TUGAS AKHIR – SM141501

ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL DINAMIK PENYEBARAN VIRUS ZIKA

NURANI DWI PANGESTUTI
NRP 06111440000001

Dosen Pembimbing:
Drs. Suhud Wahyudi, M.Si
Drs. Kamiran, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Intitut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018

FINAL PROJECT – SM141501

ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF SPREADING DYNAMIC ZICA VIRUS MODEL

NURANI DWI PANGESTUTI
NRP 06111440000001

Supervisors:
Drs. Suhud Wahyudi, M.Si
Drs. Kamiran, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics, Computation, and Data Science
Intitute of Technology Sepuluh Nopember
Surabaya 2018

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL DINAMIK PENYEBARAN VIRUS ZIKA

ANALYSIS DAN OPTIMAL CONTROL OF SPREADING DYNAMIC ZICA VIRUS MODEL

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang stui Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh November

Oleh :

Nurani Dwi Pangestuti
NRP. 06111440000001

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. Kamiran, M.Si	Drs. Suhud Wahyudi, M.Si
NIP. 19630623 198903 1 001	NIP. 19600109 198701 1 001

Mengetahui,
Ketua Departemen Matematika
FMKSD ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 30 Juli 2018

ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL DINAMIK PENYEBARAN VIRUS ZIKA

Nama Mahasiswa	:	Nurani Dwi Pangestuti
NRP	:	06111440000001
Departemen	:	Matematika-FMKSD ITS
Dosen Pembimbing	:	1. Drs. Suhud Wahyudi, M.Si
		2. Drs. Kamiran, M.Si

Abstrak

Virus zika adalah sejenis virus dari keluarga flaviviridae dan genus flavivirus yang disebarkan oleh nyamuk Aedes Aegypti yang dapat menyebabkan masalah serius seperti penyakit Guillain Barre Syndrome (GBS) dan mikrosefalus. Dalam tugas akhir ini, digunakan model penyebaran virus zika yang terdiri dari dua populasi yang dibagi menjadi beberapa sub-populasi antara lain sub-populasi manusia Susceptible, sub-populasi manusia Asymtomatic Infected, sub-populasi manusia Symtomatic Infected, sub-populasi manusia Recovered, sub-populasi nyamuk Susceptible, dan sub-populasi nyamuk Infected. Model dianalisis dengan menentukan bilangan reproduksi dasar, titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, serta kestabilan dari setiap titik kesetimbangan. Kemudian dilakukan kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin yang disimulasikan secara numerik menggunakan metode Range-Kutta. Hasil simulasi menunjukan menurunnya sub-populasi manusia yang terinfeksi virus zika dan menurunnya populasi nyamuk setelah adanya pemberian kontrol berupa penggunaan kondom, pengobatan, dan penyemprotan insektisida, dengan nilai fungsi objektif sebesar 1,0586.

Kata kunci: *Model penyebaran virus zika, Kestabilan, Kontrol Optimal, Prinsip Pontryagin, Metode Range-Kutta*

ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF SPREADING DYNAMIC ZICA VIRUS MODEL

Name	:	Nurani Dwi Pangestuti
NRP	:	06111440000001
Department	:	Mathematics-FMKSD ITS
Supervisors	:	1. Drs. Suhud Wahyudi, M.Si
		2. Drs. Kamiran, M.Si

Abstract

Zika is a virus from flaviviridae family and flavivirus genus that spread by Aedes Aegypti mosquito and that can cause serious problem disease such as Guillain Barre Syndrome (GBS) and mikrosefalus. This final project used spreading dynamic zika virus model that consists of two population and divided to sub-population Susceptible humans, sub-population Asymtomatic Infected humans, sub-population Infected humans, sub-population Recovered humans, sub-population Susceptible mosquitoes, and sub-population Infected mosquitoes. The model that anlysis by determine the basic reproduction number, the point of disease free and endemic equilibrium, and the stability of each point of equilibrium. Then, do the optimal control using Pontryagin principle with numerical solution given by Range-Kutta method. The simulation results show the decreasing sub-population of infected humans, asymptomatic infected human, and population of mosquitoes after given controls such using condom, treatment, and using indoor residual spray with value of objective function is 1.0586.

Keywords: *Spreading dynamic zika virus model, Stability, Optimal Control, Pontryagin Principle, Range-Kutta Method*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"Analisis dan Kontrol Optimal Pada Model Dinamik Penyebaran Virus Zika"

dimana Tugas Akhir ini adalah salah satu syarat kelulusan untuk Proram Sarjana Departemen Matematika; Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data; Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Dalam proses penyusunan Tugas Akhir ini, tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Kepala Departemen Matematika FMKSD ITS.
2. Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si dan Bapak Drs. Kamiran, M.Si selaku dosen pembimbing Tugas Akhir atas segala bimbingan yang telah diberikan kepada penulis
3. Bapak Dr. Hariyanto, M.Si, Bapak Drs. Komar Baihaqi, M.Si dan Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si, selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan untuk perbaikan Tugas Akhir penulis
4. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si selaku Kaprodi dan Bapak Drs. Iis Herisman, M.Sc selaku sekretaris Kaprodi S1 Matemtika ITS yang telah memberi dukungan dan kemudahan dalam mengurus persyaratan-persyaratan selama penulis menyelesaikan Tugas Akhir
5. Bapak Dr. Hariyanto, M.Si selaku dosen wali penulis yang telah memberikan motivasi dan arahan akademik
6. Bapak dan Ibu dosen serta seluruh staf Tata Usaha dan Laboratorium Departemen Matematika FMKSD-ITS

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyusunan Laporan Tugas Akhir ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis memohon saran dan kritik sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang. Semoga Laporan Tugas Akhir ini juga dapat bermanfaat bagi pembaca dan dapat memberikanmasukan informasi serta wacana yang bermanfaat bagi masyarakat pada umumnya.

Surabaya, 27 Juli 2018

Penulis

Special thanks to

Selama proses penyusunan Tugas Akhir ini, adapun pihak yang telah memberikan dukungan untuk penulis. Oleh karena itu, penulis ingin sekali mengucapkan terima kasih kepada:

1. Orang tua penulis, Ayah dan Ibu tercinta, Kakakku Insansari Pangestuti, Adik tengahku Roro Ayu Pangestuti, dan Adik bungsuku Rossa Ragil Pangestuti terimakasih atas semua dukungan dan doa yang terbaik untuk penulis, semoga Allah SWT selalu memberikan rahmat kepada kita semua.
2. Teman-teman angkatan 2014 Departemen Matematika ITS, terutama Retna Shely Purwanti yang selalu ada menemani penulis dalam suka maupun duka
3. Sahabat-sahabat penulis, Alifia Fitranti Febriana, Nurrahmah Wida Achmadi, Prayudhitia Putri Kusuma Wardani, dan Ridha Ardan Istiawan yang selalu ada untuk menghibur, menginspirasi dan mendukung penulis selama penyusunan Tugas Akhir ini

Tentu saja masih banyak pihak lain yang turut andil untuk mendukung penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu. Doa penulis, semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan ridhonya kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung penulis. Terimakasih.

DAFTAR ISI

Hal

HALAMAN JUDUL.....i
LEMBAR PENGESAHAN.....v
ABSTRAK.....vii
ABSTRACT.....ix
KATA PENGANTAR.....xi
DAFTAR ISI.....xv
DAFTAR GAMBAR.....xix
DAFTAR TABEL.....xxi
DAFTAR LAMPIRAN.....xxiii
BAB I PENDAHULUAN.....1
1.1 Latar Belakang.....1
1.2 Rumusan Masalah.....2
1.3 Batasan Masalah.....2
1.4 Tujuan.....3
1.5 Manfaat.....3
1.6 Sistematika Penulisan.....3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....5
2.1 Penelitian Terdahulu.....5
2.2 Virus Zika.....6
2.3 Penyebaran Virus Zika.....7
2.4 Analisis Model.....7

Hal

2.4.1 Titik Kesetimbangan....8
2.4.2 Bilangan Reproduksi Dasar....9
2.4.3 Analisis Kestabilan....9
2.5 Kontrol Optimal....13
2.6 Prinsip Maksismum Pontryagin....13
2.7 Metode Range-Kutta....15
BAB III METODE PENELITIAN....17
3.1 Studi Literatur....17
3.2 Mengkaji Model Dinamik Penyebaran Virus Zika....17
3.3 Analisis Kestabilan Model Penyebaran Virus Zika....17
3.4 Menyelesaikan Kontrol Optimal....17
3.5 Simulasi....18
3.6 Penarikan Kesimpulan dan Saran....18
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN....19
4.1 Deskripsi Model Penyebaran Virus Zika....19
4.2 Daerah Penyelesaian Model....27
4.2.1 Populasi Manusia....27
4.2.2 Populasi Nyamuk....29
4.3 Titik Keseimbangan....31
4.3.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit....32
4.3.2 Titik Kesetimbangan Endemik....34
4.4 Bilangan Reproduksi....37

Hal

4.5 Analisis Kestabilan 41
4.5.1 Kestabilan Titik Setimbang Bebas Penyakit 43
4.5.2 Kestabilan Titik Setimbang Endemik 47
4.6 Penyelesaian Kontrol Optimal 53
4.7 Solusi Numerik 60
4.8 Analisis Hasil Simulasi 76
4.8.1 Simulasi Kestabilan Endemik 77
4.8.2 Simulasi Kontrol Optimal 79
BAB V PENUTUP 85
5.1 Kesimpulan 85
5.2 Saran 85
DAFTAR PUSTAKA 87
LAMPIRAN 89

DAFTAR GAMBAR

Hal

Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Dinamik Penyebaran Virus Zika 22

Gambar 4.2 Dinamika Populasi Manusia untuk Titik Setimbang Endemik 78

Gambar 4.3 Dinamika Populasi Nyamuk untuk Titik Setimbang Endemik 78

Gambar 4.4 Grafik Sub-Populasi Manusia *Asymtomatic Infected* Sebelum dan Sesudah dikontrol 80

Gambar 4.5 Grafik Sub-Populasi Manusia *Symtomatic Infected* Sebelum dan Sesudah dikontrol 81

Gambar 4.6 Grafik Sub-Populasi Nyamuk *Susceptible* Sebelum dan Sesudah dikontrol 82

Gambar 4.7 Grafik Sub-Populasi Nyamuk *Infected* Sebelum dan Sesudah dikontrol 83

DAFTAR TABEL

Hal

Tabel 4.1 Nilai Awal Sub-Populasi untuk Simulasi Numerik Kontrol Optimal 76

Tabel 4.2 Nilai Parameter untuk Simulasi Numerik Kontrol Optimal 76

DAFTAR LAMPIRAN

Hal

Lampiran 1. Source Code GUI MATLAB 89

Lampiran 2. Biodata Penulis 111

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai pendahuluan pengerjaan tugas akhir, yang meliputi latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat yang dapat diambil dari penulisan tugas akhir.

1.1 Latar Belakang

Virus zika adalah sejenis virus dari keluarga *flaviviridae* dan genus *flavivirus* yang disebarkan oleh nyamuk *Aedes Aegypti* sehingga virus zika termasuk dalam garis virus yang sama dengan virus dengue penyebab penyakit demam berdarah. Dalam hal ini gejala yang ditimbulkan oleh virus zika berbeda dengan virus dengue, dimana secara umum infeksi virus zika pada orang dewasa hanya menampakkan gejala ringan pada 20% pasien yang terinfeksi. Bahkan pada 80% pasien yang terinfeksi tidak menunjukkan gejala apapun pada tahap awal infeksi [1]. Namun, laporan terbaru menyebutkan terjadi adanya masalah penyakit *Guillain Barre Syndrome* (GBS) dan mikrosefalus yang terkait dengan wabah virus zika.

Guillain Barre Syndrome (GBS) adalah sebuah sindrom langka yang disebabkan oleh sistem imun yang menyerang sebagian sistem saraf periferal. Kondisi ini mungkin membuat saraf meradang dan mengakibatkan kelumpuhan atau kelemahan otot. Sedangkan mikrosefalus adalah kelainan otak dengan ukuran kepala lebih kecil dari ukuran normal [2]. Kedua penyakit tersebut dapat dikaitkan dengan berbagai faktor penyebab diantaranya infeksi intrauterin, faktor genetik, paparan toksin dan lain sebagainya. Namun, penelitian epidemiologi menemukan hubungan peningkatan kedua penyakit tersebut setelah terjadinya wabah virus zika.

Peningkatan penyebaran virus zika ini tidak diiringi dengan peningkatan kesadaran masyarakat terhadap ancaman serius dari virus zika. Penyebaran virus zika bukan hanya melalui gigitan

nyamuk, tetapi juga dapat dengan interaksi antar individual yang terinfeksi virus zika tersebut. Selain itu juga, hingga saat ini masih belum ditemukannya vaksin atau pengobatan yang spesifik terhadap infeksi virus zika. Pengobatan yang disarankan sejauh ini hanya berupa terapi terhadap gejala, serta langkah-langkah pencegahan untuk dapat terhindar dari gigitan nyamuk yang dapat menginfeksi virus zika [3]. Melihat fenomena tersebut, perlu adanya model matematika dalam penyebaran virus zika, sehingga dari model tersebut dapat dianalisis kestabilan penyebaran virus tersebut dan dapat dikontrol optimal kan dengan berbagai faktor yang ada sesuai dengan fungsi tujuan yang diinginkan.

Dalam penulisan Tugas Akhir ini, dianalisis kestabilan model dinamik transmisi virus zika, serta dikontrol dengan beberapa faktor upaya yang dibutuhkan menggunakan prinsip Maksimum Pontryagin. Sehingga, dengan adanya kontrol optimal tersebut dapat ditentukan strategi yang optimal untuk dapat mengendalikan penyebaran wabah virus zika tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, adapun rumusan masalah dalam Tugas Akhir ini, yaitu sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis kestabilan model dinamik penyebaran virus zika?
2. Bagaimana kontrol optimal pada model dinamik penyebaran virus zika dengan prinsip maksimum pontryagin?
3. Bagaimana hasil simulasi kontrol optimal pada model dinamik penyebaran virus zika?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghasilkan pembahasan yang terfokus dalam pengerjaan Tugas Akhir ini, maka ada beberapa batasan yang harus diperhatikan, yaitu sebagai berikut:

1. Kontrol yang digunakan pada model dinamik penyebaran virus zika untuk upaya pencegahan transmisi virus dengan

penggunakan kondom, penyemprotan insektisida, serta pengobatan untuk individu yang terinfeksi virus zika.

2. Model sistem dinamik dan parameter-parameter yang digunakan berdasarkan pada jurnal: *"Optimal Control of Intervention Strategies and Cost Effectiveness Analysis for Zika Virus Model."* referensi [9], dengan mengkontruksi susunan populasi nyamuk, sehingga terdiri dari sub-populasi nyamuk *susceptible* dan sub-populasi nyamuk *infected.*
3. Penyelesaian kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin
4. Solusi numerik menggunakan metode Range-Kutta orde 4
5. Simulasi dilakukan dengan menggunakan *software* Matlab

1.4 Tujuan

Adapun tujuan yang diharapkan pada Tugas Akhir ini, yaitu sebagai berikut:

1. Mendapatkan analisis kestabilan model dinamik penyebaran virus zika
2. Mendapatkan solusi optimal untuk upaya pencegahan transmisi virus zika dengan penggunaan kondom, penyemprotan insektisida, serta pengobatan individu yang terinfeksi pada model penyebaran virus zika
3. Mengetahui hasil simulasi pada model dinamik penyebaran virus zika sebelum dan sesudah dikontrol

1.5 Manfaat

Adapun manfaat yang diharapkan pada Tugas Akhir ini yaitu sebagai pengetahuan dalam analisis kestabilan dan penerapan teori kontol optimal dengan menggunakan Prinsip *Maksimum Pontryagin* dalam model dinamik penyebaran virus zika serta sebagai referensi solusi yang optimal dalam upaya pengendalian penyebaran virus zika.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini terdiri dari 5 bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

   Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

   Bab ini berisi tentang materi-materi yang mendukung penulisan Tugas Akhir; antara lain mengenai penelitian terdahulu, virus zika, analisis kestabilan model, kontrol optimal, prinsip *maksimum pontryagin*, dan metode Range-Kutta

3. BAB III METODE PENELITIAN

   Bab ini berisi tentang langkah-langkah dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

   Bab ini berisi tentang bagaimana mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik serta menganalisis kestabilannya, menentukan bilangan reproduksi dasar, menerapkan prinsip *maksismum pontryagin* dalam mencari kontrol optimal, serta mensimulasikan model secara numerik menggunakan metode Range-Kutta orde 4

5. BAB V PENUTUP

   Bab ini berisi tentang kesimpulan Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai dasar teori yang digunakan dalam penyusunan tugas akhir, yang meliputi penelitian terdahulu, virus zika, analisis kestabilan model, kontrol optimal, prinsip *maksimum pontryagin*, serta metode Range-Kutta.

2.1 Penelitian Terdahulu

Banyak peneliti yang telah mengembangkan model dinamik penyebaran virus zika dengan segala permasalahnnya, salah satunya yaitu pada jurnal yang berjudul *Mathematical Modelling of Zika Virus* tahun 2016 oleh Bonyah, E. dan Okosun, K.O. [4]. Dalam jurnal tersebut dibahas mengenai analisis model dinamik penyebaran virus zika tersebut kemudian mereka mencoba membuat model kontrol baru untuk dapat meminimumkan jumlah individu yang terinfeksi dengan variabel kontrol pencegahan dan pengobatan virus zika.

Selain itu, ada juga model dinamik penyebaran virus zika, yaitu pada jurnal yang berjudul *Prevention and Control of Zika as Mosquito-Borne and Sexually Transmitted Disease: A Mathematical Modeling Analysis* tahun 2016 oleh Gao, D., dkk [5]. Dalam jurnal tersebut mereka membuat model kontrol penyebaran virus zika dengan pengembangan model *Mosquito-Borne* yang telah ada. Lalu, ditambahkan model transmisi virus zika yang disebabkan oleh individu yang terinfeksi virus zika melalui hubungan seks.

Pembuatan model dinamik penyebaran virus zika juga pernah dilakukan pada jurnal yang berjudul *Transmission Dynamics of Zika Virus in Island Population: A Modelling Analysis of the 2013-2014 French Polynesia Outbreak* tahun 2016 oleh Kurcharski, A.J., dkk [6]. Dalam jurnal tersebut mereka membuat suatu model transmisi dinamik penyebaran virus zika di Polynesia dari tahun 2013 hingga tahun 2014 dengan pengumpulan data yang ada. Setelah itu, dianalisis model tersebut sehingga

didapatkan berapa individu yang sehat dan terbebas dari infeksi virus zika beberapa tahun yang akan datang.

2.2 Virus Zika

Virus zika (ZIKV) adalah sejenis virus dari keluarga *flaviviridae* dan juga genus *flavivirus* yang disebarkan oleh nyamuk. Virus ini sendiri merupakan *arthropod-borne* virus (arbovirus) dimana RNA pertama tersebut diisolasi dari seekor monyet yang berasal dari nyamuk dan kemudian menyebar kebeberapa wilayah dunia. Virus Zika pada umumnya terjadi di daerah tropis di mana banyak ditemukan nyamuk *Aedes Aegpti.* Virus ini bisa menyerang siapa saja dalam berbagai kalangan usia.Virus zika termasuk dalam garis virus yang hampir serupa dengan dengan virus dengue penyebab penyakit demam berdarah. Gejala yang ditimbulkan oleh virus zika berbeda dengan virus dengue, dimana secara umum infeksi pada orang dewasa hanya menapakkan gejala ringan pada 20% pasien yang terinfeksi, gambaran klinisnya sangat mirip dengan chikungunya dan demam berdarah yaitu dengan muncunya gelaja demam, sakit kepala, emesis, ruam, dan arthalgia [7]. Bahkan, pada 80% pasien yang terinfeksi tidak menunjukkan gelaja apapun pada tahap awal. Adapun dalam kebanyakan kasus orang yang terinfeksi virus ini tidak menunjukkan gejala sama sekali. Menurut Kementerian Kesehatan, hanya 1 dari 5 orang yang terinfeksi menunjukkan gejala virus Zika.

Terkait dengan mewabahnya virus zika, membuat banyaknya laporan terbaru yang menyebutkan terjadi adanya masalah seperti *Guillain Barre Syndrome* (GBS) dan mikrosefalus. *Guillain Barre Syndrome* (GBS) adalah sebuah sindrom langka yang disebabkan oleh sistem imun yang menyerang sebagian sistem saraf periferal [8]. Penyakit ini dapat terjangkit di semua tingkatan usia mulai dari anak-anak sampai dewasa, akan tetapi jarang ditemukan pada manula.. Gejala dari penyakit ini dapat timbul seminggu atau dua minggu setelah infeksi usus atau tenggorokan. Kondisi tersebut yang mungkin membuat saraf meradang yang mengakibatkan kelumpuhan atau kelemahan otot jika tidak diobati secepatnya.

Sedangkan mikrosefalus adalah kelainan otak dengan ukuran kepala bayi lebih kecil dari ukuran normal atau dari ukuran kepala rata-rata berdasarkan umur dan jenis kelamin [2]. Kondisi tersebut yang menyebabkan anak mengalami perlambatan pertumbuhan otak, dan lain sebagainya yang memengaruhi pertumbuhan dan perkembangan anak. Kedua penyakit tersebut dapat dikaitkan dengan berbagai faktor penyebab diantaranya infeksi intrauterin, faktor genetik, paparan toksin selama kehamilan dan lain sebagainya. Namun, penelitian epidemiologi menemukan hubungan peningkatan kedua penyakit tersebut setelah terjadinya wabah virus zika. Walaupun belum terbukti secara ilmiah, namun bukti tersebut dari tahun ketahun semakin kuat [9].

2.3 Penyebaran Virus Zika

Zika termasuk kedalam kelompok arbovirus (*anthropode-borne virus)* sehingga berdasarkan definisinya virus ini dapat disebarkan oleh anthropoda dari satu vertebrata ke vertebrata lainnya melalui gigitan. Mekanisme penularan biologis umumnya terjadi saat vektor yang terinfeksi dengan darah host yang mengandung virus kemudian menyuntikan air liurnya yang mengandung virus pada host lain, sehingga terjadi penularan virus [7].

Vektor utama penyebaran virus zika adalah nyamuk dari genus *Aedes*, dimana analisis penularan virus zika oleh berbagai spesies telah dilakukan dan terbukti semua spesies pada genus tersebut rentan terinfeksi virus zika.

Pada tahun 1952, virus zika pertama kali terdeteksi pada manusia dengan menggunakan tes antibodi penetralisir serum di Afrika Timur. Hingga diperkirakan sekitar 80% orang yang terinfeksi virus zika berada pada fase asimptomatik dimana gejalanya belum tampak, namun seiring hari adapun gejala-gejala yang ditampakkan seperti gejala mirip *dengue* yang mencakup arthralgia, demam ringan, ruam, sakit kepala, nyeri otot dan konjungtivitas yang biasanya berlangsung 2-7 hari [9].

Pendeteksiaan virus zika sendiri melalui serum, air liur, air kencing, dan air mani. Telah diamati bahwa virus zika dapat ditularkan melalui kontak seksual dan telah dikonfirmasi terdapat 6 orang lebih yang mengalami kasus transmisi virus zika akibat hubungan seksual [9].

Demikian penyebaran virus zika diantara komunitas, populasi, regional, nasional, bahkan global. Hingga saat ini, peningkatan penyebaran virus zika tidak diiringi dengan peningkatan kesadaran masyarakat terhadap ancaman serius dari virus zika. Selain itu juga, hingga saat ini masih belum ditemukannya vaksin atau pengobatan yang spesifik terhadap infeksi virus zika. Pengobatan yang disarankan sejauh ini hanya berupa terapi terhadap gejala, serta langkah-langkah pencegahan untuk dapat terhindar dari nyamuk *Aedes Aegypti* yang dapat menginfeksi virus zika [3].

