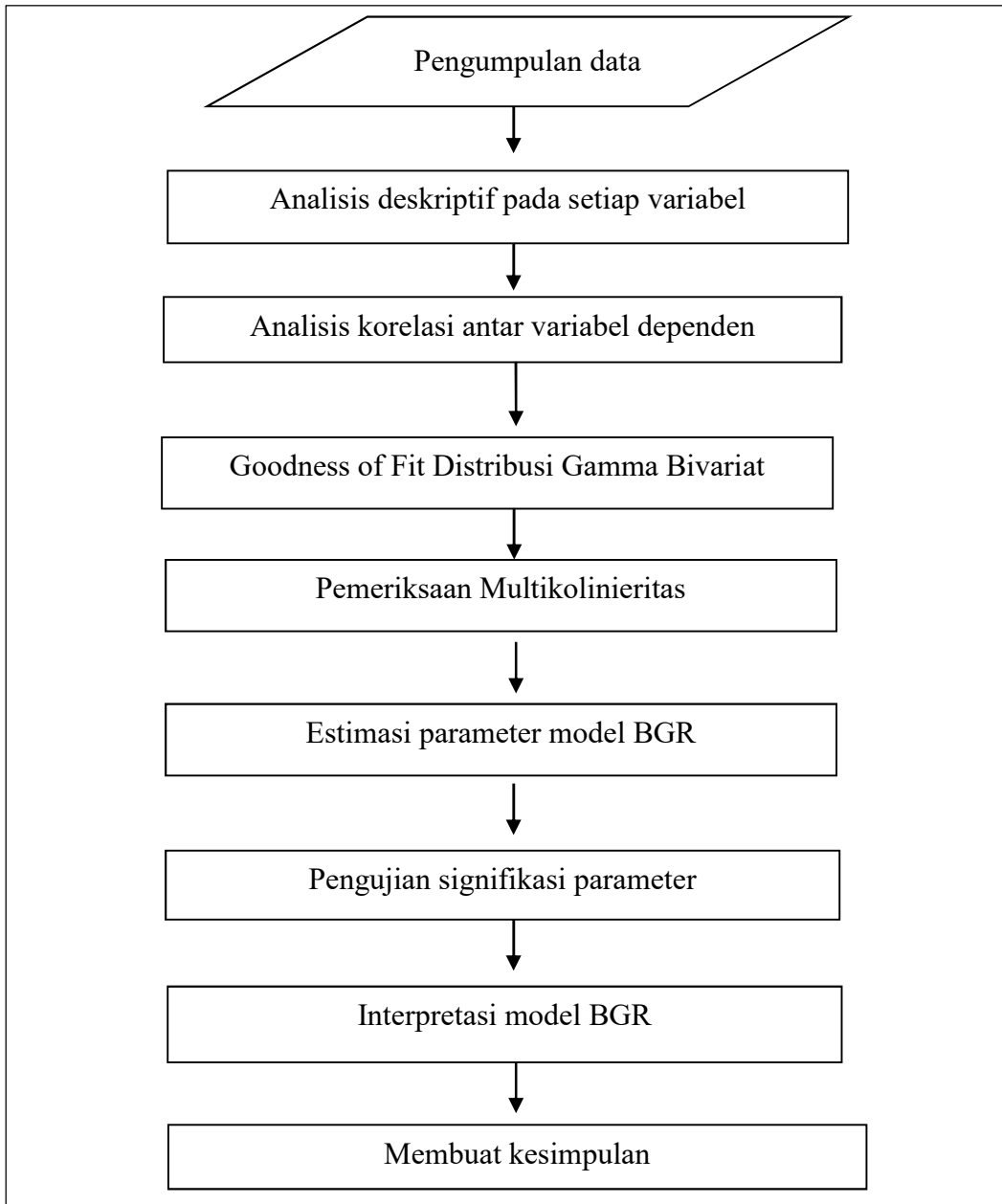
3.2.3 Penerapan Gamma Bivariat Regression pada Data Pencemaran Sungai di Surabaya

Langkah-langkah yang dilakukan untuk penerapan metode *Bivariate Gamma Regression* pada data pencemaran sungai di Surabaya adalah :

- a. Melakukan analisis deskriptif pada variabel respon, yaitu BOD dan DO serta faktor-faktor yang mempengaruhinya dengan menggunakan statistika deskriptif

- b. Menguji distribusi Gamma Bivariat pada variabel respon.
- c. Melakukan analisis korelasi antara variabel respon Y_1 (BOD) dan Y_2 (DO)
- d. Melakukan uji multikolinieritas pada variabel prediktor
- e. Mengkonstruksi *Bivariate Gamma Regression* yang meliputi:
 - Membangun model *Bivariate Gamma Regression*
 - Menaksir parameter model *Bivariate Gamma Regression*
 - Menentukan statistik uji kesesuaian model *Bivariate Gamma Regression*
 - Menentukan statistik uji parameter model *Bivariate Gamma Regression*
- f. Melakukan interpretasi model dan penarikan kesimpulan.

Tahapan dari analisis *Bivariate Gamma Regression* pada studi kasus pencemaran sungai adalah sebagai berikut:



Gambar 3. 2 Tahapan dari analisis *Bivariate Gamma Regression*

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan hasil dan pembahasan penelitian diantaranya estimasi parameter dan statistik uji pada Bivariate Gamma Regression (BGR) dan algoritma estimasi parameter dan statistik uji pada BGR. Algoritma tersebut diterapkan pada data pencemaran air sungai di Surabaya.

4.1 Estimasi Parameter pada Model BGR

Sub bab ini membahas tentang proses estimasi parameter dan statistik uji BGR. Pada model BGR parameter skalanya μ_1 dan μ_2 merupakan fungsi dari variabel prediktornya, yaitu $E(Y_1) = \mu_1 = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_1)$ dan $E(Y_2) = \mu_2 = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_2)$ dengan $\boldsymbol{\beta}_l = (\beta_{l0} \beta_{l1} \dots \beta_{lk})^T$, $l = 1, 2$ dan $\mathbf{x} = (1 X_1 \dots X_k)^T$ serta fungsi kepadatan peluang model BGR adalah sebagai berikut.

$$f(y_1, y_2) = C(y_1 y_2)^{\tau-1} \left(\frac{y_1}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_2}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)^{\alpha-2\tau} \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_1}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_2}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)$$

Tahap pertama untuk mendapatkan estimasi parameter BGR menggunakan *maximum likelihood estimation* (MLE) adalah membentuk fungsi likelihood yang didefinisikan sebagai berikut.

$$L(\alpha, \tau, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = \prod_{i=1}^n C_i \prod_{i=1}^n (y_{1i} y_{2i})^{\tau-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)^{\alpha-2\tau} \times \prod_{i=1}^n \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)$$

dimana

$$C_i = \left(\left(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right)^\tau \Gamma(\tau) \Gamma(\alpha) \right)^{-1}$$

Tahap kedua adalah membentuk fungsi logaritma natural likelihood dari persamaan (4.2) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\ln L(\alpha, \tau, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) &= \ln \left[\prod_{i=1}^n C_i (y_{1i} y_{2i})^{\tau-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)^{\alpha-2\tau} \times \right. \\
&\quad \left. \prod_{i=1}^n \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \ln(C_i) + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i} y_{2i}) + \\
&\quad (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \right) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \\
\sum_{i=1}^n \ln(C_i) &= -\tau \sum_{i=1}^n \left(\ln(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)) + \ln(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) \right) - n \ln \Gamma(\tau) - n \ln \Gamma(\alpha) \\
&= -\tau \sum_{i=1}^n \left((\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right) - n \ln \Gamma(\tau) - n \ln \Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

Memaksimalkan fungsi *ln likelihood* $f(y_i | \alpha, \tau, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$ dengan mencari turunan parsial pertamanya.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\bullet)} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^n \ln(C_i) + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i}, y_{2i}) + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \\
&= -\frac{n}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \ln \left(-\Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \right. \\
&\quad \left. \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) - \left(\frac{1}{\Gamma(1 - 2\tau + \alpha)} \left((-\Psi(1 - 2\tau + \alpha) - \pi \cot(\pi\alpha - 2\pi\tau) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \ln(y_{1i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + y_{2i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) \right) \pi \csc(\pi\alpha - 2\pi\tau) \right) \right) + \\
&\quad \frac{1}{(-2\tau + \alpha)^2} \left((y_{1i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + y_{2i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^{2\tau - \alpha} \text{hypergeom}([2\tau - \alpha], [1 + 2\tau - \alpha], \right. \\
&\quad \left. - y_{1i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) - y_{2i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{i=1}^n \ln(C_i) + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i}, y_{2i}) + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \\
&= -\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) - \frac{n}{\Gamma(\tau)} + \sum_{i=1}^n \ln y_{1i} y_{2i} - 2 \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \ln \left(2\Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) - \right. \\
&\quad \left. 2 \left(\frac{1}{\Gamma(1 - 2\tau + \alpha)} \left((-\Psi(1 - 2\tau + \alpha) - \pi \cot(\pi\alpha - 2\pi\tau) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \ln(y_{1i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + y_{2i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) \right) \pi \csc(\pi\alpha - 2\pi\tau) \right) \right) + \\
&\quad \frac{1}{(-2\tau + \alpha)^2} \left((y_{1i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + y_{2i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^{2\tau - \alpha} \text{hypergeom}([2\tau - \alpha], [1 + 2\tau - \alpha], \right. \\
&\quad \left. - y_{1i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) - y_{2i} \exp(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \sum_{i=1}^n \ln(C_i) + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i}, y_{2i}) + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \\
&= -\tau \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \frac{y_{1i} \mathbf{x}_i^T}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)} \right) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \frac{\ln y_{1i} \mathbf{x}_i^T \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)^{2\tau - \alpha - 1} \exp \left(-\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} - \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \sum_{i=1}^n \ln(C_i) + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i}, y_{2i}) + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \\
&= -\tau \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \frac{y_{2i} \mathbf{x}_i^T}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)} \right) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \frac{\ln y_{2i} \mathbf{x}_i^T \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)^{2\tau - \alpha - 1} \exp \left(-\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} - \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil turunan pertama pada model BGR dapat dilihat bahwa menunjukkan hasil yang tidak dapat menyelesaikan fungsi secara analitis untuk mendapatkan masing-masing parameter. Hal tersebut dapat diselesaikan dengan penyelesaian metode analisis numerik, metode yang digunakan adalah metode Newton Raphson. Proses iterasi menggunakan Newton Raphson memerlukan matrik Hessian. Pada penelitian ini matriks Hessian diganti dengan matriks Fisher Information, sehingga tidak dibutuhkan turunan kedua.

Langkah selanjutnya adalah melakukan optimasi, berikut merupakan algoritma dari metode numerik Newton Raphson.

