



TUGAS AKHIR - SF141501

**MODEL Q-BALL DALAM RUANG-WAKTU (1+1)  
DIMENSI**

KASYFIL ALBAR  
NRP 0111440000016

Dosen Pembimbing:  
Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

DEPARTEMEN FISIKA  
Fakultas Ilmu Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2018

*"Halaman ini sengaja dikosongkan"*



TUGAS AKHIR - SF141501

**MODEL Q-BALL DALAM RUANG-WAKTU (1+1)  
DIMENSI**

KASYFIL ALBAR  
NRP 011144000016

Dosen Pembimbing:  
Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

DEPARTEMEN FISIKA  
Fakultas Ilmu Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2018

*"Halaman ini sengaja dikosongkan"*



FINAL PROJECT - SF141501

**MODEL OF Q-BALLS IN (1+1) DIMENSIONAL  
SPACETIME**

KASYFIL ALBAR  
NRP 011144000016

Supervisors:  
Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

DEPARTMENT OF PHYSICS  
Faculty of Natural Science  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2018

LEMBAR PENGESAHAN  
MODEL Q-BALL DALAM RUANG-WAKTU  
(1+1) DIMENSI

*MODEL OF Q-BALLS IN (1+1)  
DIMENSIONAL SPACETIME*

TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
Pada bidang Studi Fisika Teori  
Program Studi S-1 Departemen Fisika  
Fakultas Ilmu Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

KASYFIL ALBAR  
NRP. 0111440000016

Menyetujui

Dosen Pembimbing



Dr. rer.nat Bintoro Anang Subagyo  
NIP. 19790719 200301 1 015



# MODEL Q-BALL DALAM RUANG-WAKTU (1+1) DIMENSI

Nama Mahasiswa : KASYFIL ALBAR  
NRP : 0111440000016  
Jurusan : Fisika FIA-ITS  
Pembimbing : Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

## Abstrak

*Q-ball merupakan salah satu kelas dari soliton nontopologi dengan medan skalar kompleks dan distabilkan oleh konservasi muatan,  $Q$ . Pada penelitian ini dilakukan kajian dan pemodelan  $Q$ -ball pada ruang-waktu  $(1 + 1)$  dimensi. Model ini dapat dikonstruksi berdasarkan analogi model dalam ruang-waktu  $(3 + 1)$  dimensi. Dalam kasus ini, solusi  $Q$ -ball dapat diperoleh secara analitik. Mengaplikasikan ansatz sebagai fungsi cosinus hiperbolik, diperoleh solusi  $Q$ -ball dengan fitur-fitur yang sama seperti dalam ruang-waktu  $(3 + 1)$  dimensi. Hasil dari penelitian ini didapat solusi, rapat energi, total energi, muatan, stabilitas. Selain itu, juga dibahas interaksi dua  $Q$ -ball yang telah didorong oleh transformasi Lorentz.*

**Kata-kunci:** Medan Skalar,  $Q$ -ball, Soliton Nontopologi, Stabilitas, Interaksi.

*"Halaman ini sengaja dikosongkan"*



# MODEL OF Q-BALLS IN (1+1) DIMENSIONAL SPACETIME

Name : KASYFIL ALBAR  
NRP : 0111440000016  
Department : Physics FIA-ITS  
Supervisor : Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

## **Abstract**

*Q-balls are one type of non-topological soliton with a complex scalar field and their stability is maintain by charge conservation,  $Q$ . In this work, we studied Q-balls in (1 + 1) dimensional spacetime. This model can be constructed based on the analogy of model in (3 + 1) dimensional spacetime. In this case, Q-balls be analytically studied. We applied ansatz of solution as hyperbolic cosine function. We obtained the solutions and the features are similar to Q-balls in (3 + 1) dimensional. The results are solution, energy density, charge, and their stability. Furthermore, we also studied interaction of two Q-balls.*

**Keywords:** *Interaction, Non-topological Soliton, Q-ball, Scalar Field, Stability.*

*"Halaman ini sengaja dikosongkan"*

## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur dipanjatkan kehadirat Allah SWT karena telah melimpahkan rahmat, hidayah, petunjuk, kekuatan, dan rejeki, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

### **MODEL Q-BALL DALAM RUANG-WAKTU (1 + 1) DIMENSI**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Fisika FIA ITS.

Dalam penulisan Tugas Akhir ini, dapat terselesaikan dengan baik berkat adanya bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Disampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu atas terselesaikannya Tugas Akhir ini:

1. Seluruh keluarga khususnya kedua orangtua beserta kedua adik, elit dan najla, yang telah memberikan dukungan, bimbingan, doa, nasihat kepada penulis, dan banyak hal lain yang telah diberikan.
2. Bapak Dr.rer.nat.Bintoro Anang Subagyo, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala arahan, bimbingan, dan motivasinya kepada penulis, sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.
3. Ibu Dr. Dra. Melania Suweni Muntini, MT selaku dosen wali penulis yang telah membimbing, membantu, menasihati penulis selama studi.

4. Bapak Agus Purwanto, D.Sc sebagai dosen Fisika Teori ITS, atas bimbingan, nasihat, motivasi, dukungan terhadap penulis agar menjadi fisikawan teoritis.
5. Bapak Heru Sukamto, M.Si selaku dosen Fisika Teori yang telah banyak memberikan bantuan fisik kepada penulis selama kuliah.
6. Ketua Departemen Fisika ITS beserta dosen pengampu mata kuliah yang telah mengajarkan banyak ilmu dan pengalaman kepada penulis selama studi S1.
7. Bapak Ibu karyawan bagian tata usaha khususnya pak Yudi, pak Parno, mbak Ismi, yang telah banyak membantu penulis dalam hal urusan yang harus terkait dengan Departemen.
8. Mr.Dionisio Bazeia yang telah memberikan bentuk solusi eksak medan dan Uzu yang telah memberikan format TA yang sangat membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir.
9. Teman-teman dan dosen Laboratorium Fisika Teori (LaFTiFA), Bayu, Nusur, Doni, Fasya, Dittho, mas Bayu, mbak Rafika, mas afif, mas dwi, mas Fatih, mas Reza, pak Nengah atas canda tawa, diskusi, bantuan, semangat, dan pengalaman.
10. Kepada sahabat dan teman-teman seperjuangan Tugas Akhir khususnya Nusur, Bayu, Adit, mbok de, Herli, Baskoro, Syaiful, dan teman-teman lain yang tidak dapat disebutkan yang telah memberikan semangat, bantuan fisik, dan mau direpotkan untuk membantu penulis mengerjakan tugas akhir.

11. Teman dekat penulis Zarwan dan Uli yang telah banyak memberikan masukan, solusi, semangat, dukungan kepada penulis.
12. Seluruh pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Penulis mengucapkan terima kasih yang sangat dalam atas doa dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan ini masih terdapat kekurangan, sehingga segala kritik dan saran yang sifatnya membangun sangat diharapkan untuk kesempurnaan Tugas Akhir ini. Penulis berharap Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri pada khususnya dan pembaca pada umumnya.

Surabaya, 30 Juli 2018

Penulis

*"Halaman ini sengaja dikosongkan"*

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iv
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR GAMBAR	xv
BAB I    PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan .....	3
1.4 Batasan Masalah .....	3
1.5 Metode Penelitian.....	3
1.6 Sistematika Penulisan .....	3
BAB II   SOLITON DALAM TEORI MEDAN	7
2.1 Persamaan Medan Skalar .....	7
2.2 Teorema Noether .....	9
2.3 Tensor Energi Momentum.....	10
2.4 Teorema Derrick .....	12
2.5 Soliton .....	15
2.6 Soliton Topologi .....	18
2.7 Soliton Nontopologi : Model FLS .....	26

BAB III	MODEL Q-BALL DALAM DIMENSI $(3 + 1)$	35
3.1	Model Q-ball	35
3.2	Q-ball Bersimetri Sferis	37
3.3	Stabilitas Kuantum	43
3.4	Stabilitas Klasik	45
BAB IV	MODEL Q-BALL DALAM DIMENSI $(1 + 1)$	59
4.1	Model Q-ball	59
4.2	Model $n = 1$	64
4.3	Model $n = 2$	69
4.4	Interaksi Q-ball	74
BAB V	PENUTUP	79
5.1	Kesimpulan	81
5.2	Saran	82
DAFTAR PUSTAKA		85
LAMPIRAN A	Model Q-ball dalam Dimensi $(1 + 1)$	87
A.1	Solusi Q-ball	87
A.2	Bentuk Muatan	89
A.2.1	Model $n = 1$	89
A.2.2	Model $n = 2$	91
A.3	Energi	92
A.3.1	Model $n = 1$	92
A.3.2	Model $n = 2$	95
LAMPIRAN B	Tumbukan Dua Q-ball	99
LAMPIRAN C	Perhitungan dengan <i>Mathematica</i>	105
C.1	Solusi Q-ball	105
C.2	Energi dan Muatan	106
C.2.1	Model $n = 1$	106
C.2.2	Model $n = 2$	108
BIODATA PENULIS		111



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Alur penelitian tugas akhir . . . . .	5
Gambar 2.1	(a) potensial $-U$ ketika memiliki satu titik minimum (b) Potensial $U$ memiliki tiga degenerasi minimal diskrit [6] . . . . .	21
Gambar 2.2	Potensial $U$ dengan $\lambda = 1, m = 2$ . . . . .	23
Gambar 2.3	plot skematik solusi statis model kink . . . . .	24
Gambar 2.4	Rapat energi dari kink yang terlokalisasi . . . . .	25
Gambar 2.5	Fungsi $1/2(U - \omega^2\phi^2)$ terhadap $\phi$ untuk $\omega^2 < m^2$ [3] . . . . .	31
Gambar 2.6	$-V$ vs $\phi$ untuk $\omega^2 < m^2$ . . . . .	32
Gambar 2.7	Bentuk solusi soliton [3] . . . . .	32
Gambar 3.1	Bentuk potensial efektif $V(\phi)$ dari Q-ball . . . . .	40
Gambar 3.2	Potensial nonrenormalisasi $U(\phi)$ untuk $\lambda = 1, a = 2, b = 1.1$ . . . . .	43
Gambar 4.1	Bentuk potensial dengan $n = 1$ dan $n = 2$ . . . . .	60
Gambar 4.2	Bentuk solusi $\phi$ untuk $n = 1$ dengan $\omega = 0.447 + 5\epsilon, \epsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ (kiri) dan $\omega^2 = 1, 1.4, 1.7, 2$ (kanan) . . . . .	64
Gambar 4.3	Rapat energi $T_{00}$ untuk $\omega = 0.447 + 5\epsilon, \epsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ (kiri) dan $\omega^2 = 1, 1.4, 1.7, 2$ (kanan) . . . . .	66

Gambar 4.4	Total energi $E$ sebagai fungsi $\omega$ untuk $n = 1$ dengan beberap variasi $\beta$ . . . . .	67
Gambar 4.5	Total muatan $Q$ sebagai fungsi $\omega$ untuk $n = 1$ dengan variasi parameter $\beta$ . . . . .	68
Gambar 4.6	Rasio $E/Q$ sebagai fungsi $\omega$ untuk $n = 1$ dengan tiga variasi parameter $\beta$ . . . . .	69
Gambar 4.7	Bentuk solusi $\phi$ untuk $n = 2$ dengan $\omega = 0.447 + 5\epsilon, \epsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ (kiri) dan $\omega^2 = 1, 1.4, 1.7, 2$ (kanan). . . . .	70
Gambar 4.8	Rapat energi $T_{00}$ untuk $\omega = 0.447 + 5\epsilon, \epsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ (kiri) dan $\omega^2 = 1, 1.4, 1.7, 2$ (kanan) . . . . .	71
Gambar 4.9	Total energi $E$ sebagai fungsi $\omega$ untuk $n = 2$ dengan beberap variasi $\beta$ . . . . .	72
Gambar 4.10	Total muatan $Q$ sebagai fungsi $\omega$ untuk $n = 2$ dengan variasi parameter $\beta$ . . . . .	73
Gambar 4.11	Rasio $E/Q$ sebagai fungsi $\omega$ untuk $n = 2$ dengan tiga variasi parameter $\beta$ . . . . .	74
Gambar 4.12	Tumbukan Q-ball untuk $n = 1$ dengan muatan identik dan $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.8$ pada $0.76s \leq t \leq 5.08s$ . . . . .	77
Gambar 4.13	Tumbukan Q-ball untuk $n = 1$ dengan muatan identik dan $\omega_1 = \omega_2 = 1$ pada $0.76s \leq t \leq 5.08s$ . . . . .	78
B.1	Tumbukan Q-ball untuk $n = 1$ dengan muatan identik dan $\omega_1 = \omega_2 = 1$ pada $0 \leq t \leq 4s$ . . . . .	99
B.2	Tumbukan Q-ball untuk $n = 2$ dengan muatan identik dan $\omega_1 = \omega_2 = 1$ pada $0 \leq t \leq 4s$ . . . . .	100

B.3	Tumbukan Q-ball untuk $n = 1$ dengan muatan identik dan $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.8$ pada $0 \leq t \leq 4s$ . . . . .	100
B.4	Tumbukan Q-ball untuk $n = 2$ dengan muatan identik dan $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.8$ pada $0.76s \leq t \leq 5.08s$ . . . . .	101
B.5	Tumbukan Q-ball untuk $n = 2$ dengan muatan identik dan $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.8$ pada $0.76s \leq t \leq 5.08s$ . . . . .	102
B.6	Tumbukan Q-ball untuk $n = 2$ dengan muatan identik dan $\omega_1 = \omega_2 = 1$ pada $0.76s \leq t \leq 5.08s$ . . . . .	103

*"Halaman ini sengaja dikosongkan"*

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Soliton pertama kali diamati oleh John Scott Russell pada tahun 1834 di kanal Edinburg-Glasgow. Russel mengamati adanya fenomena gundukan air yang bergerak dengan kecepatan konstan tanpa mengalami perubahan bentuk. Fenomena ini telah memberikan banyak terobosan seperti dalam bidang fiber optik, akustik, kosmologi, dan teori medan. [12]. Dalam teori medan klasik, soliton dengan keadaan stabil dapat dibentuk dengan menghadirkan suku nonlinear pada persamaan medan Klein-Gordon. Suku ini mampu melokalisasi solusi dan energi, sehingga soliton bergerak dengan kecepatan tetap dan tidak mengalami peluruhan atau disipasi. Perilaku soliton menyerupai partikel, meskipun partikel bukan solusi persamaan nonlinear, namun soliton tidak dibentuk dari super posisi banyak gelombang. Dalam teori medan, soliton dapat diklasifikasi menjadi dua tipe, yaitu soliton topologi dan soliton nontopologi.

Klasifikasi soliton topologi berdasarkan pada keadaan batas yaitu keadaan titik tak hingga berbeda dengan keadaan vakum. Tipe ini distabilkan oleh bilangan topologi seperti magnet monopole 't Hooft, magnet monopole Polyakov, dan kink. Banyak dari solusi soliton dibentuk pada satu dimensi ruang dikarenakan teorema Derrick yang membatasi solusi statis tidak dapat dibentuk untuk dimensi lebih dari dua. Untuk memperoleh solusi dalam dimensi lebih dari dua, solusi harus bergantung waktu. Pada tahun 1976, Freidberg, Lee, dan Sirlin mencoba mengatasi permasalahan tersebut

dengan memperkenalkan tipe baru dari soliton yang memiliki keadaan batas yaitu keadaan pada titik tak hingga sama dengan keadaan vakum yang disebut soliton nontopologi. Tipe ini distabilkan oleh konservasi muatan. [3].

Pada tahun 1985, Sidney Richard Coleman memperkenalkan kelas baru dari soliton nontopologi dengan istilah Q-ball. Kelas baru ini dibentuk oleh medan skalar dalam simetri sferis dimensi  $(3 + 1)$  yang keberadaannya dibentuk oleh konservasi muatan,  $Q$ , diasosiasi dengan simetri internal yang tidak rusak [4]. Dalam model standar, Q-ball dikaitkan dengan fermion (baryon, lepton) dan dalam model supersimetri, superpartner skalar dari baryon dan lepton dapat dikondensasi dan akan melahirkan Q-ball. Kemungkinan pembentukan Q-ball terjadi selama fase transisi awal alam semesta, dan diprediksi berkontribusi dalam materi gelap pada era sekarang [10].

Fitur-fitur Q-ball pada  $(3 + 1)$  dimensi [4] memiliki karakteristik solusi terlokalisasi. Namun, pada dimensi yang lebih rendah yaitu  $(1 + 1)$  dimensi, Q-ball dapat dikonstruksi dengan metode yang sama halnya dengan  $(3 + 1)$  dimensi beserta stabilitasnya [11]. Selain fiturnya, pada  $(1 + 1)$  dimensi, interaksi antar Q-ball dapat diketahui dengan baik [13]. Sebagai kosenkuensinya, Konstruksi Q-ball dapat dilakukan secara analitik dengan hasil yang sama baiknya dengan metode numerik seperti yang dilakukan pada  $(3 + 1)$  dimensi. Pada tugas akhir ini, akan dikonstruksi model Q-ball dari fitur-fitur seperti solusi, total energi, rapat energi, tumbukan antar Q-ball, dan total muatan secara analitik pada ruang-waktu  $(1 + 1)$  dimensi. Kemudian akan ditentukan kondisi stabil secara klasik dan secara kuantum beserta interaksi antar Q-ball.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini yaitu: Bagaimana mengkonstruksi model Q-ball beserta fitur-fiturnya : solusi, total energi, rapat energi, dan total muatan pada dimensi  $(1 + 1)$ ? Bagaimana kondisi Q-ball agar stabil secara klasik dan secara kuantum? Bagaimana keadaan Q-ball selama interaksi?

## 1.3 Tujuan

Dari rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah

1. Menentukan solusi Q-ball secara analitik
2. Menentukan bentuk rapat energi, total energi, dan total muatan secara analitik
3. Memodelkan evolusi Q-ball selama proses interaksi
4. Menentukan kondisi Q-ball agar stabil secara klasik dan secara kuantum

## 1.4 Batasan Masalah

Permasalahan pada tugas akhir ini hanya dibatasi pada Q-ball dalam ruang waktu  $(1 + 1)$  dimensi dengan metode analitik.

## 1.5 Metode Penelitian

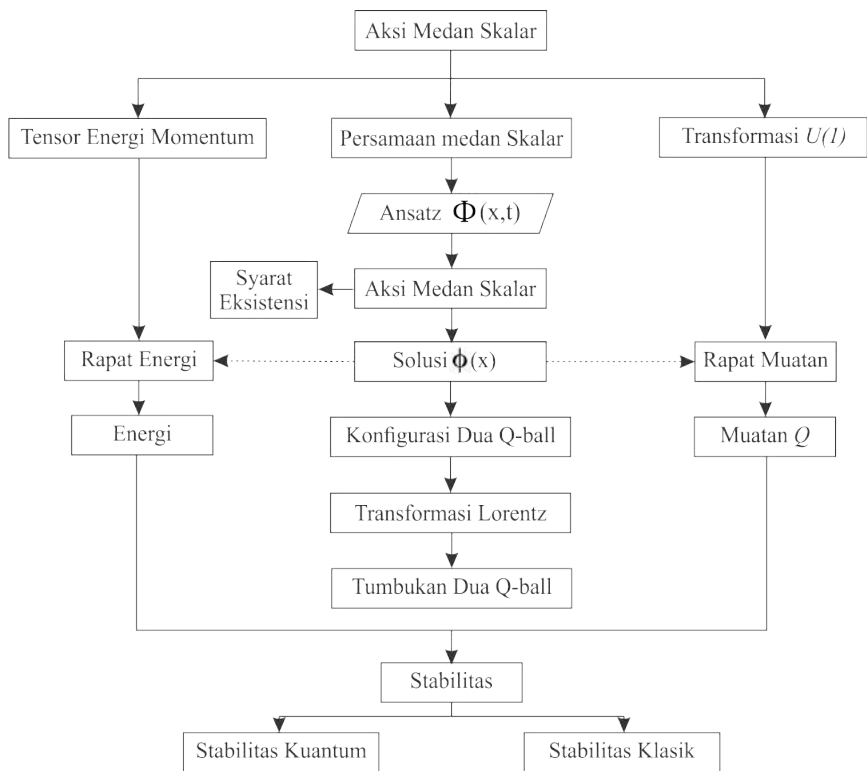
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode analitis dari studi literatur. Adapun skema pengerjaan tugas akhir ini seperti pada Gambar 1.1

## 1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini disusun atas enam bab. Pada bab I akan diuraikan secara singkat motivasi sejarah munculnya Q-ball. Pada bab II akan diuraikan soliton dalam teori medan seperti fitur-fitur soliton, soliton, soliton topologi,

dan soliton nontopologi. Pada bab III akan diturunkan model Q-ball dimensi  $(3 + 1)$  beserta stabilitasnya. Pada V akan diturunkan model Q-ball pada dimensi  $(1 + 1)$ , keadaan selama proses tumbukan antar Q-ball, dan stabilitasnya beserta pemodelannya. Bab V adalah kesimpulan dan saran.





Gambar 1.1: Alur penelitian tugas akhir

*"Halaman ini sengaja dikosongkan"*

## BAB II

### SOLITON DALAM TEORI MEDAN

#### 2.1 Persamaan Medan Skalar

Perubahan dari suatu sistem dinamika terhadap waktu dapat ditentukan dengan Lagrangiannya. Dalam mekanika klasik, sistem partikel dideskripsikan oleh koordinat umum, Lagrangian adalah fungsi differensial terhadap koordinat dan terhadap waktu. Sala satu medan yang paling sederhana adalah medan skalar  $\phi$ , yang merupakan fungsi terhadap koordinat ruang dan waktu  $\phi(\vec{x}, t)$ . Ketika kita mengkonstruksi teori, pergerakan partikel diberikan oleh aksi  $\mathcal{S}$  dalam bentuk rapat Lagrangian  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi^*, \Phi, \partial_\mu \Phi^*, \partial_\mu \Phi). \quad (2.1)$$

Prinsip aksi minimal mensyaratkan bahwa  $\mathcal{S}$  harus stasioner terhadap variasi medan  $\Phi$  dan turunan medannya  $\partial_\mu \Phi$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int d^4x \delta \mathcal{L} \\ &= \int d^4x \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi} \delta \Phi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^*} \delta \Phi^* + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi} \delta \partial_\mu \Phi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi^*} \delta \partial_\mu \Phi^* \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bentuk  $\delta \partial_\mu \Phi$  dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} \delta \partial_\mu \Phi &= \partial_\mu (\Phi + \delta \Phi) - \partial_\mu \Phi \\ &= \partial_\mu \delta \Phi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Substitusi hubungan diatas ke suku tiga dan keempat, persamaan variasi aksi menjadi

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} \delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^*} \delta\Phi^* + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \partial_\mu\delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi^*} \partial_\mu\delta\Phi^* \right). \quad (2.4)$$

Suku ketiga dan keempat merupakan uraian dari bentuk turunan

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi \right) &= \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi \right) + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \partial_\mu\delta\Phi \\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \partial_\mu\delta\Phi &= \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi \right) - \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

dengan mensubstitusi bentuk tersebut ke persamaan variasi aksi, diperoleh

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int d^4x \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} \delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^*} \delta\Phi^* \right) \\ &+ \int d^4x \left( \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi \right) - \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi \right) \right) \\ &+ \int d^4x \left( \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi^*} \delta\Phi^* \right) - \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi^*} \delta\Phi^* \right) \right) \\ &= \int d^4x \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} - \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \right) \right) \delta\Phi \\ &+ \int d^4x \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^*} - \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi^*} \right) \right) \delta\Phi^* \\ &+ \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi^*} \delta\Phi^* \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Prinsip aksi mensyaratkan bahwa aksi harus bernilai stasioner dengan memenuhi  $\delta\mathcal{S} = 0$ . Variasi aksi akan bernilai nol jika ketiga bentuk suku bernilai nol. Untuk suku ketiga

$$\partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi^*} \delta\Phi^* \right) = 0 \quad (2.7)$$

Untuk suku pertama dan suku kedua akan bernilai nol jika  $\delta\Phi$  bernilai nol, artinya  $\delta\mathcal{S}$  akan minimal jika meminimalkan variasi dari medan

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} - \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^*} - \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi^*} \right) = 0 \quad (2.9)$$

kedua persamaan diatas adalah bentuk persamaan Euler-Lagrange dengan persamaan (2.8) merupakan bentuk persamaan Euler-Lagrange untuk medan imajiner dan persamaan (2.9) adalah bentuk persamaan Euler-Lagrange untuk persamaan medan riil. Bentuk eksplisit rapat Lagrangian medan skalar adalah

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi - U(\Phi^*\Phi) \quad (2.10)$$

dimana  $U(\Phi^*\Phi)$  merupakan potensial. Persamaan medan skalar dapat diperoleh dari persamaan Euler-Lagrange dengan mensubstitusi rapat Lagrangian diatas

$$\partial_\mu\partial^\mu\Phi - \frac{\partial U(|\Phi|)}{\partial\Phi} = 0. \quad (2.11)$$

Persamaan medan skalar diatas akan banyak digunakan dalam bahasan selanjutnya.

## 2.2 Teorema Noether

Noether membuktikan dua teorema. Teorema pertama berhubungan dengan simetri global dan menyatakan bahwa simetri global menyebabkan adanya kekekalan muatan. Teorema kedua diaplikasikan pada simetri gauge lokal, yang mengandung fungsi ruang-waktu dan membuktikan bahwa simetri gauge yang mengarahkan ke hubungan pada persamaan medan. Keduan teorema dikenal dengan teorema

Noether. Kombinasi simetri dengan variasi aksi akan mengarahkan pada teorema Noether [7]. Sekarang kita mendiskusikan kembali variasi aksi pada bahasan sebelumnya. Untuk berbagai simetri, variasi  $\delta\Phi$  yang dimiliki memenuhi variasi aksi stasioner, saat nilai medan  $\Phi$  merupakan nilai sembarang. Kembali ke pers.(2.6), jika nilai medan  $\Phi$  memenuhi persamaan Euler-Lagrange, suku pertama dan suku kedua akan bernilai nol sehingga menyisakan bentuk

$$\delta\mathcal{S} = \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi^*} \delta\Phi^* \right) = 0. \quad (2.12)$$

Dari persamaan diatas, didefinisikan rapat arus  $j^\mu$

$$j^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi^*} \delta\Phi^*. \quad (2.13)$$

$\delta\Phi$  dapat didefinisikan sebagai  $\delta\Phi = \delta_s\Phi$ . Subskrip  $s$  menunjukkan simetri dimana aksi invarian.  $\delta_s\Phi$  mendeskripsikan bentuk simetri *infinitesimal* untuk  $\Phi$  sembarang. Rapar arus (2.13) akan konservatif dengan memberikan simetri  $\delta_s\Phi$  dan ini adalah teorema Noether yang pertama. Untuk rapat muatan

$$j^0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\Phi} \delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\Phi^*} \delta\Phi^* \quad (2.14)$$

dan konservatif

$$\partial_0 j^0 = 0 \quad (2.15)$$

dimana  $\partial_0$  merupakan turunan terhadap waktu.

