TUGAS AKHIR - SM 141501

ANALISIS MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT *CO-INFECTION* CHLAMYDIA DAN PNEUMONIA

SITI NUR MARELIANA LENI SYAH PUTRI
NRP 06111440000064

Dosen Pembimbing
Dr. Hariyanto, M.Si
Drs. Suhud Wahyudi, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018

TUGAS AKHIR – SM141501

ANALISIS MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT *CO-INFECTION* CHLAMYDIA DAN PNEUMONIA

SITI NUR MARELIANA LENI SYAH PUTRI
NRP 06111440000064

Dosen Pembimbing
Dr. Hariyanto, M.Si
Drs. Suhud Wahyudi, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018

FINAL PROJECT – SM141501

ANALYSIS OF THE MATHEMATICAL MODEL SPREADING OF CHLAMYDIA AND PNEUMONIA CO-INFECTION DISEASES

SITI NUR MARELIANA LENI SYAH PUTRI
NRP 06111440000064

Supervisors
Dr. Hariyanto, M.Si
Drs. Suhud Wahyudi, M.Si

DEPARTMEN OF MATHEMATICS
Faculty Of Mathematics, Computation, and Data Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2018

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT *CO-INFECTION* CHLAMYDIA DAN PNEUMONIA

ANALYSIS OF THE MATHEMATICAL MODEL SPREADING OF CHLAMYDIA AND PNEUMONIA CO-INFECTION DISEASES

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

SITI NUR MARELIANA LENI SYAH PUTRI
NRP. 06111440000064

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. Suhud Wahyudi, M.Si	Dr. Hariyanto, M.Si
NIP. 19600109 198701 1 001	NIP. 19530414 198203 1 002

Mengetahui,
Ketua Departemen Matematika
FMKSD ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 27 Juli 2018

ANALISIS MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT *CO-INFECTION* CHLAMYDIA DAN PNEUMONIA

Nama	**: Siti Nur Mareliana Leni Syah Putri**
NRP	**: 06111440000064**
Departemen	**: Matematika**
Dosen Pembimbing	**: 1. Dr. Hariyanto, M.Si**
	2. Drs. Suhud Wahyudi, M.Si

ABSTRAK

Infeksi chlamydia adalah salah satu masalah utama kesehatan masyarakat. Infeksi chlamydia bersifat asimptomatik serta dapat menyebabkan penyakit lain, salah satunya adalah pneumonia. *Co-infection* chlamydia dan pneumonia terjadi ketika chlamydia dan pneumonia menginfeksi manusia secara bersamaan. Pada tugas akhir ini dibahas analisis model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia. Berdasarkan hasil analisis model diperoleh empat titik setimbang, yaitu titik setimbang non endemik (E_0), endemik chlamydia $(E_0)_1$, endemik pneumonia $(E_0)_2$, dan endemik *co-infection* chlamydia dan pneumonia $(E_0)_3$. Dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM) diperoleh dua nilai *basic reproduction number*, yaitu *basic reproduction number* penyebaran penyakit chlamydia $\left(R_{0_1}\right)$ dan penyakit pneumonia $\left(R_{0_2}\right)$. Titik setimbang non endemik (E_0) stabil asimtotik lokal jika $R_{0_1} < 1$ dan $R_{0_2} < 1$, titik setimbang endemik chlamydia $(E_0)_1$ stabil asimtotik lokal jika $R_{0_1} > 1$ dan $R_{0_2} < 1$, titik setimbang endemik pneumonia $(E_0)_2$ stabil asimtotik lokal jika $R_{0_1} < 1$ dan $R_{0_2} > 1$, dan titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia dan pneumonia $(E_0)_3$ stabil asimtotik lokal jika

$R_{0_1} > 1$ dan $R_{0_2} > 1$. Berdasarkan hasil simulasi numerik, laju transmisi pneumonia mempunyai pengaruh besar terhadap jumlah populasi manusia yang menderita *co-infection* chlamydia dan pneumonia.

Kata kunci: *Model Matematika, Chlamydia, Pneumonia, Co-infection, Kestabilan.*

ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODEL OF THE SPREAD OF CHLAMYDIA AND PNEUMONIA CO-INFECTION DISEASE

Name of Student : Siti Nur Mareliana Leni Syah Putri
NRP : 06111440000064
Department : Mathematics
Supervisor : 1. Dr. Hariyanto, M.Si
2. Drs. Suhud Wahyudi, M.Si