2.4 Analisis Model

Analisis model dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem pada model dinamik transmisi virus zika. Pada penelitian ini akan dianalisis mengenai kestabilan di sekitar titik kesetimbangan

2.4.1 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem dinamis yang dinyatan oleh suatu persamaan differensial biasa merupakan solusi dari sistem yang tidak berubah terhadap waktu

Misal, diberikan suatu persamaan differensial

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big), \qquad x(t_o) = x_0 \tag{2.1}$$

dengan $x(t) \in R^n$, vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

Definisi 2.1 [10].

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *disebut titik kesetimbangan dari suatu sistem jika* $f(\bar{x}) = 0$

2.4.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (*Ro)* adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata individu terinfeksi sekunder akibat tertular individu terinfeksi primer yang berlangsung pada populasi individu rentan penyakit. Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan menggunakan metode *next generation operator* dengan mencari matriks *F* dan *V* dari sistem penyebaran virus zika. F_i ada laju kemunculan infeksi baru pada kompartemen, V_i adalah laju perpindahan individu keluar dari kompartemen, dan x_o adalah titik kesetimbangan bebas penyakit, maka bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai *eigenvalue* terbesar dari matriks $[F][V]^{-1}$ dimana $F=\frac{\partial Fi(Xo)}{\partial(xj)}$ dan $V=\frac{\partial Vi(Xo)}{\partial(xj)}$

Jika model mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, maka tidak terjadi endemik jika Ro < 1 dan terjadi endemik jika Ro >1 [11].

2.4.3 Analisis Kestabilan

Untuk melakukan analisis kestabilan lokal, maka digunakan deret Taylor untuk mencari suatu hampiran solusi disekitar titik setimbang. Deret Taylor untuk system f di sekitar titik setimbang $\bar{x}$ adalah

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - x_i) + O(\|x - x_i\|)^2 \qquad (2.2)$$

Dimana turunan-turunan $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x}, \dots,$ dihitung pada $x = \bar{x}$. Dengan mengabaikan suku-suku berorde tinggi, selanjutnya persamaan (2.2) dapat disederhanakan menjadi

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x}(x - \bar{x}) \qquad (2.3)$$

Persamaan (2.3) akan memberikan suatu model matematik linier dari sistem nonlinier melalui pendekatan Deret Taylor. Selanjutnya, ditinjau dari sistem $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ disekitar titik setimbang $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ dan kondisi setimbangnya adalah ketika $f(\bar{x}) = 0$, maka persamaan sistem menjadi

$$\begin{aligned}
f_1(x) = {} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots \\
& + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) + O(\|x - \bar{x}\|)^2 \\
f_2(x) = {} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots \\
& + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) + O(\|x - \bar{x}\|)^2 \\
& \vdots \\
f_n(x) = {} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots \\
& + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) + O(\|x - \bar{x}\|)^2
\end{aligned}$$

Apabila suku-suku nonliniernya diabaikan maka diperoleh

$$\begin{aligned}
f_1(x) = {} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots \\
& + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \\
f_2(x) = {} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots \\
& + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$f_n(x) = \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \quad (2.4)$$

Selanjutnya didefinisikan:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \bar{x}_1 \\ y_2 &= x_2 - \bar{x}_2 \\ &\vdots \\ y_n &= x_n - \bar{x}_n \end{aligned}$$

Didapat derivatifnya adalah

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1, \dot{y}_2 = \dot{x}_2, \ldots, \dot{y}_n = \dot{x}_n$$

Sehingga $\dot{x} = f(x)$ menjadi $\dot{y} = f(y)$ dan diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = f_1(y) &= \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} y_n \\ \dot{y}_2 = f_2(y) &= \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} y_n \\ \dot{y}_3 = f_3(y) &= \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial x_n} y_n \\ &\vdots \\ \dot{y}_n = f_n(y) &= \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} y_n \end{aligned}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk matriks, maka diperoleh

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots \dfrac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots \dfrac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots \dfrac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Atau ditulis menjadi

$$\dot{y} = J\big(f(\bar{x})\big)Y$$

Dengan $J\big(f(\bar{x})\big)Y$ merupakan matriks Jacobian dan fungsi f di titik kesetimbangan $\bar{x}$. Berikut merupakan definisi mengenai matriks Jacobian.

Definisi 2.2 [10].
Diberikan fungsi $f = f_1, f_2, \dots, f_n$ *dengan* $f_1 \in C^1(E), I = 1,2,3, \dots, n, E \subseteq \mathbb{R}^n$ *dan* E *himpunan terbuka. Matriks*

$$J\big(f(\bar{x})\big) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots \dfrac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots \dfrac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots \dfrac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dinamakan matriks Jacobian dari f *dari* $\bar{x}$

Matriks Jacobian $J\big(f(\bar{x})\big)$ dapat digunakan untuk mengidentifikasi sifat kestabilan system nonlinier disekitar titik setimbang $\bar{x}$. Titik setimbang disubtitusikan ke dalam persamaan matriks Jacobian sehingga diperoleh nilai-nilai eigennya (λ) dari persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$

Secara umum kestabilan titik setimbang mempunyai perilaku sebagai berikut [12]:

1. Stabil, jika setiap nilai eigen real adalah negatif ($\lambda_i < 0$ untuk semua i)
2. Tak stabil, jika ada nilai eigen real yang positif ($\lambda_i > 0$ untuk semua i)
3. Sadel, jika perkalian dua buah nilai eigen real sembarang adalah negatif. Titik sadel ini bersifat tak stabil

Dari bilangan reproduksi dasar (R_0) juga dapat dianalisis kestabilan sistem dipersekitaran titik setimbang. Jika $R_0 < 1$, maka sistem akan stabil dipersekitaran titik setimbang non endemik dan jika $R_0 > 1$, sistem tidak stabil dipersekitaraan titik setimbang non endemik tersebut karena terjadi penyebaran penyakit. [13]

2.5 Kontrol Optimal

Pada umumnya masalah kontrol optimal adalah suatu masalah dengan tujuan mencari kontrol *u(t)* yang dapat mengoptimalkan (memaksimumkan atau meminimumkan) indeks performansi. Indeks performansi diformulasikan sebagai berikut [14]:

$$J\big(u(t)\big) = S\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t)dt \qquad (2.5)$$

Dengan kendala

$$x(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad (2.6)$$

dan kondisi batas $x(t_0) = x_0\ dan\ x\big(t_f\big) = x_f$, $t_0\ dan\ t_f$ masing-masing adalah waktu awal dan akhir. $S, V, dan\ f$ adalah fungsi skalar.

2.6 Prinsip *Maksimum Pontryagin*

Dalam menyelesaikan permasalahan kontrol optimal, salah satu metode yang dapat digunakan adalah prinsip maksimum

Pontryagin. Prinsip maksimum pontryagin merupakan suatu kondisi sehingga dapat diperoleh penyelesaian kontrol optimal yang sesuai dengan tujuan (memaksimalkan indeks performansi) [14].

Prosedur menyelesaikan kontrol optimal dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut [14]:

Diberikan persamaan *state* :

$$x = f(x(t), u(t), t) \tag{2.7}$$

Dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dan $u(t) \in \mathbb{R}^m$, dan indeks performansi:

$$J = S\left(x\left(t_f\right), t_f\right) + \int_{t_o}^{t_f} V(x(t), u(t), t)dt \tag{2.8}$$

dimana nilai kondisi batas $x(t_0) = x_0$ dan t_f diberikan, dan $x\left(t_f\right) = x_f$ bebas.

Syarat cukup untuk memaksimalkan indeks performansi J adalah mengkonversi persamaan (2.7) dan (2.8) ke dalam masalah memaksimalkan fungsi Hamiltonian. Untuk mendapatkan syarat tersebut dilakukan langkah-langkah sebagai berikut [14]:

1. Bentuk fungsi Hamiltonian yaitu kombinasi fungsi dari suatu masalah $(V(x(t), u(t), t))$ dan perkalian fungsi subyek berbentuk persamaan diferensial $\left(f(x(t), u(t)t)\right)$ dengan suatu faktor pengali yang dinamakan pengali Lagrange (t). berikut bentuk fungsi Hamiltonian:

$$H(x(t), u(t), (t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t) f(x(t), u(t), t)$$

2. Maksimumkan H terhadap semua vektor kontrol $u(t)$, yaitu $\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = 0$ sehingga diperoleh $u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$

3. Gunakan hasil dari langkah 2 ke dalam Langkah 1 dan tentukan H^* yang optimal, yaitu

$$H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = H(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

4. Selesaikan persamaan *state* dan *co-state* :
   a. Persamaan *state* yaitu persamaan kendala pada model

$$\dot{x}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)$$

   Dengan diberikan nilai $x(t_0) = x_0$

   b. Persamaan *co-state* atau persamaan adjoint yang terkait dengan kendala akumulasi dari variable keadaan.

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)$$

   Dengan diberikan nilai $\left(t_f\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) t_f$

5. Untuk memperoleh kontrol yang optimal, substitusikan solusi $\dot{x}^*(t)$ dan $\dot{\lambda}^*(t)$ dari Langkah 4 ke dalam kendali optimal $u^*(t)$ pada langkah 2.

2.7 Metode *Range-Kutta*

Metode Range-Kutta merupakan metode satu langkah yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi [15]. Bentuk umum dari metode Range-Kutta adalah:

$$x_{i+1} = x_i + \phi(t_i, x_i, h)h \qquad (2.9)$$

Dengan $\phi(t_i, x_i, h)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval dan digunakan untuk mengekstrapolasi dari nilai lama x_i ke nilai baru x_{i+1} sepanjang interval h.

Metode Range-Kutta yang sering digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial adalah metode Range-

Kutta orde 4. Metode Range Kutta orde 4 merupakan metode yang lebih teliti dibandingkan dengan metode Range-Kutta yang berorder di bawahnya.

Misal diberikan persamaan diferensial sebagai berikut [15]:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Syarat batas $y(x_0) = (y_0)$. Secara iterasi penyelesaian Range-Kutta orde 4 adalah sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.10)$$

Dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (2.11)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \quad (2.12)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad (2.13)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3), \quad (2.14)$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai langkah-langkah sistematis dan metode yang digunakan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Metodelogi penelitian ini berguna sebagai acuan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini, dilakukan pengumpulan teori-teori pendukung dan mencari materi penunjang dari buku, jurnal, paper, artikel dan lain sebagainya. Bahan-bahan yang dikaji meliputi pengertian virus zika, model dinamik transmisi virus zika, analisis kestabilan, kontrol optimal, prinsip *maksimum pontryagin*, dan metode Range-Kutta.

3.2 Mengkaji Model Dinamik Penyebaran Virus Zika

Pada tahap ini, untuk memahami penyebaran virus zika akan disusun kembali asumsi-asumsi tertentu sehingga dapat dibuat model kompartemen yang baru dengan beberapa sub-populasi pada populasi manusia dan nyamuk dalam proses transmisi virus zika.

3.3 Analisis Kestabilan Model Penyebaran Virus Zika

Pada tahap ini, akan dianalisis mengenai kestabilan disekitar titik setimbang dengan mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya akan ditentukan bilangan reproduksi dasar dengan metode *Next Generation Operator* yang kemudian akan dianalisis kestabilan pada titik-titik setimbang.

3.4 Menyelesaikan Kontrol Optimal

Pada tahap ini, dari hasil formulasi model kontrol optimal transmisi virus zika dilanjutkan dengan menyelesaikan kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Dengan langkah-langkah mmembentuk fungsi Hamilton, menentukan

persamaan state dan costate, menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi untuk dapat menentukan pengendali yang optimal.

3.5 Simulasi

Pada tahap ini, peneliti melakukan simulasi dari solusi numerik model transmisi virus zika menggunakan metode Range-Kutta Orde 4 dengan *software* Matlab, untuk melihat perilaku sistem pada grafik yang dihasilkan dari model tersebut.

3.6 Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada tahan ini, setelah hasil simulasi didapatkan, maka akan ditarik kesimpulan dari penelitian yang telah dikerjakan. Serta memberikan sebuah saran untuk penelitian ini agar dapat dikembangkan menjadi lebih baik lagi untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai deskripsi model penyebaran virus zika, titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, bilangan reproduksi, serta dicari kestabilan lokal dari titik-titik kesetimbangan. Selain itu, akan dicari solusi kontrol optimal dari model dengan menggunakan Prinsip *Maksimum Pontryagin*, dan akan disimulasikan model tersebut secara numerik menggunakan metode Range-Kutta orde 4

4.1 Deskripsi Model Penyebaran Virus Zika

Model dinamik yang dibahas pada Tugas Akhir ini adalah model dinamik yang digunakan *Abdulfatai dkk* [9] yang dikontruksi kembali sedemikian hingga mempunyai asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Model dibangun oleh dua populasi yaitu populasi manusia (N_H) dan populasi nyamuk (N_V). Kedua populasi tersebut dibagi menjadi beberapa sub-populasi, antara lain:

   Untuk populasi manusia (N_H) :

   - S_H adalah jumlah populasi manusia *Susceptible* (kumpulan individu rentan terhadap virus zika)
   - A_H adalah jumlah populasi manusia *Asymptomatic Infected* (kumpulan individu terinfeksi virus zika, namun tidak tahu jika sedang terinfeksi)
   - I_H adalah jumlah populasi manusia *Infected* (kumpulan individu terinfeksi virus zika)
   - R_H adalah jumlah populasi manusia *Recovered* (kumpulan individu dalam masa penyembuhan)

   dan untuk jumlah populasi manusia dinyatakan dengan $N_H(t) = S_H(t) + A_H(t) + I_H(t) + R_H(t)$

Untuk populasi manusia (N_V) :

- S_V adalah jumlah populasi nyamuk *Susceptible* (kumpulan nyamuk rentan terhadap virus zika)
- I_V adalah jumlah populasi nyamuk *Infected* (kumpulan nyamuk terinfeksi virus zika)

dan untuk jumlah populasi nyamuk dinyatakan dengan $N_V(t) = S_V(t) + I_V(t)$

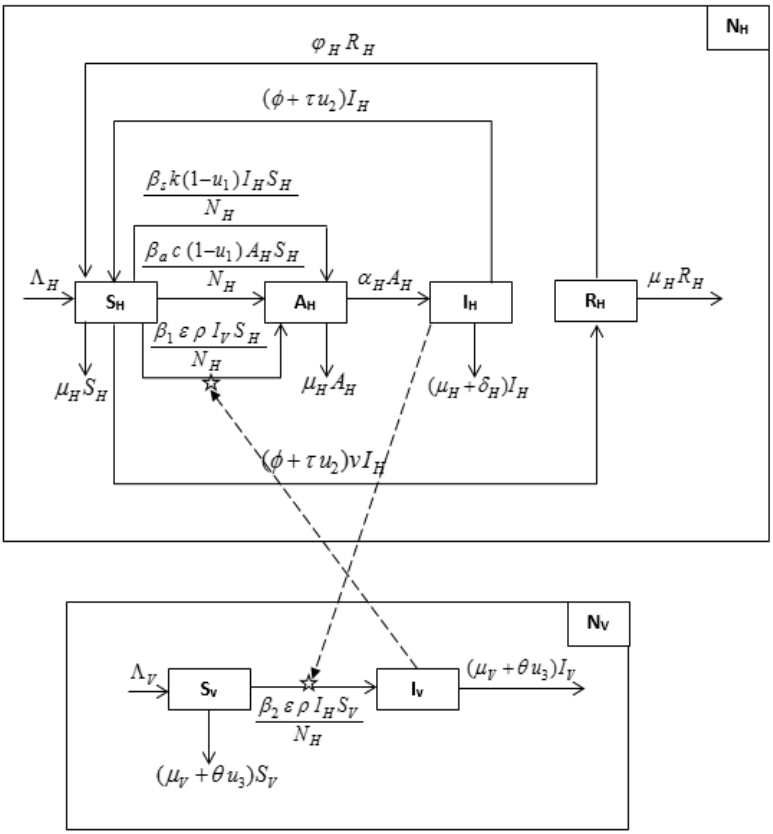
2. Parameter-parameter yang ada pada model dinamik didefinisikan, sebagai berikut:
   - Λ_H adalah laju penambahan individu manusia yang akan menjadi populasi manusia *susceptible*
   - μ_H adalah laju kematian alami manusia
   - φ_H adalah rata-rata individu manusia *recovered* karena sistem imun
   - ϕ adalah rata-rata spontanitas individu manusia untuk *recovery*
   - v adalah rate penyembuhan individu manusia akibat imun sementara
   - α_H adalah laju perubahan individu manusia *exposed* menjadi *infected*
   - δ_H adalah laju kematian individu manusia akibat virus
   - c adalah rata-rata relatif kontak individu manusia *asymptomatic infected*
   - k adalah rata-rata relatif kontak individu manusia *infected*
   - β_a adalah peluang transmisi virus dari individu manusia *asymptomatic infected* melalui hubungan seksualitas
   - β_s adalah peluang transmisi virus dari individu manusia *infected* melalui hubungan seksualitas
   - β_1 adalah peluang transmisi virus dari individu nyamuk *infected*

- β_2 adalah peluang transmisi virus dari individu manusia *infected*
- ε adalah rata-rata per kapital terkena gigitan nyamuk
- ρ adalah rata-rata kontak nyamuk dengan manusia
- Λ_V adalah laju penambahan individu nyamuk yang akan menjadi populasi nyamuk *susceptible*
- μ_V adalah laju kematian nyamuk
- θ adalah rata-rata konstan penyemprotan insektisida

3. Kontrol yang digunakan pada model dinamik didefinisikan, sebagai berikut:
   - u_1 adalah kontrol terhadap penggunaan alat kontrasepsi
   - u_2 adalah kontrol terhadap pengobatan untuk individu manusia yang terinfeksi
   - u_3 adalah kontrol terhadap penyemprotan insektisida

Total jumlah populasi manusia dinyatakan dengan $N_H(t) = S_H(t) + A_H(t) + I_H(t) + R_H(t)$ dan total jumlah populasi nyamuk dinyatakan dengan $N_V(t) = S_V(t) + I_V(t)$, dimana $S_H, A_H, I_H, R_H, S_V, dan\ I_V$ merupakan notasi variabel yang menyatakan jumlah individu manusia dan nyamuk pada masing-masing sub-populasi. Sehingga, diasumsikan variabel $S_H, A_H, I_H, R_H, S_V,\ I_V \geq 0$. Selain itu, untuk setiap parameter dan kontrol yang merupakan besaran yang menyatakan laju, maka parameter-parameter tersebut diasumsikan selalu bernilai positif.

Berdasarkan mekanisme penyebaran virus zika dan asumsi-asumsi yang telah disebutkan, digambarkan diagram kompartemen model dinamik penyebaran virus zika, sebagai pada **Gambar 4.1:**



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Dinamik Transmisi Virus Zika

Berdasarkan diagram kompartemen model transmisi virus zika diatas dapat diuraikan, sebagai berikut:

a. Laju perubahan sub-populasi manusia *susceptible* atau rentan terinfeksi virus zika tiap satuan waktu. Sub-populasi manusia tersebut bertambah karena adanya laju pertambahan individu manusia yang akan menjadi populasi *susceptibl*e, adanya individu *recovered* yang menjadi rentan karena sistem imun yang berhasil melawan virus zika, adanya spontanitas individu manusia yang terinfeksi menjadi rentan dan upaya pengobatan untuk sembuh dengan kontrol yang ada. Sub-populasi manusia *susceptible* juga akan berkurang karena adanya interaksi antara manusia *susceptible* dengan nyamuk *infected* dimana terjadi peluang transmisi virus dari nyamuk ke manusia dengan rata-rata kontak nyamuk dan manusia setiap harinya serta rata-rata per kapital manusia dapat terkena gigitan nyamuk. Adanya interaksi antara manusia *susceptible* dengan manusia *asimptomatic infected* dan manusia *infected* dimana terjadi peluang transmisi virus antar manusia dengan rata-rata kontak melalui hubungan seksualitas juga mengakibatkan sub-populasi manusia *susceptible* berkurang, sehingga terdapat kontrol dengan penggunaan kondom agar dapat meminimumkkan jumlah sub-populasi manusia *susceptible* yang dapat terinfeksi virus zika melalui hubungan seksualitas. Selain itu juga, sub-populasi manusia *susceptible* akan berkurang akibat kematian alami populasi manusia *susceptible* itu sendiri. Sehingga, didapatkan persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dS_H}{dt} = \Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2) I_H - (\phi + \tau u_2) \nu I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} -$$

$$\frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} - \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H$$

b. Laju perubahan sub-populasi manusia *asimptomatic infected* atau individu terinfeksi virus zika, namun tidak tahu jika

sedang terinfeksi tiap satuan waktu. Sub-populasi manusia tersebut bertambah karena adanya interaksi antara manusia *susceptible* dengan nyamuk *infected* dimana terjadi peluang transmisi virus dari nyamuk ke manusia dengan rata-rata kontak nyamuk dan manusia setiap harinya serta rata-rata per kapital manusia dapat terkena gigitan nyamuk. Adanya interaksi antara manusia *susceptible* dengan manusia *asimptomatic infected* dan manusia *infected* dimana terjadi peluang transmisi virus antar manusia dengan rata-rata kontak melalui hubungan seksualitas juga mengakibatkan sub-populasi manusia *asimptomatic infected* bertambah, sehingga terdapat kontrol dengan penggunaan kondom agar dapat meminimumkkan jumlah sub-populasi manusia *susceptible* yang dapat terinfeksi virus zika melalui hubungan seksualitas. Sub-populasi manusia *asimptomatic infected* juga akan berkurang karena adanya perubahan manusia *asimptomatic infected* menjadi manusia *infected* seutuhnya dan adanya kematian alami populasi manusia *asimptomatic infected* itu sendiri. Sehingga, didapatkan persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H - \mu_H A_H$$

c. Laju perubahan sub-populasi manusia *infected* atau individu terinfeksi virus zika tiap satuan waktu. Sub-populasi manusia tersebut bertambah karena adanya perubahan manusia *asimptomatic infected* menjadi manusia *infected*. Sub-populasi manusia *infected* juga akan berkurang karena adanya individu *infected* yang secara spontanitas dapat memasuki masa penyembuhan dan juga adanya upaya pengobatan yang dikontrol untuk dapat sembuh dari terinfeksinya virus zika. Selain itu juga, sub-populasi manusia *infected* akan berkurang karena kematian yang diakibatkan oleh terinfeksinya virus

zika dan kematian alami populasi manusia *infected* itu sendiri. Sehingga, didapatkan persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dI_H}{dt} = \alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H$$

d. Laju perubahan sub-populasi manusia *recovered* atau individu dalam masa penyembuhan tiap satuan waktu. Sub-populasi manusia tersebut bertambah karena adanya spontanitas sementara dari individu manusia yang terinfeksi menjadi rentan dan upaya pengobatan untuk sembuh dengan kontrol yang ada, sehingga sub-populasi manusia *susceptible* sementara tersebut berubah menjadi manusia *recovered*. Sub-populasi manusia *recovered* juga akan berkurang karena adanya manusia *recovered* yang menjadi rentan disebabkan sistem imun yang berhasil melawan virus zika, serta kematian alami populasi manusia *recovered* itu sendiri. Sehingga, didapatkan persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dR_H}{dt} = (\phi + \tau u_2) v I_H - \varphi_H R_H - \mu_H R_H$$

e. Laju perubahan sub-populasi nyamuk *susceptible* atau rentan terinfeksi virus zika tiap satuan waktu. Sub-populasi nyamuk tersebut bertambah karena adanya laju pertambahan individu nyamuk yang akan menjadi populasi *susceptibl*e. Sub-populasi nyamuk *susceptible* juga akan berkurang karena adanya interaksi antara manusia *infected* dengan nyamuk *susceptible* dimana terjadi peluang transmisi virus dari manusia ke nyamuk dengan rata-rata kontak nyamuk dan manusia setiap harinya serta rata-rata per kapital manusia dapat terkena gigitan nyamuk. Selain itu juga, sub-populasi nyamuk *susceptible* akan berkurang karena kematian yang diakibatkan oleh penyemprotan insektisida yang dikontrol

dan kematian alami populasi nyamuk *susceptible* itu sendiri. Sehingga, didapatkan persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dS_V}{dt} = \Lambda_V N_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) S_V$$

f. Laju perubahan sub-populasi nyamuk *infected* atau nyamuk yang terinfeksi virus zika tiap satuan waktu. Sub-populasi nyamuk tersebut bertambah karena adanya interaksi antara manusia *infected* dengan nyamuk *susceptible* dimana terjadi peluang transmisi virus dari manusia ke nyamuk dengan rata-rata kontak nyamuk dan manusia setiap harinya serta rata-rata per kapital manusia dapat terkena gigitan nyamuk, sehingga nyamuk *susceptible* berubah menjadi nyamuk *infected*. Sub-populasi nyamuk *infected* juga akan berkurang karena adanya kematian yang diakibatkan oleh penyemprotan insektisida yang dikontrol dan kematian alami populasi nyamuk *infected* itu sendiri. Sehingga, didapatkan persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dI_V}{dt} = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V$$