### 2.3 Tensor Energi Momentum

Dalam bahasan teori medan relativistik, tensor energi-momentum dapat didefinisikan sebagai fungsi turunan dari aksi terhadap tensor metrik  $g^{\mu\nu}$  [14]

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.16)$$

Dari aksi  $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (2.17)$$

dimana  $g$  adalah determinan dari tensor metrik, variasinya adalah

$$\delta \mathcal{S} = \int d^4x (\delta \sqrt{-g} \mathcal{L} + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}). \quad (2.18)$$

Persamaan diatas dapat diselesaikan secara terpisah. Untuk bagian pertama ruas kiri [14]

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{-1}{2} \frac{g}{\sqrt{-g}} \delta g. \quad (2.19)$$

Bentuk variasi  $g$  dapat diperoleh dari determinan tensor metrik

$$\begin{aligned} g &= \det g_{\mu\nu} \\ &= g_{\mu\nu} G^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Turunan  $g$  terhadap  $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} &= \frac{\partial (g_{\mu\nu} G^{\mu\nu})}{\partial g_{\mu\nu}} \\ &= G^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Turunan dari  $g$  terhadap koordinat

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x^\rho} &= \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \\ &= G^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \\ &= g g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}. \end{aligned}$$

Sehingga didapat bentuk variasi terhadap determinan tensor metrik

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.21)$$

Dengan Substitusi pers.(2.21) ke pes.(2.19), variasi  $g$  menjadi

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= \frac{-1}{2} \frac{g}{\sqrt{-g}} g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \frac{-1}{2} \sqrt{-g} g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (2.22)$$

Substitusi hasil variasi  $g$  ke pers.(2.18), didapat

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x \left( \frac{-1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \sqrt{-g} \delta\mathcal{L} \right). \quad (2.23)$$

Sehingga bentuk umum tensor energi-momentum (2.16) menjadi

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\frac{-1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \sqrt{-g} \delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{2\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Substitusi densitas Lagrangian (2.10), tensor energi-momentum untuk medan skalar adalah

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi + 2\partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi + g_{\mu\nu} U(|\Phi|)$$

dengan tanda metrik ruang-waktu adalah  $(+, -, -, -)$ . Rapat energi merupakan bagian dari tensor energi-momentum pada  $\mu = \nu = 0$

$$\begin{aligned}T_{00} &= -g_{00} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi + 2\partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi + g_{00} U(|\Phi|) \\ &= -g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi + 2\partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi + U(|\Phi|) \\ &= \partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi + \partial_i \Phi^* \partial_i \Phi + U(|\Phi|) \\ &= \dot{\Phi} + |\nabla\Phi|^2 + U(|\Phi|).\end{aligned}\quad (2.25)$$

## 2.4 Teorema Derrick

Enz membuktikan bahwa persamaan gerak tersebut memiliki solusi stabil yang bebas waktu dengan energi yang



terlokalisasi sekitar titik pada sumbu  $x$ . Kemudian, Enz menginduksi kasus satu dimensi dan mengusulkan bahwa solusi tetap stabil. Namun, Derrick dalam artikelnya [1] menyatakan bahwa solusi bebas waktu tidak stabil pada kasus tiga dimensi. Dalam membuktikan hal tersebut, kita menggunakan teorema virial. Teorema ini sangat berguna dalam menjawab persoalan stabilitas solusi melalui kestabilan energi. Pada kasus ini bentuk energi total digeneralisasi pada dimensi  $D$

$$E = \int d^D x (\dot{\Phi}^2 + |\nabla\Phi|^2 + U(\Phi^2)) \quad (2.26)$$

$$= V_1(\Phi) + V_2(\Phi) + V_3(\Phi). \quad (2.27)$$

Dimana nilai dari  $V_1, V_2, V_3$  adalah

$$\begin{aligned} V_1 &= \int d^D x \dot{\Phi}^2 \\ V_2 &= \int d^D x (\nabla\Phi)^2 \\ V_3 &= \int d^D x U(\Phi^2), \end{aligned} \quad (2.28)$$

dan merupakan fungsi tidak negatif. Sekarang anggap bahwa medan  $\Phi$  adalah solusi statis, sehingga fungsi  $V_1 = 0$ . Dengan menggunakan parameter  $\alpha$ , dilakukan *scaling* koordinat  $x$  dan medan  $\Phi$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \alpha x \\ \Phi_\alpha(x) &= \Phi(\alpha x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

*Scaling* memberikan perubahan pada bentuk energi (2.27) yang bergantung pada parameter  $\alpha$

$$E' = \alpha^{2-D} V_2(\Phi) + \alpha^{-D} V_3(\Phi). \quad (2.30)$$

Ketika nilai  $\Phi$  adalah nilai maksimum dari  $E'$ , nilai ini harus menghasilkan  $E'$  yang stasioner terhadap  $\alpha$

$$\left. \frac{dE'}{d\alpha} \right|_{\alpha=1} = 0. \quad (2.31)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.30), turunan orde dua dari  $E'$  adalah

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\alpha} \alpha^{2-D} V_2(\Phi) + \alpha^{-D} V_3(\Phi) \right|_{\alpha=1} &= 0 \\ (2-D)V_1 - DV_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Karena nilai  $V_2, V_3$  adalah kuantitas tidak negatif, solusi trivial dapat diperoleh jika nilai medan  $\Phi$  bernilai nol, namun solusi ini tidak diharapkan. Solusi yang diharapkan adalah solusi tidak trivial. Hubungan  $V_2$  dan  $V_3$  adalah

$$(2-D)V_1 = DV_2. \quad (2.33)$$

Kondisi untuk solusi menjadi stabil jika turunan orde dua  $\frac{d^2 E'}{d\alpha^2} \geq 0$  untuk nilai  $\alpha = 1$  dan mensubstitusi persamaan diatas, kita memiliki

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E'}{d\alpha^2} &= (2-D)(1-D)V_2 + D(D+1)V_3 \\ &= (2-D)(2V_2), \end{aligned} \quad (2.34)$$

dimana  $D$  merupakan suatu bilangan bulat ( $D = 1, 2, 3, \dots$ ) yang mengekspresikan tingkat dimensi spasial. Pada pembahasan ini hanya membatasi hingga nilai  $D = 3$ . Turunan orde dua energi terhadap parameter  $\alpha$  pada tingkat dimensi  $D$  adalah

$$\frac{d^2 E'}{d\alpha^2} = \begin{cases} 2V_2, & D=1. \\ 0, & D=2. \\ -2V_2 & D=3. \end{cases} \quad (2.35)$$

Pada kasus satu dan dua dimensi, solusi bersifat stabil karena bentuk turunan orde dua lebih besar dari nol. Namun untuk nilai  $D = 3$  solusi tidak stabil. Untuk memperoleh solusi stabil pada dimensi  $D \neq 3$ , Derrick menyatakan bahwa solusi akan stabil jika solusi merupakan fungsi periodik terhadap waktu yang artinya solusi bergantung terhadap waktu ketimbang tidak bergantung waktu karena solusi yang periodik terhadap waktu mampu menglokalisasi energi. Teorema Derrick memberikan batasan untuk solusi persamaan gerak atau persamaan medan pada dimensi lebih dari tiga yang mensyaratkan solusi bergantung waktu.

## 2.5 Soliton

Soliton banyak muncul dalam teori klasik maupun teori medan kuantum, namun apa itu soliton sebenarnya? Soliton mengacu pada solusi persamaan gelombang yang tidak linear. Untuk memahami solusi ini, kita menggunakan persamaan gelombang relativistik yang paling sederhana tanpa ada pengaruh potensial [6]

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi(x, t) = 0 \quad (2.36)$$

dimana  $\Phi(x, t)$  merupakan solusi gelombang dalam dimensi  $1 + 1$ , dan  $c$  adalah kecepatan cahaya. Dengan mensubstitusi bentuk ansatz gelombang planar  $\Phi = \exp i(kx - \omega t)$  ke persamaan gelombang (2.36)

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \exp i(kx - \omega t) \\ &= -\frac{1}{c^2} \omega^2 \exp i(kx - \omega t) + k^2 \exp i(kx - \omega t) \\ &= -\omega^2 + k^2 c^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

diperoleh relasi dispersi  $\omega = kc$ . Karena persamaan gelombang linear, maka solusi merupakan superposisi dari

banyak gelombang

$$\Phi(x, t) = \int dk (a_1(k) \exp i(kx - \omega t) + a_2(k) \exp -i(kx - \omega t)) \quad (2.38)$$

Solusi  $\Phi$  ini merupakan paket gelombang yang memiliki dua sifat yaitu terlokalisasi dengan kecepatan konstan  $c$  tanpa mengalami distorsi dalam ruang dan memiliki bentuk dan kecepatan yang sama setelah mengalami tumbukan dengan gelombang yang lain.

Dalam banyak cabang fisika, persamaan medan dapat lebih kompleks dimana mengandung suku nonlinear, suku dispersi, dan suku gandengan lainnya. Untuk mempelajari hal ini, kita mulai dengan persamaan Klein-Gordon [6]

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 c^2 \right) \Phi(x, t) = 0. \quad (2.39)$$

Solusi pers.(2.39) masih bersifat linear dengan bentuk seperti pada pers.(2.38). Dengan ansatz yang sama  $\Phi = \exp i(kx - \omega t)$ , diperoleh relasi dispersi

$$\omega^2 = k^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Namun nilai ini membuat solusi bersifat dispersi dan tidak mampu mempertahankan bentuknya. Jika paket gelombang tidak mampu memepertahankan bentuknya, maka dapat dipastikan bahwa setelah tumbukan gelombang tersebut mengalami distorsi.

Jika pada pers.(2.36) ditambahkan suku nonlinear [6]

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi(x, t) + \Phi^3(x, t) = 0 \quad (2.40)$$

solusi yang bakal diperoleh merupakan paket gelombang yang menyebar dalam ruang. Meskipun mungkin suatu persamaan

memiliki suku dispersi dan suku nonlinear, namun solusi yang diperoleh akan memiliki bentuk yang tetap dengan kecepatan konstan dan tidak mengalami perubahan bentuk setelah mengalami tumbukan karena efek dari suku dispersi diseimbangkan oleh suku nonlinear. Solusi ini disebut dengan soliton.

Berikutnya didefinisikan bentuk energi dari soliton. Persamaan medan seperti pada pers.(2.36),(2.39),dan (2.40) memiliki bentuk rapat energi  $\epsilon(x, t)$  yang merupakan fungsi dari medan  $\Phi(x, t)$ . Total energi  $E(\Phi)$  merupakan integral dari keseluruhan ruang dan memiliki nilai minimal sama dengan nol. Solusi medan terlokalisasi harus memiliki energi yang terlokalisasi dalam ruang yang artinya bahwa nilai energi berhingga pada titik tertentu dan bernilai nol pada posisi tak hingga. Energi kinetik dari persamaan medan pada pers.(2.40)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}} \right) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\ T &= \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

dan potensial bernilai

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\Phi} &= \Phi^3 \\ V &= \frac{1}{4} \Phi^4. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Energi total

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \Phi^4 \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

akan terlokalisasi jika nilai medan  $\Phi = 0$  untuk  $x \rightarrow \pm\infty$  pada waktu  $t$ . Jika diberikan persamaan medan

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi(x, t) + \Phi^3(x, t) - \Phi(x, t) = 0 \quad (2.44)$$

maka akan memiliki bentuk energi

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} (\Phi^2 - 1)^2 \right). \quad (2.45)$$

Energi ini akan memiliki nilai minimal untuk nilai  $\Phi = \pm 1$  saat  $x \rightarrow \pm\infty$ . Keadaan ini memberikan lokalisasi pada rapat energi. Dari lokalisasi rapat energi ini, maka soliton merupakan solusi yang terlokalisasi dari persamaan medan nonlinear yang memiliki rapat energi terlokalisasi dalam ruang [6]. Soliton diklasifikasi menjadi dua tipe berdasarkan bentuk solusinya yaitu soliton topologi dan soliton nontopologi.

## 2.6 Soliton Topologi

Soliton topologi merupakan solusi soliton dengan kondisi pada titik tak hingga untuk keadaan soliton berbeda dengan keadaan vakum. Model kink merupakan salah satu soliton topologi pada dua dimensi (satu dimensi ruang + satu dimensi waktu). Kink dibangun oleh medan skalar dengan bentuk rapat Lagrangian [6]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - U. \quad (2.46)$$

Jika rapat Lagrangian diaplikasikan pada aksi, variasi aksi memberikan persamaan medan sebagai berikut

$$\ddot{\Phi} - \Phi'' = -\frac{\partial U}{\partial \Phi} \quad (2.47)$$

dan energi total

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx T_{00} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + \Phi'^2 + U \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Bentuk potensial  $U$  memberikan bentuk nonlinear pada persamaan medan (2.47). Minimum absolut potensial  $U$  terjadi pada banyak titik  $M, M \geq 1$  [6]

$$U \equiv U(\Phi) = 0 \quad ; \quad \Phi = g^i \quad (i = 1, \dots, M) \quad (2.49)$$

yang kemudian membuat total energi (2.48) menjadi minimum saat nilai medan  $\Phi$  bernilai konstan terhadap ruang ataupun waktu jika dan hanya jika

$$\Phi(x, t) = g^i \quad (2.50)$$

dan pada titik ini potensial  $U$  bernilai nol, sehingga mengakibatkan

$$E(\Phi) = 0. \quad (2.51)$$

Adanya teorema Derrick yang membatasi solusi statis, maka pada kasus  $(1 + 1)$  dimensi, solusi dapat bebas waktu. Sehingga pers.(2.47) dapat direduksi menjadi

$$\Phi'' = \frac{\partial U}{\partial \Phi}. \quad (2.52)$$

Disisi lain, solusi dapat dikategorikan sebagai soliton jika memiliki energi yang berhingga, rapat energi terlokalisasi, solusi terlokalisasi dengan kecepatan konstan. Dari pers.(2.49), menginformasikan bahwa nilai medan pada  $x \rightarrow \pm\infty$  mendekati salah satu nilai  $\Phi \rightarrow g^i$ . Jika potensial memiliki beberapa degenerasi minimal seperti pada

pers.(2.49), maka  $\Phi$  harus memiliki satu dari  $g^i$  pada titik  $x \rightarrow -\infty$  dan  $g^i$  pada  $x \rightarrow \infty$ .

Persamaan (2.52) memiliki analogi seperti pergerakan partikel dalam mekanika, dimana variabel  $\Phi$  dianalogikan sebagai 'koordinat' dan  $x$  sebagai 'waktu'. Solusi  $\Phi$  analog dengan pergerakan partikel dengan energi

$$W = \frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^2 - U(\Phi). \quad (2.53)$$

Pada kondisi batas  $x \rightarrow \pm\infty, U \rightarrow 0, (\partial\phi/\partial x) = 0$ , energi partikel  $W = 0$ . Untuk solusi statis, nilai energi sistem  $E$  diberikan

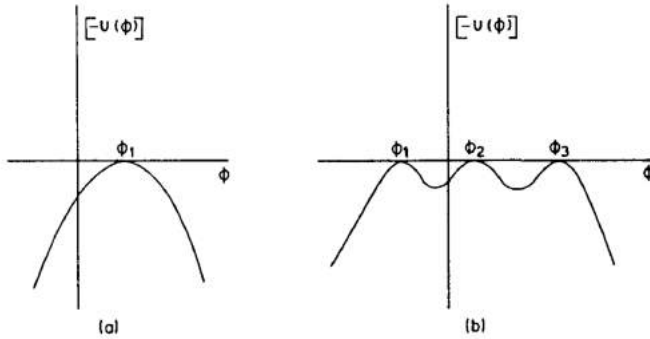
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^2 + U(\Phi) \right] \quad (2.54)$$

dan ini analog dengan total 'aksi' pergerakan partikel. Dengan mengalikan pers.(2.52) dengan  $\Phi'$  dan mengintegrasikan terhadap koordinat  $x$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \int dx \left( \frac{d\Phi}{dx} \right) \left( \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right) &= \int dx \frac{dU(\Phi)}{d\Phi} \left( \frac{d\Phi}{dx} \right) \\ \int d\Phi \left( \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right) &= \int d\Phi \frac{dU(\Phi)}{d\Phi} \\ \frac{1}{2}(\Phi')^2 &= U. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Gambar 2.1 memberikan gambaran kepada kita pergerakan partikel yang memenuhi analogi pers.(2.52) dalam pengaruh potensial  $-U$ . Pada gambar (a) potensial  $U$  hanya memiliki satu titik minimum  $U = 0$  pada  $\Phi_1$ . Partikel mulai bergerak dari 'posisi'  $\Phi_1$  setelah 'waktu'  $x \rightarrow -\infty$  dengan 'kecepatan'  $d\Phi/dx$  ke arah sembarang, maka pada 'waktu'  $x \rightarrow \infty$  partikel tidak pernah kembali ke titik  $\Phi_1$  karena





Gambar 2.1: (a) potensial  $-U$  ketika memiliki satu titik minimum (b) Potensial  $U$  memiliki tiga degenerasi minimal diskrit [6]

energi kinetik dan total energi yang terus bertambah. Hal ini mengakibatkan tidak ada solusi statis non-trivial. Dapat disimpulkan solusi statis tidak terjadi pada potensial yang memiliki satu titik minimum.

Selanjutnya, misalkan  $U$  memiliki dua atau lebih degenerasi minimal yaitu  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  seperti pada Gambar 2.1 (b). Kondisi batas menyatakan bahwa partikel harus meninggalkan satu titik minimal pada  $x \rightarrow -\infty$  dan menuju titik minimal lainnya pada  $x \rightarrow \infty$ . Misalkan partikel mulai bergerak dari puncak  $\Phi_1$  pada  $x \rightarrow -\infty$ , kemudian bergerak menuju puncak  $\Phi_2$  pada  $x \rightarrow \infty$ , atau dari  $\Phi_2$  menuju  $\Phi_3$  atau partikel dapat bergerak dari arah sebaliknya. Sehingga ada empat kemungkinan solusi non-trivial. Namun Hal ini tidak diperbolehkan. Untuk mengatasi ini, misalkan partikel meninggalkan  $\Phi_1$  kemudian bergerak menuju  $\Phi_2$  dan kemudian kembali ke  $\Phi_1$  atau menuju titik  $\Phi_3$ . Pada titik  $\Phi_2$  nilai  $U$  dan  $dU/d\Phi$  bernilai nol. Konsekuensinya, dari pers.(2.52 dan pers.(2.55), nilai 'kecepatan' dan 'percepatan'

bernilai nol

$$\begin{aligned}\Phi' &= 0 \\ \Phi'' &= 0.\end{aligned}\tag{2.56}$$

Dapat disimpulkan bahwa partikel bergerak dari  $\Phi_1$  dan hampir mencapai titik  $\Phi_2$  pada  $x \rightarrow \infty$  dan tidak kembali ataupun menuju titik  $\Phi_3$  karena 'kecepatan' dan 'percepatan' bernilai nol sehingga energi total berhingga. Jadi, solusi statis tidak dapat terjadi pada potensial yang memiliki satu minimum absolut tetapi dapat terjadi ketika  $U$  memiliki  $n$  degenerasi minimal diskrit, sehingga memiliki  $2(n - 1)$  tipe solusi non-trivial yang menghubungkan dua titik minimal, pada  $x$  dari  $-\infty$  ke  $+\infty$  [6].

Bentuk potensial  $U$  harus memiliki dua titik minimum absolut,  $U = 0$ , salah satu model paling sederhana adalah model  $\Phi^4$  seperti pada Gambar 2.2 [8]

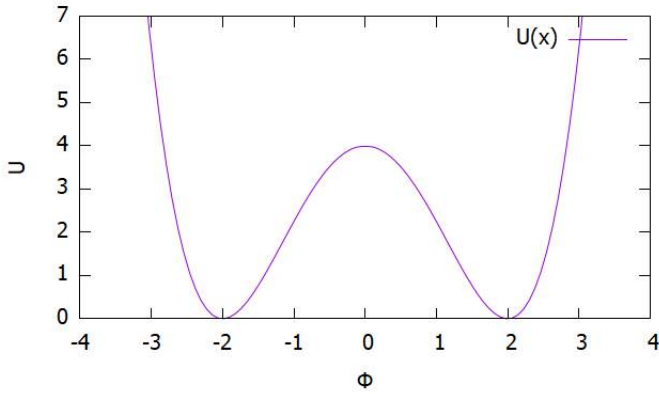
$$U(\Phi) = \frac{\lambda}{4} \left( \Phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2.\tag{2.57}$$

Dengan mensubstitusi bentuk  $U$  ke pers.(2.52), maka persamaan medan menjadi

$$\Phi'' = \lambda\Phi^3 - m^2\Phi.\tag{2.58}$$

Potensial  $U$  lenyap pada titik  $\Phi = \pm m/\sqrt{\lambda}$ . Konsekuensinya adalah lokalisasi solusi terjadi pada  $\pm m/\sqrt{\lambda}$  saat  $x \rightarrow \pm\infty$ . Solusi statis yang akan diperoleh terdiri dari 2 tipe. Solusi yang memulai pergerakannya dari  $\Phi = -m/\sqrt{\lambda}$  pada  $x \rightarrow -\infty$  dan berakhir dengan  $\Phi = m/\sqrt{\lambda}$  pada  $x \rightarrow \infty$ , dan sebaliknya. Untuk memperoleh solusi eksplisit, kita perlu mengintegrasikan pers.(2.55)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\Phi')^2 &= \frac{\lambda}{4} \left( \Phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \\ \frac{d\Phi}{dx} &= \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2} \left( \Phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2}\end{aligned}$$



Gambar 2.2: Potensial  $U$  dengan  $\lambda = 1, m = 2$

pemisahan variabel memberikan,

$$\int_{x_0}^x dx = \pm \int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{d\bar{\Phi}}{\sqrt{\frac{\lambda}{2} \left( \bar{\Phi}^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2}}$$

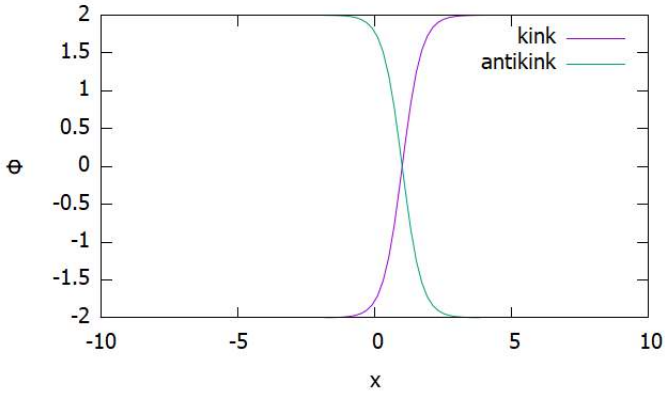
$$x - x_0 = \pm \int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{d\bar{\Phi}}{\sqrt{\frac{\lambda}{2} \left( \bar{\Phi}^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2}} \quad (2.59)$$

dengan pemilihan  $\Phi_0 = 0$ , integrasi persamaan diatas diperoleh solusi

$$x - x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{m} \tanh^{-1} \left( \Phi(x) \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \right)$$

yang memberikan solusi bagi medan

$$\Phi(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[ \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]. \quad (2.60)$$



Gambar 2.3: plot skematik solusi statis model kink

Solusi memberikan tanda plus disebut 'kink' dan solusi tanda minus disebut 'antikink' seperti pada Gambar 2.3 [8].

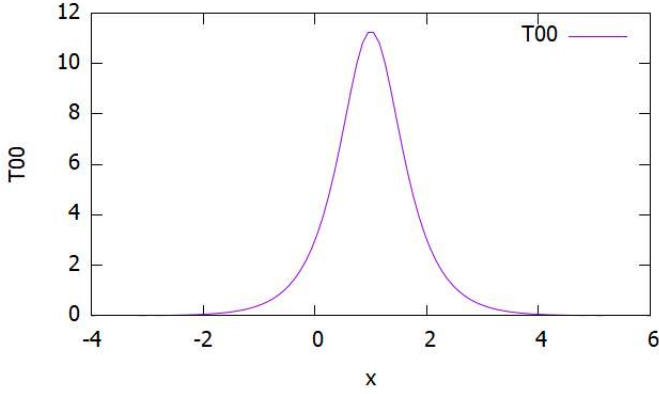
Ini jelas bahwa solusi kink tidak mengalami lokalisasi terhadap ruang sehingga kink bukanlah soliton. Rapat energi harus terlokalisasi,

$$T_{00} = \frac{1}{2}\Phi'^2 + \frac{\lambda}{4} \left( \Phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2$$

turunan  $\Phi$  terhadap  $x$

$$\Phi' = \frac{m}{\sqrt{2\lambda}} \frac{1}{\cosh\left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)\right]}$$

$$\frac{1}{2}\Phi'^2 = \frac{m^2}{4\lambda} \frac{1}{\cosh^4\left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)\right]}$$



Gambar 2.4: Rapat energi dari kink yang terlokalisasi

sehingga rapat energi

$$\begin{aligned}
 T_{00} &= \frac{m^2}{4\lambda} \frac{1}{\cosh^4 \left[ \frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right]} \\
 &+ \frac{\lambda}{4} \left( \left( \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[ \frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] \right)^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \\
 &= \frac{m^4}{2\lambda} \frac{1}{\cosh^4 \left[ \frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right]} \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

dan jika diplot seperti pada Gambar 2.4 yang terlokalisasi pada titik  $x_0$ . Energi total kink disebut juga massa kink diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 M \equiv E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx T_{00} \\
 &= \frac{m^4}{2\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^4 \left[ \frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right]} \\
 &= \frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda} \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

dan bernilai berhingga. Walaupun rapat energi terlokalisasi dan energi total berhingga, kink bukan termasuk kategori soliton [8].

