



TUGAS AKHIR - SM141501

**IMPLEMENTASI ENSEMBLE KALMAN FILTER
PADA ESTIMASI GERAK PROYEKTIL DI BAWAH
PENGARUH FAKTOR TEMPERATUR DAN
KECEPATAN ANGIN**

DIAH AGUSTIN

NRP. 06111440000058

Dosen Pembimbing:

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

Hendro Nurhadi, Dipl-Ing., Ph.D

DEPARTEMEN MATEMATIKA

Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya 2018



FINAL PROJECT - SM141501

**IMPLEMENTATION OF ENSEMBLE KALMAN
FILTER ON ESTIMATION OF PROJECTILE MOTION
UNDER THE INFLUENCE FACTOR OF
TEMPERATURE AND WIND SPEED**

DIAH AGUSTIN

NRP. 06111440000058

Supervisors:

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

Hendro Nurhadi, Dipl-Ing., Ph.D

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Faculty of Mathematics Computing and Data Science

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya 2018

LEMBAR PENGESAHAN

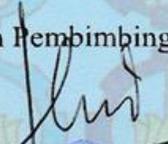
**IMPLEMENTASI ENSEMBLE KALMAN FILTER
PADA ESTIMASI GERAK PROYEKTIL DI BAWAH
PENGARUH FAKTOR TEMPERATUR DAN
KECEPATAN ANGIN**
**IMPLEMENTATION OF ENSEMBLE KALMAN FILTER
ON ESTIMATION OF PROJECTILE MOTION UNDER
THE INFLUENCE FACTOR OF TEMPERATURE AND
WIND SPEED**

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
DIAH AGUSTIN
NRP. 06111440000058
Menyetujui,

Dosen Pembimbing II

Dosen Pembimbing I


Hendro Nurhadi, Dipl-Ing., Ph.D
NIP. 19751120 200212 1 002


Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika FMKSD ITS


Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2018

IMPLEMENTASI ENSEMBLE KALMAN FILTER PADA ESTIMASI GERAK PROYEKTIL DI BAWAH PENGARUH FAKTOR TEMPERATUR DAN KECEPATAN ANGIN

Nama Mahasiswa : Diah Agustin
NRP : 0611144000058
Departemen : Matematika FMKSD – ITS
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
2. Hendro Nurhadi, Dipl-Ing., Ph.D

Abstrak

Proyektil merupakan bagian dari peluru yang meluncur di udara akibat adanya ekspansi termal yang terjadi di dalam selongsong. Salah satu jenis kaliber proyektil yang dikenal mempunyai daya hancur cukup tinggi adalah proyektil kaliber $12,7 \times 99$ mm. Dalam gerak proyektil yang sangat cepat di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin, diperlukan suatu estimasi untuk memperkirakan gerak proyektil agar dapat mencapai target dengan tepat. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini dilakukan estimasi gerak proyektil di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin menggunakan metode Ensemble Kalman Filter. Selanjutnya hasil dari simulasi metode Ensemble Kalman Filter dilakukan perbandingan dengan menggunakan metode Kalman Filter yang bertujuan untuk mengetahui keunggulan dari estimasi EnKF. Hasil akhir menunjukkan bahwa estimasi EnKF lebih baik dalam mengestimasi gerak proyektil dengan ditunjukkan persentase akurasi estimasi EnKF adalah 93.96 % untuk variabel V_1 , 97.54 % untuk variabel V_2 , dan 66.10 % untuk variabel V_3 .

Kata Kunci: Gerak Proyektil, Estimasi, Kalman Filter (KF), Ensemble Kalman Filter (EnKF)

IMPLEMENTATION OF ENSEMBLE KALMAN FILTER ON ESTIMATION OF PROJECTILE MOTION UNDER THE INFLUENCE FACTOR OF TEMPERATURE AND WIND SPEED

Name : Diah Agustin
NRP : 0611144000058
Department : Mathematics FMKSD – ITS
Supervisors : 1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
2. Hendro Nurhadi, Dipl-Ing., Ph.D

Abstract

The Projectile is part of a bullet that slid in the air due to the thermal expansion inside the sleeve. One of the caliber type which is known with its high destroyed power is $12,7 \times 99$ mm. In very fast projectile under the influence factors of air temperature and wind speed movements, we require an estimation to reach the target correctly. So that, in this study we estimated projectile under the influence factors of air temperature and wind speed motion using the Ensemble Kalman Filter method. Then, the result from simulation of Ensemble Kalman Filter, we compare with using Kalman Filter method which purpose to know the advantage of Ensemble Kalman Filter estimation. The final result shows that Ensemble Kalman Filter is better to estimate the model of projectile motion with percentage of the accuracy of Ensemble Kalman Filter estimation is 93.96 % for V_1 -variable, 97.54 % for V_2 -variable, 66.10 % for V_3 - variable.

Key-words: *Projectile Motion, Estimation, Kalman Filter (KF), Ensemble Kalman Filter (EnKF)*

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr.Wb

Alhamdulillahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

“IMPLEMENTASI ENSEMBLE KALMAN FILTER PADA ESTIMASI GERAK PROYEKTIL DI BAWAH PENGARUH FAKTOR TEMPERATUR DAN KECEPATAN ANGIN”

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Kepala Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan bimbingan selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Hendro Nurhadi, Dipl-Ing., Ph.D yang juga selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

4. Dr. Hariyanto, M.Si, Dr. Mardlijah, MT, dan Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tugas Akhir ini.
5. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si selaku Kaprodi S1 Departemen Matematika ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Departemen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. Mbak Lip dan Pak Teguh alumni S2 Matematika ITS yang senantiasa membantu dalam pengerjaan Tugas Akhir ini.
8. Ayah, bunda, kakak, adik dan keluargaku yang selalu mendukung dan mendoakan.
9. Teman-teman AKSIOM14, sahabatku dan semuanya yang telah membantu dan memberikan semangat dalam pengerjaan Tugas Akhir ini.

Penulis juga menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Wassalamu'alaikum, Wr.Wb.

Surabaya, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT.....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xvi
DAFTAR TABEL.....	xviii
DAFTAR SIMBOL.....	xix
BAB I: PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Batasan Masalah.....	4
1.4 Tujuan.....	5
1.5 Manfaat.....	5
1.6 Sistematika Penulisan.....	5
BAB II: TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Terdahulu.....	7
2.2 Proyektil Kaliber 12.7 x 99 mm.....	9
2.3 Persamaan Gerak Proyektil Di Bawah Pengaruh Faktor Temperatur dan Kecepatan Angin.....	11
2.4 Metode Beda Hingga.....	14
2.5 Metode Kalman Filter.....	16
2.6 Metode Ensemble Kalman Filter.....	18

BAB III: METODE PENELITIAN	23
3.1 Studi Literatur.....	23
3.2 Identifikasi Model Gerak Proyektil Dibawah Pengaruh Faktor Lingkungan.....	23
3.3 Implementasi Metode Kalman Filter.....	24
3.4 Implementasi Metode Ensemble Kalman Filter.....	24
3.5 Simulasi, Analisis Hasil dan Pembahasan.....	25
3.6 Penarikan Kesimpulan dan Saran.....	26
3.7 Diagram Alur Penelitian.....	27
3.8 Diagram Implementasi Metode Kalman Filter.....	28
3.9 Diagram Implementasi Metode Ensemble Kalman Filter.....	29
 BAB IV: PEMBAHASAN DAN ANALISIS	 31
4.1 Persamaan Gerak Proyektil 12,7 x 99 mm Di Bawah Pengaruh Faktor Temperatur dan Kecepatan Angin.....	31
4.2 Diskritisasi.....	43
4.3 Bentuk Sistem Diskrit Stokastik.....	47
4.4 Implementasi Kalman Filter.....	48
4.5 Implementasi Ensemble Kalman Filter.....	55
4.6 Simulasi Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter.....	61
4.6.1 Simulasi pada Kepadatan Udara (ρ) dan Kecepatan Angin (W_1) Ideal.....	62
4.6.2 Simulasi pada Kepadatan Udara (ρ) dan Kecepatan Angin (W_1) Minimum.....	66
4.6.3 Simulasi pada Kepadatan Udara (ρ) dan Kecepatan Angin (W_1) Maksimum.....	69
4.6.4 Simulasi pada Kepadatan Udara (ρ) dan Kecepatan Angin (W_1) di Lingkungan Tropis Ekstrim.....	73

4.6.5 Simulasi Lintasan Proyektil Pada Target Diam.....	78
4.6.6 Simulasi Lintasan Proyektil Pada Target Bergerak.....	80
BAB V: PENUTUP	87
5.1 Kesimpulan.....	87
5.2 Saran.....	88
DAFTAR PUSTAKA	89
LAMPIRAN 1 Data Nilai RMSE	92
LAMPIRAN 2 Simulasi	96
LAMPIRAN 3 Source Code	99
LAMPIRAN 4 Biodata Penulis	109

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Senjata kaliber $12,7 \times 99$ mm, <i>Browning M2, M2HB Machine Gun</i>	9
Gambar 2.2 Sistem Koordinat untuk Enam Derajat Kebebasan.....	11
Gambar 3.1 Diagram Alir Metode Penelitian.....	27
Gambar 3.2 Diagram Alir Implementasi Kalman Filter.....	28
Gambar 3.3 Diagram Alir Implementasi Ensemble Kalman Filter.....	29
Gambar 4.1 Sistem Koordinat untuk Enam Derajat Kebebasan.....	32
Gambar 4.2 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_1 Pada Kondisi Ideal.....	62
Gambar 4.3 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_2 Pada Kondisi Ideal.....	63
Gambar 4.4 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_3 Pada Kondisi Ideal.....	63
Gambar 4.5 Nilai Error Estimasi KF dan EnKF.....	65
Gambar 4.6 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_1 Pada Kondisi Minimum.....	66
Gambar 4.7 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_2 Pada Kondisi Minimum.....	67
Gambar 4.8 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_3 Pada Kondisi Minimum.....	67
Gambar 4.9 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_1 Pada Kondisi Maksimum.....	70
Gambar 4.10 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_2 Pada Kondisi Maksimum.....	70
Gambar 4.11 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_3	

	Pada Kondisi Maksimum.....	71
Gambar 4.12	Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_1 Pada Lingkungan Ekstrim.....	73
Gambar 4.13	Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_2 Pada Lingkungan Ekstrim.....	74
Gambar 4.14	Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_3 Pada Lingkungan Ekstrim.....	74
Gambar 4.15	Lintasan Proyektil pada Lingkungan Tropis Maksimum.....	79
Gambar 4.16	Lintasan Proyektil pada Lingkungan Tropis Ekstrim.....	79
Gambar 4.17	Lintasan Proyektil dengan Target Beberapa Titik di Lingkungan Tropis Maksimum.....	81
Gambar 4.18	Lintasan Proyektil dengan Target Beberapa Titik di Lingkungan Tropis Ekstrim.....	82

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Spesifikasi Senjata Kaliber $12,7 \times 99$ mm, Browning M2, M2HB Machine Gun.....	10
Tabel 2.2 Algoritma Kalman Filter (KF).....	17
Tabel 2.3 Algoritma Ensemble Kalman Filter (Enkf).....	20
Tabel 3.1 Nilai Parameter.....	25
Tabel 4.1 Nilai Awal Parameter.....	61
Tabel 4.2 Nilai RMSE Setiap Variabel Pada Kondisi Ideal.....	65
Tabel 4.3 Nilai RMSE Setiap Variabel Pada Kondisi Minimum.....	69
Tabel 4.4 Nilai RMSE Setiap Variabel Pada Kondisi Maksimum.....	72
Tabel 4.5 Nilai RMSE Setiap Variabel Pada Kondisi Ekstrim.....	75
Tabel 4.6 Nilai RMSE Pada Sejumlah Ensemble.....	77
Tabel 4.7 Persentase Nilai Error Pada Posisi V_1, V_2, V_3	77
Tabel 4.8 Lintasan Proyektil Pada Masing-Masing Sudut Tembak.....	80
Tabel 4.9 Lintasan Proyektil Sudut Tembak Yaw Pada Lingkungan Tropis Maksimum	82
Tabel 4.10 Lintasan Proyektil Sudut Tembak Yaw Pada Lingkungan Tropis Ekstrim.....	83
Tabel 4.11 Lintasan Proyektil Sudut Tembak Yaw Tetap.....	85

DAFTAR SIMBOL

m	: massa proyektil
\vec{V}	: kecepatan vektor searah dengan sumbu-x
t	: waktu
$\sum \vec{F}$: jumlahan vektor gaya aerodinamik
\vec{g}	: percepatan gravitasi
\vec{H}	: jumlahan vektor momentum sudut proyektil
$\sum \vec{M}$: jumlahan vektor momen aerodinamik
C_D	: koefisien gaya tarik
$C_{L\alpha}$: koefisien gaya angkat
C_{Lp}	: koefisien momen redaman rotasi
$C_{M\alpha}$: koefisien momen bermanuver
$C_{Mp\alpha}$: koefisien momen <i>magnus</i>
$(C_{Mq} + C_{Ma})$: koefisien momen redaman <i>pitch</i>
$C_{Np\alpha}$: koefisien gaya <i>magnus</i>
$(C_{Nq} + C_{Na})$: koefisien gaya redaman <i>pitch</i>
d	: diameter proyektil
m	: massa proyektil
S	: luas permukaan proyektil $\left(S = \frac{\pi d^2}{4} \right)$
t	: waktu
ρ	: kepadatan udara
\vec{h}	: vektor momentum sudut dibagi dengan momen inersia melintang, I_y
\vec{g}	: vektor percepatan gravitasi
\vec{v}	: vektor kecepatan proyektil saat di udara, $\vec{v} = \vec{V} - \vec{W}$
\vec{V}	: vektor kecepatan proyektil dipengaruhi sistem koordinat bumi

- \vec{x} : vektor unit lintasan proyektil sehubungan dengan sumbu simetri
 \vec{W} : vektor kecepatan angin dipengaruhi system koordinat bumi
 \vec{I}_y : momen inersia proyektil pada sumbu-y, melalui pusat massa
 \vec{I}_x : momen inersia proyektil pada sumbu-x
 x_0 : inisial dari sistem
 x_{k+1} : variabel keadaan pada waktu $k + 1$ dan berdimensi n
 \vec{I}_y : momen inersia proyektil pada sumbu-y, melalui pusat massa
 x_{k+1} : variabel keadaan pada waktu $k + 1$ dan berdimensi $n \times 1$
 x_k : variabel keadaan pada waktu k yang nilai estimasi awalnya \bar{x}_0 dan kovarian awal P_{x_0} , $x_k \in R^n$
 u_k : vektor masukan deterministik pada waktu k , $u_k \in R^m$
 w_k : noise pada sistem dengan *mean* $\bar{w}_k = 0$ dan kovarian Q_k
 z_k : variabel pengukuran, $z_k \in R^p$
 v_k : noise pada pengukuran dengan *mean* $\bar{v}_k = 0$ dan kovarian R_k

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini membahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup identifikasi permasalahan pada topik Tugas Akhir. Kemudian dirumuskan menjadi permasalahan yang akan diberikan batasan-batasan untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang Masalah

Peluru pada umumnya terdiri dari berbagai bagian yaitu proyektil, selongsong, mesiu, dan permatika. Proyektil merupakan bagian dari peluru yang meluncur di udara akibat adanya ekspansi termal yang terjadi di dalam selongsong [1]. Pada setiap proyektil memiliki ukuran (diameter) proyektil yang dinyatakan sebagai kaliber. Dalam dunia militer saat ini kaliber yang terkenal mempunyai daya hancur tinggi adalah proyektil kaliber $12,7 \times 99$ mm yang didesain untuk senapan berat M2 Browning Machine Gun. Selain itu, dapat digunakan untuk senapan sniper dan senapan mesin dengan proyektil kaliber .50. Kaliber $12,7 \times 99$ mm ini termasuk kelas menengah, amunisi senapan runduk anti material (AMR – Anti-material Rifle) yang dapat digunakan jenis High Explosive (HE) untuk penghancur material, ataupun Armor-Piercing (AP) yang dapat menembus lapisan baja [2]. Karena dalam mencapai misi penembakan saat ini bukan lagi diutamakan untuk tujuan melumpuhkan personil tetapi juga untuk penetrasi terhadap material dengan jarak tembak cukup jauh dan daya hancur yang maksimal.

Sebuah proyektil merusak target dengan cara menembusnya dengan energi kinetik yang dihasilkan oleh

kecepatannya yang sangat tinggi. Dalam gerak proyektil yang sangat cepat, terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi gerak proyektil dalam mencapai target salah satunya adalah faktor lingkungan kecepatan angin dan temperatur sehingga faktor lingkungan tersebut dapat menyebabkan gerak proyektil tidak tepat pada target. Oleh karena itu, diperlukan suatu estimator untuk dapat meminimalkan gangguan (noise) pada gerak proyektil dibawah pengaruh faktor lingkungan sehingga proyektil dapat mencapai target yang diinginkan. Salah satu estimator yang paling banyak dikenal adalah metode Kalman Filter.

Kalman Filter merupakan sebuah algoritma pengolahan data yang optimal dan Kalman Filter merupakan suatu estimator sistem dinamik linear. Metode Kalman Filter ini diperkenalkan pertama kali oleh R.E. Kalman pada tahun 1960 [3]. Kalman Filter telah diterapkan pada sungai, gelombang laut, dan air pasang [4], contohnya adalah *Estimation of Surabaya River Water Quality* [5]. Selain itu, Kalman Filter banyak digunakan untuk pemodelan hidrologi, seperti pemodelan air tanah, limpasan hujan, air permukaan, dll [6]. Selama beberapa tahun Kalman Filter dianggap sebagai metode estimasi yang paling optimal dalam menaksir dan menduga variabel keadaan dari sebuah sistem. Akan tetapi, algoritma pada Kalman Filter hanya dapat diimplementasikan pada model sistem dinamik linear saja, padahal dalam kenyataannya banyak masalah muncul pada model sistem dinamik non-linear salah satunya adalah model sistem pada gerak peluru dibawah pengaruh faktor lingkungan seperti diatas. Dari permasalahan tersebut telah dilakukan pengembangan algoritma Kalman Filter sehingga dapat menangani permasalahan baik pada model sistem dinamik

linear maupun pada model sistem dinamik non-linear yaitu metode Ensemble Kalman Filter (EnKF).

Metode Ensemble Kalman Filter (EnKF) adalah metode estimasi modifikasi dari algoritma Kalman Filter yang dapat digunakan untuk mengestimasi model sistem linear maupun non-linear dengan membangkitkan atau menggunakan sejumlah *ensemble* pada tahap prediksi untuk kovarian errornya [7]. Aplikasi dari metode ini dapat digunakan untuk mengestimasi *The Concentration of Air Pollution* [8], *Ensemble and Fuzzy Kalman Filter for position estimation of an autonomous underwater vehicle based on dynamical system of AUV motion* [9], *Design of Position Estimation Algorithm of Navigation and Trajectory System for Unmanned Underwater Vehicle ITS AUV-01 using EnKF method* [10]. Selain itu, penelitian mengenai metode Ensemble Kalman Filter pada lintasan misil telah dilakukan oleh Sigit Pancahayani pada tahun 2011 yang berjudul “Estimasi Lintasan Misil Dengan Metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF)” dimana pada penelitian itu menyatakan bahwa metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) dapat digunakan untuk mengestimasi model lintasan misil [11].

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan dari penelitian diatas, pada Tugas Akhir ini dilakukan estimasi pada persamaan gerak proyektil kaliber $12,7 \times 99$ mm di bawah pengaruh faktor lingkungan yaitu temperatur dan kecepatan angin dengan menggunakan metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF). Penelitian ini bermaksud untuk mengestimasi variabel keadaan agar mendapatkan tingkat kesalahan estimasi yang sangat kecil sehingga dapat membantu para prajurit dalam mempelajari ketepatan saat menembak target dengan mempertimbangkan faktor temperatur dan kecepatan angin.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah disajikan, penulis menuliskan beberapa permasalahan yang dibahas dalam penelitian Tugas Akhir ini sebagai berikut:

1. Bagaimana mengkaji persamaan gerak proyektil di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin?
2. Bagaimana keunggulan estimasi Ensemble Kalman Filter dibandingkan Kalman Filter pada gerak proyektil di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin?

1.3 Batasan Masalah

Dalam Tugas Akhir ini, penulis membatasi permasalahan sebagai berikut:

1. Software yang digunakan adalah MATLAB R2017a.
2. Jarak antara target dengan tank pembawa senjata api adalah kurang dari 2 km.
3. Kaliber proyektil yang digunakan adalah kaliber $12,7 \times 99$ mm jenis M2 Browning Machine Gun jenis MU3-P.
4. Data yang digunakan berupa temperatur dan kecepatan angin diambil dari BMKG Surabaya.
5. Pada simulasi dilakukan arah kecepatan angin searah atau berlawanan dengan gerak proyektil.
6. Kondisi temperatur yang digunakan adalah suhu maksimum dan suhu minimum.
7. Target yang bergerak diasumsikan sebuah titik.
8. Sudut tembak pada selongsong senjata adalah $0^0 - 60^0$.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian Tugas Akhir ini adalah:

1. Mengkaji persamaan gerak peluru proyektil di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin.
2. Mengetahui keunggulan estimasi Ensemble Kalman Filter dibandingkan dengan Kalman Filter pada gerak proyektil di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin.

1.5 Manfaat

Dari penelitian Tugas Akhir ini, penulis mengharapkan agar Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi berbagai kalangan sebagai berikut:

1. Memperluas permasalahan yang dapat diterapkan dengan metode Ensemble Kalman Filter.
2. Memberikan gambaran tentang implementasi metode Ensemble Kalman Filter dalam mengestimasi gerak proyektil kaliber $12,7 \times 99$ mm di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin.
3. Dapat dijadikan sebagai bahan rujukan dalam penentuan kebijakan gerak proyektil dibawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin sehingga proyektil dapat bergerak tepat pada target.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab II berisi penelitian terdahulu dan teori-teori yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir ini seperti model gerak proyektil dibawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin, proyektil kaliber $12,7 \times 99$ mm, metode Kalman Filter, dan metode Ensemble Kalman Filter.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Dalam Bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, selanjutnya dilakukan identifikasi model pada gerak peluru dibawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin. Tahap selanjutnya yaitu implementasi metode Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter beserta simulasi dan analisis hasil. Tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis serta saran.

4. BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada Bab ini dibahas secara detail mengenai penerapan metode Kalman Filter, Ensemble Kalman Filter dan hasil simulasi.

5. BAB V PENUTUP

Pada Bab ini berisi mengenai kesimpulan akhir yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab ini diuraikan mengenai hasil dari penelitian-penelitian sebelumnya yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir ini. Selain itu juga diuraikan mengenai persamaan gerak proyektil di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin, proyektil kaliber $12,7 \times 99$ mm, metode Kalman Filter, dan metode Ensemble Kalman Filter.

2.1 Penelitian Terdahulu

Dalam Tugas Akhir ini penulis merujuk pada beberapa penelitian-penelitian sebelumnya yang sesuai dengan topik yang diambil. Salah satu penelitian dari paper yang ditulis oleh Sigit Pancahayani pada tahun 2011 yang berjudul “Estimasi Lintasan Misil Dengan Metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF). Pada penelitian tersebut mengatakan bahwa model misil yang digunakan adalah empat state yaitu posisi sudut (γ), kecepatan (V), posisi pada sumbu-x (x), dan ketinggian (h) dimana keempat state inilah yang akan diestimasi dengan menggunakan metode *Ensemble Kalman Filter*. Dengan metode ini didapatkan hasil estimasi yang mendekati posisi real dengan error RMS (*Root Mean Square*) yang cukup kecil [11].

Pada penelitian lain dari Tugas Akhir yang ditulis oleh Santi Hartini pada tahun 2011 yang berjudul “*Implementasi Metode Ensemble Kalman Filter (EnKF) untuk Mengestimasi Posisi Robot Mobil*”. Pada penelitian tersebut menjelaskan bahwa model sistem dinamik robot mobil yang berbentuk non-linear dapat diimplementasikan dalam metode Ensemble Kalman Filter tanpa melakukan pelinearan. Dan dari hasil

simulasi diperoleh nilai error terkecil pada jumlah ensemble sebanyak 200 ensemble [12].

Selain itu, penelitian mengenai gerak proyektil telah dilakukan oleh Ryan F. Hooke pada tahun 2015 yang berjudul "*The Mathematical Modelling of Projectile Trajectories under The Influence of Enviromental Effects*". Pada penelitian tersebut menjelaskan mengenai model 2-DOF yang dikembangkan menjadi model 6-DOF dimana terdiri dari model tiga gerak rotasi dan tiga gerak translasi yang kemudian diselesaikan dengan menggunakan metode numerik yaitu metode Runge-Kutta [13]. Dan faktor lingkungan yang digunakan pada model ini adalah variabel vektor angin dimana model ini merupakan pembahasan model dari buku yang ditulis oleh R.L McCoy (1998) yang berjudul "*Modern Exterior Ballistics: The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*" dengan mengabaikan efek Coriolis dimana efek Coriolis adalah salah satu faktor gaya yang membelokkan arah arus yang berasal dari tenaga rotasi bumi. Hasil penelitian ini diperoleh bahwa efek Coriolis tidak mempunyai pengaruh besar terhadap lintasan yang pendek namun berpengaruh pada lintasan yang panjang [14].

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, pada Tugas Akhir ini dilakukan pengembangan dari persamaan gerak proyektil yang ditulis oleh Ryan F. Hooke diatas dengan melakukan estimasi gerak proyektil kaliber $12,7 \times 99$ mm di bawah pengaruh lingkungan faktor temperatur dan kecepatan angin menggunakan metode Ensemble Kalman Filter (EnKF). Hasil akhir dari Tugas Akhir ini untuk mengetahui pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin pada persamaan gerak proyektil menggunakan metode EnKF yang dibandingkan dengan metode KF.

2.2 Proyektil Kaliber 12.7 x 99 mm

Dalam dunia militer saat ini, kaliber proyektil yang cukup terkenal adalah kaliber $12,7 \times 99$ mm atau .50 cal. Proyektil .50 Browning Machine Gun (.50 BMG) atau $12,7 \times 99$ mm adalah proyektil yang terkenal mempunyai daya hancur tinggi dan mampu menjangkau target hingga jarak 2.000 meter dengan kecepatan 900 m/s. Proyektil ini didesain untuk senapan mesin berat M2 Browning yang dapat dilihat pada Gambar 1. Selain untuk senapan berat M2 Browning, proyektil kaliber $12,7 \times 99$ mm ini digunakan untuk senapan penembak runduk atau senapan sniper dan juga senapan mesin yang menggunakan proyektil kaliber .50 [2].



Gambar 2.1 Senjata kaliber $12,7 \times 99$ mm, *Browning M2, M2HB Machine Gun*

Senjata-senjata umum yang paling sering digunakan diatas tank sebagian besar menggunakan senjata dengan proyektil kaliber $12,7 \times 99$ mm. Amunisi senjata kaliber $12,7 \times 99$ mm terdiri dari berbagai jenis proyektil. diantaranya proyektil standar MU 3TJ, proyektil Sniper $12,7$ mm MU 3M, proyektil Anti Material MU 3SAMM, proyektil bakar tembus baja MU 3PB, proyektil tracer MU 3N, proyektil penembus armor MU 3P, dan yang paling dahsyat proyektil tembus peledak MU 3BLAM. Salah satu tipe proyektil yang unggul mempunyai daya tembus terhadap lapisan baja, *mild steel* dengan ketebalan 16 mm pada jarak 150 meter adalah proyektil jenis *Armour Piercing* MU3-P. Spesifikasi senjata proyektil

kaliber $12,7 \times 99$ mm jenis MU3-P ditunjukkan pada tabel 1 dibawah ini [2].