Dari penjelasan diatas dapat dituliskan model matematika penyebaran virus zika adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS_H}{dt} = \Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2) I_H - (\phi + \tau u_2) \nu I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} - \frac{\beta_a c (1-u_1) A_H S_H}{N_H} - \frac{\beta_S k (1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H \quad (4.1)$$

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c (1-u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k (1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H - \mu_H A_H \quad (4.2)$$

$$\frac{dI_H}{dt} = \alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H \quad (4.3)$$

$$\frac{dR_H}{dt} = (\phi + \tau u_2) \nu I_H - \varphi_H R_H - \mu_H R_H \quad (4.4)$$

$$\frac{dS_V}{dt} = \Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) S_V \quad (4.5)$$

$$\frac{dI_V}{dt} = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V \quad (4.6)$$

4.2 Daerah Penyelesaian Model

4.2.1 Populasi Manusia

Diketahui kondisi awal populasi manusia, yaitu $S_H > 0$, $A_H > 0$, $I_H > 0$, $R_H > 0$, dan $N_H(t) = S(t) + A(t) + I(t) + R(t)$. Selanjutnya, akan dicari laju pertumbuhan populasi manusia
sebagai berikut:

$$\frac{dN_H}{dt} = \frac{dS_H}{dt} + \frac{dA_H}{dt} + \frac{dI_H}{dt} + \frac{dR_H}{dt}$$

$$= \Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2) I_H - (\phi + \tau u_2) \nu I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} -$$

$$\frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} - \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H + \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} +$$

$$\frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H - \mu_H A_H +$$

$$\alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H + (\phi + \tau u_2) \nu I_H -$$

$$\varphi_H R_H - \mu_H R_H$$

$$= \Lambda_H - \varphi_H R_H - \mu_H N_H$$

Didapatkan laju pertumbuhan populasi manusia dimana

$$\frac{dN_H}{dt} = \Lambda_H - \varphi_H R_H - \mu_H N_H \quad \leq \Lambda_H - \mu_H N_H$$

sehingga, untuk mencari nilai N_H, akan dimisalkan terlebih dahulu :

$$p = \Lambda_H - \mu_H N_H$$
$$dp = -\mu_H dN_H$$
$$dN_H = -\frac{1}{\mu_H} dp$$

Selanjutnya, untuk integrasi persamaan diferensial

$$\int \frac{dN_H}{\Lambda_H - \mu_H N_H} = \int dt$$
$$\int -\frac{1}{\mu_H} \frac{1}{p} dp = \int dt$$
$$-\frac{1}{\mu_H} \ln|p| = t + c$$
$$-\frac{1}{\mu_H} \left(\ln|p| - \ln|C|\right) = t$$
$$-\frac{1}{\mu_H} \left(\ln\left|\frac{p}{C}\right|\right) = t$$
$$\left(\ln\left|\frac{p}{C}\right|\right) = -\mu_H t$$
$$p = Ce^{-\mu_H t}$$

Subtitusikan kedua persamaan p, sehingga didapatkan

$$N_H(t) = \frac{\Lambda_H}{\mu_H} - \frac{C}{\mu_H} e^{-\mu_H t}$$

Dari persamaan pertumbuhan populasi manusia $(N_H(t))$ yang didapatkan, semakin besar nilai t, atau semakin lama waktu yang dibutuhkan, maka nilai $Ce^{-\mu_H t}$ akan semakin kecil. Sehingga,

$$\lim_{t\to\infty} N_H(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\Lambda_H}{\mu_H} - \frac{C}{\mu_H} e^{-\mu_H t}\right) = \frac{\Lambda_H}{\mu_H}$$

Jadi, didapakan daerah penyelesaian model pada populasi manusia adalah $\Omega_H := \left\{(S_H, A_H, I_H, R_H) \in \mathbb{R}_+^4 \mid N_H \leq \frac{\Lambda_H}{\mu_H}\right\}$, dimana solusi sub-populasi akan selalu bernilai non negatif untuk $\forall t > 0$.

4.2.2 Populasi Nyamuk

Diketahui kondisi awal populasi manusia, yaitu $S_V > 0$, $I_V > 0$, dan $N_V(t) = S_V(t) + I_V(t)$. Selanjutnya, akan dicari laju pertumbuhan populasi nyamuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dN_V}{dt} &= \frac{dS_V}{dt} + \frac{dI_V}{dt} \\ &= \Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) S_V + \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V \\ &= \Lambda_V - (\mu_V + \theta u_3) N_V\end{aligned}$$

Didapatkan laju pertumbuhan populasi nyamuk yaitu

$$\frac{dN_v}{dt} = \Lambda_V - (\mu_V + \theta u_3) N_V$$

sehingga, untuk mencari nilai N_V, akan dimisalkan terlebih dahulu:

$$q = \Lambda_V - (\mu_V + \theta u_3) N_V$$
$$dq = -(\mu_V + \theta u_3) dN_V$$
$$dN_V = -\frac{1}{(\mu_V + \theta u_3)} dq$$

Selanjutnya, untuk integrasi persamaan diferensial

$$\int \frac{dN_V}{\Lambda_V - (\mu_V + \theta u_3) N_V} = \int dt$$
$$\int -\frac{1}{(\mu_V + \theta u_3)} \frac{1}{q} dq = \int dt$$
$$-\frac{1}{(\mu_V + \theta u_3)} \ln|q| = t + k$$
$$-\frac{1}{(\mu_v + \theta u_3)} \left(\ln|q| - \ln|K|\right) = t$$
$$-\frac{1}{(\mu_v + \theta u_3)} \left(\ln\left|\frac{q}{K}\right|\right) = t$$
$$\left(\ln\left|\frac{q}{K}\right|\right) = -(\mu_V + \theta u_3) t$$
$$q = Ke^{-(\mu_V + \theta u_3)t}$$

Subtitusikan kedua persamaan q, sehingga didapatkan

$$N_V(t) = \frac{\Lambda_V}{(\mu_V + \theta u_3)} - \frac{K}{(\mu_V + \theta u_3)} e^{-(\mu_V + \theta u_3)t}$$

Dari persamaan pertumbuhan populasi nyamuk $(N_V(t))$ yang didapatkan, semakin besar nilai t, atau semakin lama waktu yang dibutuhkan, maka nilai $Ke^{-(\mu_V+\theta u_3)t}$ akan semakin kecil. Sehingga,

$$\lim_{t\to\infty} N_v(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\Lambda_V}{(\mu_V+\theta u_3)} - \frac{K}{(\mu_V+\theta u_3)} e^{-(\mu_V+\theta u_3)t}\right)$$
$$= \frac{\Lambda_V}{(\mu_V+\theta u_3)}$$

Jadi, didapakan daerah penyelesaian model pada populasi nyamuk adalah $\Omega_V := \left\{(S_V, I_V) \in \mathbb{R}_+^4 \mid N_V \leq \frac{\Lambda_V}{(\mu_V+\theta u_3)}\right\}$, dimana solusi sub-populasi akan selalu bernilai non negatif untuk $\forall t > 0$.

4.3 Titik Kesetimbangan

Keadaan setimbang adalah suatu keadaan ketika perubahan jumlah sub-populasi tertentu sepanjang waktu adalah nol. Berdasarkan model matematika penyebaran virus zika memenuhi keadaan setimbang pada saat $\frac{dS_H}{dt} = \frac{dA_H}{dt} = \frac{dI_H}{dt} = \frac{dR_H}{dt} = 0$ dan $\frac{dS_V}{dt} = \frac{dI_V}{dt} = 0$ sehingga persamaan pada model dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dS_H}{dt} = \Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi+\tau u_2) I_H - (\phi+\tau u_2) \nu I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} -$$
$$\frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} - \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H = 0 \quad (4.1a)$$
$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} -$$

$$\alpha_H A_H - \mu_H A_H = 0 \quad (4.2a)$$

$$\frac{dI_H}{dt} = \alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H = 0 \quad (4.3a)$$

$$\frac{dR_H}{dt} = (\phi + \tau u_2) v I_H - \varphi_H R_H - \mu_H R_H = 0 \quad (4.4a)$$

$$\frac{dS_V}{dt} = \Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) S_V = 0 \quad (4.5a)$$

$$\frac{dI_V}{dt} = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V = 0 \quad (4.6a)$$

4.3.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan kondisi saat tidak terjadi penyebaran virus zika pada suatu wilayah. Keadaan itu terjadi ketika tidak ada manusia dan juga nyamuk yang terinfeksi virus zika. Oleh karena itu dapat dinyatakan bahwa populasi manusia yang terinfeksi virus sama dengan nol ($I_H = 0$) dan juga nyamuk yang terinfeksi virus sama dengan nol ($I_V = 0$).

Dengan mensubtitusikan ($I_H = 0$) dan ($I_V = 0$) ke persamaan (4.1a) - (4.6a), akan didapatkan titik setimbang A_H, R_H, S_H, dan S_V sebagai berikut

$$\frac{dI_H}{dt} = 0$$

$$\alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H = 0$$

$$A_H^0 = 0$$

$$\frac{dR_H}{dt} = 0$$

$$(\phi + \tau u_2)vI_H - \varphi_H R_H - \mu_H R_H = 0$$

$$-(\varphi_H + \mu_H)R_H = 0$$

$$R_H^0 = 0$$

$$\frac{dS_H}{dt} = 0$$

$$\Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2)I_H - (\phi + \tau u_2)vI_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H}$$

$$- \frac{\beta_a c(1-u_1)A_H S_H}{N_H} - \frac{\beta_S k(1-u_1)I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H = 0$$

$$\Lambda_H - \mu_H S_H = 0$$

$$S_H^0 = \frac{\Lambda_H}{\mu_H}$$

$$\frac{dS_V}{dt} = 0$$

$$\Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3)S_V = 0$$

$$\Lambda_V - (\mu_V + \theta u_3)S_V = 0$$

$$S_V^0 = \frac{\Lambda_V}{(\mu_V + \theta u_3)}$$

Misalkan titik setimbang bebas penyakit dinyatakan dengan $E_0 = (S_H^0, A_H^0, I_H^0, R_H^0, S_V^0, I_V^0)$, maka diperoleh titik setimbang

bebas penyakit dari model penyebaran virus zika adalah $E_0 = (\frac{\Lambda_H}{\mu_H},0,0,0,\frac{\Lambda_V}{(\mu_V + \theta u_3)},0)$

4.3.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik merupakan kondisi saat adanya kemungkinan penyebaran virus zika pada suatu wilayah. Keadaan itu terjadi ketika terdapat individu manusia dan juga nyamuk yang terinfeksi virus zika. Oleh karena itu dapat dinyatakan bahwa populasi manusia yang terinfeksi virus tidak sama dengan nol ($I_H \neq 0$) dan juga nyamuk yang terinfeksi virus tidak sama dengan nol ($I_V \neq 0$).

Sehingga, dari persamaan (4.1a) - (4.6a) akan didapatkan titik setimbang S_H, A_H, I_H, R_H, S_V dan I_V, sebagai berikut

$$\frac{dS_H}{dt} = 0$$

$$\Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2) I_H - (\phi + \tau u_2) \nu I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} - \frac{\beta_a c (1-u_1) A_H S_H}{N_H} - \frac{\beta_S k (1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H = 0$$

$$\Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2)(1-\nu) I_H - S_H \left[\frac{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V}{\Lambda_H} + \frac{\beta_a c (1-u_1) \mu_H A_H}{\Lambda_H} + \frac{\beta_S k (1-u_1) \mu_H I_H}{\Lambda_H} + \frac{\mu_H \Lambda_H}{\Lambda_H} \right] = 0$$

$$S_H = \frac{\Lambda_H \left(\Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2)(1-\nu) I_H \right)}{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V + \beta_a c (1-u_1) \mu_H A_H + \beta_S k (1-u_1) \mu_H I_H + \mu_H \Lambda_H}$$

$$S_H^* = \frac{\Lambda_H \left(\Lambda_H + \varphi_H R_H^* + (\phi + \tau u_2)(1-\nu) I_H^* \right)}{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V^* + \beta_a c (1-u_1) \mu_H A_H^* + \beta_S k (1-u_1) \mu_H I_H^* + \mu_H \Lambda_H}$$

$$\frac{dA_H}{dt} = 0$$

$$\frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H - \mu_H A_H = 0$$

$$\frac{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V S_H}{\Lambda_H} + \frac{\beta_S k(1-u_1) \mu_H I_H S_H}{\Lambda_H} - A_H \left[-\frac{\beta_a c(1-u_1) \mu_H S_H}{\Lambda_H} + \frac{\alpha_H \Lambda_H}{\Lambda_H} + \frac{\mu_H \Lambda_H}{\Lambda_H} \right] = 0$$

$$A_H = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V S_H + \beta_S k(1-u_1) \mu_H I_H S_H}{\alpha_H \Lambda_H + \mu_H \Lambda_H - \beta_a c(1-u_1) \mu_H S_H}$$

$$A_H^* = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V^* S_H^* + \beta_S k(1-u_1) \mu_H I_H^* S_H^*}{\alpha_H \Lambda_H + \mu_H \Lambda_H - \beta_a c(1-u_1) \mu_H S_H}$$

$$\frac{dI_H}{dt} = 0$$

$$\alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H = 0$$

$$\alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2 + \mu_H + \delta_H) I_H = 0$$

$$I_H = \frac{\alpha_H A_H}{\phi + \tau u_2 + \mu_H + \delta_H}$$

$$I_H^* = \frac{\alpha_H A_H^*}{\phi + \tau u_2 + \mu_H + \delta_H}$$

$$\frac{dR_H}{dt} = 0$$

$$(\phi + \tau u_2) \nu I_H - \varphi_H R_H - \mu_H R_H = 0$$

$$(\phi + \tau u_2) \nu I_H - (\varphi_H + \mu_H) R_H = 0$$

$$R_H = \frac{(\phi + \tau u_2) v I_H}{\varphi_H + \mu_H}$$

$$R_H^* = \frac{(\phi + \tau u_2) v I_H^*}{\varphi_H + \mu_H}$$

$$\frac{dS_V}{dt} = 0$$

$$\Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) S_V = 0$$

$$\Lambda_V - S_V \left[\frac{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H}{\Lambda_H} + \frac{\Lambda_H (\mu_V + \theta u_3)}{\Lambda_H} \right] = 0$$

$$S_V = \frac{\Lambda_V \Lambda_H}{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H + \Lambda_H (\mu_V + \theta u_3)}$$

$$S_V^* = \frac{\Lambda_V \Lambda_H}{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H^* + \Lambda_H (\mu_V + \theta u_3)}$$

$$\frac{dI_V}{dt} = 0$$

$$\frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V = 0$$

$$\frac{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H S_V}{\Lambda_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V = 0$$

$$I_V = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H S_V}{\Lambda_H (\mu_V + \theta u_3)}$$

$$I_V^* = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H^* S_V^*}{\Lambda_H (\mu_V + \theta u_3)}$$

Misalkan titik setimbang endemik dinyatakan dengan $E = (S_H^*, A_H^*, I_H^*, R_H^*, S_V^*, I_V^*)$, maka diperoleh titik setimbang endemik dari model penyebaran virus zika, dimana:

$$S_H^* = \frac{\Lambda_H \left(\Lambda_H + \varphi_H R_H^* + (\phi + \tau u_2)(1-v) I_H^*\right)}{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V^* + \beta_a c(1-u_1)\mu_H A_H^* + \beta_S k(1-u_1)\mu_H I_H^* + \mu_H \Lambda_H}$$

$$A_H^* = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V^* S_H^* + \beta_S k(1-u_1)\mu_H I_H^* S_H^*}{\alpha_H \Lambda_H + \mu_H \Lambda_H - \beta_a c(1-u_1)\mu_H S_H}$$

$$I_H^* = \frac{\alpha_H A_H^*}{\phi + \tau u_2 + \mu_H + \delta_H}$$

$$R_H^* = \frac{(\phi + \tau u_2) v I_H^*}{\varphi_H + \mu_H}$$

$$S_V^* = \frac{\Lambda_V \Lambda_H}{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H^* + \Lambda_H (\mu_V + \theta u_3)}$$

$$I_V^* = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H^* S_V^*}{\Lambda_H (\mu_V + \theta u_3)}$$

4.4 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) digunakan sebagai parameter ambang penentuan kriteria endemik penyakit pada suatu populasi. Penentuan (R_0) kali ini akan menggunakan metode *Next Generation Matrix*, sebagai berikut

Diketahui titik setimbang bebas penyakit:

$$E_0 = (\frac{\Lambda_H}{\mu_H}, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_V}{(\mu_V + \theta u_3)}, 0)$$

Populasi yang terinfeksi pada model penyebaran virus zika adalah

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H - \mu_H A_H$$

$$\frac{dI_H}{dt} = \alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H$$

$$\frac{dI_V}{dt} = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V$$

Sehingga, dapat dibentuk matriks $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} \\ 0 \\ \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \alpha_H A_H + \mu_H A_H \\ -\alpha_H A_H + (\phi + \tau u_2) I_H + (\mu_H + \delta_H) I_H \\ (\mu_V + \theta u_3) I_V \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, masing-masing elemen matriks $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ diturunkan terhadap $A_H, I_H,$ dan I_V, lalu disubitusikan nilai E_0, sehingga diperoleh

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta_a c(1-u_1) & \beta_S k(1-u_1) & \beta_1 \varepsilon \rho \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta_2 \varepsilon \rho \Lambda_V \mu_H}{\Lambda_H(\mu_V + \theta u_3)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \alpha_H + \mu_H & 0 & 0 \\ -\alpha_H & \phi + \tau u_2 + \mu_H + \delta_H & 0 \\ 0 & 0 & \mu_V + \theta u_3 \end{pmatrix}$$

Misalkan:

$L_1 = \beta_a c(1-u_1)$ $\quad$ $K_1 = \alpha_H + \mu_H$

$L_2 = \beta_S k(1-u_1)$ $\quad$ $K_2 = \phi + \tau u_2 + \mu_H + \delta_H$

$L_3 = \beta_1 \varepsilon \rho$ $\quad$ $K_3 = \mu_V + \theta u_3$

$L_4 = \beta_2 \varepsilon \rho \Lambda_V \mu_H$

Kemudian, dicari nilai $\mathcal{V}^{-1}$ maka diperoleh

$$\mathcal{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{K_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{\alpha_H}{K_1 K_2} & \dfrac{1}{K_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{K_3} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, dihitung $\mathcal{FV}^{-1}$ sebagai berikut

$$\mathcal{FV}^{-1} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{L_4}{\Lambda_H K_3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{K_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{\alpha_H}{K_1 K_2} & \dfrac{1}{K_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{K_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{L_1}{K_1} + \dfrac{\alpha_H L_2}{K_1 K_2} & \dfrac{L_2}{K_2} & \dfrac{L_3}{K_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\alpha_H L_4}{\Lambda_H K_1 K_2 K_3} & \dfrac{L_4}{\Lambda_H K_2 K_3} & 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian, dicari nilai eigen dari $\mathcal{FV}^{-1}$ dengan determinan $(\lambda I - \mathcal{FV}^{-1}) = 0$, sebagai berikut

$$|\lambda I - \mathcal{FV}^{-1}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \left(\dfrac{L_1}{K_1} + \dfrac{\alpha_H L_2}{K_1 K_2} \right) & -\dfrac{L_2}{K_2} & -\dfrac{L_3}{K_3} \\ 0 & \lambda & 0 \\ -\dfrac{\alpha_H L_4}{\Lambda_H K_1 K_2 K_3} & -\dfrac{L_4}{\Lambda_H K_2 K_3} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\lambda - \left(\frac{L_1}{K_1} + \frac{\alpha_H L_2}{K_1 K_2} \right) \right) \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -\dfrac{L_4}{\Lambda_H K_2 K_3} & \lambda \end{vmatrix} - \frac{\alpha_H L_4}{\Lambda_H K_1 K_2 K_3} \begin{vmatrix} -\dfrac{L_2}{K_2} & -\dfrac{L_3}{K_3} \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\lambda-\left(\frac{L_1}{K_1}+\frac{\alpha_H L_2}{K_1K_2}\right)\right)\lambda^2-\frac{\alpha_H L_4}{\Lambda_H K_1K_2K_3}\left(\frac{L_3}{K_3}\lambda\right)=0$$

$$\lambda^2-\left(\frac{L_1}{K_1}+\frac{\alpha_H L_2}{K_1K_2}\right)\lambda-\frac{\alpha_H L_3L_4}{\Lambda_H K_1K_2K_3^2}=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{\left(\frac{L_1}{K_1}+\frac{\alpha_H L_2}{K_1K_2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{L_1}{K_1}+\frac{\alpha_H L_2}{K_1K_2}\right)^2-4\left(-\frac{\alpha_H L_3L_4}{K_1K_2K_3{}^2}\right)}}{2}$$

Jadi, adapun bilangan reproduksi dasar yang didapatkan yaitu

$$R_0=\frac{\left(\frac{L_1}{K_1}+\frac{\alpha_H L_2}{K_1K_2}\right)+\sqrt{\left(\frac{L_1}{K_1}+\frac{\alpha_H L_2}{K_1K_2}\right)^2+4\left(\frac{\alpha_H L_3L_4}{K_1K_2K_3{}^2}\right)}}{2}$$

dimana:

$L_1 = \beta_a c(1-u_1)$ $\quad$ $K_1 = \alpha_H + \mu_H$

$L_2 = \beta_S k(1-u_1)$ $\quad$ $K_2 = \phi + \tau u_2 + \mu_H + \delta_H$

$L_3 = \beta_1 \varepsilon \rho$ $\quad$ $K_3 = \mu_V + \theta u_3$

$L_4 = \beta_2 \varepsilon \rho \Lambda_V \mu_H$

4.5 Analisis Kestabilan

Model matematika penyebaran virus zika merupakan sistem persamaan diferensial autonomous yang tak linier. Oleh karena itu untuk mendapat kestabilan lokal dari titik-titik setimbang, perlu dilakukan linierisasi dengan menggunakan matriks Jacobian, seperti berikut

Misalkan:

$$\frac{dS_H}{dt} = \Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2) I_H - (\phi + \tau u_2) \nu I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} - \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} - \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H = f_1$$