ABSTRACT

Chlamydia infection is one of the major public health problems. Chlamydia infection is asymptomatic and can cause other diseases, one of which is pneumonia. Co-infection chlamydia and pneumonia occur when chlamydia and pneumonia infect humans simultaneously.In this final project, we discuss a mathematical model spreading of chlamydia and pneumonia co-infection disease. Based on the analytical result of the model, there are four equilibrium, namely disease-free equilibrium (E_0), *chlamydia endemic equilibrium* $(E_0)_1$, *pneumonia endemic equilibrium* $(E_0)_2$ *and chlamydia-pneumonia co-infection endemic equilibrium* $(E_0)_3$. *By the Next Generation Matrix (NGM) method, we obtain two basic reproduction numbers, that is basic reproduction number for spreading of chlamydia* $\left(R_{0_1}\right)$ *and basic reproduction number for spreading of pneumonia* $\left(R_{0_2}\right)$. (E_0) *equilibrium point is local asymptotically stable if* $R_{0_1} < 1$ *and* $R_{0_2} < 1$. $(E_0)_1$ *equilibrium point is exist and disposed to local asymptotically stable if* $R_{0_1} > 1$ *and* $R_{0_2} < 1$. $(E_0)_2$ *equilibrium point is exist and disposed to local asymptotically stable if* $R_{0_1} < 1$ *and* $R_{0_2} > 1$. *And* $(E_0)_3$ *equilibrium point is disposed to local asymptotically stable if* $R_{0_1} > 1$ *and* $R_{0_2} > 1$. *Then, the numerical simulation results show that the value of pneumonia transmission rate has a big* *influences to the number of chlamydia-pneumonia co-infection people.*

Keywords: *Mathematical Model, Chlamydia, Pneumonia, Co-infection, Stability.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'aalamin, segala puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas segala rahmat, taufiq dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

ANALISIS MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT *CO-INFECTION* CHLAMYDIA DAN PNEUMONIA

yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini, penulis telah banyak mendapat bantuan serta masukan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT. selaku Ketua Departemen Matematika FMKSD ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkulihan hingga terselesainya Tugas Akhir ini.
2. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, MT. selaku Sekretaris Departemen serta Dosen Wali yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si. selaku Kaprodi Sarjana Matematika FMKSD ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkulihan hingga terselesainya Tugas Akhir ini.

4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Sc. selaku Sekretaris Kaprodi Sarjana Matematika FMKSD ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkulihan hingga terselesainya Tugas Akhir ini.
5. Bapak Dr. Hariyanto, M.Si dan Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat selesai dengan baik.
6. Bapak Drs. Suharmadi, Dipl. Sc, M.Phil, Bapak Drs. Mohammad Setijo Winarko, M.Si, Ibu Dra. Wahyu Fistia Doctorina, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran demi perbaikan Tugas Akhir.
7. Keluarga tercinta terutama Bapak Latsuri dan Ibu Sri Darwati yang senantiasa dengan ikhlas memberikan kasih sayang, semangat, doa, dan nasihat-nasihat yang sungguh berarti, serta Kartika Ayu Dwi Nurmarsheila yang senatiasa memberikan semangat dan dukungan kepada penulis.
8. Seluruh jajaran dosen dan staf departemen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
9. Seluruh teman-teman angkatan 2014 dan seluruh keluarga besar Matematika ITS terima kasih atas dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Apabila dalam Tugas Akhir ini ada kekurangan, penulis mohon kritik dan saran demi penyempurnaan Laporan Kerja Praktek di masa yang akan datang. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Wassalamu’alaikum Wr. Wb.

Surabaya, 26 Juli 2018

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

DAFTAR SIMBOL

$S(t)$: Jumlah individu yang sehat dan rentan terinfeksi penyakit.
$E_1(t)$: Jumlah individu yang sudah terinfeksi chlamydia tetapi belum dapat menginfeksi.
$E_2(t)$: Jumlah individu yang sudah terinfeksi pneumonia tetapi belum dapat menginfeksi.
$E_{12}(t)$: Jumlah individu yang sudah mengalami *co-infection* chlamydia-pneumonia tetapi belum dapat menginfeksi.
$I_1(t)$: Jumlah individu yang terinfeksi chlamydia dan dapat menginfeksi.
$I_2(t)$: Jumlah individu yang terinfeksi pneumonia dan dapat menginfeksi.
$I_{12}(t)$: Jumlah individu yang mengalami *co-infection* chlamydia-pneumonia dan dapat menginfeksi.
$R_1(t)$: Jumlah individu yang telah sembuh dari infeksi chlamydia.
$R_2(t)$: Jumlah individu yang telah sembuh dari infeksi pneumonia.
μ : *Rate* kelahiran atau kematian alami.
β_1 : *Rate* transmisi chlamydia dari individu yang terinfeksi chlamydia.
β_2 : *Rate* transmisi pneumonia dari individu yang terinfeksi pneumonia.
β_{10} : *Rate* transmisi chlamydia dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia.
β_{02} : *Rate* transmisi pneumonia dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia.
ε_1 : *Rate* kemajuan untuk populasi *exposed* chlamydia.
ε_2 : *Rate* kemajuan untuk populasi *exposed* pneumonia.
ε_{10} : *Rate* kemajuan untuk populasi *exposed* chlamydia dari *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia.
ε_{02} : *Rate* kemajuan untuk populasi *exposed* pneumonia dari

exposed co-infection chlamydia-pneumonia.