Step 1 : Set data yang sesuai untuk model fungsi BGR

Step 2 : Membentuk fungsi Likelihood fungsi BGR

Step 3 : Membentuk fungsi Ln Likelihood fungsi BGR

Step 4 : Set nilai awal $\hat{\theta}_{(0)} = [\hat{\alpha}_{(0)} \hat{\tau}_{(0)} \hat{\beta}_{1(0)}^T \hat{\beta}_{2(0)}^T]$

$$\hat{\beta}_{1(0)} = \begin{bmatrix} 0,889 \\ 0,388 \\ -0,106 \\ -0,009 \\ -0,052 \\ 0,0009 \end{bmatrix} \text{ dan } \hat{\beta}_{2(0)} = \begin{bmatrix} -0,530 \\ 0,169 \\ 0,021 \\ 0,034 \\ 0,007 \\ 0,018 \end{bmatrix} \text{ didapatkan dari estimasi parameter}$$

regresi gamma univariat, sedangkan $\hat{\alpha}_{(0)} = 20.473$ dan $\hat{\tau}_{(0)} = 9.382$

didapatkan dari estimasi parameter distribusi Gamma variabel respon.

Step 5 : Menentukan vektor gradien yang setiap elemennya terdiri dari turunan fungsi pertama dari fungsi ln Likelihood BGR

$$\mathbf{g}(\hat{\theta}_m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} & \frac{\partial \ln L}{\partial \tau} & \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} \right)^T & \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_2} \right)^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1816,830 \\ 1901,312 \\ 2236,508 \\ 1712,295 \\ 6473,073 \\ 2724,268 \\ 1680,068 \\ 22040,647 \\ 1577,420 \\ 1318,654 \\ 3567,898 \\ 1776,117 \\ 1289,472 \\ 10874,290 \end{bmatrix}$$

Step 6 : Menentukan matriks *Fisher Information* (Lampiran 5)

$$\mathbf{I} = \left[\frac{\partial \ln L}{\partial (\bullet)} \right] \left[\frac{\partial \ln L}{\partial (\bullet)} \right]^T = \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m)^T$$

Step 7 : Set iterasi Newton-Raphson $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_m - \mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m)$

Step 8 : Stop iterasi ketika $\sqrt{(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1})^T (\hat{\boldsymbol{\theta}}_m - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1})} \leq \varepsilon$ sehingga diperoleh suatu nilai yang konvergen, jika belum maka kembali ke step 4 dengan $m = m + 1$.

Step 9 : Set output estimasi parameter.

4.2 Statistik Uji pada Model BGR

Terdapat dua pengujian parameter model BGR, yaitu pengujian serentak dan parsial. Pengujian serentak menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT), dan pengujian parameter secara parsial menggunakan uji Z.

4.2.1 Pengujian Hipotesis Parameter Secara Serentak

Pengujian serentak bertujuan untuk menguji apakah parameter yang dihasilkan telah signifikan atau tidak secara bersama-sama dengan menggunakan MLRT. Langkah pertama untuk pengujian hipotesis secara serentak adalah menentukan hipotesis sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_{11} = \beta_{12} = \dots = \beta_{15} = \beta_{21} = \beta_{22} = \dots = \beta_{25} = 0$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \beta_{lj} \neq 0, \text{ dimana } j = 1, 2, \dots, 5, \quad l = 1, 2$$

Setelah menentukan hipotesis, langkah selanjutnya adalah menentukan himpunan parameter di bawah populasi $\Omega = \{\alpha, \tau, \beta_{10}, \beta_{11}, \dots, \beta_{15}, \beta_{20}, \beta_{21}, \dots, \beta_{25}\} = \{\alpha, \tau, \boldsymbol{\beta}\}$ dan himpunan parameter di bawah $H_0(\omega)$ yaitu $\omega = \{\alpha, \tau, \beta_{10}, \beta_{20}\}$. Sehingga didapatkan fungsi likelihood himpunan parameter di bawah populasi sebagai berikut :

$$f(y_i | \Omega) = C(y_1, y_2)^{\tau-1} \left(\frac{y_1}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_2}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)^{\alpha-2\tau} \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_1}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_2}{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)$$

dimana

$$C_i = \left(\left(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right)^\tau \Gamma(\tau) \Gamma(\alpha) \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} L(\Omega) &= \prod_{i=1}^n f(y_i | \Omega) \\ &= \prod_{i=1}^n C_i (y_{1i} y_{2i})^{\tau-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)^{\alpha-2\tau} \prod_{i=1}^n \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \end{aligned}$$

dan fungsi likelihood di bawah $H_0(\omega)$ adalah sebagai berikut :

$$f(y_i | \omega) = C(y_{1i} y_{2i})^{\tau-1} \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right)^{\alpha-2\tau} \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right)$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &= \prod_{i=1}^n f(y_i | \omega) \\ &= \prod_{i=1}^n C(y_{1i} y_{2i})^{\tau-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right)^{\alpha-2\tau} \prod_{i=1}^n \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \end{aligned}$$

Setelah mendapatkan fungsi likelihood, selanjutnya menentukan fungsi ln likelihood himpunan parameter di bawah populasi dan di bawah $H_0(\omega)$.

$$\begin{aligned} \ln L(\Omega) &= \ln \left[\prod_{i=1}^n C_i (y_{1i} y_{2i})^{\tau-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right)^{\alpha-2\tau} \times \right. \\ &\quad \left. \prod_{i=1}^n \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \ln(C_i) + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i} y_{2i}) + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \right) + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + \frac{y_{2i}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) \end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \ln(C_i) &= -\tau \sum_{i=1}^n \left(\ln(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)) + \ln(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) \right) - n \ln \Gamma(\tau) - n \ln \Gamma(\alpha) \\ &= -\tau \sum_{i=1}^n \left((\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right) - n \ln \Gamma(\tau) - n \ln \Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln L(\omega) &= \ln \left[\prod_{i=1}^n C_i (y_{1i} y_{2i})^{\tau-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right)^{\alpha-2\tau} \times \right. \\
&\quad \left. \prod_{i=1}^n \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \right] \\
&= n \ln C + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i} y_{2i}) + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \right) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right)
\end{aligned}$$

dimana

$$C_i = C$$

$$C = \left((\exp(\beta_{01}) \exp(\beta_{02}))^\tau \Gamma(\tau) \Gamma(\alpha) \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
n \ln(C) &= -n\tau \left(\ln(\exp(\beta_{01})) + \ln(\exp(\beta_{02})) \right) - n \ln \Gamma(\tau) - n \ln \Gamma(\alpha) \\
&= -n\tau(\beta_{01} + \beta_{02}) - n \ln \Gamma(\tau) - n \ln \Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya memaksimumkan fungsi ln likelihood $L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} L(\Omega)$ dan

$L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} L(\omega)$ dengan mencari turunan parsial pertama, berikut merupakan

turunan parsial pertama masing-masing parameter di bawah $H_0(\omega)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} n \ln C + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i} y_{2i}) + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \\
&= -\frac{n}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) + \sum_{i=1}^n \ln \left(-\Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \right) \\
&\quad \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) - \left(\frac{1}{\Gamma(1 - 2\tau + \alpha)} \left((-\Psi(1 - 2\tau + \alpha) - \pi \cot(\pi\alpha - 2\pi\tau) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \ln(y_{1i} \exp(-\beta_{01}) + y_{2i} \exp(-\beta_{02}))) \pi \csc(\pi\alpha - 2\pi\tau) \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{(-2\tau + \alpha)^2} \left((y_{1i} \exp(-\beta_{01}) + y_{2i} \exp(-\beta_{02}))^{2\tau - \alpha} \text{hypergeom}([2\tau - \alpha], [1 + 2\tau - \alpha], \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_{1i} \exp(-\beta_{01}) - y_{2i} \exp(-\beta_{02})) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} n \ln C + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i} y_{2i}) + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \\
&= -n(\beta_{01} + \beta_{02}) - \frac{n}{\Gamma(\tau)} + \sum_{i=1}^n \ln y_{1i} y_{2i} - 2 \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \ln \left(2\Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \right) \\
&\quad \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) - 2 \left(\frac{1}{\Gamma(1 - 2\tau + \alpha)} \left((-\Psi(1 - 2\tau + \alpha) - \pi \cot(\pi\alpha - 2\pi\tau) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \ln(y_{1i} \exp(-\beta_{01}) + y_{2i} \exp(-\beta_{02}))) \pi \csc(\pi\alpha - 2\pi\tau) \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{(-2\tau + \alpha)^2} \left((y_{1i} \exp(-\beta_{01}) + y_{2i} \exp(-\beta_{02}))^{2\tau - \alpha} \text{hypergeom}([2\tau - \alpha], [1 + 2\tau - \alpha], \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_{1i} \exp(-\beta_{01}) - y_{2i} \exp(-\beta_{02})) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \beta_{01}} &= \frac{\partial}{\partial \beta_{01}} n \ln C + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i} y_{2i}) + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \\
&= -n\tau + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n - \frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01}) \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right)} \right) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \frac{\ln y_{1i} \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right)^{2\tau - \alpha - 1} \exp \left(-\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} - \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right)}{\exp(\beta_{01})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \beta_{02}} &= \frac{\partial}{\partial \beta_{02}} n \ln C + (\tau - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_{1i} y_{2i}) + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \ln \Gamma \left(2\tau - \alpha, \frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right) \\
&= -n\tau + (\alpha - 2\tau) \left(\sum_{i=1}^n - \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02}) \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right)} \right) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \frac{\ln y_{2i} \left(\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} + \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right)^{2\tau - \alpha - 1} \exp \left(-\frac{y_{1i}}{\exp(\beta_{01})} - \frac{y_{2i}}{\exp(\beta_{02})} \right)}{\exp(\beta_{02})}
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil penurunan pertama fungsi ln likelihood menunjukkan bahwa masih mengandung parameter, sehingga fungsi tidak *close form*. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai $L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} L(\Omega)$ dan $L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} L(\omega)$ dilakukan optimasi dengan metode Newton-Raphson. Algoritma iterasi Newton-Raphson untuk himpunan parameter di bawah populasi telah dijelaskan pada sub

bab 4.1. Berikut merupakan algoritma iterasi Newton-Raphson untuk himpunan parameter di bawah H_0 :

Step 1 : Set data yang sesuai untuk model fungsi BGR

Step 2 : Membentuk fungsi Likelihood fungsi BGR untuk himpunan parameter di bawah H_0

Step 3 : Membentuk fungsi Ln Likelihood fungsi BGR untuk himpunan parameter di bawah H_0

Step 4 : Set nilai awal $\hat{\omega}_{(0)} = [\hat{\alpha}_{(0)} \hat{\tau}_{(0)} \hat{\beta}_{01(0)} \hat{\beta}_{02(0)}] = [9,38 \quad 20,47 \quad 0,88 \quad -0,53]$

$\hat{\beta}_{01(0)}$ dan $\hat{\beta}_{02(0)}$ didapatkan dari estimasi parameter regresi gamma univariat sedangkan $\hat{\alpha}_{(0)}$ dan $\hat{\tau}_{(0)}$ didapatkan estimasi parameter distribusi Gamma variabel respon.