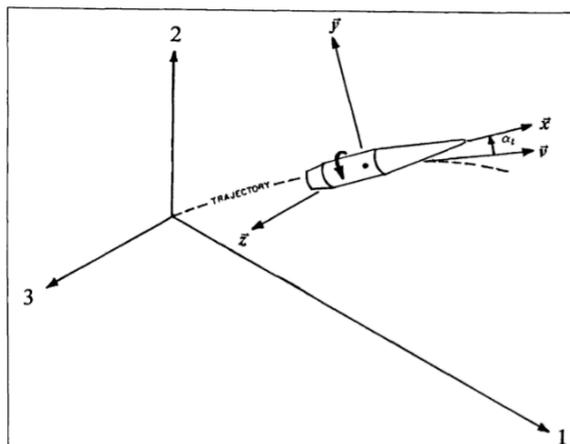
Tabel 2.1 Spesifikasi Senjata Kaliber $12,7 \times 99$ mm,
Browning M2, M2HB Machine Gun.

Detail	Deskripsi
Cartridge	- Berat: (119) g. - Rim Thickness: 2,11 mm - Extractor: 17,27 mm
Bullet	- Panjang: 58,67 m - Berat: 45,20 g (698 butir) - Bahan: Inti: Antimoni Timbal Jaket: Kuningan 90 (CuZn 10) - Tipe: AP, Jaket Full Metal, Perahu Pointed Boat
Kasus	- Panjang: 99,31 mm - Bahan: Kuningan 72 (CuZn 28) - Tipe: Rimless, Bottleneck, dan centerfire
Primer	Tipe: Non Korosif, Non Mercurik
Bahan pembakar	Jenis: bubuk tanpa asap
Karakteristik	- Kecepatan rata-rata: 900 m / s - Tekanan rata-rata GA: Max. 3,800 kg / cm ² - Tekanan Gas Individu: Max. 4.000 kg / cm ² - Akurasi 150 m: Max. 30 cm (ES) @ 10 putaran - Melalui Penetrasi pada 150 m: Baja Ringan 16 mm

Pengepakan	Gunakan Close Loop Link Type M2 (HBFL) - 1 Linked: 100 putaran - 1 Kotak Metalik: 100 ronde - 1 Kotak Plastik: 200 ronde Gunakan Open Loop Link Type M15 (CIS) - 1 Linked: 80 ronde - 1 Kotak Metalik: 80 putaran - 1 Kotak Plastik: 160 ronde
------------	---

2.3 Persamaan Gerak Projektil Di bawah Pengaruh Faktor Temperatur dan Kecepatan Angin

Gerak projektil pada enam derajat kebebasan (6-DOF) diilustrasikan pada sumbu koordinat bumi-1,2,3 dan gerak projektil ditunjukkan pada sumbu x, y, z yang dapat dilihat pada Gambar 2.2 dibawah ini.



Gambar 2.2 Sistem Koordinat untuk Enam Derajat Kebebasan

Persamaan gerak proyektil kaitannya sangat erat dengan Hukum Newton yang menyatakan bahwa tingkat perubahan momentum linear harus sama dengan jumlah gaya yang diterapkannya, dan laju perubahan momentum sudut harus sama dengan jumlah semua momen yang diterapkannya juga. Berikut ini merupakan Hukum Newton untuk gerak sebuah proyektil [14]:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} + m\vec{g} \quad (2.1)$$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum \vec{M} \quad (2.2)$$

dengan

$$\vec{H} = I_x p \vec{x} + I_y \left(\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right)$$

Kepadatan udara (*air density*) memiliki keterkaitan dengan gaya tarik (*drag force*) yang bekerja pada proyektil saat bergerak melalui udara. Semakin padat udara maka semakin besar gaya tariknya (*drag force*). Gaya tarik ditunjukkan pada persamaan dibawah ini.

$$\vec{F}_D = \frac{1}{2} \rho V^2 C_D S \quad (2.3)$$

Dari gambar 2.2 diatas diperoleh persamaan differensial vektor gerak 6-DOF untuk gerak yang tidak fleksibel, simetri terhadap rotasi dilanjutkan dengan semua gaya aerodinamik dan momennya yang ditambahkan angin dan gravitasi. Semuanya dijelaskan pada persamaan dibawah ini [13]:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} = & \frac{\rho v S C_D}{2m} \vec{v} + \frac{\rho S C_{L\alpha}}{2m} [v^2 \vec{x} - (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v}] \\ & - \frac{\rho S d C_{Np\alpha}}{2m} \left(\frac{I_y}{I_x} \right) (\vec{h} \cdot \vec{x}) (\vec{x} \times \vec{v}) \\ & + \frac{\rho v S d (C_{Nq} + C_{Na})}{2m} (\vec{h} \times \vec{x}) + \vec{g} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) diatas adalah persamaan diferensial yang menggambarkan gerak dari pusat masa proyektil. Persamaan (2.5) merupakan persamaan differensial yang menggambarkan gerak sudut (*spin*, *pitch*, dan *yaw*) proyektil pada pusat masanya.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{h}}{dt} = & \frac{\rho v S d^2 C_{Lp}}{2I_x} (\vec{h} \cdot \vec{x}) \vec{x} + \frac{\rho v S d C_{M\alpha}}{2I_y} (\vec{x} \times \vec{v}) \\ & + \frac{\rho S d^2 C_{Mp\alpha}}{2I_x} (\vec{h} \cdot \vec{x}) (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{x}) \\ & + \frac{\rho v S d^2 (C_{Mq} + C_{Ma})}{2I_y} (\vec{h} - (\vec{h} \cdot \vec{x}) \vec{x}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sebagai tambahan pada persamaan (2.4) dan (2.5) dibuat menjadi bentuk vektor perkalian silang (*cross product*) dan vektor perkalian titik (*dot product*) dari \vec{h} dengan \vec{x} ditunjukkan sebagai berikut [14]:

$$(\vec{h} \cdot \vec{x}) = \frac{I_x p}{I_y} \quad (2.6)$$

$$(\vec{h} \times \vec{x}) = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (2.7)$$

Sehingga persamaan gerak proyektil yang digunakan adalah:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} = & \frac{\rho v S C_D}{2m} \vec{v} + \frac{\rho S C_{L\alpha}}{2m} [v^2 \vec{x} - (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v}] \\ & - \frac{\rho S d C_{Np\alpha}}{2m} \left(\frac{I_y}{I_x} \right) (\vec{h} \cdot \vec{x}) (\vec{x} \times \vec{v}) \\ & + \frac{\rho v S d (C_{Nq} + C_{Na})}{2m} (\vec{h} \times \vec{x}) + \vec{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{h}}{dt} &= \frac{\rho v S d^2 C_{Lp}}{2I_x} (\vec{h} \cdot \vec{x}) \vec{x} + \frac{\rho v S d C_{M\alpha}}{2I_y} (\vec{x} \times \vec{v}) \\
&\quad + \frac{\rho S d^2 C_{Mp\alpha}}{2I_x} (\vec{h} \cdot \vec{x}) (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{x}) \\
&\quad + \frac{\rho v S d^2 (C_{Mq} + C_{Ma})}{2I_y} (\vec{h} - (\vec{h} \cdot \vec{x}) \vec{x})
\end{aligned}$$

2.4 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan problem matematis dari suatu gejala fisis. Aplikasi penting dari metode beda hingga adalah dalam analisis numerik, khususnya pada persamaan diferensial biasa maupun parsial. Metode ini digunakan dengan pendekatan ekspansi Taylor dititik acuan (x).

Apabila suatu fungsi $f(x)$ dideferensialkan dalam interval $[x_0 - h, x_0 + h]$ dengan nilai h cukup kecil, maka hal ini dapat diuraikan dalam bentuk deret Taylor, disekitar titik ($x_0 + \Delta x$) yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(x_0 + h) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots \\
&\quad + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} h^{n-1} + O(h^n) \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Sedangkan disekitar titik ($x_0 - h$) diperoleh bentuk deret Taylor sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(x_0 - h) &= f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!} h - \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 - \dots \\
&\quad - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \Delta h^{n-1} - O(\Delta h^n) \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Pendekatan turunan pertama dilakukan dengan memotong suku-suku berorde lebih dari satu. Hal ini disebabkan untuk nilai h yang sangat kecil, maka semakin besar nilai pangkat dari h maka nilainya akan semakin kecil, sehingga untuk orde lebih dari satu nilainya dapat diabaikan. Pendekatan pertama dari persamaan (2.8) adalah sebagai berikut:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + O(h) \quad (2.10)$$

Dari persamaan (2.10) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (2.11)$$

Persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (2.12)$$

Persamaan (2.12) dikenal sebagai pendekatan beda maju. Sedangkan pendekatan beda mundur ditunjukkan dalam persamaan (2.15) dibawah ini yang merupakan pendekatan turunan pertama dari Persamaan (2.9).

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}h - O(h) \quad (2.13)$$

Dari Persamaan (2.13) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) dapat ditulis sebagai

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \quad (2.15)$$

Pendekatan turunan pertama yang lain yaitu pendekatan beda pusat (*center difference*) pada Persamaan dibawah ini diperoleh dengan menjumlahkan Persamaan (2.12) dan (2.15) sebagai berikut:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \quad (2.16)$$

Apabila sumbu x dibagi menjadi beberapa bagian interval Δx yang panjangnya sama, maka absis titik i dapat

dibentuk $x_i = i(\Delta x)$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots$ sehingga pendekatan turunan pertama dan kedua di titik i menjadi [15]:

1. Pendekatan beda maju (*forward difference*)

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{(\Delta x)}$$

2. Pendekatan beda mundur (*backward difference*)

$$f'(x_i) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{(\Delta x)}$$

3. Pendekatan beda pusat (*center difference*)

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{(\Delta x)}$$

Pada Tugas Akhir ini, terdapat fungsi V dan h yang dilakukan pendiskritan terhadap waktu (t) dengan menggunakan beda hingga maju untuk menentukan satu langkah kedepan. Sehingga diperoleh Beda Hingga Maju sebagai berikut:

$$\dot{V}_j = \frac{dV_j}{dt} = \frac{V_{j_{k+1}} - V_{j_k}}{\Delta t} \quad (2.17)$$

$$\dot{h}_j = \frac{dh_j}{dt} = \frac{h_{j_{k+1}} - h_{j_k}}{\Delta t} \quad (2.18)$$

dimana $j = 1, 2, 3$ adalah sumbu koordinat bumi

2.4 Metode Kalman Filter

Metode Kalman Filter diperkenalkan pertama kali oleh R.E. Kalman pada tahun 1960. Kalman Filter merupakan sebuah algoritma pengolahan data yang optimal. Kalman Filter merupakan suatu estimator sistem dinamik linear. Kalman Filter mampu mengestimasi variabel keadaan dinamis dari sistem dengan dua tahapan yaitu tahap prediksi dan tahap koreksi. Tahap prediksi (*time update*) merupakan tahap estimasi dari sistem model dinamik, sedangkan tahap koreksi (*measurement update*) merupakan tahap estimasi dari model

pengukuran. Algoritma Kalman Filter waktu diskrit ditulis sebagai berikut [16]:

Model sistem:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k \quad (2.19)$$

Model pengukuran:

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (2.20)$$

Dengan asumsi:

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}), w_k \sim N(0, Q_k), v_k \sim N(0, R_k)$$

Variabel A_k, B_k, G_k, H_k adalah matriks-matriks dengan nilai elemen-elemennya adalah koefisien variabel masing-masing. Pada Kalman Filter, estimasi dilakukan dengan dua tahapan yaitu tahap prediksi (*time update*) dan tahap koreksi (*measurement update*).

Tahap prediksi yaitu memprediksi variabel keadaan dan menghitung kovarian *error*. Pada tahap koreksi, hasil estimasi variabel keadaan dikoreksi menggunakan model pengukuran. Salah satu bagian dari tahap ini yaitu menentukan matriks Kalman Gain yang digunakan untuk meminimumkan kovariansi *error*. Tahap prediksi dan koreksi dilakukan secara rekursif dengan cara meminimumkan kovariansi *error* estimasi: $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$, \hat{x}_k merupakan penaksiran dari variabel keadaan. Berikut ini adalah algoritma Kalman Filter yang diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2.2 Algoritma Kalman Filter (KF)

Model Sistem	$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k$
Model Pengukuran	$z_{k+1} = H_k x_k + v_k$
Asumsi	$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}), w_k \sim N(0, Q_k),$ $v_k \sim N(0, R_k)$

Inisialisasi	$\hat{x}_0 = \bar{x}_0, P_0 = P_{x_0}$
Tahap Prediksi	Estimasi : $\hat{x}_{k+1}^- = A_k \hat{x} + B_k u_k$ Kovarian Error : $P_k^- = A_k P_k A_k^T + G_k Q_k G_k^T$
Tahap Koreksi	Kalman Gain : $K_{k+1} = P_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T [\mathbf{H}_{k+1} P_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T + \bar{R}_{k+1}^p]^{-1}$ Estimasi : $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-)$ Kovarian Error : $P_{k+1} = [I - K_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] P_{k+1}^-$

2.5 Metode Ensemble Kalman Filter

Metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) pertama kali diperkenalkan oleh Evensen (1994) dengan membangkitkan atau menggunakan sejumlah *ensemble* untuk mengestimasi kovariansi *error* pada tahap prediksi. Metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) sebagai salah satu metode dalam asimilasi data yang telah banyak digunakan untuk mengestimasi berbagai persoalan berbentuk model sistem *strongly nonlinear*, dan telah ditunjukkan bahwa mampu menyelesaikan model sistem dinamik nonlinear dan ruang keadaan (*state space*) yang besar.

Pada algoritma *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) mempunyai tiga tahapan, yaitu tahap inisialisasi, tahap prediksi (*time update step*) dan tahap koreksi (*measurement update step*). Pada tahap inisialisasi, metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) dijalankan dengan membangkitkan sejumlah *ensemble*

yang merupakan representasi dari variabel keadaan (*variable state*). Dari *ensemble* yang dibangkitkan tersebut diperoleh nilai rata-rata (*mean*) *ensemble* yang dianggap sebagai nilai awal.

Misalkan diberi model sistem stokastik dinamik nonlinear:

$$x_{k+1} = f(k, x_k) + w_k \quad (2.21)$$

Dengan pengukuran linear $z_k \in \mathfrak{R}^p$ yaitu:

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (2.22)$$

Dengan asumsi:

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}), w_k \sim N(0, Q_k), v_k \sim N(0, R_k)$$

Proses estimasi EnKF diawali dengan membangkitkan sejumlah N_e *ensemble* dengan mean 0 dan kovarian 1. *Ensemble* yang dibangkitkan dilakukan secara random dan berdistribusi normal.

Misalkan akan dibangkitkan sejumlah N_e *ensemble* untuk memperoleh nilai rata-rata (*mean*) yaitu

$$X_{0,i} = [X_{0,1} \ X_{0,2} \ X_{0,3} \ \dots \ X_{0,N_e}] \quad (2.23)$$

Untuk tahap prediksi dan koreksi, sama dengan metode *Kalman Filter* tetapi sebelum masuk ke tahap prediksi, mean *ensemblenya* harus ditentukan terlebih dahulu yaitu:

$$\hat{x}_k^* = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} x_{k,i} \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (2.24)$$

dan untuk kovarian error P_k , yaitu :

$$P_k = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^{N_e} (\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-) (\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)^T \quad (2.25)$$

Persamaan (2.23) digunakan pada tahap prediksi dan tahap koreksi untuk menghitung estimasi masing-masing \hat{x}_k^- dan \hat{x}_k . Sedangkan persamaan (2.25) hanya digunakan untuk kovarian pada tahap prediksi. Pada EnKF, noise sistem W_k pada tahap prediksi dan noise pengukuran V_k pada tahap koreksi dibangkitkan dalam bentuk *ensemble* [17].

Berikut ini adalah Algoritma Ensemble Kalman Filter (EnKF) yang disajikan pada Tabel 2.3 [18].

Tabel 2.3 Algoritma Ensemble Kalman Filter (EnKF)

Model Sistem	$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k$
Model Pengukuran	$\mathbf{Z}_k = H\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$
Asumsi	$\mathbf{w}_k \sim N(0, Q_k), \mathbf{v}_k \sim N(0, R_k)$
Inisialisasi	<p>Bangkitkan N ensemble sesuai estimasi awal $\bar{\mathbf{x}}_0$</p> $\mathbf{x}_{0,i} = [x_{0,1} \ x_{0,2} \ x_{0,3} \ \dots \ x_{0,N_e}]$ <p>Tentukan nilai awal:</p> $\hat{\mathbf{x}}_0 = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_{0,i}$
Tahap Prediksi	$\hat{\mathbf{x}}_{k,i}^- = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1,i} + \mathbf{u}_{k-1,i}) + \mathbf{w}_{k,i}$ <p>Estimasi:</p> $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{x}}_{k,i}^-$ <p>Kovarian Error:</p> $P_k^- = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^N (\hat{\mathbf{x}}_{k,i}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\hat{\mathbf{x}}_{k,i}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T$

Tahap Koreksi	$Z_{k,i} = z_k + v_k$ <p>Kalman Gain :</p> $K_k = P_k^- \mathbf{H}^T [\mathbf{H} P_k^- \mathbf{H}^T + R_k]^{-1}$ <p>Estimasi:</p> $\hat{x}_{k,i}^- = \hat{x}_{k,i}^- + K_k (z_{k,i} - H \hat{x}_{k,i}^-)$ $\hat{x}_k = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^N \hat{x}_{k,i}$ <p>Kovarian Error :</p> $P_k = [\mathbf{I} - K_k \mathbf{H}] P_k^-$
---------------	--

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan bagaimana langkah-langkah yang digunakan dalam mengestimasi gerak proyektil kaliber $12,7 \times 99$ mm di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin dengan menggunakan algoritma Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter. Tahapan penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri dari enam tahap, yaitu studi literatur, mengkaji persamaan gerak proyektil di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin, implementasi algoritma Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter, simulasi, analisis dan pembahasan, penarikan kesimpulan, dan pembuatan laporan Tugas Akhir. Adapun metode penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut:

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan studi referensi tentang persamaan gerak proyektil di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin, metode Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter beserta algoritmanya. Referensi yang digunakan adalah buku-buku, skripsi, thesis, dan paper-paper dalam jurnal ilmiah yang berkaitan dengan topik pada Tugas Akhir ini.

3.2 Identifikasi Persamaan Gerak Proyektil Di Bawah Pengaruh Faktor Temperatur dan Kecepatan Angin

Pada tahap ini akan dilakukan pembahasan mengenai persamaan gerak proyektil di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin. Pada persamaan awal gerak proyektil ini diperoleh dari gaya aerodinamika yang selanjutnya diuraikan menjadi model matematika. Selain itu, diberikan batasan permasalahan pada kecepatan angin yaitu searah atau

berlawanan terhadap gerak proyektil, sedangkan temperatur yang digunakan adalah temperatur minimum dan maksimum di kota Surabaya. Selanjutnya, persamaan gerak proyektil yang merupakan model non-linier akan dibentuk model *state space* dengan dilakukan pendiskritan.

3.3 Implementasi Metode *Kalman Filter*

Metode Kalman Filter digunakan untuk model sistem linear. Sedangkan persamaan gerak proyektil adalah model sistem non-linear sehingga perlu dilakukan pendekatan dengan melakukan linearisasi dengan menggunakan matriks Jacobi agar persamaan gerak proyektil menjadi bentuk model sistem linear yang selanjutnya dapat di implementasikan pada algoritma Kalman Filter.

Perbedaan metode Kalman Filter yang dilakukan linearisasi pada Tugas Akhir ini dengan Extended Kalman Filter yang juga mengandung proses linearisasi yaitu ada pada letak linearisasi. Dimana pada metode Kalman Filter yang digunakan untuk model sistem linear padahal model gerak proyektil non-linear sehingga perlu dilakukan pendekatan dengan linearisasi dan diperoleh matriks A yang kemudian dapat diterapkan pada algoritma Kalman Filter. Sedangkan pada metode Extended Kalman Filter yang digunakan untuk model sistem non-linear, proses pelinearan terdapat pada tahap prediksi yaitu untuk mendapatkan nilai matriks A yang digunakan untuk menghitung nilai kovarian error.

Algoritma Kalman Filter terdiri dari empat bagian, diantaranya bagian pertama mendefinisikan model sistem dan model pengukuran, bagian kedua merupakan nilai awal (inisialisasi), selanjutnya bagian ketiga dan keempat masing-masing tahap prediksi dan koreksi.

3.4 Implementasi Metode *Ensemble Kalman Filter (EnKF)*

Metode Ensemble Kalman Filter merupakan pengembangan dari metode Kalman Filter. Metode ini dapat digunakan untuk model sistem linear dan non-linear. Pada implementasi persamaan gerak proyektil yang merupakan model sistem non-linear dapat diterapkan secara langsung pada algoritma Ensemble Kalman Filter.

Algoritma Ensemble Kalman Filter sama halnya dengan algoritma Kalman Filter yang terdiri dari empat bagian, dimana perbedaannya pada bagian inisialisasi algoritma Ensemble Kalman Filter yang diperoleh dengan membangkitkan atau menggunakan sejumlah *ensemble* pada tahap prediksi untuk kovarian errornya.

3.5 Simulasi, Analisis Hasil dan Pembahasan

Pada tahap ini dilakukan penerapan persamaan gerak proyektil kaliber $12,7 \times 99$ mm di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin dengan algoritma Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter. Selanjutnya dilakukan simulasi dengan menggunakan software MATLAB R2017a. Pada simulasi diberikan nilai parameter sebagai berikut:

Tabel 3.1 Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
ρ_{min}	1.2043 kg/m ³	C_{l_p}	-0.0125
ρ_{maks}	1.1646 kg/m ³	C_{l_δ}	-0.009
d	0.0127 m	C_{M_α}	3.26
S	0.000127 m ²	$C_{M_{p\alpha}}$	2.6

Parameter	Nilai
v	900 m/s
p	3.5 rad/sec
m	0.0452 kg
C_d	0.14
$C_{l\alpha}$	1.63
$C_{Np\alpha}$	6.05
$C_{Nq} + C_{N\alpha}$	-6.6
W_1	3.1 m/s
W_2	0
W_3	0

Parameter	Nilai
$C_{Mq} + C_{M\alpha}$	1.2
g_1	-5.43 m/s ²
g_2	-32.174 m/s ²
g_3	0
x_1	1 rad
x_2	0 rad
x_3	0.015 rad
δ_F	0.52 rad
I_y	12.97 kg/m ²

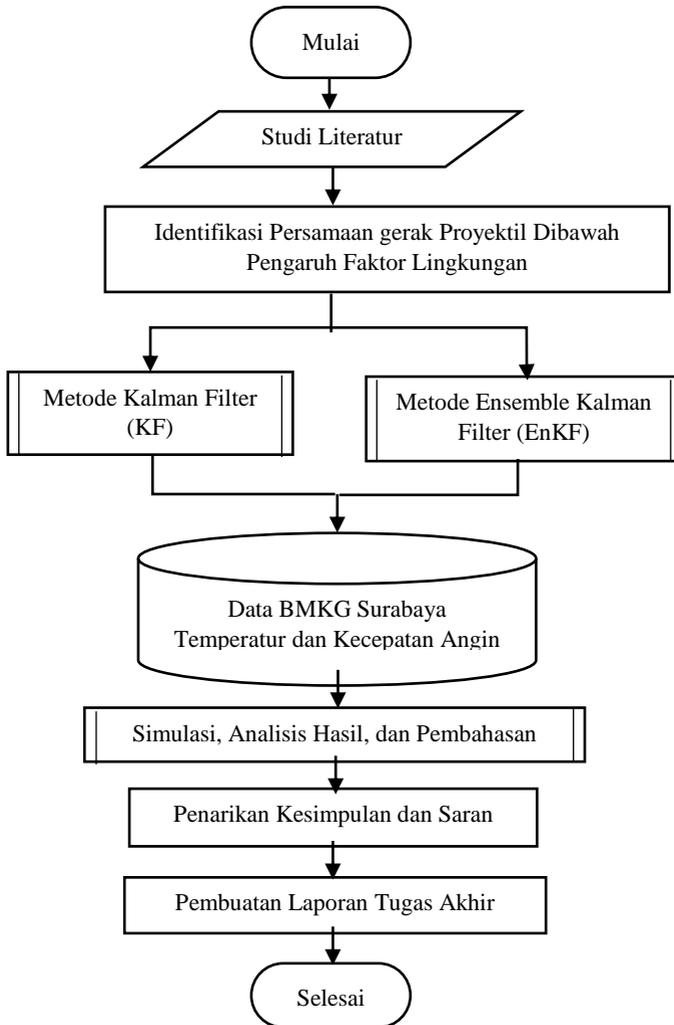
Selanjutnya hasil simulasi dengan metode Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter lain dilakukan perbandingan untuk mengetahui hasil estimasi terbaik dengan memberikan tingkat akurasi yang lebih kecil pada persamaan gerak proyektil di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin.

3.6 Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil simulasi dan pembahasan pada tahap sebelumnya. Selanjutnya dari hasil kesimpulan-kesimpulan yang terjadi diberikan saran untuk penelitian selanjutnya.