ρ_1 : *Rate* penyembuhan infeksi chlamydia.

ρ_2 : *Rate* penyembuhan infeksi pneumonia.

ρ_{10} : *Rate* penyembuhan infeksi chlamydia pada individu *co-infection* chlamydia-pneumonia.

ρ_{02} : *Rate* penyembuhan infeksi pneumonia pada individu *co-infection* chlamydia-pneumonia.

ω_1 : *Rate* populasi yang telah sembuh dari infeksi chlamydia menjadi sembuh dari infeksi pneumonia.

ω_2 : *Rate* populasi yang telah sembuh dari infeksi pneumonia menjadi sembuh dari infeksi chlamydia.

E_0 : Titik setimbang non endemik.

$(E_0)_1$: Titik setimbang endemik chlamydia.

$(E_0)_2$: Titik setimbang endemik pneumonia.

$(E_0)_1$: Titik setimbang endemik *co-infection* Chlamydia dan pneumonia.

BAB I
PENDAHULUAN

Bab ini membahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup identifikasi permasalahan pada topik Tugas Akhir. Kemudian dirumuskan menjadi permasalahan yang akan diberikan batasan-batasan untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang Masalah

Chlamydia merupakan penyakit menular seksual yang disebabkan oleh bakteri *Chlamydia trachomatis*. Chlamydia ditularkan secara seksual (melalui hubungan seks vaginal, oral dan anal) dan juga ditularkan melalui modus vertikal (dari ibu ke janin yang dikandung) [1]. Chlamydia dapat menyebabkan infertilitas dan juga kehamilan ektopik. Chlamydia juga dapat menyebabkan penyakit lain seperti konjungtivitas, trachoma yang dapat menyebabkan kebutaan, *Fitz-Hugh-Curtis syndrome* (inflamasi dari liver capsule), dan pneumonia. Infeksi *Chlamydia trachomatis* diberbagai negara merupakan penyebab utama infeksi yang ditularkan terbanyak melalui hubungan seksual. Menurut laporan WHO pada tahun 1995 menunjukkan adanya 85 juta manusia yang terinfeksi penyakit ini. Pada tahun 1999 jumlah kasus penyebaran penyakit chlamydia mengalami kenaikan yaitu diperkirakan sekitar 92 juta, pada tahun 2005 jumlah kasus penyebaran penyakit chlamydia menjadi 101 juta, kemudian pada tahun 2008 ditunjukkan adanya 106 juta manusia terinfeksi penyakit chlamydia yang terjadi diseluruh dunia, serta menurut laporan WHO berdasarkan data prevelensi dari tahun 2005, prevelensi global penyakit chlamydia pada tahun 2012 adalah sebesar 4,2%, yang berarti sekitar 131 juta kasus infeksi clamydia. Di Indonesia, berdasarkan Laporan Survei Terpadu dan Biologis Perilaku (STBP) oleh Kementrian Kesehatan RI pada tahun 2011, prevalensi penyakit menular seksual (PMS) pada tahun 2011 yaitu infeksi gonore dan clamydia sebesar 179 % dan sifilis sebesar 44 %. Untuk saat ini, angka kejadian infeksi chlamydia di Indonesia secara global belum diketahui karena pemeriksaan chlamydia belum secara rutin dikerjakan [2]. Selain itu infeksi chlamydia umumnya bersifat asimptomatik sehingga penderita tidak menyadarinya dan tidak pergi untuk berobat [3].