Step 5 : Menentukan vektor gradien yang setiap elemennya terdiri dari turunan fungsi pertama dari fungsi Ln Likelihood BGR

$$\mathbf{g}(\hat{\omega}_m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} & \frac{\partial \ln L}{\partial \tau} & \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_{01}} & \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_{02}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2738,757 \\ 2823,240 \\ 273,114 \\ 673,685 \end{bmatrix}$$

Step 6 : Menentukan matriks *Fisher Information* (Lampiran 8)

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial (\bullet)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial (\bullet)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\hat{\omega}_m) \mathbf{g}(\hat{\omega}_m)^T \end{bmatrix}$$

Step 7 : Set iterasi Newton-Raphson $\hat{\omega}_{m+1} = \hat{\omega}_m - \mathbf{I}^{-1}(\hat{\omega}_m) \mathbf{g}(\hat{\omega}_m)$

Step 8 : Stop iterasi ketika $\sqrt{(\hat{\omega}_m - \hat{\omega}_{m-1})^T (\hat{\omega}_m - \hat{\omega}_{m-1})} \leq \varepsilon$ sehingga diperoleh suatu nilai yang konvergen, jika belum maka kembali ke step 4 dengan $m = m + 1$.

Step 9 : Set output estimasi parameter di bawah H_0 .

Setelah diperoleh nilai estimasi parameter di bawah H_0 , selanjutnya menghitung statistik uji dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$G^2 = -2 \ln \Lambda = -2 \ln(L(\hat{\omega}) - L(\hat{\Omega}))$$

$$= -2(\ln L(\hat{\omega}) - \ln L(\hat{\Omega}))$$

G^2 mengikuti distribusi χ^2 sehingga dengan n yang cukup besar maka $G^2 \sim \chi_{\alpha, 2k}^2$. Daerah penolakan dari hasil parameter yang diperoleh merupakan suatu nilai *ln likelihood* di bawah H_0 dan populasi yaitu tolak H_0 jika $G^2 > \chi_{\alpha, 2k}^2$. Jika H_0 ditolak pada pengujian serentak, maka langkah selanjutnya adalah melakukan pengujian parameter secara parsial.

4.3 Aplikasi *Bivariate Gamma Regression* (BGR) pada Studi Kasus Pencemaran Air Sungai di Surabaya

Analisis model BGR pada penelitian ini akan diaplikasikan pada kasus pencemaran air sungai di Surabaya tahun 2016. Variabel yang digunakan adalah kadar BOD dan DO sebagai variabel respon, sedangkan variabel prediktornya adalah kadar Fosfat, pH, Nitrat, Nitrit, dan Temperatur.

4.3.1 *Goodness of Fit Test* Distribusi Gamma

Pengujian distribusi pada masing variabel respon BOD dan DO menggunakan dengan pengujian Anderson-Darling. Hasil pengujian beberapa distribusi disajikan pada Tabel 4.1. Hipotesis yang digunakan dalam pengujian AD adalah sebagai berikut.

Hipotesis :

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \text{ (Distribusi data sesuai dengan distribusi tertentu)}$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x) \text{ (Distribusi data tidak sesuai dengan distribusi tertentu)}$$

Tabel 4. 1 *Goodness of Fit Test* Variabel Respon

Distribusi	BOD		DO	
	Statistik Uji	P -value	Statistik Uji	P -value
Gamma (2 parameter)	0,492	0,231	0,644	0,095
Normal	1,286	0,005	1,135	0,005
Exponensial	6,890	0,003	8,904	0,003
Weibul	1,454	0,01	1,834	0,010

$\alpha = 0,05$

Hasil pengujian dari beberapa distribusi menunjukkan bahwa variabel BOD dan DO gagal tolak H_0 pada distribusi Gamma dengan P *-value* 0,231 dan 0,095, sehingga variabel BOD dan DO mengikuti distribusi Gamma. Variabel BOD dan DO tidak mengikuti distribusi Normal, Exponensial, dan Weibul karena tolak H_0 yang ditunjukkan oleh P *-value* kurang dari $\alpha = 0,05$.

Selanjutnya variabel respon BOD dan DO diuji apakah mengikuti distribusi Gamma Bivariat atau tidak, pengujian menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov. Tahap pertama dalam pengujian Kolmogorov-Smirnov adalah menentukan hipotesis yang digunakan.

Hipotesis

$$H_0 : F_{(y_1, y_2)} = F_{y_1, y_2}^0 \text{ (Distribusi data sesuai dengan distribusi Bivariat Gamma)}$$

$$H_1 : F_{(y_1, y_2)} \neq F_{y_1, y_2}^0 \text{ (Distribusi data tidak sesuai dengan distribusi Bivariat Gamma)}$$

Tahap selanjutnya menghitung statistik uji dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Step 1 : menghitung nilai $S(x)=i/n$ merupakan fungsi peluang kumulatif dari data.

Step 2 : menghitung fungsi kepadatan peluang distribusi Gamma Bivariat sesuai persamaan (2.18) , dengan mengestimasi nilai parameter α dan τ langkah yang digunakan seperti pada sub bab 4.1.

Step 3 : menghitung fungsi distribusi kumulatif F_{y_1, y_2}^0 dari fungsi kepadatan peluang distribusi Gamma Bivariat.

Step 4 : menghitung nilai KS dengan rumus $D = \sup_x | S(x) - F_{y_1, y_2}^0 |$

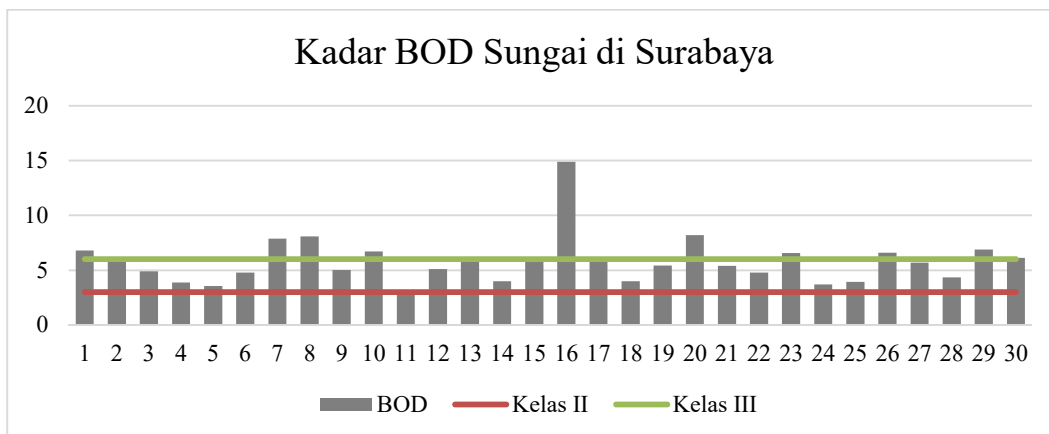
Tabel 4. 2 Uji Distribusi Gamma Bivariat Menggunakan Kolmogorov-Smirnov

Distribusi	Nilai-KS	KS-Tabel
Bivariate Gamma	0,033	0,242

Berdasarkan perhitungan uji Kolmogorov-Smirnov yang ditunjukkan pada Tabel 4.2, nilai-KS yang dihasilkan kurang dari KS-tabel. Sehingga data variabel BOD dan DO mengikuti distribusi Gamma Bivariate.

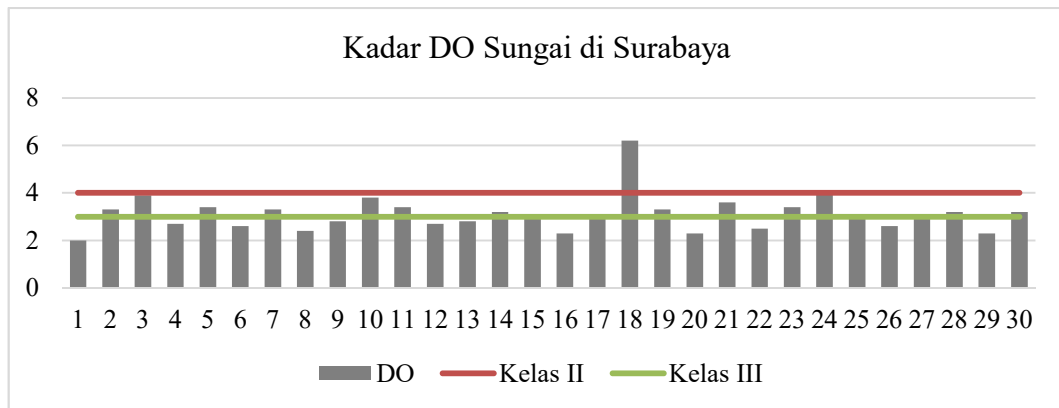
4.3.2 Deskripsi Pencemaran Air Sungai di Surabaya

Pencemaran air sungai terjadi karena terdapat beberapa zat yang tidak dapat terurai dalam air. Kualitas air sungai dapat diketahui dari beberapa parameter, penelitian ini menggunakan *Biological Oxygen Demand* (BOD) dan *Dissolved Oxygen* (DO) sebagai parameter utama dan digunakan sebagai variabel respon (Y). BOD menunjukkan jumlah oksigen terlarut yang dibutuhkan oleh mikroorganisme hidup untuk memecah bahan organik dalam air. Jika kandungan BOD dalam air semakin besar, maka kualitas air semakin buruk. Sedangkan DO merupakan banyaknya oksigen terlarut dalam suatu perairan. Berbanding terbalik dengan BOD, semakin besar nilai kandungan DO, maka kualitas air tersebut semakin bagus (Dinas Lingkungan Hidup Surabaya, 2016).



Gambar 4. 1 Grafik Kadar BOD pada Titik Pengamatan Sungai di Surabaya

Gambar 4.1 menggambarkan jumlah kadar BOD pada masing-masing titik pengamatan. Kadar BOD paling tinggi terdapat pada titik pengamatan ke-16 yaitu di Kali Surabaya Jembatan Wonokromo bulan Februari. Kadar BOD terendah terdapat pada titik pengamatan ke-11 yaitu di Kalimas Jembatan Ngagel November.