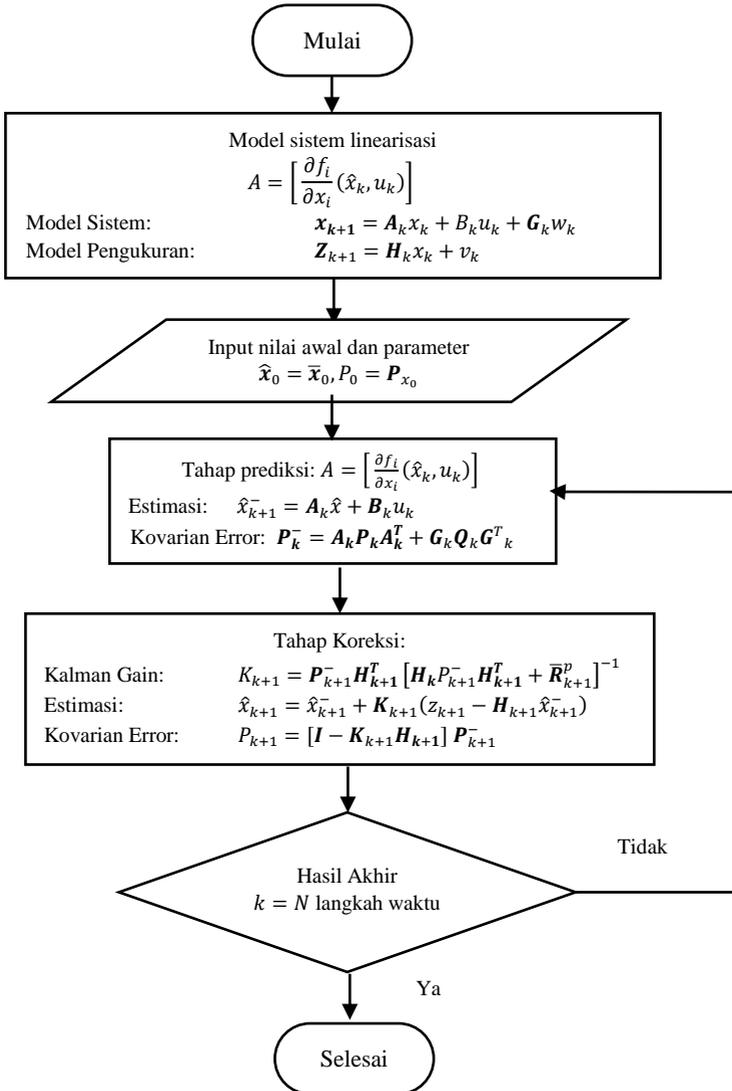
3.7 Diagram Alir Penelitian

Langkah-langkah penelitian pada Tugas Akhir disajikan dalam diagram sebagai berikut:



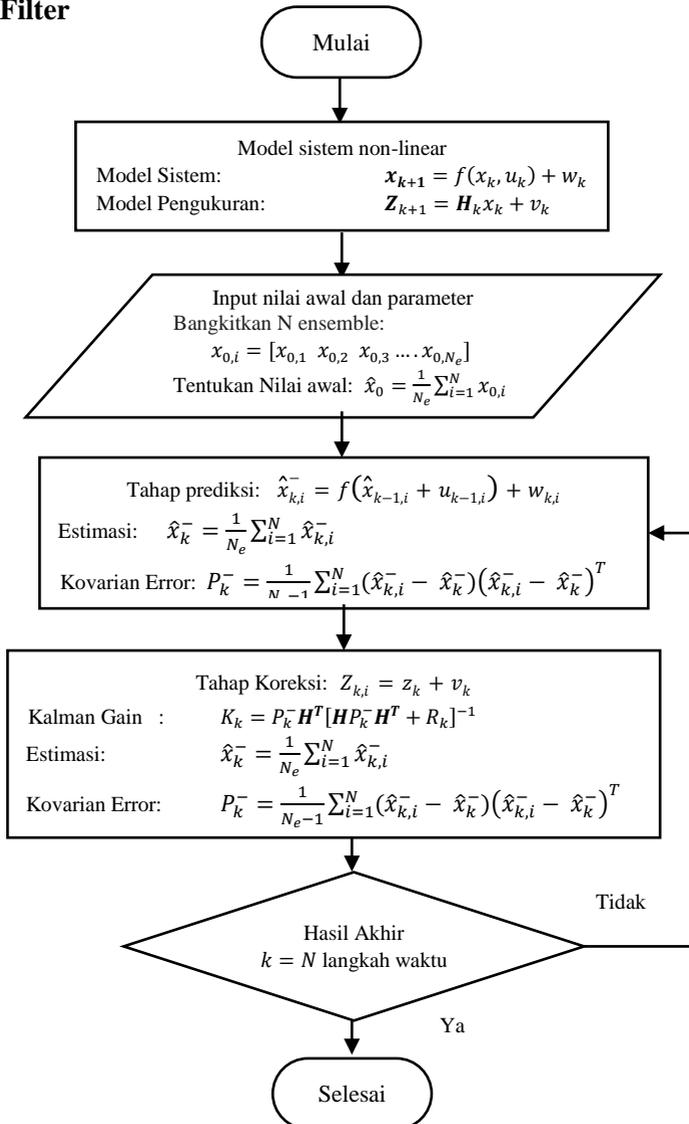
Gambar 3.1 Diagram Alir Metode Penelitian

3.8 Diagram Implementasi Metode Kalman Filter



Gambar 3.2 Diagram Alir Implementasi Kalman Filter

3.9 Diagram Implementasi Metode Ensemble Kalman Filter



Gambar 3.3 Diagram Alir Implementasi Ensemble Kalman Filter

BAB IV

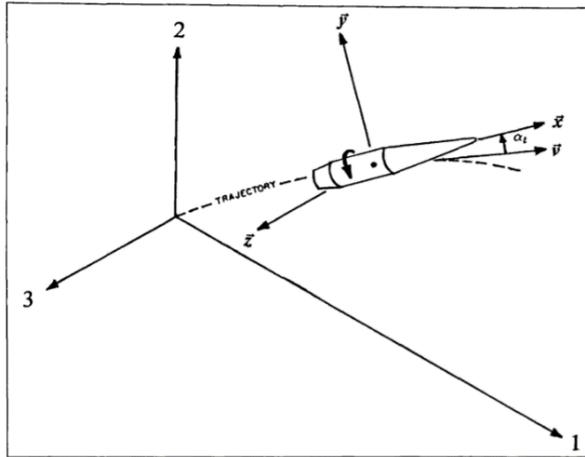
PEMBAHASAN DAN ANALISIS

Pada bab ini dibahas mengenai estimasi pada model gerak proyektil 12.7×99 mm dibawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin. Pembahasan meliputi pembentukan model ruang keadaan (state space) waktu diskrit stokastik. Selanjutnya dilakukan proses estimasi menggunakan algoritma Ensemble Kalman Filter yang dapat diterapkan secara langsung pada model sistem gerak proyektil yang non-linear. Selain itu, juga dilakukan estimasi menggunakan algoritma Kalman Filter dengan melakukan pendekatan pada model sistem gerak proyektil non-linear dengan proses linearisasi sehingga model sistem gerak proyektil menjadi linear. Setelah itu dilakukan simulasi dengan software MATLAB untuk memperoleh tingkat keakurasian dari kedua algoritma dan menganalisis hasilnya.

4.1 Persamaan Gerak Proyektil $12,7 \times 99$ mm Di Bawah Pengaruh Faktor Temperatur dan Kecepatan Angin

Pada bagian ini dibahas mengenai persamaan gerak proyektil seperti yang telah dijelaskan pada Bab II dimana gerak proyektil pada enam derajat kebebasan diilustrasikan pada sumbu koordinat bumi-1,2,3 dan gerak proyektil ditunjukkan pada sumbu x, y, z yang dapat dilihat pada Gambar 4.1.

Persamaan gerak proyektil yang digunakan pada penelitian ini adalah model 6-DOF yaitu berupa gerak translasi dan gerak rotasi. Gerak translasi digambarkan pada sumbu X, Y, Z dan gerak rotasi direpresentasikan dengan sudut α, β, γ serta momen pada gerak rotasi yaitu $M_\alpha, M_\beta,$ dan M_γ .



Gambar 4.1 Sistem Koordinat untuk Enam Derajat Kebebasan

Pada persamaan gerak proyektil berkaitan erat dengan Hukum Newton yang menyatakan bahwa tingkat perubahan momentum linear harus sama dengan jumlah gaya yang diterapkannya, dan laju perubahan momentum sudut harus sama dengan jumlah semua momen yang diterapkannya juga. Berikut ini merupakan Hukum Newton untuk gerak sebuah proyektil [13]:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} + m\vec{g} \quad (4.1)$$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum \vec{M} \quad (4.2)$$

dengan

$$\vec{H} = I_x p \vec{x} + I_y \left(\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right)$$

Dari persamaan Hukum Newton (4.1) dan (4.2) di atas, diperoleh persamaan differensial gerak proyektil yang

menggambarkan gerak translasi pada persamaan (4.3) dan gerak rotasi pada persamaan (4.4) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} = & \frac{\rho v S C_D}{2m} \vec{v} + \frac{\rho S C_{L\alpha}}{2m} [v^2 \vec{x} - (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v}] \\ & - \frac{\rho S d C_{Np\alpha}}{2m} \left(\frac{I_y}{I_x} \right) (\vec{h} \cdot \vec{x}) (\vec{x} \times \vec{v}) \\ & + \frac{\rho v S d (C_{Nq} + C_{Na})}{2m} (\vec{h} \times \vec{x}) + \vec{g} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{h}}{dt} = & \frac{\rho v S d^2 C_{Lp}}{2I_x} (\vec{h} \cdot \vec{x}) \vec{x} + \frac{\rho v S d C_{M\alpha}}{2I_y} (\vec{x} \times \vec{v}) \\ & + \frac{\rho S d^2 C_{Mp\alpha}}{2I_x} (\vec{h} \cdot \vec{x}) (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{x}) \\ & + \frac{\rho v S d^2 (C_{Mq} + C_{Ma})}{2I_y} (\vec{h} - (\vec{h} \cdot \vec{x}) \vec{x}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Persamaan differensial (4.3) dan (4.4) diatas diperoleh dari penelitian yang ditulis oleh Ryan F. Hooke yang berjudul “*The Mathematical Modelling of Projectile Trajectories under The Influence of Enviromental Effects*” [13]. Dari persamaan differensial gerak translasi proyektil (4.3) dinyatakan dengan kecepatan vektor gerak proyektil (\vec{V}) dan persamaan differensial gerak rotasi proyektil (4.4) dinyatakan dengan hasil momentum sudut (I_x) dibagi momen inersia (I_y) sehingga dihasilkan kecepatan sudut (\vec{h}). Selain itu, pada kedua persamaan tersebut dipengaruhi oleh faktor temperatur yang dinyatakan dengan kepadatan udara (ρ) dan kecepatan angin (\vec{W}) yang diperoleh dari kecepatan proyektil (\vec{V}) dikurangi dengan kecepatan angin ($\vec{v} = \vec{V} - \vec{W}$).

Dengan diberikan pemisalan dan mengganti bentuk vektor *cross product* dan *dot product* pada persamaan (4.3) dan (4.4) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 [\tilde{C}_D] &= \frac{\rho v S C_D}{2m} & [\tilde{C}_{Nq}] &= \frac{\rho v S d(C_{Nq} + C_{N\alpha})}{2m} \\
 [\tilde{C}_{l\alpha}] &= \frac{\rho v S C_{l\alpha}}{2m} & [\tilde{C}_{lp}] &= \frac{\rho v S d^2 C_{lp} p}{2I_y} \\
 [\tilde{C}_{Np\alpha}] &= \frac{\rho S d C_{Np\alpha} p}{2m} & [\tilde{C}_{M\alpha}] &= \frac{\rho v^2 S d C_{M\alpha}}{2I_y} \\
 [\tilde{C}_{l\delta}] &= \frac{\rho v^2 S d \delta_F C_{l\delta}}{2I_y} & (\vec{h} \cdot \vec{x}) &= \frac{I_x p}{I_y} \\
 [\tilde{C}_{Mp\alpha}] &= \frac{\rho S d^2 C_{Mp\alpha} p}{2I_y} & (\vec{h} \times \vec{x}) &= \frac{d\vec{x}}{dt} \\
 [\tilde{C}_{Mq}] &= \frac{\rho v S d^2 (C_{Mq} + C_{M\alpha})}{2I_y}
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan baru dari persamaan (4.3) dan (4.4) dalam bentuk yang sederhana terhadap masing-masing koordinat bumi-1,2,3 sebagai berikut:

$$\dot{V}_1 = -[\tilde{C}_D]v_1 + [\tilde{C}_{l\alpha}](v^2 x_1 - v v_1 \cos \alpha_t) - [\tilde{C}_{Np\alpha}](x_2 v_3 - x_3 v_2) + [\tilde{C}_{Nq}](h_2 x_3 - h_3 x_2) + g_1 \quad (4.5)$$

$$\dot{V}_2 = -[\tilde{C}_D]v_2 + [\tilde{C}_{l\alpha}](v^2 x_2 - v v_2 \cos \alpha_t) - [\tilde{C}_{Np\alpha}](x_3 v_1 - x_1 v_3) + [\tilde{C}_{Nq}](h_3 x_1 - h_1 x_3) + g_2 \quad (4.6)$$

$$\dot{V}_3 = -[\tilde{C}_D]v_3 + [\tilde{C}_{l\alpha}](v^2 x_3 - v v_3 \cos \alpha_t) - [\tilde{C}_{Np\alpha}](x_1 v_2 - x_2 v_1) + [\tilde{C}_{Nq}](h_1 x_2 - h_2 x_1) + g_3 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_1 &= \left([\tilde{C}_{lp}] + [\tilde{C}_{l\delta}] \right) x_1 + [\tilde{C}_{M\alpha}](v_2 x_3 - v_3 x_2) + \\
 & \quad [\tilde{C}_{Mp\alpha}](v_1 - v x_1 \cos \alpha_t) + [\tilde{C}_{Mq}]\left(h_1 - \frac{I_x}{I_y} p x_1 \right) \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_2 = & \left([\tilde{C}_{l_p}] + [\tilde{C}_{l_\delta}] \right) x_2 + [\tilde{C}_{M_\alpha}] (v_3 x_1 - v_1 x_3) + \\ & [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}] (v_2 - v x_2 \cos \alpha_t) + [\tilde{C}_{M_q}] \left(h_2 - \frac{l_x}{l_y} p x_2 \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_3 = & \left([\tilde{C}_{l_p}] + [\tilde{C}_{l_\delta}] \right) x_3 + [\tilde{C}_{M_\alpha}] (v_1 x_2 - v_2 x_1) + \\ & [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}] (v_3 - v x_3 \cos \alpha_t) + [\tilde{C}_{M_q}] \left(h_3 - \frac{l_x}{l_y} p x_3 \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dari persamaan (4.5) – (4.10) di atas dilakukan substitusi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} v_1 &= V_1 - W_1; \quad v_2 = V_2 - W_2; \quad v_3 = V_3 - W_3 \\ v^2 &= \vec{v} \cdot \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2; \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \\ \frac{l_x}{l_y} p &= \vec{h} \cdot \vec{x} = h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3; \\ \cos \alpha_t &= \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3}{v} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan differensial gerak proyektil enam derajat kebebasan dari persamaan (4.5)-(4.10) terhadap koordinat bumi diantaranya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \left[-[\tilde{C}_D] + [\tilde{C}_{l_\alpha}] (-V_2 x_2 + W_2 x_2 - V_3 x_3 + W_3 x_3) \right] V_1 + \\ & \left[[\tilde{C}_{N_{p\alpha}}] x_3 + [\tilde{C}_{l_\alpha}] (V_2 x_1 - 2W_2 x_1 + W_1 x_2) \right] V_2 + \\ & \left[-[\tilde{C}_{N_{p\alpha}}] x_2 + [\tilde{C}_{l_\alpha}] (V_3 x_1 - 2W_3 x_1 + W_1 x_3) \right] V_3 + \\ & \left[[\tilde{C}_{N_q}] x_3 \right] h_2 + \left[-[\tilde{C}_{N_q}] x_2 \right] h_3 + \left[[\tilde{C}_D] W_1 + \right. \\ & \left. [\tilde{C}_{l_\alpha}] (W_2^2 x_1 + W_3^2 x_1 - W_1 W_2 x_2 - W_1 W_3 x_3) - \right. \\ & \left. [\tilde{C}_{N_{p\alpha}}] (x_3 W_2 - x_2 W_3) + g_1 \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \left[-[\tilde{C}_{N_{p\alpha}}] x_3 + [\tilde{C}_{l_\alpha}] (V_1 x_2 - 2W_1 x_2 + W_2 x_1) \right] V_1 + \\ & \left[-[\tilde{C}_D] + [\tilde{C}_{l_\alpha}] (-V_1 x_1 + W_1 x_1 - V_3 x_3 + W_3 x_3) \right] V_2 + \\ & \left[[\tilde{C}_{N_{p\alpha}}] x_1 + [\tilde{C}_{l_\alpha}] (V_3 x_2 - 2W_3 x_2 + W_2 x_3) \right] V_3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [-[\tilde{C}_{Nq}]x_3]h_1 + [[\tilde{C}_{Nq}]x_1]h_3 + [[\tilde{C}_D]W_2 + \\ & [\tilde{C}_{l\alpha}](W_1^2x_2 + W_3^2x_2 - W_1W_2x_1 - W_2W_3x_3) - \\ & [\tilde{C}_{Np\alpha}](x_1W_3 - x_3W_1) + g_2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & [[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_2 + [\tilde{C}_{l\alpha}](V_1x_3 - 2W_1x_3 + W_3x_1)]V_1 + \\ & [-[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_1 + [\tilde{C}_{l\alpha}](V_2x_3 - 2W_2x_3 - V_3x_2 + \\ & W_3x_2)]V_2 + [-[\tilde{C}_D] + [\tilde{C}_{l\alpha}](-V_1x_1 + W_1x_1 + \\ & W_2x_2)]V_3 + [[\tilde{C}_{Nq}]x_2]h_1 + [-[\tilde{C}_{Nq}]x_1]h_2 + \\ & [[\tilde{C}_D]W_3 + [\tilde{C}_{l\alpha}](W_1^2x_3 + W_2^2x_3 - W_1W_3x_1 - \\ & W_2W_3x_2) - [\tilde{C}_{Np\alpha}](x_2W_1 - x_1W_2) + g_3 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 = & [[\tilde{C}_{Mp\alpha}](1 - x_1^2)]V_1 + [[\tilde{C}_{M\alpha}]x_3 - \\ & [\tilde{C}_{Mp\alpha}](x_1x_2)]V_2 + [-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_2 - \\ & [\tilde{C}_{Mp\alpha}](x_1x_3)]V_3 + [[\tilde{C}_{Mq}](1 - x_1^2)]h_1 + \\ & [-[\tilde{C}_{Mq}](x_1x_2)]h_2 + [-[\tilde{C}_{Mq}](x_1x_3)]h_3 + \\ & [[([\tilde{C}_{lp}] + [\tilde{C}_{l\delta}])x_1 + [\tilde{C}_{M\alpha}](W_3x_2 - W_2x_3) + \\ & [\tilde{C}_{Mp\alpha}](-W_1 + W_1x_1^2 + W_2x_1x_2 + W_3x_1x_3)] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_2 = & [-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_3 - [\tilde{C}_{Mp\alpha}](x_1x_2)]V_1 + [[\tilde{C}_{Mp\alpha}](1 - \\ & x_2^2)]V_2 + [[\tilde{C}_{M\alpha}]x_1 - [\tilde{C}_{Mp\alpha}](x_2x_3)]V_3 + \\ & [-[\tilde{C}_{Mq}](x_1x_2)]h_1 + [[\tilde{C}_{Mq}](1 - x_2^2)]h_2 + \\ & [-[\tilde{C}_{Mq}](x_2x_3)]h_3 + [[([\tilde{C}_{lp}] + [\tilde{C}_{l\delta}])x_2 + \\ & [\tilde{C}_{M\alpha}](W_1x_3 - W_3x_1) + [\tilde{C}_{Mp\alpha}](-W_2 + W_1x_1x_2 + \\ & W_2x_2^2 + W_3x_2x_3)] \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
\dot{h}_3 = & \left[-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_2 - [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](x_1x_3) \right] V_1 + \left[-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_1 - \right. \\
& \left. [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](x_2x_3) \right] V_2 + \left[[\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](1 - x_3^2) \right] V_3 + \\
& \left[-[\tilde{C}_{M_q}](x_1x_3) \right] h_1 + \left[-[\tilde{C}_{M_q}](x_2x_3) \right] h_2 + \\
& \left[[\tilde{C}_{M_q}](1 - x_3^2) \right] h_3 + \left[([\tilde{C}_{l_p}] + [\tilde{C}_{l_\delta}]) \right] x_3 + \\
& [\tilde{C}_{M\alpha}](W_2x_1 - W_1x_2) + [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](-W_3 + W_1x_1x_3 + \\
& W_3x_3^2 + W_2x_2x_3) \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Pada Tugas Akhir ini, gerak proyektil diasumsikan bergerak searah sumbu koordinat bumi-1 atau yang biasanya disebut sumbu-x. Selain itu, pada batasan masalah diberikan kecepatan angin bergerak searah atau berlawanan dengan gerak proyektil yang berarti bahwa kecepatan angin bergerak searah sumbu koordinat bumi-1 sedangkan kecepatan angin pada sumbu koordinat bumi-2,3 diabaikan. Sehingga dapat dituliskan kecepatan vektor angin terhadap sumbu koordinat bumi-1,2,3 adalah

$$[W_1, W_2, W_3] = [W_1, 0, 0]$$

dimana W_1 mempunyai nilai positif yang menyatakan kecepatan angin searah dengan gerak proyektil dan bernilai negatif yang menyatakan kecepatan angin berlawanan dengan gerak proyektil.

Dari persamaan gerak proyektil (4.11)-(4.16) diatas pengaruh faktor temperatur dinyatakan sebagai kepadatan udara yang disimbolkan dengan (ρ) dan kecepatan angin searah sumbu koordinat bumi-1 yang disimbolkan dengan (W_1). Dari kedua faktor inilah dapat diketahui seberapa besar pengaruh faktor tersebut dalam gerak proyektil. Dari batasan permasalahan yang diberikan diatas, diperoleh persamaan baru

gerak proyektil dengan kecepatan angin searah/berlawanan gerak proyektil dari persamaan (4.11) - (4.16) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & [-\tilde{C}_D] + [\tilde{C}_{l\alpha}](-V_2x_2 - V_3x_3)]V_1 + \left[[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_3 + \right. \\ & \left. [\tilde{C}_{l\alpha}](V_2x_1 + W_1x_2) \right]V_2 + \left[-[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_2 + \right. \\ & \left. [\tilde{C}_{l\alpha}](V_3x_1 + W_1x_3) \right]V_3 + \left[[\tilde{C}_{Nq}]x_3 \right]h_2 + \\ & \left[-[\tilde{C}_{Nq}]x_2 \right]h_3 + \left[[\tilde{C}_D]W_1 + g_1 \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & [-\tilde{C}_{Np\alpha}]x_3 + [\tilde{C}_{l\alpha}](V_1x_2 - 2W_1x_2)]V_1 + [-\tilde{C}_D] + \\ & [\tilde{C}_{l\alpha}](-V_1x_1 + W_1x_1 - V_3x_3)]V_2 + \left[[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_1 + \right. \\ & \left. [\tilde{C}_{l\alpha}](V_3x_2) \right]V_3 + [-\tilde{C}_{Nq}]x_3]h_1 + \left[[\tilde{C}_{Nq}]x_1 \right]h_3 + \\ & \left[[\tilde{C}_{l\alpha}](W_1^2x_2) - [\tilde{C}_{Np\alpha}](-x_3W_1) + g_2 \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & \left[[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_2 + [\tilde{C}_{l\alpha}](V_1x_3 - 2W_1x_3) \right]V_1 + \left[-[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_1 + \right. \\ & \left. [\tilde{C}_{l\alpha}](V_2x_3 - V_3x_2) \right]V_2 + [-\tilde{C}_D] + [\tilde{C}_{l\alpha}](-V_1x_1 + \\ & W_1x_1)]V_3 + \left[[\tilde{C}_{Nq}]x_2 \right]h_1 + [-\tilde{C}_{Nq}]x_1]h_2 + \\ & \left[[\tilde{C}_{l\alpha}](W_1^2x_3) - [\tilde{C}_{Np\alpha}](x_2W_1) + g_3 \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 = & \left[[\tilde{C}_{Mp\alpha}] (1 - x_1^2) \right]V_1 + \left[[\tilde{C}_{M\alpha}]x_3 - \right. \\ & \left. [\tilde{C}_{Mp\alpha}] (x_1x_2) \right]V_2 + \left[-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_2 - \right. \\ & \left. [\tilde{C}_{Mp\alpha}] (x_1x_3) \right]V_3 + \left[[\tilde{C}_{Mq}] (1 - x_1^2) \right]h_1 + \\ & \left[-[\tilde{C}_{Mq}] (x_1x_2) \right]h_2 + \left[-[\tilde{C}_{Mq}] (x_1x_3) \right]h_3 + \\ & \left[\left([\tilde{C}_{l_p}] + [\tilde{C}_{l_\delta}] \right) x_1 + [\tilde{C}_{Mp\alpha}] (-W_1 + W_1x_1^2) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
\dot{h}_2 = & \left[-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_3 - [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](x_1x_2) \right] V_1 + \left[[\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](1 - \right. \\
& \left. x_2^2) \right] V_2 + \left[[\tilde{C}_{M\alpha}]x_1 - [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](x_2x_3) \right] V_3 + \\
& \left[-[\tilde{C}_{M_q}](x_1x_2) \right] h_1 + \left[[\tilde{C}_{M_q}](1 - x_2^2) \right] h_2 + \\
& \left[-[\tilde{C}_{M_q}](x_2x_3) \right] h_3 + \left[([\tilde{C}_{l_p}] + [\tilde{C}_{l_\delta}])x_2 + \right. \\
& \left. [\tilde{C}_{M\alpha}](W_1x_3) + [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](W_1x_1x_2) \right] \tag{4.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{h}_3 = & \left[-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_2 - [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](x_1x_3) \right] V_1 + \left[-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_1 - \right. \\
& \left. [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](x_2x_3) \right] V_2 + \left[[\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](1 - x_3^2) \right] V_3 + \\
& \left[-[\tilde{C}_{M_q}](x_1x_3) \right] h_1 + \left[-[\tilde{C}_{M_q}](x_2x_3) \right] h_2 + \\
& \left[[\tilde{C}_{M_q}](1 - x_3^2) \right] h_3 + \left[([\tilde{C}_{l_p}] + [\tilde{C}_{l_\delta}])x_3 + \right. \\
& \left. [\tilde{C}_{M\alpha}](-W_1x_2) + [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](+W_1x_1x_3) \right] \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Untuk memudahkan penulisan selanjutnya, maka digunakan pemisalan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \left[-[\tilde{C}_D] + [\tilde{C}_{l\alpha}](-V_2x_2 - V_3x_3) \right] \\
a_{21} &= \left[-[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_3 + [\tilde{C}_{l\alpha}](V_1x_2 - 2W_1x_2) \right] \\
a_{31} &= \left[[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_2 + [\tilde{C}_{l\alpha}](V_1x_3 - 2W_1x_3) \right] \\
a_{41} &= \left[[\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](1 - x_1^2) \right] \\
a_{51} &= \left[-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_3 - [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](x_1x_2) \right] \\
a_{61} &= \left[-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_2 - [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](x_1x_3) \right] \\
b_{12} &= \left[[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_3 + [\tilde{C}_{l\alpha}](V_2x_1 + W_1x_2) \right] \\
b_{22} &= \left[-[\tilde{C}_D] + [\tilde{C}_{l\alpha}](-V_1x_1 + W_1x_1 - V_3x_3) \right] \\
b_{32} &= \left[-[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_1 + [\tilde{C}_{l\alpha}](V_2x_3 - V_3x_2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{42} &= \left[[\tilde{C}_{M\alpha}]x_3 - [\tilde{C}_{Mp\alpha}] (x_1x_2) \right] \\
b_{52} &= \left[[\tilde{C}_{Mp\alpha}] (1 - x_2^2) \right] \\
b_{62} &= \left[-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_1 - [\tilde{C}_{Mp\alpha}] (x_2x_3) \right] \\
c_{13} &= \left[-[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_2 + [\tilde{C}_{l\alpha}](V_3x_1 + W_1x_3) \right] \\
c_{23} &= \left[[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_1 + [\tilde{C}_{l\alpha}](V_3x_2) \right] \\
c_{33} &= \left[-[\tilde{C}_D] + [\tilde{C}_{l\alpha}](-V_1x_1 + W_1x_1) \right] \\
c_{43} &= \left[-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_2 - [\tilde{C}_{Mp\alpha}] (x_1x_3) \right] \\
c_{53} &= \left[[\tilde{C}_{M\alpha}]x_1 - [\tilde{C}_{Mp\alpha}] (x_2x_3) \right] \\
c_{63} &= \left[[\tilde{C}_{Mp\alpha}] (1 - x_3^2) \right] \\
d_{14} &= 0 \\
d_{24} &= \left[-[\tilde{C}_{Nq}]x_3 \right] \\
d_{34} &= \left[[\tilde{C}_{Nq}]x_2 \right] \\
d_{44} &= \left[[\tilde{C}_{Mq}] (1 - x_1^2) \right] \\
d_{54} &= \left[-[\tilde{C}_{Mq}] (x_1x_2) \right] \\
d_{64} &= \left[-[\tilde{C}_{Mq}] (x_1x_3) \right] \\
e_{15} &= \left[[\tilde{C}_{Nq}]x_3 \right] \\
e_{25} &= 0 \\
e_{35} &= \left[-[\tilde{C}_{Nq}]x_1 \right] \\
e_{45} &= \left[-[\tilde{C}_{Mq}] (x_1x_2) \right] \\
e_{55} &= \left[[\tilde{C}_{Mq}] (1 - x_2^2) \right] \\
e_{65} &= \left[-[\tilde{C}_{Mq}] (x_2x_3) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{16} &= [-[\tilde{C}_{Nq}]x_2] \\
f_{26} &= [[\tilde{C}_{Nq}]x_1] \\
f_{36} &= 0 \\
f_{46} &= [-[\tilde{C}_{Mq}](x_1x_3)] \\
f_{56} &= [-[\tilde{C}_{Mq}](x_2x_3)] \\
f_{66} &= [[\tilde{C}_{Mq}](1-x_3^2)] \\
g_{17} &= [[\tilde{C}_D]W_1 + g_1] \\
g_{27} &= [[\tilde{C}_{l\alpha}](W_1^2x_2) - [\tilde{C}_{Np\alpha}](-x_3W_1) + g_2] \\
g_{37} &= [[\tilde{C}_{l\alpha}](W_1^2x_3) - [\tilde{C}_{Np\alpha}](x_2W_1) + g_3] \\
g_{47} &= [[([\tilde{C}_{l_p}] + [\tilde{C}_{l_\delta}])x_1 + [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](-W_1 + W_1x_1^2)] \\
g_{57} &= [[([\tilde{C}_{l_p}] + [\tilde{C}_{l_\delta}])x_2 + [\tilde{C}_{M_\alpha}](W_1x_3) + \\
&\quad [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](W_1x_1x_2)] \\
g_{67} &= [[([\tilde{C}_{l_p}] + [\tilde{C}_{l_\delta}])x_3 + [\tilde{C}_{M_\alpha}](-W_1x_2) \\
&\quad + [\tilde{C}_{M_{p\alpha}}](+W_1x_1x_3)]
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan (4.17) – (4.22) menjadi bentuk lebih sederhana sebagai berikut:

$$\dot{V}_1 = a_{11}V_1 + b_{12}V_2 + C_{13}V_3 + e_{15}h_2 + f_{16}h_3 + g_{17} \quad (4.23)$$

$$\dot{V}_2 = a_{21}V_1 + b_{22}V_2 + C_{23}V_3 + d_{24}h_1 + f_{26}h_3 + g_{27} \quad (4.24)$$

$$\dot{V}_3 = a_{31}V_1 + b_{32}V_2 + C_{33}V_3 + d_{34}h_1 + e_{35}h_2 + g_{37} \quad (4.25)$$

$$\dot{h}_1 = a_{41}V_1 + b_{42}V_2 + C_{43}V_3 + d_{44}h_1 + e_{45}h_2 + f_{46}h_3 + g_{47} \quad (4.26)$$

$$\dot{h}_2 = a_{51}V_1 + b_{52}V_2 + c_{53}V_3 + d_{54}h_1 + e_{55}h_2 + f_{56}h_3 + g_{57} \quad (4.27)$$

$$\dot{h}_3 = a_{61}V_1 + b_{62}V_2 + c_{63}V_3 + d_{64}h_1 + e_{65}h_2 + f_{66}h_3 + g_{67} \quad (4.28)$$