Nasopharyngeal pneumococcus adalah salah satu jenis bakteri yang menyebabkan infeki serius seperti pneumonia. Pneumonia atau dalam bahasa awam disebut radang paru-paru merupakan jenis penyakit yang dapat menimbulkan konsolidasi jaringan paru dan gangguan pertukaran gas setempat, dan menimbulkan angka kesakitan yang tinggi, dengan gejala-gejala batuk, demam, dan sesak nafas [4]. Pneumonia dapat terjadi akibat menghirup bibit penyakit diudara, atau kuman ditenggorokan terisap masuk keparu-paru, dan bisa melalui luka, serta percikan ludah sewaktu bicara, bersin dan batuk. Dari data RISKESDAS terjadi peningkatan prevalensi pneumonia pada semua umur dari 2,1 % pada tahun 2007 menjadi 2,7% pada tahun 2013 [5]. Berdasarkan kelompok umur penduduk, prevalensi pneumonia yang tinggi terjadi pada 2 kelompok yaitu umur 1-4 tahun, kemudian mulai meningkat pada umur 45-54 tahun dan terus meningkat pada kelompok umur berikutnya. Pneumonia merupakan penyebab kematian terbesar pada anak di seluruh dunia. Menurut laporan WHO, pada tahun 2015 terjadi 920.136 kematian akibat pneumonia, 16% dari seluruh kematian anak usia kurang dari 5 tahun.

Co-infection chlamydia dan pneumonia terjadi ketika chlamydia dan pneumonia menginfeksi manusia secara bersamaan. Kasus mengenai *co-infection* chlamydia dan pneumonia di Indonesia memang belum banyak dilaporkan. Namun dengan banyaknya kasus penyebaran penyakit menular seksual dan banyaknya jumlah penderita pneumonia di Indonesia, maka tidak menutup kemungkinan bahwa *co-infection* ini akan kita jumpai di masa depan. Oleh karena itu perlu dilakukan upaya pencegahan munculnya *co-infection* chlamydia dan pneumonia di Indonesia.

Dewasa ini, pemodelan matematika telah banyak digunakan untuk menganalisis dinamika berbagai penyakit menular seperti chlamydia dan pneumonia. Model matematika dapat membantu meningkatkan pemahaman mengenai dinamika suatu penyakit serta dapat menjadi bahan pertimbangan dalam pengambilan keputusan. Banyak peneliti telah mempelajari dinamika penyebaran penyakit. Diantaranya adalah Sharomi dkk pada tahun 2011 menjelaskan model matematika penyebaran penyakit chlamydia [6]. Pada tahun 2013, Jacob dkk menjelaskan model matematika penyebaran penyakit pneumonia [7]. Daozhou Gao dkk, pada tahun 2016 mengembangkan model SIS dua penyakit yaitu chlamydia dan pneumonia [8]. Kemudian metode Runge-Kutta juga telah banyak digunakan untuk menganalisis model matematika, diantaranya pada tahun 2016, Tahiyatul Asfihani dkk menggunakan metode Runge-Kutta orde ke-empat untuk menganalisis model lintasan nanopartikel magnet pada pembuluh darah didalam medan magnet [9].

Merujuk pada penelitian diatas, dalam Tugas Akhir ini, dikonstruksikan model epidemi SEIR *co-infection* chlamydia dan pneumonia, kemudian akan didapatkan titik kesetimbangan dan kestabilan dari model *co-infection* chlamydia dan pneumonia, serta simulasi secara numerik dengan metode Runge-Kutta. Simulasi numerik dari model persamaan ini akan disimulasikan menggunakan MATLAB R2013a.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, permasalahan yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana titik kesetimbangan model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia?
2. Bagaimana kestabilan model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia?

3. Bagaimana analisis kestabilan yang diperoleh dari simulasi model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan di atas, maka ruang lingkup penelitian dibatasi sebagai berikut:

1. Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini merupakan modifikasi dari model matematika pada jurnal yang ditulis oleh Daozhou Gao dkk (2016).
2. Analisis penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia ditinjau secara eksternal (di luar tubuh).
3. Simulasi model yang digunakan adalah dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB R2013a.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan diatas, tujuan yang akan dicapai adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan titik kesetimbangan model matematika penyebaran penykit *co-infection* chlamydia dan pneumonia.
2. Mendapatkan kestabilan model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia.
3. Menganalisis kestabilan hasil simulasi model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penulisan Tugas Akhir ini adalah:

1. Memberikan informasi penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia sehingga dapat digunakan dalam pengambilan kebijakan untuk mengatasi penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia.
2. Memberikan informasi tentang faktor-faktor penting yang memengaruhi penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia melalui analisis model matematikanya.

1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir

Sistematika penulisan dalam laporan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan Tugas Akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan laporan Tugas Akhir.
2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan, serta untuk membantu memahami permasalahan yang akan dibahas.
3. BAB III METODOLOGI
   Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Bab ini menjelaskan secara detail mengenai hasil penelitian Tugas Akhir ini.
5. BAB V KESIMPULAN DAN SARAN
   Bab ini menjelaskan tentang penarikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan, serta untuk membantu memahami permasalahan yang akan dibahas.