## 2.7 Soliton Nontopologi : Model FLS

Dalam artikel T.D.Lee dan Y.Pang [3] Soliton nontopologi dapat didefinisikan sebagai solusi soliton yang kondisi batasnya pada tak hingga sama dengan keadaan vakumnya. Salah satu sistem paling sederhana dari solus soliton nontopologi adalah medan skalar kompleks dalam ruang satu dimensi ruang-waktu. Untuk ruang datar, tensor metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Persyaratan dalam penambahan hukum konservatif dapat dilakukan dengan menambahkan invariansi transformasi gauge global

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi \exp(-i\alpha). \quad (2.64)$$

Rapat Lagrangian diasumsikan sebagai

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - U(\Phi^\dagger \Phi) \quad (2.65)$$

dimana  $\Phi^\dagger$  adalah hermitian konjugate  $\Phi$ . Lagrangian invarian dibawah transformasi gauge global (2.64)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \partial_\mu \Phi'^\dagger \partial^\mu \Phi' - U(\Phi'^\dagger \Phi') \\ &= \partial_\mu \Phi^\dagger \exp(i\alpha) \partial^\mu \Phi \exp(-i\alpha) \\ &\quad - U(\Phi^\dagger \exp(i\alpha) \Phi \exp(-i\alpha)) \\ &= \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - U(\Phi^\dagger \Phi) \\ &= \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Persamaan medan didapat dengan cara mengaplikasikan rapat Lagrangian pada pers Euler-Lagrange, sehingga diperoleh

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + \Phi \frac{\partial U(\Phi^\dagger \Phi)}{\partial(\Phi^\dagger \Phi)} = 0. \quad (2.67)$$

atau

$$\ddot{\Phi} - \Phi'' + \Phi \frac{\partial U(\Phi^\dagger \Phi)}{\partial(\Phi^\dagger \Phi)} = 0 \quad (2.68)$$

Arus  $j^\mu$  untuk medan skalar kompleks didefinisikan sebagai

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^\dagger)} \delta \Phi^\dagger.$$

Substitusi rapat Lagrangian, rapat arus menjadi

$$j^\mu = \partial^\mu \Phi^\dagger \delta \Phi + \partial^\mu \Phi \delta \Phi^\dagger. \quad (2.69)$$

Karena simetri terhadap transformasi gauge global (2.64), maka nilai  $\delta \Phi = i\Phi$ . Sehingga bentuk arus

$$j^\mu = -i(\Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - \partial^\mu \Phi^\dagger \Phi). \quad (2.70)$$

Densitas partikel  $j^0$  dan jumlah partikel sebagai integra keseluruhan ruang

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{\infty} dx j^0 \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx i(\Phi^\dagger \partial^0 \Phi - \partial^0 \Phi^\dagger \Phi) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Berdasarkan teorema Noether, invarian terhadap simetri gauge global memberikan kekekalan jumlah partikel  $N$

$$\dot{N} = 0 \quad (2.72)$$

Fungsi potensial  $U(\Phi^\dagger \Phi)$  diasumsikan memiliki satu titik minimum absolut pada  $\Phi = 0$ . Kita asumsikan bahwa potensial  $U$  memiliki pangkat dua, untuk  $\phi \rightarrow 0$  [3] yang berbentuk

$$U \rightarrow m^2 \Phi^\dagger \Phi \quad (2.73)$$

dengan parameter massa  $m > 0$ . Dari pers.(2.71)dan (2.72) memberikan persyaratan bahwa untuk  $N \neq 0$ ,  $\Phi$  harus bergantung waktu

$$\Phi \propto \exp(-i\omega t) \quad (2.74)$$

Untuk membuktikan ini, medan dapat ditulis

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_R + i\Phi_I) \quad (2.75)$$

dimana  $\Phi_R$  dan  $\Phi_I$  adalah riil. Dengan mensubstitusikan persamaan diatas ke  $N$  (2.71)

$$\begin{aligned} N &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \ i \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_R + i\Phi_I) \right)^\dagger \partial^0 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_R + i\Phi_I) \right) \right. \\ &\quad \left. - \partial^0 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_R + i\Phi_I) \right)^\dagger \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_R + i\Phi_I) \right) \right) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \frac{i}{2} \left( (\Phi_R - i\Phi_I)(\dot{\Phi}_R + i\dot{\Phi}_I) \right. \\ &\quad \left. - (\dot{\Phi}_R - i\dot{\Phi}_I)(\Phi_R + i\Phi_I) \right) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \frac{i}{2} \left( \Phi_R \dot{\Phi}_R + i\Phi_R \dot{\Phi}_I - i\Phi_I \dot{\Phi}_R + \Phi_I \dot{\Phi}_I \right. \\ &\quad \left. - \dot{\Phi}_R \Phi_R - i\Phi_I \dot{\Phi}_R + i\dot{\Phi}_I \Phi_R - \dot{\Phi}_I \Phi_I \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \ (\Phi_I \dot{\Phi}_R - \Phi_R \dot{\Phi}_I). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Energi sistem adalah

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \left( \dot{\Phi}^\dagger \dot{\Phi} + \frac{d\Phi^\dagger}{dx} \frac{d\Phi}{dx} + U(\Phi^\dagger \Phi) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \frac{1}{2} \left( \dot{\Phi}_R^2 + \dot{\Phi}_I^2 + \left( \frac{d\Phi_R}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Phi_I}{dx} \right)^2 \right) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx \ U \left( \frac{1}{2}(\Phi_R^2 + \Phi_I^2) \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Pada waktu  $t$ , diasumsikan bahwa nilai  $N$  tetap, kita dapat menentukan nilai  $\Phi_R$  dan  $\Phi_I$  yang membuat nilai  $E$  minimal



dengan penggali Lagrange  $\omega$  [3]

$$\begin{aligned}
 E_N &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \left( \dot{\Phi}_R^2 + \dot{\Phi}_I^2 + \left( \frac{d\Phi_R}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Phi_I}{dx} \right)^2 \right) \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx U \left( \frac{1}{2} (\Phi_R^2 + \Phi_I^2) \right) \\
 &+ \omega \left( N - \int_{-\infty}^{\infty} dx (\Phi_I \dot{\Phi}_R - \Phi_R \dot{\Phi}_I) \right) \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

solusi energi minimum dapat ditentukan melalui variasi  $E_N$  terhadap variasi  $\dot{\Phi}$

$$\frac{\delta E_N}{\delta \dot{\Phi}}.$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{\delta E_N}{\delta \dot{\Phi}_R} = 0 = \dot{\Phi}_R - \omega \Phi_I \quad (2.79)$$

$$\frac{\delta E_N}{\delta \dot{\Phi}_I} = 0 = \dot{\Phi}_I + \omega \Phi_R. \quad (2.80)$$

Solusi ini mengarahkan pada bentuk medan

$$\dot{\Phi}_R = \omega \Phi_I \quad \dot{\Phi}_I = -\omega \Phi_R \quad (2.81)$$

dan diperoleh bahwa

$$\Phi = \phi \exp(-i\omega t) \quad (2.82)$$

dimana  $\phi$  bernilai riil dan  $\omega$  adalah frekuensi yang bernilai konstan.

Dalam bentuk  $\phi$ , persamaan gerak (2.68) menjadi

$$-\omega^2 \phi - \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \phi \frac{dU(\phi^2)}{d\phi^2} = 0. \quad (2.83)$$

Persamaan diatas dikalikan dengan  $d\phi/dx$  dan diintegrasikan terhadap  $dx$ , diperoleh bentuk

$$\begin{aligned}
 \int 0dx &= \int dx \left( \left( \frac{d\phi}{dx} \right) \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} \right) + \omega^2\phi \left( \frac{d\phi}{dx} \right) - \phi \frac{dU(\phi^2)}{d\phi^2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right) \right) \\
 \epsilon &= \int d\phi \left( \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} \right) + \omega^2\phi \right) - \int \frac{1}{2} dU(\phi^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \phi^2 - \frac{1}{2} U \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi)
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

dimana  $V(\phi)$  merupakan potensial efektif sistem dan  $\epsilon$  merupakan konstanta integrasi yang menunjukkan energi. Bentuk  $V(\phi)$  adalah

$$V(\phi) = \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}\omega^2\phi^2. \tag{2.85}$$

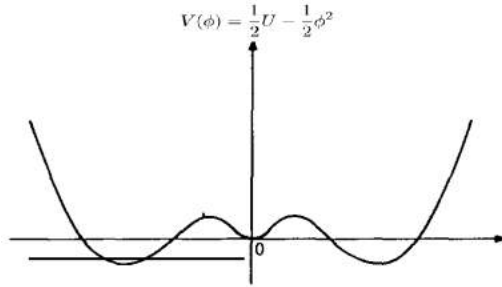
Berdasarkan bentuk potensial  $U$  (2.73), untuk memiliki soliton nontopologi, fungsi  $V$  yang didefinisikan sebelumnya (2.85) harus memiliki bentuk seperti Gambar 2.5. Secara spesifik, kondisi (2.85)

$$V(\phi) = \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}\omega^2\phi^2 = 0. \tag{2.86}$$

Memiliki solusi  $\phi \neq 0$  untuk  $\omega^2$  kurang dari  $m^2$ . Kondisi ini dapat terpenuhi minimal jika minimum global memiliki nilai nol yaitu pada kondisi  $\phi = \pm\phi_0$  dengan nilai  $\omega^2 = \nu^2$ . sehingga diperoleh interval  $\omega$

$$\nu^2 \leq \omega^2 < m^2. \tag{2.87}$$

Dalam usaha memperoleh solusi soliton pada satu dimensi ruang, sistem diatas dapat dianalogikan seperti pergerakan

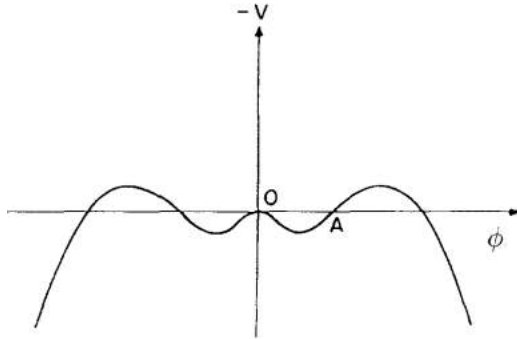


Gambar 2.5: Fungsi  $1/2(U - \omega^2 \phi^2)$  terhadap  $\phi$  untuk  $\omega^2 < m^2$  [3]

partikel pada mekanika dengan potensial  $-V$ . Medan  $\phi$  dianggap sebagai 'posisi' dan  $x$  sebagai 'waktu', seperti yang ditunjukkan Gambar 2.6 Persamaan (2.84) dapat dianalogikan sebagai hukum kekekalan dalam analogi mekanika. Pada 'waktu'  $x = -\infty$ , partikel pada 'posisi'  $\phi = 0$ . Dengan adanya gangguan, partikel bergerak menuju ke titik  $A$  dan kembali ke titik  $0$  pada 'waktu'  $x = \infty$ . Karena kembali ke titik dengan potensial  $-V$  yang sama, maka energi partikel bernilai nol

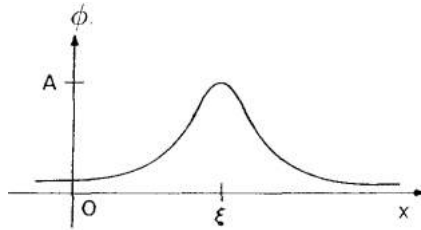
$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi) \\
 \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 &= V(\phi) \\
 \int_{\xi}^x dx &= \int_A^{\phi} \frac{d\bar{\phi}}{\sqrt{2V(\bar{\phi})}} \\
 x - \xi &= \int_A^{\phi} \frac{d\bar{\phi}}{\sqrt{2V(\bar{\phi})}} \quad (2.88)
 \end{aligned}$$

dimana  $\xi$  dapat didefinisikan sebagai 'waktu' awal ketika partikel memulai pergerakannya. Bentuk skema solusi seperti



Gambar 2.6:  $-V$  vs  $\phi$  untuk  $\omega^2 < m^2$ .

pada Gambar 2.7. Ketika  $x = \xi$ , nilai  $\phi = A$  dan pada kedua



Gambar 2.7: Bentuk solusi soliton [3]

titik tak hingga,  $x \rightarrow -\infty$  atau  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\phi$  memenuhi kondisi yang sama

$$\phi \rightarrow 0 \quad (2.89)$$

Jadi, ini merepresentasikan solusi soliton nontopologi [3]

Saat  $\phi \rightarrow 0$ , potensial efektif  $V$  menjadi

$$V \rightarrow \frac{1}{2}(m^2 - \omega^2)\phi^2 \quad (2.90)$$

yang mana,  $\omega^2 < m^2$ , membuat  $V$  cekung keatas pada titik  $\phi = 0$ . Ketika  $|x|$  sangat besar, maka nilai  $\phi$  menjadi kecil.

sehingga persamaan (2.88) menjadi

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int_A^\phi \frac{d\bar{\phi}}{\sqrt{(m^2 - \omega^2)\bar{\phi}^2}} \\ \phi &\sim \exp(-\sqrt{(m^2 - \omega^2)}|x|) \end{aligned} \quad (2.91)$$

dapat dilihat bahwa fungsi  $\phi$  meluruh secara eksponensial.

*"Halaman ini sengaja dikosongkan"*

## BAB III

### MODEL Q-BALL DALAM DIMENSI $(3 + 1)$

Pada bab ini akan dijelaskan kelompok baru dari soliton yang dibangun dari teori medan dalam dimensi  $(3 + 1)$  dengan simetri global yang disebut Q-ball. Q-ball merupakan bentuk solusi dari soliton nontopologi yang terlokalisasi dalam ruang-waktu datar yang berenergi hingga, memiliki potensial interaksi diri, invarian terhadap simetri global  $U(1)$ , dan stabilitasnya diberikan oleh konservasi muatan. Q-ball dalam simetri sferis hanya ada pada interval frekuensi tertentu yang akan dibahas pada bab ini.

#### 3.1 Model Q-ball

Q-ball dijelaskan pertama kali oleh Coleman [4] dimana model ini dibangun dari medan skalar kompleks yang kuantitas fisiknya didefinisikan oleh rapat Lagrangian,  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - U \quad (3.1)$$

dimana  $U \equiv U(|\Phi|^2)$  merupakan potensial yang terdiri dari suku potensial massa dan suku potensial interaksi diri. Nilai potensial  $U$  diasumsikan memiliki minimum absolut pada  $\Phi = 0$ , dimana  $U(0) = 0$ . Ketika  $U \rightarrow \infty$  untuk  $\Phi \rightarrow \infty$  dan memiliki minimum lokal pada  $\Phi_0$  dimana  $\Phi_0 \neq 0$ . Simetri global  $U(1)$  memberikan transformasi medan  $\Phi(x, t)$

$$\Phi \rightarrow \Phi e^{i\alpha} \quad (3.2)$$

$$\Phi^* \rightarrow \Phi^* e^{-i\alpha}. \quad (3.3)$$

dimana  $\alpha$  merupakan suatu konstanta sembarang. Transformasi medan oleh simetri global  $U(1)$  [4] diatas

memberikan transformasi rapat Lagrangian (3.1)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \partial_\mu \Phi^* e^{-i\alpha} \partial^\mu \Phi e^{i\alpha} \Phi - U(\Phi e^{i\alpha} \Phi^* e^{-i\alpha}) \\ &= \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - U(\Phi^* \Phi).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Transformasi simetri global  $U(1)$  terhadap rapat Lagrangian diatas tidak memberikan perubahan kuantitas fisis

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}, \quad (3.5)$$

artinya rapat Lagrangian medan skalar invarian terhadap simetri global  $U(1)$ . Invarian terhadap simetri global  $U(1)$  memberikan konservasi rapat muatan

$$\partial_0 j^0 = 0 \quad (3.6)$$

dengan rapat arus muatan  $j^0$  adalah

$$j^0 = -i(\partial^0 \Phi \Phi^* - \partial^0 \Phi^* \Phi) \quad (3.7)$$

Total pada Q-ball dapat diperoleh dengan metode mengintegrralkan kuantitas rapat muatan  $j^0$  terhadap keseluruhan ruang

$$\begin{aligned}Q &= \int d^3x j^0 \\ &= -i \int d^3x (\partial^0 \Phi \Phi^* - \Phi \partial^0 \Phi^*)\end{aligned}\quad (3.8)$$

Energi Q-ball merupakan integrasi kuantitas rapat energi  $T_{00}$  yang memiliki bentuk

$$T_{00} = -g_{00}g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi + 2\partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi + g_{00}U(|\Phi|^2)$$

terhadap keseluruhan ruang Q-ball. Dengan  $\partial_0$  merupakan turunan terhadap waktu dan  $\partial_i$  turunan terhadap  $\vec{r}$ , rapat energi menjadi

$$T_{00} = |\dot{\Phi}|^2 + |\nabla\Phi|^2 + U(|\Phi|^2). \quad (3.9)$$



Total energi  $E$  adalah

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x T_{00} \\ &= \int d^3x (\dot{\Phi}^2 + (\nabla\Phi)^2 + U(\Phi^2)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Persamaan medan dengan potensial  $U(|\Phi|^2)$  dapat diperoleh dari persamaan Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi - \frac{\partial U}{\partial \Phi^*} = 0. \quad (3.11)$$

Substitusi rapat Lagrangian 3.1, diperoleh persamaan medan

$$\ddot{\Phi} + \nabla^2 \Phi - \frac{\partial U}{\partial \Phi^*} = 0. \quad (3.12)$$

### 3.2 Q-ball Bersimetri Sferis

Derrick memberikan batasan solusi statis bagi persamaan medan untuk sistem partikel dalam dimensi ruang lebih dari dua. Bagi sistem dalam dimensi  $(3 + 1)$  harus bergantung waktu. Oleh karena itu, ansatz yang diterapkan pada sistem ini harus memiliki bentuk [4]

$$\Phi(r, t) = \phi(r)e^{-i\omega t} \quad (3.13)$$

dimana  $\phi(r)$  adalah fungsi yang meluruh secara monoton terhadap jarak  $r$  dari titik pusat  $\omega$  adalah konstanta. Kajian bab ini,  $\phi$  hanya bergantung pada nilai  $r$  saja atau Q-ball dianggap diam.

Setelah memperoleh model Q-ball dari subab sebelumnya, maka selanjutnya adalah membentuk Q-ball. Model yang akan dibentuk memiliki simetri sferis dengan bentuk matrik tensor  $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

dengan nilai determinan tensor matriks  $g$

$$g = -r^4 \sin^2(\theta). \quad (3.15)$$

Dari bentuk ansatz (A.2) dan tensor metrik (3.14), total energi Q-ball pada persamaan (3.10) menjadi

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x (\omega^2 \phi^2(r) + (\nabla\phi)^2 + U(\phi^2)) \\ &= \int 4\pi r^2 dr (\omega^2 \phi^2(r) + (\nabla\phi)^2 + U(\phi^2)), \end{aligned}$$

karena menganggap Q-ball diam dan hanya bergantung pada fungsi  $r$  saja, maka energi total menjadi

$$E = \int 4\pi r^2 dr (\omega^2 \phi^2(r) + \phi'(r)^2 + U(\phi^2(r))), \quad (3.16)$$

dimana tanda aksen " ' " menunjukkan turunan terhadap  $r$ . Total muatan Q

$$\begin{aligned} Q &= -i \int d^3x (i\omega\phi e^{i\omega t} \phi e^{-i\omega t} - \phi e^{i\omega t} (-i\omega\phi e^{i\omega t})) \\ &= \int d^3x 2\omega\phi^2 \\ &= 8\pi \int r^2 dr \omega\phi^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Persamaan medan pada persamaan (3.11) menjadi

$$0 = \phi'' + \frac{2}{r}\phi' - \frac{\partial U(\phi(r))}{\partial\phi} + \omega^2\phi. \quad (3.18)$$

Persamaan diatas adalah bentuk persamaan gerak partikel dalam potensial  $U$ . Integrasi persamaan medan (3.18) terhadap medan  $\phi$  memiliki bentuk yang ekivalen yaitu

$$\begin{aligned} \int d\phi 0 &= \int d\phi \left( \phi'' + \frac{2}{r}\phi' - \frac{\partial U(\phi(r))}{\partial\phi} + \omega^2\phi \right) \\ \epsilon &= \frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\omega^2\phi^2 - U + 2 \int_0^r \frac{dr}{r} \phi'^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

dimana  $\varepsilon$  adalah konstanta integrasi yang bermakna sebagai total energi efektif. Persamaan ini secara efektif menjelaskan pergerakan partikel yang dipengaruhi oleh gaya gesek dalam potensial efektif satu dimensi  $V(\phi)$ .

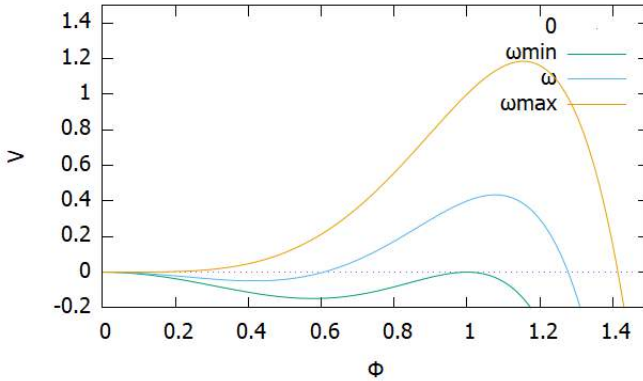
$$V(\phi) = \frac{1}{2}\omega^2\phi^2 - U(\phi). \quad (3.20)$$

Setelah memperoleh bentuk potensial efektif, maka bentuk persamaan gerak dapat direnovasi menjadi

$$0 = \phi'' + \frac{2}{r}\phi' + \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (3.21)$$

Q-ball akan terbentuk jika bentuk potensial efektif sistem seperti pada Gambar 3.1.

Kita analogikan sistem seperti kasus pada mekanika Newton, dimana  $\phi$  adalah 'posisi' dan  $r$  adalah 'waktu' dari 'partikel'. Pada 'waktu'  $r = 0$  'partikel' berada pada posisi  $\phi_0$  dan kecepatan nol,  $\phi'(0) = 0$ . 'Partikel' dapat memulai pergerakannya dari titik sembarang pada potensial  $V(\phi)$  (Gambar 3.1). kemudian bergerak melalui potensial, akibat adanya disipasi oleh gesekan yang diberikan oleh suku kedua persamaan (3.18), energi total mengalami penurunan sepanjang lintasannya. Untuk memperoleh solusi soliton, pada  $r \rightarrow \infty$ , partikel harus berhenti di maksimum lokal potensial  $V(\phi = 0)$  dan total energi efektif adalah nol. Jika potensial titik awal  $V(\phi_0) < 0$ , maka partikel tidak akan mencapai titik  $\phi = 0$  dan energi efektif akan selalu negatif dan hal itu tidak diperbolehkan berhenti pada konfigurasi energi dengan energi kurang dari nol. Situasi ini disebut *undershooting*. Untuk menghindari ini, maka potensial  $V$



Gambar 3.1: Bentuk potensial efektif  $V(\phi)$  dari Q-ball

harus

$$\begin{aligned} \max V(\phi_0) &\geq 0 \\ \max \left( \frac{1}{2} \omega^2 \phi_0^2 - U \right) &\geq 0, \end{aligned}$$

dan didapat nilai frekuensi minimum agar memenuhi syarat ini

$$\omega^2 \geq \min_{\phi_0 \neq 0} \left( \frac{2U}{\phi_0} \right). \quad (3.22)$$

selain itu, jika  $\phi_0$  memulai geraknya pada titik yang mendekati titik maksimum global  $V$ , 'partikel' akan diam di titik tersebut dengan 'waktu'  $r$  yang lama, sehingga seuku disipasi  $\frac{1}{r}$ , akan menjadi sangat kecil, sebagai efeknya adalah partikel akan mulai bergerak dengan energi yang sangat besar, dan tidak akan mencapai titik energi efektif nol. Situasi ini disebut *overshooting*. oleh karena itu, agar melewati titik berenergi nol, maka titik  $\phi = 0$  harus cekung. Kondisi ini akan dipenuhi jika turunan kedua dari potensial efektif pada titik

nol bernilai positif. Nilai ini memberikan batasan maksimum pada frekuensi Q-ball. Sehingga

$$\begin{aligned} V''(0) &< 0 \\ \frac{d^2}{d\phi^2} \left( \frac{1}{2}\omega^2\phi^2 - U(0) \right) &< 0. \end{aligned}$$

Batas maksimal dari frekuensi harus memenuhi nilai

$$\omega^2 < \frac{d^2U(0)}{d\phi^2}. \quad (3.23)$$

Dengan mengkombinasikan dua syarat diatas, maka kondisi  $\omega$  sebagai syarat eksistensi dari Q-ball

$$\omega_{\min}^2 \leq \omega^2 < \omega_{\max}^2 \quad (3.24)$$

dimana  $\omega_{\min}^2 = \min(\frac{2U}{\phi_0})$  dan  $\omega_{\max}^2 = \frac{d^2U(0)}{d\phi^2}$ . Q-ball akan terbentuk jika nilai  $\omega$  berada pada selang  $\omega$  yang diizinkan. Karena syarat ini bergantung pada bentuk potensial, maka tidak semua bentuk potensial dapat membentuk Q-ball. Jika nilai frekuensi  $\omega$  lebih kecil dari batas minimum, Q-ball tidak terbentuk dan jika lebih dari batas maksimum, Q-ball akan menjadi gelombang bidang [2].

Potensial interaksi dalam teori medan yang diperbolehkan adalah potensial renormalisasi

$$U = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \lambda\phi^4 \quad (3.25)$$

dengan  $\mu$  dan  $\lambda$  adalah konstanta positif. Potensial interaksi ini akan mampu membentuk Q-ball jika memenuhi syarat eksistensi pada persamaan (3.24). Nilai frekuensi maksimum yang dihasilkan adalah

$$\begin{aligned} \omega_{\max}^2 &= \frac{d^2U(0)}{d\phi^2} \\ &= \mu^2 + 12\lambda\phi^2|_{\phi=0} \\ &= \mu^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

dan frekuensi minimum

$$\begin{aligned}
 \omega_{\min}^2 &= \min\left(\frac{2U}{\phi_0}\right) \\
 &= \min(\mu^2 + 2\lambda\phi^2) \\
 &= \mu^2.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Nilai frekuensi minimum dan maksimum adalah sama yaitu  $\mu^2$ , sehingga model potensial renormalisasi tidak akan pernah memenuhi syarat eksistensi. Salah satu potensial interaksi yang diizinkan adalah potensial nonrenormalisasi.