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H - \mu_H A_H = f_2$$

$$\frac{dI_H}{dt} = \alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H = f_3$$

$$\frac{dR_H}{dt} = (\phi + \tau u_2) \nu I_H - \varphi_H R_H - \mu_H R_H = f_4$$

$$\frac{dS_V}{dt} = \Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) S_V = f_5$$

$$\frac{dI_V}{dt} = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V = f_6$$

Selanjutnya akan dicari matriks jacobian dimana

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_H} & \frac{\partial f_1}{\partial A_H} & \frac{\partial f_1}{\partial I_H} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial I_V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_H} & \frac{\partial f_2}{\partial A_H} & \frac{\partial f_2}{\partial I_H} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial I_V} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_H} & \frac{\partial f_3}{\partial A_H} & \frac{\partial f_3}{\partial I_H} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial I_V} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial S_H} & \frac{\partial f_6}{\partial A_H} & \frac{\partial f_2}{\partial I_H} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial I_V} \end{pmatrix}$$

sehingga didapatkan matriks jacobian dari sistem yaitu

$$J = \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 - a_3 - \mu_H & -a_4 & a_5 - a_6 - a_7 & \varphi_H & 0 & -a_8 \\ a_1 + a_2 + a_3 & a_4 - \alpha_H - \mu_H & a_7 & 0 & 0 & a_8 \\ 0 & \alpha_H & -a_5 - a_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 & -\varphi_H - \mu_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{10} & 0 & -a_{11} - a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{10} & 0 & a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}$$

dimana:

$$a_1 = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V}{N_H} \qquad a_7 = \frac{\beta_S k(1-u_1) S_H}{N_H}$$

$$a_2 = \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H}{N_H} \qquad a_8 = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho S_H}{N_H}$$

$$a_3 = \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H}{N_H} \qquad a_9 = \mu_H + \delta_H$$

$$a_4 = \frac{\beta_a c(1-u_1) S_H}{N_H} \qquad a_{10} = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho S_V}{N_H}$$

$$a_5 = (\phi + \tau u_2) \qquad a_{11} = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H}{N_H}$$

$$a_6 = (\phi + \tau u_2) v \qquad a_{12} = \mu_v + \theta u_3$$

4.5.1 Kestabilan Lokal Titik Setimbang Bebas Penyakit

Untuk menentukan kestabilan titik setimbang bebas penyakit, perlu dievaluasi terlebih dahulu titik setimbang

$E_0 = (\frac{\Lambda_H}{\mu_H}, 0,0,0, \frac{\Lambda_V}{(\mu_V + \theta u_3)}, 0)$ dengan mensubtitusikan nilai titik setimbang tersebut ke matriks jacobian yang telah didapatkan sebelumnya, sehingga diperoleh:

$J_{E_0} =$

$$\begin{pmatrix} -\mu_H & -\beta_a c(1-u_1) & (\phi+\tau u_2)(1-v) - \beta_s k(1-u_1) \\ 0 & \beta_a c(1-u_1) - \alpha_H - \mu_H & \beta_s k(1-u_1) \\ 0 & \alpha_H & -(\phi+\tau u_2) - (\mu_H + \delta_H) \\ 0 & 0 & (\phi+\tau u_2)v \\ 0 & 0 & -\beta_2 \varepsilon \rho \\ 0 & 0 & \beta_2 \varepsilon \rho \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_H & 0 & -\beta_1 \varepsilon \rho \\ 0 & 0 & \beta_1 \varepsilon \rho \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_H - \mu_H & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu_V + \theta u_3) & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu_V + \theta u_3) \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, akan dicari nilai eigen dari matriks J_{E_0} dengan langkah-langkah, sebagai berikut

Misalkan:

$b_1 = \beta_a c(1-u_1)$ $\quad$ $b_6 = \beta_2 \varepsilon \rho$

$b_2 = (\phi + \tau u_2)$ $\quad$ $b_7 = \mu_v + \theta u_3$

$b_3 = (\phi + \tau u_2)v$ $\quad$ $b_8 = \mu_H + \delta_H$

$b_4 = \beta_S k(1-u_1)$ $\quad$ $b_9 = \varphi_H + \mu_H$

$b_5 = \beta_1 \varepsilon \rho$ $\quad$ $b_{10} = \alpha_H + \mu_H$

Untuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $\left|\lambda I - J_{E_0}\right| = 0$, yaitu

$$\left|\lambda I - J_{E_0}\right| = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+\mu_H & b_1 & -b_2+b_3+b_4 & -\varphi_H & 0 & b_5 \\ 0 & \lambda-b_1+b_{10} & -b_4 & 0 & 0 & -b_5 \\ 0 & -\alpha_H & \lambda+b_2+b_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 & \lambda+b_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_6 & 0 & \lambda+b_7 & 0 \\ 0 & 0 & -b_6 & 0 & 0 & \lambda+b_7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+\mu_H)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-b_1+b_{10} & -b_4 & 0 & 0 & -b_5 \\ -\alpha_H & \lambda+b_2+b_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_3 & \lambda+b_9 & 0 & 0 \\ 0 & b_6 & 0 & \lambda+b_7 & 0 \\ 0 & -b_6 & 0 & 0 & \lambda+b_7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+\mu_H)\left[(\lambda-b_1+b_{10})\begin{vmatrix} \lambda+b_2+b_8 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & \lambda+b_9 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & \lambda+b_7 & 0 \\ -b_6 & 0 & 0 & \lambda+b_7 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\alpha_H \begin{vmatrix} -b_4 & 0 & 0 & -b_5 \\ -b_3 & \lambda + b_9 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & \lambda + b_7 & 0 \\ -b_6 & 0 & 0 & \lambda + b_7 \end{vmatrix} \Bigg] = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda + \mu_H) \Bigg[(\lambda - b_1 + b_{10})(\lambda + b_2 + b_8) \begin{vmatrix} \lambda + b_9 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + b_7 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + b_7 \end{vmatrix} +$$

$$\alpha_H (\lambda + b_7) \begin{vmatrix} -b_4 & 0 & -b_5 \\ -b_3 & \lambda + b_9 & 0 \\ -b_6 & 0 & \lambda + b_7 \end{vmatrix} \Bigg] = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda + \mu_H) \Bigg[(\lambda - b_1 + b_{10})(\lambda + b_2 + b_8)(\lambda + b_9) \begin{vmatrix} \lambda + b_7 & 0 \\ 0 & \lambda + b_7 \end{vmatrix} +$$

$$\alpha_H (\lambda + b_7) \Bigg[(-b_4) \begin{vmatrix} \lambda + b_9 & 0 \\ 0 & \lambda + b_7 \end{vmatrix} - b_5 \begin{vmatrix} -b_3 & \lambda + b_9 \\ -b_6 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] \Bigg] = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda + \mu_H) \Big[(\lambda - b_1 + b_{10})(\lambda + b_2 + b_8)(\lambda + b_9)(\lambda + b_7)^2 +$$

$$\alpha_H (\lambda + b_7) \big[(-b_4)(\lambda + b_9)(\lambda + b_7) - b_5 b_6 (\lambda + b_9) \big] \Big] = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda + \mu_H) \Big[(\lambda - b_1 + b_{10})(\lambda - b_2 + b_8)(\lambda + b_9)(\lambda + b_7)^2 +$$

$$\alpha_H (\lambda + b_7)(\lambda + b_9) \big[(-b_4)(\lambda + b_7) - b_5 b_6 \big] \Big] = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda + \mu_H)(\lambda + b_7)(\lambda + b_9) \Big[(\lambda - b_1 + b_{10})(\lambda - b_2 + b_8)(\lambda + b_7) +$$

$$\alpha_H \big[(-b_4)(\lambda + b_7) - b_5 b_6 \big] \Big] = 0$$

Dari persamaan karakteristik diatas, didapatkan beberapa nilai eigen, antara lain:

$$\lambda_1 = -\mu_H$$
$$\lambda_2 = -b_7 = -(\mu_V + \theta u_3)$$
$$\lambda_3 = -b_9 = -(\varphi_H + \mu_H)$$
$$\lambda_4 = b_1 - b_{10} = \beta_a c(1-u_1) - (\alpha_H + \mu_H)$$
$$\lambda_5 = -b_2 - b_8 = -(\theta + \tau u_2) - (\mu_H + \delta_H)$$
$$\lambda_6 = -\frac{b_5 b_6}{b_4} - b_7 = -\frac{\beta_1 \beta_2 \varepsilon^2 \rho^2}{\beta_S k(1-u_1)} - (\mu_V + \theta u_3)$$

Titik setimbang bebas penyakit (non endemik) stabil asimtotis jika dan hanya jika persamaan karakteristik tersebut mempunyai akar-akar yang negatif. Dari persamaan karakteristik tersebut terlihat bahwa nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5, \lambda_6 < 0$, karena semua parameter bernilai positif. Selanjutnya, ditentukan syarat untuk λ_4 agar bernilai negatif yaitu jika $\beta_a c(1-u_1) < (\alpha_H + \mu_H)$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa titik setimbang bebas penyakit (E_0) stabil asimtotis jika $\beta_a c(1-u_1) < (\alpha_H + \mu_H)$ dan $R_0 < 1$, dimana hal ini mempresentasikan bahwa jika $R_0 < 1$ maka setiap individu manusia maupun nyamuk yang terinfeksi virus zika dapat menularkan virus rata-rata kurang dari satu individu baru.

4.5.2 Kestabilan Lokal Titik Setimbang Endemik

Untuk menentukan kestabilan titik setimbang endemik, perlu dievaluasi terlebih dahulu titik setimbang $E = (S_H^*, A_H^*, I_H^*, R_H^*, S_V^*, I_V^*)$ dimana

$$S_H^* = \frac{\Lambda_H \left(\Lambda_H + \varphi_H R_H^* + (\phi + \tau u_2)(1-v) I_H^* \right)}{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V^* + \beta_a c(1-u_1) \mu_H A_H^* + \beta_S k(1-u_1) \mu_H I_H^* + \mu_H \Lambda_H}$$

$$A_H^* = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V^* S_H^* + \beta_S k(1-u_1)\mu_H I_H^* S_H^*}{\alpha_H \Lambda_H + \mu_H \Lambda_H - \beta_a c(1-u_1)\mu_H S_H}$$

$$I_H^* = \frac{\alpha_H A_H^*}{\phi + \tau u_2 + \mu_H + \delta_H}$$

$$R_H^* = \frac{(\phi + \tau u_2)\nu I_H^*}{\varphi_H + \mu_H}$$

$$S_V^* = \frac{\Lambda_V \Lambda_H}{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H^* + \Lambda_H(\mu_V + \theta u_3)}$$

$$I_V^* = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H^* S_V^*}{\Lambda_H(\mu_V + \theta u_3)}$$

lalu disubtitusikan nilai titik setimbang tersebut ke matriks jacobian yang telah didapatkan sebelumnya, sehingga diperoleh:

$$J_E = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 - c_3 - \mu_H & -c_4 & c_5 - c_6 - c_7 \\ c_1 + c_2 + c_3 & c_4 - \alpha_H - \mu_H & c_7 \\ 0 & \alpha_H & -c_5 - c_9 \\ 0 & 0 & c_6 \\ 0 & 0 & -c_{10} \\ 0 & 0 & c_{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_H & 0 & -c_8 \\ 0 & 0 & c_8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_H - \mu_H & 0 & 0 \\ 0 & -c_{11} - c_{12} & 0 \\ 0 & c_{11} & -c_{12} \end{pmatrix}$$

dimana:

$$c_1 = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V^*}{N_H} \qquad c_7 = \frac{\beta_S k(1-u_1) S_H^*}{N_H}$$

$$c_2 = \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H^*}{N_H} \qquad c_8 = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho S_H^*}{N_H}$$

$$c_3 = \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H^*}{N_H} \qquad c_9 = \mu_H + \delta_H$$

$$c_4 = \frac{\beta_a c(1-u_1) S_H^*}{N_H} \qquad c_{10} = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho S_V^*}{N_H}$$

$$c_5 = (\phi + \tau u_2) \qquad c_{11} = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H^*}{N_H}$$

$$c_6 = (\phi + \tau u_2) v \qquad c_{12} = \mu_v + \theta u_3$$

Untuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $|\lambda I - J_E| = 0$, yaitu

$$|\lambda I - J_E| = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + c_1 + c_2 + c_3 + \mu_H & c_4 & -c_5 + c_6 + c_7 \\ -c_1 - c_2 - c_3 & \lambda - c_4 + \alpha_H + \mu_H & -c_7 \\ 0 & -\alpha_H & \lambda + c_5 + c_9 \\ 0 & 0 & -c_6 \\ 0 & 0 & c_{10} \\ 0 & 0 & -c_{10} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\varphi_H & 0 & c_8 \\ 0 & 0 & -c_8 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda+\varphi_H+\mu_H & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+c_{11}+c_{12} & 0 \\ 0 & -c_{11} & \lambda+c_{12} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+c_1+c_2+c_3+\mu_H)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-c_4+\alpha_H+\mu_H & -c_7 & 0 & 0 & -c_8 \\ -\alpha_H & \lambda+c_5+c_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_6 & \lambda+\varphi_H+\mu_H & 0 & 0 \\ 0 & c_{10} & 0 & \lambda+c_{11}+c_{12} & 0 \\ 0 & -c_{10} & 0 & -c_{11} & \lambda+c_{12} \end{vmatrix} -$$

$$(-c_1-c_2-c_3)$$

$$\begin{vmatrix} c_4 & -c_5+c_6+c_7 & -\varphi_H & 0 & c_8 \\ -\alpha_H & \lambda+c_5+c_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_6 & \lambda+\varphi_H+\mu_H & 0 & 0 \\ 0 & c_{10} & 0 & \lambda+c_{11}+c_{12} & 0 \\ 0 & -c_{10} & 0 & -c_{11} & \lambda+c_{12} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+c_1+c_2+c_3+\mu_H)$$

$$\left[(\lambda-c_4+\alpha_H+\mu_H)\right.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + c_5 + c_9 & 0 & 0 & 0 \\ -c_6 & \lambda + \varphi_H + \mu_H & 0 & 0 \\ c_{10} & 0 & \lambda + c_{11} + c_{12} & 0 \\ -c_{10} & 0 & -c_{11} & \lambda + c_{12} \end{vmatrix} +$$

$$\alpha_H \left[\begin{vmatrix} -c_7 & 0 & 0 & -c_8 \\ -c_6 & \lambda + \varphi_H + \mu_H & 0 & 0 \\ c_{10} & 0 & \lambda + c_{11} + c_{12} & 0 \\ -c_{10} & 0 & -c_{11} & \lambda + c_{12} \end{vmatrix} \right] +$$

$$(c_1 + c_2 + c_3) \left[c_4 \begin{vmatrix} \lambda + c_5 + c_6 & 0 & 0 & 0 \\ -c_6 & \lambda + \varphi_H + \mu_H & 0 & 0 \\ c_{10} & 0 & \lambda + c_{11} + c_{12} & 0 \\ -c_{10} & 0 & -c_{11} & \lambda + c_{12} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. \alpha_H \begin{vmatrix} -c_5 + c_6 + c_7 & -\varphi_H & 0 & c_8 \\ -c_6 & \lambda + \varphi_H + \mu_H & 0 & 0 \\ c_{10} & 0 & \lambda + c_{11} + c_{12} & 0 \\ -c_{10} & 0 & -c_{11} & \lambda + c_{12} \end{vmatrix} \right] = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda + c_1 + c_2 + c_3 + \mu_H)$$

$$\left[(\lambda - c_4 + \alpha_H + \mu_H)(\lambda + c_5 + c_9) \begin{vmatrix} \lambda + \varphi_H + \mu_H & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + c_{11} + c_{12} & 0 \\ 0 & -c_{11} & \lambda + c_{12} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. \alpha_H \left[(-c_7) \begin{vmatrix} \lambda + \varphi_H + \mu_H & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + c_{11} + c_{12} & 0 \\ 0 & -c_{11} & \lambda + c_{12} \end{vmatrix} + \right. \right.$$

$$c_8\begin{vmatrix} -c_6 & \lambda+\varphi_H+\mu_H & 0 \\ c_{10} & 0 & \lambda+c_{11}+c_{12} \\ -c_{10} & 0 & -c_{11} \end{vmatrix}\Bigg]\Bigg] +$$

$$(c_1+c_2+c_3)$$

$$\left[c_4(\lambda+c_5+c_6)\begin{vmatrix} \lambda+\varphi_H+\mu_H & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+c_{11}+c_{12} & 0 \\ 0 & -c_{11} & \lambda+c_{12} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\alpha_H\left[(-c_8)\begin{vmatrix} -c_6 & \lambda+\varphi_H+\mu_H & 0 \\ c_{10} & 0 & \lambda+c_{11}+c_{12} \\ -c_{10} & 0 & -c_{11} \end{vmatrix} + \right.$$

$$(\lambda+c_{12})\begin{vmatrix} -c_5+c_6+c_7 & -\varphi_H & 0 \\ -c_6 & \lambda+\varphi_H+\mu_H & 0 \\ c_{10} & 0 & \lambda+c_{11}+c_{12} \end{vmatrix}\Bigg]\Bigg] = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+c_1+c_2+c_3+\mu_H)$$

$$\left[(\lambda-c_4+\alpha_H+\mu_H)(\lambda+c_5+c_9)(\lambda+\varphi_H+\mu_H)\begin{vmatrix} \lambda+c_{11}+c_{12} & 0 \\ -c_{11} & \lambda+c_{12} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\alpha_H\left[(-c_7)(\lambda+\varphi_H+\mu_H)\begin{vmatrix} \lambda+c_{11}+c_{12} & 0 \\ -c_{11} & \lambda+c_{12} \end{vmatrix} + \right.$$

$$c_8(-\lambda-\varphi_H-\mu_H)\begin{vmatrix} c_{10} & \lambda+c_{11}+c_{12} \\ -c_{10} & -c_{11} \end{vmatrix}\Bigg]\Bigg] +$$

$$(c_1+c_2+c_3)$$

$$\left[c_4(\lambda+c_5+c_6)(\lambda+\varphi_H+\mu_H)\begin{vmatrix}\lambda+c_{11}+c_{12} & 0\\ -c_{11} & \lambda+c_{12}\end{vmatrix}+\right.$$

$$\alpha_H\left[(-c_8)(-\lambda-\varphi_H-\mu_H)\begin{vmatrix}c_{10} & \lambda+c_{11}+c_{12}\\ -c_{10} & -c_{11}\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.\left.(\lambda+c_{12})(\lambda+c_{11}+c_{12})\begin{vmatrix}-c_5+c_6+c_7 & -\varphi_H\\ -c_6 & \lambda+\varphi_H+\mu_H\end{vmatrix}\right]\right]=0$$

$$\leftrightarrow(\lambda+c_1+c_2+c_3+\mu_H)\left[(\lambda-c_4+\alpha_H+\mu_H)(\lambda+c_5+c_9)(\lambda+\varphi_H+\mu_H)\right.$$
$$(\lambda+c_{11}+c_{12})(\lambda+c_{12})+\alpha_H\left[(-c_7)(\lambda+\varphi_H+\mu_H)(\lambda+c_{11}+c_{12})(\lambda+c_{12})+\right.$$
$$\left.\left.c_8(-\lambda-\varphi_H-\mu_H)\left(-c_{10}c_{11}+c_{10}(\lambda+c_{11}+c_{12})\right)\right]\right]+(c_1+c_2+c_3)$$
$$\left[c_4(\lambda+c_5+c_6)(\lambda+\varphi_H+\mu_H)(\lambda+c_{11}+c_{12})(\lambda+c_{12})+\alpha_H\right.$$
$$\left[(-c_8)(-\lambda-\varphi_H-\mu_H)\left(-c_{10}c_{11}+c_{10}(\lambda+c_{11}+c_{12})\right)+(\lambda+c_{12})(\lambda+c_{11}+c_{12})\right.$$
$$\left.\left.\left((-c_5+c_6+c_7)(\lambda+\varphi_H+\mu_H)-(\varphi_H c_6)\right]\right]=0 \qquad (4.7)$$

Dari matriks jacobian yang dievaluasi pada titik setimbang endemik didapatkan persamaan karakteristik seperti yang ditunjukan pada persamaan (4.7). Kemudian, dilakukan simulasi dengan metode numerik yaitu Range-Kutta Orde 4 untuk menentukan sifat kestabilan dari titik setimbang endemik tersebut. Analisis kestabilan dapat dilihat pada sub-bab **4.8.1**

4.6 Penyelesaian Kontrol Optimal

Pada masalah kontrol optimal model penyebaran virus zika, tujuan yang akan dicapai adalah meminimumkan penyebaran terinfeksinya virus zika dengan diberikan tindakan kontrol $u_1(t), u_2(t)$ dan $u_3(t)$. Kontrol $u_1(t)$ yaitu kontrol penggunaan

kondom untuk dapat mencegah penularan virus zika antar individu yang terinfeksi. Kontrol $u_2(t)$ yaitu kontrol untuk pengobatan individu yang sudah terinfeksi. Kontrol $u_3(t)$ yaitu kontrol terhadap penyemprotan insektisida untuk dapat meminimumkan jumlah populasi nyamuk.

Penyelesaian kontrol optimal model penyebaran virus zika menggunakan Prinsip Maksismum Pontryagin dan fungsi objektif untuk model diberikan:

$$J = \min_{u_1,u_2,u_3} \int_0^{T_f} I_H(t) + \frac{1}{2}(C_1 {u_1}^2(t) + C_2 {u_2}^2(t) + C_3 {u_3}^2(t))\,dt$$

dengan kendala:

$0 \le T \le T_f$

$0 \le u_1 \le 1$

$0 \le u_2 \le 1$

$0 \le u_3 \le 1$

dimana

C_1 : bobot pada kontrol penggunaan kondom
C_2 : bobot pada kontrol pengobatan individu terinfeksi
C_3 : bobot pada kontrol penyemprotan insektisida

T_f adalah waktu akhir, $C_1 u_1^2$ adalah biaya untuk kontrol penggunaan kondom, $C_1 u_2^2$ adalah biaya untuk kontrol pengobatan individu terinfeksi, dan $C_1 u_3^2$ adalah biaya untuk kontrol penyemprotan insektisida.