2.1 Penelitian Terdahulu

Banyak peneliti yang telah mengembangkan model dinamika penyakit dengan segala permasalahannya, salah satunya adalah yang berjudul *"Mathematical study of a risk-structured two-group mode for Chlamydia transmission dynamics"* [6]., Sharomi dkk, pada tahun 2011 menjelaskan model matematika penyebaran penyakit chlamydia dalam dua grup yaitu grup laki-laki dan grup perempuan [6].

Jacob dkk, pada tahun 2013 dalam penelitian yang berjudul *"Mathematical Model for Pneumonia Dynamics with Carriers"* [7], dalam penelitian tersebut Jacob dkk menjelaskan model matematika penyebaran penyakit pneumonia dalam 4 kompartemen yaitu *Susceptible*, *Infected*, *Carriers* dan *Recovered* [7]. Kemudian Daozhou Gao dkk, pada tahun 2016 mengembangkan model epidemi SIS untuk dua penyakit, yaitu chlamydia dan pneumonia dimana individu yang terinfeksi dua penyakit mempunyai tingkat transmisi yang sama dengan individu yang hanya terinfeksi satu penyakit, yaitu *"Coinfection dynamics of two disease in a single host population"* [8]. Dalam penelitian tersebut Daozhou dkk menunjukkan ketika transmisi satu bakteri mempengaruhi tansmisi bakteri lainnya dan ditunjukkan juga ketika transmisi bakteri tidak saling mempengaruhi. Keterbatasan model [8] adalah tidak memperhatikan individu dalam keadaan *exposed* dan juga individu dalam keadaan *recovered*.

Model matematika dalam penelitian Daozhou dkk yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_{10} I_{12} + \beta_{12} I_{12} + \beta_{02} I_{12})S + (\rho_1 I_1 + \rho_2 I_2) - \mu S, \tag{2.1a}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\beta_2 I_2 + \beta_{12} I_{12} + \beta_{02} I_{12})I_1 + (\rho_2 I_{12} - \rho_1 I_1) - \mu I_1, \tag{2.1b}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12} + \beta_{12} I_{12})I_2 + (\rho_1 I_{12} - \rho_2 I_2) - \mu I_2, \tag{2.1c}$$

$$\frac{dI_{12}}{dt} = \beta_{12} I_{12} S + (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12} + \beta_{12} I_{12})I_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12} + \beta_{12} I_{12})I_2 - (\rho_1 + \rho_2)I_{12} - \mu I_{12}, \tag{2.1d}$$

$$1 = S + I_1 + I_2 + I_{12},$$

Dengan variabel sebagai berikut [8]:

$S(t)$: banyaknya individu yang sehat dan rentan terinfeksi chlamydia dan pneumonia pada saat t.

$I_1(t)$: banyaknya individu yang terinfeksi penyakit chlamydia pada saat t.

$I_2(t)$: banyaknya individu yang terinfeksi penyakit pneumonia pada saat t.

$I_{12}(t)$: banyaknya individu yang terinfeksi chlamydia dan pneumonia pada saat t.

Dan parameter sebagai berikut [8]:

ρ_1 : rate pemulihan penyakit chlamydia

ρ_2 : laju pemulihan penyakit pneumonia

μ : laju kelahiran dan kematian alami

β_1 : laju transmisi chlamydia

β_2 : laju transmisi pneumonia

β_{12} : laju transmisi *co-infection* chlamydia - pneumonia

β_{10} : laju transmisi chlamydia pada individu yang mengalami *co-infection* penyakit chlamydia – pneumonia

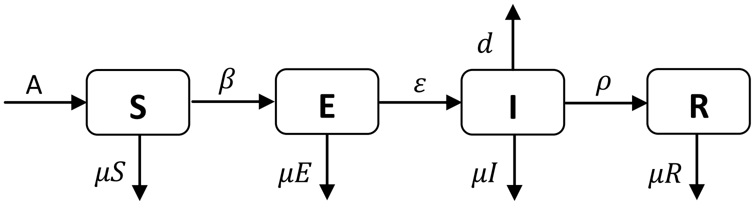
β_{02} : laju transmisi pneumonia pada individu yang mengalami *co-infection* penyakit chlamydia – pneumonia

Banyak pula peneliti yang telah menggunakan metode Runge-Kutta, salah satunya adalah Tahiyatul Asfihani, Hesti Hastuti dan Chairul Imron pada tahun 2016. Beliau menggunakan metode Runge-Kutta orde ke-empat untuk menganalisis model lintasan nanopartikel magnet pada pembuluh darah didalam medan magnet [9].