Dari persamaan (4.23) - (4.28) di atas diperoleh persamaan ruang keadaan waktu kontinu yaitu

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} & 0 & e_{15} & f_{16} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} & d_{24} & 0 & f_{26} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} & d_{34} & e_{35} & 0 \\ a_{41} & b_{42} & c_{43} & d_{44} & e_{45} & f_{46} \\ a_{51} & b_{52} & c_{53} & d_{54} & e_{55} & f_{56} \\ a_{61} & b_{62} & c_{63} & d_{64} & e_{65} & f_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{17} \\ g_{27} \\ g_{37} \\ g_{47} \\ g_{57} \\ g_{67} \end{bmatrix}$$

Dan keluarannya adalah

$$Z = H.X$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Sebagai tambahan, diberikan persamaan gerak kinematik pada gerak proyektil yang dinyatakan sebagai posisi pusat massa proyektil relatif terhadap sistem koordinat bumi-1,2,3 yang diberikan oleh vektor \bar{X} (posisi) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{10} + \int_0^t V_1 dt ; & X_2 &= X_{20} + \int_0^t V_2 dt \\ X_3 &= X_{30} + \int_0^t V_3 dt \end{aligned} \quad (4.29)$$

dimana perhitungan posisi masing-masing sumbu koordinat bumi adalah posisi awal ditambah dengan perubahan kecepatan terhadap langkah waktu.

4.2 Diskritisasi

Persamaan gerak proyektil dibawah pengaruh faktor lingkungan merupakan model sistem dinamik deterministik waktu kontinu. Pada implementasi metode Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter digunakan waktu diskrit, sehingga model persamaan gerak proyektil tersebut diubah menjadi bentuk model sistem dinamik waktu diskrit. Untuk memperoleh sistem persamaan waktu diskrit dapat menggunakan metode beda hingga maju yang sudah dijelaskan pada Bab II sebelumnya sebagai berikut:

$$\dot{V}_j = \frac{dV_j}{dt} = \frac{V_{j_{k+1}} - V_{j_k}}{\Delta t}$$

$$\dot{h}_j = \frac{dh_j}{dt} = \frac{h_{j_{k+1}} - h_{j_k}}{\Delta t}$$

dimana $j = 1,2,3$ (sumbu koordinat bumi)

Sehingga persamaan (4.23) – (4.28) menggunakan metode beda hingga maju sehingga diperoleh sebagai berikut:

- $\frac{dV_1}{dt} = a_{11}V_1 + b_{12}V_2 + C_{13}V_3 + e_{15}h_2 + f_{16}h_3 + g_{17}$
 $\frac{V_{1_{k+1}} - V_{1_k}}{\Delta t} = a_{11}V_{1_k} + b_{12}V_{2_k} + C_{13}V_{3_k} + e_{15}h_{2_k} + f_{16}h_{3_k} + g_{17}$
- $\frac{dV_2}{dt} = a_{21}V_1 + b_{22}V_2 + C_{23}V_3 + d_{24}h_1 + f_{26}h_3 + g_{27}$
 $\frac{V_{2_{k+1}} - V_{2_k}}{\Delta t} = a_{21}V_{1_k} + b_{22}V_{2_k} + C_{23}V_{3_k} + d_{24}h_{1_k} + f_{26}h_{3_k} + g_{27}$
- $\frac{dV_3}{dt} = a_{31}V_1 + b_{32}V_2 + C_{33}V_3 + d_{34}h_1 + e_{35}h_2 + g_{37}$
 $\frac{V_{3_{k+1}} - V_{3_k}}{\Delta t} = a_{31}V_{1_k} + b_{32}V_{2_k} + C_{33}V_{3_k} + d_{34}h_{1_k} + e_{35}h_{2_k} + g_{37}$

- $\frac{dh_1}{dt} = a_{41}V_1 + b_{42}V_2 + C_{43}V_3 + d_{44}h_1 + e_{45}h_2 + f_{46}h_3 + g_{47}$
 $\frac{h_{1k+1} - h_{1k}}{\Delta t} = a_{41}V_{1k} + b_{42}V_{2k} + C_{43}V_{3k} + d_{44}h_{1k} + e_{45}h_{2k} + f_{46}h_{3k} + g_{47}$
- $\frac{dh_2}{dt} = a_{51}V_1 + b_{52}V_2 + C_{53}V_3 + d_{54}h_1 + e_{55}h_2 + f_{56}h_3 + g_{57}$
 $\frac{h_{2k+1} - h_{2k}}{\Delta t} = a_{51}V_{1k} + b_{52}V_{2k} + C_{53}V_{3k} + d_{54}h_{1k} + e_{55}h_{2k} + f_{56}h_{3k} + g_{57}$
- $\frac{dh_3}{dt} = a_{61}V_1 + b_{62}V_2 + C_{63}V_3 + d_{64}h_1 + e_{65}h_2 + f_{66}h_3 + g_{67}$
 $\frac{h_{3k+1} - h_{3k}}{\Delta t} = a_{61}V_{1k} + b_{62}V_{2k} + C_{63}V_{3k} + d_{64}h_{1k} + e_{65}h_{2k} + f_{66}h_{3k} + g_{67}$ (4.30)

Persamaan (4.30) dioperasikan sehingga menjadi

$$V_{1k+1} = \Delta t [a_{11}V_{1k} + b_{12}V_{2k} + C_{13}V_{3k} + e_{15}h_{2k} + f_{16}h_{3k} + g_{17}] + V_{1k}$$

$$V_{2k+1} = \Delta t [a_{21}V_{1k} + b_{22}V_{2k} + C_{23}V_{3k} + d_{24}h_{1k} + f_{26}h_{3k} + g_{27}] + V_{2k}$$

$$V_{3k+1} = \Delta t [a_{31}V_{1k} + b_{32}V_{2k} + C_{33}V_{3k} + d_{34}h_{1k} + e_{35}h_{2k} + g_{37}] + V_{3k}$$

$$h_{1k+1} = \Delta t [a_{41}V_{1k} + b_{42}V_{2k} + C_{43}V_{3k} + d_{44}h_{1k} + e_{45}h_{2k} + f_{46}h_{3k} + g_{47}] + h_{1k}$$

$$h_{2k+1} = \Delta t [a_{51}V_{1k} + b_{52}V_{2k} + C_{53}V_{3k} + d_{54}h_{1k} + e_{55}h_{2k} + f_{56}h_{3k} + g_{57}] + h_{2k}$$

$$h_{3_{k+1}} = \Delta t [a_{61}V_{1_k} + b_{62}V_{2_k} + c_{63}V_{3_k} + d_{64}h_{1_k} + e_{65}h_{2_k} + f_{66}h_{3_k} + g_{67}] + h_{3_k} \quad (4.31)$$

Persamaan (4.31) merupakan model gerak proyektal dibawah pengaruh faktor lingkungan waktu diskrit. Sehingga model sistem dapat disajikan dalam bentuk Persamaan ruang keadaan (state space) yaitu

$$\begin{bmatrix} V_{1_{k+1}} \\ V_{2_{k+1}} \\ V_{3_{k+1}} \\ h_{1_{k+1}} \\ h_{2_{k+1}} \\ h_{3_{k+1}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{17} \\ g_{27} \\ g_{37} \\ g_{47} \\ g_{57} \\ g_{67} \end{bmatrix} \Delta t$$

Dengan:

$$A = \begin{bmatrix} \Delta t a_{11} + 1 & \Delta t b_{12} & \Delta t c_{13} & 0 & \Delta t e_{15} & \Delta t f_{16} \\ \Delta t a_{21} & \Delta t b_{22} + 1 & \Delta t c_{23} & \Delta t d_{24} & 0 & \Delta t f_{26} \\ \Delta t a_{31} & \Delta t b_{32} & \Delta t c_{33} + 1 & \Delta t d_{34} & \Delta t e_{35} & 0 \\ \Delta t a_{41} & \Delta t b_{42} & \Delta t c_{43} & \Delta t d_{44} + 1 & \Delta t e_{45} & \Delta t f_{46} \\ \Delta t a_{51} & \Delta t b_{52} & \Delta t c_{53} & \Delta t d_{54} & \Delta t e_{55} + 1 & \Delta t f_{56} \\ \Delta t a_{61} & \Delta t b_{62} & \Delta t c_{63} & \Delta t d_{64} & \Delta t e_{65} & \Delta t f_{66} + 1 \end{bmatrix}$$

Dan keluarannya adalah

$$Z = H.X$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Persamaan (4.29) yang merupakan posisi pusat massa proyektil relatif terhadap sistem tetap koordinat bumi-1,2,3 juga dilakukan diskritisasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad X_1 &= X_{10} + \int_0^t V_1 dt & \bullet \quad X_2 &= X_{20} + \int_0^t V_2 dt \\
 &= 0 + \int_0^t V_1 dt & &= 0 + \int_0^t V_2 dt \\
 X_1 &= \int_0^t V_1 dt & X_2 &= \int_0^t V_2 dt \\
 \frac{d}{dt}[X_1] &= \frac{d}{dt} \left[\int_0^t V_1 dt \right] & \frac{d}{dt}[X_2] &= \frac{d}{dt} \left[\int_0^t V_2 dt \right] \\
 \frac{dX_1}{dt} &= V_1 & \frac{dX_2}{dt} &= V_2 \\
 \frac{X_{1k+1} - X_{1k}}{\Delta t} &= V_{1k} & \frac{X_{2k+1} - X_{2k}}{\Delta t} &= V_{2k} \\
 X_{1k+1} &= V_{1k} \Delta t + X_{1k} & X_{2k+1} &= V_{2k} \Delta t + X_{2k} \\
 \\
 \bullet \quad X_3 &= X_{30} + \int_0^t V_3 dt & \frac{d}{dt}[X_3] &= \frac{d}{dt} \left[\int_0^t V_3 dt \right] \\
 &= 0 + \int_0^t V_3 dt & \frac{dX_3}{dt} &= V_3 \\
 X_3 &= \int_0^t V_3 dt & \frac{X_{3k+1} - X_{3k}}{\Delta t} &= V_{3k} \\
 & & X_{3k+1} &= V_{3k} \Delta t + X_{3k}
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan baru sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 X_{1k+1} &= V_{1k} \Delta t + X_{1k} \\
 X_{2k+1} &= V_{2k} \Delta t + X_{2k} \\
 X_{3k+1} &= V_{3k} \Delta t + X_{3k}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Dimana persamaan ini digunakan sebagai tambahan untuk mengetahui posisi gerak proyektil terhadap sumbu koordinat bumi-1,2,3.

4.3 Bentuk Sistem Diskrit Stokastik

Model dinamis gerak proyektil dibawah pengaruh lingkungan pada (4.31) merupakan sistem deterministik. Model tersebut mengabaikan adanya *noise* atau gangguan. *Noise-noise* tersebut dapat terjadi pada model sistem seperti kesalahan dalam memodelkan dan juga *noise* dapat terjadi pada model pengukuran. Walaupun *noise* berukuran sangat kecil namun perlu diperhitungkan adanya suatu *noise*. Persamaan gerak proyektil dibawah pengaruh lingkungan dengan mempertimbangkan adanya suatu *noise* maka persamaan (4.31) menjadi

$$\begin{aligned}
 f_1 = V_{1_{k+1}} &= \Delta t [a_{11}V_{1_k} + b_{12}V_{2_k} + C_{13}V_{3_k} + e_{15}h_{2_k} \\
 &\quad + f_{16}h_{3_k} + g_{17}] + V_{1_k} + w_{1_k} \\
 f_2 = V_{2_{k+1}} &= \Delta t [a_{21}V_{1_k} + b_{22}V_{2_k} + C_{23}V_{3_k} + d_{24}h_{1_k} \\
 &\quad + f_{26}h_{3_k} + g_{27}] + V_{2_k} + w_{2_k} \\
 f_3 = V_{3_{k+1}} &= \Delta t [a_{31}V_{1_k} + b_{32}V_{2_k} + C_{33}V_{3_k} + d_{34}h_{1_k} \\
 &\quad + e_{35}h_{2_k} + g_{37}] + V_{3_k} + w_{3_k} \\
 f_4 = h_{1_{k+1}} &= \Delta t [a_{41}V_{1_k} + b_{42}V_{2_k} + C_{43}V_{3_k} + d_{44}h_{1_k} \\
 &\quad + e_{45}h_{2_k} + f_{46}h_{3_k} + g_{47}] + h_{1_k} + w_{4_k} \\
 f_5 = h_{2_{k+1}} &= \Delta t [a_{51}V_{1_k} + b_{52}V_{2_k} + C_{53}V_{3_k} + d_{54}h_{1_k} \\
 &\quad + e_{55}h_{2_k} + f_{56}h_{3_k} + g_{57}] + h_{2_k} + w_{5_k} \\
 f_6 = h_{3_{k+1}} &= \Delta t [a_{61}V_{1_k} + b_{62}V_{2_k} + C_{63}V_{3_k} + d_{64}h_{1_k} \\
 &\quad + e_{65}h_{2_k} + f_{66}h_{3_k} + g_{67}] + h_{3_k} + w_{6_k}
 \end{aligned}
 \tag{4.33}$$

4.4 Implementasi Kalman Filter

Metode Kalman Filter digunakan untuk model sistem linear, sedangkan model gerak proyektil non-linear sehingga perlu dilakukan pendekatan dengan melakukan pelinearan menggunakan metode Jacobian untuk menentukan matriks A yang didefinisikan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial V_{1k}} & \frac{\partial f_1}{\partial V_{2k}} & \frac{\partial f_1}{\partial V_{3k}} & \frac{\partial f_1}{\partial h_{1k}} & \frac{\partial f_1}{\partial h_{2k}} & \frac{\partial f_1}{\partial h_{3k}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial V_{1k}} & \frac{\partial f_2}{\partial V_{2k}} & \frac{\partial f_2}{\partial V_{3k}} & \frac{\partial f_2}{\partial h_{1k}} & \frac{\partial f_2}{\partial h_{2k}} & \frac{\partial f_2}{\partial h_{3k}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial V_{1k}} & \frac{\partial f_3}{\partial V_{2k}} & \frac{\partial f_3}{\partial V_{3k}} & \frac{\partial f_3}{\partial h_{1k}} & \frac{\partial f_3}{\partial h_{2k}} & \frac{\partial f_3}{\partial h_{3k}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial V_{1k}} & \frac{\partial f_4}{\partial V_{2k}} & \frac{\partial f_4}{\partial V_{3k}} & \frac{\partial f_4}{\partial h_{1k}} & \frac{\partial f_4}{\partial h_{2k}} & \frac{\partial f_4}{\partial h_{3k}} \\ \frac{\partial f_5}{\partial V_{1k}} & \frac{\partial f_5}{\partial V_{2k}} & \frac{\partial f_5}{\partial V_{3k}} & \frac{\partial f_5}{\partial h_{1k}} & \frac{\partial f_5}{\partial h_{2k}} & \frac{\partial f_5}{\partial h_{3k}} \\ \frac{\partial f_6}{\partial V_{1k}} & \frac{\partial f_6}{\partial V_{2k}} & \frac{\partial f_6}{\partial V_{3k}} & \frac{\partial f_6}{\partial h_{1k}} & \frac{\partial f_6}{\partial h_{2k}} & \frac{\partial f_6}{\partial h_{3k}} \end{bmatrix}$$

Dimana f_1 sampai dengan f_6 seperti yang sudah dituliskan pada Persamaan (4.33) sehingga diperoleh sebagai berikut:

Turunan f_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial V_{1k}} = \Delta t \left[-[\tilde{C}_D] + [\tilde{C}_{l\alpha}](-V_{2k}x_2 - V_{3k}x_3) \right] + 1$$

$$= \Delta t a_{11} + 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial V_{2k}} = \Delta t \left[[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_3 + [\tilde{C}_{l\alpha}](2V_{2k}x_1 + W_1x_2) \right]$$

$$= \Delta t n_{12}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial V_{3k}} = \Delta t \left[-[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_2 + [\tilde{C}_{l\alpha}](2V_{3k}x_1 + W_1x_3) \right]$$

$$= \Delta t o_{13}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_{1k}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_{2k}} = \Delta t \left[[\tilde{C}_{Nq}] x_3 \right]$$

$$= \Delta t e_{15}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_{3k}} = \Delta t \left[-[\tilde{C}_{Nq}] x_2 \right]$$

$$= \Delta t f_{16}$$

Turunan f_2

$$\frac{\partial f_2}{\partial V_{1k}} = \Delta t \left[-[\tilde{C}_{Np\alpha}] x_3 + [\tilde{C}_{l\alpha}] (2V_{1k} x_2 - 2W_1 x_2) \right]$$

$$= \Delta t m_{21}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial V_{2k}} = \Delta t \left[-[\tilde{C}_D] + [\tilde{C}_{l\alpha}] (-V_{1k} x_1 + W_1 x_1 - V_{3k} x_3) \right] + 1$$

$$= \Delta t b_{22} + 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial V_{3k}} = \Delta t \left[[\tilde{C}_{Np\alpha}] x_1 + [\tilde{C}_{l\alpha}] (2V_{3k} x_2) \right]$$

$$= \Delta t o_{23}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_{1k}} = \Delta t \left[-[\tilde{C}_{Nq}] x_3 \right]$$

$$= \Delta t d_{24}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_{2k}} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_{3k}} = \Delta t \left[[\tilde{C}_{Nq}] x_1 \right]$$

$$= \Delta t f_{26}$$

Turunan f_3

$$\frac{\partial f_3}{\partial V_{1k}} = \Delta t \left[[\tilde{C}_{Np\alpha}] x_2 + [\tilde{C}_{l\alpha}] (2V_{1k} x_3 - 2W_1 x_3) \right]$$

$$= \Delta t m_{31}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial V_{2k}} = \Delta t \left[-[\tilde{C}_{Np\alpha}]x_1 + [\tilde{C}_{l\alpha}](2V_{2k}x_3 - V_{3k}x_2) \right]$$

$$= \Delta t n_{32}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial V_{3k}} = \Delta t \left[-[\tilde{C}_D] + [\tilde{C}_{l\alpha}](-V_{1k}x_1 + W_1x_1) \right] + 1$$

$$= \Delta t c_{33} + 1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_{1k}} = \Delta t \left[[\tilde{C}_{Nq}]x_2 \right]$$

$$= \Delta t d_{34}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_{2k}} = \Delta t \left[-[\tilde{C}_{Nq}]x_1 \right]$$

$$= \Delta t e_{35}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h_{3k}} = 0$$

Turunan f_4

$$\frac{\partial f_4}{\partial V_{1k}} = \Delta t \left[[\tilde{C}_{Mp\alpha}] (1 - x_1^2) \right]$$

$$= \Delta t a_{41}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial V_{2k}} = \Delta t \left[[\tilde{C}_{M\alpha}]x_3 - [\tilde{C}_{Mp\alpha}] (x_1x_2) \right]$$

$$= \Delta t b_{42}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial V_{3k}} = \Delta t \left[-[\tilde{C}_{M\alpha}]x_2 - [\tilde{C}_{Mp\alpha}] (x_1x_3) \right]$$

$$= \Delta t c_{43}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial h_{1k}} = \Delta t \left[[\tilde{C}_{Mq}] (1 - x_1^2) \right] + 1$$

$$= \Delta t d_{44} + 1$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial h_{2k}} = \Delta t \left[-[\tilde{C}_{Mq}] (x_1x_2) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta t e_{45} \\
\frac{\partial f_4}{\partial h_{3k}} &= \Delta t \left[-\left[\tilde{C}_{Mq} \right] (x_1 x_3) \right] \\
&= \Delta t f_{46}
\end{aligned}$$

Turunan f_5

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_5}{\partial V_{1k}} &= \Delta t \left[-\left[\tilde{C}_{M\alpha} \right] x_3 - \left[\tilde{C}_{Mp\alpha} \right] (x_1 x_2) \right] \\
&= \Delta t a_{51} \\
\frac{\partial f_5}{\partial V_{2k}} &= \Delta t \left[\left[\tilde{C}_{Mp\alpha} \right] (1 - x_2^2) \right] \\
&= \Delta t b_{52} \\
\frac{\partial f_5}{\partial V_{3k}} &= \Delta t \left[\left[\tilde{C}_{M\alpha} \right] x_1 - \left[\tilde{C}_{Mp\alpha} \right] (x_2 x_3) \right] \\
&= \Delta t c_{53} \\
\frac{\partial f_5}{\partial h_{1k}} &= \Delta t \left[-\left[\tilde{C}_{Mq} \right] (x_1 x_2) \right] \\
&= \Delta t d_{54} \\
\frac{\partial f_5}{\partial h_{2k}} &= \Delta t \left[\left[\tilde{C}_{Mq} \right] (1 - x_2^2) \right] + 1 \\
&= \Delta t e_{55} + 1 \\
\frac{\partial f_5}{\partial h_{3k}} &= \Delta t \left[-\left[\tilde{C}_{Mq} \right] (x_2 x_3) \right] \\
&= \Delta t f_{56}
\end{aligned}$$

Turunan f_6

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_6}{\partial V_{1k}} &= \Delta t \left[-\left[\tilde{C}_{M\alpha} \right] x_2 - \left[\tilde{C}_{Mp\alpha} \right] (x_1 x_3) \right] \\
&= \Delta t a_{61} \\
\frac{\partial f_6}{\partial V_{2k}} &= \Delta t \left[-\left[\tilde{C}_{M\alpha} \right] x_1 - \left[\tilde{C}_{Mp\alpha} \right] (x_2 x_3) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta t b_{62} \\
\frac{\partial f_6}{\partial V_{3k}} &= \Delta t \left[\left[\tilde{C}_{M_{p\alpha}} \right] (1 - x_3^2) \right] \\
&= \Delta t c_{63} \\
\frac{\partial f_6}{\partial h_{1k}} &= \Delta t \left[- \left[\tilde{C}_{M_q} \right] (x_1 x_3) \right] \\
&= \Delta t d_{64} \\
\frac{\partial f_6}{\partial h_{2k}} &= \Delta t \left[- \left[\tilde{C}_{M_q} \right] (x_2 x_3) \right] \\
&= \Delta t e_{65} \\
\frac{\partial f_6}{\partial h_{3k}} &= \Delta t \left[\left[\tilde{C}_{M_q} \right] (1 - x_3^2) \right] + 1 \\
&= \Delta t f_{66} + 1
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \Delta t a_{11} + 1 & \Delta t n_{12} & \Delta t o_{13} & 0 & \Delta t e_{15} & \Delta t f_{16} \\ \Delta t m_{21} & \Delta t b_{22} + 1 & \Delta t o_{23} & \Delta t d_{24} & 0 & \Delta t f_{26} \\ \Delta t m_{31} & \Delta t n_{32} & \Delta t c_{33} + 1 & \Delta t d_{34} & \Delta t e_{35} & 0 \\ \Delta t a_{41} & \Delta t b_{42} & \Delta t c_{43} & \Delta t d_{44} + 1 & \Delta t e_{45} & \Delta t f_{46} \\ \Delta t a_{51} & \Delta t b_{52} & \Delta t c_{53} & \Delta t d_{54} & \Delta t e_{55} + 1 & \Delta t f_{56} \\ \Delta t a_{61} & \Delta t b_{62} & \Delta t c_{63} & \Delta t d_{64} & \Delta t e_{65} & \Delta t f_{66} + 1 \end{bmatrix}$$

Langkah awal dari algoritma Kalman Filter adalah membutuhkan nilai awal dari variabel-variabel dalam gerak proyektil dibawah pengaruh faktor lingkungan. Dimana variabelnya meliputi kecepatan proyektil terhadap sistem koordinat bumi-1,2,3 adalah $[V_1, V_2, V_3]$ dan momentum sudut proyektil terhadap sistem koordinat bumi-1,2,3 adalah $[h_1, h_2, h_3]$ yang dapat ditulis

$$X = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ h_1 \ h_2 \ h_3]^T$$

Dengan memberikan nilai awal untuk masing-masing variabel sebagai berikut:

$$X_0 = [V_{1_0} \ V_{2_0} \ V_{3_0} \ h_{1_0} \ h_{2_0} \ h_{3_0}]^T$$

Selanjutnya diberikan model sistem dan model pengukuran pada algoritma Kalman Filter.