Potensial interaksi nonrenormalisasi dapat diperoleh dengan menambahkan satu suku  $\phi^6$  pada potensial renormalisasi

$$U(\phi) = \lambda(\phi^6 - a\phi^4 + b\phi^2) \tag{3.28}$$

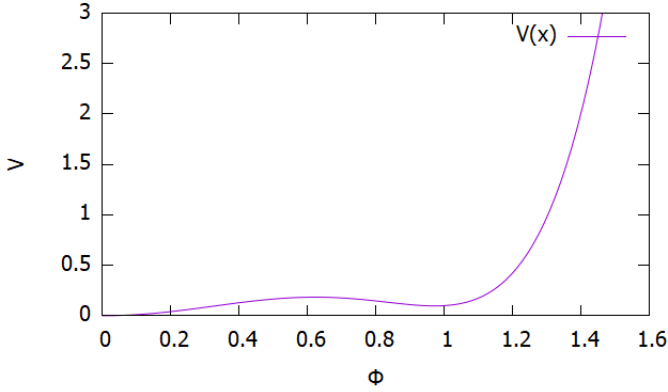
dimana  $\lambda, a, b$  adalah konstanta positif. Seperti pada (Gambar 3.2), potensial memiliki minimum mutlak  $U(0) = 0$  pada  $\phi = 0$  dan satu minimum lokal pada tidak sama dengan nol [5]. Nilai frekuensi maksimum pada model potensial ini adalah

$$\begin{aligned}
 \omega_{\max}^2 &= \frac{d^2U(0)}{d\phi^2} \\
 &= \lambda(30\phi^4 - 12a\phi^2 + 2b)|_{\phi=0} \\
 &= 2\lambda b
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

dan frekuensi minimum

$$\begin{aligned}
 \omega_{\min}^2 &= \min\left(\frac{2U}{\phi_0}\right) \\
 &= \min[2\lambda(\phi^4 - a\phi^3 + b)] \\
 &= 2\lambda\left(b - \frac{a^2}{4}\right).
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Nilai dari  $\omega_{\min}$  memiliki nilai yang kurang dari  $\omega_{\max}$



Gambar 3.2: Potensial nonrenormalisasi  $U(\phi)$  untuk  $\lambda = 1, a = 2, b = 1.1$

akibat adanya suku ruas kedua  $\frac{\lambda a^2}{2}$ , jadi potensial interaksi nonrenormalisasi memenuhi syarat eksistensi. Potensial nonrenormalisasi memberikan bentuk potensial

$$0 = \phi'' + \frac{2}{r}\phi' - (6\phi^5 - 4a\phi^3 + 2b\phi) + \omega^2\phi \quad (3.31)$$

### 3.3 Stabilitas Kuantum

Ketika volume dari Q-ball sangat besar,  $V \rightarrow \infty$ , dan frekuensi  $\omega$  lebih besar dari batas maksimum syarat eksistensi (3.24), Q-ball menjadi gelombang planar dan ini terbentuk pada titik vakum potensial  $U$ . Volume yang besar diberikan oleh nilai  $r$  yang besar,  $r \rightarrow \infty$  dan nilai medan  $\Phi \rightarrow 0$ . Persamaan medan secara umum sebagai fungsi jejari  $r$  dengan potensial nonrenormalisasi (3.28)

$$0 = \phi'' + \frac{2}{r}\phi' - (6\phi^5 - 4a\phi^3 + 2b\phi) + \omega^2\phi. \quad (3.32)$$

Pada kondisi ini, nilai  $\Phi$  yang memiliki pangkat tiga, lima, dan suku  $1/r$  menjadi sangat kecil dan dapat diabaikan. Sehingga

pers.(3.32) menjadi

$$\omega^2\phi + \Phi'' - b\lambda\Phi = 0. \quad (3.33)$$

Persamaan medan untuk  $\Phi$  diatas menjadi persamaan Klein-Gordon. Solusi  $\Phi$  dapat diperoleh dengan mengambil bentuk  $\Phi = \phi(x)e^{-i\omega t}$  sehingga solusi lengkap  $\Phi$

$$\Phi = Ne^{i(kx-\omega t)}. \quad (3.34)$$

dimana  $k^2 = \omega^2 - \sqrt{b\lambda}$ .

Energi dari Q-ball pada kondisi ini adalah

$$\begin{aligned} E &= \int (\omega^2\phi^2 + (\nabla\phi)^2 + U(\phi^2))d^3x \\ &= V(\omega^2\phi^2 + (\nabla\phi)^2 + U(\phi^2)). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Karena Q-ball sangat besar, maka suku kedua dapat diabaikan

$$\nabla\Phi = 0.$$

Bentuk muatan  $Q$  adalah

$$Q = 2\omega\phi^2V. \quad (3.36)$$

Sehingga bentuk energi pada volume yang besar adalah

$$E = \frac{Q^2}{4\phi^2V} + UV. \quad (3.37)$$

Untuk meminimalkan nilai  $E$  terhadap  $Q$  konstan, maka nilai  $V$  harus minimum. Nilai minimum dari  $V_0$  adalah

$$V_0 = \frac{Q}{\sqrt{4U\phi^2}} \quad (3.38)$$

sehingga nilai energi minimum  $E_0$  adalah

$$E_0 = Q\sqrt{\frac{U}{\phi^2}}. \quad (3.39)$$



Untuk nilai  $\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , energi minimum Q-ball menjadi

$$\begin{aligned}
 E_0 &= Q \sqrt{\frac{\lambda(\phi^6 - a\phi^4 + b\phi^2)}{\phi^2}} \\
 &\approx Q \sqrt{\lambda b} \\
 &\approx Q \omega_+^2 \\
 &\approx Q \mu
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

$$\tag{3.41}$$

dengan  $\mu$  merupakan massa partikel skalar bermuatan Q bebas.

Energi ini merupakan energi dari gelombang bidang dari solusi persamaan Klein-Gordon diatas. Kondisi stabilitas mutlak untuk Q-ball menjadi

$$\frac{E}{Q} < \omega_{\max} = \mu.
 \tag{3.42}$$

Kondisi ini merupakan syarat paling dasar yang harus dipenuhi Q-ball agar tidak meluruh menjadi partikel skalar dasar bermassa  $\mu$  dalam bentuk gelombang planar [2].

### 3.4 Stabilitas Klasik

Stabilitas klasik dapat didefinisikan stabilitas Q-ball terhadap fluktuasi kecil pada konfigurasi. Jika fluktuasi terus membesar secara eksponensial, maka solusi Q-ball menjadi tidak stabil. Pada pembahasan ini akan menunjukkan bahwa Q-ball secara klasik stabil terhadap fluktuasi linear [2].

Pertubasi terjadi pada keadaan terendah, Sehingga solusi Q-ball  $\Phi$  menjadi

$$\Phi = e^{-i\theta t} (\phi(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) + \chi(\mathbf{r} - \mathbf{R}, t))
 \tag{3.43}$$

dimana  $\chi$  merupakan fluktuasi kompleks

$$\chi = \chi_R + i\chi_I.
 \tag{3.44}$$

Nilai  $\Phi$  memenuhi persamaan Q-ball.  $\chi$  dapat diekspansikan dalam fungsi kompleks  $f_n(\mathbf{r})$

$$\chi = \sum_{n=5}^{\infty} q_n(t) f_n(\mathbf{r}) \quad (3.45)$$

sehingga nilai  $\chi$  menjadi

$$\chi_R = \sum_{n=5}^{\infty} \Re q_n(t) f_n(\mathbf{r}) \quad (3.46)$$

$$\chi_I = \sum_{n=5}^{\infty} \Im q_n(t) f_n(\mathbf{r}) \quad (3.47)$$

dan nilai  $f_i$  memenuhi sifat orthonormal  $\int f_i^i f_j = \delta_{ij}$ . Disini didefinisikan bahwa  $\int = \int d^3x$ . Karena simetri  $U(1)$  dan invariansi terhadap transformasi Lorentz, maka harus memiliki kondisi [3] [2]

$$\int \phi \chi_I = 0, \quad \int \chi_R \nabla \phi = 0. \quad (3.48)$$

Dengan menggunakan pers.(3.43) dan  $q_k = R_k(t)$  dan  $q_4 = \theta(t)$ , bentuk ini membuat Lagrangian,  $L = K(q, \dot{q}) - V(q)$  dapat diekspansikan dalam orde dua. Bentuk kinetik dan potensial menjadi

$$\begin{aligned} K &= \int \frac{1}{2} |\dot{\Phi}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \bar{q}_i \mathcal{M}_{ij} \dot{q}_j = K_0 + K_1 + K_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} V &= \int \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + U \\ &= V_0 + V_1 + V_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.50)$$

disini, tanda bar merupakan bentuk invers dari vektor sebenarnya dan nilai  $q$  adalah

$$q = (R_k, \theta, q_n)^T \quad (3.51)$$

dimana  $k = 1, 2, 3$  dan  $n = 5, 6, 7, \dots$

Turunan terhadap waktu dari pers.(3.43) adalah

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = & -i\dot{\theta}e^{-i\theta}[\phi + \chi_R + i\chi_I] - \dot{R}e^{-i\theta} \left[ \frac{\partial\phi}{\partial r_k} + \frac{\partial\chi_R}{\partial r_k} + i\frac{\partial\chi_I}{\partial r_k} \right] \\ & + \dot{q}_n e^{-i\theta}[f_n + if_n]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Dengan mengkuadratkan  $\dot{\phi}$ , dan mensubstitusikan ke persamaan Lagrangian, diperoleh bentuk baru dari persamaan Lagrangian

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}(\dot{\theta}\mathcal{M}_{44}\dot{\theta} + \dot{\theta}\mathcal{M}_{4k}\dot{R} + \dot{\theta}\mathcal{M}_{4n}\dot{q}_n \\ & + \dot{R}\mathcal{M}_{kk}\dot{R} + \dot{R}\mathcal{M}_{kk}\dot{q}_n + \dot{R}\mathcal{M}_{k4}\dot{\theta} \\ & + \dot{q}_n\mathcal{M}_{nn}\dot{q}_n + \dot{q}_n\mathcal{M}_{n4}\dot{\theta} + \dot{q}_n\mathcal{M}_{nk}\dot{R}) \\ & - V(q) \end{aligned} \quad (3.53)$$

dengan bentuk  $\mathcal{M}$  adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{44} &= \int [\phi^2 + 2\phi\chi_R + \chi_R^2 + \chi_I^2] \\ \mathcal{M}_{kk'} &= \int \left[ \frac{1}{3}(\nabla\phi)^2\delta_{kk'} + 2\frac{\partial\phi}{\partial r_k}\frac{\partial\chi_R}{\partial r_k} + \frac{\partial\chi_R}{\partial r_k}\frac{\partial\chi_R}{\partial r_k} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial\chi_I}{\partial r_k}\frac{\partial\chi_I}{\partial r_k} \right] \\ \mathcal{M}_{nn'} &= \delta_{nn'} \\ \mathcal{M}_{4n} = \mathcal{M}_{n4} &= \frac{1}{2} \int [i(f_n - f_n^*)\chi_R + (f_n + f_n^*)\chi_I] \\ \mathcal{M}_{kn} = \mathcal{M}_{nk} &= \frac{-1}{2} \int [(f_n + f_n^*)\frac{\partial\chi_R}{\partial r_k} - i(f_n - f_n^*)\frac{\partial\chi_I}{\partial r_k}] \\ \mathcal{M}_{4k} = \mathcal{M}_{k4} &= \int [-2\chi_I\frac{\partial\phi}{\partial r_k} - \chi_I\frac{\partial\chi_R}{\partial r_k} + \chi_R\frac{\partial\chi_I}{\partial r_k}] \end{aligned}$$

Matriks  $\mathcal{M}$  dapat diekspans sebagai deret berdasarkan kuantitas kecil  $\epsilon$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0(\epsilon^0) + \mathcal{M}_1(\epsilon^1) + \mathcal{M}_2(\epsilon^2) + \mathcal{O}(\epsilon^3) + \dots \quad (3.54)$$

dimana

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_0 &= \begin{pmatrix} S_0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathcal{M}_1 &= \begin{pmatrix} A & B & J \\ \bar{B} & C & E \\ \bar{J} & \bar{E} & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathcal{M}_2 &= \begin{pmatrix} F & G & 0 \\ \bar{G} & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Disini, didefinisikan komponen dari matriks diatas

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{1}{3} \int (\nabla \phi)^2, \quad I = \int \phi^2 \\
 A &= 2 \int \frac{\partial \phi}{\partial r_k} \frac{\partial \chi_R}{\partial r'_k}, \quad B = 2 \int \chi_I \frac{\partial \phi}{\partial r_k} \\
 E &= \mathcal{M}_{n4}, \quad J = \mathcal{M}_{kn} \\
 F &= \int \left( \frac{\partial \chi_R}{\partial r_k} \frac{\partial \chi_R}{\partial r'_k} + \frac{\partial \chi_I}{\partial r_k} \frac{\partial \chi_I}{\partial r'_k} \right), \quad G = \chi_I \frac{\partial \chi_R}{\partial r_k} - \chi_R \frac{\partial \chi_I}{\partial r_k} \\
 C &= 2 \int \phi \chi_R, \quad H = \int (\chi_R^2 + \chi_I^2),
 \end{aligned}$$

tanda bar mendenotasikan invers matriks dari matriks sebenarnya. Komponen energi kinetik  $K$  diberikan oleh

$$K_0 = \frac{1}{2} \bar{q}_i \mathcal{M}_{0ij} \dot{q}_j, K_1 = \frac{1}{2} \bar{q}_i \mathcal{M}_{1ij} \dot{q}_j, K_2 = \frac{1}{2} \bar{q}_i \mathcal{M}_{2ij} \dot{q}_j. \tag{3.56}$$

Kita menggunakan bentuk pendekatan dari nilai  $\Phi$  yaitu

$$|\Phi| \approx \phi + \chi_R + \frac{\chi_I^2}{2\phi} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{3.57}$$

sehingga bentuk potensial dapat diaproksimasi

$$U(|\Phi|) \approx U(\phi) + \chi_R \frac{dU}{d\phi} + \frac{\chi_I^2}{2\phi} \frac{dU}{d\phi} + \frac{\chi_R}{2} \frac{d^2U}{d\phi^2} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{3.58}$$

Dengan bentuk pendekatan suku potensial ini, bentuk suku energi potensial menjadi

$$V_0 = \int \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + U(\phi) \quad (3.59)$$

$$V_1 = \omega^2 \int \phi \chi_R \quad (3.60)$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \int \left[ \chi_R \left( -\nabla^2 + \frac{d^2 U}{d\phi^2} \right) \chi_R + \chi_I \left( -\nabla^2 + \frac{1}{\phi} \frac{dU}{d\phi} \right) \chi_I \right] \quad (3.61)$$

Dalam menganalisa mode fluktuasi  $\chi$ , formalisme Lagrange yang telah dirumuskan sebelumnya diubah kedalam bentuk formalisme Hamiltonian. Transformasi kanonik pers.(3.49) dan pers.(3.50) memberikan

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \mathcal{M}_{ij} \dot{q}_j \rightarrow \dot{q}_i = \mathcal{M}_{ij}^{-1} p_j. \quad (3.62)$$

Momentum  $p_i$  per bagiannya adalah

$$p_4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mathcal{M}_{44} \dot{\theta} + \mathcal{M}_{4k} \dot{R} + \mathcal{M}_{4n} \dot{q}_n \quad (3.63)$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \mathcal{M}_{kk} \dot{R} + \mathcal{M}_{k4} \dot{\theta} + \mathcal{M}_{kn} \dot{q}_n \quad (3.64)$$

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \mathcal{M}_{n4} \dot{\theta} + \mathcal{M}_{nk} \dot{R} + \mathcal{M}_{nn} \dot{q}_n. \quad (3.65)$$

Jadi bentuk Hamiltonian  $H(q, p)$  diberikan oleh

$$H = \bar{p}_i \dot{q}_i - L = \frac{1}{2} \bar{p}_i \mathcal{M}_{ij}^{-1} p_j - L = H_0 + H_1 + H_2 + \dots, \quad (3.66)$$

yang mana Hamiltonian tidak bergantung pada  $q_k$  dan  $q_4$ . Kemudian, persamaan Hamiltonian untuk momentum Q-ball  $P_k$  dan muatan  $Q$  adalah konservatif :  $\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$  dan  $\dot{Q} = -\frac{\partial H}{\partial q_4} = 0$ . Sehingga dapat diatur bahwa

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{konstan}. \quad (3.67)$$

$\mathcal{M}_0$  dapat didefinisikan sebagai pangkat nol dari matriks  $\mathcal{M}$ , dapat ditulis sebagai

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \Delta \quad (3.68)$$

dimana  $\Delta$  mengandung  $\mathcal{O}(\epsilon)$  pangkat tinggi. Invers dari  $\mathcal{M}$  adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_0 + \Delta \\ \mathcal{M}^{-1} &= \mathcal{M}_0^{-1} - \mathcal{M}_0^{-1}(\mathcal{M}_0^{-1} + \Delta^{-1})^{-1}\mathcal{M}_0^{-1} \\ &= \mathcal{M}_0^{-1} - \mathcal{M}_0^{-1}\Delta(\mathcal{M}_0^{-1}\Delta + I)^{-1}\mathcal{M}_0^{-1} \\ &= \mathcal{M}_0^{-1} - \mathcal{M}_0^{-1}\Delta(I + \mathcal{M}_0^{-1}\Delta(\mathcal{M}_0 + I)^{-1})\mathcal{M}_0^{-1} \\ &= \mathcal{M}_0^{-1} - \mathcal{M}_0^{-1}\Delta\mathcal{M}_0^{-1} + \mathcal{M}_0^{-1}\Delta(\mathcal{M}_0\Delta^{-1} + I)^{-1}\mathcal{M}_0^{-1} \\ &= \mathcal{M}_0^{-1} - \mathcal{M}_0^{-1}\Delta\mathcal{M}_0^{-1} + \mathcal{M}_0^{-1}\Delta(\mathcal{M}_0^{-1}\Delta \\ &\quad - \mathcal{M}_0^{-1}\Delta(\mathcal{M}_0^{-1}\Delta + I)^{-1})\mathcal{M}_0^{-1} \\ &= \mathcal{M}_0^{-1} - \mathcal{M}_0^{-1}\Delta\mathcal{M}_0^{-1} + \mathcal{M}_0^{-1}\Delta\mathcal{M}_0^{-1}\Delta\mathcal{M}_0^{-1} + \dots \end{aligned} \quad (3.69)$$

dengan

$$\mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} S_0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_0^{-1} = \begin{pmatrix} S_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Maka bentuk Hamiltonian pada pers.(3.66) menjadi

$$\begin{aligned} H &= \bar{p}_i \dot{q}_i - L \\ &= \frac{1}{2} \bar{p}_i \mathcal{M}_{ij}^{-1} p_j - \frac{1}{2} \bar{q}_i \mathcal{M}_{ij} \dot{q}_j + V(q) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{Q^2}{I} + I\dot{\theta}^2 \right) + \left( \frac{-1}{2} C\dot{\theta} + \frac{1}{2} C\dot{\theta} \right) + \frac{1}{2} \sum_n |p_n - \dot{\theta} \mathcal{M}_{4n}|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int (\nabla\phi)^2 + U(\phi) + \frac{1}{2} \int \chi_R \hat{h}_{RXR} + \frac{2\dot{\theta}}{I} \left( \int \phi \chi_R \right)^2 \\ &\quad + \chi_I \hat{h}_{IXI} + \frac{2\dot{\theta}}{M} \left( \int \chi_I \nabla\phi \right)^2 \\ &= H_0 + H_1 + H_3 \end{aligned} \quad (3.71)$$

dengan masing2 bentuk  $H$

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{Q^2}{I} + I\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \int (\nabla\phi)^2 + U(\phi) \\
 &= \frac{1}{2} \left( I\dot{\theta}^2 + I\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \int (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} \int (\nabla\phi)^2 \\
 &= I\dot{\theta} + \int (\nabla\phi)^2 \\
 &= I\dot{\theta} + 3S_0 \tag{3.72}
 \end{aligned}$$

$$H_1 = \frac{-1}{2} C\dot{\theta} + \frac{1}{2} C\dot{\theta} = 0 \tag{3.73}$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_n |p_n - \dot{\theta} \mathcal{M}_{4n}|^2 + \mathcal{V}_R + \mathcal{V}_I \tag{3.74}$$

dimana

$$\mathcal{V}_R = \frac{1}{2} \int \chi_R \hat{h}_R \chi_R + \frac{2\dot{\theta}^2}{I} \left( \int \phi \chi_R \right)^2 \tag{3.75}$$

$$\mathcal{V}_I = \frac{1}{2} \int \chi_I \hat{h}_I \chi_I + \frac{2\dot{\theta}^2}{M} \left( \int \chi_I \nabla\phi \right)^2. \tag{3.76}$$

Disini, operator turunan  $\hat{h}_R$  dan  $\hat{h}_I$  didefinisikan sebagai

$$\hat{h}_R = -\nabla^2 + \frac{d^2 U}{d\phi^2} - \dot{\theta}^2 \tag{3.77}$$

$$\hat{h}_I = -\nabla^2 + \frac{1}{\phi} \frac{dU}{d\phi} - \dot{\theta}^2 \tag{3.78}$$

Untuk membuktikan stabilitas klasik dari solusi Q-ball, kita perlu menentukan kondisi dari muatan dari Q-ball, yang berimplikasi pada semua nilai eigen  $\Lambda_R$  dan  $\Lambda_I$  untuk  $\mathcal{V}_R$  dan  $\mathcal{V}_I$  harus bernilai positif atau nol. Nilai eigen diberikan oleh

$$\frac{\delta \mathcal{V}_R}{\delta \chi_R} = \hat{h}_R \chi_R + \frac{4\dot{\theta}^2}{I} \phi \left( \int \phi \chi_R \right) = \Lambda_R \chi_R \tag{3.79}$$

$$\frac{\delta \mathcal{V}_I}{\delta \chi_I} = \hat{h}_I \chi_I + \frac{4\dot{\theta}^2}{I} \phi \left( \int \nabla\phi \chi_I \right) = \Lambda_I \chi_I. \tag{3.80}$$

Misalkan  $\psi_{Ri}$  dan  $\psi_{Ij}$  merupakan keadaan eigen  $\hat{h}_R$  dan  $\hat{h}_I$

$$\hat{h}_R \psi_{Ri} = \lambda_{Ri} \psi_{Ri}, \quad \hat{h}_I \psi_{Ij} = \lambda_{Ij} \psi_{Ij}, \quad (3.81)$$

dimana  $\lambda_{Ri}$  dan  $\lambda_{Ij}$  merupakan nilai eigen

Deferensiasi persamaan medan (3.18)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr_k} \left( \frac{d^2 \phi}{dr_k^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr_k} - \frac{\partial U(\phi(r))}{\partial \phi} + \dot{\theta}^2 \phi \right) &= 0 \\ \frac{d^2}{dr_k^2} \left( \frac{d\phi}{dr_k} \right) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr_k} \left( \frac{d\phi}{dr_k} \right) - \frac{d}{dr_k} \frac{\partial U(\phi(r))}{\partial \phi} + \dot{\theta}^2 \frac{d\phi}{dr_k} &= 0 \\ -\nabla^2 \frac{d\phi}{dr_k} + \frac{d\phi}{dr_k} \frac{\partial^2 U(\phi(r))}{\partial \phi^2} - \dot{\theta}^2 \frac{d\phi}{dr_k} &= 0 \\ \hat{h}_R \left( \frac{d\phi}{dr_k} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.82)$$

kita peroleh nilai eigen nol dari  $\hat{h}_R$ . Bentuk fungsi eigen  $d\phi/dr_k$  :  $\psi_{Rk} \propto d\phi/dr_k$ , dan merupakan bentuk dari invariansi terhadap translasi,  $\phi(\mathbf{r} - \eta)$ , dimana  $\eta$  merupakan kuantitas kecil yang berhubungan dengan translasi dari Q-ball. Jika  $\hat{h}_R$  memiliki dua nilai eigen negatif  $\lambda_{-2} < \lambda_{-1} < 0 \leq \lambda_0$ , dan  $\phi$  dapat diekspansi sebagai  $\phi = \phi_{-1}\psi_{-1} + \phi_{-2}\psi_{-2}$  dan  $\chi_R = c_{-1}\psi_{-1} + c_{-2}\psi_{-2}$ , dimana indeks bawah merupakan



fungsi eigen dan nilai eigen  $\lambda_{-2}, \lambda_{-1}$ , sehingga  $\mathcal{V}_R$  menjadi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_R &= \frac{1}{2} \int \chi_R \hat{h}_{RXR} + \frac{2\dot{\theta}^2}{I} \left( \int \phi \chi_R \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} (c_{-1}\psi_{-1} + c_{-2}\psi_{-2}) \hat{h}_R (c_{-1}\psi_{-1} + c_{-2}\psi_{-2}) \\
 &\quad + \frac{2\dot{\theta}^2}{I} ((\phi_{-1}\psi_{-1} + \phi_{-2}\psi_{-2})(c_{-1}\psi_{-1} + c_{-2}\psi_{-2}))^2 \\
 &= \frac{1}{2} (c_{-1}\psi_{-1} + c_{-2}\psi_{-2}) (c_{-1}\lambda_{-1}\psi_{-1} + c_{-2}\lambda_{-2}\psi_{-2}) \\
 &\quad + \frac{2\dot{\theta}^2}{I} (c_{-1}^2\phi_{-1} + c_{-2}^2\phi_{-2})^2 \\
 &= \frac{1}{2} (c_{-1}^2\lambda_{-1} + c_{-2}^2\lambda_{-2}) + \frac{2\dot{\theta}^2}{I} (c_{-1}\phi_{-1} + c_{-2}\phi_{-2})^2
 \end{aligned}$$

karena nilai  $\mathcal{V}_R = 0$  dan suku pertama bernilai nol dari pembuktian nilai eigen  $\hat{h}_R$  nol, maka suku kedua harus bernilai nol, jadi

$$\begin{aligned}
 \frac{2\dot{\theta}^2}{I} (c_{-1}\phi_{-1} + c_{-2}\phi_{-2})^2 &= 0 \\
 c_{-1}\phi_{-1} + c_{-2}\phi_{-2} &= 0 \\
 c_{-1} &= -\frac{c_{-2}\phi_{-2}}{\phi_{-1}}
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\mathcal{V}_R = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_{-2}\phi_{-2}}{\phi_{-1}} \right)^2 \lambda_{-1} + c_{-2}^2 \lambda_{-2} \right] < 0 \quad (3.83)$$

Karena  $\lambda_{-2} < \lambda_{-1} < 0$ , dapat disimpulkan bahwa jika  $\hat{h}_R$  harus memiliki satu nilai eigen negatif untuk memperoleh nilai  $\mathcal{V}_R \geq 0$ .