2.2 Model Epidemi SEIR

Model epidemi adalah model matematika yang digunakan untuk mengetahui penyebaran penyakit menular, khususnya menyangkut terjadi atau tidaknya keadaan epidemi serta pengaruh yang ditimbulkan. Untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit terdapat beberapa model matematika yang sering digunakan. Model-model tersebut memiliki konsep yang sama yaitu *compartmental epidemiologi* (pembagian kelas) yang menggambarkan penyebaran penyakit dari masing-masing kelas. Jadi dalam suatu populasi akan terbagi menjadi beberapa kelas dimana masing-masing kelas mewakili tahapan yang berbeda [10].

Model epidemi pertama kali dikemukakan oleh Kermack dan McKendrick (1927) dengan mengkaji model epidemi tipe SIR. Kemudian model epidemi mengalami perkembangan, diantaranya bertipe SIRS, SIS, SEIR, dan lain-lain. Model epidemi tipe SEIR (S = *susceptible*, E = *exposed*, I = *infected*, R = *recovered*). Pada epidemi tipe SEIR, periode laten (masa inkubasi) diperhatikan. Terdapat kelas E (*exposed*) yang digunakan untuk mewakili individu-individu yang baru terinfeksi dan memasuki periode laten (setelah terinfeksi sebelum menjadi terjangkit), dalam periode ini individu tersebut tidak memiliki kemampuan untuk menularkan penyakit ke individu lain. Berikut diagram kompartemen model epidemi tipe SEIR [11]:



Gambar 2.1 Diagram kompartemen model epidemi tipe SEIR

dengan keterangan variabel dan parameter sebagai berikut:

$S(t)$: populasi *susceptible* adalah individu yang rentan terserang penyakit.

$E(t)$: populasi *exposed* adalah individu yang ada pada masa inkubasi.

$I(t)$: populasi *infectious* adalah individu yang terjangkit dan dapat menularkan penyakit.

$R(t)$: populasi *recovered* adalah individu yang telah terimun dan sembuh dari penyakit.

A : laju rekruitmen.

β : laju individu *susceptible* menjadi *exposed.*

μ : konstanta kematian dari masing-masing kompartemen.

ε : laju kemajuan untuk populasi *exposed*.

ρ : laju penyembuhan alami adalah laju dimana individu *infectious* menjadi sembuh (*recovered*) per satuan waktu.

d : laju kematian karena penyakit.

2.3 Titik Setimbang

Definisi 2.1 [12]

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$. *Sebuah vektor* $\bar{x}$ *yang memenuhi* $f(\bar{x}) = 0$ *disebut* ***titik setimbang***.

2.4 Kestabilan Asimtotis Lokal

Kestabilan asimtotis lokal merupakan kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari linierisasi sistem tak linier. Kestabilan lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda bagian real dari akar-akar karakteristik sistem dari matriks Jacobian yang diperoleh disekitar titik kesetimbangan.

2.4.1 Linearisasi

Definisi 2.2 [13]

Diberikan sistem autonomous sebagai berikut:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Matriks Jacobian dari sistem diatas adalah:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

2.4.2 Akar-akar Persamaan Karakteristik

Definisi 2.3 [14]

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol x di $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu

$$Ax = \lambda x$$

Untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan x dikatakan sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.

Teorema 2.1 [14]

Misalkan A adalah adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan komponen A merupakan bilangan real. Pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain:

a) *λ adalah nilai eigen dari A.*
b) *Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai solusi tak trivial.*
c) *Untuk $\lambda \in \mathbb{R}$, maka ada vektor tak nol x didalam $\mathbb{R}^n$ sehingga $Ax = \lambda x$.*
d) *λ adalah penyelesaian dari persamaan karakteristik $det(\lambda I - A) = 0$.*

Teorema 2.2 [13]

Sistem linear $\dot{x} = Ax$, stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai eigen dari A mempunyai bagian real negatif atau dinotasikan sebagai $Re\big(\lambda_i(A)\big) < 0$.

2.5 Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai-nilai karakteristik dari matriks A adalah akar-akar karakteristik dari polinomial

$$\det(\lambda I - A) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

dengan $a_0 = 1$. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat dipakai untuk mengecek langsung kestabilan melalui koefisien a_i tanpa menghitung akar-akar dari polinomial yang ada [11].

$$\begin{array}{r|cccc}
\lambda^n & a_0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\
\lambda^{n-1} & a_1 & a_3 & \cdots & a_n \\
\lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & \cdots & \\
\lambda^{n-3} & c_1 & c_2 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & & \\
\lambda^0 & z & & &
\end{array}$$

dimana $b_1, \ldots, c_1, \ldots$ dan z secara rekursif didapat dari:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad , \ \ldots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1} \quad , \ldots$$

Kriteria Routh-Hurwitz menyimpulkan bahwa banyaknya perubahan tanda dalam kolom pertama pada tabel, sama dengan banyaknya akar-akar polinomial yang bagian realnya positif. Bila pada kolom pertama dalam tabel tidak ada perubahan tanda (semuanya bertanda positif atau semuanya bertanda negatif), maka semua akar polinomial bagian realnya adalah tak positif dan sistem stabil [11].