Gambar 4. 2 Grafik Kadar DO pada Titik Pengamatan Sungai di Surabaya

Kadar DO paling tinggi terdapat pada pengamatan ke-18 yaitu Kali Surabaya Jembatan Wonokromo bulan September. Sedangkan kadar DO paling rendah terdapat pada pengamatan ke-1 yaitu di Kalimas Kebonrojo bulan Februari.

Tabel 4. 3 Deskripsi Karakteristik Sungai di Surabaya Tahun 2016

Variabel	Rata-rata	Min	Maks	Batas Kelas II	Batas Kelas III
BOD	5,79	2,86	14,90	3,0	6,0
DO	3,12	2,00	6,20	4,0	3,0
Fosfat	0,24	0,14	0,34	0,2	1,0
pH	7,58	7,10	8,04	6-9	6-9
Nitrat	1,72	0,19	3,19	-	-
Nitrit	0,21	0,01	1,89	0,06	0,06
Temperatur	32,10	29,70	35,70	-	-

4.3.3 Pengujian Korelasi Variabel Respon

Pemodelan BGR membutuhkan dua variabel respon yang saling berhubungan, maka dilakukan analisis uji korelasi pada variabel respon BOD dan DO. Koefisien korelasi antar variabel akan menunjukkan apakah BOD menunjukkan adanya korelasi dengan DO. Hipotesis pengujian korelasi yang digunakan adalah sebagai berikut.

Hipotesis :

$$H_0 : \rho = 0 \text{ (variabel Y1 dan Y2 tidak berkorelasi)}$$

$$H_1 : \rho \neq 0 \text{ (variabel Y1 dan Y2 berkorelasi)}$$

Hasil koefisien korelasi dari variabel BOD dan DO adalah -0,405, maka terdapat hubungan negatif antara variabel BOD dan DO. Berdasarkan hasil koefisien korelasi yang diperoleh, dapat menghasilkan *P-value* sebesar 0,027, nilai tersebut kurang dari taraf signifikan 5%, sehingga tolak H_0 dan dapat disimpulkan bahwa variabel BOD dan DO memiliki hubungan yang signifikan.

4.3.4 Pengujian Multikolinieritas

Pada pemodelan BGR terdapat asumsi tidak terdapat multikolinieritas pada variabel prediktor. Adanya multikolinieritas menyebabkan hasil yang diperoleh tidak akurat. Pemeriksaan multikolinieritas salah satunya dengan melihat nilai VIF (*Variance Inflation Factor*). Nilai VIF pada masing-masing variabel prediktor disajikan pada Tabel 4.3 berikut.

Tabel 4. 4 Nilai VIF Variabel Prediktor

Variabel	X1	X2	X3	X4	X5
VIF	1,098	1,617	1,505	1,221	1,265

Nilai VIF pada variabel prediktor X1 hingga X5 yang diperoleh memiliki nilai kurang dari 10, sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak ditemukan adanya kasus multikolinieritas. Berdasarkan hal tersebut, data variabel prediktor X1 hingga X5 dapat digunakan untuk pemodelan BGR.

4.3.5 Pemodelan *Bivariate Gamma Regression* pada Pencemaran Air Sungai di Surabaya Menggunakan Estimasi MLE

Berdasarkan data Dinas Lingkungan Hidup (DLH) Surabaya tahun 2016 mengenai kualitas air sungai di Kota Surabaya, kadar BOD dan DO mengikuti distribusi gamma 2 parameter. Estimasi parameter pada *Bivariate Gamma Regression* menghasilkan sifat yang global atau setiap lokasi pengamatan dianggap memiliki pengaruh yang sama. Pemodelan BGR ini menggunakan lima variabel prediktor yaitu kadar fosfat, pH, nitrat, nitrit, dan temperatur.

Estimasi parameter untuk BGR menggunakan metode estimasi MLE seperti yang telah dijelaskan pada Sub Bab 4.1. Setelah didapatkan algoritma

BGR menggunakan MLE, lalu dilakukan pemrograman dengan *software* R untuk mendapatkan estimasi parameter. Syntax dari program BGR pada R selengkapnya terdapat pada Lampiran 3. Estimasi parameter model BGR telah disajikan pada Tabel 4.5.

Tabel 4. 5 Estimasi Parameter Model BGR

Parameter	BOD		DO	
	Estimasi	SE	Estimasi	SE
β_0	0,889	$3,23 \times 10^{-6}$	-0,530	$2,28 \times 10^{-6}$
β_1	0,389	$2,47 \times 10^{-6}$	0,169	$1,90 \times 10^{-6}$
β_2	-0,107	$9,34 \times 10^{-6}$	0,020	$5,15 \times 10^{-6}$
β_3	-0,009	$3,93 \times 10^{-6}$	0,034	$2,56 \times 10^{-6}$
β_4	-0,052	$2,42 \times 10^{-6}$	0,007	$1,86 \times 10^{-6}$
β_5	-0,003	$3,18 \times 10^{-5}$	0,017	$1,57 \times 10^{-5}$

Hasil estimasi parameter model BGR dengan nilai parameter *shape* $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\tau}$ berturut-turut adalah 8,99 dan 19,99. Berdasarkan hasil estimasi parameter BGR yang telah dihasilkan, maka didapatkan dua model yaitu BOD ($\hat{\mu}_1$) dan DO ($\hat{\mu}_2$). Model yang terbentuk adalah sebagai berikut.

$$\hat{\mu}_1 = \exp(0,889 + 0,389X_1 - 0,107X_2 - 0,009X_3 - 0,052X_4 - 0,003X_5)$$

$$\hat{\mu}_2 = \exp(-0,530 + 0,169X_1 + 0,020X_2 + 0,034X_3 + 0,007X_4 + 0,016X_5)$$

Persamaan $\hat{\mu}$ menunjukkan estimasi nilai nilai parameter skala. Jika dimisalkan nilai kadar Fosfat sebesar 0,262 mg/L, pH air sebesar 7,64, Nitrat sebesar 2,53 mg/L, Nitrit sebesar 0,184 mg/L, dan Temperatur sebesar 33,5 derajat celsius, maka didapatkan nilai estimasi $\hat{\mu}_1$ sebesar 1,030 dan jika dengan nilai variabel yang sama maka nilai estimasi $\hat{\mu}_2$ adalah 1,358.

Setelah mendapatkan estimasi nilai parameter skala ($\hat{\mu}$) maka dapat menentukan nilai dari fungsi kepadatan peluang (PDF). Fungsi PDF yang diperoleh adalah sebagai berikut.

$$\hat{f}(y_1, y_2) = C_i (y_1 y_2)^{19,99-1} \left(\frac{y_{i1}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_1)} + \frac{y_{i2}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_2)} \right)^{8,99-2(19,99)}$$

$$\Gamma \left(2(19,99) - 8,99; \frac{y_{i1}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_1)} + \frac{y_{i2}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_2)} \right)$$

dimana

$$C_i = \left(\left(\exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_1) \exp(\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_2) \right)^{19,99} \Gamma(19,99) \Gamma(8,99) \right)^{-1}$$

Jika dimisalkan kadar BOD batas maksimal sebesar 6 mg/L dan kadar DO batas maksimal 3,0 mg/L, sedangkan faktor yang lain kadar maksimal Fosfat sebesar 1 mg/L, pH air sebesar 9, rata-rata Nitrat sebesar 0,19 mg/L, batas maksimal Nitrit sebesar 0,06 mg/L, dan rata-rata Temperatur sebesar 29,70 derajat celsius, maka hasil perhitungan fungsi kepadatan peluang adalah sebesar 0,0048. Model BGR ini menghasilkan nilai SSE sebesar 33,290.

4.3.6 Pengujian Hipotesis Secara Serentak dengan *Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT)*

Pengujian secara serentak dilakukan pada keseluruhan parameter variabel predikto secara bersama-sama atau simultan. Pengujian ini dilakukan untuk mengujia apakah parameter variabel prediktor memiliki pengaruh secara serentak terhadap model. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$H_0 : \beta_{11} = \beta_{12} = \dots = \beta_{15} = \beta_{21} = \beta_{22} = \dots = \beta_{25} = 0$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \beta_{ij} \neq 0, \text{ dimana } j = 1, 2, \dots, 5, l = 1, 2$$

Perhitungan dan algoritma statistik uji pada pengujian serentak menggunakan MLRT telah dibahas pada Sub Bab 4.2. Perhitungan dilakukan dengan pemrograman pada *software* R, *syntax*-nya dapat dilihat pada Lampiran 4. Hasil pengujian serentak model BGR disajikan pada Tabel 4.6 sebagai berikut.

Tabel 4. 6 Hasil Pengujian Serentak Menggunakan MLRT

	Nilai	Df	$\chi^2_{df;0,05}$
$\ln L(\hat{\Omega})$	1929,688	12	
$\ln L(\hat{\omega})$	909,269	2	
G^2	2.040,547	10	3,940

Berdasarkan perhitungan statistik uji secara serentak, dengan taraf signifikan 5%, diperoleh G^2 sebesar 126,212 dan $\chi^2_{10;0,05}$ sebesar 3,940. Hasil G^2 yang diperoleh menunjukkan bahwa G^2 lebih besar dari $\chi^2_{10;0,05}$, sehingga pengujian serentak menghasilkan keputusan tolak H_0 . Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan bahwa terdapat paling sedikit satu parameter memiliki pengaruh pada model BGR.

4.3.7 Pengujian Hipotesis Secara Parsial

Setelah diketahui bahwa pengujian secara serentak signifikan, maka selanjutnya dilakukan pengujian secara parsial. Pengujian parsial bertujuan untuk mengetahui variabel prediktor mana yang berpengaruh signifikan terhadap model.

Hipotesis yang digunakan untuk pengujian secara parsial dari parameter dispersi adalah sebagai berikut.

Hipotesis

$$H_0 : \alpha = 0$$

$$H_1 : \alpha \neq 0$$

dan

$$H_0 : \tau = 0$$

$$H_1 : \tau \neq 0$$

Perhitungan Z_{hitung} dengan menggunakan persamaan 2.34, maka diketahui parameter dispersi yang signifikan pada model BGR .

Tabel 4. 7 Pengujian Parsial Estimasi Parameter Dispersi

Parameter	Estimasi	Z_{hitung}	P-value
α	8,99	$3,428 \times 10^6$	0,000
τ	19,99	$7,284 \times 10$	0,000

Pengujian parsial estimasi parameter dispersi menggunakan taraf kepercayaan 95% diperoleh nilai $Z_{0,5/2}=1,96$. Berdasarkan Tabel 4.7 diketahui bahwa nilai parameter dispersi α dan τ lebih besar dari 1,696 sehingga diputuskan tolak H_0 , yang berarti bahwa kedua parameter dispersi signifikan terhadap model *Bivariate*

Gamma Regression untuk studi kasus pencemaran air sungai di Surabaya tahun 2016. Selanjutnya dilakukan pengujian parsial terhadap parameter β_{jl} dengan hipotesis sebagai berikut.

$$H_0 : \beta_{jl} = 0$$

$$H_1 : \beta_{jl} \neq 0, \text{ dimana } j = 1, 2, \dots, 5, l = 1, 2$$

Perhitungan Z_{hitung} dengan menggunakan persamaan 2.37, maka diketahui parameter yang signifikan pada model BGR .