Model sistemnya adalah

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + G_k w_k$$

$$\begin{bmatrix} V_{1_{k+1}} \\ V_{2_{k+1}} \\ V_{3_{k+1}} \\ h_{1_{k+1}} \\ h_{2_{k+1}} \\ h_{3_{k+1}} \end{bmatrix} = A_k \begin{bmatrix} V_{1_k} \\ V_{2_k} \\ V_{3_k} \\ h_{1_k} \\ h_{2_k} \\ h_{3_k} \end{bmatrix} + B_k U_k + G_k \begin{bmatrix} w_{1_k} \\ w_{2_k} \\ w_{3_k} \\ w_{4_k} \\ w_{5_k} \\ w_{6_k} \end{bmatrix}$$

Dimana: $U_k = \Delta t$

$$A_k = \begin{bmatrix} \Delta t a_{11} + 1 & \Delta t n_{12} & \Delta t o_{13} & 0 & \Delta t e_{15} & \Delta t f_{16} \\ \Delta t m_{21} & \Delta t b_{22} + 1 & \Delta t o_{23} & \Delta t d_{24} & 0 & \Delta t f_{26} \\ \Delta t m_{31} & \Delta t n_{32} & \Delta t c_{33} + 1 & \Delta t d_{34} & \Delta t e_{35} & 0 \\ \Delta t a_{41} & \Delta t b_{42} & \Delta t c_{43} & \Delta t d_{44} + 1 & \Delta t e_{45} & \Delta t f_{46} \\ \Delta t a_{51} & \Delta t b_{52} & \Delta t c_{53} & \Delta t d_{54} & \Delta t e_{55} + 1 & \Delta t f_{56} \\ \Delta t a_{61} & \Delta t b_{62} & \Delta t c_{63} & \Delta t d_{64} & \Delta t e_{65} & \Delta t f_{66} + 1 \end{bmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} g_{17} \\ g_{27} \\ g_{37} \\ g_{47} \\ g_{57} \\ g_{67} \end{bmatrix} ; \quad G_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

dengan model pengukuran yaitu

$$Z_k = H \cdot X_k + v_k$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1_k} \\ V_{2_k} \\ V_{3_k} \\ h_{1_k} \\ h_{2_k} \\ h_{3_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1_k} \\ v_{2_k} \\ v_{3_k} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

dengan asumsi

$$X_0 \sim N(\bar{X}_0, P_{X_0}), w_k \sim N(0, Q_k), v_k \sim N(0, R_k)$$

Berikut ini tahap-tahap pada Algoritma Kalman Filter.

1. Inisialisasi

Untuk memulai implementasi dilakukan inisialisasi awal untuk estimasi awal (\bar{X}_0) dan kovarian X , (P_0) yaitu

$$\hat{X}_0 = \bar{X}_0, P_0 = P_{X_0}$$

Dimana:

$\bar{X}_0 = [V_1, V_2, V_3, h_1, h_2, h_3]^T$ dan P_{X_0} adalah matriks diagonal dengan ukuran 6×6 .

$$P_{X_0} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_6 \end{bmatrix}$$

2. Tahap prediksi (*time update*)

Pada tahap prediksi ini menghitung kovarian error dan estimasi pada model sistem.

$$\text{Kovarian Error : } P_k^- = \mathbf{A}_k P_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{G}_k Q_k \mathbf{G}_k^T$$

$$\text{Estimasi : } \hat{x}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \hat{x} + \mathbf{B}_k u_k$$

Dimana kovarian dari noise sistem Q_k merupakan matriks diagonal dengan ukuran 6×6 .

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_6 \end{bmatrix}$$

3. Tahap koreksi (*measurement update*)

Pada tahap koreksi dihitung kalman gain, kovarian error dan estimasi melalui model pengukuran yaitu

Kalman Gain:

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T [\mathbf{H}_k P_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T + \bar{R}_{k+1}^p]^{-1}$$

Kovarian Error:

$$P_{k+1} = [\mathbf{I} - K_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] P_{k+1}^-$$

Estimasi:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-)$$

Dimana Z_k merupakan data pengukuran yang bersifat random. Data yang diukur yaitu posisi variabel V_1, V_2 dan V_3 . Kovarian dari noise pengukuran R_k merupakan matriks diagonal dengan ukuran 3×3 .

$$R_k = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix}$$

Dan dengan matriks H sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah melewati tahap koreksi, kembali lagi ke tahap prediksi dengan waktu selanjutnya dan berulang terus menerus sesuai iterasi yang dilakukan.

4.5 Implementasi *Ensemble Kalman Filter*

Metode Ensemble Kalman Filter dapat digunakan untuk model sistem linear maupun non-linear, sehingga model gerak proyektil non-linear dapat diterapkan secara langsung pada algoritma Ensemble Kalman Filter.

Untuk mengestimasi gerak proyektil dibawah pengaruh faktor lingkungan yang ditunjukkan pada persamaan (4.33)

menggunakan metode Ensemble Kalman Filter diperlukan model sistem dan model pengukuran.

Model sistem

$$X_{k+1} = f(X_k, u_k) + w_k$$

Dengan:

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} V_{1k+1} \\ V_{2k+1} \\ V_{3k+1} \\ h_{1k+1} \\ h_{2k+1} \\ h_{3k+1} \end{bmatrix}; w_k = \begin{bmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \\ w_{3k} \\ w_{4k} \\ w_{5k} \\ w_{6k} \end{bmatrix}$$

$$f(X_k, u_k) = \begin{bmatrix} \Delta t[a_{11}V_{1k} + b_{12}V_{2k} + C_{13}V_{3k} + e_{15}h_{2k} + f_{16}h_{3k} + g_{17}] + V_{1k} \\ \Delta t[a_{21}V_{1k} + b_{22}V_{2k} + C_{23}V_{3k} + d_{24}h_{1k} + f_{26}h_{3k} + g_{27}] + V_{2k} \\ \Delta t[a_{31}V_{1k} + b_{32}V_{2k} + C_{33}V_{3k} + d_{34}h_{1k} + e_{35}h_{2k} + g_{37}] + V_{3k} \\ \Delta t[a_{41}V_{1k} + b_{42}V_{2k} + C_{43}V_{3k} + d_{44}h_{1k} + e_{45}h_{2k} + f_{46}h_{3k} + g_{47}] + h_{1k} \\ \Delta t[a_{51}V_{1k} + b_{52}V_{2k} + C_{53}V_{3k} + d_{54}h_{1k} + e_{55}h_{2k} + f_{56}h_{3k} + g_{57}] + h_{2k} \\ \Delta t[a_{61}V_{1k} + b_{62}V_{2k} + C_{63}V_{3k} + d_{64}h_{1k} + e_{65}h_{2k} + f_{66}h_{3k} + g_{67}] + h_{3k} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Dimana w_k adalah noise sistem yang berdistribusi normal dengan *mean* nol dan varians Q_k , $w_k \sim N(0, Q_k)$.

Model pengukuran

$$z_k = H \cdot X_k + v_k$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1k} \\ V_{2k} \\ V_{3k} \\ h_{1k} \\ h_{2k} \\ h_{3k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ v_{3k} \\ v_{4k} \\ v_{5k} \\ v_{6k} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Dimana v_k adalah noise pengukuran yang berdistribusi normal dengan *mean* nol dan varian R_k , $v_k \sim N(0, R_k)$.

Selanjutnya dilakukan dengan mendefinisikan X sebagai berikut:

$$X = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ h_1 \ h_2 \ h_3]^T$$

Kemudian memberikan nilai awal untuk masing-masing variabel.

$$X_0 = [V_{1_0}, V_{2_0}, V_{3_0}, h_{1_0}, h_{2_0}, h_{3_0}]^T$$

Berikut ini merupakan tahapan pada Algoritma Ensemble Kalman Filter.

1. Inisialisasi

Pada tahap inisialisasi metode EnKF terlebih dahulu harus dilakukan pembangkitan sejumlah ensemble sesuai tebakan nilai awal untuk masing-masing state dengan memberikan noise sistem.

$$X_{k,i} = \begin{bmatrix} V_{1_0} \\ V_{2_0} \\ V_{3_0} \\ h_{1_0} \\ h_{2_0} \\ h_{3_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \\ w_{3,i} \\ w_{4,i} \\ w_{5,i} \\ w_{6,i} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_\varepsilon \quad (4.38)$$

Kemudian dari nilai $X_{k,1}$ hingga X_{k,N_ε} akan dikumpulkan sehingga didapatkan matriks kolom berukuran (6×1) sejumlah ensemble yang dibangkitkan sehingga didapatkan sebuah matriks berukuran $(6 \times N)$.

$$= \begin{bmatrix} [X_{k,1} \ X_{k,2} \ X_{k,3} \ \dots \ X_{k,N_\varepsilon}] \\ V_{1_0} + w_{1,1} & V_{1_0} + w_{1,2} & V_{1_0} + w_{1,3} & \dots & V_{1_0} + w_{1,N_\varepsilon} \\ V_{2_0} + w_{2,1} & V_{2_0} + w_{2,2} & V_{2_0} + w_{2,3} & \dots & V_{2_0} + w_{2,N_\varepsilon} \\ V_{3_0} + w_{3,1} & V_{3_0} + w_{3,2} & V_{3_0} + w_{3,3} & \dots & V_{3_0} + w_{3,N_\varepsilon} \\ h_{1_0} + w_{4,1} & h_{1_0} + w_{4,2} & h_{1_0} + w_{4,3} & \dots & h_{1_0} + w_{4,N_\varepsilon} \\ h_{2_0} + w_{5,1} & h_{2_0} + w_{5,2} & h_{2_0} + w_{5,3} & \dots & h_{2_0} + w_{5,N_\varepsilon} \\ h_{3_0} + w_{6,1} & h_{3_0} + w_{6,2} & h_{3_0} + w_{6,3} & \dots & h_{3_0} + w_{6,N_\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Selanjutnya adalah mencari nilai rata-rata setiap state dari pembangkitan ensemble

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_0 &= \hat{X}_0^* = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} X_{0,i} \\
 &= [\hat{V}_{1_0} \hat{V}_{2_0} \hat{V}_{3_0} \hat{h}_{1_0} \hat{h}_{2_0} \hat{h}_{3_0}]^T \\
 X_{0,i} &= \begin{bmatrix} V_{1_0} + w_{1,1} & V_{1_0} + w_{1,2} & V_{1_0} + w_{1,3} & \dots & V_{1_0} + w_{1,N_\varepsilon} \\ V_{2_0} + w_{2,1} & V_{2_0} + w_{2,2} & V_{2_0} + w_{2,3} & \dots & V_{2_0} + w_{2,N_\varepsilon} \\ V_{3_0} + w_{3,1} & V_{3_0} + w_{3,2} & V_{3_0} + w_{3,3} & \dots & V_{3_0} + w_{3,N_\varepsilon} \\ h_{1_0} + w_{4,1} & h_{1_0} + w_{4,2} & h_{1_0} + w_{4,3} & \dots & h_{1_0} + w_{4,N_\varepsilon} \\ h_{2_0} + w_{5,1} & h_{2_0} + w_{5,2} & h_{2_0} + w_{5,3} & \dots & h_{2_0} + w_{5,N_\varepsilon} \\ h_{3_0} + w_{6,1} & h_{3_0} + w_{6,2} & h_{3_0} + w_{6,3} & \dots & h_{3_0} + w_{6,N_\varepsilon} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Sehingga didapatkan matriks berukuran (6×1) . Nilai \hat{X}_k pada persamaan (4.40) akan digunakan pada tahap selanjutnya yaitu tahap prediksi.

2. Tahap Prediksi

Tahap prediksi pada EnKF mula-mula dihitung nilai prediksi dengan menggunakan nilai \hat{X}_k pada persamaan (4.40) kemudian ditambahkan noise sistem w_k .

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_{k+1}^- &= f(\hat{X}_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k,i} \\
 &= \begin{bmatrix} \hat{V}_{1_{k-1}} \\ \hat{V}_{2_{k-1}} \\ \hat{V}_{3_{k-1}} \\ \hat{h}_{1_{k-1}} \\ \hat{h}_{2_{k-1}} \\ \hat{h}_{3_{k-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \\ w_{3,i} \\ w_{4,i} \\ w_{5,i} \\ w_{6,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V}_{1_{k-1}} + w_{1,i} \\ \hat{V}_{2_{k-1}} + w_{2,i} \\ \hat{V}_{3_{k-1}} + w_{3,i} \\ \hat{h}_{1_{k-1}} + w_{4,i} \\ \hat{h}_{2_{k-1}} + w_{5,i} \\ \hat{h}_{3_{k-1}} + w_{6,i} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Identik dengan langkah sebelumnya, yaitu pada tahap inisialisasi. Nilai $\hat{X}_{k,i}^-$ hingga $\hat{X}_{k,N_\varepsilon}^-$ yang masing-masing berupa matriks kolom berukuran (6×1) akan dikumpulkan sesuai dengan jumlah ensemble yang dibangkitkan sehingga didapatkan sebuah matriks berukuran $(6 \times N)$.

Menghitung nilai estimasi pada tahap prediksi

Nilai estimasi pada tahap prediksi didapatkan dengan menghitung rata-rata dari setiap state dalam matriks yang telah dibentuk pada persamaan (4.41) sehingga didapatkan matriks berukuran (6×1) . Perhitungan ini mengikuti persamaan (4.42) sebagai berikut:

$$\hat{X}_k^- = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \hat{X}_{k,i}^- \quad (4.42)$$

Kemudian dicari nilai error estimasi dengan cara menghitung selisih antara nilai prediksi dengan rata-rata estimasi. Jika nilai error ini dilambangkan dengan E maka didapatkan

$$E = \hat{X}_{k,i}^- - \hat{X}_k^- \quad (4.43)$$

Dimana nilai E ini akan digunakan untuk menghitung nilai kovarian error.

Menghitung nilai kovarian error pada tahap prediksi

Kovarian error pada tahap prediksi disimbolkan dengan P_k^- . Nilai ini didapatkan dengan mengalikan nilai E dengan E^T kemudian dicari nilai rata-ratanya.

$$\begin{aligned} P_k^- &= \frac{1}{N_\varepsilon - 1} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} E E^T \\ &= \frac{1}{N_\varepsilon - 1} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (\hat{X}_{k,i}^- - \hat{X}_k^-) (\hat{X}_{k,i}^- - \hat{X}_k^-)^T \end{aligned} \quad (4.44)$$

3. Tahap Koreksi

Pada tahap ini terlebih dahulu dihitung data pengukuran $z_{k,i}$ yang merupakan duplikasi dari data pengukuran pada sistem real yaitu z_k pada persamaan (4.37) ditambah noise pengukuran. Secara sederhana dapat dituliskan sebagai berikut:

$$z_{k,i} = z_k + v_{k,i} \quad (4.45)$$

Menghitung Kalman Gain

Kalman Gain dihitung dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R_k)^{-1} \quad (4.46)$$

Dengan P_k^- adalah kovarian error pada tahap prediksi, H adalah matriks pengukuran, dan R_k adalah kovarian pada noise pengukuran.

Menghitung nilai estimasi pada tahap koreksi

Nilai estimasi pada tahap ini dihitung dengan menggunakan persamaan (4.47) sebagai berikut:

$$\hat{X}_{k,i} = \hat{X}_{k,i}^- + K_k (z_{k,i} - H \hat{X}_{k,i}^-) \quad (4.47)$$

Dengan $\hat{X}_{k,i}^-$ adalah nilai estimasi pada tahap prediksi, K_k adalah Kalman Gain, $z_{k,i}$ adalah data pengukuran pada tahap koreksi, dan H adalah matriks pengukuran.

Setelah didapatkan nilai estimasi koreksi, selanjutnya adalah menghitung rata-rata estimasi koreksi dengan menggunakan persamaan (4.48) sebagai berikut:

$$\hat{X}_k = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \hat{X}_{k,i} \quad (4.48)$$

Nilai inilah yang digunakan untuk membandingkan hasil estimasi dari metode EnKF dengan nilai sebenarnya.

Menghitung nilai kovarian error pada tahap prediksi

Untuk menghitung kovariansi error pada tahap koreksi (P_k) digunakan persamaan (4.49) sebagai berikut:

$$P_k = [I - K_k H] P_k^- \quad (4.49)$$

4.6 Simulasi Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter

Pada subbab ini simulasi dilakukan dengan menerapkan algoritma Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter pada model gerak proyektil di bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin. Selain itu, simulasi diberikan iterasi sebanyak 50 langkah waktu. Hasil simulasi akan dievaluasi dengan cara membandingkan nilai real dengan hasil estimasi KF dan EnKF serta diakhir simulasi ditampilkan nilai RMSE (*Root Mean Square Error*) dari masing-masing variabel. Dalam simulasi ini, diberikan nilai awal sebagai berikut:

Tabel 4.1 Nilai Parameter

Parameter Awal	Nilai
V_1	100 m/s
V_2	90 m/s
V_3	100 m/s
h_1	0.52 rad
h_2	0.79 rad
h_3	1.57 rad

Pada simulasi diberikan beberapa kondisi lingkungan yaitu kondisi ideal, minimum, dan maksimum dimana masing-masing nilai temperatur yang digunakan adalah 1 kg/m^3 , 1.2043 kg/m^3 , dan 1.1455 kg/m^3 . Sedangkan nilai yang digunakan pada kecepatan angin yaitu 7 m/s , 3.6 m/s , dan 10.8 m/s .

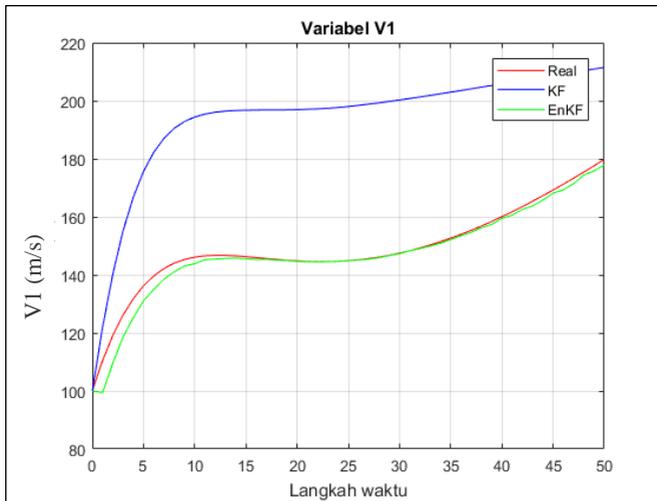
Selain itu, dalam simulasi nilai dari varians P_{x_0} , Q_k , dan R_k yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$P_{x_0} = Q_k = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} \end{bmatrix}$$

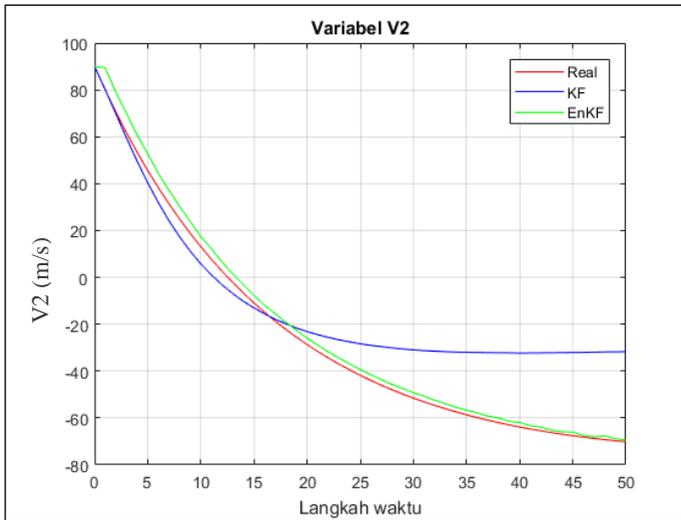
$$\text{Dan } R_k = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix}$$

4.6.1 Simulasi pada Kepadatan Udara (ρ) dan Kecepatan Angin (W_1) Ideal

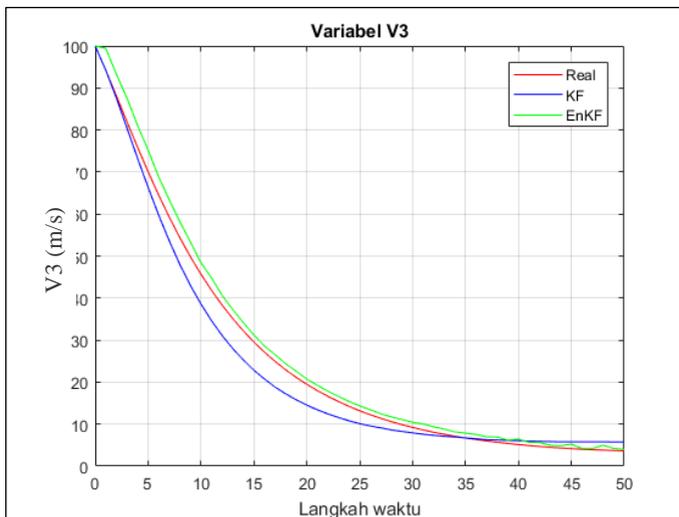
Dalam simulasi ini, diberikan nilai kepadatan udara (ρ) dan Kecepatan Angin (W_1) pada kondisi ideal yaitu 1 kg/m^3 dan 7 m/s . Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 4.2-4.4



Gambar 4.2 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_1 Pada Kondisi Ideal



Gambar 4.3 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_2 Pada Kondisi Ideal



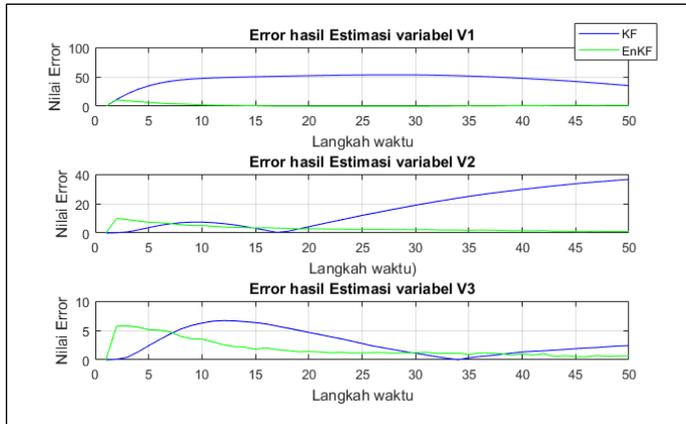
Gambar 4.4 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_3 Pada Kondisi Ideal

Pada gambar 4.2-4.4 diatas merupakan grafik kombinasi antara nilai real, nilai estimasi KF dan EnKF pada kecepatan sumbu koordinat bumi-1,2, dan 3. Dari gambar 4.2 diatas terlihat bahwa kecepatan awal yang dimiliki proyektil yang mendapatkan dorongan dari selongsong dan adanya kecepatan angin pada kondisi ideal searah sumbu-1 (W_1) mengakibatkan kecepatan proyektil bertambah dalam waktu yang cepat dan kemudian proyektil bergerak dengan kecepatan yang bertambah seiring dengan langkah waktu yang relatif. Sedangkan pada gambar 4.3 dan 4.4 diatas mempresentasikan bahwa gerak proyektil pada sumbu-2,3 mengalami penurunan kecepatan terhadap langkah waktu. Hal ini dikarenakan gerak proyektil yang didesain berotasi, dan kecepatan angin pada sumbu-2, 3 (W_2, W_3) yang diabaikan menyebabkan kecepatan proyektil pada sumbu-2 dan 3 berkurang sehingga gangguan gerak proyektil semakin kecil. Dengan demikian proyektil dapat bergerak mencapai target dengan cepat.

Selain itu, dapat dilihat pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin pada kondisi ideal menunjukkan bahwa kedua faktor tidak memberikan pengaruh yang besar. Hal ini dikarenakan kecepatan yang dimiliki proyektil cukup besar yaitu 900 m/s sedangkan faktor yang mempengaruhi yaitu kepadatan udara (ρ) sebesar 1 kg/m^3 dan kecepatan Angin (W_1) sebesar 7 m/s. Jadi dapat disimpulkan bahwa kondisi ideal di Kota Surabaya tergolong cukup stabil untuk gerak proyektil dengan kaliber $12.7 \times 99 \text{ mm}$.

Pada gambar 4.2-4.4 diatas dari segi metode estimasi menunjukkan bahwa grafik estimasi EnKF lebih mendekati nilai real sedangkan grafik estimasi KF menjauhi nilai real. Sehingga dapat dikatakan bahwa metode EnKF baik dalam mengestimasi kecepatan pada sumbu-1,2,3 (V_1, V_2, V_3).

Untuk mengetahui estimasi yang baik pada kedua metode dapat dilihat dari nilai error pada metode KF dan metode EnKF terhadap masing-masing variabel yang telah disajikan pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Nilai Error Estimasi KF dan EnKF

Pada Gambar 4.5 diatas merupakan grafik nilai error antara nilai real dengan nilai estimasi KF dan EnKF dari semua variabel. Dari gambar tersebut terlihat bahwa grafik yang mempunyai nilai error mendekati nilai nol adalah grafik estimasi EnKF yang ditunjukkan pada garis berwarna hijau. Sehingga dapat dikatakan bahwa nilai error yang paling kecil adalah nilai hasil estimasi Ensemble Kalman Filter. Untuk mengetahui besar dari nilai error gambar diatas, telah disajikan tabel nilai RMSE yang dapat dilihat pada tabel 4.2 dibawah ini.

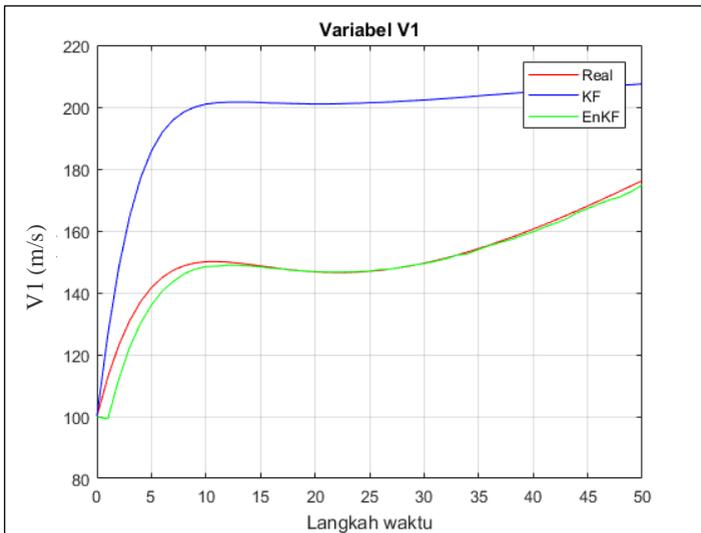
Tabel 4.2 Nilai RMSE setiap variabel

Langkah	Posisi V_1		Posisi V_2		Posisi V_3	
	RMSE KF	RMSE EnKF	RMSE KF	RMSE EnKF	RMSE KF	RMSE EnKF
50	4.9050	0.3011	5.1525	0.0442	0.3488	0.0061

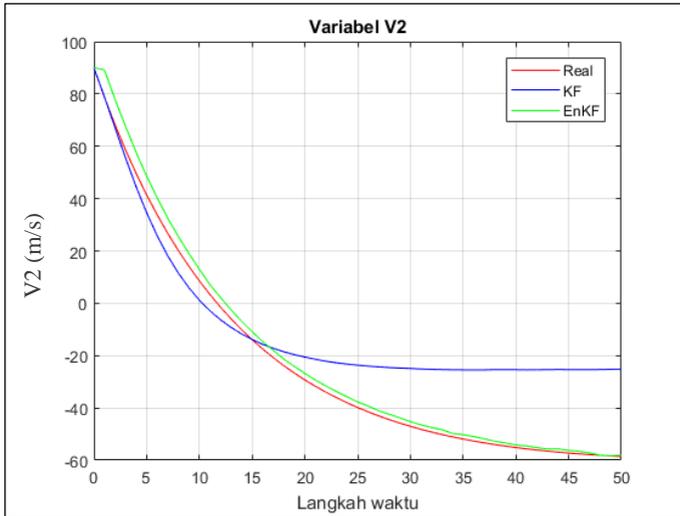
Pada tabel 4.2 terlihat bahwa nilai RMSE dari setiap variabel untuk metode KF relatif besar yaitu nilai error pada interval $0 \leq error \leq 5.1525$ Sedangkan nilai RMSE dari setiap variabel untuk metode EnKF relatif kecil yaitu nilai error pada interval $0 \leq error \leq 0.3011$. Jadi dapat dikatakan bahwa metode Ensemble Kalman Filter cocok untuk mengestimasi model sistem gerak proyektil dibawah pengaruh faktor lingkungan berupa kecepatan angin dan temperatur.