2.6 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar merupakan besaran penting dalam epidemiologi penyakit menular. Parameter ini didefinisikan sebagai ekspektasi banyaknya kasus sekunder yang timbul akibat satu orang terinfeksi primer yang masuk pada satu populasi tertutup yang seluruhnya *susceptible* [15]. Bilangan reproduksi dasar sering dinotasikan dengan R_0.

Bilangan reproduksi dasar (R_0) dapat diperoleh dengan beberapa metode, salah satunya adalah dengan membangun matriks yang membangkitkan jumlah individu baru yang terinfeksi. Matriks ini dinotasikan dengan G dan dinamakan NGM (*Next Generation Matrix*). Dimana i, j adalah elemen dari G, g_{ij} adalah jumlah infeksi sekunder tipe i yang disebabkan oleh individu yang terinfeksi tunggal tipe j, dengan asumsi bahwa populasi tipe i sepenuhnya *susceptible* [16].

Bilangan reproduksi dasar diberikan oleh radius spektral dari G. Radius spektral juga dikenal sebagai nilai eigen yang dominan dari G. NGM adalah matriks non-negatif oleh karena itu, dijamin bahwa akan didapat nilai eigen tunggal yang positif, yaitu R_0.
NGM terdiri dari dua bagian: $\mathbb{F}$ dan $\mathbb{V}^{-1}$, di mana

$$\mathbb{F} = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial x_j}\right]$$

dan

$$\mathbb{V} = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial x_j}\right]$$

$\mathcal{F}_i$ adalah infeksi baru, sementara $\mathcal{V}_i$ mentransfer infeksi dari satu kompartemen ke tempat lainnya. x_0 adalah keadaan ekuilibrium bebas penyakit. R_0 adalah nilai eigen dominan dari matriks $G = \mathbb{F}\,\mathbb{V}^{-1}$ [14,15].

2.7 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi [17]. Metode Runge-Kutta orde empat adalah sebagai berikut [17]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.1)$$

dengan

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3)$$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n}$$

$h =$ ukuran langkah

$n =$ banyaknya langkah

$t_0 =$ waktu awal

$t_f =$ waktu akhir

BAB III
METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir. Dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

3.1 Langkah Pengerjaan

Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan pada
penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. **Studi Literatur**

   Tahap ini merupakan tahap untuk melakukan identifikasi permasalahan, yaitu mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi bisa berupa buku, jurnal, paper, tugas akhir maupun artikel terkait model matematika penyebaran infeksi chlamydia dan pneumonia.

2. **Mengkonstruksi Model Matematika**

   Pada tahap ini, dilakukan konstruksi model *co-infection* chlamydia dan pneumonia dengan melakukan modifikasi dari model matematika *co-infection* chlamydia dan pneumonia pada jurnal yang ditulis oleh Daozhou Gao dkk (2016).

3. **Menganalisis Model Matematika**

   Menganalisis model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia yang merupakan sistem persamaan diferensial non linear dengan langkah-langkah sebagai berikut:

   a) Menentukan titik setimbang model.
   b) Melakukan linearisasi model dengan menggunakan matriks Jacobian.
   c) Menganalisa kestabilan dari titik setimbang yang diperoleh pada Langkah 3a dan menentukan syarat

kestabilan asimtotis lokal pada setiap titik setimbang yang diperoleh pada Langkah 3a.

4. **Simulasi**

Pada tahap ini, sistem persamaan disimulasikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta dengan aplikasi MATLAB R2013a, dengan langsung mendefinisikan parameter-paramater yang telah diketahui berdasarkan data-data yang didapatkan beserta syarat-syarat yang diperlukan dalam menyelesaikan sistem persamaan.

5. **Analisis Hasil Simulasi**

Pada tahap ini, penulis melakukan analisis terhadap hasil yang diperoleh dari langkah 4.