Tabel 4. 8 Pengujian Parsial Estimasi Parameter Model BGR

Parameter	BOD			DO		
	Estimasi	Z_{hitung}	P-value	Estimasi	Z_{hitung}	P-value
β_0	0,889	$2,75 \times 10^5$	0,000	-0,530	$-2,33 \times 10^5$	0,000
β_1	0,389	$1,57 \times 10^5$	0,000	0,169	$8,89 \times 10^4$	0,000
β_2	-0,107	$-1,15 \times 10^4$	0,000	0,020	$3,98 \times 10^3$	0,000
β_3	-0,009	$-2,45 \times 10^3$	0,000	0,034	$1,34 \times 10^4$	0,000
β_4	-0,052	$-2,16 \times 10^4$	0,000	0,007	$3,69 \times 10^3$	0,000
β_5	-0,003	$-9,90 \times 10^1$	0,000	0,016	$1,04 \times 10^3$	0,000

Pada Tabel 4.8 menunjukkan bahwa semua parameter variabel prediktor $\hat{\beta}_j$ nilai Z_{hitung} lebih dari $Z_{\alpha/2}$ (1,96), sehingga tolak H_0 pada taraf signifikansi 5% atau berpengaruh signifikan terhadap model BGR. Hal tersebut menunjukkan bahwa setiap variabel prediktor $X_1, X_2, X_3, X_4,$ dan X_5 berpengaruh terhadap kadar BOD dan DO.

Fosfat memberikan pengaruh sebesar 0,388 mg/L terhadap parameter skala kadar BOD dan sebesar 0,169 mg/L terhadap parameter skala kadar DO. Faktor pH memberikan pengaruh sebesar -0,107 mg/L terhadap parameter skala kadar BOD dan sebesar 0,020 mg/L terhadap parameter skala kadar DO. Faktor Nitrat memberikan pengaruh sebesar -0,009 mg/L terhadap parameter skala kadar BOD dan sebesar 0,034 mg/L terhadap parameter skala kadar DO. Faktor Nitrit memberikan pengaruh sebesar -0,052 mg/L terhadap parameter skala kadar BOD dan sebesar 0,007 mg/L terhadap parameter skala kadar DO. Faktor temperatur

atau suhu memberikan pengaruh sebesar -0,003 mg/L terhadap parameter skala kadar BOD dan sebesar 0,016 mg/L terhadap parameter skala kadar DO.

4.3.8 Interpretasi Model *Bivariate Gamma Regression* pada Pencemaran Air Sungai di Surabaya

Interpretasi model BGR dilakukan dengan menggunakan rasio fungsi survival. Perubahan nilai dari satu variabel independen dari X_k ke $X_k + \Delta$ dengan asumsi variabel yang lain tetap dapat diketahui berdasarkan persamaan rasio fungsi survival berikut:

$$\hat{R}_s(X_{ki}) = \frac{S((y_{1i}, y_{2i}), \mathbf{x}, \hat{\beta}|x_{ki} + \Delta)}{S((y_{1i}, y_{2i}), \mathbf{x}, \hat{\beta}|x_{ki})} = \frac{1 - \hat{F}((y_{1i}, y_{2i}), \mathbf{x}, \hat{\beta}|x_{ki} + \Delta)}{1 - \hat{F}((y_{1i}, y_{2i}), \mathbf{x}, \hat{\beta}|x_{ki})}$$

dengan $k=1,2,3,4,5$ dan $i=1,2,\dots,30$, dimana $\hat{F}(y_1, y_2)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif Gamma Bivariat dengan asumsi variabel independen yang lain tetap.

Tabel 4. 9 Nilai Rasio Metode BGR

Variabel Independen	$\hat{R}_s(X_k)$	Peluang/Resiko
X ₁	0,98875	1,1249%
X ₂	1.00001	0,0015%
X ₃	0.99995	0,0046%
X ₄	1.00002	0,0024%
X ₅	0.99997	0,0021%

Berdasarkan Tabel 4.9 dapat diketahui bahwa hasil prediksi rasio fungsi survival pada untuk variabel X₁ memberikan nilai $\hat{R}_s(X_k)$ sebesar 0.9887 atau setiap kenaikan Fosfat sebesar 1 mg/L peluang/resiko pencemaran air sungai akan turun sebesar 1,12% dengan asumsi variabel independent yang lain tetap. Variabel X₂ memberikan nilai $\hat{R}_s(X_k)$ sebesar 1,00001 atau setiap kenaikan pH air sebesar 1, maka peluang/resiko pencemaran air sungai akan naik sebesar 0,0015% dengan asumsi variabel independent yang lain tetap. Variabel X₃ memberikan nilai $\hat{R}_s(X_k)$ sebesar 0,99995 atau setiap kenaikan nitrat sebesar 1 mg/L, maka peluang/resiko pencemaran air sungai akan turun sebesar 0,0045% dengan asumsi variabel independent yang lain tetap. Variabel X₄ memberikan nilai $\hat{R}_s(X_k)$ sebesar 1,00002 atau setiap kenaikan nitrit sebesar 1 mg/L, maka peluang/resiko

pencemaran air sungai akan naik sebesar 0,0024% dengan asumsi variabel independent yang lain tetap. Variabel X_5 memberikan nilai $\hat{R}_s(X_k)$ sebesar 0,99997 atau setiap kenaikan temperatur sebesar 1 derajat celsius, maka peluang/resiko pencemaran air sungai akan turun sebesar 0,0021% dengan asumsi variabel independent yang lain tetap.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

1. Estimasi model *Bivariate Gamma Regression* menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Hasil penurunan fungsi likelihood tidak *close form*, sehingga menggunakan iterasi Newton-Raphson untuk memaksimumkan fungsi *likelihood*. Algoritma yang digunakan, langkah pertama adalah menentukan nilai inisial parameter, kemudian membentuk fungsi *ln likelihood*. Langkah selanjutnya menentukan vektor gradien dan matriks *Fisher-Information* yang digunakan untuk iterasi Newton-Raphson. Iterasi dilakukan dimulai dengan nilai inisial parameter yang telah ditentukan, iterasi berhenti ketika nilai yang dihasilkan telah konvergen.
2. Pengujian parameter model BGR menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Langkah pertama yang dilakukan menentukan terlebih dahulu parameter di bawah populasi dan di bawah H_0 . Selanjutnya memaksimumkan fungsi *ln likelihood* parameter di bawah populasi dan di bawah H_0 dengan menggunakan iterasi Newton-Raphson. Kemudian menghitung statistik uji. Jika pada pengujian serentak diperoleh tolak H_0 , maka pengujian dilanjutkan pada pengujian parsial.
3. Penerapan model BGR pada pencemaran air sungai di Surabaya menghasilkan faktor-faktor yang mempengaruhi BOD dan DO adalah Fosfat, Nitrit, Nitrat, pH Air, dan Temperatur. Model yang dihasilkan adalah

$$\hat{\mu}_1 = \exp(0,889 + 0,389X_1 - 0,107X_2 - 0,009X_3 - 0,052X_4 - 0,003X_5)$$

$$\hat{\mu}_2 = \exp(-0,530 + 0,169X_1 + 0,020X_2 + 0,034X_3 + 0,007X_4 + 0,016X_5)$$

Berdasarkan estimasi parameter yang dihasilkan, sehingga didapatkan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut :

$$\hat{f}(y_1, y_2) = C(y_1, y_2)^{19,99-1} \left(\frac{y_1}{\hat{\mu}_1} + \frac{y_2}{\hat{\mu}_2} \right)^{8,99-2(19,99)} \Gamma \left(2(19,99) - 8,99; \frac{y_1}{\hat{\mu}_1} + \frac{y_2}{\hat{\mu}_2} \right)$$

$$\text{dimana } C = \left((\mu_1 \mu_2)^{19,99} \Gamma(19,99) \Gamma(8,99) \right)^{-1}$$

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, terdapat beberapa saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya.

1. Pada penelitian ini dilakukan estimasi parameter hanya dengan menggunakan metode MLE, untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan perbandingan dengan metode estimator yang lain.
2. Penelitian ini iterasi yang dilakukan dibatasi dengan iterasi Newton-Raphson, saran untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan iterasi yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Alvarez, B. L., Ferreira, G., & Hube, M. V. (2011). A Proposed Reparametrization of Gamma Distribution for the Analysis of Data of Rainfall-Runoff Driven Pollution. *Proyecciones Journal of Mathematics*, 415-439.
- Casella, G., & Berge, R. L. (2002). *Statistical Inference*. United State of America: Thomson Learning Inc.
- Chapman, D. (1996). *Water Quality Assesment: A Guide to Us of Biota, Sediments, and Water in Environmental Monitoring*. Chambrige: E&FN Spon.
- Collet, D. (1994). *Modelling Survuval Data in Medical Research*. London: Chapman & Hall/CRC.
- Daniel, W. W. (1989). *Statistik Nonparametrik Terapan*. Jakarta: Gramedia.
- Dinas Lingkungan Hidup Surabaya. (2016). *Informasi Kinerja Pengelolaan Lingkungan Hidup*. Surabaya: Pemerintah Kota Surabaya.
- Ewemoje, T. A., & Ewemooje, O. S. (2011). Best Distribution and Plotting Positions of Daily Maximum Flood Estimation at Ona River in Ogun-Oshun River Basin, Nigeria. *Agricultural Engineering International*.
- Hidayanti, F. (2015). *Pemodelan Bivariate Weibull Regression pada Pencemaran Air Sungai di Surabaya*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Hogg, R. V., & Craig, A. T. (2005). *Introduction to Mathematical Statistics*. New Jersey: Upper Saddle River: Pearson Education International.
- Hosch, W. L. (2017, September 15). *Gamma Distribution*. Dipetik Oktober 12, 2017, dari Encyclopædia Britannica: <https://www.britannica.com/topic/gamma-distribution>
- Jung, C. R., & Winkelmann, R. (1993). Two Aspect of Labor Mobility: A Bivariate Poisson Regression Approach. *Journal Empirical Economics*, 543-556.
- Kleinbaum , D., & Klein, M. (2012). *Survival Analysis A Self-Learning Text*. New York: Springer.