Untuk menyelesaikan kontrol optimal, harus ditentukan fungsi Lagrangian dan fungsi Hamiltonian. Lagrangian dari masalah ini, yaitu:

$$L = I_H + \frac{1}{2}(C_1 u_1^2 + C_2 u_2^2 + C_3 u_3^2)$$

Kemudian akan dicari Hamiltonian (H) , sebagai berikut

$$H = L(I_H, u_1, u_2, u_3) + \lambda_{S_H} \frac{dS_H}{dt} + \lambda_{A_H} \frac{dA_H}{dt} + \lambda_{I_H} \frac{dI_H}{dt} + \lambda_{R_H} \frac{dR_H}{dt} + \lambda_{S_V} \frac{dS_V}{dt} + \lambda_{I_V} \frac{dI_V}{dt}$$

$$H = I_H + \frac{1}{2}(C_1 u_1^2 + C_2 u_2^2 + C_3 u_3^2) + \lambda_{S_H}\left[\Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2) I_H - (\phi + \tau u_2) \nu I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} - \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} - \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H\right] + \lambda_{A_H}\left[\frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H - \mu_H A_H\right] + \lambda_{I_H}[\alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H] + \lambda_{R_H}[(\phi + \tau u_2) \nu I_H - \varphi_H R_H - \mu_H R_H] + \lambda_{S_V}\left[\Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) S_V\right] + \lambda_{I_V}\left[\frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V\right]$$

Untuk mendapatkan persamaan *state* dan *costate* yang optimal dilakukan dengan menurunkan persamaan parsial fungsi Hamiltonian (H) seperti berikut:

Untuk persamaan *state* yang optimal:

$$\dot{S}_H^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda_{S_H}}$$

$$= \Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2) I_H - (\phi + \tau u_2) \nu I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} -$$

$$\frac{\beta_a c (1-u_1) A_H S_H}{N_H} - \frac{\beta_S k (1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H$$

$$\dot{A}_H^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda_{A_H}}$$

$$= \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c (1-u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k (1-u_1) I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H - \mu_H A_H$$

$$\dot{I}_H^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda_{I_H}}$$

$$= \alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H$$

$$\dot{R}_H^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda_{R_H}}$$

$$= (\phi + \tau u_2) \nu I_H - \varphi_H R_H - \mu_H R_H$$

$$\dot{S}_V^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda_{S_V}}$$

$$= \Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) S_V$$

$$i_V^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda_{I_V}}$$
$$= \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V$$

Untuk persamaan *costate* yang optimal:

$$\lambda_{S_H}{}' = -\frac{\partial H}{\partial S_H}$$
$$= (\lambda_{S_H} - \lambda_{A_H}) \left[\frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V}{N_H} + \frac{\beta_a c(1-u_1) A_H}{N_H} + \frac{\beta_S k(1-u_1) I_H}{N_H} \right] + \lambda_{S_H} \mu_H$$

$$\lambda_{A_H}{}' = -\frac{\partial H}{\partial A_H}$$
$$= (\lambda_{S_H} - \lambda_{A_H}) \frac{\beta_a c(1-u_1) S_H}{N_H} + \alpha_H (\lambda_{A_H} - \lambda_{I_H}) + \lambda_{A_H} \mu_H$$

$$\lambda_{I_H}{}' = -\frac{\partial H}{\partial I_H}$$
$$= (\lambda_{S_H} - \lambda_{A_H}) \frac{\beta_S k(1-u_1) S_H}{N_H} + (\lambda_{S_V} - \lambda_{I_V}) \frac{\beta_2 \varepsilon \rho S_V}{N_H} -$$

$$\lambda_{S_H} (\phi + \tau u_2)(1-v) + \lambda_{I_H} (\phi + \tau u_2 + \mu_H + \delta_H) - \lambda_{R_H} (\phi + \tau u_2) v$$

$$\lambda_{R_H}{}' = -\frac{\partial H}{\partial R_H}$$
$$= (\lambda_{R_H} - \lambda_{S_H}) \varphi_H + \lambda_{R_H} \mu_H$$

$$\lambda_{S_V}{}' = -\frac{\partial H}{\partial S_V}$$
$$= (\lambda_{S_V} - \lambda_{I_V})\frac{\beta_2\,\varepsilon\,\rho\,I_H}{N_H} + \lambda_{S_V}(\mu_v + \theta u_3)$$

$$\lambda_{I_V}{}' = -\frac{\partial H}{\partial I_V}$$
$$= (\lambda_{S_H} - \lambda_{A_H})\frac{\beta_1\,\varepsilon\,\rho\,S_H}{N_H} + \lambda_{I_V}(\mu_V + \theta u_3)$$

dengan kondisi *transfersality* (kondisi batas), yaitu:

$$\lambda_{S_H}(T_f) = \lambda_{A_H}(T_f) = \lambda_{I_H}(T_f) = \lambda_{R_H}(T_f)$$
$$= \lambda_{S_V}(T_f) = \lambda_{I_V}(T_f) = 0$$

Kemudian, kondisi optimal akan dicapai dengan cara menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap u_1, u_2, dan u_3. Berdasarkan prinsip optimal, maka $\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{\partial H}{\partial u_3} = 0$, sehingga diperoleh kontrol optimal, sebagai berikut:

1. Kontrol optimal u_1^c

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$$
$$C_1 u_1^c + (\lambda_{S_H} - \lambda_{A_H})\left[\frac{\beta_a c A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k I_H S_H}{N_H}\right] = 0$$
$$C_1 u_1^c = (\lambda_{A_H} - \lambda_{S_H})\left[\frac{\beta_a c A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k I_H S_H}{N_H}\right]$$

$$u_1^c = \frac{(\lambda_{A_H} - \lambda_{S_H})\left[\frac{\beta_a c A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k I_H S_H}{N_H}\right]}{C_1}$$

2. Kontrol optimal u_2^c

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$$

$$C_2 u_2^c + I_H(\lambda_{S_H}\tau - \lambda_{S_H}\tau v - \lambda_{I_H}\tau + \lambda_{R_H}\tau v) = 0$$

$$C_2 u_2^c + I_H\left(\tau\left[(\lambda_{S_H} - \lambda_{I_H}) + (\lambda_{R_H} - \lambda_{S_H})v\right]\right) = 0$$

$$C_2 u_2^c = I_H\left(\tau\left[(\lambda_{I_H} - \lambda_{S_H}) + (\lambda_{S_H} - \lambda_{R_H})v\right]\right)$$

$$u_2^c = \frac{I_H\left(\tau\left[(\lambda_{I_H} - \lambda_{S_H}) + (\lambda_{S_H} - \lambda_{R_H})v\right]\right)}{C_2}$$

3. Kontrol optimal u_3^c

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = 0$$

$$C_3 u_3^c - \theta(\lambda_{S_V} S_V - \lambda_{I_V} I_V) = 0$$

$$C_3 u_3^c = \theta(\lambda_{S_V} S_V - \lambda_{I_V} I_V)$$

$$u_3^c = \frac{\theta(\lambda_{S_V} S_V - \lambda_{I_V} I_V)}{C_3}$$

Karena nilai kontrol terbatas, dimana $0 \le u_1 \le 1$, $0 \le u_2 \le 1$ dan $0 \le u_3 \le 1$, maka

$$u_1^* = \begin{cases} 0, & jika \quad u_1^c \le 0 \\ u_1^c, & jika \quad 0 < u_1^c < 1 \\ 1 & jika \quad u_1^c \ge 1 \end{cases}$$

$$u_2^* = \begin{cases} 0, & jika \quad u_2^c \le 0 \\ u_2^c, & jika \quad 0 < u_2^c < 1 \\ 1 & jika \quad u_2^c \ge 1 \end{cases}$$

$$u_3^* = \begin{cases} 0, & jika \quad u_3^c \le 0 \\ u_3^c, & jika \quad 0 < u_3^c < 1 \\ 1 & jika \quad u_3^c \ge 1 \end{cases}$$

Sehingga, didapatkan kontrol optimal yaitu:

$$u_1^* = \max\left\{0, \min\left(\frac{(\lambda_{A_H} - \lambda_{S_H})\left[\frac{\beta_a c A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k I_H S_H}{N_H}\right]}{C_1}\right)\right\} \quad (4.7)$$

$$u_2^* = \max\left\{0, \min\left(\frac{I_H\left(\tau\left[(\lambda_{I_H} - \lambda_{S_H}) + (\lambda_{S_H} - \lambda_{R_H})v\right]\right)}{C_2}\right)\right\} \quad (4.8)$$

$$u_3^* = \max\left\{0, \min\left(\frac{\theta(\lambda_{S_V} S_V - \lambda_{I_V} I_V)}{C_3}\right)\right\} \quad (4.9)$$

4.7 Solusi Numerik

Pada analisis kestabilan sistem sebelum dikontrol dilakukan simulasi secara numerik untuk dapat memeriksa hasil analitis kestabilan dipersekitaran titik setimbang endemik. Penyelesaian

numerik ini menggunakan metode Range-Kutta Orde 4. Adapun langkah-langkah penyelesaian numerik sebagai berikut:

Langkah 1:
Interval waktu t= [0, t_f] dibagi sebanyak *n* sub-interval. Sehingga persamaan diferensial dapat ditulis sebagai berikut:

$\overrightarrow{Sh} = (Sh_1, \ldots, Sh_{n+1})$
$\overrightarrow{Ah} = (Ah_1, \ldots, Ah_{n+1})$
$\overrightarrow{Ih} = (Ih_1, \ldots, Ih_{n+1})$
$\overrightarrow{Rh} = (Rh_1, \ldots, Rh_{n+1})$
$\overrightarrow{Sv} = (Sv_1, \ldots, Sv_{n+1})$
$\overrightarrow{Iv} = (Iv_1, \ldots, Iv_{n+1})$

Artinya terdapat $n + 1$ titik setimbang waktu t, sehingga diperoleh selisih antara setiap titiknya $h = (t_f - t_0)/n$

Langkah 2:
Memberikan inisialisasi nilai awal $Sh, Ah, Ih, Rh, Sv, dan\ Iv$ dalam bentuk vektor nol sebanyak *n.*

Langkah 3:
Menggunakan nilai awal $Sh(0) = Sh_0,\ Ah = Ah_0,\ Ih = Ih_0,$ $Rh = Rh_0,\ Sv = Sv_0,\ dan\ Iv = Iv_0.$

Langkah 4:
Menyelesaikan persamaan diferensial dengan integrasi numerik menggunakan persamaan (4.1-4.6) dengan metode Range-Kutta orde 4 dinyatakan sebagai berikut:

$$Sh(t+h) = Sh(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Sh} + 2k_{2,Sh} + 2k_{3,Sh} + k_{4,Sh}\right)$$
$$Ah(t+h) = Ah(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Ah} + 2k_{2,Ah} + 2k_{3,Ah} + k_{4,Ah}\right)$$
$$Ih(t+h) = Ih(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Ih} + 2k_{2,Ih} + 2k_{3,Ih} + k_{4,Ih}\right)$$

$$Rh(t+h) = Rh(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Rh} + 2k_{2,Rh} + 2k_{3,Rh} + k_{4,Rh}\right)$$
$$Sv(t+h) = Sv(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Sv} + 2k_{2,Sv} + 2k_{3,Sv} + k_{4,Sv}\right)$$
$$Iv(t+h) = Iv(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Iv} + 2k_{2,Iv} + 2k_{3,Iv} + k_{4,Iv}\right)$$

dimana

$$k_{1,Sh} = hf_1(Sh(t), Ah(t), Ih(t), Rh(t), Sv(t), Iv(t))$$
$$k_{1,Ah} = hf_2(Sh(t), Ah(t), Ih(t), Rh(t), Sv(t), Iv(t))$$
$$k_{1,Ih} = hf_3(Sh(t), Ah(t), Ih(t), Rh(t), Sv(t), Iv(t))$$
$$k_{1,Rh} = hf_4(Sh(t), Ah(t), Ih(t), Rh(t), Sv(t), Iv(t))$$
$$k_{1,Sv} = hf_5(Sh(t), Ah(t), Ih(t), Rh(t), Sv(t), Iv(t))$$
$$k_{1,Iv} = hf_6(Sh(t), Ah(t), Ih(t), Rh(t), Sv(t), Iv(t))$$

$$k_{2,Sh} = hf_1\left(Sh(t) + \frac{k_{1,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{1,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{1,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{1,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{1,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{1,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{2,Ah} = hf_2\left(Sh(t) + \frac{k_{1,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{1,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{1,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{1,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{1,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{1,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{2,Ih} = hf_3\left(Sh(t) + \frac{k_{1,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{1,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{1,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{1,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{1,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{1,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{2,Rh} = hf_4\left(Sh(t) + \frac{k_{1,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{1,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{1,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{1,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{1,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{1,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{2,Sv} = hf_5\left(Sh(t) + \frac{k_{1,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{1,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{1,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{1,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{1,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{1,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{2,Iv} = hf_6\left(Sh(t) + \frac{k_{1,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{1,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{1,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{1,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{1,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{1,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{3,Sh} = hf_1\left(Sh(t) + \frac{k_{2,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{2,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{2,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{2,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{2,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{2,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{3,Ah} = hf_2\left(Sh(t) + \frac{k_{2,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{2,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{2,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{2,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{2,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{2,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{3,Ih} = hf_3\left(Sh(t) + \frac{k_{2,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{2,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{2,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{2,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{2,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{2,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{3,Rh} = hf_4\left(Sh(t) + \frac{k_{2,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{2,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{2,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{2,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{2,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{2,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{3,Sv} = hf_5\left(Sh(t) + \frac{k_{2,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{2,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{2,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{2,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{2,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{2,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{3,Iv} = hf_6\left(Sh(t) + \frac{k_{2,Sh}}{2}, Ah(t) + \frac{k_{2,Ah}}{2}, Ih(t) + \frac{k_{2,Ih}}{2}, Rh(t) + \frac{k_{2,Rh}}{2}, Sv(t) + \frac{k_{2,Sv}}{2}, Iv(t) + \frac{k_{2,Iv}}{2}\right)$$

$$k_{4,Sh} = hf_1\big(Sh(t) + k_{3,Sh}, Ah(t) + k_{3,Ah}, Ih(t) + k_{3,Ih}, Rh(t) + k_{3,Rh}, Sv(t) + k_{3,Sv}, Iv(t) + k_{3,Iv}\big)$$

$$k_{4,Ah} = hf_2\big(Sh(t) + k_{3,Sh}, Ah(t) + k_{3,Ah}, Ih(t) + k_{3,Ih}, Rh(t) + k_{3,Rh}, Sv(t) + k_{3,Sv}, Iv(t) + k_{3,Iv}\big)$$

$$k_{4,Ih} = hf_3\big(Sh(t) + k_{3,Sh}, Ah(t) + k_{3,Ah}, Ih(t) + k_{3,Ih}, Rh(t) + k_{3,Rh}, Sv(t) + k_{3,Sv}, Iv(t) + k_{3,Iv}\big)$$

$$k_{4,Rh} = hf_4\big(Sh(t) + k_{3,Sh}, Ah(t) + k_{3,Ah}, Ih(t) + k_{3,Ih}, Rh(t) + k_{3,Rh}, Sv(t) + k_{3,Sv}, Iv(t) + k_{3,Iv}\big)$$

$$k_{4,Sv} = hf_5\big(Sh(t) + k_{3,Sh}, Ah(t) + k_{3,Ah}, Ih(t) + k_{3,Ih}, Rh(t) + k_{3,Rh}, Sv(t) + k_{3,Sv}, Iv(t) + k_{3,Iv}\big)$$

$$k_{4,Iv} = hf_6\big(Sh(t) + k_{3,Sh}, Ah(t) + k_{3,Ah}, Ih(t) + k_{3,Ih}, Rh(t) + k_{3,Rh}, Sv(t) + k_{3,Sv}, Iv(t) + k_{3,Iv}\big)$$

Selanjutnya, simulasi sistem dengan menggunakan kontrol dilakukan dengan menggunakan persamaan *state* dan *costate*. Persamaan *state* dan *costate* yang digunakan adalah persamaan yang mengandung u_1, u_2, dan u_3. Hal ini dilakukan karena u_1, u_2, dan u_3 mengandung variabel λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, dan λ_6. Penyelesaian numerik ini menggunakan metode Range-Kutta Orde 4. Persamaan *state* akan diselesaikan dengan *forward sweep*, sedangkan persamaan *costate* (λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, dan λ_6) diselesaikan dengan *backward sweep*. Adapun langkah-langkah penyelesaian numerik sebagai berikut:

Langkah 1

Interval waktu waktu t= [0, t_f] dibagi sebanyak n sub-interval. Sehingga persamaan *state* dan *costate* dapat ditulis sebagai berikut:

- State

$\overrightarrow{Sh1} = (Sh1_1, \ldots, Sh1_{n+1})$
$\overrightarrow{Ah1} = (Ah1_1, \ldots, Ah1_{n+1})$
$\overrightarrow{Ih1} = (Ih1_1, \ldots, Ih1_{n+1})$
$\overrightarrow{Rh1} = (Rh1_1, \ldots, Rh1_{n+1})$
$\overrightarrow{Sv1} = (Sv1_1, \ldots, Sv1_{n+1})$
$\overrightarrow{Iv1} = (Iv1_1, \ldots, Iv1_{n+1})$

- Costate

$\overrightarrow{\lambda_1} = (\lambda_{1_1}, \ldots, \lambda_{1_{n+1}})$
$\overrightarrow{\lambda_2} = (\lambda_{2_1}, \ldots, \lambda_{2_{n+1}})$
$\overrightarrow{\lambda_3} = (\lambda_{3_1}, \ldots, \lambda_{3_{n+1}})$
$\overrightarrow{\lambda_4} = (\lambda_{4_1}, \ldots, \lambda_{4_{n+1}})$
$\overrightarrow{\lambda_5} = (\lambda_{5_1}, \ldots, \lambda_{5_{n+1}})$
$\overrightarrow{\lambda_6} = (\lambda_{6_1}, \ldots, \lambda_{6_{n+1}})$

Artinya terdapat $n + 1$ titik setimbang waktu t, sehingga diperoleh selisih antara setiap titiknya $h = (t_f - t_0)/n$

Langkah 2
Memberikan asumsi nilai awal kontrol u_1, u_2, dan u_3 sepanjang interval *t* untuk mengawali intregasi.

Langkah 3
Menggunakan nilai awal $Sh1(0) = Sh_0$, $Ah1 = Ah_0$, $Ih1 = Ih_0$, $Rh1 = Rh_0$, $Sv1 = Sv_0$, $dan\ Iv1 = Iv_0$ dan asumsi nilai awal u_1, u_2, dan u_3 untuk menyesuaikan persamaan *state* secara *forward sweep*. Berikut ini rumus Runge-Kutta orde 4:

$$Sh1(t+h) = Sh1(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Sh1} + 2k_{2,Sh1} + 2k_{3,Sh1} + k_{4,Sh1}\right)$$
$$Ah1(t+h) = Ah1(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Ah1} + 2k_{2,Ah1} + 2k_{3,Ah1} + k_{4,Ah}\right)$$
$$Ih1(t+h) = Ih1(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Ih1} + 2k_{2,Ih1} + 2k_{3,Ih1} + k_{4,Ih1}\right)$$
$$Rh1(t+h) = Rh1(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Rh1} + 2k_{2,Rh1} + 2k_{3,Rh1} + k_{4,Rh}\right)$$
$$Sv1(t+h) = Sv1(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Sv1} + 2k_{2,Sv1} + 2k_{3,Sv1} + k_{4,Sv1}\right)$$
$$Iv1(t+h) = Iv1(t) + \frac{1}{6}\left(k_{1,Iv1} + 2k_{2,Iv1} + 2k_{3,Iv1} + k_{4,Iv1}\right)$$

dimana

$$k_{1,Sh1} = hf_1(Sh1(t), Ah1(t), Ih1(t), Rh1(t), Sv1(t), Iv1(t), u1(t), u2(t), u3(t))$$
$$k_{1,Ah1} = hf_2(Sh1(t), Ah1(t), Ih1(t), Rh1(t), Sv1(t), Iv1(t), u1(t), u2(t), u3(t))$$
$$k_{1,Ih1} = hf_3(Sh1(t), Ah1(t), Ih1(t), Rh1(t), Sv1(t), Iv1(t), u1(t), u2(t), u3(t))$$
$$k_{1,Rh1} = hf_4(Sh1(t), Ah1(t), Ih1(t), Rh1(t), Sv1(t), Iv1(t), u1(t), u2(t), u3(t))$$
$$k_{1,Sv1} = hf_5(Sh1(t), Ah1(t), Ih1(t), Rh1(t), Sv1(t), Iv1(t), u1(t), u2(t), u3(t))$$
$$k_{1,Iv1} = hf_6(Sh1(t), Ah1(t), Ih1(t), Rh1(t), Sv1(t), Iv1(t), u1(t), u2(t), u3(t))$$

$$k_{2,Sh1} = hf_1\left(Sh1(t) + \frac{k_{1,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{1,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{1,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{1,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{1,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{1,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right)$$

$$k_{2,Ah1} = hf_2\left(Sh1(t) + \frac{k_{1,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{1,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{1,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{1,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{1,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{1,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right)$$

$$k_{2,Ih1} = hf_3\left(Sh1(t) + \frac{k_{1,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{1,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{1,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{1,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{1,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{1,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right)$$

$$k_{2,Rh1} = hf_4\left(Sh1(t) + \frac{k_{1,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{1,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{1,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{1,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{1,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{1,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right)$$

$$k_{2,Sv1} = hf_5\Bigg(Sh1(t) + \frac{k_{1,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{1,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{1,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{1,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{1,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{1,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\Bigg)$$

$$k_{2,Iv1} = hf_6\Bigg(Sh1(t) + \frac{k_{1,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{1,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{1,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{1,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{1,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{1,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\Bigg)$$

$$k_{3,Sh1} = hf_1\Bigg(Sh1(t) + \frac{k_{2,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{2,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{2,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{2,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{2,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{2,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\Bigg)$$

$$k_{3,Ah1} = hf_2\Bigg(Sh1(t) + \frac{k_{2,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{2,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{2,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{2,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{2,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{2,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\Bigg)$$

$$k_{3,Ih1} = hf_3\left(Sh1(t) + \frac{k_{2,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{2,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{2,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{2,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{2,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{2,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right)$$

$$k_{3,Rh1} = hf_4\left(Sh1(t) + \frac{k_{2,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{2,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{2,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{2,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{2,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{2,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right)$$

$$k_{3,Sv1} = hf_5\left(Sh1(t) + \frac{k_{2,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{2,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{2,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{2,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{2,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{2,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right)$$

$$k_{3,Iv1} = hf_6\left(Sh1(t) + \frac{k_{2,Sh1}}{2}, Ah1(t) + \frac{k_{2,Ah1}}{2}, Ih1(t) + \frac{k_{2,Ih1}}{2}, Rh1(t) + \frac{k_{2,Rh1}}{2}, Sv1(t) + \frac{k_{2,Sv1}}{2}, Iv1(t) + \frac{k_{2,Iv1}}{2}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right)$$

$$k_{4,Sh1} = hf_1\Big(Sh1(t) + k_{3,Sh1}, Ah1(t) + k_{3,Ah1}, Ih1(t) + k_{3,Ih1}, Rh1(t) + k_{3,Rh1}, Sv1(t) + k_{3,Sv1}, Iv1(t) + k_{3,Iv1}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\Big)$$

$$k_{4,Ah1} = hf_2\Big(Sh1(t) + k_{3,Sh1}, Ah1(t) + k_{3,Ah1}, Ih1(t) + k_{3,Ih1}, Rh1(t) + k_{3,Rh1}, Sv1(t) + k_{3,Sv1}, Iv1(t) + k_{3,Iv1}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\Big)$$

$$k_{4,Ih1} = hf_3\Big(Sh1(t) + k_{3,Sh1}, Ah1(t) + k_{3,Ah1}, Ih1(t) + k_{3,Ih1}, Rh1(t) + k_{3,Rh1}, Sv1(t) + k_{3,Sv1}, Iv1(t) + k_{3,Iv1}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\Big)$$

$$k_{4,Rh1} = hf_4\Big(Sh1(t) + k_{3,Sh1}, Ah1(t) + k_{3,Ah1}, Ih1(t) + k_{3,Ih1}, Rh1(t) + k_{3,Rh1}, Sv1(t) + k_{3,Sv1}, Iv1(t) + k_{3,Iv1}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\Big)$$

$$k_{4,Sv1} = hf_5\Big(Sh1(t) + k_{3,Sh1}, Ah1(t) + k_{3,Ah1}, Ih1(t) + k_{3,Ih1}, Rh1(t) + k_{3,Rh1}, Sv1(t) + k_{3,Sv1}, Iv1(t) + k_{3,Iv1}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\Big)$$

$$k_{4,Iv1} = hf_6\Big(Sh1(t) + k_{3,Sh1}, Ah1(t) + k_{3,Ah1}, Ih1(t) + k_{3,Ih1}, Rh1(t) + k_{3,Rh1}, Sv1(t) + k_{3,Sv1}, Iv1(t) + k_{3,Iv1}, u_1(t), u_2(t), u_3(t)\Big)$$