Dari persamaan medan (3.18), diperoleh

$$\begin{aligned}
 \phi'' + \frac{2}{r}\phi' - \frac{\partial U(\phi(r))}{\partial \phi} + \dot{\theta}^2\phi &= 0 \\
 \nabla^2\phi - \frac{\partial U(\phi(r))}{\phi\partial\phi}\phi + \dot{\theta}^2\phi &= 0 \\
 \left(-\nabla^2 + \frac{\partial U(\phi(r))}{\phi\partial\phi} - \dot{\theta}^2\right)\phi &= 0 \\
 \hat{h}_I\phi &= 0
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

yang mengarah pada satu nilai eigen yaitu nol.  $\psi_{I0} \propto \phi$ . Karena  $\phi$  tidak memiliki node, maka nilai eigen lain dari  $\hat{h}_I$  adalah positif.

Bagian ini akan menentukan semua nilai eigen  $\mathcal{V}_R$  dan  $\mathcal{V}_I$  harus bernilai positif atau nol

$$\Lambda_R \geq 0, \quad \Lambda_I \geq 0. \tag{3.85}$$

Diambil  $\Psi_{Ri}$  dan  $\Psi_{Ij}$  merupakan fungsi eigen dari  $\mathcal{V}_R$  dan  $\mathcal{V}_I$ .  $\Psi_{Ri}$  dan  $\Psi_{Ij}$  saling ortonormal. Kita akan memperoleh nilai eigen nol jika  $\Psi_{Rk} \propto d\phi/dr_k$  dan  $\Psi_{I0} = \phi$ . Nilai  $\chi_I$  dapat diekspansikan dalam bentuk  $\Psi_{Ij}$  dengan  $q_{Ij} = \Im(q_j)$ , yang berimplikasi pada

$$\chi_I = \sum_j q_{Ij}\Psi_{Ij}, \tag{3.86}$$

dan  $\chi_R$  dapat diekspansikan dalam bentuk  $\Psi_{Ri}$  dengan  $q_{Ij} = \Re(q_i)$

$$\chi_R = \sum_i q_{Ri}\Psi_{Ri}. \tag{3.87}$$

Kita akan memperoleh nilai eigen nol  $\Lambda_R = 0, \Lambda_I = 0$  ketika nilai fungsi eigen  $\Psi_{I0}$  dan  $\Psi_{Rk}$ .

Substitusi  $\Phi_{Ri}$ , kita akan membuktikan positivitas dari  $\Lambda_{Ri}$ , dimana didefinisikan  $z \equiv \Lambda_{Ri}$ . Kita difinisikan  $\psi_i$  sebagai

keadaan eigen dan memenuhi relasi ortonormal.  $\Psi_{Ri}$  dapat diekspasikan dalam bentuk  $\psi_i$  dengan amplitudo  $c_i$  dan  $\phi_i$

$$\Psi_{Ri} = \sum_i c_i \psi_i, \quad \phi = \sum_i \phi_i \psi_i. \quad (3.88)$$

Pers.(3.80) memberikan bentuk

$$\begin{aligned} z\chi_R &= \hat{h}_R \chi_R + \frac{4\dot{\theta}^2}{I} \phi \left( \int \phi \chi_R \right) \\ z\chi_R &= \hat{h}_R \sum_i q_{Ri} \sum_i c_i \psi_i + \frac{4\dot{\theta}^2}{I} \sum_j \phi_j \psi_j \left( \int \sum_j \phi_j \psi_j \sum_i q_{Ri} \sum_i c_i \psi_i \right) \\ z\chi_R &= \sum_i q_{Ri} c_i \lambda_i \psi_i + \underbrace{\frac{4\dot{\theta}^2}{I} \sum_j \phi_j \psi_j \left( \phi_j \sum_i q_{Ri} c_i \int \sum_j \sum_i \psi_j \psi_i \right)}_{j \rightarrow i} \\ z\chi_R &= \sum_i q_{Ri} c_i \lambda_i \psi_i + \frac{4\dot{\theta}^2}{I} \sum_i \phi_i \psi_i \left( \phi_i \sum_i q_{Ri} c_i \right) \\ z\chi_R &= \lambda_i \chi_R + \frac{4\dot{\theta}^2}{I} \sum_i \phi_i^2 \chi_R. \end{aligned}$$

Sehingga nilai eigennya

$$\left( \lambda_i - z + \frac{4\dot{\theta}^2}{I} \sum_i \phi_i^2 \right) = 0. \quad (3.89)$$

Didefinisikan bentuk baru  $G(z)$  yang bergantung pada  $z$

$$G(z) = 1 + \frac{4\dot{\theta}^2}{I} \sum_i \frac{\phi_i^2}{\lambda_i - z} = 0 \quad (3.90)$$

dan bentuk diatas mengarah pada nilai eigen  $\Lambda_{Ri}$ . Dimana nilai  $G(0)$

$$G(0) = 1 + \frac{4\dot{\theta}^2}{I} \sum_i \frac{\phi_i^2}{\lambda_i}. \quad (3.91)$$

Kita akan menunjukkan hubungan antara muatan dan  $G(z)$ . Dari jumlah muatan yang didefinisikan diatas [2], divariasikan

$$\begin{aligned}
 Q &= I\dot{\theta} \\
 \delta Q &= \delta\dot{\theta}I + 2\dot{\theta} \int \phi\delta\phi \\
 \frac{\dot{\theta}}{Q} \frac{\delta Q}{\delta\dot{\theta}} &= 1 + \frac{2\dot{\theta}}{I} \int \phi \frac{\partial\phi}{\partial\dot{\theta}}
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

dan turunan pers.(3.18) terhadap  $\dot{\theta}$ , kita peroleh

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\dot{\theta}} \frac{d^2\phi}{dr_k^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{d\dot{\theta}} \frac{d\phi}{dr_k} - \frac{d}{d\dot{\theta}} \frac{\partial U(\phi(r))}{\partial\phi} + \frac{d}{d\dot{\theta}} (\dot{\theta}^2\phi) &= 0 \\
 \frac{d^2}{dr_k^2} \frac{d\phi}{d\dot{\theta}} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr_k} \frac{d\phi}{d\dot{\theta}} - \frac{d\phi}{d\dot{\theta}} \frac{\partial^2 U(\phi(r))}{\partial\phi^2} + \frac{d\phi}{d\dot{\theta}} \dot{\theta} + 2\dot{\theta}\phi &= 0 \\
 \hat{h}_R \frac{d\phi}{d\dot{\theta}} &= 2\dot{\theta}\phi
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

dengan mengalikan  $\sum_i \phi_i$  pada persamaan eigen  $\hat{h}_R\psi_i = \lambda_i\psi_i$ , kita peroleh

$$\begin{aligned}
 \sum_i \hat{h}_R\phi_i\psi_i &= \sum_i \phi_i\lambda_i\psi_i \\
 \sum_i \hat{h}_R \frac{\phi_i}{\lambda_i} \psi_i &= \phi.
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

Perbandingan kedua pers.(3.93) dan pers.(3.94) memberikan hasil

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_R \frac{d\phi}{d\dot{\theta}} &= 2\dot{\theta} \sum_i \hat{h}_R \frac{\phi_i}{\lambda_i} \psi_i \\
 \frac{d\phi}{d\dot{\theta}} &= 2\dot{\theta} \sum_i \frac{\phi_i}{\lambda_i} \psi_i \\
 \sum_j \phi_j \psi_j \frac{d\phi}{d\dot{\theta}} &= 2\dot{\theta} \sum_i \frac{\phi_i}{\lambda_i} \sum_j \phi_j \psi_j \psi_i \\
 \int \phi \frac{d\phi}{d\dot{\theta}} &= 2\dot{\theta} \sum_i \frac{\phi_i^2}{\lambda_i}. \tag{3.95}
 \end{aligned}$$

Menggunakan persamaan diatas ke pers.(3.92), kita dapatkan

$$\frac{\dot{\theta}}{Q} \frac{\delta Q}{\delta \dot{\theta}} = 1 + \frac{4\dot{\theta}^2}{I} \sum_i \frac{\phi_i^2}{\lambda_i} \tag{3.96}$$

dan ketika membandingkan dengan pers.(3.91) diperoleh

$$\frac{\dot{\theta}}{Q} \frac{\delta Q}{\delta \dot{\theta}} = G(0). \tag{3.97}$$

Ketika nilai  $\Lambda_R \geq 0$ , kita dapat menentukan bahwa

$$\lambda_1 < 0 \leq \Lambda_1 < \Lambda_2 < \dots \leftrightarrow G(0) \leq 0, \tag{3.98}$$

Didefinisikan bahwa  $\dot{\theta} = \omega$  yang mana  $\omega$  sebagai konstanta positif yang mengintepretasikan frekuensi sudut. Sehingga, agar Q-ball stabil terhadap fluktuasi kecil

$$\frac{\omega}{Q} \frac{\delta Q}{\delta \omega} \leq 0, \tag{3.99}$$

muatan total Q-ball harus menurun seiring bertambahnya nilai frekuensi [2].

*"Halaman ini sengaja dikosongkan"*

## BAB IV

### MODEL Q-BALL DALAM DIMENSI $(1 + 1)$

Q-ball pada awalnya dibangun pada dimensi  $(3+1)$  dengan solusi bergantung waktu sebagai kosekuensi dari adanya teorema Derrick. Dalam kasus dimensi  $(1 + 1)$  Q-ball dapat direkonstruksi dengan mengambil analogi pada kasus dimensi  $(3+1)$ . Pada bab ini akan dikaji secara analitik Q-ball dimensi  $(1+1)$  meliputi solusi persamaan medan, energi, serta muatan. Selain itu akan dikaji pula aspek stabilitas dan interaksi antara dua Q-ball.

#### 4.1 Model Q-ball

Q-ball dibangun oleh medan skalar kompleks  $\Phi = \Phi(x, t)$  yang direpresentasikan oleh rapat Lagrangian

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - U(|\Phi|^2) \quad (4.1)$$

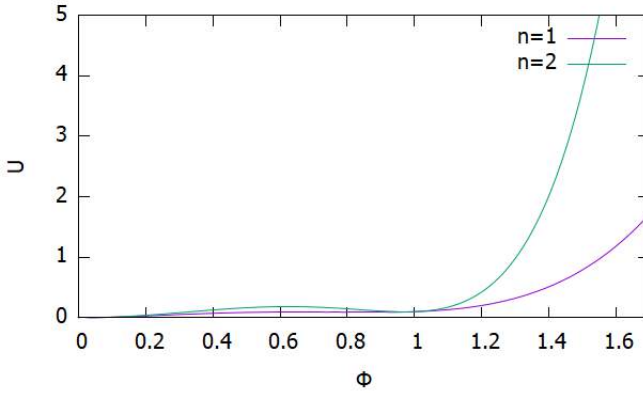
dimana bentuk potensial  $U(|\Phi|^2)$

$$U(|\Phi|^2) = \lambda(\beta|\Phi|^{2+2n} - a|\Phi|^{2+n} + b|\Phi|^2), \quad (4.2)$$

dengan  $\lambda, \beta, a, b$  merupakan konstanta parameter, dan  $n$  merupakan bilangan bulat positif ( $n = 1, 2, \dots$ ) [11]. Bentuk potensial  $U(|\Phi|^2)$  seperti pada Gambar 4.1. Pada tugas akhir ini akan dibahas hanya untuk model  $n = 1$  dan  $n = 2$ .

Potensial  $U(|\Phi|^2)$  membuat rapat Lagrangian pada pers.(4.1) menjadi

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - \lambda(\beta|\Phi|^{2+2n} - a|\Phi|^{2+n} + b|\Phi|^2). \quad (4.3)$$



Gambar 4.1: Bentuk potensial dengan  $n = 1$  dan  $n = 2$ .

Dengan mengaplikasikan rapat Lagrangian (4.3) ke persamaan Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \right) = 0$$

dan komponen tensor metrik  $(1, -1)$ , maka diperoleh bentuk persamaan medan pada dimensi  $(1 + 1)$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \partial^\mu \Phi - \frac{\partial U(|\Phi|^2)}{\partial \Phi^*} \\ 0 &= \partial_0 \partial^0 \Phi - \partial_1 \partial^1 \Phi + \frac{\partial}{\partial \Phi^*} (\lambda |\Phi|^{2+2n} - a |\Phi|^{2+n} + b |\Phi|^2) \\ 0 &= \ddot{\Phi} - \Phi'' + \lambda [(2 + 2n) \beta |\Phi|^{2n} - a(2 + n) |\Phi|^n + b] \Phi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Untuk memperoleh solusi Q-ball, digunakan bentuk ansatz yang sesuai dengan kebergantungan terhadap waktu

$$\Phi = \phi(x) \exp(i\omega t) \quad (4.5)$$

dimana  $\omega$  merupakan konstanta yang merepresentasikan frekuensi dan  $\phi(x)$  fungsi yang bergantung pada  $x$  yang



memiliki kondisi batas

$$\phi'(0) = 0 \quad \phi(\pm\infty) = 0. \quad (4.6)$$

Dengan ansatz ini, persamaan medan (4.4) menjadi

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega^2 \phi \exp(i\omega t) - \phi'' \exp(i\omega t) \\ &\quad + \lambda[(2+2n)\beta\phi^{2n} - a(2+n)\phi^n + b]\phi \exp(i\omega t) \\ 0 &= \omega^2 \phi + \phi'' - \lambda[(2+2n)\beta\phi^{2n+1} - a(2+n)\phi^{n+1} + b\phi] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pers.(4.7) dapat ditulis dalam bentuk potensial efektif  $V_{eff}$

$$\phi'' - \frac{dV_{eff}}{d\phi} = 0 \quad (4.8)$$

dengan  $V_{eff}$

$$V_{eff} = \frac{1}{2}\omega^2 \phi^2 - \lambda(\beta\phi^{2+2n} - a\phi^{2+n} + b\phi^2). \quad (4.9)$$

Untuk memperoleh solusi Q-ball, nilai  $\omega$  harus berada pada rentang  $\omega$  yang diizinkan yaitu

$$\min_{\phi_0 \neq 0} \left( \frac{\omega_{\min}^2}{\phi_0^2} \right) \leq \omega^2 < \omega_{\max}^2 \quad (4.10)$$

$\omega_{\min}$  dapat diperoleh dengan meminimumkan fungsi  $(2U/\Phi)$ . Nilai minimum fungsi tersebut terjadi pada titik  $\phi_0$  dimana  $\phi_0 \neq 0$ . Besar  $\phi_0$  adalah

$$\phi_0^n = \frac{a}{2\beta}$$

sehingga nilai  $\omega_{\min}$

$$\omega_{\min}^2 = 2\lambda \left( b - \frac{a^2}{4\beta} \right). \quad (4.11)$$

Adapun untuk nilai  $\omega_{\max}$  yang merupakan turunan kedua terhadap  $\phi$  pada titik  $\phi = 0$  adalah

$$\omega_{\max} = 2b\lambda. \quad (4.12)$$

Invariansi terhadap transformasi simetri memberikan kekekalan muatan Noether. Sistem Q-ball invarian terhadap simetri global  $U(1)$  dengan bentuk transformasi

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi \exp(\alpha)$$

yang menghadirkan kekekalan muatan

$$\frac{dQ}{dt} = 0.$$

Total muatan Q adalah

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^{\infty} dx J^0 \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} dx (\dot{\Phi}\Phi^* - \Phi^*\dot{\Phi}^*) \\ &= 2\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Rapat energi sistem diberikan oleh

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\equiv T_{00} \\ &= |\dot{\Phi}|^2 + |\Phi'|^2 + \lambda(\beta|\Phi|^{2+2n} - a|\Phi|^{2+n} + b|\Phi|^2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dengan mensubstitusi ansatz (4.5), rapat energi menjadi

$$\mathcal{E} = \omega^2 \phi^2 + \phi'^2 + \lambda(\beta\phi^{2+2n} - a\phi^{2+n} + b\phi^2). \quad (4.15)$$

Total energi sistem dapat diperoleh dengan mengintegrasikan keseluruhan ruang dari rapat energi

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{E} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx [\omega^2 \phi^2 + \phi'^2 + \lambda(\beta\phi^{2+2n} - a\phi^{2+n} + b\phi^2)]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Solusi  $\phi$  merupakan penyelesaian persamaan diferensial pada pers.(4.7). Bentuk  $\phi$  yang diperoleh harus memenuhi kondisi batas (4.6). Salah satu fungsi yang memenuhi syarat tersebut adalah fungsi cosinus hiperbolik. Dengan demikian, ansatz  $\phi$  adalah

$$\phi(x) = \sqrt[n]{\frac{A}{C + B \cosh(Dx)}} \quad (4.17)$$

dimana  $A, B, C,$  dan  $D$  merupakan konstanta yang akan ditentukan secara eksplisit. Perhitungan lengkap dapat dilihat di Lampiran A. Dengan menganggap  $m = n$  dan mensubstitusi ansatz (4.17) ke pers.(4.7), maka diperoleh konstanta  $A, B, C, D$

$$\begin{aligned} A &= 2b\lambda - \omega^2 \\ B &= \sqrt{\lambda} \sqrt{2\omega^2\beta + (a^2 - 4b\beta)\lambda} \\ C &= a\lambda \\ D &= n\sqrt{2b\lambda - \omega^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Substitusi hasil konstanta diatas ke pers.(4.17), bentuk  $\phi$  menjadi

$$\phi(x) = \sqrt[n]{\frac{2b\lambda - \omega^2}{a\lambda + \sqrt{\lambda} \sqrt{2\omega^2\beta + (a^2 - 4b\beta)\lambda} \cosh(n\sqrt{2b\lambda - \omega^2}x)}}. \quad (4.19)$$

Bentuk lengkap solusi medan  $\Phi(x, t)$  adalah

$$\Phi(x, t) = \sqrt[n]{\frac{2b\lambda - \omega^2}{a\lambda + \sqrt{\lambda} \sqrt{2\omega^2\beta + (a^2 - 4b\beta)\lambda} \cosh(n\sqrt{2b\lambda - \omega^2}x)}} \exp(i\omega t). \quad (4.20)$$

Untuk memperoleh model Q-ball, parameter potensial perlu dispesifikkan sebagai

$$\lambda = 1, \quad b = 1.1, \quad a = 2, \quad \beta = 1. \quad (4.21)$$

Hal ini memberikan nilai spesifik interval  $\omega$

$$0.2 \leq \omega^2 < 2.2. \quad (4.22)$$

#### 4.2 Model $n = 1$

Potensial Model ini memiliki bentuk

$$U(|\Phi|^2) = \lambda(\beta|\Phi|^4 - a|\Phi|^3 + b|\Phi|^2). \quad (4.23)$$

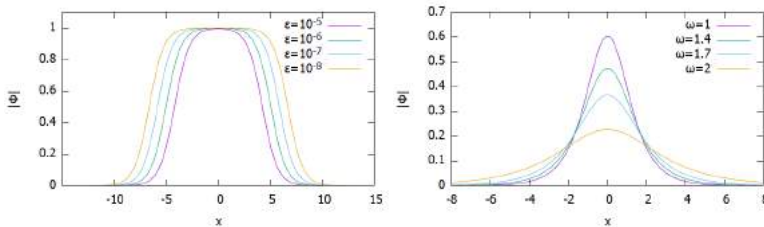
Potensial ini memiliki pengkat tertinggi orde-4 dari medan skalar. Bentuk potensial  $n = 1$  seperti pada Gambar 4.1. Dari pers.(4.7), maka dapat diperoleh persamaan medan untuk  $n = 1$

$$\omega^2\phi + \phi'' - \lambda(\beta|\phi|^4 - a|\phi|^3 + b|\phi|^2) = 0. \quad (4.24)$$

Bentuk solusi lengkap  $\Phi(x, t)$  dari pers.(4.19) adalah

$$\Phi(x, t) = \frac{2b\lambda - \omega^2}{a\lambda + \sqrt{\lambda}\sqrt{2\omega^2\beta + (a^2 - 4b\beta)\lambda} \cosh(\sqrt{2b\lambda - \omega^2}x)} \exp(i\omega t). \quad (4.25)$$

Solusi  $\Phi$  diplot dalam grafik sebagai bentuk mutlak,  $|\Phi|$ , untuk beberapa nilai  $\omega$  yang diizinkan (4.22) seperti pada Gambar 4.2. Solusi terlokalisasi pada titik nol dengan kondisi batas



Gambar 4.2: Bentuk solusi  $\phi$  untuk  $n = 1$  dengan  $\omega = 0.447 + 5\epsilon$ ,  $\epsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$  (kiri) dan  $\omega^2 = 1, 1.4, 1.7, 2$  (kanan)

pada titik tak hingga bernilai nol. Bentuk  $\phi$  mengalami

pelebaran dengan menurunnya nilai  $\omega$  menuju  $\omega_{\min}$  seperti pada Gambar 4.2 kiri. Pada gambar kanan, merupakan bentuk  $\phi$  untuk beberapa nilai  $\omega$  yang besar. Amplitudo  $\phi$  mengalami penurunan menuju nol dengan bertambahnya nilai  $\omega$ ,  $\omega \rightarrow \omega_{\max}$ .

Bentuk rapat energi dari Q-ball model ini dapat ditentukan dengan

$$T_{00} = \omega^2 \phi^2 + \phi'^2 + \lambda(\beta \phi^4 - a\phi^3 + b\phi^2). \quad (4.26)$$

Dengan mensubstitusikan bentuk solusi (4.25) ke persamaan rapat energi, diperoleh bentuk

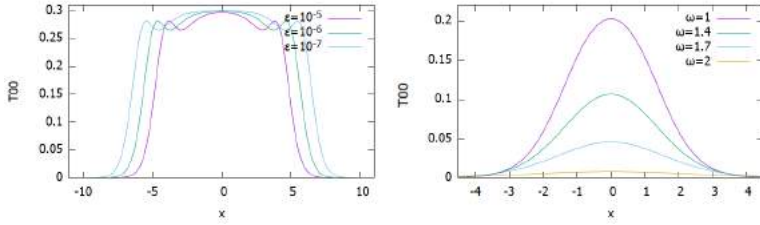
$$T_{00} = \frac{-3(\omega^2 - 2b\lambda)^2}{2\lambda \left( \sqrt{2\beta(\omega^2 - 2b\lambda)} + b^2\lambda \cosh\left(x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}\right) + a\sqrt{\lambda} \right)^4} \\ \times [-2\omega^2(\beta(\omega^2 - 3b\lambda) + a^2\lambda) \\ - 2a\sqrt{\lambda}\omega^2\sqrt{2\beta(\omega^2 - 2b\lambda)} + a^2\lambda \cosh\left(x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}\right) \\ + b\lambda\lambda(a^2 - 4b\beta) - (2\beta(\omega^2 - 2b\lambda) + a^2\lambda) \\ \times \cosh\left(2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}\right)]. \quad (4.27)$$

Rapat energi Q-ball, seperti ditunjukkan pada Gambar 4.3 Pada gambar kiri, bentuk  $T_{00}$  membesar dengan  $\omega$  mendekati  $\omega_{\min}$ . Gambar kanan memberikan gambaran bahwa amplitudo  $T_{00}$  menurun menuju nol dengan bertambahnya nilai  $\omega$ ,  $\omega \rightarrow \omega_{\max}$ . Q-ball tidak terbentuk pada  $\omega = \omega_{\max}$  dengan rapat energi nol.

Total energi sistem adalah

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx T_{00}. \quad (4.28)$$

Dengan mensubstitusi  $T_{00}$  dan mengintegrasikan terhadap keseluruhan ruang, Analisis detail dapat dilihat di Lampiran



Gambar 4.3: Rapat energi  $T_{00}$  untuk  $\omega = 0.447 + 5\epsilon$ ,  $\epsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$  (kiri) dan  $\omega^2 = 1, 1.4, 1.7, 2$  (kanan)

(A.3.1) diperoleh bentuk  $E$

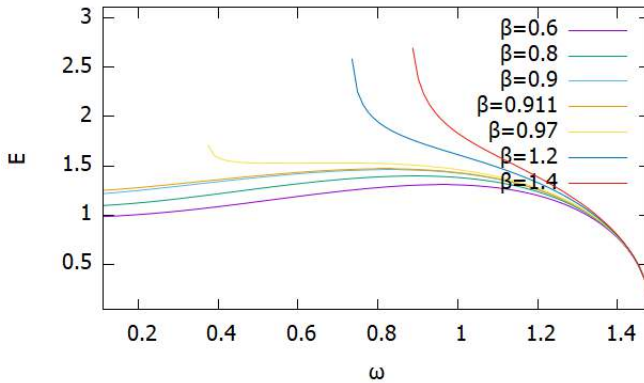
$$E = \frac{3a(2\beta(2b\lambda + \omega^2) - a^2\lambda) \tanh^{-1} \left( \frac{a\lambda - \sqrt{\lambda} \sqrt{-4b\beta\lambda + 2\beta\omega^2 + a^2\lambda}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta\lambda(2b\lambda - \omega^2)}} \right)}{4\sqrt{2}\beta^2\sqrt{\beta\lambda}} + \frac{\sqrt{\beta\lambda(2b\lambda - \omega^2)}(3a^2\lambda - 8\beta(b\lambda + \omega^2))}{8\beta^2\lambda\sqrt{\beta\lambda}} \quad (4.29)$$

Terlihat bahwa total energi sistem bernilai hingga dan bergantung pada nilai  $\omega$  seperti yang digambarkan pada Gambar 4.4.