- Lawal, M., Adalakun, A., & Obisesan, K. (2013). The use of Gamma Distribution to Evaluate Water Pollutants in Asejire Reservoir, Ibadan. *Fountain Journal of Natural and Applied Sciences*, 38 - 46.
- Le, R. K., Rackauckas, C. V., Ross, A. S., & Ulloa, N. (2012). *Assessment of Statistical Methods for Water Quality Monitoring in Maryland's Tidal Waterways*. Maryland: REU Site: Interdisciplinary Program in High.
- Lee, C. K., & Wen, M. J. (2009). A Multivariate Weibull Distribution. *Pak.j.stat.oper.res.*, 55-66.
- Miller, G. (1975). *Living in The Environment, Concept, Problem, and Alternative*. Belmont: Wadsworth Publishing Company.
- Nadarajah, S., & Gupta, A. K. (2006). Some Bivariate Gamma Distributions. *Applied Mathematics Letters*, 767-774.
- Nasution, A. S. (2016). *Estimasi Parameter dan Pengujian Hipotesis pada Model Regresi Gamma*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Nocedal, J., & Wright, J. S. (1999). *Numerical Optimization*. New York: Springer-Verlag New York, Inc.
- Peraturan Pemerintah No. 20 Tahun 1990. (t.thn.). *Peraturan Pemerintah No. 20 Tahun 1990 Tentang : Pengendalian Pencemaran Air*.
- Putri, D. E. (2016). *Pemodelan Geographically Weighted Gamma Regression*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Rinne, H. (2009). *The Weibull distribution : a handbook*. United States of America: Chapman & Hall/CRC.
- Siegrist, K. (1997). *The Gamma Distribution*. Dipetik 08 14, 2017, dari Random Services: <http://www.randomservices.org/stat/special/Gamma.html>
- Smol, J. P. (2008). *Pollution of Lakes and Rivers*. Blackwell Publishing.
- Sopiah, R. (2004). *Pengelolaan Limbah Deterjen Sebagai Upaya Minimalisasi Polutan di Badan Air dalam Rangka Pembangunan Berkelanjutan*. Tangerang: Balai Teknologi Lingkungan.
- Sudaryoko. (1986). *Pedoman Pnanggulangan Banjir*. Jakarta: Departemen Pekerjaan Umum.
- Sugiharto. (1987). *Dasar-Dasar Pengelolaan Air Limbah*. Jakarta: UI-Press.

- Tripathi, R. C., Gupta, R. C., & Pair, R. K. (1993). Statistical Testing Involving Several Independent Gamma Distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 773-786.
- Widhiasari, R. (2008). Load Capacity Study of Ciliwung Watershed. *Jurnal Hidrology*, 2.
- Xie, H., & Wu, X. (2017). A Conditional Autoregressive Range Model with Gamma Distribution for Financial Volatility Modelling. *Economic Modelling*, 349-356.
- Yang, Y., Yu, L., & Zhang, Y. (2017). Average Capacity of the Ground to Train Communication Link of a Curved Track in the Turbulence of Gamma Distribution. *Optics Communications*, 68-73.
- Yogiarti, N., Setiawan, D., & Parthasutema, I. (2007). Analisis Kadar Fosfat Air Sungai di Desa Beng, Gianyar dengan Metode Spektrofometri UV-VIS. *Jurnal of Fisheries Science*, 274-287.
- Yue, S., Ouarda, T., & Bobee, B. (2001). A Review of Bivariate Gamma Distributions for Hydrological Application. *Journal of Hydrology*, 1-18.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Kadar BOD, DO dan Zat Pencemar Sungai Surabaya Tahun 2016

No	BOD	DO	Fosfat	pH Air	Nitrat	Nitrit	Temperatur
1	6,8	2	0,262	7,64	2,53	0,184	33,5
2	5,81	3,3	0,261	7,35	0,217	0,194	34,7
3	4,9	3,9	0,324	7,44	1,58	0,078	29,7
4	3,87	2,7	0,323	7,28	1,77	0,374	31,1
5	3,56	3,4	0,23	7,12	0,696	0,212	32,1
6	4,8	2,6	0,267	7,68	1,38	0,0718	31,5
7	7,87	3,3	0,228	7,27	1,89	1,89	32,3
8	8,1	2,4	0,171	7,98	1,94	0,111	31,7
9	5,02	2,8	0,274	7,22	0,731	0,0851	31,8
10	6,7	3,8	0,273	7,8	2,78	0,0676	30,1
11	2,86	3,4	0,201	7,5	1,69	0,0639	32,6
12	5,1	2,7	0,239	7,95	1,49	0,106	34,5
13	6,02	2,8	0,345	7,53	2,2	0,495	30,3
14	4	3,2	0,22	7,67	1,37	0,0239	32,4
15	5,74	3,1	0,177	7,41	1,81	0,0788	31
16	14,9	2,3	0,164	8,04	2,14	0,138	33,8
17	6,18	3,1	0,174	7,27	0,188	0,25	32,8
18	4	6,2	0,216	7,76	1,38	0,0117	30,1
19	5,42	3,3	0,221	7,52	1,8	0,0933	33,6
20	8,2	2,3	0,174	8,03	2,06	0,114	32,8
21	5,39	3,6	0,199	7,1	1,89	0,119	31,7
22	4,8	2,5	0,231	7,67	3,19	0,0836	31,9
23	6,56	3,4	0,141	7,48	2,41	0,0565	30,2
24	3,7	4	0,232	7,81	1,65	0,0423	35,7
25	3,93	3,1	0,326	7,44	1,75	0,519	32
26	6,6	2,6	0,268	7,96	1,65	0,0824	30,9
27	5,68	3,1	0,265	7,57	1,52	0,0745	31,7
28	4,34	3,2	0,262	7,38	1,59	0,572	32,4
29	6,9	2,3	0,271	7,93	2,45	0,0825	31,2
30	6,12	3,2	0,254	7,66	1,71	0,0872	32,8

Lampiran 2. Pengujian Distribusi Data, Korelasi Variabel Respon, dan Korelasi Variabel Prediktor

A. Distribution BOD

Goodness of Fit Test				
Distribution	AD	P	LRT	P
Normal	1,286	<0,005		
Box-Cox Transformation	0,293	0,579		
Lognormal	0,335	0,486		
3-Parameter Lognormal	0,311	*	0,279	
Exponential	6,890	<0,003		
2-Parameter Exponential	2,238	<0,010	0,000	
Weibull	1,454	<0,010		
3-Parameter Weibull	0,571	0,144	0,001	
Smallest Extreme Value	3,771	<0,010		
Largest Extreme Value	0,282	>0,250		
Gamma	0,492	0,231		
3-Parameter Gamma	0,378	*	0,075	
Logistic	0,416	>0,250		
Loglogistic	0,222	>0,250		
3-Parameter Loglogistic	0,252	*	0,466	
Johnson Transformation	0,252	0,715		

ML Estimates of Distribution Parameters				
Distribution	Location	Shape	Scale	Threshold
Normal*	5,79567		2,20361	
Box-Cox Transformation*	0,43201		0,06689	
Lognormal*	1,70287		0,32185	
3-Parameter Lognormal	1,31687		0,45650	1,64058
Exponential			5,79567	
2-Parameter Exponential			3,03689	2,75877
Weibull		2,62973	6,49291	
3-Parameter Weibull		1,49177	3,35301	2,76978
Smallest Extreme Value	7,08129		3,33588	
Largest Extreme Value	4,93165		1,42838	
Gamma		9,38143	0,61778	
3-Parameter Gamma		2,79854	1,17838	2,49794
Logistic	5,55495		1,01013	
Loglogistic	1,69455		0,17227	
3-Parameter Loglogistic	1,32753		0,25046	1,62433
Johnson Transformation*	-0,09259		1,06521	

* Scale: Adjusted ML estimate

B. Distribution DO

Goodness of Fit Test

Distribution	AD	P	LRT	P
Normal	1,135	<0,005		
Box-Cox Transformation	0,514	0,178		
Lognormal	0,542	0,151		
3-Parameter Lognormal	0,515	*	0,177	
Exponential	8,904	<0,003		
2-Parameter Exponential	2,662	<0,010	0,000	
Weibull	1,834	<0,010		
3-Parameter Weibull	0,708	0,070	0,000	
Smallest Extreme Value	3,473	<0,010		
Largest Extreme Value	0,488	0,221		
Gamma	0,644	0,095		
3-Parameter Gamma	0,552	*	0,065	
Logistic	0,473	0,194		
Loglogistic	0,405	>0,250		
3-Parameter Loglogistic	0,452	*	0,444	
Johnson Transformation	0,498	0,196		

ML Estimates of Distribution Parameters

Distribution	Location	Shape	Scale	Threshold
Normal*	3,12000		0,76986	
Box-Cox Transformation*	0,33577		0,06913	
Lognormal*	1,11321		0,21848	
3-Parameter Lognormal	0,49111		0,38817	1,35496
Exponential			3,12000	
2-Parameter Exponential			1,15862	1,96138
Weibull		3,73071	3,41652	
3-Parameter Weibull		1,62006	1,30491	1,95073
Smallest Extreme Value	3,56187		1,13119	
Largest Extreme Value	2,80564		0,53798	
Gamma		20,47174	0,15241	
3-Parameter Gamma		3,56006	0,37558	1,78292
Logistic	3,05324		0,36331	
Loglogistic	1,10765		0,11514	
3-Parameter Loglogistic	0,58078		0,19625	1,22111
Johnson Transformation*	0,16815		1,04568	

C. Korelasi Antar Variabel Respon dan Prediktor

Correlations: BOD; DO; Fosfat; pH Air; Nitrat; Nitrit; Temperatur					
	BOD	DO	Fosfat	pH Air	Nitrat
DO	-0,405 0,027				
Fosfat	-0,368 0,046	-0,035 0,855			
pH Air	0,452 0,012	-0,212 0,260	-0,170 0,369		
Nitrat	0,276 0,140	-0,236 0,208	-0,002 0,990	0,432 0,017	
Nitrit	0,116 0,540	-0,041 0,829	0,158 0,403	-0,342 0,064	0,011 0,953
Temperatur	0,107 0,573	-0,226 0,231	-0,232 0,217	0,133 0,485	-0,273 0,144
					Nitrit
Temperatur					0,016 0,934