4.6.2 Simulasi pada Kepadatan Udara (ρ) dan Kecepatan Angin (W_1) Minimum

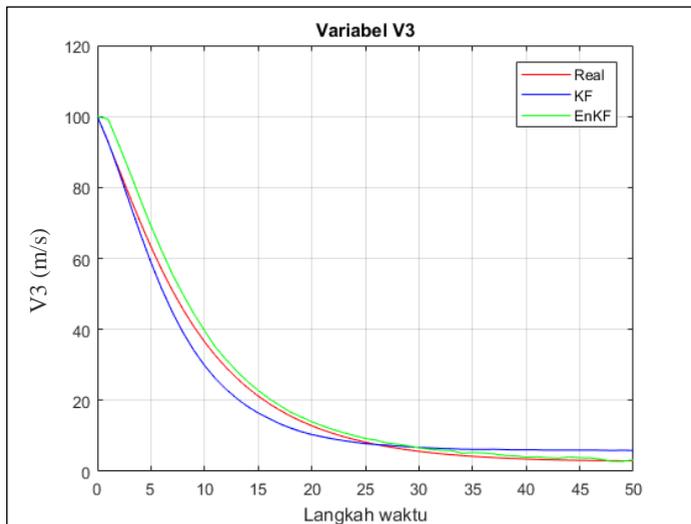
Dalam simulasi ini, diberikan nilai kepadatan udara (ρ) minimum yaitu 1.2041 kg/m^3 dan Kecepatan Angin (W_1) minimum yaitu 3.6 m/s . Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 4.6-4.8.



Gambar 4.6 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_1 Pada Kondisi Minimum



Gambar 4.7 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_2 Pada Kondisi Minimum



Gambar 4.8 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_3 Pada Kondisi Minimum

Gambar 4.6-4.8 diatas merupakan grafik kombinasi antara nilai real, nilai estimasi KF dan EnKF pada posisi kecepatan sumbu koordinat bumi-1,2 dan3. Dari ketiga gambar diatas menunjukkan bahwa dengan diberikan nilai kepadatan udara (ρ) dan kecepatan angin (W_1) minimum tidak memberikan pengaruh yang besar terhadap kecepatan gerak proyektil. Hal ini dikarenakan kecepatan yang dimiliki proyektil cukup besar yaitu 900 m/s sedangkan faktor yang mempengaruhi yaitu kepadatan udara (ρ) sebesar 1.2041 kg/m^3 dan kecepatan Angin (W_1) sebesar 3.6 m/s. Jadi dapat disimpulkan bahwa kondisi ideal di Kota Surabaya tergolong cukup stabil untuk gerak proyektil dengan kaliber $12.7 \times 99 \text{ mm}$.

Selain itu, pada grafik tersebut secara keseluruhan terlihat bahwa grafik estimasi EnKF lebih mendekati nilai real dan grafik estimasi KF menjauhi nilai real. Hal ini terjadi karena metode EnKF yang digunakan untuk model sistem non-linear mampu mengestimasi kecepatan gerak proyektil dengan cukup baik. Sedangkan metode KF yang pada dasarnya digunakan untuk model sistem linear perlu dilakukan pendekatan dengan mengubah model sistem gerak proyektil yang non-linear menjadi bentuk model sistem linear. Dari pendekatan inilah yang menyebabkan grafik estimasi KF terlihat menjauhi nilai real karena model sistem yang digunakan merupakan pendekatan dari model gerak proyektil sehingga hasil simulasi yang diperoleh metode KF kurang bekerja secara maksimal dalam mengestimasi kecepatan gerak proyektil.

Untuk mengetahui hasil estimasi pada metode KF dan metode EnKF dapat dilihat dari tingkat kesalahan dalam bentuk RMSE (Root Mean Square Error) terhadap masing-masing variabel yang telah disajikan pada Tabel 4.3 berikut ini.

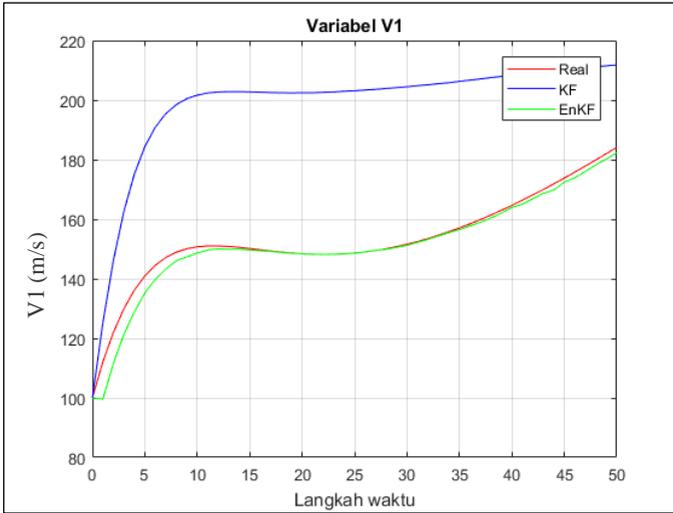
Tabel 4.3 Nilai RMSE setiap variabel

Langkah	Posisi V_1		Posisi V_2		Posisi V_3	
	RMSE KF	RMSE EnKF	RMSE KF	RMSE EnKF	RMSE KF	RMSE EnKF
50	4.3939	0.1760	4.6932	0.0773	0.4035	0.0485

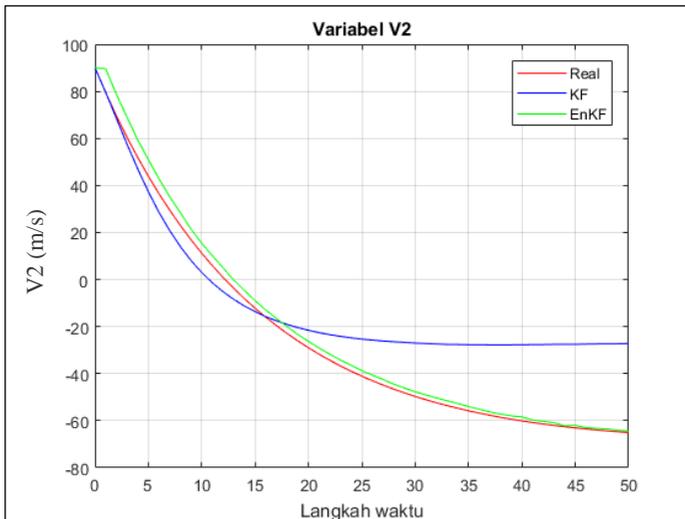
Pada tabel 4.3 diatas secara keseluruhan dari kedua metode terlihat bahwa nilai RMSE untuk metode Kalman Filter relatif besar yaitu nilai error interval $0 \leq error \leq 4.6932$. Sedangkan nilai RMSE untuk metode Ensemble Kalman Filter relatif kecil yaitu nilai error pada interval $0 \leq error \leq 0.1760$. Hal ini terjadi karena metode KF kurang bekerja secara maksimal dan metode EnKF bekerja cukup baik dalam mengestimasi model gerak proyektil. Sehingga secara keseluruhan hal ini dapat dikatakan bahwa metode Ensemble Kalman Filter cocok untuk mengestimasi model sistem gerak proyektil dibawah pengaruh faktor kecepatan angin dan temperatur.

4.6.3 Simulasi pada Kepadatan Udara (ρ) dan Kecepatan Angin (W_1) Maksimum

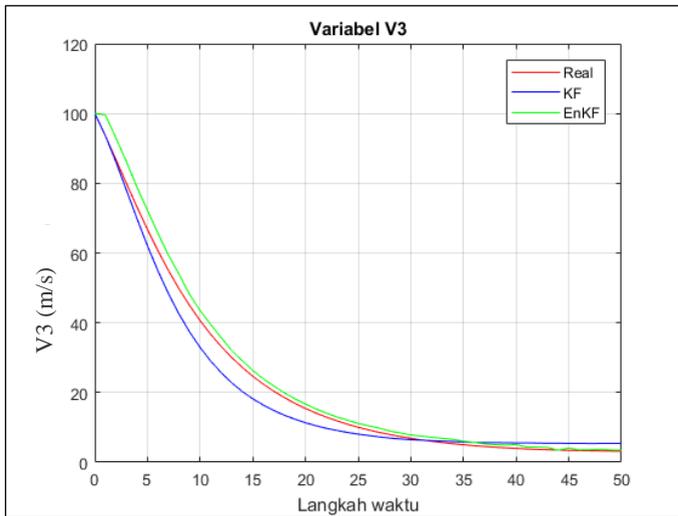
Dalam simulasi ini, diberikan nilai kepadatan udara (ρ) maksimum yaitu 1.1455 kg/m^3 dan Kecepatan Angin (W_1) rata-rata yaitu 10.8 m/s . Pada kedua metode dilakukan iterasi sebanyak 50 kali. Hasil simulasi perbandingan antara nilai kondisi real, hasil estimasi Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter dapat dilihat pada Gambar 4.9-4.11 berikut ini.



Gambar 4.9 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_1 Pada Kondisi Maksimum



Gambar 4.10 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_2 Pada Kondisi Maksimum



Gambar 4.11 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_3 Pada Kondisi Maksimum

Gambar 4.9-4.11 diatas merupakan grafik kombinasi antara nilai real, nilai estimasi KF dan EnKF pada posisi kecepatan sumbu koordinat bumi-1,2 dan 3. Dari ketiga gambar diatas menunjukkan bahwa kepadatan udara (ρ) dan kecepatan angin (W_1) maksimum yang dimiliki kota Surabaya tidak memberikan pengaruh yang besar terhadap kecepatan gerak proyektil. Hal ini dikarenakan kecepatan yang dimiliki proyektil cukup besar yaitu 900 m/s sedangkan kepadatan udara (ρ) yaitu 1.1455 kg/m³ dan kecepatan Angin (W_1) yaitu 10.8 m/s. Jadi dapat diimpulkan bahwa kondisi ideal di Kota Surabaya tergolong cukup stabil untuk gerak proyektil dengan kaliber 12.7×99 mm.

Selain itu, pada grafik tersebut secara keseluruhan terlihat bahwa grafik estimasi EnKF lebih mendekati nilai real dan grafik estimasi KF menjauhi nilai real. Hal ini terjadi karena

metode EnKF yang digunakan untuk model sistem non-linear mampu mengestimasi kecepatan gerak proyektil dengan cukup baik. Sedangkan metode KF yang pada dasarnya digunakan untuk model sistem linear perlu dilakukan pendekatan dengan mengubah model sistem gerak proyektil yang non-linear menjadi bentuk model sistem linear. Dari pendekatan inilah yang menyebabkan grafik estimasi KF terlihat menjauhi nilai real karena model sistem yang digunakan merupakan pendekatan dari model gerak proyektil sehingga hasil simulasi yang diperoleh metode KF kurang bekerja secara maksimal dalam mengestimasi kecepatan gerak proyektil. Untuk mengetahui hasil estimasi pada metode KF dan metode EnKF dapat dilihat dari tingkat kesalahan dalam bentuk RMSE terhadap masing-masing variabel yang telah disajikan pada Tabel 4.4 berikut ini.

Tabel 4.4 Nilai RMSE setiap variabel

Langkah	Posisi V_1		Posisi V_2		Posisi V_3	
	RMSE KF	RMSE EnKF	RMSE KF	RMSE EnKF	RMSE KF	RMSE EnKF
50	3.8635	0.2777	5.2940	0.0535	0.2533	0.0121

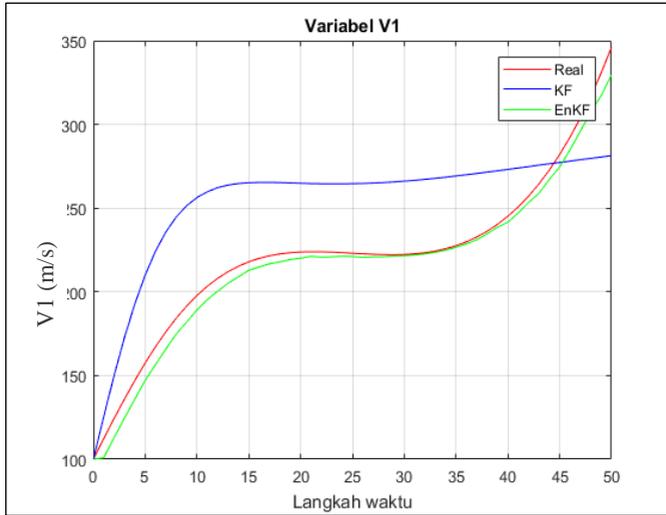
Pada tabel 4.4 diatas secara keseluruhan dari kedua metode terlihat bahwa nilai RMSE untuk metode Kalman Filter relatif besar yaitu nilai error interval $0 \leq error \leq 5.2940$. Sedangkan nilai RMSE untuk metode Ensemble Kalman Filter relatif kecil yaitu nilai error pada interval $0 \leq error \leq 0.2777$. Hal ini terjadi karena metode KF kurang bekerja secara maksimal dan metode EnKF bekerja cukup baik dalam mengestimasi model gerak proyektil di bawah pengaruh faktor angin dan temperatur.

Percobaan simulasi juga dilakukan perhitungan pada faktor temperatur minimum menggunakan kecepatan angin maksimum dan simulasi pada faktor maksimum menggunakan kecepatan angin minimum diperoleh hasil yang hampir sama dengan simulasi faktor temperatur minimum menggunakan kecepatan angin minimum dan simulasi faktor maksimum dengan menggunakan kecepatan angin maksimum. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa kedua faktor tersebut tidak mempengaruhi satu sama lain. Sedangkan pengaruh yang cukup besar terlihat dari faktor kecepatan angin yang mempengaruhi gerak proyektil. Hasil percobaan simulasi diatas dapat dilihat pada Lampiran 2.

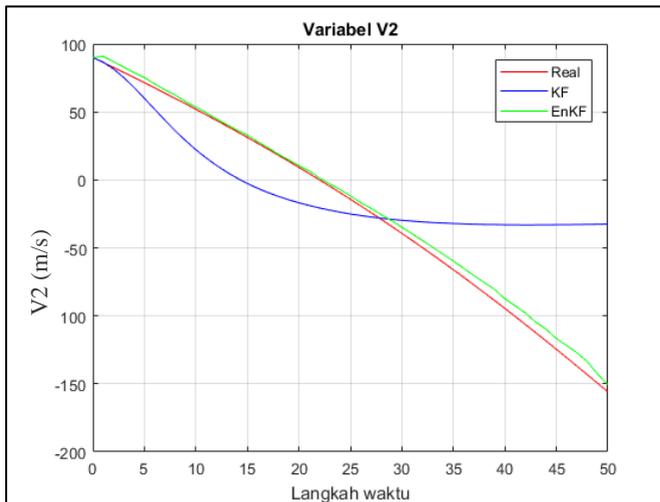
Selain itu pada hasil simulasi menunjukkan bahwa waktu sampling (dt) yang digunakan adalah $dt = 0.1$ dan iterasi yang digunakan yaitu 50 langkah waktu sudah menunjukkan gerak parabola dari lintasan proyektil pada saat ditembakkan hingga mencapai ke tanah. Jadi dapat disimpulkan bahwa proyektil bergerak dalam waktu ± 2 detik dan dapat dipastikan bahwa pada waktu 5 detik peluru yang di tembakkan sudah mencapai ke tanah.

4.6.4 Simulasi pada Kepadatan Udara (ρ) dan Kecepatan Angin (W_1) di Lingkungan Tropis Ekstrim

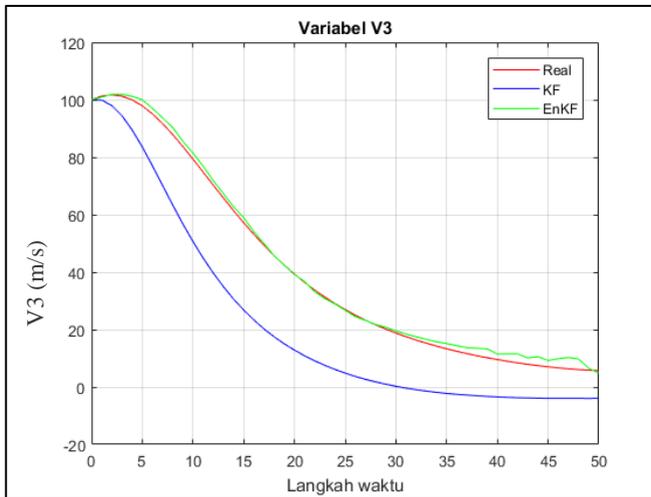
Dari hasil simulasi pada kondisi ideal, minimum, dan maksimum kota Surabaya diatas yang menunjukkan bahwa kondisi Surabaya masih tergolong cukup stabil, maka dalam simulasi ini, diberikan percobaan model gerak proyektil yang diaplikasikan pada lingkungan tropis yang cukup ekstrim, dimana diberikan nilai kepadatan udara (ρ) yaitu 1.1455 kg/m^3 dan Kecepatan Angin (W_1) tertinggi yaitu 118.32 m/s . Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 4.12-4.14 berikut ini.



Gambar 4.12 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_1 Pada Kondisi Ekstrim



Gambar 4.13 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_2 Pada Kondisi Ekstrim



Gambar 4.14 Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_3 Pada Kondisi Ekstrim

Gambar 4.12 diatas terlihat bahwa kecepatan angin (W_1) tertinggi pada lingkungan ekstrim sangat memberikan pengaruh yang cukup besar terhadap model gerak proyektil. Hal ini dapat dilihat dari kecepatan awal yang dimiliki proyektil yang mendapatkan dorongan dari selongsong dan ditambah dengan faktor kecepatan angin searah sumbu-1 (W_1) tertinggi yang cukup ekstrim menyebabkan kecepatan proyektil bertambah besar dalam waktu yang konstan.

Sedangkan pada gambar 4.13 dan 4.14 diatas mempresentasikan bahwa gerak proyektil pada sumbu-2,3 mengalami penurunan kecepatan terhadap langkah waktu. Hal ini dikarenakan gerak proyektil yang didesain berotasi, dan kecepatan angin pada sumbu-2, 3 (W_2, W_3) yang diabaikan menyebabkan kecepatan proyektil pada sumbu-2 dan 3 (V_2, V_3) berkurang sehingga gangguan gerak proyektil semakin kecil.

Selain itu, pada grafik tersebut menunjukkan bahwa grafik estimasi EnKF mendekati nilai real dan grafik estimasi KF kurang bekerja secara maksimal dimana terlihat menjauhi nilai real. Sehingga dapat disimpulkan bahwa estimasi menggunakan metode EnKF lebih baik daripada metode KF. Untuk mengetahui hasil estimasi pada metode KF dan metode EnKF dapat dilihat dari tingkat kesalahan dalam bentuk RMSE (Root Mean Square Error) terhadap masing-masing variabel yang telah disajikan pada Tabel 4.5 berikut ini.

Tabel 4.5 Nilai RMSE setiap variabel

Langkah	Posisi V_1		Posisi V_2		Posisi V_3	
	RMSE KF	RMSE EnKF	RMSE KF	RMSE EnKF	RMSE KF	RMSE EnKF
50	5.0783	1.6671	15.708	0.9619	2.0089	0.1618

Pada tabel 4.5 diatas secara keseluruhan dari kedua metode terlihat bahwa nilai RMSE untuk metode Kalman Filter relatif besar yaitu nilai error pada interval $0 \leq error \leq 15.708$. Sedangkan nilai RMSE untuk metode Ensemble Kalman Filter relatif kecil yaitu nilai error pada interval $0 \leq error \leq 1.6671$. Hal ini terjadi karena metode KF kurang bekerja secara maksimal dan metode EnKF bekerja cukup baik dalam mengestimasi model gerak proyektil.

Dari percobaan faktor lingkungan tropis yang cukup ekstrim pada model gerak proyektil diatas yaitu kepadatan udara (ρ) dan kecepatan angin (W_1) menunjukkan perubahan grafik yang signifikan. Hal ini karena kecepatan angin yang cukup tinggi yaitu 118.32 m/s yang bergerak searah proyektil atau bergerak terhadap sumbu-1 mampu memberikan dorongan yang cukup besar terhadap gerak proyektil sehingga kecepatan proyektil menjadi bertambah dan menyebabkan lintasan proyektil semakin bertambah jauh. Oleh karena itu, dapat

disimpulkan bahwa model gerak proyektil dibawah pengaruh lingkungan tropis sangat cocok untuk diaplikasikan pada lingkungan tropis yang cukup ekstrim.

Dari beberapa kondisi yang telah diaplikasikan pada model gerak proyektil yaitu kondisi ideal, minimum, dan maksimum Kota Surabaya serta lingkungan ekstrim diperoleh hasil analisis bahwa batas minimum dan maksimum dari kecepatan angin yang digunakan adalah sebesar 0.3 m/s dan 122 m/s sehingga proyektil layak untuk ditembakkan hingga mencapai pada tanah dengan jarak lintasan proyektil kurang dari 2 km.

Telah dijelaskan pada subbab sebelumnya bahwa semua percobaan diatas dilakukan dengan membangkitkan sebanyak 100 buah ensemble. Untuk memperoleh tingkat kesalahan yang cukup baik pada metode KF dan metode EnKF maka pada metode EnKF akan dilakukan percobaan dengan membangkitkan 50, 100, 200, dan 300 buah ensemble. Pada metode EnKF sejumlah ensemble dibangkitkan untuk tahap inisialisasi nilai awal \bar{X}_0 yang selanjutnya digunakan pada tahap prediksi. Dan pada simulasi digunakan 50 kali iterasi sehingga diperoleh hasil nilai RMSE yang dapat dilihat pada tabel 4.6 berikut ini.

Tabel 4.6 Nilai RMSE Pada Sejumlah Ensemble

Ensemble	RMSE (m/rad)			
	V_1 m/s	V_2 m/s	V_3 m/s	Waktu Komputasi (s)
50	0.2598	0.0384	0.0005	1.887020
100	0.2337	0.0377	0.0012	2.277229
200	0.2062	0.0769	0.0411	3.120454
300	0.2010	0.0909	0.0538	4.120753

Pada tabel 4.6 diatas menunjukkan hasil estimasi EnKF pada sejumlah ensemble. Dari tabel tersebut, metode EnKF untuk variabel V_1 menunjukkan estimasi yang paling akurat dengan 300 ensemble, untuk variabel V_2 dengan 50 dan 100 ensemble dan untuk variabel V_3 dengan 50 ensemble. Selain itu, tabel 4.6 diatas juga menunjukkan waktu komputasi dari setiap ensemble. Hasil waktu komputasi yang diperoleh menunjukkan bahwa semakin banyak ensemble yang digunakan maka semakin bertambah pula waktu komputasi. Selain itu, untuk mendapatkan nilai RMSE yang akurat maka dilakukan running sebanyak 100 kali pada metode KF dan EnKF sehingga diperoleh tabel 4.7 sebagai berikut.

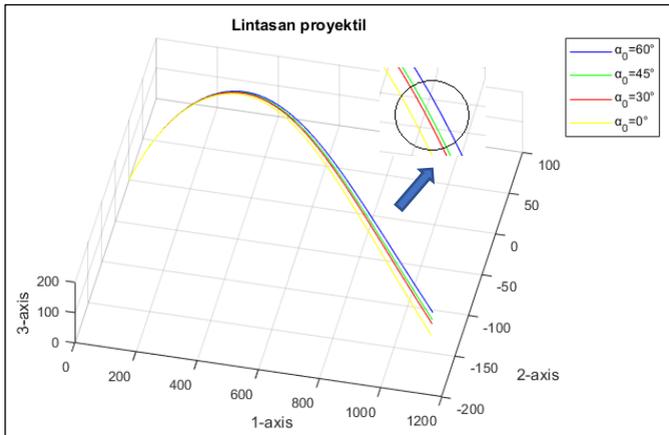
Tabel 4.7 Persentase Nilai Error Pada Posisi V_1, V_2, V_3

Metode	V_1	V_2	V_3
KF	4.472	5.612	0.236
EnKF	0.270	0.138	0.080

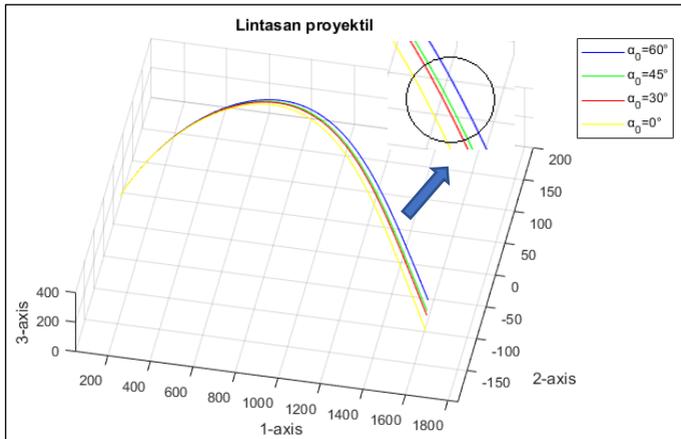
Tabel 4.7 diatas menunjukkan bahwa estimasi metode EnKF lebih baik daripada estimasi KF. Hal ini ditunjukkan dari nilai estimasi EnKF 93.96 % untuk variabel V_1 , 97.54 % untuk variabel V_2 , dan 66.10 % untuk variabel V_3 .

4.6.5 Simulasi Lintasan Proyektil Pada Target Diam

Pada simulasi ini diberikan tambahan informasi mengenai lintasan proyektil pada target yang diam dimana target diam disini diasumsikan berupa satu titik dengan dilakukan pengamatan menggunakan berbagai sudut tembak (pitch) yaitu $\alpha_0 = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ dan sudut yaw yaitu $\beta_0 = 45^\circ$. Hasil simulasi lintasan proyektil dapat dilihat pada gambar 4.15 -4.16.



Gambar 4.15 Lintasan Proyektil pada Lingkungan Tropis
Maksimum Kota Surabaya



Gambar 4.16 Lintasan Proyektil pada Lingkungan Tropis
Ekstrim

Gambar 4.15-4.16 diatas merupakan grafik lintasan proyektil dengan berbagai varian sudut tembak (pitch). Pada gambar tersebut diberikan kecepatan awal proyektil (V_1, V_2, V_3) yang sama dengan kecepatan angin (W_1) maksimal di Kota Surabaya yaitu 10.8 m/s dan kecepatan angin (W_1) pada lingkungan tropis ekstrim yaitu 118.32 m/s . Kemudian hasil yang diperoleh menunjukkan adanya perbedaan jarak lintasan proyektil dan kelengkungan gerak proyektil.