Total muatan  $Q$  (3.8) dapat diperoleh dengan mensubstitusi solusi  $\phi$  dan mengintegalkannya. Analisis detail perolehan muatan  $Q$  dapat dilihat di Lampiran A. bentuk muatan  $Q$  adalah

$$Q = \frac{2\sqrt{2}a\omega\sqrt{\beta\lambda} \tanh^{-1} \left( \frac{a\lambda - \sqrt{\lambda} \sqrt{a^2\lambda - 4b\beta\lambda + 2\beta\omega^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta\lambda(2b\lambda - \omega^2)}} \right)}{\beta^2\lambda} - \frac{2\omega\sqrt{2b\lambda - \omega^2}}{\beta\lambda}. \quad (4.30)$$

Muatan  $Q$  bernilai hingga dan bergantung terhadap  $\omega$ . Kebergantungan ini dapat dilihat seperti pada Gambar 4.5

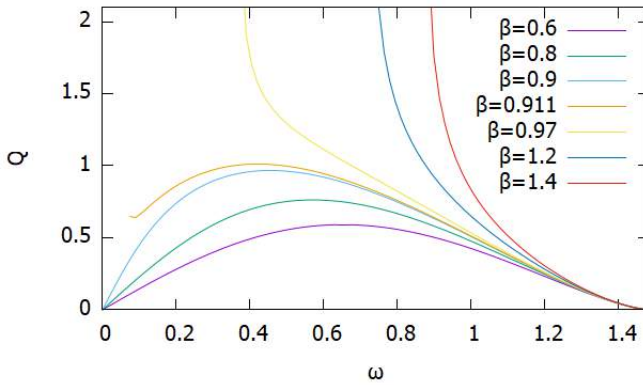


Gambar 4.4: Total energi  $E$  sebagai fungsi  $\omega$  untuk  $n = 1$  dengan beberapa variasi  $\beta$

Stabilitas kuantum dapat dianalisa melalui hubungan  $E/Q$  dan  $\omega$ . Perubahan  $E/Q$  terhadap  $\omega$  seperti pada Gambar 4.6

Gambar 4.5 dan Gambar 4.6 merupakan  $Q$  dan rasio  $E/Q$  sebagai fungsi  $\omega$  yang digunakan untuk mempelajari stabilitas Q-ball dengan beberapa variasi parameter  $\beta$ . Pada  $\beta = 0.6, 0.8, 0.9$ , dapat dilihat bahwa muatan  $Q$  tidak menurun secara monoton tetapi mengalami kenaikan dan kemudian menurun dengan bertambahnya  $\omega$  sehingga secara klasik Q-ball tidak stabil. Untuk beberapa interval  $\omega$  rasio  $E/Q$  berada diatas  $\omega_{\max}$  dan pada interval ini Q-ball secara kuantum tidak stabil dan untuk interval nilai  $E/Q < \omega_{\max}$ , Q-ball stabil secara kuantum. Jadi untuk kasus  $\beta = 0.6, 0.8, 0.9$  Q-ball stabil secara kuantum dan tidak secara klasik.

Nilai  $\beta$  yang lebih besar dari  $\beta = 0.9$ , membuat  $E/Q$  memiliki puncak, tetapi nilai  $\beta$  meningkat, puncak tersebut menurun dan diperoleh  $\beta = 0.911$ , dimana puncak  $E/Q$  mendekati nilai  $\omega_{\max} = \sqrt{2.2}$ . Fakta yang menarik adalah



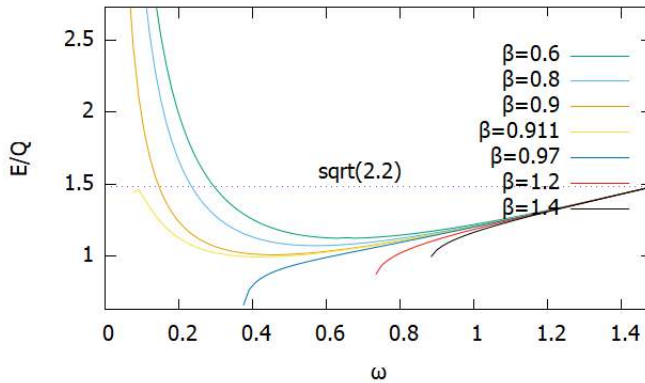
Gambar 4.5: Total muatan  $Q$  sebagai fungsi  $\omega$  untuk  $n = 1$  dengan variasi parameter  $\beta$

kasus ini Q-ball secara kuantum stabil. Namun, model ini secara klasik tidak stabil, karena muatan tidak menurun secara monoton terhadap meningkatnya  $\omega$ .

kasus  $\beta = 0.97, 1.2, 1.4$ , rasio  $E/Q$  sepenuhnya berada dibawah  $\omega_{\max}$  dan meningkat menuju  $\omega_{\max} = \sqrt{2.2}$ , sehingga model ini sepenuhnya stabil secara kuantum untuk semua range  $\omega$  yang diizinkan. Muatan  $Q$  menurun dengan bertambahnya  $\omega$  dan secara klasik, Q-ball stabil. Karena itu, untuk nilai  $\beta \geq 0.97$ , solusi Q-ball stabil secara kuantum maupun secara klasik.

Seperti yang ditampilkan pada Gambar 4.6 yang merupakan rasio  $E/Q$  untuk tiga nilai  $\beta$ . Ketidakstabilan secara kuantum muncul hanya pada  $\beta = 0.6, 0.8, 0.9$  karena  $E/Q$  melebihi  $\omega_{\max}$ . Selain itu, stabilan klasik hanya muncul untuk kasus  $\beta \geq 0.97$  seperti pada Gambar 4.5 karena muatan menjadi menurun secara monoton sebagai fungsi  $\omega$ .





Gambar 4.6: Rasio  $E/Q$  sebagai fungsi  $\omega$  untuk  $n = 1$  dengan tiga variasi parameter  $\beta$

### 4.3 Model $n = 2$

Model Q-ball ini memiliki suku pangkat orde-6, dengan bentuk potensial

$$U(|\Phi|^2) = \lambda(\beta|\Phi|^6 - a|\Phi|^4 + b|\Phi|^2). \quad (4.31)$$

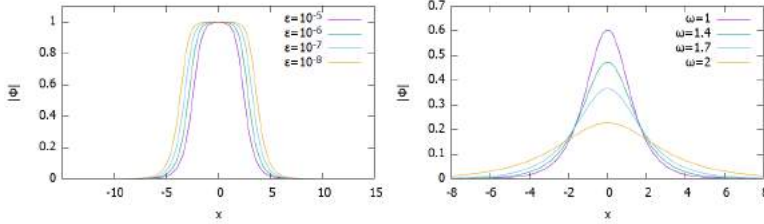
Bentuk potensial ini seperti pada Gambar 4.1. Model ini memberikan bentuk persamaan medan yang telah diperoleh dari pers.(4.7)

$$\omega^2\phi + \phi'' - \lambda(\beta\phi^6 - a\phi^4 + b\phi^2). \quad (4.32)$$

Solusi  $\phi$  dapat ditentukan dengan mengatur  $n = 2$  pada pers.(4.19) dan diperoleh solusi lengkap  $\Phi(x, t)$

$$\Phi(x, t) = \sqrt{\frac{2b\lambda - \omega^2}{a\lambda + \sqrt{\lambda}\sqrt{2\omega^2\beta + (a^2 - 4b\beta)\lambda} \cosh(2\sqrt{2b\lambda - \omega^2}x)}} \exp(i\omega t). \quad (4.33)$$

Bentuk solusi terhadap  $x$  seperti yang digambarkan pada Gambar 4.7 Solusi terlokalisasi pada titik  $x = 0$  sebagai titik



Gambar 4.7: Bentuk solusi  $\phi$  untuk  $n = 2$  dengan  $\omega = 0.447 + 5\epsilon$ ,  $\epsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$  (kiri) dan  $\omega^2 = 1, 1.4, 1.7, 2$  (kanan).

amplitudo dan solusi menurun menuju nol untuk  $x$  menuju tak hingga. Gambar 4.7 kiri merupakan bentuk solusi untuk nilai  $\omega \rightarrow \omega_{\min}$ . Solusi mengalami pelebaran bentuk dengan mengecilnya  $\omega$  menuju  $\omega$  minimum,  $\omega = \omega_{\min}$ . Pada gambar kanan menunjukkan bahwa amplitudo solusi menurun dengan meningkatnya  $\omega$  menuju  $\omega_{\max}$ .

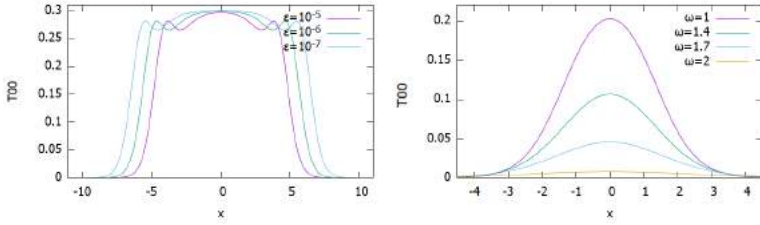
Rapat energi sistem pada model ini

$$T_{00} = \omega^2 \phi^2 + \phi'^2 + \lambda(\beta \phi^6 - a \phi^4 + b \phi^2).$$

Dengan mensubstitusi solusi  $\phi$  (4.33), diperoleh

$$\begin{aligned}
 T_{00} = & \frac{3(-\omega^2 + 2b\lambda)}{2\sqrt{\lambda} \left( \sqrt{\lambda}(a^2 - 4b\beta) + 2\beta\omega^2 \cosh(2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}) + a\sqrt{\lambda} \right)^3} \\
 & \times [b\lambda^2(4b\beta - a^2) + 2\lambda\omega^2(a^2 - 3b\beta) \\
 & + 2a\sqrt{\lambda}\omega^2 \sqrt{\lambda}(a^2 - 4b\beta) + 2\beta\omega^2 \cosh(2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}) \\
 & + b\lambda(-4b\beta\lambda + a^2\lambda + 2\beta\omega^2) \cosh(4x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}) \\
 & + 2\beta\omega^4]. \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

bentuk grafik rapat energi digambarkan seperti Gambar 4.8. Gambar kiri dapat dilihat bahwa rapat energi mengalami



Gambar 4.8: Rapat energi  $T_{00}$  untuk  $\omega = 0.447 + 5\epsilon$ ,  $\epsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$  (kiri) dan  $\omega^2 = 1, 1.4, 1.7, 2$  (kanan)

pelebaran untuk  $\omega$  menuju  $\omega_{\min}$ . Gambar kanan menunjukkan bahwa rapat energi sistem menurun dengan bertambahnya  $\omega$  menuju  $\omega_{\max}$ .

Total Energi sistem  $E$  dapat diperoleh dengan mengintegrasikan rapat energi  $T_{00}$  terhadap keseluruhan ruang, Analisis detail dapat dilihat di Lampiran (A.3.2),

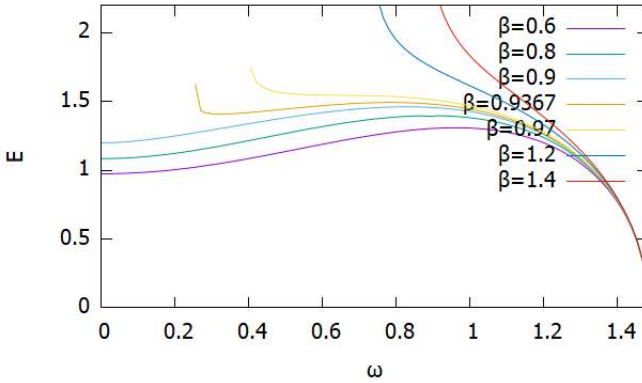
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx T_{00}.$$

dan diperoleh total energi sistem  $E$

$$E = \frac{3\sqrt{2} (c^2\lambda - 2\beta (2a\lambda + \omega^2)) \tanh^{-1} \left( \frac{c\lambda - \sqrt{\lambda} \sqrt{-4a\beta\lambda + 2\beta\omega^2 + c^2\lambda}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta\lambda(2a\lambda - \omega^2)}} \right)}{8\beta\sqrt{\beta\lambda}} + \frac{3c\sqrt{2a\lambda - \omega^2}}{8\beta}. \quad (4.35)$$

Total energi bernilai berhingga dan bergantung dengan nilai  $\omega$  seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.9.

Solusi  $\phi$  (4.33) disubstitusi ke pers.(3.8) diperoleh total muatan  $Q$ . Analisis detail perolehan muatan  $Q$  dapat dilihat



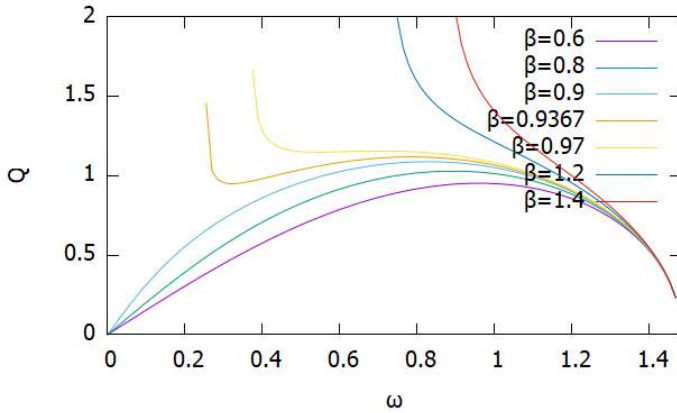
Gambar 4.9: Total energi  $E$  sebagai fungsi  $\omega$  untuk  $n = 2$  dengan beberap variasi  $\beta$

di Lampiran A.

$$Q = \frac{2\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\beta}\sqrt{\lambda}} \tanh^{-1} \left( \frac{c\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda(c^2 - 4a\beta) + 2\beta\omega^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{2a\lambda - \omega^2}} \right). \quad (4.36)$$

Bentuk grafik total muatan  $Q$  terhadap  $\omega$  adalah seperti Gambar 4.10. Dapat dilihat bahwa ketika  $\omega \rightarrow \omega_{\max}$ , muatan  $Q \rightarrow 0$  untuk sembarang nilai parameter  $\beta$ . Untuk  $\beta = 0.9$  nilai  $Q \rightarrow 0$  untuk  $\omega_{\min} = 0$ . Untuk  $\beta > 0.9$ , nilai muatan  $Q$  menuju nilai tertentu untuk  $\omega \rightarrow \omega_{\min}$ .

Untuk mempelajari stabilitas pada model ini seperti pada model  $n = 1$  sebelumnya, diplot grafik seperti Gambar 4.10 dan Gambar 4.11 untuk  $Q$  dan  $E/Q$  sebagai fungsi  $\omega$  untuk tiga variasi nilai  $\beta$ . Untuk kasus  $\beta = 0.6, 0.8, 0.9$  dengan  $0 < \omega^2 < 2.2$  dapat dilihat bahwa  $E/Q$  memiliki daerah yang lebih besar dari  $\omega_{\max} = \sqrt{2.2}$  yang mana diluar batas ini  $Q$ -ball tidak stabil dan untuk daerah dibawah  $\omega_{\max}$  stabil secara kuantum. Muatan  $Q$  tidak menurun secara monoton dengan

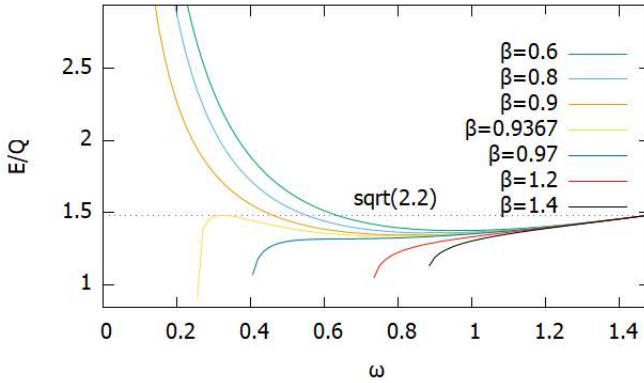


Gambar 4.10: Total muatan  $Q$  sebagai fungsi  $\omega$  untuk  $n = 2$  dengan variasi parameter  $\beta$ .

bertambahnya  $\omega$ , sehingga untuk  $\beta = 0.6, 0.7, 0.9$  Q-ball tidak stabil secara klasik.

Selanjutnya, untuk kasus  $\beta = 0.9367$  nilai  $E/Q$  memiliki puncak yang mendekati  $\omega_{\max} = \sqrt{2.2}$ . Fakta yang menarik pada kasus ini adalah bahwa rasio  $E/Q$  sekarang berada didalam daerah interval yang izinkan sehingga kasus  $\beta = 0.9367$  stabil secara kuantum. Namun tidak stabil secara klasik, karena muatan tidak berkurang secara monoton terhadap  $\omega$ .

Berikutnya dengan meningkatkan nilai  $\beta$  dan  $E/Q$  terus mengalami penurunan sehingga diperoleh pada  $\beta = 0.97, 1.2, 1.4$  kurva  $E/Q$  seluruhnya berada dibawah  $\omega_{\max} = \sqrt{2.2}$  untuk seluruh nilai  $\omega$ . Jadi secara kuantum, Q-ball stabil. Dengan meningkatnya nilai  $\beta$  menuju  $\beta = 0.97$ , muatan pada  $\omega \rightarrow \omega_{\min}$  meningkat mencapai tak hingga. Karena  $Q$  terus menurun secara monoton, maka Q-ball stabil secara klasik, sehingga pada model  $\beta = 0.97, 1.2, 1.4$  Q-ball



Gambar 4.11: Rasio  $E/Q$  sebagai fungsi  $\omega$  untuk  $n = 2$  dengan tiga variasi parameter  $\beta$

stabil secara kuantm dan klasik.

Dari Gambar 4.11, rasio  $E/Q$  untuk tiga nilai  $\beta$ , dapat diketahui bahwa Q-ball tidak stabil secara kuantum hanya muncul untuk  $\beta = 0.6, 0.8, 0.9$ , karena  $E/Q$  berada diatas  $\omega_{\max}$ . Stabilitas klasik hanya muncul pada nilai  $\beta \geq 0.97$  karena hanya pada nilai  $\beta$  ini muatan menjadi menurun secara monoton sebagai fungsi  $\omega$ .

#### 4.4 Interaksi Q-ball

Konfigurasi dua Q-ball dapat dimodelkan dengan ansatz yang berupa gabungan dari satu Q-ball

$$\Phi(x, t) = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (4.37)$$

dimana  $\Phi_1$  dan  $\Phi_2$  merupakan solusi medan bagi Q-ball pertama dan kedua. Dalam usaha memperoleh fenomena tumbukan, konfigurasi dua Q-ball perlu didorong dengan kecepatan  $v_0$ . Medan ini dapat bergerak dengan bantuan

transformasi Lorentz

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - v_0 t) \\t' &= \gamma(t - v_0 x)\end{aligned}\tag{4.38}$$

dimana  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}}$  adalah faktor Lorentz. Misalkan ekspresi konfigurasi medan  $\Phi(x', t')$  mendeskripsikan sebuah Q-ball bergerak dengan kecepatan  $v_0$ . Dari ansatz (4.5), dilakukan transformasi Lorentz, sehingga diperoleh [13]

$$\Phi(x, t) \rightarrow \Phi(x', t') = \Phi(\gamma(x - v_0 t), \gamma(t - v_0 x)).\tag{4.39}$$

Tumbukan terjadi jika kedua Q-ball bergerak dalam arah berlawanan dari posisi yang berbeda. Dimisalkan bahwa Q-ball pertama bergerak dengan kecepatan  $-v_0$  dan Q-ball kedua dengan kecepatan  $+v_0$ . Tanda  $\pm$  menandakan arah kecepatan. Dengan demikian, ansatz dua Q-ball (4.37) menjadi

$$\begin{aligned}\Phi(x', t') &= \Phi_{v=-v_0}(x' + x_0, t'_1)_{\omega_1} + \Phi_{v=v_0}(x' - x_0, t'_2)_{\omega_2} \\ &= \Phi'_1 + \Phi'_2\end{aligned}\tag{4.40}$$

$x_0$  merupakan posisi awal Q-ball pada  $t = 0$ .

Model tumbukan dua Q-ball dapat diperoleh dari evolusi medan  $|\Phi(x', t')|$  [13] dari persamaan diatas dan ansatz (4.5)

$$\begin{aligned}|\Phi(x', t')|^2 &= |\Phi'_1 + \Phi'_2|^2 \\ &= |\phi_1(x' + x_0) \exp(i\omega_1 t'_1) + \phi_2(x' - x_0) \exp(i\omega_2 t'_2)|^2 \\ &= \phi_1(x' + x_0)^2 + \phi_2(x' - x_0)^2 \\ &\quad + \phi_1(x' + x_0)\phi_2(x' - x_0) \exp(i[\omega_1 t'_1 - \omega_2 t'_2]) \\ &\quad + \phi_1(x' + x_0)\phi_2(x' - x_0) \exp(-[\omega_1 t'_1 - \omega_2 t'_2]) \\ &= \phi_1(x' + x_0)^2 + \phi_2(x' - x_0)^2 \\ &\quad + 2\phi_1(x' + x_0)\phi_2(x' - x_0) \cos(\omega_1 t'_1 - \omega_2 t'_2).\end{aligned}$$

Dari hasil transformasi pada pers.(4.39), mutlak  $\Phi$  menjadi

$$\begin{aligned}
 |\Phi(x, t)|^2 &= \phi_1(\gamma(x + v_0t) + x_0)^2 + \phi_2(\gamma(x + v_0t) - x_0)^2 \\
 &\quad + 2\phi_1(\gamma(x - v_0t) + x_0)\phi_2(\gamma(x + v_0t) - x_0) \\
 &\quad \times \cos(\omega_1\gamma(t + v_0x) - \omega_2\gamma(t - v_0x)) \\
 &= \phi_1(\gamma(x + v_0t) + x_0)^2 + \phi_2(\gamma(x + v_0t) - x_0)^2 \\
 &\quad + 2\phi_1(\gamma(x - v_0t) + x_0)\phi_2(\gamma(x + v_0t) - x_0) \\
 &\quad \times \cos([\omega_1 - \omega_2]\gamma t + [\omega_1 + \omega_2]v_0\gamma x) \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

Dari pers.(4.19), nilai  $\phi_1$  dan  $\phi_2$  adalah

$$\phi_1(x) = \sqrt[n]{\frac{2b\lambda - \omega_1^2}{a\lambda + \sqrt{\lambda}\sqrt{2\omega_1^2\beta + (a^2 - 4b\beta)\lambda} \cosh(n\sqrt{2b\lambda - \omega_1^2}[\gamma(x + v_0t) - x_0]}} \quad (4.42)$$

dan

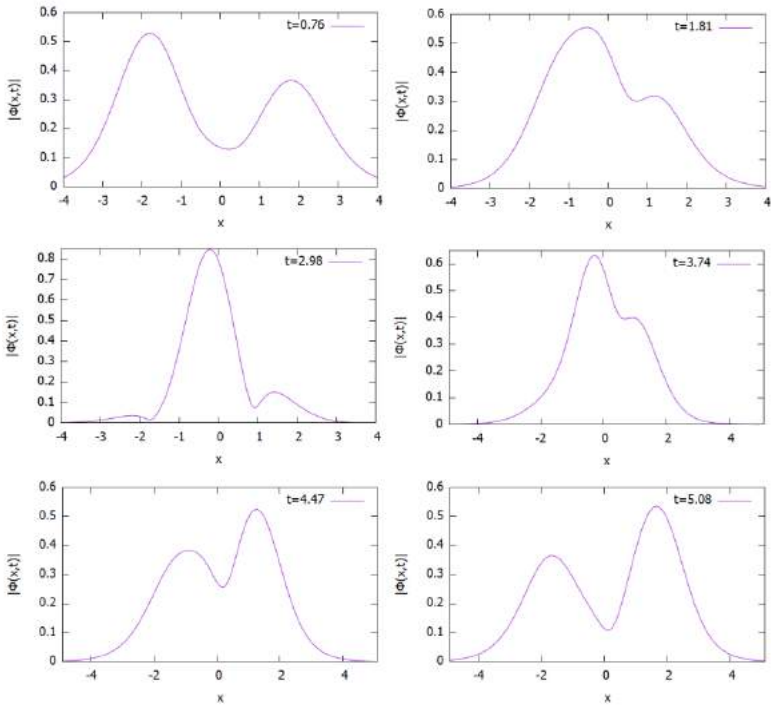
$$\phi_2(x) = \sqrt[n]{\frac{2b\lambda - \omega_2^2}{a\lambda + \sqrt{\lambda}\sqrt{2\omega_2^2\beta + (a^2 - 4b\beta)\lambda} \cosh(n\sqrt{2b\lambda - \omega_2^2}[\gamma(x - v_0t) + x_0]}}. \quad (4.43)$$

Evolusi sistem medan  $|\Phi(x, t)|$  ditunjukkan pada Gambar 4.12 dan Gambar 4.13. Pada bab ini hanya mengkaji model  $n = 1$ , untuk model  $n = 2$  dapat dilihat di Lampiran B. Pada Gambar 4.12 Tumbukan tersebut terjadi antara dua Q-ball yang memiliki nilai  $\omega$  yang berbeda dan dengan kecepatan  $v_1 = -v_2 = 0.8$ . Nilai  $\omega$  yang lebih kecil memberikan bentuk Q-ball yang lebih besar. Saat  $t = 2.98$ , tumbukan kedua Q-ball menghasilkan dua Q-ball kecil yang berbeda ukuran disekitar titik kedua Q-ball saling konstruksi. Saat  $t = 5.08$  setelah terjadi tumbukan, kedua Q-ball tetap saling mempertahankan bentuknya seperti sesaat sebelum tumbukan  $t = 0.76$ .