D. Identifikasi Multokolineritas

Regression Analysis: BOD versus Fosfat; pH Air; ...						
The regression equation is						
BOD = - 19,9 - 14,7 Fosfat + 3,94 pH Air + 0,170 Nitrat + 2,14 Nitrit - 0,045 Temperatur						
Predictor	Coef	SE Coef	T	P	VIF	
Constant	-19,89	13,04	-1,52	0,140		
Fosfat	-14,707	7,078	-2,08	0,049	1,098	
pH Air	3,943	1,615	2,44	0,022	1,617	
Nitrat	0,1705	0,6458	0,26	0,794	1,505	
Nitrit	2,139	1,103	1,94	0,064	1,221	
Temperatur	-0,0447	0,2714	-0,16	0,871	1,265	
Regression Analysis: DO versus Fosfat; pH Air; ...						
The regression equation is						
DO = 11,3 - 1,74 Fosfat - 0,220 pH Air - 0,337 Nitrat - 0,091 Nitrit - 0,171 Temperatur						
Predictor	Coef	SE Coef	T	P	VIF	
Constant	11,291	5,375	2,10	0,046		
Fosfat	-1,743	2,918	-0,60	0,556	1,098	
pH Air	-0,2202	0,6659	-0,33	0,744	1,617	
Nitrat	-0,3371	0,2662	-1,27	0,218	1,505	
Nitrit	-0,0910	0,4549	-0,20	0,843	1,221	
Temperatur	-0,1709	0,1119	-1,53	0,140	1,265	

Lampiran 3. Syntax Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah Populasi Menggunakan R

```

data=read.csv("F:/rekap3.csv", sep=";")
data
head(data)
library(hypergeo)
n=nrow(data)
alpha = 9
tau = 20
y = as.matrix(data[,1:2])
x = as.matrix(cbind(b0=rep(1,n), data[,3:7]))
y1=y[,1]
y2=y[,2]
beta = as.double(solve(t(x) %*% x) %*% (t(x) %*% y))
a=glm(data$BOD~data$Fosfat+data$pH.Air+data$Nitrat+data$
Nitrit+data$Temperatur, family=Gamma)
d=glm(data$DO~data$Fosfat+data$pH.Air+data$Nitrat+data$N
itrit+data$Temperatur, family=Gamma)
betaa=as.matrix(c(alpha, tau, a$coefficients, d$coefficients))
itr=1
while(itr<10000) {
itr=itr+1
b1=as.matrix(betaa[3:8])
b2=as.matrix(betaa[9:14])
c=1
koef1=alpha-2*tau
koef2=2*tau-alpha
koef3=2*tau-alpha-1
sumlny=0
y_x=0
sumgamma=0
for (i in 1:n) {
sumlny=sumlny+(log(y1[i]*y2[i]))
y_x=y_x+log((y1[i]/(exp(x[i,]%*%b1)))+(y2[i]/(exp(x[i,]%
*%b2))))
sumgamma=sumgamma+log(pgamma((y1[i]/exp(x[i,]%*%b1))+(y2
[i]/exp(x[i,]%*%b2)), koef2, lower=FALSE)*gamma(koef2))
}
f1=n*log(c)
f2=(tau-1)*sumlny
f3=koef1*y_x
lnlike=f1+f2+f3+sumgamma

```


Lampiran 3. Syntax Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah Populasi Menggunakan R (Lanjutan)

```

a1=0
a8=0
tau1=0
tau2=0
tau9=0
d11=0
e11=0
d12=0
e12=0

f=function(g){
for (i in 1:n) {
a1=a1+log((y1[i]/(exp(t(x[i,])**b1)))+(y2[i]/(exp(t(x[i,])**b2))))
a2=-
psigamma((y1[i]/(exp(t(x[i,])**b1)))+(y2[i]/(exp(t(x[i,])**b2))),koef2)
a3=log((y1[i]/(exp(t(x[i,])**b1)))+(y2[i]/(exp(t(x[i,])**b2))))
a4=1/(gamma(-(1-2*tau+alpha)))
a5=-digamma(-(1-2*tau+alpha))-pi*1/tan(pi*alpha-2*pi*tau)+
log((y1[i]*exp(t(x[i,])**b1))+(y1[i]*exp(t(x[i,])**b1)))
a6=pi*1/sin((pi*alpha)-2*pi*tau)
a7=(1/(-
2*tau+alpha)^2)*((y1[i]*exp(t(x[i,])**b1))+(y1[i]*exp(t(x[i,])**b1)))^(2*tau-alpha)*
genhypergeo(2*tau-alpha,1+2*tau-alpha,-(y1[i]*exp(t(-x[i,])**b1))-(y1[i]*exp(t(-x[i,])**b1)))
a8=a8+log(a2*a3-(a4*a5*a6)+a7)
tau1=tau1+log(y1[i]*y2[i])
tau2=tau2+log((y1[i]/(exp(t(x[i,])**b1)))+(y2[i]/(exp(t(x[i,])**b2))))
tau3=2*psigamma((y1[i]/(exp(t(x[i,])**b1)))+(y2[i]/(exp(t(x[i,])**b2))),koef2)
tau4=log((y1[i]/(exp(t(x[i,])**b1)))+(y2[i]/(exp(t(x[i,])**b2))))
tau5=1/(gamma(-(1-2*tau+alpha)))
tau6=-digamma(-(1-2*tau+alpha))-pi*1/tan(pi*alpha-2*pi*tau)+
log((y1[i]*exp(t(x[i,])**b1))+(y1[i]*exp(t(x[i,])**b1)))
tau7=pi*1/sin((pi*alpha)-2*pi*tau)
tau8=(1/(-2*tau+alpha)^2)*((y1[i]*exp(t(x[i,])**b1))+(y1[i]*exp(t(x[i,])**b1)))^(2*tau-alpha)*
genhypergeo(2*tau-alpha,1+2*tau-alpha,-(y1[i]*exp(t(-x[i,])**b1))-(y1[i]*exp(t(-x[i,])**b1)))
tau9=tau9+log(tau3*tau4-2*(tau5*tau6*tau7)+tau8)
tau9[is.infinite(tau9)]=0
}
}

```

Lampiran 3. Syntax Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah Populasi Menggunakan R (Lanjutan)

```

a11=y1[i]*x[i,]
b11=exp(t(x[i,])**%b1)
c11=(y1[i]/(exp(t(x[i,])**%b1)))+(y2[i]/(exp(t(x[i,])**%b2
)))
d11=d11+(-a11/(b11*c11))
e11=e11+(log(a11*c11^koef3*exp(-c11))/b11)

a12=y2[i]*x[i,]
b12=exp(t(x[i,])**%b2)
c12=(y1[i]/(exp(t(x[i,])**%b1)))+(y2[i]/(exp(t(x[i,])**%b2
)))
d12=d12+(-a12/(b12*c12))
e12=e12+(log(a12*c12^koef3*exp(-c12))/b12)
}
diff_alpha=a1+a8
diff_tau=tau1+tau2+tau9
diff_b11=koef1*d11+e11
diff_b12=koef1*d12+e12
gr=matrix(c(diff_alpha,diff_tau,diff_b11,diff_b12))
}
y_0=f(gr)
y_0[is.nan(y_0)] = 0
fd=function(g) {
I=(y_0**t(y_0))
library(MASS)
Iinv=ginv(I)
}
y_1=fd(Iinv)
betal=betaa-(y_1**y_0)
d=sqrt(t(betal-betaa)**(betal-betaa))
if(matrix(d)<0.000038) {
print("convergent")
print(betal)
print("ln likelihood himpunan populasi")
print(lnlike)
break
}
}
betaa=betal
print(paste(itr,d,betal))
}

```

**Lampiran 4. Output Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate
Gamma Regression di Bawah Populasi Menggunakan R**

```

                                [,1]
                                8.999832833
                                19.999825425
(Intercept)                    0.889406496
data$Fosfat                    0.388660616
data$pH.Air                    -0.107572113
data$Nitrat                    -0.009653901
data$Nitrit                    -0.052420276
data$Temperatur               -0.003150212
(Intercept)                   -0.530510514
data$Fosfat                    0.169355399
data$pH.Air                    0.020483990
data$Nitrat                    0.034354943
data$Nitrit                    0.006883387
data$Temperatur               0.016333950
[1] "ln likelihood himpunan populasi"
                                [,1]
[1,] 1929.688
```

Lampiran 5. Matrix Fisher Information untuk Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah Populasi

	[, 1]	[, 2]	[, 3]	[, 4]	[, 5]
[1,]	6.877029e-12	7.196810e-12	8.465587e-12	6.481348e-12	2.450176e-11
[2,]	7.196810e-12	7.531461e-12	8.859235e-12	6.782730e-12	2.564108e-11
[3,]	8.465587e-12	8.859235e-12	1.042109e-11	7.978506e-12	3.016153e-11
[4,]	6.481348e-12	6.782730e-12	7.978506e-12	6.108434e-12	2.309201e-11
[5,]	2.450176e-11	2.564108e-11	3.016153e-11	2.309201e-11	8.729584e-11
[6,]	1.031185e-11	1.079135e-11	1.269383e-11	9.718538e-12	3.673946e-11
[7,]	6.359361e-12	6.655071e-12	7.828340e-12	5.993465e-12	2.265739e-11
[8,]	8.342785e-11	8.730723e-11	1.026992e-10	7.862769e-11	2.972401e-10
[9,]	5.970819e-12	6.248462e-12	7.350047e-12	5.627278e-12	2.127307e-11
[10,]	4.991344e-12	5.223441e-12	6.144319e-12	4.704159e-12	1.778336e-11
[11,]	1.350514e-11	1.413313e-11	1.662476e-11	1.272810e-11	4.811666e-11
[12,]	6.722926e-12	7.035542e-12	8.275887e-12	6.336112e-12	2.395271e-11
[13,]	4.880885e-12	5.107846e-12	6.008344e-12	4.600056e-12	1.738981e-11
[14,]	4.116116e-11	4.307515e-11	5.066917e-11	3.879289e-11	1.466506e-10
	[, 6]	[, 7]	[, 8]	[, 9]	[, 10]
[1,]	1.031185e-11	6.359361e-12	8.342785e-11	5.970819e-12	4.991344e-12
[2,]	1.079135e-11	6.655071e-12	8.730723e-11	6.248462e-12	5.223441e-12
[3,]	1.269383e-11	7.828340e-12	1.026992e-10	7.350047e-12	6.144319e-12
[4,]	9.718538e-12	5.993465e-12	7.862769e-11	5.627278e-12	4.704159e-12
[5,]	3.673946e-11	2.265739e-11	2.972401e-10	2.127307e-11	1.778336e-11
[6,]	1.546223e-11	9.535623e-12	1.250969e-10	8.953019e-12	7.484333e-12
[7,]	9.535623e-12	5.880660e-12	7.714782e-11	5.521366e-12	4.615621e-12
[8,]	1.250969e-10	7.714782e-11	1.012095e-09	7.243427e-11	6.055189e-11
[9,]	8.953019e-12	5.521366e-12	7.243427e-11	5.184023e-12	4.333618e-12
[10,]	7.484333e-12	4.615621e-12	6.055189e-11	4.333618e-12	3.622715e-12
[11,]	2.025045e-11	1.248854e-11	1.638360e-10	1.172552e-11	9.802024e-12
[12,]	1.008078e-11	6.216858e-12	8.155837e-11	5.837023e-12	4.879497e-12
[13,]	7.318704e-12	4.513477e-12	5.921187e-11	4.237714e-12	3.542544e-12
[14,]	6.171961e-11	3.806275e-11	4.993416e-10	3.573721e-11	2.987475e-11
	[, 11]	[, 12]	[, 13]	[, 14]	
[1,]	1.350514e-11	6.722926e-12	4.880885e-12	4.116116e-11	
[2,]	1.413313e-11	7.035542e-12	5.107846e-12	4.307515e-11	
[3,]	1.662476e-11	8.275887e-12	6.008344e-12	5.066917e-11	
[4,]	1.272810e-11	6.336112e-12	4.600056e-12	3.879289e-11	
[5,]	4.811666e-11	2.395271e-11	1.738981e-11	1.466506e-10	
[6,]	2.025045e-11	1.008078e-11	7.318704e-12	6.171961e-11	
[7,]	1.248854e-11	6.216858e-12	4.513477e-12	3.806275e-11	
[8,]	1.638360e-10	8.155837e-11	5.921187e-11	4.993416e-10	
[9,]	1.172552e-11	5.837023e-12	4.237714e-12	3.573721e-11	
[10,]	9.802024e-12	4.879497e-12	3.542544e-12	2.987475e-11	
[11,]	2.652146e-11	1.320251e-11	9.585104e-12	8.083247e-11	
[12,]	1.320251e-11	6.572277e-12	4.771513e-12	4.023881e-11	
[13,]	9.585104e-12	4.771513e-12	3.464147e-12	2.921362e-11	
[14,]	8.083247e-11	4.023881e-11	2.921362e-11	2.463624e-10	