Langkah 4

Dimisalkan $\lambda_1(t_f) = \omega$ dan diketahui batas transversal $\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = \lambda_5(t_f) = \lambda_6(t_f)$, maka digunakan nilai akhir $\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = \lambda_5(t_f) = \lambda_6(t_f) = \omega$ serta hasil dari langkah 3 untuk menyelesaikan

persamaan *costate* secara *backward sweep*. Berikut ini rumus Range-Kutta orde 4 untuk persamaaan *costate*:

$$\lambda_1(t-h) = \lambda_1(t) - \frac{1}{6}\left(k_{1,\lambda_1} + 2k_{2,\lambda_1} + 3k_{3,\lambda_1} + k_{4,\lambda_1}\right)$$
$$\lambda_2(t-h) = \lambda_2(t) - \frac{1}{6}\left(k_{1,\lambda_2} + 2k_{2,\lambda_2} + 3k_{3,\lambda_2} + k_{4,\lambda_2}\right)$$
$$\lambda_3(t-h) = \lambda_3(t) - \frac{1}{6}\left(k_{1,\lambda_3} + 2k_{2,\lambda_3} + 3k_{3,\lambda_3} + k_{4,\lambda_3}\right)$$
$$\lambda_4(t-h) = \lambda_4(t) - \frac{1}{6}\left(k_{1,\lambda_4} + 2k_{2,\lambda_4} + 3k_{3,\lambda_4} + k_{4,\lambda_4}\right)$$
$$\lambda_5(t-h) = \lambda_5(t) - \frac{1}{6}\left(k_{1,\lambda_5} + 2k_{2,\lambda_5} + 3k_{3,\lambda_5} + k_{4,\lambda_5}\right)$$
$$\lambda_6(t-h) = \lambda_6(t) - \frac{1}{6}\left(k_{1,\lambda_6} + 2k_{2,\lambda_6} + 3k_{3,\lambda_6} + k_{4,\lambda_6}\right)$$

dimana

$$k_{1,\lambda_1} = hg_1\left(\begin{matrix}\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t), \lambda_6(t), \\ Sh1(t), Ah1(t), Ih1(t), Rh1(t), Sv1(t), Iv1(t), \\ u_1(t), u_2(t), u_3(t)\end{matrix}\right)$$

$$k_{1,\lambda_2} = hg_2\left(\begin{matrix}\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t), \lambda_6(t), \\ Sh1(t), Ah1(t), Ih1(t), Rh1(t), Sv1(t), Iv1(t), \\ u_1(t), u_2(t), u_3(t)\end{matrix}\right)$$

$$k_{1,\lambda_3} = hg_3\left(\begin{matrix}\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t), \lambda_6(t), \\ Sh1(t), Ah1(t), Ih1(t), Rh1(t), Sv1(t), Iv1(t), \\ u_1(t), u_2(t), u_3(t)\end{matrix}\right)$$

$$k_{1,\lambda_4} = hg_4\left(\begin{matrix}\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t), \lambda_6(t), \\ Sh1(t), Ah1(t), Ih1(t), Rh1(t), Sv1(t), Iv1(t), \\ u_1(t), u_2(t), u_3(t)\end{matrix}\right)$$

$$k_{1,\lambda_5} = hg_5\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t),\lambda_4(t),\lambda_5(t),\lambda_6(t),\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{1,\lambda_6} = hg_6\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t),\lambda_4(t),\lambda_5(t),\lambda_6(t),\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{2,\lambda_1} = hg_1\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{1,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{1,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{1,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{1,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{1,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{1,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{2,\lambda_2} = hg_2\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{1,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{1,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{1,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{1,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{1,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{1,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{2,\lambda_3} = hg_3\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{1,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{1,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{1,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{1,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{1,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{1,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{2,\lambda_4} = hg_4\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{1,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{1,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{1,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{1,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{1,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{1,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{2,\lambda_5} = hg_5\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{1,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{1,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{1,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{1,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{1,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{1,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{2,\lambda_6} = hg_6\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{1,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{1,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{1,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{1,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{1,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{1,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{3,\lambda_1} = hg_1\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{2,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{2,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{2,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{2,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{2,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{2,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{3,\lambda_2} = hg_2\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{2,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{2,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{2,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{2,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{2,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{2,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{3,\lambda_3} = hg_3\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{2,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{2,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{2,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{2,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{2,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{2,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{3,\lambda_4} = hg_4\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{2,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{2,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{2,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{2,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{2,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{2,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{3,\lambda_5} = hg_5\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{2,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{2,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{2,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{2,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{2,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{2,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{3,\lambda_6} = hg_6\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-\frac{k_{2,\lambda_1}}{2},\lambda_2(t)-\frac{k_{2,\lambda_2}}{2},\lambda_3-\frac{k_{2,\lambda_3}}{2},\\ \lambda_4(t)-\frac{k_{2,\lambda_4}}{2},\lambda_5(t)-\frac{k_{2,\lambda_5}}{2},\lambda_6-\frac{k_{2,\lambda_6}}{2},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{4,\lambda_1} = hg_1\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-k_{3,\lambda_1},\lambda_2(t)-k_{3,\lambda_2},\lambda_3-k_{3,\lambda_3},\\ \lambda_4(t)-k_{3,\lambda_4},\lambda_5(t)-k_{3,\lambda_5},\lambda_6-k_{3,\lambda_6},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{4,\lambda_2} = hg_2\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-k_{3,\lambda_1},\lambda_2(t)-k_{3,\lambda_2},\lambda_3-k_{3,\lambda_3},\\ \lambda_4(t)-k_{3,\lambda_4},\lambda_5(t)-k_{3,\lambda_5},\lambda_6-k_{3,\lambda_6},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{4,\lambda_3} = hg_3\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-k_{3,\lambda_1},\lambda_2(t)-k_{3,\lambda_2},\lambda_3-k_{3,\lambda_3},\\ \lambda_4(t)-k_{3,\lambda_4},\lambda_5(t)-k_{3,\lambda_5},\lambda_6-k_{3,\lambda_6},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{4,\lambda_4} = hg_4\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-k_{3,\lambda_1},\lambda_2(t)-k_{3,\lambda_2},\lambda_3-k_{3,\lambda_3},\\ \lambda_4(t)-k_{3,\lambda_4},\lambda_5(t)-k_{3,\lambda_5},\lambda_6-k_{3,\lambda_6},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{4,\lambda_5} = hg_5\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-k_{3,\lambda_1},\lambda_2(t)-k_{3,\lambda_2},\lambda_3-k_{3,\lambda_3},\\ \lambda_4(t)-k_{3,\lambda_4},\lambda_5(t)-k_{3,\lambda_5},\lambda_6-k_{3,\lambda_6},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

$$k_{4,\lambda_6} = hg_6\left(\begin{array}{c}\lambda_1(t)-k_{3,\lambda_1},\lambda_2(t)-k_{3,\lambda_2},\lambda_3-k_{3,\lambda_3},\\ \lambda_4(t)-k_{3,\lambda_4},\lambda_5(t)-k_{3,\lambda_5},\lambda_6-k_{3,\lambda_6},\\ Sh1(t),Ah1(t),Ih1(t),Rh1(t),Sv1(t),Iv1(t),\\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\end{array}\right)$$

Langkah 5
Memperbarui nilai u_1, u_2, dan u_3 dengan mensubtitusi nilai *Sh1*, *Ah1*, *Ih1*, *Rh1*, *Sv1*, *Iv1*, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, dan λ_6 yang baru kedalam karakteristik kontrol optimal. Dalam hal ini nilai u_1, u_2, dan u_3 diberikan pada persamaan (4.7) - (4.9)

4.8 Analisis Hasil Simulasi

Pada subbab ini akan dilakukan simulasi dengan menggunakan nilai parameter dan nilai awal masing-masing sub-populasi $S_H, A_H, I_H, R_H, S_V, \ dan \ \ I_V$, sebagai berikut:

Tabel 4.1 Nilai Awal Sub-Populasi untuk Simulasi Numerik Kontrol Optimal

Sub-Populasi	Nilai Awal	Sumber
S_H	750	Abdulfatai dkk (2017)
A_H	250	Abdulfatai dkk (2017)
I_H	10	Abdulfatai dkk (2017)
R_H	20	Abdulfatai dkk (2017)
S_V	10000	Abdulfatai dkk (2017)
I_V	500	Asumsi

Tabel 4.2 Nilai Parameter untuk Simulasi Numerik Kontrol Optimal

Parameter	Nilai Parameter	Sumber
Λ_H	0.000011	Abdulfatai dkk (2017)
ϕ	0.05	Abdulfatai dkk (2017)
τ	0.15	Abdulfatai dkk (2017)
v	0.023	Abdulfatai dkk (2017)
φ_H	0.02	Abdulfatai dkk (2017)
ε	0.5	Abdulfatai dkk (2017)
ρ	0.1	Abdulfatai dkk (2017)
c	0.05	Abdulfatai dkk (2017)

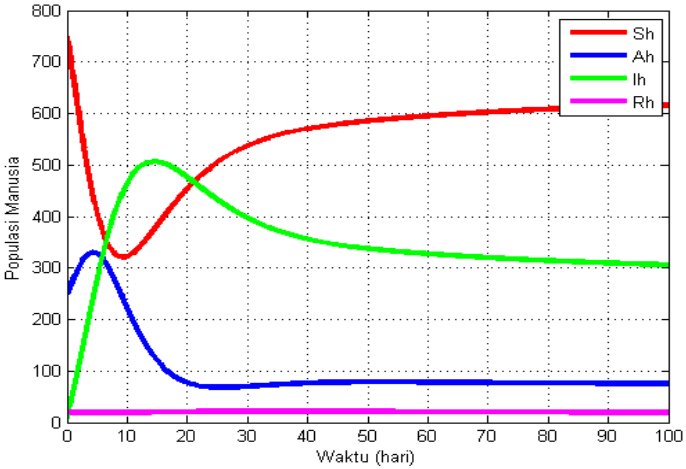
k	0.05	Abdulfatai dkk (2017)
β_1	0.4	Abdulfatai dkk (2017)
β_a	0.6	Abdulfatai dkk (2017)
β_s	0.3	Abdulfatai dkk (2017)
μ_H	0.000046	Abdulfatai dkk (2017)
α_H	0.2	Abdulfatai dkk (2017)
δ_H	0.0003	Abdulfatai dkk (2017)
Λ_V	0.071	Abdulfatai dkk (2017)
β_2	0.5	Abdulfatai dkk (2017)
μ_V	0.071	Abdulfatai dkk (2017)
θ	0.15	Abdulfatai dkk (2017)
C_1	1	Asumsi
C_2	2	Asumsi
C_3	1.5	Asumsi

4.8.1 Simulasi Kestabilan Endemik

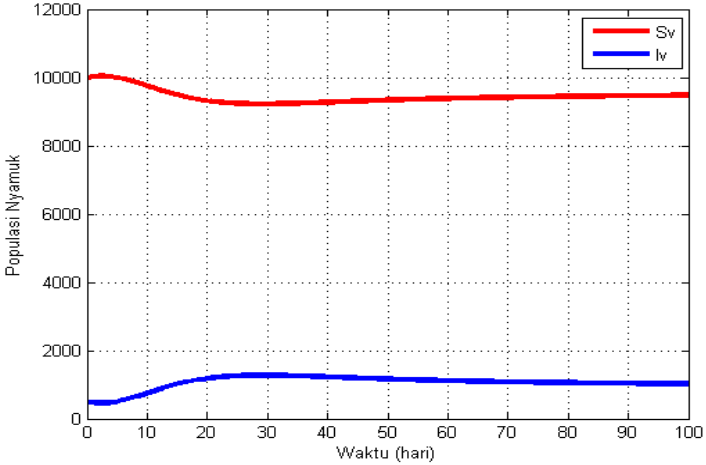
Diasumsikan belum adanya kontrol ketika keadaan populasi tersebut endemik, sehingga untuk simulasi numerik tersebut $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Hasil simulasi ini untuk melihat sifat kestabilan lokal dari titik setimbang endemik penyebaran virus zika sebelum dikontrol dan dihasilkan dinamika populasi manusia dan nyamuk seperti pada **Gambar 4.2** dan **Gambar 4.3.**

Gambar 4.2 dan **Gambar 4.3** merupakan gambar grafik pada ruang dua dimensi yang menunjukan dinamika populasi manusia dan populasi nyamuk selama 100 hari.

Untuk populasi manusia, sub-populasi S_H seiring waktu menurun saat *t* menuju 9 hari lalu meningkat kembali dan stabil ketika jumlah sub-populasi S_H kurang lebih 615 orang setelah 96 hari. Sub-populasi A_H seiring waktu meningkat saat *t* menuju 5 hari lalu menurun dan stabil ketika jumlah sub-populasi A_H kurang lebih 80 orang setelah 45 hari. Sub-populasi I_H seiring waktu meningkat saat *t* menuju ke 15 hari lalu menurun dan stabil ketika jumlah sub-populasi I_H kurang lebih 305 orang setelah 90 hari.



Gambar 4.2 Dinamika Populasi Manusia untuk Kestabilan Endemik



Gambar 4.3 Dinamika Populasi Nyamuk untuk Kestabilan Endemik

Sub-populasi R_H menurun dan stabil ketika jumlah sub-populasi R_H kurang lebih 19 orang setelah 3 hari.

Untuk populasi nyamuk, sub-populasi S_V seiring waktu menurun dan stabil ketika jumlah sub-populasi S_v kurang lebih 9500 nyamuk setelah 80 hari. Sebaliknya, sub-populasi I_V seiring waktu meningkat dan stabil ketika jumlah sub-populasi I_V kurang lebih 1000 nyamuk setelah 80 hari.

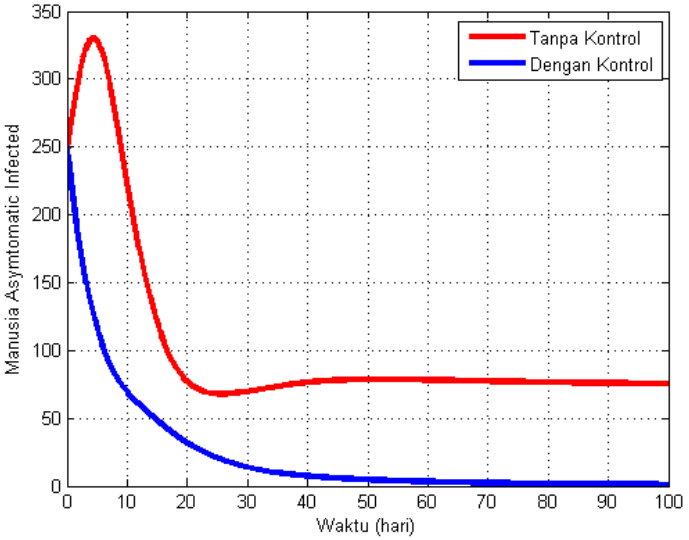
Berdasarkan nilai parameter yang diberikan pada **Tabel 4.2** diperoleh juga bilangan reproduksi

$$R_0 = \frac{\left(\frac{L_1}{K_1} + \frac{\alpha_H L_2}{K_1 K_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{L_1}{K_1} + \frac{\alpha_H L_2}{K_1 K_2}\right)^2 + 4\left(\frac{\alpha_H L_3 L_4}{K_1 K_2 {K_3}^2}\right)}}{2}$$
$$= 1.061.$$

Sehingga dari hasil simulasi diperoleh titik setimbang endemik yang akan cenderung stabil asimtotis lokal jika memenuhi $R_0 > 1$. Hal ini mempresentasikan bahwa jika $R_0 > 1$, maka setiap individu manusia maupun nyamuk yang terinfeksi virus zika dapat menularkan virus rata-rata lebih dari satu individu baru, atau dengan kata lain terjadi penyebaran virus zika pada kedua populasi tersebut.

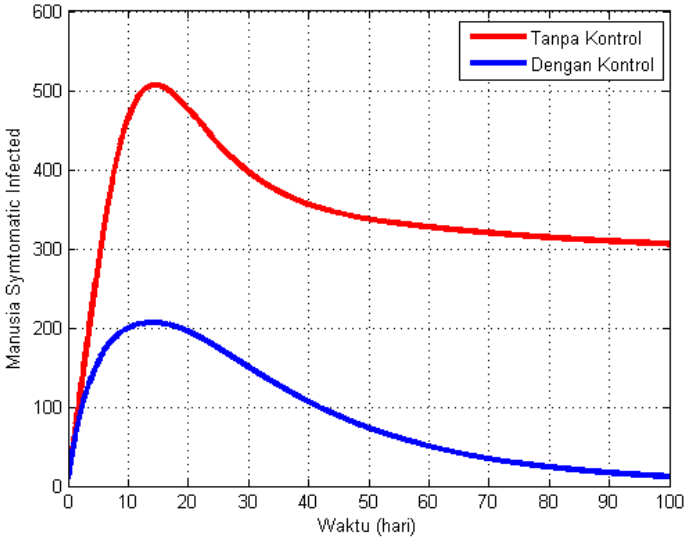
4.8.2 Simulasi Kontrol Optimal

Dari hasil simulasi kestabilan endemik didapatkan $R_0 > 1$ maka dapat dikatakan terjadi penyebaran virus zika pada kedua populasi, sehingga perlu adanya kontrol untuk dapat mengurangi penyebaran virus zika tersebut. Dengan pemberian kontrol $u_1(t)$ yaitu kontrol penggunaan kondom untuk dapat mencegah penularan virus zika antar individu yang terinfeksi, kontrol $u_2(t)$ yaitu kontrol untuk pengobatan individu yang sudah terinfeksi, dan kontrol $u_3(t)$ yaitu kontrol terhadap penyemprotan insektisida untuk dapat meminimumkan jumlah populasi nyamuk, didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:



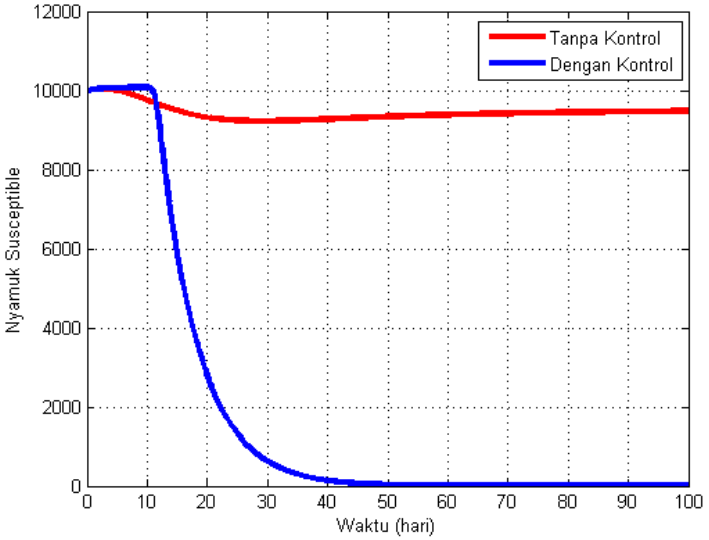
Gambar 4.4 Grafik Sub-populasi Manusia *Asymtomatic Infected* Sebelum dan Sesudah dikontrol

Gambar 4.4 menunjukan perbedaan jumlah sub-populasi manusia *Asymtomatic Infected* sebelum dan sesudah dikontrol. Sub-populasi manusia *Asymtomatic Infected* sebelum di kontrol dengan kondisi awal $A_H(0) = 250$ meningkat akibat terinfeksi virus zika pada saat kurang lebih 5 hari sehingga jumlah manusia *Asymtomatic Infected* menjadi 330 orang, kemudian menurun lalu stabil pada saat kurang lebih hari ke-45 dengan jumlah manusia *Asymtomatic Infected* 80 orang. Sedangkan, ketika sub-populasi manusia *Asymtomatic Infected* tersebut diberikan kontrol $u_1(t), u_2(t)$ dan $u_3(t)$ terjadi penurunan lebih cepat sejak hari pertama hingga pada hari ke-70 jumlah manusia *Asymtomatic Infected* setelah dikontrol mendekati nol. Ini berarti pemberian kontrol $u_1(t), u_2(t)$ dan $u_3(t)$ efektif dalam mengurangi jumlah sub-populasi manusia yang telah terinfeksi virus zika namun gejala yang ditimbulkan belum tampak.



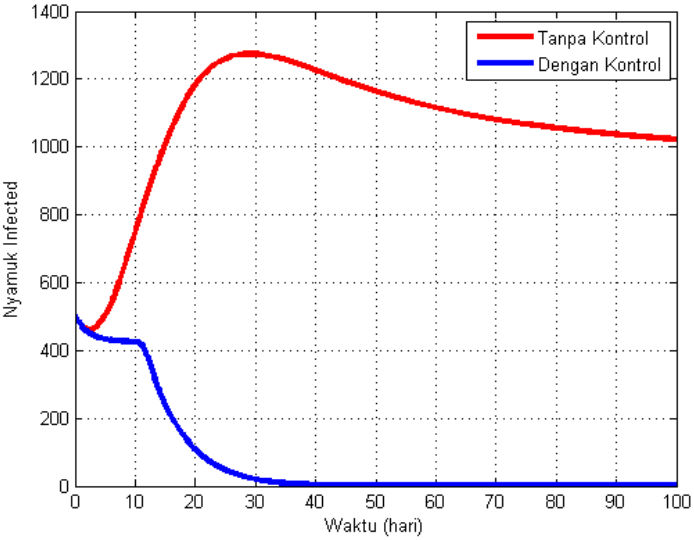
Gambar 4.5 Grafik Sub-populasi Manusia *Symtomatic Infected* Sebelum dan Sesudah dikontrol

Gambar 4.5 menunjukan perbedaan jumlah sub-populasi manusia *Symtomatic Infected* sebelum dan sesudah dikontrol. Sub-populasi manusia *Symtomatic Infected* sebelum di kontrol dengan kondisi awal $I_H(0) = 10$ meningkat pada saat kurang lebih 15 hari akibat terinfeksi virus zika sehingga jumlah manusia *Symtomatic Infected* menjadi 505 orang, kemudian menurun sampai hari ke-100 sehingga jumlah manusia *Symtomatic Infected* tersebut menjadi 305 orang. Sedangkan, ketika sub-populasi manusia *Symtomatic Infected* tersebut diberikan kontrol $u_1(t), u_2(t)$ dan $u_3(t)$ pertumbuhan jumlah sub-populasi tersebut tidak lebih tinggi dari pertumbuhan jumlah sub-populasi sebelum dikontrol. Sampai hari ke-100 jumlah sub-populasi manusia S*ymtomatic Infected* setelah dikontrol menjadi 12 orang. Ini berarti pemberian kontrol $u_1(t), u_2(t)$ dan $u_3(t)$ efektif dalam mengurangi jumlah sub-populasi manusia yang telah terinfeksi virus zika.



Gambar 4.6 Grafik Sub-populasi Nyamuk *Susceptible* Sebelum dan Sesudah dikontrol

Gambar 4.6 menunjukan perbedaan jumlah sub-populasi nyamuk *Susceptible* sebelum dan sesudah dikontrol. Sub-populasi nyamuk *Susceptible* sebelum di kontrol dengan kondisi awal $S_V(0)$ = 10000 menurun pada saat kurang lebih selama 25 hari akibat terinfeksinya virus zika sehingga jumlah nyamuk *Susceptible* menjadi 9200 dan kemudian meningkat sampai hari ke-100 hingga jumlah nyamuk *Susceptible* menjadi 9500. Sedangkan, ketika sub-populasi nyamuk *Susceptible* tersebut diberikan kontrol $u_1(t), u_2(t)$ dan $u_3(t)$ terjadi penurunan lebih cepat dari hari ke-10 sampai hari ke-50 hingga jumlah nyamuk *Susceptible* mendekati nol. Jadi, jumlah sub-populasi nyamuk *Susceptible* tersebut berkurang daripada tanpa adanya pengontrolan. Ini berarti pemberian kontrol $u_1(t), u_2(t)$ dan $u_3(t)$ efektif dalam mengurangi jumlah sub-populasi nyamuk sehat atau rentan dalam penyebaran virus zika.