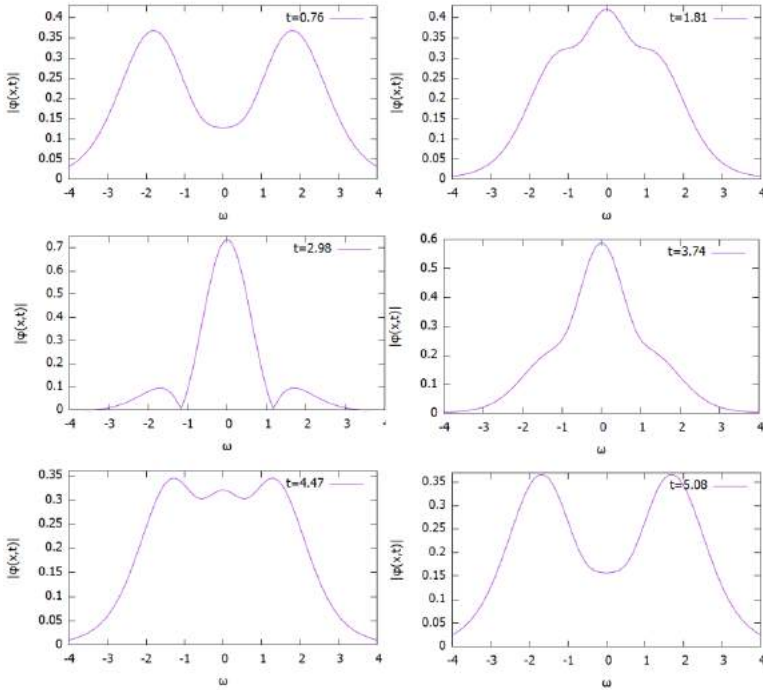
Gambar 4.13 menunjukkan tumbukan dua Q-ball dengan nilai  $\omega = 1$  yang sama untuk selang waktu  $0.76s \leq t \leq 5.08s$ . Kondisi ini memberikan bentuk Q-ball yang sama. Pada  $t = 0.76s$  kedua Q-ball bergerak dengan kecepatan  $v_1 = -v_2 = 0.8$



dengan arah yang saling mendekati. Saat  $t = 2.98$  kedua Q-ball menjadi satu membentuk tiga bentuk Q-ball baru dengan dua Q-ball kecil. Kedua Q-ball kecil ini memiliki ukuran yang sama dan ini berbeda dengan kasus  $\omega_1 \neq \omega_2$  yang memiliki ukuran yang berbeda. Pada  $t = 5.08$  merupakan kondisi setelah tumbukan. Kedua Q-ball tetap mempertahankan bentuknya seperti kondisi sebelum tumbukan.



Gambar 4.12: Tumbukan Q-ball untuk  $n = 1$  dengan muatan identik dan  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.8$  pada  $0.76s \leq t \leq 5.08s$



Gambar 4.13: Tumbukan Q-ball untuk  $n = 1$  dengan muatan identik dan  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  pada  $0.76s \leq t \leq 5.08s$

## BAB V PENUTUP

Dalam tugas akhir ini dilakukan pemodelan Q-ball pada dimensi  $(1 + 1)$  secara analitik beserta fitur-fiturnya meliputi solusi, rapat energi, total energi, muatan, stabilitas, dan tumbukan dua Q-ball. Untuk memperoleh model pada dimensi  $(1 + 1)$ , pertama dilakukan kajian ulang teori medan skalar dan soliton secara umum seperti soliton topologi dan nontopologi dengan mengambil satu contoh sederhana tiap tipenya pada dimensi  $(1 + 1)$ . Kedua, dilakukan pengembangan ke dimensi lebih tinggi yaitu  $(3 + 1)$  pada soliton nontopologi yang melahirkan Q-ball beserta stabilitasnya. Ketiga, model Q-ball pada dimensi  $(3 + 1)$  dilakukan penurunan dimensi ke dimensi  $(1 + 1)$  untuk memperoleh solusi analitik. Pengerjaan sebelumnya [5], [9], [13] dilakukan secara numerik. Pada [11], penelitian Q-ball dilakukan secara analitik, namun tidak memodelkan tumbukan dua Q-ball. Hal ini menjadi motivasi bagi pengerjaan tugas akhir ini dengan tujuan utama yaitu memodelkan secara analitik Q-ball beserta fiturnya dalam dimensi  $(1 + 1)$ .

Dalam Bab II, ditinjau kembali dasar-dasar soliton. Dengan memberikan suku nonlinear pada persamaan medan, akan melahirkan soliton. Keberadaan teorema Derrick yang membatasi solusi statis hanya berada dalam dimensi ruang  $D \leq 2$  melahirkan kelas baru salah satunya adalah kink. Dengan menambahkan kebergantungan waktu pada solusi, soliton dapat dibentuk dalam dimensi ruang  $D \geq 3$  dan tergolong dalam tipe nontopologi [3]. Akibat kebergantungan

terhadap waktu, diperoleh bahwa solusi hanya terbentuk pada selang frekuensi tertentu.

Pada bab III, Kajian dilakukan dengan mengembangkan tipe soliton nontopologi dan dibangun dalam dimensi  $(3 + 1)$  sferis yang invarian terhadap simetri global  $U(1)$  yang disebut Q-ball [4]. Q-ball dibentuk oleh medan skalar yang bergantung waktu. Akibat hal ini, Q-ball hanya ada pada selang frekuensi antara  $\omega_{\min}$  dan  $\omega_{\max}$ . Invariansi terhadap simetri global membangkitkan kekekalan muatan,  $Q$ , pada Q-ball. Selain itu, Q-ball hanya dapat dibentuk dari potensial interaksi diri. Potensial interaksi renormalisasi tidak dapat membentuk Q-ball akibat tidak memenuhi persyaratan selang  $\omega$ . Hanya potensial interaksi nonrenormalisasi yang diizinkan pada model ini. Saat solusi Q-ball dengan  $\omega > \omega_{\max}$ , Q-ball menjadi gelombang bidang dengan massa  $\mu$ . Agar terhindar menjadi gelombang bidang, kondisi Q-ball harus memenuhi  $E/Q < \omega_{\max}$  yang disebut kestabilan kuantum. Jika solusi diganggu dengan fluktuasi kecil, Q-ball menjadi tidak stabil. Untuk itu, nilai  $dQ/d\omega < 0$  yang disebut sebagai kestabilan klasik.

Dalam model dimensi  $(1 + 1)$  yang dipelajari pada bab IV, Q-ball dapat dibentuk dengan mengambil analogi pada dimensi  $(3 + 1)$ . Pada model ini, potensial interaksi nonrenormalisasi dimodelkan memiliki pangkat bergantung pada  $n$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ). Dalam penelitian tugas akhir ini, hanya mengambil model dengan  $n = 1$  dan  $n = 2$ . Ansatz solusi medan  $\phi(x)$  diberikan sebagai fungsi cosinus hiperbolik. Bentuk ini memberikan solusi eksak dari persamaan medan. Dengan solusi ini, rapat energi, total energi, dan muatan dapat diperoleh secara analitik. Rapat energi yang didapat terlokalisasi dan memiliki karakteristik bentuk membesar ketika  $\omega \rightarrow \omega_{\min}$  dan mengecil ketika  $\omega \rightarrow \omega_{\max}$ .

Dengan memberikan parameter  $\beta$ , dipelajari kondisi stabil

dari Q-ball. Nilai  $\beta \geq 0.911$  untuk  $n = 1$  dan  $\beta \geq 0.97$  untuk model  $n = 2$  memberikan bentuk  $E/Q < \omega_{\max}$  untuk semua nilai  $\omega$  dan Q-ball stabil secara kuantum. Namun jika  $\beta < 0.911$ , memberikan  $E/Q > \omega_{\max}$  dan hal ini menjadi Q-ball tidak stabil. Jika  $\beta \geq 0.911$  untuk model  $n = 1$  dan  $\beta \geq 0.9367$  untuk model  $n = 2$  membuat  $dQ/d\omega < 0$  dan pada kondisi ini Q-ball stabil secara klasik. Tetapi, jika kurang dari  $\beta$  tersebut, Q-ball tidak stabil.

Dengan melakukan transformasi Lorentz pada solusi, Q-ball mengalami dorongan untuk bergerak dengan kecepatan  $v$ . Untuk memperoleh tumbukan dua Q-ball, dilakukan penggabungan dua solusi yang telah ditransformasi menjadi sebuah ansatz konfigurasi dua Q-ball. Evolusi dari tumbukan adalah evolusi dari mutlak dari ansatz konfigurasi dua Q-ball. Tumbukan dimodelkan dengan kondisi nilai  $\omega_1$  untuk Q-ball pertama dan  $\omega_2$  untuk Q-ball kedua berbeda dan sama. Kedua Q-ball didorong dengan kecepatan  $v_2 = -v_1 = 0.8$  dengan posisi awal  $x_1 = -x_2 = 4$  dalam rentang waktu  $0.76s \leq t \leq 5.08s$  diperoleh bahwa, pada waktu  $t = 2.98$  terbentuk tiga Q-ball dengan dua Q-ball kecil disekitar Q-ball besar. Hal ini berlaku bagi  $\omega_1$  sama dengan  $\omega_2$  maupun tidak. Namun, bentuk dari Q-ball kecil memiliki bentuk yang berbeda pada kondisi  $\omega_1 \neq \omega_2$  dan sama pada kondisi  $\omega_1 = \omega_2$ .

## 5.1 Kesimpulan

Dari hasil studi literatur dan penyelidikan secara analitik yang telah dilakukan terkait model Q-ball dalam ruang-waktu  $(1 + 1)$  dimensi, diperoleh beberapa kesimpulan, antara lain:

1. Bentuk solusi yang diperoleh secara analitik dari persamaan medan Q-ball merupakan fungsi trigonometri hiperbolik, yaitu  $\cosh$ , yang mampu menghadirkan solusi yang terlokalisasi dalam ruang baik untuk model  $n = 1$  atau  $n = 2$ .

2. Solusi dari Q-ball mengalami penambahan lebar ketika  $\omega \rightarrow \omega_-$  dan penurunan amplitudo ketika  $\omega \rightarrow \omega_+$ .
3. Bentuk rapat energi Q-ball terlokalisasi dan mengalami penambahan lebar ketika  $\omega \rightarrow \omega_-$  serta penurunan amplitudo ketika  $\omega \rightarrow \omega_+$ .
4. Total energi Q-ball bernilai hingga dan bergantung pada parameter  $\omega$ .
5. Muatan Q bernilai berhingga hanya untuk rentang nilai  $\omega$  dan tidak bernilai diluar batas tersebut.
6. Q-ball stabil secara kuantum pada semua rentang nilai  $\omega$  yang diizinkan dengan parameter  $\beta \geq 0.911$  untuk model  $n = 1$  dan  $\beta \geq 0.97$  untuk model  $n = 2$ .
7. Q-ball stabil secara klasik pada semua rentang nilai  $\omega$  yang diizinkan dengan parameter  $\beta \geq 0.97$  untuk model  $n = 1$  dan  $\beta \geq 0.9367$  untuk model  $n = 2$ .
8. Q-ball stabil secara kuantum maupun klasik saat nilai  $\beta \geq 0.97$  untuk model  $n = 1$  dan  $n = 2$ .
9. Q-ball mampu mempertahankan bentuk setelah mengalami tumbukan dengan Q-ball lain.

## 5.2 Saran

Terdapat beberapa hal yang belum diteliti lebih dalam terkait topik tugas akhir ini, sehingga diberikan beberapa saran untuk penelitian selanjutnya diantaranya:

1. Model Q-ball dalam aspek kosmologi sebagai kandidat materi gelap dengan menggunakan model potensial Affleck-Dine.

2. Dalam kasus yang paling sederhana dengan potensial yang sama seperti yang telah diterapkan dalam penelitian tugas akhir ini, akan diperoleh bintang boson [9].
3. Q-ball dapat juga dibangun pada ruang-waktu latar belakang AdS [15] dan ruang-waktu melengkung

*"Halaman ini sengaja dikosongkan"*



## DAFTAR PUSTAKA

- [1] G.H Derrick, *J. Math.Phys.* **5**(1964)1252.
- [2] Mitsuo Tsumagari. *The Physics of Q-balls*. The University of Nottingham, Nottingham, 2009.
- [3] T.D.Lee and Y.Pang, *Phys.Rep.* **B262**,251(1992).
- [4] S.R.Coleman, *Nucl. Phys.* **B262**,263(1985).
- [5] M.S.Volkov and E.Wohnert, *Phys. Rev.* **D66**,085003(2002).
- [6] Rajaraman. *Solitons and Instantons:an Introduction*. Indian Institute of Science, India, 1989.
- [7] M.Banados, and I.Reyes, **arXiv:hep-th/1601.03616v3**.
- [8] J.A.Dror, *Solitons and Instantons Lecture Notes*, Cornell University, 2016.
- [9] B.Kleihaus, J.Kunz, and M.List, **arXiv:gr-qc/0505143v1**.
- [10] D.Bezeia, L.Losano, M.A.Marques, R.Menezes, and R.da Rocha, **arXiv:gr-th/1604.08871v2**.
- [11] D.Bezeia, M.A.Marques, and R.Menezes, *Eur.Phys.J.* **C76**,241(2016).
- [12] M.Hadi, *Berkenalan dengan Soliton*. [www.fisika.lipi.go.id](http://www.fisika.lipi.go.id), 2005.
- [13] M.Axenides, S.Komineas, L.Perivolaropoulos, M.Floratos, **arXiv:hep-ph/9910388v2**.

- [14] A.Purwanto, *Pengantar Kosmologi*, ITS press, Surabaya, 2011.
- [15] E.Radu, and B.Subagyo, **arXiv:gr-qc/1207.3715**.
- [16] C.Herdeiro, J.Kuns, E.Radu, and B.Subagyo, **arXiv:gr-qc/1712.04286**

## LAMPIRAN A

### Model Q-ball dalam Dimensi (1 + 1)

#### A.1 Solusi Q-ball

Persamaan medan dalam bentuk  $n$  diberikan oleh

$$\omega^2 \phi + \phi'' - \lambda[(2 + 2n)\beta\phi^{2n+1} - a(2 + n)\phi^{n+1} + b\phi] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Dengan bentuk ansatz  $\phi$  sebagai fungsi trigonometri hiperbolik

$$\phi(x) = \sqrt[m]{\frac{A}{C + B \cosh(Dx)}} \quad (\text{A.2})$$

disubstitusikan ke persamaan medan (A.1), diperoleh bentuk

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{B^2 D^2 \sinh^2(Dx) \left( \frac{A}{B \cosh(Dx) + C} \right)^{1/m}}{B^2 m \cosh^2(Dx) + 2BCm \cosh(Dx) + C^2 m} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \\ & - 2\beta\lambda(n+1) \left( \frac{A}{B \cosh(Dx) + C} \right)^{\frac{2n+1}{m}} \\ & + (\omega^2 - 2b\lambda) \left( \frac{A}{B \cosh(Dx) + C} \right)^{1/m} \\ & - \frac{BD^2 \cosh(Dx) \left( \frac{A}{B \cosh(Dx) + C} \right)^{1/m}}{Bm \cosh(Dx) + Cm} \\ & + a\lambda(2+n) \left( \frac{A}{B \cosh(Dx) + C} \right)^{\frac{n+1}{m}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

dengan mengambil  $m = n$ , maka persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned}
0 &= \left( \frac{A}{B \cosh(Dx) + C} \right)^{1/n} \frac{1}{n^2(B \cosh(Dx) + C)^2} \\
&\times [n^2 (aAC\lambda(n+2) - 2A^2\beta\lambda - 2A^2\beta\lambda n - 2bC^2\lambda + C^2\omega^2) \\
&+ Bn \cosh(Dx) (aA\lambda n(n+2) - C(4b\lambda n + D^2 - 2n\omega^2)) \\
&- B^2n \cosh^2(Dx) (2b\lambda n + D^2 - n\omega^2) \\
&+ B^2D^2(n+1) (\cosh^2(Dx) - 1)] \\
&= \left( \frac{A}{B \cosh(Dx) + C} \right)^{1/n} \frac{1}{n^2(B \cosh(Dx) + C)^2} \\
&\times [(n^2 (aAC\lambda(n+2) - 2A^2\beta\lambda - 2A^2\beta\lambda n - 2bC^2\lambda + C^2\omega^2) \\
&- B^2D^2(n+1)) \\
&+ (Bn (aA\lambda n(n+2) - C(4b\lambda n + D^2 - 2n\omega^2))) \cosh(Dx) \\
&+ (B^2D^2(n+1) - B^2n(2b\lambda n + D^2 - n\omega^2)) \cosh^2(Dx)].
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Bentuk diatas diperoleh koefesien variabel berdasarkan pangkat cosh

$$\begin{aligned}
\cosh^0(Dx) &: aAC\lambda n^3 + 2aAC\lambda n^2 - 2A^2\beta\lambda n^3 - 2A^2\beta\lambda n^2 \\
&\quad - 2bC^2\lambda n^2 - B^2D^2n - B^2D^2 + C^2n^2\omega^2 \\
\cosh^1(Dx) &: aAB\lambda n^3 + 2aAB\lambda n^2 \\
&\quad - 4bBC\lambda n^2 - BCD^2n + 2BCn^2\omega^2 \\
\cosh^2(Dx) &: -2bB^2\lambda n^2 + B^2D^2 + B^2n^2\omega^2.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Agar memenuhi persamaan bernilai nol, karena nilai  $\cosh(Dx)$  tidak mungkin nol, maka nilai tiap koefesienya harus bernilai nol. Dari koefesien pangkat dua, diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= -2bB^2\lambda n^2 + B^2D^2 + B^2n^2\omega^2 \\
D &= n\sqrt{2b\lambda - \omega^2}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Dari koefesien pangkat satu

$$\begin{aligned}
0 &= aAB\lambda n^3 + 2aAB\lambda n^2 \\
&\quad - 4bBC\lambda n^2 - BCD^2n + 2BCn^2\omega^2 \\
A &= \frac{2bC\lambda - C\omega^2}{a\lambda}.
\end{aligned}$$

dengan menganggap  $C = 1$  dan dari koefisien pangkat nol, diperoleh bentuk  $B$  dan  $A$

$$\begin{aligned}
0 &= aAC\lambda n^3 + 2aAC\lambda n^2 - 2A^2\beta\lambda n^3 - 2A^2\beta\lambda n^2 \\
&\quad - 2bC^2\lambda n^2 - B^2D^2n - B^2D^2 + C^2n^2\omega^2 \\
B &= \frac{\sqrt{a^2\lambda - 4b\beta\lambda + 2\beta\omega^2}}{a\sqrt{\lambda}} \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$A = \frac{2b\lambda - \omega^2}{a\lambda}. \tag{A.8}$$

Dari nilai  $A, B, C, D$  yang telah diperoleh diatas, maka bentuk umum (A.2) menjadi

$$\begin{aligned}
\phi &= \sqrt[n]{\frac{\frac{2b\lambda - \omega^2}{a\lambda}}{1 + \frac{\sqrt{a^2\lambda - 4b\beta\lambda + 2\beta\omega^2}}{a\sqrt{\lambda}} \cosh(n\sqrt{2b\lambda - \omega^2}x)}} \\
&= \sqrt[n]{\frac{2b\lambda - \omega^2}{a\lambda + \sqrt{\lambda}\sqrt{a^2\lambda - 4b\beta\lambda + 2\beta\omega^2} \cosh(n\sqrt{2b\lambda - \omega^2}x)}} \tag{A.9}
\end{aligned}$$

bentuk diatas merupakan bentuk eksak solusi dari persamaan differensial (A.1).

## A.2 Bentuk Muatan

### A.2.1 Model $n = 1$

Setelah memperoleh bentuk umum dari solusi, maka dapat diperoleh total muatan  $Q$ . Dari persamaan muatan

$$Q = 2\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx\phi^2 \tag{A.10}$$

dan mensubstitusikan solusi  $\phi$ (A.9), untuk  $n = 1$ , didapatkan hasil

$$\begin{aligned}
 Q &= 2\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{A}{C + B \cosh(Dx)} \right)^2 \\
 &= \frac{2A^2\omega}{D} \frac{2C \tan^{-1} \left( \frac{(C-B) \tanh\left(\frac{Dx}{2}\right)}{\sqrt{B^2-C^2}} \right)}{(B^2 - C^2)^{3/2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 &\quad + \frac{2A^2\omega}{D} \frac{B \sinh(Dx)}{(B - C)(B + C)(B \cosh(Dx) + C)} \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad (\text{A.11})
 \end{aligned}$$

dengan nilai  $A, B, C, D$  seperti yang telah diperoleh sebelumnya. Sebelum mengevaluasi bentuk  $Q$  diatas, perlu diketahui bahwa

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh(Dx) = \pm 1 \quad (\text{A.12})$$

dan dengan metode L'Hopital, suku diperoleh bahwa

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sinh(Dx)}{B \cosh(Dx) + C} = \pm \frac{1}{B} \quad (\text{A.13})$$

sehingga bentuk  $Q$  (A.11) menjadi

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{2A^2\omega}{D} \left( \frac{2C \tan^{-1} \left( \frac{C-B}{\sqrt{B^2-C^2}} \right)}{(B^2 - C^2)^{3/2}} \right) - \left( -\frac{2C \tan^{-1} \left( \frac{C-B}{\sqrt{B^2-C^2}} \right)}{(B^2 - C^2)^{3/2}} \right) \\
 &\quad + \frac{2A^2\omega}{D} \frac{1}{(B - C)(B + C)} - \left( -\frac{2A^2\omega}{D} \frac{1}{(B - C)(B + C)} \right) \\
 &= \frac{4A^2\omega}{D} \left( \frac{2C \tan^{-1} \left( \frac{C-B}{\sqrt{B^2-C^2}} \right)}{(B^2 - C^2)^{3/2}} \right) + \frac{4A^2\omega}{D} \frac{1}{(B - C)(B + C)} \\
 &= \frac{4A^2\omega}{D} \left( \frac{2C \tan^{-1} \left( \frac{C-B}{\sqrt{B^2-C^2}} \right)}{(B^2 - C^2)^{3/2}} + \frac{1}{(B - C)(B + C)} \right). \quad (\text{A.14})
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi nilai  $A, B, C, D$  diperoleh

$$Q = \frac{2\sqrt{2}a\omega\sqrt{\beta\lambda} \tanh^{-1} \left( \frac{a\lambda - \sqrt{\lambda}\sqrt{a^2\lambda - 4b\beta\lambda + 2\beta\omega^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta\lambda(2b\lambda - \omega^2)}} \right)}{\beta^2\lambda} - \frac{2\omega\sqrt{2b\lambda - \omega^2}}{\beta\lambda} \quad (\text{A.15})$$

### A.2.2 Model $n = 2$

Dengan metode yang sama seperti pada model  $n = 1$ , untuk model  $n = 2$  muatan  $Q$

$$Q = 2\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{2b\lambda - \omega^2}{a\lambda + \sqrt{\lambda}\sqrt{a^2\lambda - 4b\beta\lambda + 2\beta\omega^2} \cosh(n\sqrt{2b\lambda - \omega^2}x)}$$

Menggunakan Software Mathematica, diperoleh hasil integral

$$Q = \frac{\sqrt{2}\omega \tanh^{-1} \left( \frac{(a\sqrt{\lambda} - \sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2b\lambda)}) \tanh(x\sqrt{2b\lambda - \omega^2})}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{2b\lambda - \omega^2}} \right)}{\sqrt{\beta}\sqrt{\lambda}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} \quad (\text{A.16})$$

Berdasarkan bentuk dari pers.(A.12), diperoleh hasil

$$\begin{aligned}
Q &= \left( \frac{\sqrt{2}\omega \tanh^{-1} \left( \frac{a\sqrt{\lambda} - \sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2b\lambda)}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{2b\lambda - \omega^2}} \right)}{\sqrt{\beta}\sqrt{\lambda}} \right) \\
&\quad - \left( - \frac{\sqrt{2}\omega \tanh^{-1} \left( \frac{a\sqrt{\lambda} - \sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2b\lambda)}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{2b\lambda - \omega^2}} \right)}{\sqrt{\beta}\sqrt{\lambda}} \right) \\
&= \frac{(2\sqrt{2})\omega}{\sqrt{\beta}\sqrt{\lambda}} \tanh^{-1} \left( \frac{c\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda(c^2 - 4a\beta) + 2\beta\omega^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{2a\lambda - \omega^2}} \right). \tag{A.17}
\end{aligned}$$

Bentuk diatas merupakan bentuk eksplisit muatan  $Q$  dengan model  $n = 2$ .