Lampiran 6. Syntax Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah H_0 Menggunakan R

```

data=read.csv("F:/rekap3.csv",sep=";")
data
head(data)
library(hypergeo)
n=nrow(data)
alpha = 9
tau = 20
y = as.matrix(data[,1:2])
x = as.matrix(cbind(b0=rep(1,n),data[,3:7]))
y1=y[,1]
y2=y[,2]
beta = as.double(solve(t(x) %*% x) %*% (t(x) %*% y))
a=glm(data$BOD~data$Fosfat+data$pH.Air+data$Nitrat+data$N
itrit+data$Temperatur,family=Gamma)
d=glm(data$DO~data$Fosfat+data$pH.Air+data$Nitrat+data$N
itrit+data$Temperatur,family=Gamma)
betaa=as.matrix(c(alpha,tau,a$coefficients,d$coefficients
))
itr=1
while(itr<10000){
itr=itr+1
b1=as.matrix(betaa[3:8])
b2=as.matrix(betaa[9:14])
c=1
koef1=alpha-2*tau
koef2=2*tau-alpha
koef3=2*tau-alpha-1
sumlny=0
y_x=0
sumgamma=0
for (i in 1:n) {
sumlny=sumlny+(log(y1[i]*y2[i]))
y_x=y_x+log((y1[i]/(exp(x[i,]%*%b1)))+(y2[i]/(exp(x[i,]%*
%b2)))))
sumgamma=sumgamma+log(pgamma((y1[i]/exp(x[i,]%*%b1))+(y2[
i]/exp(x[i,]%*%b2)),koef2, lower=FALSE)*gamma(koef2))
}
f1=n*log(c)
f2=(tau-1)*sumlny
f3=koef1*y_x
lnlike=f1+f2+f3+sumgamma

```

Lampiran 6. Syntax Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah H_0 Menggunakan R (Lanjutan)

```

a1=0
a8=0
tau1=0
tau2=0
tau9=0
d11=0
e11=0
d12=0
e12=0

f=function(g) {
for (i in 1:n) {
a1=a1+log((y1[i]/(exp(t(x[i,]))**b1))+(y2[i]/(exp(t(x[i,]))**b2))))
a2=-
psigamma((y1[i]/(exp(t(x[i,]))**b1))+(y2[i]/(exp(t(x[i,]))**b2))),koef2)
a3=log((y1[i]/(exp(t(x[i,]))**b1))+(y2[i]/(exp(t(x[i,]))**b2))))
a4=1/(gamma(-(1-2*tau+alpha)))
a5=-digamma(-(1-2*tau+alpha))-pi*1/tan(pi*alpha-2*pi*tau)+

log((y1[i]*exp(t(x[i,]))**b1)+(y1[i]*exp(t(x[i,]))**b1)))
a6=pi*1/sin((pi*alpha)-2*pi*tau)
a7=(1/(-
2*tau+alpha)^2)*((y1[i]*exp(t(x[i,]))**b1)+(y1[i]*exp(t(x[i,]))**b1))^(2*tau-alpha)*
genhypergeo(2*tau-alpha,1+2*tau-alpha,-(y1[i]*exp(t(-x[i,]))**b1)-(y1[i]*exp(t(-x[i,]))**b1)))
a8=a8+log(a2*a3-(a4*a5*a6)+a7)

tau1=tau1+log(y1[i]*y2[i])
tau2=tau2+log((y1[i]/(exp(t(x[i,]))**b1))+(y2[i]/(exp(t(x[i,]))**b2))))
tau3=2*psigamma((y1[i]/(exp(t(x[i,]))**b1))+(y2[i]/(exp(t(x[i,]))**b2))),koef2)
tau4=log((y1[i]/(exp(t(x[i,]))**b1))+(y2[i]/(exp(t(x[i,]))**b2))))
tau5=1/(gamma(-(1-2*tau+alpha)))
tau6=-digamma(-(1-2*tau+alpha))-pi*1/tan(pi*alpha-2*pi*tau)+

log((y1[i]*exp(t(x[i,]))**b1)+(y1[i]*exp(t(x[i,]))**b1)))
tau7=pi*1/sin((pi*alpha)-2*pi*tau)
tau8=(1/(-2*tau+alpha)^2)*((y1[i]*exp(t(x[i,]))**b1)+(y1[i]*exp(t(x[i,]))**b1))^(2*tau-alpha)*
genhypergeo(2*tau-alpha,1+2*tau-alpha,-(y1[i]*exp(t(-x[i,]))**b1)-(y1[i]*exp(t(-x[i,]))**b1)))

```

Lampiran 6. Syntax Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah H_0 Menggunakan R (Lanjutan)

```

tau9=tau9+log(tau3*tau4-2*(tau5*tau6*tau7)+tau8)
tau9[is.infinite(tau9)]=0

a11=y1[i]*x[i,]
b11=exp(t(x[i,])**b1)
c11=(y1[i]/(exp(t(x[i,])**b1)))+(y2[i]/(exp(t(x[i,])**b2)))
d11=d11+(-a11/(b11*c11))
e11=e11+(log(a11*c11^koef3*exp(-c11))/b11)

a12=y2[i]*x[i,]
b12=exp(t(x[i,])**b2)
c12=(y1[i]/(exp(t(x[i,])**b1)))+(y2[i]/(exp(t(x[i,])**b2)))
d12=d12+(-a12/(b12*c12))
e12=e12+(log(a12*c12^koef3*exp(-c12))/b12)
}
diff_alpha=a1+a8
diff_tau=tau1+tau2+tau9
diff_b11=koef1*d11+e11
diff_b12=koef1*d12+e12
gr=matrix(c(diff_alpha,diff_tau,diff_b11,diff_b12))
}
y_0=f(gr)
y_0[is.nan(y_0)] = 0
fd=function(g){
I=(y_0**t(y_0))
library(MASS)
Iinv=ginv(I)
}
y_1=fd(Iinv)
beta1=betaa-(y_1**y_0)
d=sqrt(t(beta1-betaa)**(beta1-betaa))
if(matrix(d)<0.000038){
print("convergent")
print(beta1)
print("ln likelihood himpunan populasi")
print(lnlike)
break
}
}
betaa=beta1
print(paste(itr,d,beta1))
}

```

**Lampiran 7. Output Algoritma Program Estimasi Parameter Bivariate
Gamma Regression di Bawah H_0 Menggunakan R**

```
      [,1]  
[1,]  8.895581  
[2,] 10.286034  
[3,]  9.895581  
[4,] -2.713966  
[1] "ln likelihood himpunan di bawah H0"  
      [,1]  
[1,] 109.1447
```


Lampiran 8. Matrix Fisher Information untuk Estimasi Parameter Bivariate Gamma Regression di Bawah H0

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]
[1,]	2.930026e-08	3.020408e-08	2.921877e-09	7.207345e-09
[2,]	3.020408e-08	3.113579e-08	3.012008e-09	7.429670e-09
[3,]	2.921877e-09	3.012008e-09	2.913751e-10	7.187300e-10
[4,]	7.207345e-09	7.429670e-09	7.187300e-10	1.772879e-09

Lampiran 9. Syntax Menghitung PDF Menggunakan R

```
for (i in 1:n)
{
  pdf[i]=c*(y1[i]*y2[i])^(tau-
1)*((y1[i]/exp(x[i,]*%*%b1))+(y2[i]/exp(x[i,]*%*%b2)))^(alpha-
2*tau)*pgamma((y1[i]/exp(x[i,]*%*%b1))+(y2[i]/exp(x[i,]*%*%b2)
), (2*tau-alpha), lower=FALSE)
}
print(pdf)
```


BIODATA PENULIS



Penulis terlahir sebagai anak kedua dari empat bersaudara di Bojonegoro pada 05 Juli 1992 dengan nama lengkap Jauhara Rana Budiani. Penulis menyelesaikan pendidikan di SDN Kadipaten 2, SMPN 1 Bojonegoro, dan SMAN 1 Bojonegoro. Setelah lulus penulis diterima di Jurusan Statistika prodi DIII melalui ujian masuk DIII pada tahun 2010, kemudian melanjutkan studi S1 di program lintas jalur Statistika ITS.

Selama menjadi mahasiswa penulis tidak hanya mengembangkan ilmu akademik tetapi juga mengembangkan soft skill dengan aktif di beberapa kegiatan dan organisasi. Saat D3 tahun kedua dan ketiga selain aktif menjadi panitia di beberapa kegiatan penulis juga aktif di organisasi HIMASTA-ITS di departemen PSDM volunteer kegiatan TEDxITS. Di luar kampus penulis juga aktif dengan organisasi sosial yaitu Kelas Inspirasi dan relawan Gerakan Melukis Harapan yaitu pemberdayaan masyarakat ex lokalisasi Dolly. Penulis aktif sebagai asisten dosen matakuliah pengendalian kualitas statistik dan teknik sampling. Jika pembaca memiliki saran maupun kritik, penulis sangat senang dihubungi melalui email: jauhararanab@gmail.com.