Gambar 4.7 Grafik Sub-populasi Nyamuk *Infected* Sebelum dan Sesudah dikontrol

Gambar 4.7 menunjukan perbedaan jumlah sub-populasi nyamuk *Infected*. Sub-populasi nyamuk *Infected* sebelum di kontrol dengan kondisi awal $I_V(0) = 500$ meningkat pada saat kurang lebih selama 29 hari akibat terinfeksinya virus zika sehingga jumlah nyamuk *Infected* menjadi 1275 dan kemudian menurun sampai hari ke-100 hingga jumlah nyamuk *Infected* menjadi 1020. Sedangkan, ketika sub-populasi nyamuk *Infected* tersebut diberikan kontrol $u_1(t), u_2(t)$ dan $u_3(t)$ terjadi penurunan lebih cepat dari hari pertama hingga jumlah nyamuk *Infected* mendekati nol pada hari ke-40. Jadi, sub-populasi nyamuk *Infected* tersebut berkurang daripada tanpa adanya pengontrolan. Ini berarti pemberian kontrol $u_1(t), u_2(t)$ dan $u_3(t)$ efektif dalam mengurangi jumlah sub-populasi nyamuk yang terinfeksi dalam penyebaran virus zika.

Dari hasil simulasi, didapatkan nilai fungsi objektif (*J*) dengan dan tanpa kontrol adalah sebagai berikut:

Simulasi	Hasil Fungsi Objektif
Simulasi tanpa kontrol	344.4906
Simulasi dengan kontrol	1.0586

Dari hasil perhitungan fungsi objektif dapat diamati bahwa simulasi dengan kontrol memiliki nilai fungsi objektif yang lebih kecil dibandingkan dengan simulasi tanpa kontrol. Ini berarti pemberian kontrol yang dilakukan dapat meminimumkan fungsi objektif dimana dalam hal ini fungsi objektif yang dimaksudkan adalah biaya yang dikeluarkan. Jika nilai fungsi objektif rendah, maka biaya yang dikeluarkan juga rendah, begitu juga sebaliknya. Jadi, dengan adanya pemberian kontrol, selain dapat meminimumkan penyebaran virus zika, pengeluaran biaya yang dibutuhkan juga dapat diminimumkan.

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dibahas pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Pada kestabilan model dinamik penyebaran virus zika, sistem akan stabil ketika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, dimana kondisi tersebut setiap individu manusia maupun nyamuk yang terinfeksi virus zika dapat menularkan virus rata-rata kurang dari satu individu baru atau dengan kata lain tidak terjadi penyebaran virus. Sebaliknya, jika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu, maka setiap individu manusia maupun nyamuk yang terinfeksi virus zika dapat menularkan virus rata-rata lebih dari satu individu baru atau dengan kata lain terjadi penyebaran virus (endemik).
2. Dengan pemberian kontrol penggunaan kondom, kontrol pengobatan individu terinfeksi, dan kontrol penyemprotan insektisida didapatkan dinamika jumlah sub-populasi manusia yang terinfeksi virus zika dan jumlah populasi nyamuk yang menurun dibandingkan dengan sebelum diberikan kontrol. Selain itu juga, didapatkan nilai fungsi objektif dengan adanya kontrol yang lebih kecil dibandingkan dengan nilai fungsi objektif tanpa adanya kontrol. Ini berarti dengan adanya pemberian kontrol, selain dapat meminimumkan penyebaran virus zika, pengeluaran biaya yang dibutuhkan juga dapat diminimumkan.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini dibahas mengenai analisis kestabilan dan kontrol optimal model penyebaran virus zika menggunakan prinsip Pontryagin. Oleh karena itu, penulis menyarankan untuk

menggunakan metode kontrol optimal yang lain sehingga dapat dibandingkan hasil mana yang lebih baik. Selain itu, dapat dibandingkan pula hasil penyelesaian numerik antara metode Range-Kutta orde 4 dengan metode penyelesaian yang lain dimana metode tersebut memiliki *error* yang lebih kecil daripada metode Range-Kutta orde 4 yang penulis gunakan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Haddow, A.D., dkk. (2012). *Genetic Characterizian Zika Virus Strains: Geographic Expansion of the Asian Lineage*. PloS Negl Trop Dis.

[2] World Health Organization. (2016). *Zika Situation Report Neurological Syndrome and Congential Anomalies.* World Health Organization Repot.

[3] Cdc (2016). *Centre for Disease Control and Prevention Zika Virus*.

[4] Bonyah, E. & Okosun, K.O. (2016). *Mathematical Modeling of Zika Virus.* Asian Pacific Jornal of Tropical Disease.

[5] Gao, D. dkk. (2016). *Prevention and Control of Zika as Mosquito-Borne and Sexually Transmitted Disease : A Mathematical Modeling Analysis*. Nature Search Journal

[6] Kurcharski, A.J., dkk (2016). *"Transmission Dynamics of Zika Virus in Island Population: A Modelling Analysis of the 2013-2014 French Polynesia Outbreak"* PLOS Neglected Tropical Disease Journal

[7] Musso D., dkk (2014). "*Zika Virus Transmission Through Blood Transfusion Demonstrated"* Euro Surveill

[8] Stockholm. (2015). *"Zika Virus Epidemic In Americas : Potential Association With Microcephaly And Guillain-Barre Syndrome"* European Centre for Disease Prevention and Control

[9] Momoh, A.A. & Fugenschuh, A. (2017). *Optimal Control of Intervention Strategies and Cost Effectiveness Analysis for Zika Virus Model*. Operations Research for Health Care Journal.

[10] Perko, Lawrence. (2001). "*Differential Equations and Dynamical Systems*". USA: Department of Mathematics Northern Arizona University.

[11] Driessche, P. (2002). "*Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartemental Models of Disease Transmission".* Mathematical Bioscience 180, pp. 29-48

[12] Tu, PNV. (1994). *Dynamical System: An Introduction with Application.* Second Revised an Enlarged Edition. Heidelberg

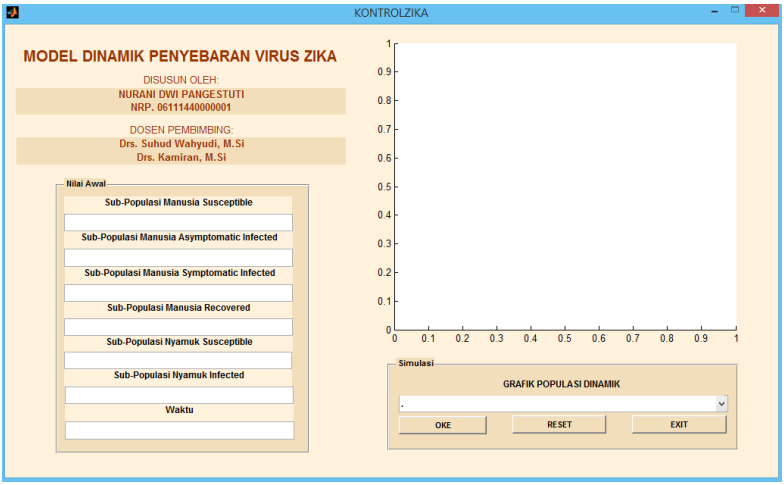
[13] Silviana, Hariyanto, Yunus, M. (2016). *"Stability Analysis on Models of Spreading H1N1 and H5N1 Virus in Two Location"*. International Jornal of Computating Science and Applied Mathematics.

[14] Naidu. D. S. (2002). *"Optimal Control Systems"*. CRC Press. New York.

[15] Mathews.J. H. dan Kurtis. D. F. (1999). *"Numerial Methods Using MATLAB third Edition"* Prentis Hall.