### A.3 Energi

#### A.3.1 Model $n = 1$

Energi total dapat diperoleh dengan mengintegrasikan rapat energi terhadap seluruh ruang. Bentuk rapat energi

$$\mathcal{E} = \omega^2\phi^2 + \phi'^2 + \lambda(\beta\phi^4 - a\phi^3 + b\phi^2) \tag{A.18}$$

dengan mensubstitusi solusi pada pers.(A.9), rapat energi menjadi

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{-3(\omega^2 - 2b\lambda)^2}{2\lambda \left( \sqrt{2\beta(\omega^2 - 2b\lambda) + b^2\lambda} \cosh \left( x\sqrt{2b\lambda - \omega^2} \right) + a\sqrt{\lambda} \right)^4} \\
&\quad \times [-2\omega^2(\beta(\omega^2 - 3b\lambda) + a^2\lambda) \\
&\quad - 2a\sqrt{\lambda}\omega^2\sqrt{2\beta(\omega^2 - 2b\lambda) + a^2\lambda} \cosh \left( x\sqrt{2b\lambda - \omega^2} \right) \\
&\quad + b\lambda(a^2 - 4b\beta) - (2\beta(\omega^2 - 2b\lambda) + a^2\lambda) \\
&\quad \times \cosh \left( 2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2} \right)]. \tag{A.19}
\end{aligned}$$



Total energi sistem menjadi

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{E} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-3(\omega^2 - 2b\lambda)^2}{2\lambda \left( \sqrt{2\beta(\omega^2 - 2b\lambda) + b^2\lambda} \cosh(x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}) + a\sqrt{\lambda} \right)^4} \\
 &\quad \times [-2\omega^2 (\beta(\omega^2 - 3b\lambda) + a^2\lambda) \\
 &\quad - 2a\sqrt{\lambda}\omega^2 \sqrt{2\beta(\omega^2 - 2b\lambda) + a^2\lambda} \cosh(x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}) \\
 &\quad + b\lambda\lambda (a^2 - 4b\beta) - (2\beta(\omega^2 - 2b\lambda) + a^2\lambda) \\
 &\quad \times \cosh(2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2})] dx \tag{A.20}
 \end{aligned}$$

Hasil integrasi

$$\begin{aligned}
E = & \frac{3a\sqrt{\beta\lambda(\omega^2 - 2\lambda)}(2\beta(2\lambda + \omega^2) - a^2\lambda) \tan^{-1} \left( \frac{(a\lambda - \sqrt{\lambda}\sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2\lambda)}) \tanh(\frac{1}{2}x\sqrt{2\lambda - \omega^2})}{\sqrt{2}\sqrt{\beta\lambda(\omega^2 - 2\lambda)}} \right)}{8\beta^3\lambda\sqrt{4\lambda - 2\omega^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
& - \frac{(2\lambda - \omega^2)^{5/2} \sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2\lambda)} \sinh(x\sqrt{2\lambda - \omega^2})}{2\lambda \left( \sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2\lambda)} \cosh(x\sqrt{2\lambda - \omega^2}) + a\sqrt{\lambda} \right)^3} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
& + \frac{a(2\lambda - \omega^2)^{3/2} \sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2\lambda)} \sinh(x\sqrt{2\lambda - \omega^2})}{8\beta\sqrt{\lambda} \left( \sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2\lambda)} \cosh(x\sqrt{2\lambda - \omega^2}) + a\sqrt{\lambda} \right)^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
& + \frac{\sqrt{2\lambda - \omega^2} \sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2\lambda)} (3a^2\lambda - 8\beta(\lambda + \omega^2)) \sinh(x\sqrt{2\lambda - \omega^2})}{16\beta^2 \left( \lambda\sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2\lambda)} \cosh(x\sqrt{2\lambda - \omega^2}) + a\lambda^{3/2} \right)} \Big|_{-\infty}^{\infty}.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Karena

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sinh(Dx)}{B \cosh(Dx) + C} = \pm \frac{1}{B} \quad (\text{A.22})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sinh(Dx)}{(B \cosh(Dx) + C)^{n+1}} = 0 \quad (\text{A.23})$$

dengan  $n = 1, 2, \dots$  diperoleh bentuk  $E$

$$E = \frac{3a(2\beta(2b\lambda + \omega^2) - a^2\lambda) \tanh^{-1} \left( \frac{a\lambda - \sqrt{\lambda} \sqrt{-4b\beta\lambda + 2\beta\omega^2 + a^2\lambda}}{\sqrt{2} \sqrt{\beta\lambda(2b\lambda - \omega^2)}} \right)}{4\sqrt{2}\beta^2\sqrt{\beta\lambda}} + \frac{\sqrt{\beta\lambda(2b\lambda - \omega^2)}(3a^2\lambda - 8\beta(b\lambda + \omega^2))}{8\beta^2\lambda\sqrt{\beta\lambda}} \quad (\text{A.24})$$

### A.3.2 Model $n = 2$

Energi total dapat diperoleh dengan mengintegrasikan rapat energi terhadap seluruh ruang. Bentuk rapat energi

$$\mathcal{E} = \omega^2\phi^2 + \phi'^2 + \lambda(\beta\phi^6 - a\phi^4 + b\phi^2) \quad (\text{A.25})$$

dengan mensubstitusi solusi pada pers.(A.9), rapat energi menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{3(-\omega^2 + 2b\lambda)}{2\sqrt{\lambda} \left( \sqrt{\lambda(a^2 - 4b\beta)} + 2\beta\omega^2 \cosh \left( 2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2} \right) + a\sqrt{\lambda} \right)^3} \\ & \times [b\lambda^2(4b\beta - a^2) + 2\lambda\omega^2(a^2 - 3b\beta) \\ & + 2a\sqrt{\lambda}\omega^2\sqrt{\lambda(a^2 - 4b\beta)} + 2\beta\omega^2 \cosh \left( 2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2} \right) \\ & + b\lambda(-4b\beta\lambda + a^2\lambda + 2\beta\omega^2) \cosh \left( 4x\sqrt{2b\lambda - \omega^2} \right) \\ & + 2\beta\omega^4]. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Total energi sistem menjadi

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{E} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3(-\omega^2 + 2b\lambda)}{2\sqrt{\lambda} \left( \sqrt{\lambda(a^2 - 4b\beta) + 2\beta\omega^2} \cosh(2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}) + a\sqrt{\lambda} \right)^3} \\
 &\times [b\lambda^2(4b\beta - a^2) + 2\lambda\omega^2(a^2 - 3b\beta) \\
 &\quad + 2a\sqrt{\lambda}\omega^2\sqrt{\lambda(a^2 - 4b\beta) + 2\beta\omega^2} \cosh(2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}) \\
 &\quad + b\lambda(-4b\beta\lambda + a^2\lambda + 2\beta\omega^2) \cosh(4x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}) \\
 &\quad + 2\beta\omega^4] dx \tag{A.27}
 \end{aligned}$$

Hasil integrasi

$$\begin{aligned}
E = & \frac{3\sqrt{b\lambda - \frac{\omega^2}{2}} (a^2\lambda - 2\beta(2b\lambda + \omega^2)) \tan^{-1} \left( \frac{(a\lambda - \sqrt{\lambda}\sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2b\lambda)}) \tanh(x\sqrt{2b\lambda - \omega^2})}{\sqrt{2}\sqrt{\beta\lambda(\omega^2 - 2b\lambda)}} \right)}{8\beta\sqrt{\beta\lambda(\omega^2 - 2b\lambda)}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
& - \frac{3(2b\lambda - \omega^2)^{3/2} \sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2b\lambda)} \sinh(2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2})}{8\sqrt{\lambda} \left( \sqrt{a^2\lambda + 2\beta(\omega^2 - 2b\lambda)} \cosh(2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}) + a\sqrt{\lambda} \right)^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
& + \frac{3a\sqrt{2b\lambda - \omega^2} \sqrt{a^2\lambda - 4b\beta\lambda + 2\beta\omega^2} \sinh(2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2})}{16\beta\sqrt{a^2\lambda - 4b\beta\lambda + 2\beta\omega^2} \cosh(2x\sqrt{2b\lambda - \omega^2}) + 16a\beta\sqrt{\lambda}} \Big|_{-\infty}^{\infty}.
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Karena

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sinh(Dx)}{B \cosh(Dx) + C} = \pm \frac{1}{B} \quad (\text{A.29})$$

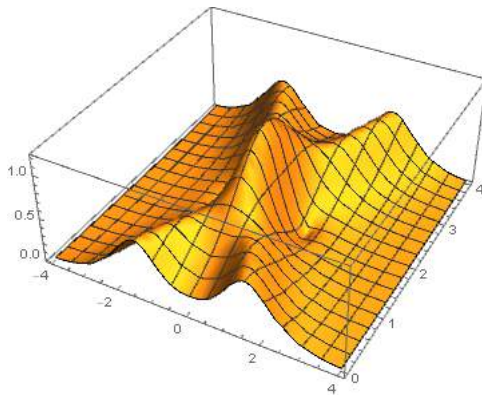
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sinh(Dx)}{(B \cosh(Dx) + C)^{n+1}} = 0 \quad (\text{A.30})$$

dengan  $n = 1, 2, \dots$  diperoleh bentuk  $E$

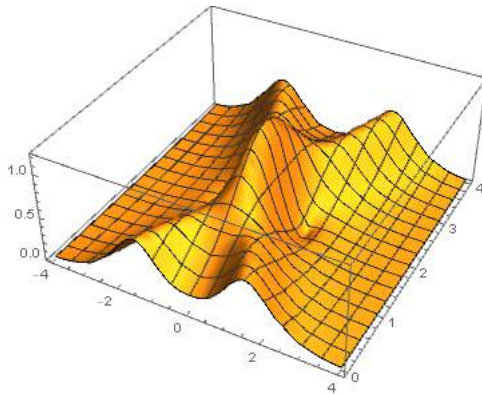
$$E = \frac{3\sqrt{2} (c^2\lambda - 2\beta (2a\lambda + \omega^2)) \tanh^{-1} \left( \frac{c\lambda - \sqrt{\lambda} \sqrt{-4a\beta\lambda + 2\beta\omega^2 + c^2\lambda}}{\sqrt{2} \sqrt{\beta\lambda(2a\lambda - \omega^2)}} \right)}{8\beta\sqrt{\beta\lambda}} + \frac{3c\sqrt{2a\lambda - \omega^2}}{8\beta}. \quad (\text{A.31})$$

## LAMPIRAN B

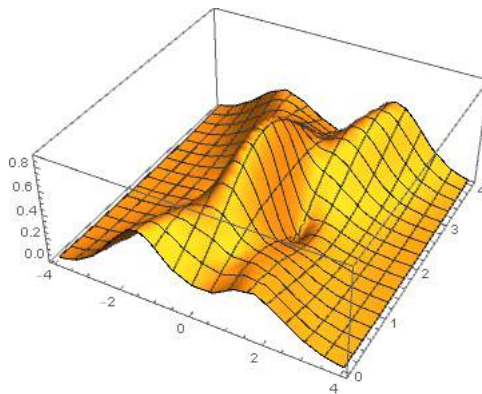
### Tumbukan Dua Q-ball



B.1: Tumbukan Q-ball untuk  $n = 1$  dengan muatan identik dan  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  pada  $0 \leq t \leq 4s$

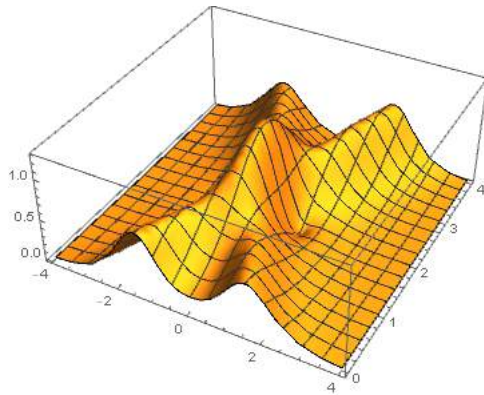


B.2: Tumbukan Q-ball untuk  $n = 2$  dengan muatan identik dan  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  pada  $0 \leq t \leq 4s$

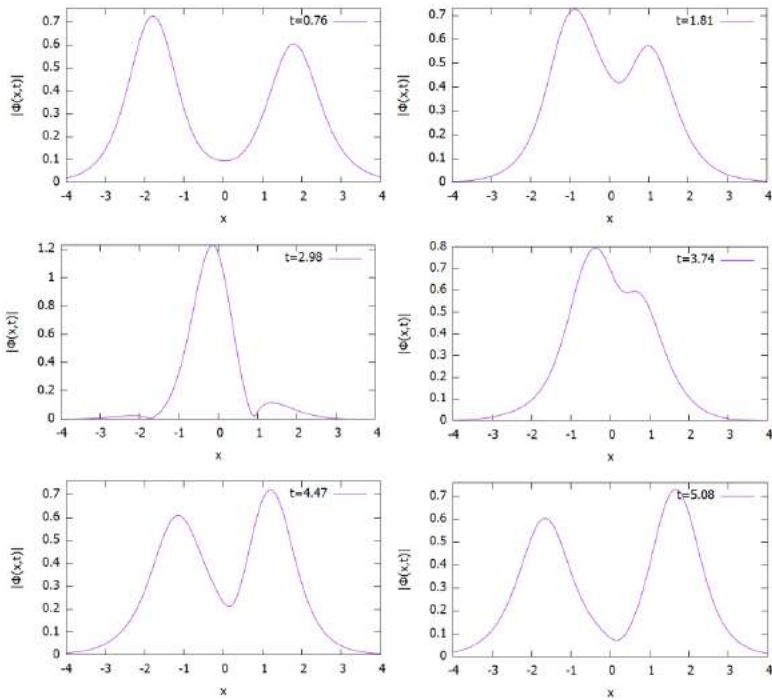


B.3: Tumbukan Q-ball untuk  $n = 1$  dengan muatan identik dan  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.8$  pada  $0 \leq t \leq 4s$

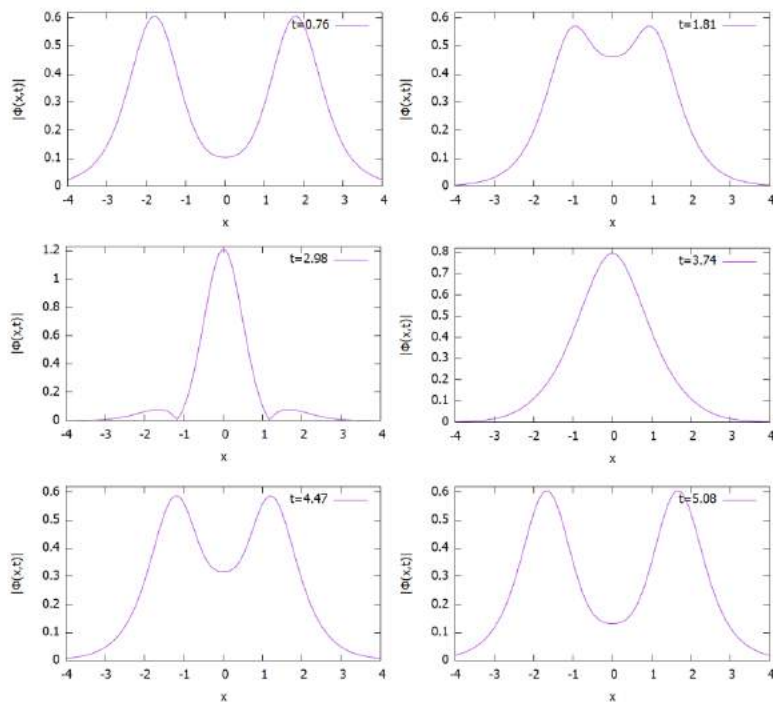




B.4: Tumbukan Q-ball untuk  $n = 2$  dengan muatan identik dan  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.8$  pada  $0.76s \leq t \leq 5.08s$



B.5: Tumbukan Q-ball untuk  $n = 2$  dengan muatan identik dan  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.8$  pada  $0.76s \leq t \leq 5.08s$



B.6: Tumbukan Q-ball untuk  $n = 2$  dengan muatan identik dan  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  pada  $0.76s \leq t \leq 5.08s$

*"Halaman ini sengaja dikosongkan"*

## LAMPIRAN C

### Perhitungan dengan *Mathematica*

#### C.1 Solusi Q-ball

Berikut merupakan script untuk menentukan solusi Q-ball dalam (1 + 1) dimensi dengan menggunakan *mathematica*

```

Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];
Off[General::spell1];

eqn = D[p[x], {x, 2}] + \[Omega]^2 p[x] -
      2*\[Lambda]*b*p[x] + (n + 2)*\[Lambda]*a*p[x]^(
      1 + n) - (2*n + 2)*\[Lambda]*\[Beta]*p[x]^(2 n +
      1);
p[x_] = Power[A/(G + B*Cosh[F*x]), (m)^-1];
ExpandAll[eqn]
m = n;
Simplify[eqn]
(*di ambil suku bagian dalam saja*)
eqn1 = -2 b \[Lambda] + \[Omega]^2 +
      a (2 + n) \[Lambda] (A/(G + B Cosh[F x])) -
      2 (1 + n) \[Beta] \[Lambda] (A/(G + B Cosh[F x]))
      ^2 - (
      B F^2 Cosh[F x])/(G n + B n Cosh[F x]) - (
      B^2 F^2 (-1 + n) Sinh[F x]^2)/(n^2 (G + B Cosh[F
      x])^2) + (
      2 B^2 F^2 Sinh[F x]^2)/(n (G + B Cosh[F x])^2);
Simplify[ExpandAll[eqn1]]
(*diambil pembilang saja*)
eqn2 = n^2 (-2 b G^2 \[Lambda] + a A G (2 + n) \[
      Lambda] -
      2 A^2 \[Beta] \[Lambda] - 2 A^2 n \[Beta] \[
      Lambda] +
      G^2 \[Omega]^2) +
      B n (-F^2 G +

```

```

n (a A (2 + n) \[Lambda] +
  2 G (-2 b \[Lambda] + \[Omega]^2)) Cosh[F
  x] -
B^2 n (F^2 + 2 b n \[Lambda] - n \[Omega]^2) Cosh
[F x]^2 +
B^2 F^2 (1 + n) (Cosh[F*x]^2 - 1);
ExpandAll[eqn2];
Coefficient[eqn2, Cosh[F*x], 2]
Coefficient[eqn2, Cosh[F*x], 1]
Coefficient[eqn2, Cosh[F*x], 0]
Solve[Coefficient[eqn2, Cosh[F*x], 2] == 0, F]
F = n Sqrt[2 b \[Lambda] - \[Omega]^2];
Solve[Coefficient[eqn2, Cosh[F*x], 1] == 0, A]
A = (2 b G \[Lambda] - G \[Omega]^2)/(a \[Lambda]);
G = 1;
FullSimplify[Solve[Coefficient[eqn2, Cosh[F*x], 0]
  == 0, B]]
B = (Sqrt[1 + n] Sqrt[2 b \[Lambda] - \[Omega]^2]
  Sqrt[-a^2 \[Lambda] + 4 b \[Beta] \[Lambda] -
  2 \[Beta] \[Omega]^2])/
  (a Sqrt[\[Lambda]] Sqrt[(1 + n) (-2 b \[Lambda] +
  \[Omega]^2)]);
FullSimplify[p[x]]

```

## C.2 Energi dan Muatan

### C.2.1 Model $n = 1$

```

Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];
Off[General::spell1];

(*Misalkan solusi dari persamaan medan untuk n=1
  adalah sebagai \
berikut*)
z = m/(n + o*Cosh[q*x]);
b = 1;
FullSimplify[Integrate[2*\[Omega]*z^2, x]]
(*dengan memasukan batas integral dari -\[Infinity]
  ke \[Infinity], \
diperoleh bentuk muatan Q*)

```

```

Q = (4 m^2 \[Omega] ((
  2 n ArcTan[(n - o) /Sqrt[-n^2 + o^2]])/(-n^2 + o
    ^2)^(3/2) +
  1/(-n^2 + o^2) ))/q
(*untuk bentuk tensor energi*)
(*agar mempermudah perhitungan, digunakan pemisalan
  variabel*)
T00 = FullSimplify [\[Omega]^2*
  z^2 + (D[z, x])^2 + \[Lambda] (\[Beta]*z^4 - a*z
    ^3 + c*z^2)]
Integrate[T00, x]
(*hasil integrasi T00*)
T00x = -(1/(6 (n^2 - o^2)^3 q))
  m^2 (1/Sqrt[-n^2 + o^2]
    6 (-2 a m n^4 \[Lambda] + a m n^2 o^2 \[Lambda]
      ) +
    a m o^4 \[Lambda] + 2 n^5 (c \[Lambda] + \[
      Omega]^2) +
    n (3 m^2 o^2 \[Beta] \[Lambda] +
      o^4 (q^2 + 2 c \[Lambda] + 2 \[Omega]^2))
    -
    n^3 (-2 m^2 \[Beta] \[Lambda] +
      o^2 (q^2 + 4 c \[Lambda] + 4 \[Omega]^2))
      ) ArcTan[((n -
        o) Tanh[(q x)/2])/Sqrt[-n^2 + o^2]] + (
    2 o (n^2 - o^2)^2 (n^2 q^2 - o^2 q^2 +
      m^2 \[Beta] \[Lambda]) Sinh[q x])/(n + o Cosh
        [q x])^3 - (
    o (-n^2 + o^2) (-n^3 q^2 + n o^2 q^2 - 3 a m n^2
      \[Lambda] +
      3 a m o^2 \[Lambda] + 5 m^2 n \[Beta] \[
        Lambda]) Sinh[
      q x])/(n + o Cosh[q x])^2 +
    1/(n + o Cosh[q x])
    o (-9 a m n^3 \[Lambda] + 9 a m n o^2 \[Lambda]
      ) +
    4 m^2 o^2 \[Beta] \[Lambda] +
    2 o^4 (q^2 + 3 c \[Lambda] + 3 \[Omega]^2) +
    n^4 (-q^2 + 6 (c \[Lambda] + \[Omega]^2)) -
    n^2 (-11 m^2 \[Beta] \[Lambda] +
      o^2 (q^2 + 12 (c \[Lambda] + \[Omega]^2)))
  )

```

```

    )) Sinh[q x])
    (*dengan memasukan batas integral dari -\
      Infinity] ke \[Infinity], \
diperoleh bentuk muatan Energi*)
Energi[\[Omega]_] = -(2/(6 (n^2 - o^2)^3 q))
  m^2 (1/Sqrt[-n^2 + o^2]
    6 (-2 a m n^4 \[Lambda] + a m n^2 o^2 \[
      Lambda] +
    a m o^4 \[Lambda] + 2 n^5 (c \[Lambda] + \[
      Omega]^2) +
    n (3 m^2 o^2 \[Beta] \[Lambda] +
      o^4 (q^2 + 2 c \[Lambda] + 2 \[Omega]^2)
    ) -
    n^3 (-2 m^2 \[Beta] \[Lambda] +
      o^2 (q^2 + 4 c \[Lambda] + 4 \[Omega]^2)
    )) ArcTan[(n - o)/
  Sqrt[-n^2 + o^2]] + (-9 a m n^3 \[Lambda] +
  9 a m n o^2 \[Lambda] + 4 m^2 o^2 \[Beta] \[
  Lambda] +
  2 o^4 (q^2 + 3 c \[Lambda] + 3 \[Omega]^2) +
  n^4 (-q^2 + 6 (c \[Lambda] + \[Omega]^2)) -
  n^2 (-11 m^2 \[Beta] \[Lambda] +
    o^2 (q^2 + 12 (c \[Lambda] + \[Omega]^2)))
  ));
m = -\[Omega]^2 + 2 b \[Lambda];
n = a \[Lambda];
o = Sqrt[\[Lambda]] Sqrt [
  2 \[Omega]^2 \[Beta] + (a^2 - 4 b \[Beta]) \[
  Lambda]];
q = Sqrt[-\[Omega]^2 + 2 b \[Lambda]];
FullSimplify[Energi[\[Omega]]]
FullSimplify[T00x]
FullSimplify[Q]

```

### C.2.2 Model $n = 2$

```

Remove["Global '*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];
Off[General::spell1];

```



```

p[x_] = ((-W^2 + 2 a \[Lambda])/(
  c \[Lambda] +
  Sqrt[\[Lambda]] Sqrt[
    2 W^2 \[Beta] + (c^2 - 4 a \[Beta]) \[Lambda]]
  Cosh[b x Sqrt[-W^2 + 2 a \[Lambda]]]))^(1/b);
b = 2;
Simplify[Integrate[2*W*p[x]^2, x]]
Q = (2 Sqrt[2])/(Sqrt[\[Beta]] Sqrt[\[Lambda]] )
  W ArcTanh[(c Sqrt[\[Lambda]] - Sqrt[
    2 W^2 \[Beta] + (-4 a \[Beta] + c^2) \[Lambda]
  ])]/(
  Sqrt[2] Sqrt[\[Beta]] Sqrt[-W^2 + 2 a \[Lambda]
  ]));
*untuk bentuk tensor energi*
(*agar mempermudah perhitungan, digunakan pemisalan
variabel*)
z = Sqrt[m/(n + o*Cosh[q*x])];
T00 = FullSimplify[\[Omega]^2*
  z^2 + (D[z, x])^2 + \[Lambda] (\[Beta]*z^6 - a*z
  ^4 + b*z^2)]
Integrate[T00, x]
(*dengan memasukan batas integral dari -\[Infinity]
ke \[Infinity], \
diperoleh bentuk muatan Energi*)
Energi = 2/(8 q)
  m (-1/(-n^2 + o^2)^(5/2))
  2 (-8 c m n^3 \[Lambda] + 8 c m n o^2 \[
  Lambda] +
  4 m^2 o^2 \[Beta] \[Lambda] + 8 n^4 (W^2 + a
  \[Lambda]) +
  o^4 (q^2 + 8 W^2 + 8 a \[Lambda]) -
  n^2 (-8 m^2 \[Beta] \[Lambda] +
  o^2 (q^2 + 16 (W^2 + a \[Lambda]))))
  ArcTan[(n - o)/
  Sqrt[-n^2 + o^2]] + (n^3 q^2 + 8 c m n^2 \[
  Lambda] -
  8 c m o^2 \[Lambda] -
  n (o^2 q^2 + 12 m^2 \[Beta] \[Lambda]))/((n -
  o)^2 (n + o)^2);
m = -\[Omega]^2 + 2 b \[Lambda];
n = a \[Lambda];

```

```

o = Sqrt[\[Lambda]] Sqrt [
  2 \[Omega]^2 \[Beta] + (a^2 - 4 b \[Beta]) \[
    Lambda]];
q = 2 Sqrt[-\[Omega]^2 + 2 b \[Lambda]];
FullSimplify[Energi]
FullSimplify[T00]

```

## BIODATA PENULIS



Penulis bernama Kasyfil Albar, biasa dipanggil kasfil. Penulis dilahirkan di Aceh Selatan, 9 Maret 1997. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari SDN Kampung Baru (2002-2008), SMP Negeri 1 Labuhanhaji (2008-2011), dan SMA Negeri Modal Bangsa Aceh (2011-2014). Kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Fisika ITS Surabaya pada tahun 2014 dengan NRP 1114 100 016.

Di Jurusan Fisika, penulis mengambil Bidang Minat Fisika Teori.

Penulis aktif dalam organisasi di lingkup jurusan Fisika ITS dalam bidang Desain grafis, penulis pernah menjadi staff departemen Media and Information Himpunan Mahasiswa Fisika ITS (MEDFO Himasika ITS) selama 2 tahun serta menjadi Direktur Utama Majalah Phoenix Himasika ITS selama 1 kepengurusan dan dalam Big Event pada Himasika ITS yaitu Ajang Physics Summits, Penulis pernah menjadi Ketua divisi tim pembuat soal Olimpiade Fisika Nasional 2017 dan pernah menjadi Ketua tim desain Physics Summit 2017 dan Dalam bidang mengajar penulis tercatat sebagai asisten dosen mata kuliah fisika dasar selama 2 semester, asisten Laboratorium Fisika dasar 1 semester, dan asisten Laboratorium Fisika Madya 2 semester.

Penulis juga berprestasi dalam bidang akademik khususnya Olimpiade Fisika diantaranya pernah mendapat medali perunggu dalam Lomba ONMIPA tahun 2018, dan juga pernah menerima Hibah(didanaai) Program Kreativitas Mahasiswa (PKM) bidang Karsa Cipta Tahun 2017.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui no hp(WA): 081237275177 atau email: *kasyfil.albar97@gmail.com*