Perbedaan jarak lintasan proyektil, hal ini disebabkan oleh tingginya nilai kecepatan angin (W_1) yang searah dengan gerak proyektil sehingga kecepatan angin inilah yang memberikan dorongan pada saat proyektil meluncur. Semakin besar kecepatan angin yang diberikan maka semakin besar pula dorongan yang didapat sehingga jarak lintasan semakin jauh. Begitupun sebaliknya. Hasil jarak lintasan proyektil dapat dilihat pada tabel 4.8.

Selain itu, pada gambar 4.15-4.16 terlihat bahwa varian dari sudut tembak yang diberikan mempengaruhi kelengkungan gerak proyektil. Hal ini dapat menyebabkan jarak lintasan proyektil satu sama lain sedikit berbeda. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pada sudut tembak (pitch) yang kecil akan menghasilkan lintasan gerak proyektil yang sedikit semakin jauh. Dan begitupun sebaliknya.

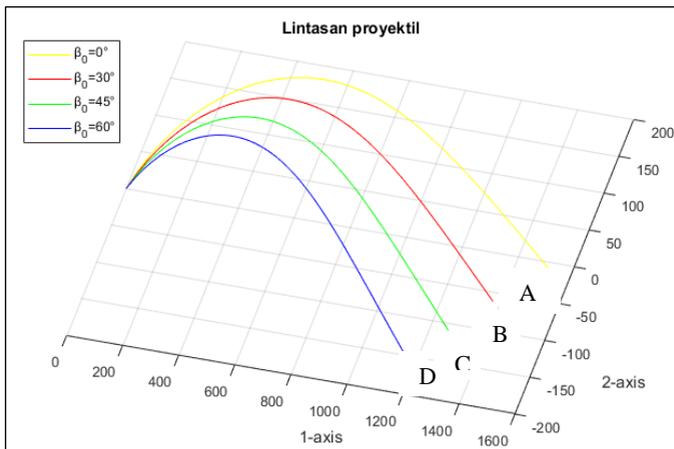
Tabel 4.8 Lintasan Proyektil pada masing-masing sudut tembak

Sudut (α_0)	a. Panjang Lintasan (Gambar 4.15)	b. Panjang Lintasan (Gambar 4.16)
0°	1173.2 m	1683.1 m
30°	1162.6 m	1665.0 m
45°	1158.2 m	1658.2 m
60°	1151.4 m	1647.9 m

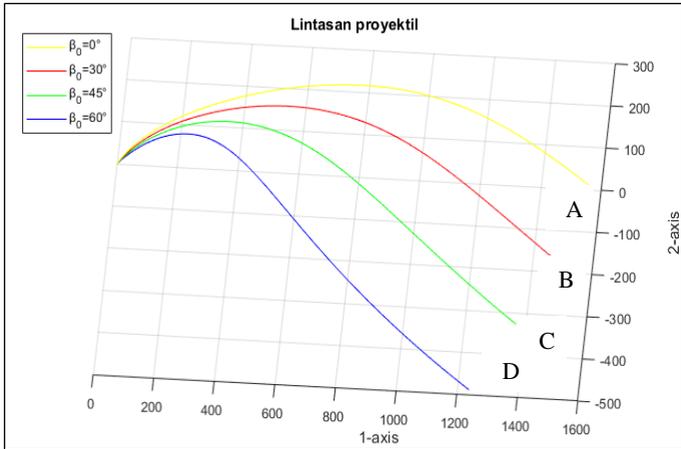
4.6.6 Simulasi Lintasan Proyektil Pada Target Bergerak

Pada simulasi ini diberikan tambahan informasi juga mengenai lintasan proyektil pada target yang bergerak dimana target bergerak diasumsikan berupa kumpulan titik-titik hasil tembak yang dijadikan sebagai lintasan gerak target. Selain itu, pada simulasi ini dilakukan pengamatan pada sudut tembak (pitch) yaitu $\alpha_0 = 30^\circ$ dengan sudut yaw yaitu $\beta_0 = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ untuk mengetahui jarak pada lintasan gerak proyektil.

Dan pada simulasi ini, diasumsikan bahwa target yang bergerak berupa beberapa titik tembak sehingga semua hasil masing-masing sudut tembak (yaw) dapat diketahui lintasan gerak target berupa garis lurus. Simulasi dilakukan percobaan pada kondisi maksimum di Kota Surabaya dan pada lingkungan tropis ekstrim dengan masing-masing kecepatan angin (W_1) yaitu 10.8 m/s dan 118.32 m/s . Hasil simulasi lintasan proyektil dapat dilihat pada gambar 4.17 dan 4.18 sebagai berikut.



Gambar 4.17 Lintasan Proyektil dengan Target Beberapa Titik di Lingkungan Tropis Maksimum Kota Surabaya



Gambar 4.18 Lintasan Proyektil dengan Target Beberapa Titik di Lingkungan Tropis Ekstrim

Gambar 4.17-4.18 diatas merupakan grafik lintasan proyektil dengan berbagai varian sudut tembak yaw (β_0). Kecepatan proyektil sumbu-2 (V_2) yang berbeda-beda memberikan pengaruh terhadap sudut tembak yaw gerak proyektil. Hal ini disebabkan karena semakin besar kecepatan pada sumbu-2 (V_2) yang diberikan maka gerak proyektil akan mendapatkan tekanan sehingga mengakibatkan bergesernya sudut tembak yaw mendekati nol atau dapat dikatakan semakin kecil sudut tembak yaw pada gerak proyektil. Jadi, semakin besar kecepatan pada sumbu-2 (V_2) yang diberikan, maka dihasilkan sudut tembak yaw yang semakin kecil dan posisi lintasan pada sumbu-2 semakin besar. Dan begitupun sebaliknya. Untuk mengetahui titik-titik target pada masing-masing sudut tembak dapat dilihat pada Tabel 4.9 dan 4.10.

Tabel 4.9 Lintasan Proyektil Sudut Tembak Yaw Pada Lingkungan Tropis Maksimum Kota Surabaya

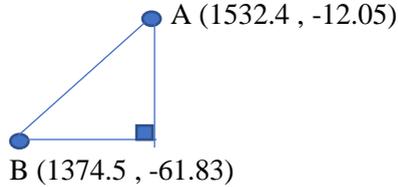
Sudut tembak yaw (β_0)	Kecepatan proyektil sumbu-2 (V_2)	Titik Target	
		Sumbu-1 (x)	Sumbu-2 (y)
0°	160 m/s	1532.4 m	-12.05 m
30°	140 m/s	1374.5 m	-61.83 m
45°	120 m/s	1265.7 m	-108.56 m
60°	100 m/s	1171.7 m	-155.43 m

Tabel 4.10 Lintasan Proyektil Sudut Tembak Yaw Pada Lingkungan Tropis Ekstrim

Sudut tembak yaw (β_0)	Kecepatan proyektil sumbu-2 (V_2)	Titik Target	
		Sumbu-1 (x)	Sumbu-2 (y)
0°	90 m/s	1556.5 m	10.17 m
30°	80 m/s	1469.9 m	-163.07 m
45°	70 m/s	1368.9 m	-326.53 m
60°	60 m/s	1238.8 m	-487.48 m

Tabel 4.9-4.10 diatas merupakan letak titik-titik target dari masing-masing sudut tembak yaw. Dari tabel tersebut, lintasan gerak target yang berupa titik-titik target dapat memberikan informasi pada sang penembak dalam hal penembakan dimana jika diketahui posisi dari suatu target maka dapat digunakan sudut tembak yaw dan kecepatan proyektil sumbu-2 (V_2) seperti yang terlihat pada tabel 4.9 dan 4.10. Selain itu, pada gambar 4.17-4.18 terlihat bahwa titik target A,B,C, dan D yang diasumsikan garis lurus menjadi lintasan target dengan target berupa tank yang bergerak mempunyai

kecepatan 19.44 m/s. Ilustrasinya target bergerak sebagai berikut: Misalkan pada gambar 4.17 target yang berupa tank bergerak dari titik A ke titik B yang dapat dilihat pada gambar 4.19 dibawah ini.



Dengan menggunakan rumus pythagoras dapat diperoleh jarak antara titik A dengan titik B yaitu 165.56 m. Sehingga tank mempunyai informasi jarak 165.56 m dengan kecepatan 19.44 m/s. Dan dengan menggunakan rumus kecepatan merupakan jarak per satuan waktu sebagai berikut :

$$V = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{V} = \frac{165.56}{19.44} = 8.516 \text{ s} = 9 \text{ s}$$

Sehingga dapat diperoleh waktu tempuh tank yaitu 9 s. Jadi, ini dapat menjadi informasi untuk penembak jika jarak tempuh dan kecepatan tank yang bergerak diketahui maka dapat diperkirakan waktu tembak proyektil dengan kecepatan dan sudut tembak yaw (β_0) yang digunakan.

Sebagai tambahan, jika pada kondisi maksimum di Kota Surabaya dilakukan penembakan dengan satu sudut tembak (yaw) kemudian diberikan beberapa macam kecepatan proyektil sumbu-2 (V_2) sehingga diperoleh titik target yang dapat dilihat pada tabel 4.11 sebagai berikut.

Tabel 4.11 Lintasan Proyektil Pada Sudut Tembak Yaw Tetap

Sudut tembak yaw (β_0)	Kecepatan proyektil sumbu-2 (V_2)	Titik Target	
		Sumbu-1 (x)	Sumbu-2 (y)
30°	160 m/s	1491.7 m	-4.39 m
	140 m/s	1356.9 m	-54.76 m
	120 m/s	1250.6 m	-103.47 m
	100 m/s	1172.1 m	-150.69 m

Tabel 4.11 diatas merupakan lintasan proyektil dengan target bergerak pada kondisi maksimum di Kota Surabaya. Dari tabel tersebut menunjukkan bahwa dengan diberikan satu sudut tembak (β_0) dengan menggunakan berbagai kecepatan proyektil pada sumbu-2 (V_2) yang berbeda-beda menunjukkan hasil bahwa V_2 bukan memberikan pengaruh pada jarak lintasan (posisi sumbu-x), akan tetapi berpengaruh pada posisi akhir dari proyektil yang ditembakkan (posisi sumbu-y).

BAB V

PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari penelitian serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Persamaan model gerak proyektil yang digunakan dipengaruhi oleh faktor kecepatan angin yang searah gerak proyektil sumbu-1 (W_1) dan suhu udara minimum dan maksimum (ρ). Hasil analisis menunjukkan bahwa di kota Surabaya kecepatan angin dan suhu udara pada kondisi minimum maupun maksimum kurang memberikan pengaruh yang besar terhadap gerak proyektil. Hal ini dikarenakan interval pada nilai kondisi minimum dan maksimum relatif kecil dan tidak jauh berbeda sehingga hasil grafik yang dihasilkan kurang terlihat menunjukkan perbedaan yang signifikan. Oleh karena itu, diberikan contoh pada kondisi lingkungan ekstrim dengan kecepatan angin sumbu-1 (W_1) yang cukup tinggi dengan suhu udara (ρ) maksimum diperoleh hasil grafik yang signifikan. Jadi, dapat disimpulkan bahwa persamaan gerak proyektil di bawah pengaruh faktor temperature dan kecepatan angin kurang cocok untuk diaplikasikan di kota Surabaya yang tergolong memiliki lingkungan tropis cukup stabil.
2. Hasil estimasi pada kedua metode menunjukkan bahwa variabel V_1 , V_2 , dan V_3 dari persamaan gerak proyektil di

bawah pengaruh faktor temperatur dan kecepatan angin dengan menggunakan metode EnKF lebih baik daripada metode KF. Hal ini ditunjukkan dari tingkat akurasi estimasi EnKF yaitu 94.31 % untuk variabel V_1 , 97.6 % untuk variabel V_2 , dan 74.68 % untuk variabel V_3 dengan varian noise sistem (Q_k) dan noise pengukuran (R_k) yang digunakan dapat dilihat pada subbab 4.6.

3. Sebagai tambahan, diberikan informasi mengenai lintasan gerak proyektil pada target diam dan target bergerak. Pada target diam dengan diberikan berbagai varian sudut tembak (pitch) menunjukkan sedikit perbedaan pada jarak lintasan proyektil. Sedangkan pada target bergerak dengan diberikan berbagai varian sudut tembak (yaw) dan kecepatan proyektil pada sumbu-2 berbeda-beda diperoleh hasil berupa titik-titik target yang diasumsikan menjadi gerak target berupa garis lurus.

5.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya dapat digunakan perbandingan antara metode Ensemble Kalman Filter dengan estimasi untuk model sistem non-linear seperti metode Extended Kalman Filter, Unscented Kalman Filter, dsb.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] F, Khoiril Metrima. (2015). **Pengaruh Temperatur Sintering Metode Metalurgi Serbuk Terhadap Frangibility dan Perfoorma Balistik Peluru Frangible Komposit Cu-10%wtSn**. Jurusan Teknik Material dan Metalurgi. ITS. Surabaya.
- [2] <https://www.pindad.com/mu3-p>
- [3] Lewis, F. L. (1998). **Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory**. Georgia: School of Electrical Engineering Georgia Institute of Technology Atlanta.
- [4] Heemink, A.W. (1990). **Data Assimilation For Non Linear Tidal Models**. International Journal for Numerical Methods in Fluids.
- [5] Apriliani, E., Masduqi, A. (2008). **Estimation of Surabaya River Water Quality Using Kalman Filter Algorithm**. IPTEK, The Journal for Technology and Science, Vol. 19, No. 3.
- [6] Drécourt, J.P. (2003). **Kalman filtering in hydrological modeling**. DAIHM Technical Report 2003-1, DHI Water & Environment, Agern All 11, 2970 Hørsholm, Denmark.
- [7] Ngatini, Apriliani, E., & Nurhadi, H. (2016). **The Position Estimation of AUV Based on Non-Linear Ensemble Kalman Filter**. In Proceeding of BASIC 2016, Faculty of Mathematics and Sciences: 6 (pp. 382-386), Indonesia: Brawijaya University, 2338-0128.
- [8] Apriliani, E., Arif, D. K., & Sanjoyo, B. A. (2010). **The Square Root Ensemble Kalman Filter to Estimate The Concentration of Air Pollution**. In Proceedings of

- The 2010 IEE, International Conference on Mathematical Application in Engineering (IC-MAE'10), Kuala Lumpur, Malaysia.
- [9] Ngatini, Apriliani, E., & Nurhadi, H. , (2017). **Ensemble and Fuzzy Kalman Filter for Position Estimation of an Autonomous Underwater Vehicle Based on Dynamical System of AUV Motion.**
- [10] Nurhadi, H., Subchan, Gustiyadi F.R. (2012). **Design of Position Estimation Algorithm of Navigation and Trajectory System for Unmanned Underwater Vehicle ITS AUV-01 using Ensemble Kalman Filter (ENKF) Method.** 13th Seminar on Intelligent Technology and Its Applications (SITIA 2012).
- [11] Pancahayani, Sigit. (2011). **Estimasi Lintasan Misil Dengan Metode Ensemble Kalman Filter.** Tugas Akhir S1. Jurusan Matematika FMIPA – ITS. Surabaya.
- [12] Hartini, Santi. (2011). **Implementasi Metode Ensemble Kalman Filter (EnKF) untuk Mengestimasi Posisi Robot Mobil.** Tugas Akhir S1. Jurusan Matematika FMIPA – ITS. Surabaya.
- [13] H, Ryan. F. (2015). **The Mathematical Modelling of Projectile Trajectories Under The Influence of Enviromental Effects.** University of New South Wales Canberra at the Australian Defence Force Academy, 2612, Australia.
- [14] R.L. McCoy. (2012). **Modern Exterior Ballistics: The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles.** Surrey: Schiffer Publishing Ltd.
- [15] Dewi, R. P. (2017). **Estimasi Ketinggian Dan Debit Aliran Sungai Pada Model Shallow Water Dengan**

- Menggunakan Extended Kalman Filter.** Tugas Akhir S1. Jurusan Matematika FMIPA – ITS. Surabaya.
- [16] Curn. (2014). **Correlated Estimation Problems and The Ensemble Kalman Filter.** Dissertation of Department of Philosophy (Computer Sscience), Trinity College, Ireland: University of Dublin.
- [17] Evensen, G., (2003). **The Ensemble Kalman Fiter: Theoretical Formulation and Practical Implementation.** Journal of Ocean Dynamics, 53(4), 343-367.
- [18] Agus, N.A.S, Apriliani, E., M.A, Dian. (2018). **Perbandingan Metode Kalman Filter, Extended Kalman Filter, dan Ensemble Kalman Filter pada Model Penyebaran Virus HIV/AIDS.** Journal Mathematics and Its Aplications Vol.15, No.1, Maret 2018,17-29.

LAMPIRAN 1
Data Nilai RMSE Pada Posisi V_1 , V_2 , dan V_3

No.	Posisi V_1		Posisi V_2		Posisi V_3	
	RMSE KF	RMSE ENKF	RMSE KF	RMSE ENKF	RMSE KF	RMSE ENKF
1	4.5305	0.2484	5.6072	0.1547	0.2404	0.096
2	4.452	0.2333	5.5942	0.1745	0.2348	0.1133
3	4.5059	0.2603	5.6249	0.147	0.2506	0.0844
4	4.4799	0.3106	5.6387	0.0947	0.2234	0.0328
5	4.4548	0.1878	5.6055	0.2199	0.2408	0.1568
6	4.5004	0.3021	5.6066	0.1046	0.2421	0.0435
7	4.4644	0.2696	5.613	0.1375	0.2311	0.0733
8	4.4947	0.2274	5.618	0.1799	0.2455	0.1205
9	4.4945	0.2511	5.6286	0.1564	0.2477	0.0965
10	4.4891	0.2841	5.6088	0.1193	0.2354	0.06
11	4.4423	0.3295	5.6011	0.0797	0.2389	0.0161
12	4.4696	0.3013	5.6167	0.1086	0.2457	0.0478
13	4.4573	0.1848	5.6151	0.2232	0.2328	0.158
14	4.4398	0.2109	5.6127	0.0956	0.227	0.0357
15	4.4443	0.2716	5.5939	0.1319	0.2227	0.0692
16	4.442	0.1765	5.5901	0.2307	0.2428	0.1686
17	4.5433	0.3186	5.615	0.0908	0.2259	0.0267
18	4.4682	0.2479	5.6117	0.1552	0.2173	0.0956
19	4.4845	0.1674	5.6209	0.2376	0.2516	0.1777
20	4.4311	0.2833	5.6012	0.1275	0.2328	0.0625
21	4.4918	0.2877	5.6196	0.1197	0.2355	0.0582
22	4.4776	0.4541	5.6129	0.048	0.2435	0.1089
23	4.4793	0.3211	5.6208	0.0912	0.2398	0.0273
24	4.4848	0.2484	5.6122	0.1582	0.2285	0.0954
25	4.4597	0.2309	5.6024	0.1698	0.229	0.11
26	4.4701	0.3334	5.6112	0.0739	0.2352	0.0095
27	4.4935	0.2808	5.628	0.1285	0.2343	0.0676

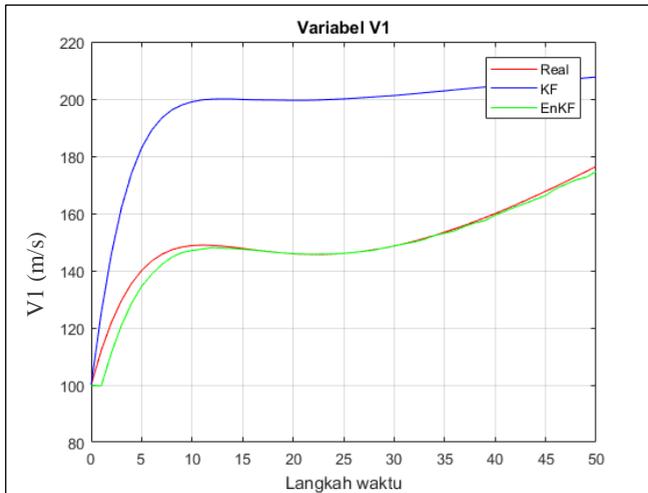
No.	Posisi V_1		Posisi V_2		Posisi V_3	
	RMSE KF	RMSE ENKF	RMSE KF	RMSE ENKF	RMSE KF	RMSE ENKF
28	4.4826	0.192	5.6012	0.2153	0.2285	0.1533
29	4.4567	0.2414	5.6137	0.1646	0.2251	0.0987
30	4.4267	0.3509	5.6023	0.0576	0.2368	0.0059
31	4.4914	0.3308	5.6169	0.0756	0.2274	0.0102
32	4.4351	0.2441	5.609	0.1626	0.2223	0.1033
33	4.4885	0.2386	5.612	0.1704	0.2297	0.108
34	4.4446	0.2885	5.6023	0.1154	0.246	0.0535
35	4.4511	0.3024	5.5991	0.1062	0.2093	0.0411
36	4.4793	0.2227	5.6342	0.1846	0.2291	0.1223
37	4.5141	0.2624	5.6228	0.1452	0.2374	0.0797
38	4.5156	0.363	5.6181	0.0417	0.2419	0.0189
39	4.4747	0.2862	5.6125	0.1231	0.2353	0.0583
40	4.4627	0.2814	5.6174	0.1217	0.231	0.0587
41	4.4559	0.2477	5.6057	0.1565	0.2236	0.0936
42	4.4698	0.2913	5.6079	0.119	0.2369	0.0568
43	4.4695	0.2246	5.6224	0.1804	0.2411	0.1207
44	4.4716	0.2634	5.6149	0.1435	0.2289	0.082
45	4.4296	0.3286	5.6081	0.0795	0.2321	0.0181
46	4.4356	0.3716	5.6113	0.0388	0.2474	0.0275
47	4.4973	0.1169	5.6113	0.2894	0.2238	0.2297
48	4.4472	0.2113	5.6244	0.1979	0.2192	0.137
49	4.4827	0.1946	5.6172	0.2127	0.2194	0.1505
50	4.5082	0.1629	5.6107	0.2436	0.2368	0.1805
51	4.4404	0.2642	5.6009	0.1434	0.2346	0.0797
52	4.482	0.3287	5.602	0.0777	0.2267	0.0149
53	4.5147	0.3338	5.5995	0.0713	0.2559	0.0097
54	4.4621	0.3128	5.6059	0.0959	0.2249	0.033
55	4.432	0.252	5.6021	0.1578	0.2394	0.0939
56	4.4766	0.2393	5.6022	0.1673	0.2488	0.105
57	4.4986	0.1739	5.6136	0.2289	0.2487	0.1689

No.	Posisi V_1		Posisi V_2		Posisi V_3	
	RMSE KF	RMSE ENKF	RMSE KF	RMSE ENKF	RMSE KF	RMSE ENKF
58	4.5007	0.2043	5.6134	0.2016	0.2461	0.14
59	4.538	0.3152	5.6196	0.0952	0.2264	0.0288
60	4.4945	0.3016	5.6248	0.1036	0.22278	0.0425
61	4.4443	0.2723	5.6209	0.1318	0.2454	0.072
62	4.4945	0.2852	5.6037	0.123	0.2521	0.0613
63	4.4692	0.2666	5.6087	0.1398	0.2303	0.0788
64	4.4487	0.2858	5.614	0.1219	0.2394	0.0597
65	4.4832	0.3197	5.6018	0.0851	0.2227	0.0215
66	4.4676	0.2746	5.6033	0.1292	0.2369	0.0687
67	4.456	0.3659	5.6146	0.0418	0.2294	0.0223
68	4.507	0.1249	5.6167	0.2802	0.2484	0.2177
69	4.4506	0.1642	5.6038	0.2411	0.2468	0.1812
70	4.4885	0.3377	5.6175	0.0694	0.2543	0.0107
71	4.4886	0.2615	5.6251	0.1465	0.2233	0.0843
72	4.4617	0.2414	5.6054	0.1675	0.2335	0.1039
73	4.4044	0.3219	5.5934	0.0888	0.2346	0.026
74	4.4512	0.2232	5.6213	0.1861	0.2357	0.1217
75	4.4458	0.2914	5.6083	0.1154	0.2341	0.0542
76	4.4554	0.3213	5.6107	0.0859	0.2502	0.0226
77	4.5077	0.2702	5.6053	0.1377	0.2402	0.0781
78	4.4923	0.2712	5.6117	0.1391	0.2317	0.0763
79	4.4634	0.239	5.5913	0.1742	0.2265	0.1088
80	4.5203	0.24	5.6064	0.1655	0.251	0.1077
81	4.4198	0.3256	5.6201	0.0826	0.2351	0.0182
82	4.4327	0.2695	5.5985	0.1366	0.2399	0.0744
83	4.4404	0.3468	5.6178	0.0619	0.2241	0.0002
84	4.4664	0.2926	5.612	0.1129	0.2327	0.0531
85	4.4287	0.2142	5.6194	0.194	0.2252	0.1305
86	4.476	0.3449	5.6257	0.065	0.2193	0.0038
87	4.4656	0.2595	5.6121	0.1497	0.2325	0.0856

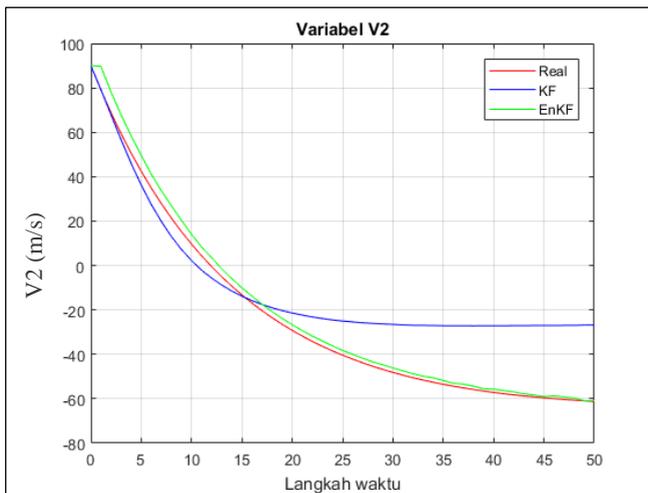
No.	Posisi V_1		Posisi V_2		Posisi V_3	
	RMSE KF	RMSE ENKF	RMSE KF	RMSE ENKF	RMSE KF	RMSE ENKF
88	4.4314	0.2875	5.6033	0.1167	0.2359	0.0595
89	4.5143	0.382	5.6266	0.0283	0.2518	0.0404
90	4.4581	0.2423	5.6163	0.1629	0.2468	0.0989
91	4.5303	0.1935	5.6109	0.2169	0.2323	0.1502
92	4.4598	0.4015	5.6197	0.0075	0.2377	0.0524
93	4.4967	0.2256	5.6195	0.1812	0.2338	0.1218
94	4.4659	0.1824	5.6169	0.2242	0.2476	0.1619
95	4.5157	0.2401	5.6173	0.1669	0.2459	0.1043
96	4.4727	0.3374	5.6089	0.067	0.2324	0.0046
97	4.4158	0.2392	5.6014	0.169	0.2471	0.1075
98	4.5238	0.3163	5.6412	0.0898	0.2391	0.027
99	4.4633	0.1528	5.6099	0.2521	0.243	0.1911
100	4.4449	0.3508	5.6093	0.0512	0.2301	0.0089