LAMPIRAN

Tampilan GUI



Source Code GUI

```
function varargout = KONTROLZIKA(varargin)
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename,
...
                   'gui_Singleton',
gui_Singleton, ...
                   'gui_OpeningFcn',
@KONTROLZIKA_OpeningFcn, ...
                   'gui_OutputFcn',
@KONTROLZIKA_OutputFcn, ...
                   'gui_LayoutFcn',   [] , ...
                   'gui_Callback',    []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback =
str2func(varargin{1});
```

```
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] =
gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
function KONTROLZIKA_OpeningFcn(hObject,
eventdata, handles, varargin)
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
function varargout =
KONTROLZIKA_OutputFcn(hObject, eventdata,
handles)
varargout{1} = handles.output;
function SH0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
function SH0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function AH0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
function AH0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function IH0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
function IH0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
```

```
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function RH0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
function RH0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function SV0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
function SV0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function IV0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
function IV0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function WAKTU_Callback(hObject, eventdata,
handles)
function WAKTU_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
```

```
end

function OKE_Callback(hObject, eventdata,
handles)

Sh0=str2double(get(handles.SH0,'String'));
Ah0=str2double(get(handles.AH0,'String'));
Ih0=str2double(get(handles.IH0,'String'));
Rh0=str2double(get(handles.RH0,'String'));
Sv0=str2double(get(handles.SV0,'String'));
Iv0=str2double(get(handles.IV0,'String'));
tf=str2double(get(handles.WAKTU,'String'));

t0=0;
n=7500;
t = linspace(0,tf,n+1);
h = tf/n;
h2 = h/2;

test=-1;
delt = 0.001;

Sh=zeros(1,n+1);
Ah=zeros(1,n+1);
Ih=zeros(1,n+1);
Rh=zeros(1,n+1);
Sv=zeros(1,n+1);
Iv=zeros(1,n+1);

Sh(1)=Sh0;
Ah(1)=Ah0;
Ih(1)=Ih0;
Rh(1)=Rh0;
Sv(1)=Sv0;
Iv(1)=Iv0;

Sh1=zeros(1,n+1);
Ah1=zeros(1,n+1);
```

```
Ih1=zeros(1,n+1);
Rh1=zeros(1,n+1);
Sv1=zeros(1,n+1);
Iv1=zeros(1,n+1);

Sh1(1)=Sh0;
Ah1(1)=Ah0;
Ih1(1)=Ih0;
Rh1(1)=Rh0;
Sv1(1)=Sv0;
Iv1(1)=Iv0;

lambda1=zeros(1,n+1);lambda1(n+1)=0;
lambda2=zeros(1,n+1);lambda2(n+1)=0;
lambda3=zeros(1,n+1);lambda3(n+1)=0;
lambda4=zeros(1,n+1);lambda4(n+1)=0;
lambda5=zeros(1,n+1);lambda5(n+1)=0;
lambda6=zeros(1,n+1);lambda6(n+1)=0;

u1=zeros(1,n+1);
u2=zeros(1,n+1);
u3=zeros(1,n+1);

ah=0.000011;
phib=0.05;
tau=0.15;
v=0.023;
phik=0.02;
beta1=0.4;
eps=0.5;
rho=0.1;
betaa=0.6;
c=0.05;
betas=0.3;
k=0.05;
miuh=0.000046;
alfa=0.2;
delta=0.0003;
av=0.071;
```

```
beta2=0.5;
miuv=0.071;
teta=0.15;

u10=0;
u20=0;
u30=0;

C1=1;
C2=2;
C3=1.5;

%sistem awal
for i=1:n

a1=h*(ah*(Sh(i)+Ah(i)+Ih(i)+Rh(i))+(phib+tau*u20
)*(1-v)*Ih(i)+phik*Rh(i)-
beta1*eps*rho*Iv(i)*Sh(i)/(Sh(i)+Ah(i)+Ih(i)+Rh(
i))-betaa*c*(1-
u10)*Ah(i)*Sh(i)/(Sh(i)+Ah(i)+Ih(i)+Rh(i))-
betas*k*(1-
u10)*Ih(i)*Sh(i)/(Sh(i)+Ah(i)+Ih(i)+Rh(i))-
miuh*Sh(i));
b1=h*(beta1*eps*rho*Iv(i)*Sh(i)/(Sh(i)+Ah(i)+Ih(
i)+Rh(i))+betaa*c*(1-
u10)*Ah(i)*Sh(i)/(Sh(i)+Ah(i)+Ih(i)+Rh(i))+betas
*k*(1-
u10)*Ih(i)*Sh(i)/(Sh(i)+Ah(i)+Ih(i)+Rh(i))-
(alfa+miuh)*Ah(i));
c1=h*(alfa*Ah(i)-(phib+tau*u20)*Ih(i)-
(miuh+delta)*Ih(i));
d1=h*((phib+tau*u20)*v*Ih(i)-(phik+miuh)*Rh(i));
e1=h*(av*(Sv(i)+Iv(i))-
beta2*eps*rho*Ih(i)*Sv(i)/(Sh(i)+Ah(i)+Ih(i)+Rh(
i))-(miuv+teta*u30)*Sv(i));
f1=h*(beta2*eps*rho*Ih(i)*Sv(i)/(Sh(i)+Ah(i)+Ih(
i)+Rh(i))-(miuv+teta*u30)*Iv(i));
```

```
a2=h*(ah*((Sh(i)+a1*0.5)+(Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(
Rh(i)+h2))+(phib+tau*u20)*(1-
v)*(Ih(i)+h2)+phik*(Rh(i)+h2)-
(beta1*eps*rho*(Iv(i)+h2)*(Sh(i)+a1*0.5)/((Sh(i)
+a1*0.5)+(Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-
(betaa*c*(1-
u10)*(Ah(i)+h2)*(Sh(i)+a1*0.5)/((Sh(i)+a1*0.5)+(
Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-(betas*k*(1-
u10)*(Ih(i)+h2)*(Sh(i)+a1*0.5)/((Sh(i)+a1*0.5)+(
Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-
miuh*(Sh(i)+a1*0.5));
b2=h*((beta1*eps*rho*(Iv(i)+h2)*(Sh(i)+h2)/((Sh(
i)+h2)+(Ah(i)+b1*0.5)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))+(b
etaa*c*(1-
u10)*(Ah(i)+b1*0.5)*(Sh(i)+h2)/((Sh(i)+h2)+(Ah(i
)+b1*0.5)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))+(betas*k*(1-
u10)*(Ih(i)+h2)*(Sh(i)+h2)/((Sh(i)+h2)+(Ah(i)+b1
*0.5)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-
(alfa+miuh)*(Ah(i)+b1*0.5));
c2=h*(alfa*(Ah(i)+h2)-
(phib+tau*u20)*(Ih(i)+c1*0.5)-
(miuh+delta)*(Ih(i)+c1*0.5));
d2=h*((phib+tau*u20)*v*(Ih(i)+h2)-
(phik+miuh)*(Rh(i)+d1*0.5));
e2=h*(av*((Sv(i)+e1*0.5)+(Iv(i)+h2))-
(beta2*eps*rho*(Ih(i)+h2)*(Sv(i)+e1*0.5)/((Sh(i)
+h2)+(Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-
(miuv+teta*u30)*(Sv(i)+e1*0.5));
f2=h*((beta2*eps*rho*(Ih(i)+h2)*(Sv(i)+h2)/((Sh(
i)+h2)+(Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-
(miuv+teta*u30)*(Iv(i)+f1*0.5));

a3=h*(ah*((Sh(i)+a2*0.5)+(Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(
Rh(i)+h2))+(phib+tau*u20)*(1-
v)*(Ih(i)+h2)+phik*(Rh(i)+h2)-
(beta1*eps*rho*(Iv(i)+h2)*(Sh(i)+a2*0.5)/((Sh(i)
+a2*0.5)+(Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-
(betaa*c*(1-
u10)*(Ah(i)+h2)*(Sh(i)+a2*0.5)/((Sh(i)+a2*0.5)+(
```

```
Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-(betas*k*(1-
u10)*(Ih(i)+h2)*(Sh(i)+a2*0.5)/((Sh(i)+a2*0.5)+(
Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-
miuh*(Sh(i)+a2*0.5));
b3=h*((beta1*eps*rho*(Iv(i)+h2)*(Sh(i)+h2)/((Sh(
i)+h2)+(Ah(i)+b2*0.5)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))+(b
etaa*c*(1-
u10)*(Ah(i)+b2*0.5)*(Sh(i)+h2)/((Sh(i)+h2)+(Ah(i
)+b2*0.5)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))+(betas*k*(1-
u10)*(Ih(i)+h2)*(Sh(i)+h2)/((Sh(i)+h2)+(Ah(i)+b2
*0.5)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-
(alfa+miuh)*(Ah(i)+b2*0.5));
c3=h*(alfa*(Ah(i)+h2)-
(phib+tau*u20)*(Ih(i)+c2*0.5)-
(miuh+delta)*(Ih(i)+c2*0.5));
d3=h*((phib+tau*u20)*v*(Ih(i)+h2)-
(phik+miuh)*(Rh(i)+d2*0.5));
e3=h*(av*((Sv(i)+e2*0.5)+(Iv(i)+h2))-
(beta2*eps*rho*(Ih(i)+h2)*(Sv(i)+e2*0.5)/((Sh(i)
+h2)+(Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-
(miuv+teta*u30)*(Sv(i)+e2*0.5));
f3=h*((beta2*eps*rho*(Ih(i)+h2)*(Sv(i)+h2)/((Sh(
i)+h2)+(Ah(i)+h2)+(Ih(i)+h2)+(Rh(i)+h2)))-
(miuv+teta*u30)*(Iv(i)+f2*0.5));

a4=h*(ah*((Sh(i)+a3)+(Ah(i)+h)+(Ih(i)+h)+(Rh(i)+
h))+(phib+tau*u20)*(1-
v)*(Ih(i)+h)+phik*(Rh(i)+h)-
(beta1*eps*rho*(Iv(i)+h)*(Sh(i)+a3)/((Sh(i)+a3)+
(Ah(i)+h)+(Ih(i)+h)+(Rh(i)+h)))-(betaa*c*(1-
u10)*(Ah(i)+h)*(Sh(i)+a3)/((Sh(i)+a3)+(Ah(i)+h)+
(Ih(i)+h)+(Rh(i)+h)))-(betas*k*(1-
u10)*(Ih(i)+h)*(Sh(i)+a3)/((Sh(i)+a3)+(Ah(i)+h)+
(Ih(i)+h)+(Rh(i)+h)))-miuh*(Sh(i)+a3));
b4=h*((beta1*eps*rho*(Iv(i)+h)*(Sh(i)+h)/((Sh(i)
+h)+(Ah(i)+b3)+(Ih(i)+h)+(Rh(i)+h)))+(betaa*c*(1
-
u10)*(Ah(i)+b3)*(Sh(i)+h)/((Sh(i)+h)+(Ah(i)+b3)+
(Ih(i)+h)+(Rh(i)+h)))+(betas*k*(1-
```

```
u10)*(Ih(i)+h)*(Sh(i)+h)/((Sh(i)+h)+(Ah(i)+b3)+(
Ih(i)+h)+(Rh(i)+h)))-(alfa+miuh)*(Ah(i)+b3));
c4=h*(alfa*(Ah(i)+h)-(phib+tau*u20)*(Ih(i)+c3)-
(miuh+delta)*(Ih(i)+c3));
d4=h*((phib+tau*u20)*v*(Ih(i)+h)-
(phik+miuh)*(Rh(i)+d3));
e4=h*(av*((Sv(i)+e3)+(Iv(i)+h))-
(beta2*eps*rho*(Ih(i)+h)*(Sv(i)+e3)/((Sh(i)+h)+(
Ah(i)+h)+(Ih(i)+h)+(Rh(i)+h)))-
(miuv+teta*u30)*(Sv(i)+e3));
f4=h*((beta2*eps*rho*(Ih(i)+h)*(Sv(i)+h)/((Sh(i)
+h)+(Ah(i)+h)+(Ih(i)+h)+(Rh(i)+h)))-
(miuv+teta*u30)*(Iv(i)+f3));

a=(a1+2*a2+2*a3+a4)/6;
b=(b1+2*b2+2*b3+b4)/6;
c=(c1+2*c2+2*c3+c4)/6;
d=(d1+2*d2+2*d3+d4)/6;
e=(e1+2*e2+2*e3+e4)/6;
f=(f1+2*f2+2*f3+f4)/6;

Sh(i+1)=Sh(i)+a;
Ah(i+1)=Ah(i)+b;
Ih(i+1)=Ih(i)+c;
Rh(i+1)=Rh(i)+d;
Sv(i+1)=Sv(i)+e;
Iv(i+1)=Iv(i)+f;

end

while(test < 0)

    oldu1=u1;
    oldu2=u2;
    oldu3=u3;

%persamaan state
for i=1:n
```

```
aa1=h*(ah*(Sh1(i)+Ah1(i)+Ih1(i)+Rh1(i))+(phib+ta
u*u2(i))*(1-v)*Ih1(i)+phik*Rh1(i)-
(beta1*eps*rho*Iv1(i)*Sh1(i)/(Sh1(i)+Ah1(i)+Ih1(
i)+Rh1(i)))-(betaa*c*(1-
u1(i))*Ah1(i)*Sh1(i)/(Sh1(i)+Ah1(i)+Ih1(i)+Rh1(i
)))-(betas*k*(1-
u1(i))*Ih1(i)*Sh1(i)/(Sh1(i)+Ah1(i)+Ih1(i)+Rh1(i
)))-miuh*Sh1(i));
bb1=h*((beta1*eps*rho*Iv1(i)*Sh1(i)/(Sh1(i)+Ah1(
i)+Ih1(i)+Rh1(i)))+(betaa*c*(1-
u1(i))*Ah1(i)*Sh1(i)/(Sh1(i)+Ah1(i)+Ih1(i)+Rh1(i
)))+(betas*k*(1-
u1(i))*Ih1(i)*Sh1(i)/(Sh1(i)+Ah1(i)+Ih1(i)+Rh1(i
)))-(alfa+miuh)*Ah1(i));
cc1=h*(alfa*Ah1(i)-(phib+tau*u2(i))*Ih1(i)-
(miuh+delta)*Ih1(i));
dd1=h*((phib+tau*u2(i))*v*Ih1(i)-
(phik+miuh)*Rh1(i));
ee1=h*(av*(Sv1(i)+Iv1(i))-
(beta2*eps*rho*Ih1(i)*Sv1(i)/(Sh1(i)+Ah1(i)+Ih1(
i)+Rh1(i)))-(miuv+teta*u3(i))*Sv1(i));
ff1=h*((beta2*eps*rho*Ih1(i)*Sv1(i)/(Sh1(i)+Ah1(
i)+Ih1(i)+Rh1(i)))-(miuv+teta*u3(i))*Iv1(i));

aa2=h*(ah*((Sh1(i)+aa1*0.5)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+
h2)+(Rh1(i)+h2))+(phib+tau*(0.5*(u2(i)+u2(i+1)))
)*(1-v)*(Ih1(i)+h2)+phik*(Rh1(i)+h2)-
(beta1*eps*rho*(Iv1(i)+h2)*(Sh1(i)+aa1*0.5)/((Sh
1(i)+aa1*0.5)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+h2)+(Rh1(i)+h2
)))-(betaa*c*(1-
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ah1(i)+h2)*(Sh1(i)+aa1*0
.5)/((Sh1(i)+aa1*0.5)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+h2)+(R
h1(i)+h2)))-(betas*k*(1-
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ih1(i)+h2)*(Sh1(i)+aa1*0
.5)/((Sh1(i)+aa1*0.5)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+h2)+(R
h1(i)+h2)))-miuh*(Sh1(i)+aa1*0.5));
bb2=h*((beta1*eps*rho*(Iv1(i)+h2)*(Sh1(i)+h2)/((
Sh1(i)+h2)+(Ah1(i)+bb1*0.5)+(Ih1(i)+h2)+(Rh1(i)+
```

```
h2)))+(betaa*c*(1-
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ah1(i)+bb1*0.5)*(Sh1(i)+
h2)/((Sh1(i)+h2)+(Ah1(i)+bb1*0.5)+(Ih1(i)+h2)+(R
h1(i)+h2)))+(betas*k*(1-
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ih1(i)+h2)*(Sh1(i)+h2)/(
(Sh1(i)+h2)+(Ah1(i)+bb1*0.5)+(Ih1(i)+h2)+(Rh1(i)
+h2)))-(alfa+miuh)*(Ah1(i)+bb1*0.5));
cc2=h*(alfa*(Ah1(i)+h2)-
(phib+tau*(0.5*(u2(i)+u2(i+1))))*(Ih1(i)+cc1*0.5
)-(miuh+delta)*(Ih1(i)+cc1*0.5));
dd2=h*((phib+tau*(0.5*(u2(i)+u2(i+1))))*v*(Ih1(i
)+h2)-(phik+miuh)*(Rh1(i)+dd1*0.5));
ee2=h*(av*((Sv1(i)+ee1*0.5)+(Iv1(i)+h2))-
(beta2*eps*rho*(Ih1(i)+h2)*(Sv1(i)+ee1*0.5)/((Sh
1(i)+h2)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+h2)+(Rh1(i)+h2)))-
(miuv+teta*(0.5*(u3(i)+u3(i+1))))*(Sv1(i)+ee1*0.
5));
ff2=h*((beta2*eps*rho*(Ih1(i)+h2)*(Sv1(i)+h2)/((
Sh1(i)+h2)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+h2)+(Rh1(i)+h2)))
-
(miuv+teta*(0.5*(u3(i)+u3(i+1))))*(Iv1(i)+ff1*0.
5));

aa3=h*(ah*((Sh1(i)+aa2*0.5)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+
h2)+(Rh1(i)+h2))+(phib+tau*(0.5*(u2(i)+u2(i+1)))
)*(1-v)*(Ih1(i)+h2)+phik*(Rh1(i)+h2)-
(beta1*eps*rho*(Iv1(i)+h2)*(Sh1(i)+aa2*0.5)/((Sh
1(i)+aa2*0.5)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+h2)+(Rh1(i)+h2
)))-(betaa*c*(1-
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ah1(i)+h2)*(Sh1(i)+aa2*0
.5/((Sh1(i)+aa2*0.5)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+h2)+(Rh
1(i)+h2))))-(betas*k*(1-
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ih1(i)+h2)*(Sh1(i)+aa2*0
.5)/((Sh1(i)+aa2*0.5)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+h2)+(R
h1(i)+h2)))-miuh*(Sh1(i)+aa2*0.5));
bb3=h*((beta1*eps*rho*(Iv1(i)+h2)*(Sh1(i)+h2)/((
Sh1(i)+h2)+(Ah1(i)+bb2*0.5)+(Ih1(i)+h2)+(Rh1(i)+
h2)))+(betaa*c*(1-
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ah1(i)+bb2*0.5)*(Sh1(i)+
```

```
h2)/((Sh1(i)+h2)+(Ah1(i)+bb2*0.5)+(Ih1(i)+h2)+(R
h1(i)+h2)))+(betas*k*(1-
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ih1(i)+h2)*(Sh1(i)+h2)/(
(Sh1(i)+h2)+(Ah1(i)+bb2*0.5)+(Ih1(i)+h2)+(Rh1(i)
+h2)))-(alfa+miuh)*(Ah1(i)+bb2*0.5));
cc3=h*(alfa*(Ah1(i)+h2)-
(phib+tau*(0.5*(u2(i)+u2(i+1))))*(Ih1(i)+cc2*0.5
)-(miuh+delta)*(Ih1(i)+cc2*0.5));
dd3=h*((phib+tau*(0.5*(u2(i)+u2(i+1))))*v*(Ih1(i
)+h2)-(phik+miuh)*(Rh1(i)+dd2*0.5));
ee3=h*(av*((Sv1(i)+ee2*0.5)+(Iv1(i)+h2))-
(beta2*eps*rho*(Ih1(i)+h2)*(Sv1(i)+ee2*0.5)/((Sh
1(i)+h2)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+h2)+(Rh1(i)+h2)))-
(miuv+teta*(0.5*(u3(i)+u3(i+1))))*(Sv1(i)+ee2*0.
5));
ff3=h*((beta2*eps*rho*(Ih1(i)+h2)*(Sv1(i)+h2)/((
Sh1(i)+h2)+(Ah1(i)+h2)+(Ih1(i)+h2)+(Rh1(i)+h2)))
-
(miuv+teta*(0.5*(u3(i)+u3(i+1))))*(Iv1(i)+ff2*0.
5));

aa4=h*(ah*((Sh1(i)+aa3)+(Ah1(i)+h)+(Ih1(i)+h)+(R
h1(i)+h))+(phib+tau*(0.5*(u2(i)+u2(i+1))))*(1-
v)*(Ih1(i)+h)+phik*(Rh1(i)+h)-
(beta1*eps*rho*(Iv1(i)+h)*(Sh1(i)+aa3)/((Sh1(i)+
aa3)+(Ah1(i)+h)+(Ih1(i)+h)+(Rh1(i)+h)))-
(betaa*c*(1-
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ah1(i)+h)*(Sh1(i)+aa3)/(
(Sh1(i)+aa3)+(Ah1(i)+h)+(Ih1(i)+h)+(Rh1(i)+h)))-
(betas*k*(1-
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ih1(i)+h)*(Sh1(i)+aa3)/(
(Sh1(i)+aa3)+(Ah1(i)+h)+(Ih1(i)+h)+(Rh1(i)+h)))-
miuh*(Sh1(i)+aa3));
bb4=h*((beta1*eps*rho*(Iv1(i)+h)*(Sh1(i)+h)/((Sh
1(i)+h)+(Ah1(i)+bb3)+(Ih1(i)+h)+(Rh1(i)+h)))+(be
taa*c*(1-
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ah1(i)+bb3)*(Sh1(i)+h)/(
(Sh1(i)+h)+(Ah1(i)+bb3)+(Ih1(i)+h)+(Rh1(i)+h)))+
(betas*k*(1-
```

```
(0.5*(u1(i)+u1(i+1))))*(Ih1(i)+h)*(Sh1(i)+h)/((S
h1(i)+h)+(Ah1(i)+bb3)+(Ih1(i)+h)+(Rh1(i)+h)))-
(alfa+miuh)*(Ah1(i)+bb3));
cc4=h*(alfa*(Ah1(i)+h)-
(phib+tau*(0.5*(u2(i)+u2(i+1))))*(Ih1(i)+cc3)-
(miuh+delta)*(Ih1(i)+cc3));
dd4=h*((phib+tau*(0.5*(u2(i)+u2(i+1))))*v*(Ih1(i
)+h)-(phik+miuh)*(Rh1(i)+dd3));
ee4=h*(av*((Sv1(i)+ee3)+(Iv1(i)+h))-
(beta2*eps*rho*(Ih1(i)+h)*(Sv1(i)+ee3)/((Sh1(i)+
h)+(Ah1(i)+h)+(Ih1(i)+h)+(Rh1(i)+h)))-
(miuv+teta*(0.5*(u3(i)+u3(i+1))))*(Sv1(i)+ee3));
ff4=h*((beta2*eps*rho*(Ih1(i)+h)*(Sv1(i)+h)/((Sh
1(i)+h)+(Ah1(i)+h)+(Ih1(i)+h)+(Rh1(i)+h)))-
(miuv+teta*(0.5*(u3(i)+u3(i+1))))*(Iv1(i)+ff3));

aa=(aa1+2*aa2+2*aa3+aa4)/6;
bb=(bb1+2*bb2+2*bb3+bb4)/6;
cc=(cc1+2*cc2+2*cc3+cc4)/6;
dd=(dd1+2*dd2+2*dd3+dd4)/6;
ee=(ee1+2*ee2+2*ee3+ee4)/6;
ff=(ff1+2*ff2+2*ff3+ff4)/6;

Sh1(i+1)=Sh1(i)+aa;
Ah1(i+1)=Ah1(i)+bb;
Ih1(i+1)=Ih1(i)+cc;
Rh1(i+1)=Rh1(i)+dd;
Sv1(i+1)=Sv1(i)+ee;
Iv1(i+1)=Iv1(i)+ff;

end

%persamaan costate
for i=1:n
j=(n+2)-i;

n11=h*((lambda1(j)-
lambda2(j))*(beta1*eps*rho*Iv1(j)/(Sh1(j)+Ah1(j)
+Ih1(j)+Rh1(j))+betaa*c*(1-
```

```
u1(j))*Ah1(j)/(Sh1(j)+Ah1(j)+Ih1(j)+Rh1(j))+beta
s*k*(1-
u1(j))*Ih1(j)/(Sh1(j)+Ah1(j)+Ih1(j)+Rh1(j)))+lam
bda1(j)*miuh);
n21=h*((lambda1(j)-lambda2(j))*(betaa*c*(1-
u1(j))*Sh1(j)/(Sh1(j)+Ah1(j)+Ih1(j)+Rh1(j)))+alf
a*(lambda2(j)-lambda3(j))+lambda2(j)*miuh);
n31=h*((lambda1(j)-lambda2(j))*(betas*k*(1-
u1(j))*Sh1(j)/(Sh1(j)+Ah1(j)+Ih1(j)+Rh1(j)))+(la
mbda5(j)-
lambda6(j))*(beta2*eps*rho*Sv1(j)/(Sh1(j)+Ah1(j)
+Ih1(j)+Rh1(j)))-lambda1(j)*(phib+tau*u2(j))*(1-
v)+lambda3(j)*(phib+tau*u2(j)+miuh+delta)-
lambda4(j)*(phib+tau*u2(j)));
n41=h*((lambda4(j)-
lambda1(j))*phik+lambda4(j)*miuh);
n51=h*((lambda5(j)-
lambda6(j))*(beta2*eps*rho*Ih1(j)/(Sh1(j)+Ah1(j)
+Ih1(j)+Rh1(j)))+lambda5(j)*(miuv+phib*u3(j)));
n61=h*((lambda1(j)-
lambda2(j))*(beta1*eps*rho*Sh1(j)/(Sh1(j)+Ah1(j)
+Ih1(j)+Rh1(j)))+lambda6(j)*(miuv+phib*u3(j)));

n12=h*(((lambda1(j)-n11*0.5)-(lambda2(j)-
h2))*(beta1*eps*rho*0.5*(Iv1(j)+Iv1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-1)))+betaa*c*(1-
0.5*(u1(j)+u1(j-1)))*0.5*(Ah1(j)+Ah1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-1)))+betas*k*(1-
0.5*(u1(j)+u1(j-1)))*0.5*(Ih1(j)+Ih1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-
1))))+(lambda1(j)-n11*0.5)*miuh);
n22=h*(((lambda1(j)-h2)-(lambda2(j)-
n21*0.5))*(betaa*c*(1-0.5*(u1(j)+u1(j-
1)))*0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-
1)+Ah1(j)+Ah1(j-1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-
```

```
1))))+alfa*((lambda2(j)-n21*0.5)-(lambda3(j)-
h2))+(lambda2(j)-n21*0.5)*miuh);
n32=h*(((lambda1(j)-h2)-(lambda2(j)-
h2))*(betas*k*(1-0.5*(u1(j)+u1(j-
1)))*0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-
1)+Ah1(j)+Ah1(j-1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-
1))))+((lambda5(j)-h2)-(lambda6(j)-
h2))*(beta2*eps*rho*0.5*(Sv1(j)+Sv1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-1))))-
(lambda1(j)-h2)*(phib+tau*0.5*(u2(j)+u2(j-
1)))*(1-v)+(lambda3(j)-
n31*0.5)*(phib+tau*0.5*(u2(j)+u2(j-
1))+miuh+delta)-(lambda4(j)-
h2)*(phib+tau*0.5*(u2(j)+u2(j-1))));
n42=h*(((lambda4(j)-n41*0.5)-(lambda1(j)-
h2))*phik+(lambda4(j)-n41*0.5)*miuh);
n52=h*(((lambda5(j)-n51*0.5)-(lambda6(j)-
h2))*(beta2*eps*rho*0.5*(Ih1(j)+Ih1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-
1))))+(lambda5(j)-
n51*0.5)*(miuv+phib*0.5*(u3(j)+u3(j-1))));
n62=h*(((lambda1(j)-h2)-(lambda2(j)-
h2))*(beta1*eps*rho*0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-
1))))+(lambda6(j)-
n61*0.5)*(miuv+phib*0.5*(u3(j)+u3(j-1))));

n13=h*(((lambda1(j)-n12*0.5)-(lambda2(j)-
h2))*(beta1*eps*rho*0.5*(Iv1(j)+Iv1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-1)))+betaa*c*(1-
0.5*(u1(j)+u1(j-1)))*0.5*(Ah1(j)+Ah1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-1)))+betas*k*(1-
0.5*(u1(j)+u1(j-1)))*(Ih1(j)+Ih1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
```

```
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-
1))))+(lambda1(j)-n12*0.5)*miuh);
n23=h*(((lambda1(j)-h2)-(lambda2(j)-
n22*0.5))*(betaa*c*(1-0.5*(u1(j)+u1(j-
1))*0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-
1)+Ah1(j)+Ah1(j-1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-
1))))+alfa*((lambda2(j)-n22*0.5)-(lambda3(j)-
h2))+(lambda2(j)-n22*0.5)*miuh);
n33=h*(((lambda1(j)-h2)-(lambda2(j)-
h2))*(betas*k*(1-0.5*(u1(j)+u1(j-
1)))*0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-
1)+Ah1(j)+Ah1(j-1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-
1))))+((lambda5(j)-h2)-(lambda6(j)-
h2))*(beta2*eps*rho*0.5*(Sv1(j)+Sv1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-1))))-
(lambda1(j)-h2)*(phib+tau*0.5*(u2(j)+u2(j-
1)))*(1-v)+(lambda3(j)-
n32*0.5)*(phib+tau*0.5*(u2(j)+u2(j-
1))+miuh+delta)-(lambda4(j)-
h2)*(phib+tau*0.5*(u2(j)+u2(j-1))));
n43=h*(((lambda4(j)-n42*0.5)-(lambda1(j)-
h2))*phik+(lambda4(j)-n42*0.5)*miuh);
n53=h*(((lambda5(j)-n52*0.5)-(lambda6(j)-
h2))*(beta2*eps*rho*0.5*(Ih1(j)+Ih1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-
1))))+(lambda5(j)-
n52*0.5)*(miuv+phib*0.5*(u3(j)+u3(j-1))));
n63=h*(((lambda1(j)-h2)-(lambda2(j)-
h2))*(beta1*eps*rho*0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-
1))/(0.5*(Sh1(j)+Sh1(j-1)+Ah1(j)+Ah1(j-
1)+Ih1(j)+Ih1(j-1)+Rh1(j)+Rh1(j-
1))))+(lambda6(j)-
n62*0.5)*(miuv+phib*0.5*(u3(j)+u3(j-1))));

n14=h*(((lambda1(j)-n13)-(lambda2(j)-
h))*(beta1*eps*rho*(Iv1(j-1))/(Sh1(j-1)+Ah1(j-
1)+Ih1(j-1)+Rh1(j-1))+betaa*c*(1-(u1(j-
```

```
1)))*(Ah1(j-1))/(Sh1(j-1)+Ah1(j-1)+Ih1(j-
1)+Rh1(j-1))+betas*k*(1-(u1(j-1)))*(Ih1(j-
1))/(Sh1(j-1)+Ah1(j-1)+Ih1(j-1)+Rh1(j-
1)))+(lambda1(j)-n13)*miuh);
n24=h*(((lambda1(j)-h)-(lambda2(j)-
n23))*(betaa*c*(1-u1(j-1))*(Sh1(j-1))/(Sh1(j-
1)+Ah1(j-1)+Ih1(j-1)+Rh1(j-
1)))+alfa*((lambda2(j)-n23)-(lambda3(j)-
h))+(lambda2(j)-n23)*miuh);
n34=h*(((lambda1(j)-h)-(lambda2(j)-
h))*(betas*k*(1-(u1(j-1)))*(Sh1(j-1))/(Sh1(j-
1)+Ah1(j-1)+Ih1(j-1)+Rh1(j-1)))+((lambda5(j)-h)-
(lambda6(j)-h))*(beta2*eps*rho*(Sv1(j-
1))/(Sh1(j-1)+Ah1(j-1)+Ih1(j-1)+Rh1(j-1)))-
(lambda1(j)-h)*(phib+tau*(u2(j-1)))*(1-
v)+(lambda3(j)-n33)*(phib+tau*(u2(j-
1))+miuh+delta)-(lambda4(j)-h)*(phib+tau*(u2(j-
1))));
n44=h*(((lambda4(j)-n43)-(lambda1(j)-
h))*phik+(lambda4(j)-n43)*miuh);
n54=h*(((lambda5(j)-n53)-(lambda6(j)-
h))*(beta2*eps*rho*(Ih1(j-1))/(Sh1(j-1)+Ah1(j-
1)+Ih1(j-1)+Rh1(j-1)))+(lambda5(j)-
n53)*(miuv+phib*(u3(j-1))));
n64=h*(((lambda1(j)-h)-(lambda2(j)-
h))*(beta1*eps*rho*(Sh1(j-1))/(Sh1(j-1)+Ah1(j-
1)+Ih1(j-1)+Rh1(j-1)))+(lambda6(j)-
n63)*(miuv+phib*(u3(j-1))));

n1=(n11+2*n12+2*n13+n14)/6;
n2=(n21+2*n22+2*n23+n24)/6;
n3=(n31+2*n32+2*n33+n34)/6;
n4=(n41+2*n42+2*n43+n44)/6;
n5=(n51+2*n52+2*n53+n54)/6;
n6=(n61+2*n62+2*n63+n64)/6;

lambda1(j-1)=lambda1(j)-n1;
lambda2(j-1)=lambda2(j)-n2;
lambda3(j-1)=lambda3(j)-n3;
```

```
lambda4(j-1)=lambda4(j)-n4;
lambda5(j-1)=lambda5(j)-n5;
lambda6(j-1)=lambda6(j)-n6;

end

temp_1=((lambda2-
lambda1)*((betaa*c*Ah1(j)*Sh1(j)+betas*k*Ih1(j)*
Sh1(j))/(Sh1(i)+Ah1(i)+Ih1(i)+Rh1(i))))/(0.01*C1
);
temp_2=(Ih1(j)*tau*(lambda3-lambda1+(lambda1-
lambda4)*v))/(0.01*C2);
temp_3=(teta*(lambda5*Sv1(j)-
lambda6*Iv1(j)))/(0.01*C3);

    u11 = max(0, min(1, temp_1));
    u21 = max(0, min(1, temp_2));
    u31 = max(0, min(1, temp_3));

    u1 =  0.5*(u11 + oldu1);
    u2 =  0.5*(u21 + oldu2);
    u3 =  0.5*(u31 + oldu3);

    temp1 = delt*sum(abs(u1)) - sum(abs(oldu1 -
u1));
    temp2 = delt*sum(abs(u2)) - sum(abs(oldu2 -
u2));
    temp3 = delt*sum(abs(u3)) - sum(abs(oldu3 -
u3));

        test = max(temp1, min(temp2, temp3));

end

if (get(handles.popupmenu1,'Value')==2)
    cla(handles.axes1,'reset');
    axes(handles.axes1);
    plot(t,Sh,'r',t,Sh1,'b','lineWidth',3);
```

```
    hold on
    xlabel('Waktu');
    ylabel('Manusia Susceptible');
    legend('Tanpa Kontrol','Dengan Kontrol');
    grid on

else if ((get(handles.popupmenu1,'Value')==3))
        cla(handles.axes1,'reset');
        axes(handles.axes1);
        plot(t,Ah,'r',t,Ah1,'b','lineWidth',3);
        hold on
        xlabel('Waktu');
        ylabel('Manusia Asymtomatic Infected');
        legend('Tanpa Kontrol','Dengan
Kontrol');
        grid on

        else if
((get(handles.popupmenu1,'Value')==4))
        cla(handles.axes1,'reset');
        axes(handles.axes1);
        plot(t,Ih,'r',t,Ih1,'b','lineWidth',3);
        hold on
        xlabel('Waktu');
        ylabel('Manusia Symtomatic Infected');
        legend('Tanpa Kontrol','Dengan
Kontrol');
        grid on

        else if
((get(handles.popupmenu1,'Value')==5))
        cla(handles.axes1,'reset');
        axes(handles.axes1);
        plot(t,Rh,'r',t,Rh1,'b','lineWidth',3);
        hold on
        xlabel('Waktu');
        ylabel('Manusia Recovered');
        legend('Tanpa Kontrol','Dengan
Kontrol');
```

```
        grid on

        else if
((get(handles.popupmenu1,'Value')==6))
        cla(handles.axes1,'reset');
        axes(handles.axes1);
        plot(t,Sv,'r',t,Sv1,'b','lineWidth',3);
        hold on
        xlabel('Waktu');
        ylabel('Nyamuk Susceptible');
        legend('Tanpa Kontrol','Dengan
Kontrol');
        grid on

        else if
((get(handles.popupmenu1,'Value')==7))
        cla(handles.axes1,'reset');
        axes(handles.axes1);
        plot(t,Iv,'r',t,Iv1,'b','lineWidth',3);
        hold on
        xlabel('Waktu');
        ylabel('Nyamuk Infected');
        legend('Tanpa Kontrol','Dengan
Kontrol');
        grid on

        else if
((get(handles.popupmenu1,'Value')==8))
        cla(handles.axes1,'reset');
        axes(handles.axes1);
        plot(t,u1,'g', t, u2, 'b', t,
u3,'r','lineWidth',3);
        hold on
        xlabel('Waktu');
        ylabel('Kontrol');
        legend('u1','u2','u3');
        grid on
```

```
        else if
((get(handles.popupmenu1,'Value')==9))
        cla(handles.axes1,'reset');
        axes(handles.axes1);

plot(t,Sh,'r',t,Ah,'b',t,Ih,'g',t,Rh,'m','lineWi
dth',3);
        hold on
        xlabel('Waktu');
        ylabel('Populasi Manusia');
        legend('Sh','Ah','Ih','Rh');
        grid on

        else if
((get(handles.popupmenu1,'Value')==10))
        cla(handles.axes1,'reset');
        axes(handles.axes1);
        plot(t,Sv,'r',t,Iv,'b','lineWidth',3);
        hold on
        xlabel('Waktu');
        ylabel('Populasi Nyamuk');
        legend('Sv','Iv');
        grid on

            end
            end
            end
            end
            end
            end
            end
            end
end

% --- Executes on selection change in
popupmenu1.
function popupmenu1_Callback(hObject, eventdata,
handles)
```

```
function popupmenu1_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in pushbutton2.
function pushbutton2_Callback(hObject,
eventdata, handles)

set(handles.SH0,'string','');
set(handles.AH0,'string','');
set(handles.IH0,'string','');
set(handles.RH0,'string','');
set(handles.SV0,'string','');
set(handles.IV0,'string','');
set(handles.WAKTU,'string','');
arrayfun(@cla,findall(0,'type','axes'))

% --- Executes on button press in pushbutton3.
function pushbutton3_Callback(hObject,
eventdata, handles)
delete(handles.figure1);
```

BIODATA PENULIS

Nurani Dwi Pangestuti, lahir di Mojokerto, 27 Juli 1996. Pendidikan formal yang pernah ditempuh penulis yaitu TK Pertiwi, SD Negeri 2 Sooko, SMP Negeri 1 Kota Mojokerto, dan SMA Negeri 1 Sooko. Sekarang penulis menempuh pendidikan S1 di Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember dengan bidang minat Matematika Terapan.

Selama kuliah penulis aktif mengikuti organisasi yaitu Lembaga Dakwah Jurusan, ITS Mengajar, dan Ikatan Alumni SMAN 1 Sooko. Penulis juga aktif mengikuti kegiatan kepanitiaan berbagai acara, seperti kajian kemuslimahan, pengabdian masyarakat, dll. Demikian biodata tentang penulis. Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai Tugas Akhir ini, dapat dikirimkan melalui email ndpangestuti@gmail.com. Terimakasih.