LAMPIRAN 2

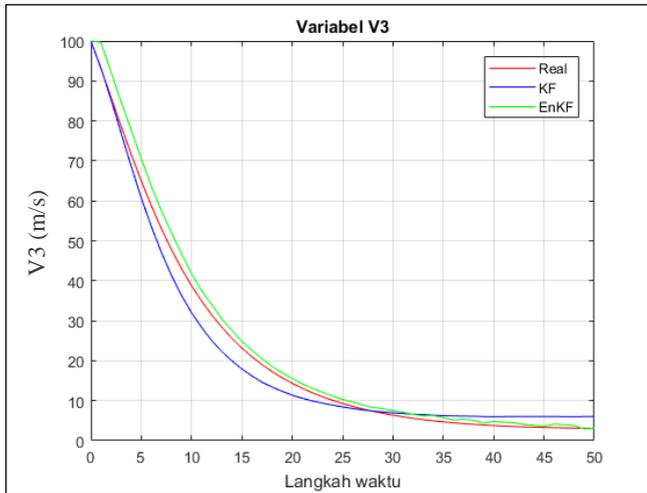
A. Simulasi Faktor Temperatur Minimum dan Kecepatan Angin Maksimum



Gambar 1. Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_1

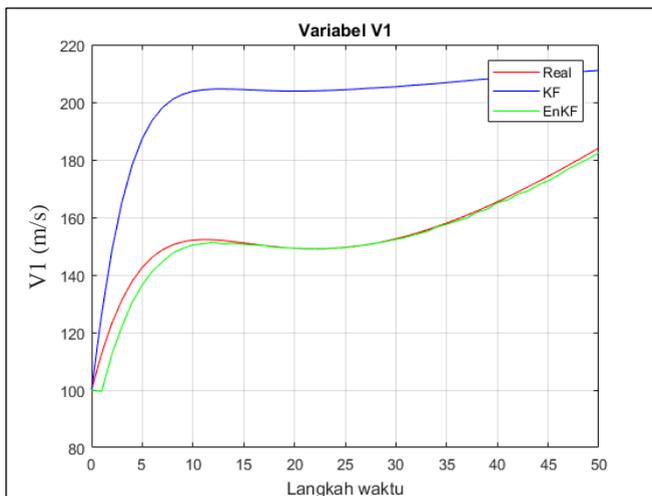


Gambar 2. Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_2

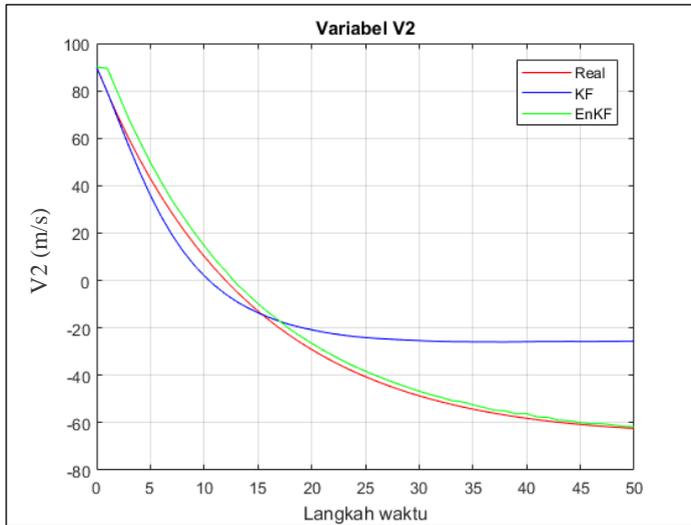
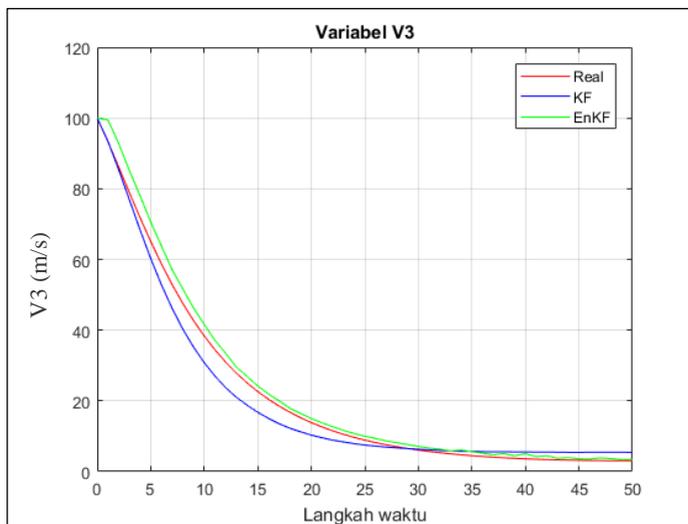


Gambar 3. Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_3

B. Simulasi Faktor Temperatur Maksimum dan Kecepatan Angin Minimum



Gambar 4. Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_1

Gambar 5. Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_2 Gambar 6. Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel V_3

LAMPIRAN 3

Source Code

```

disp('                                PROGRAM SIMULASI');
disp('ESTIMASI GERAK PROYEKTIL KALIBER 12.7 X
99 MM MENGGUNAKAN METODE KALMAN FILTER DAN');
disp('ENSEMBLE KALMAN FILTER');

% Inputan Parameter
rho = 1.1646;      % Air density [kg/m3]
d   = 0.0127;     % Diameter (m)
S   = 0.000127;  % Surface [m2]
v   = 900;       % Velocity of projectile
[m/s]
p   = 3.5;       % Projectile axial spin rate
(rad/scec)
mass= 0.0452;    % Projectile mass[kg] [kg]
cd  = 0.14;     % Drag coefficient [-]
cla = 1.63;     % Lift coefficient [-]
cnpa= 6.05;     % Magnus force coefficient[-]
]
cnq  = -6.6;    % Pitch damping force
coefficient[-]
clp  = -0.0125; % Spin damping moment
coefficient[-]
cld  = -0.009; % Roll moment due to fin
cant[-]
cma  = 3.26;    % Pitching moment
coefficient[-]
cmpa= 2.6 ;    % Magnus moment
coefficient[-]
cmpd= 1.2;     % Pitch damping moment
coefficient[-]
g1   = -5.43;  % Gravitational acceleration
axis-1 [m/s2]
g2   = -32.08; % Gravitational acceleration
axis-2 [m/s2]

```

```

g3 = 0; % Gravitational acceleration
axis-3[m/s2]
Iy = 12.97; % Inersia thd sumbu y
(1/12*mass*L^2)
si = 0.52; % Fin cant angle (rad)
j1 = 1; % Unit vektor along axis-1
j2 = 0.01; % Unit vektor along axis-2
j3 = 0.01; % Unit vektor along axis-3
w1 = 10.8; % Velocity of Wind axis-1
w2 = 0; % Velocity of Wind axis-2
w3 = 0; % Velocity of Wind axis-3

% Perhitungan koefisien
cd_t = (rho*v*S*cd)/2*mass;
cla_t = (rho*v*S*cla)/2*mass;
cnpa_t=(rho*S*d*cnpa*p)/2*mass;
cnq_t = (rho*v*S*d*cnq)/2*mass;
clp_t = (rho*v*S*d^2*clp*p)/2*Iy;
cld_t = (rho*v^2*S*d*si*cld)/2*Iy;
cma_t = (rho*v*S*d*cma)/2*Iy;
cmpa_t=(rho*S*d^2*cma*p)/2*Iy;
cmpd_t=(rho*v*S*d^2*cmpd)/2*Iy;

% Inisialisasi delta t
dt = 0.1;
m = 50; % Jumlah iterasi
Ne = 100; % Banyaknya ensemble yang
dibangkitkan

% Inputan awal
% X0 = [V1,V2,V3, h1, h2, h3];
x1 = 100;
x2 = 90;
x3 = 100;
x4 = 0.52;
x5 = 0.79;
x6 = 1.57
x7 = 0;
x8 = 0;

```

```

x9 = 0;
u = dt;

% Matriks Keluaran
H = [1 0 0 0 0 0 0 0 0;
      0 1 0 0 0 0 0 0 0;
      0 0 1 0 0 0 0 0 0];

% Inisialisasi P,Q dan R
Pk = Qk = Pe [0.001 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0.001 0
0 0 0 0 0 0;0 0 0.001 0 0 0 0 0;0 0 0
0.00001 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0.00001 0 0 0;0 0
0 0 0.00001 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0.001 0 0;0 0
0 0 0 0 0.001 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0.001];
R = 10^-4;
Rk = 10^-4*eye(3);
Q1= 10^-3;
Q2= 10^-5;
Q = [Q1 0 0 0 0 0 0 0 0;0 Q1 0 0 0 0 0 0 0;0 0
Q1 0 0 0 0 0;0 0 0 Q2 0 0 0 0;0 0 0 0 Q2 0
0 0 0;0 0 0 0 0 Q2 0 0 0;0 0 0 0 0 0 Q1 0 0;0
0 0 0 0 0 Q1 0;0 0 0 0 0 0 0 0 Q1];

% Membangkitkan Ensemble Awal
x1awal = x1(1)+normrnd(0,sqrt(Q1),1,1);
x2awal = x2(1)+normrnd(0,sqrt(Q1),1,1);
x3awal = x3(1)+normrnd(0,sqrt(Q1),1,1);
x4awal = x4(1)+normrnd(0,sqrt(Q2),1,1);
x5awal = x5(1)+normrnd(0,sqrt(Q2),1,1);
x6awal = x6(1)+normrnd(0,sqrt(Q2),1,1);
x7awal = x7(1)+normrnd(0,sqrt(Q1),1,1);
x8awal = x8(1)+normrnd(0,sqrt(Q1),1,1);
x9awal = x9(1)+normrnd(0,sqrt(Q1),1,1);
x0_awal
=[x1awal;x2awal;x3awal;x4awal;x5awal;x6awal;x7
awal;x8awal;x9awal];
x0(:,j) = x0_awal;
xmean = mean(x0,2);

```

```

% Model Sistem Non-Linear
f1 = x1re+dt*((-1*(cd_t)+(cla_t)*(-
1*x2re*(j2)-
1*x3re*(j3)))*x1re+((cnpa_t)*(j3)+(cla_t)*(x2r
e*(j1)+(w1)*(j2)))*x2re+(-
1*(cnpa_t)*(j2)+(cla_t)*(x3re*(j1)+(w1)*(j3)))
*x3re+((cd_t)*(w1)+g1)+((cnq_t)*(j3))*x5re+(-
1*(cnq_t)*(j2))*x6re);
f2 = x2re+dt*((-
1*(cnpa_t)*(j3)+(cla_t)*((x1re*(j2))+(-
2*(w1)*(j2))) *x1re+(-
1*(cd_t)+(cla_t)*(w1*j1+(-1*x1re*(j1)))+(-
1*x3re*(j3)))*x2re+((cnpa_t)*(j1)+(cla_t)*(x3r
e*(j2)))*x3re+((cla_t)*(w1^2*j2)+(cnpa_t*w1*j3
)+g2)+(-
1*(cnq_t)*(j3))*x4re+((cnq_t)*j1)*x6re);
f3 = x3re+dt*((cla_t)*(x1re*(j3))+(-
2*w1*j3))+((cnpa_t)*(j2))*x1re+((cla_t)*(x2re*j
3+(-1*x3re*j2))+(-1*(cnpa_t)*j1))*x2re+(-
1*(cd_t)+(cla_t)*(w1*j1+(-
1*(x1re*j1))))*x3re+((cla_t)*(w1^2*j3)+(cnpa_t
)*(-1*w1*j2)+g3)+((cnq_t)*j2)*x4re+(-
1*(cnq_t)*j1)*x5re);
f4 = x4re+dt*((cnpa_t)*(1-
1*(j1^2))*x1re+((cma_t)*j3+(-
1*(cnpa_t)*(j1*j2))*x2re+(-1*((cma_t)*j2)-
1*((cnpa_t)*(j1*j3))*x3re+((clp_t)*j1)+((cld
_t)*j1)+(-1*(cnpa_t))*(w1+(-
1*(w1*j1^2))))+((cmpd_t)*(1-1*(j1^2))*x4re+(-
1*(cmpd_t)*j1*j2)*x5re+(-
1*(cmpd_t)*j1*j3)*x6re);
f5 = x5re+dt*((-1*(cma_t)*j3+(-
1*(cnpa_t)*(j1*j2))*x1re+((cnpa_t)*(1-
1*(j2^2))*x2re+((cma_t)*j1+(-
1*(cnpa_t)*(j2*j3)))*x3re+((clp_t)*j2)+((cld
_t)*j2)+(cma_t)*w1*j3+(cnpa_t)*(w1*j1*j2))+(-
1*(cmpd_t)*j1*j2)*x4re+(cmpd_t*(1-
1*(j2^2))*x5re+(-1*(cmpd_t)*(j2*j3))*x6re);
f6 = x6re+dt*((cma_t)*j2+(-
1*cnpa_t)*j1*j3)*x1re+((-1*(cma_t)*j1)+(-

```

```

1*(cmpa_t)*j2*j3))*x2re+((cmpa_t)*(1-
1*(j3^2)))*x3re+(((clp_t)*j3)+((cld_t)*j3)+(cm
a_t)*(-1*w1*j2)+(cmpa_t)*(w1*j1*j3))+((-
1*cmpd_t)*j1*j3))*x4re+((-
1*cmpd_t)*j2*j3))*x5re+(((cmpd_t)*(1-
1*(j3^2)))*x6re);
f7 = x1re*dt+x7re;
f8 = x2re*dt+x8re;
f9 = x3re*dt+x9re;
tic
f=@(x) [f1;f2;f3;f4;f5;f6;f7;f8;f9];
    %% Metode Kalman Filter %%
% Definisi Matriks Jacobi A Kalman Filter
    A = [D11(1) D12(1) D13(1) D14(1) D15(1)
D16(1) D17(1) D18(1) D19(1);
        D21(1) D22(1) D23(1) D24(1) D25(1)
D26(1) D27(1) D28(1) D29(1);
        D31(1) D32(1) D33(1) D34(1) D35(1)
D36(1) D37(1) D38(1) D39(1);
        D41(1) D42(1) D43(1) D44(1) D45(1)
D46(1) D47(1) D48(1) D49(1);
        D51(1) D52(1) D53(1) D54(1) D55(1)
D56(1) D57(1) D58(1) D59(1);
        D61(1) D62(1) D63(1) D64(1) D65(1)
D66(1) D67(1) D68(1) D69(1);
        D71(1) D72(1) D73(1) D74(1) D75(1)
D76(1) D77(1) D78(1) D79(1);
        D81(1) D82(1) D83(1) D84(1) D85(1)
D86(1) D87(1) D88(1) D89(1);
        D91(1) D92(1) D93(1) D94(1) D95(1)
D96(1) D97(1) D98(1) D99(1)];
    B =
[B11(1);B12(1);B13(1);B14(1);B15(1);B16(1);B17
(1);B18(1);B19(1)];

    % Sistem Model Kalman Filter
xre = A*xre0+B*u+sqrt(Qk)*randn(9,1);
    % Pengukuran
z_kf = H*xre+sqrt(R)*randn(3,1);

```

```

% z11(:,i+1)=[z1(:,i+1)];
xre0 = xre;
xretot = [xr0 xre];
xr0 = xretot;
% Tahap Prediksi
xpre = A*xtopi+B*u+sqrt(Qk)*randn(9,1);
Ppre = A*Pk*A'+Q;
% Tahap Koreksi
K_kf = Ppre*H'*inv(H*Ppre*H'+R);
Pk = [eye(9)-K_kf*H]*Ppre*[eye(9)-
K_kf*H]'+K_kf*Rk*K_kf';
xtopi = xpre+K_kf*(z_kf-H*xpre);
xtopitotal = [xtopi0 xtopi];
xtopi0 = xtopitotal;

%% Metode Ensemble Kalman Filter %%
% Model Sistem Non-Linear
x1(k+1)= x1(k)+ dt*((-1*(cd_t)+(cla_t)*(-
1*x2(k)*(j2)-
1*x3(1)*(j3)))*x1(k)+((cnpa_t)*(j3)+(cla_t)*(x
2(k)*(j1)+(w1)*(j2)))*x2(k)+(-
1*(cnpa_t)*(j2)+(cla_t)*(x3(k)*(j1)+(w1)*(j3)
)*x3(k)+((cd_t)*(w1)+g1)+((cnq_t)*(j3))*x5(k)+
(-
1*(cnq_t)*(j2))*x6(k)+normrnd(0,sqrt(Q1),1,1))
;
x2(k+1)= x2(k)+ dt*((-
1*(cnpa_t)*(j3)+(cla_t)*((x1(k)*(j2))+(-
2*(w1)*(j2)))))*x1(k)+(-
1*(cd_t)+(cla_t)*(w1*j1+(-1*x1(1)*(j1))+(-
1*x3(k)*(j3)))*x2(k)+((cnpa_t)*(j1)+(cla_t)*(x
3(k)*(j2)))*x3(k)+((cla_t)*(w1^2*j2)+(cnpa_t*w
1*j3)+g2))+(-
1*(cnq_t)*(j3))*x4(k)+((cnq_t)*j1)*x6(k))+norm
rnd(0,sqrt(Q1),1,1));
x3(k+1)= x3(k)+
dt*((cnpa_t)*(j2)+((cla_t)*(x1(k)*(j3)+(-
2*(w1)*(j3)))*x1(k)+((cla_t)*(x2(k)*j3+(-
1*x3(k)*j2))+(-1*(cnpa_t)*j1))*x2(k)+(-

```

```

1*(cd_t)+(cla_t)*(w1*j1-
1*(x1(k)*j1)))*x3(k)+((cla_t)*(w1^2*j3)+(cnpa_
t)*(-1*w1*j2)+g3)+((cnq_t)*j2)*x4(k)+(-
1*(cnq_t)*j1)*x5(k)+normrnd(0,sqrt(Q1),1,1);
x4(k+1)= x4(k)+ dt*((cempa_t)*(1+(-
1*(j1^2))))*x1(k)+((cma_t)*j3+(-
1*(cempa_t)*(j1*j2)))*x2(k)+(-1*((cma_t)*j2)-
1*((cempa_t)*(j1*j3)))*x3(k)+((clp_t)*j1)+((cl
d_t)*j1)+(-1*(cempa_t))*(w1+(-
1*(w1*j1^2))))+((cmpd_t)*(1+(-
1*(j2^2))))*x4(k)+(-1*(cmpd_t)*j1*j2)*x5(k)+(-
1*(cmpd_t)*j1*j3)*x6(k)+normrnd(0,sqrt(Q2),1,1
));
x5(k+1)= x5(k)+ dt*((-1*(cma_t)*j3+(-
1*(cempa_t)*(j1*j2)))*x1(k)+((cempa_t)*(1+(-
1*(j2^2))))*x2(k)+((cma_t)*j1+(-
1*(cempa_t)*(j2*j3)))*x3(k)+((clp_t)*j2)+((cld
_t)*j2)+(cma_t)*w1*j3+(cempa_t)*(w1*j1*j2))+(-
1*(cmpd_t)*j1*j2)*x4(k)+(cmpd_t*(1+(-
1*(j2^2))))*x5(k)+(-
1*(cmpd_t)*(j2*j3))*x6(k)+normrnd(0,sqrt(Q2),1
,1));
x6(k+1)= x6(k)+ dt*((cma_t)*j2+(-
1*cempa_t)*j1*j3)*x1(k)+((-1*(cma_t)*j1)+(-
1*(cempa_t)*j2*j3))*x2(k)+((cempa_t)*(1+(-
1*(j3^2))))*x3(k)+((clp_t)*j3)+((cld_t)*j3)+
(cma_t)*(-1*w1*j2)+(cempa_t)*(w1*j1*j3))+((-
1*cmpd_t)*j1*j3)*x4(k)+((-
1*cmpd_t)*j2*j3)*x5(k)+((cmpd_t)*(1+(-
1*(j3^2))))*x6(k)+normrnd(0,sqrt(Q2),1,1));
x7(k+1)= x1(k)*dt+x7(k);
x8(k+1)= x2(k)*dt+x8(k);
x9(k+1)= x3(k)*dt+x9(k);

x_real(:,k+1)=[x1(k+1);x2(k+1);x3(k+1);x4(k+1)
;x5(k+1);x6(k+1);x7(k+1);x8(k+1);x9(k+1)];
z(:,k+1) =
H*x_real(:,k)+sqrt(R)*randn(3,1);
z1 = z(:,k+1);

```

```

%=== Tahap Prediksi ===%
x1pre(k+1)= x1pre(k)+dt*((-
1*(cd_t)+(cla_t)*(-1*x2pre(k)*(j2)-
1*x3pre(k)*(j3)))*x1pre(k)+((cnpa_t)*(j3)+(cla
_t)*(x2pre(k)*(j1)+(w1)*(j2)))*x2pre(k)+(-
1*(cnpa_t)*(j2)+(cla_t)*(x3pre(k)*(j1)+(w1)*(j
3)))*x3pre(k)+((cd_t)*(w1)+g1)+((cnq_t)*(j3))*
x5pre(k)+(-1*(cnq_t)*(j2))*x6pre(k));
x2pre(k+1)= x2pre(k)+dt*((-
1*(cnpa_t)*(j3)+(cla_t)*((x1pre(k)*(j2))+(-
2*(w1)*(j2)))))*x1pre(k)+(-
1*(cd_t)+(cla_t)*(w1*j1+(-1*x1pre(k)*(j1)))+(-
1*x3pre(k)*(j3)))*x2pre(k)+((cnpa_t)*(j1)+(cla
_t)*(x3pre(k)*(j2)))*x3pre(k)+((cla_t)*(w1^2*j
2)+(cnpa_t*w1*j3)+g2)+(-
1*(cnq_t)*(j3))*x4pre(k)+((cnq_t)*j1)*x6pre(k)
));
x3pre(k+1)=
x3pre(k)+dt*((cnpa_t)*(j2)+((cla_t)*(x1pre(k)*
(j3)+(-
2*(w1)*(j3)))))*x1pre(k)+((cla_t)*(x2pre(k)*j3+
(-1*x3pre(k)*j2)))+(-
1*(cnpa_t)*j1))*x2pre(k)+(-
1*(cd_t)+(cla_t)*(w1*j1-
1*(x1pre(k)*j1)))*x3pre(k)+((cla_t)*(w1^2*j3)+
(cnpa_t)*(-
1*w1*j2)+g3)+((cnq_t)*j2)*x4pre(k)+(-
1*(cnq_t)*j1)*x5pre(k));
x4pre(k+1)= x4pre(k)+dt*((cnpa_t)*(1+(-
1*(j1^2))))*x1pre(k)+((cma_t)*j3+(-
1*(cnpa_t)*(j1*j2)))*x2pre(k)+(-
1*((cma_t)*j2)-
1*((cnpa_t)*(j1*j3)))*x3pre(k)+(((clp_t)*j1)+(
(cld_t)*j1)+(-1*(cnpa_t))*(w1+(-
1*(w1*j1^2))))+((cmpd_t)*(1+(-
1*(j2^2))))*x4pre(k)+(-
1*(cmpd_t)*j1*j2)*x5pre(k)+(-
1*(cmpd_t)*j1*j3)*x6pre(k));

```

```

        x5pre(k+1)= x5pre(k)+dt*((-
1*(cma_t)*j3+(-
1*(cmpa_t)*(j1*j2)))*x1pre(k)+((cmpa_t)*(1+(-
1*(j2^2))))*x2pre(k)+((cma_t)*j1+(-
1*(cmpa_t)*(j2*j3)))*x3pre(k)+(((clp_t)*j2)+((
cld_t)*j2)+(cma_t)*w1*j3+(cmpa_t)*(w1*j1*j2))+
(-1*(cmpd_t)*j1*j2)*x4pre(k)+(cmpd_t*(1+(-
1*(j2^2))))*x5pre(k)+(-
1*(cmpd_t)*(j2*j3))*x6pre(k));
        x6pre(k+1)= x6pre(k)+dt*((cma_t)*j2+(-
1*cmpa_t)*j1*j3)*x1pre(k)+((-1*(cma_t)*j1)+(-
1*(cmpa_t)*j2*j3))*x2pre(k)+((cmpa_t)*(1+(-
1*(j3^2))))*x3pre(k)+(((clp_t)*j3)+((cld_t)*j3
)+(cma_t)*(-1*w1*j2)+(cmpa_t)*(w1*j1*j3))+((-
1*cmpd_t)*j1*j3)*x4pre(k)+((-
1*cmpd_t)*j2*j3)*x5pre(k)+(((cmpd_t)*(1+(-
1*(j3^2)))))*x6pre(k));
        % Ensemble Prediksi %
        x1_pre =
x1pre(k+1)+normrnd(0,sqrt(Q1),1,1);
        x2_pre =
x2pre(k+1)+normrnd(0,sqrt(Q1),1,1);
        x3_pre =
x3pre(k+1)+normrnd(0,sqrt(Q1),1,1);
        x4_pre =
x4pre(k+1)+normrnd(0,sqrt(Q2),1,1);
        x5_pre =
x5pre(k+1)+normrnd(0,sqrt(Q2),1,1);
        x6_pre =
x6pre(k+1)+normrnd(0,sqrt(Q2),1,1);
        x_pre(:,i) =
[x1_pre;x2_pre;x3_pre;x4_pre;x5_pre;x6_pre];
        % Mean Ensemble %
        xpre_1 = mean(x_pre,2);
        xpre1(:,k+1)= xpre_1;
        % Error Ensemble %
        error(:,p)=x_pre(:,p)-xpre_1;
        % Kovarian Error Ensemble %
        Ppre =(error*error')/(Ne-1);

```

```

%=== Tahap Koreksi ===%
% Kalman Gain %
    K = Ppre*H'*inv(H*Ppre*H'+R);
% Ensemble Pengukuran %
    zcor(:,q)=z1+sqrt(R)*randn(3,1);
% Estimasi Koreksi %
    x_cor=x_pre(:,q)+K*(zcor(:,q)-
H*x_pre(:,q));
    x_cor1(:,q) = x_cor;
    xcormean = mean(x_cor1,2);
    xmean(:,k+1)= xcormean;
    P0 =(eye(9)-K*H)*Ppre;
% Menghitung Nilai Error KF dan EnKF
    eKF(:,k) = abs(x_real(:,k)-
xtopitotal(:,k));
    eEnKF(:,k)= abs(x_real(:,k)-xmean(:,k));
    temp0 = 0;
    temp1 = temp0+(eKF(:,k)).^2;
    temp2 = temp0+(eEnKF(:,k)).^2;
    RSME_KF = sqrt(temp1/m)
    RSME_EnKF = sqrt(temp2/m)
% Mencari posisi target
    t1 = x_real(7,:).^2
    t3 = x_real(8,:).^2
    s = sqrt(t1+t3)

```

L AMPIRAN 4 BIODATA PENULIS



Penulis bernama Diah Agustin, lahir di Surabaya, 31 Agustus 1996. Penulis merupakan anak kedua dari lima bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Masyitoh (2000-2002), SDN Gading VIII/ 554 (2002-2008), SMP Negeri 29 Surabaya (2008-2011), dan SMA GIKI 2 Surabaya (2011-2014). Setelah lulus dari SMA, pada tahun 2014 penulis melanjutkan studi ke jenjang Sarjana di Departemen Matematika ITS Surabaya melalui jalur SBMPTN dengan NRP 06111440000058 dan mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selama kuliah penulis aktif mengikuti organisasi yaitu Bendahara I HIMATIKA ITS pada tahun 2015/2016, Bendahara II HIMATIKA ITS pada tahun 2016/2017. Selain itu penulis aktif mengikuti pelatihan LKMM Pra TD, LKMM TD, LKMM TM, Bussiness Plan, dll. Dan aktif mengikuti kegiatan kepanitian seperti OMITS, Dies Natalis 50 tahun Matematika ITS, Gerigi ITS 2016, dll. Demikian biodata penulis, informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditunjukkan ke penulis melalui email: diahagustin31@gmail.com