6. **Penarikan Kesimpulan dan Saran**

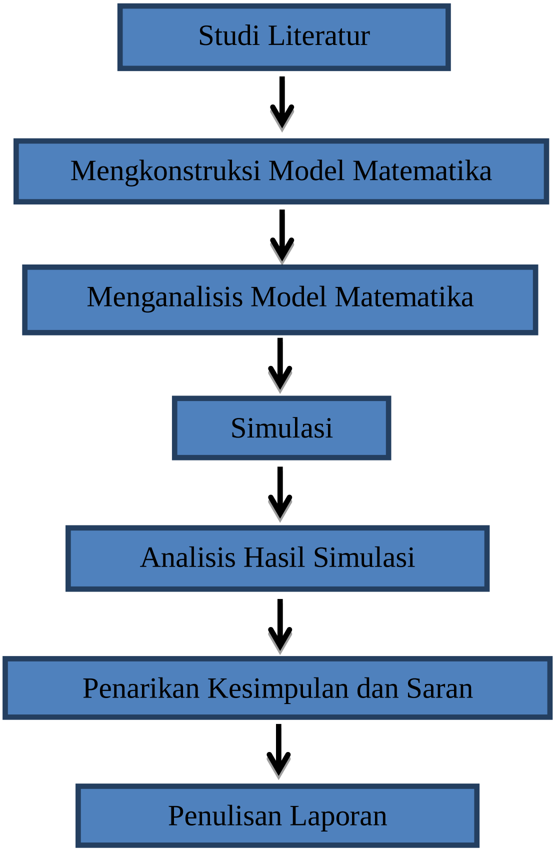
Pada tahap ini, penulis melakukan penarikan kesimpulan dari hasil pembahasan sebelumnya. Selanjutnya memberikan saran untuk perbaikan pada penelitian berikutnya.

7. **Penulisan Laporan**

Pada tahap terakhir ini, penulis menyusun sebuah laporan tentang hasil dari penelitian yang telah dikerjakan secara runtut dan teratur.

3.2 Diagram Alur Penelitian

Alur penelitian yang dilakukan dalam Tugas Akhir ini disajikan dalam **Gambar 3.1** berikut ini.



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai analisis model matematika penyebaan penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia yang terkait dengan titik setimbang dan analisis kestabilan dari titik setimbang yang diperoleh. Selanjutnya akan dicari *basic reproduction number* dan simulasi model menggunakan Matlab R2013a.

4.1 Konstruksi Model Matematika Penyebaran Penyakit *Co-Infection* Chlamydia dan Pneumonia

Model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia meninjau satu populasi, yaitu populasi manusia. Populasi manusia dibagi menjadi sembilan subpopulasi, yaitu subpopulasi manusia yang sehat atau rentan terinfeksi penyakit pada saat t yang dinotasikan dengan $S(t)$, subpopulasi manusia yang sudah terinfeksi chlamydia tetapi belum dapat menginfeksi pada saat t yang dinotasikan dengan $E_1(t)$, subpopulasi manusia yang sudah terinfeksi pneumonia tetapi belum dapat menginfeksi pada saat t yang dinotasikan dengan $E_2(t)$, subpopulasi manusia *co-infection* chlamydia-pneumonia tetapi belum menginfeksi pada saat t yang dinotasikan dengan $E_{12}(t)$, subpopulasi manusia yang terinfeksi chlamydia dan dapat menginfeksi pada saat t yang dinotasikan dengan $I_1(t)$, subpopulasi manusia yang terinfeksi pneumonia dan dapat menginfeksi pada saat t yang dinotasikan dengan $I_2(t)$, subpopulasi manusia yang mengalami *co-infection* chlamydia-pneumonia dan dapat menginfeksi pada saat t yang dinotasikan dengan $I_{12}(t)$, subpopulasi manusia yang telah sembuh dari infeksi chlamydia pada saat t yang dinotasikan dengan $R_1(t)$, subpopulasi manusia yang telah sembuh dari infeksi pneumonia pada saat t yang dinotasikan dengan $R_2(t)$. Selanjutnya kesembilan subpopulasi tersebut akan ditulis dengan $S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1$ dan R_2.

Secara umum penyebaran penyakit chlamydia dapat terjadi melalui interaksi antara individu yang terinfeksi chlamydia dengan individu yang sehat atau rentan terkena penyakit, interaksi ini berupa interaksi seksual. Sedangkan penyebaran penyakit pneumonia dapat terjadi melalui percikan ludah sewaktu bicara, bersin dan batuk. Individu yang sehat atau rentan terkena penyakit akan menjadi individu yang terinfeksi chlamydia jika melakukan interaksi dengan individu yang terinfeksi chlamydia serta jika melakukan interaksi dengan individu *co-infection* chlamydia-pneumonia. Individu yang terinfeksi chlamydia akan dapat sembuh kembali melalui imunitas tubuh atau pengobatan yang tepat. Demikian juga individu yang sehat atau rentan terkena penyakit akan menjadi individu yang terinfeksi pneumonia jika melakukan interaksi dengan individu yang terinfeksi pneumonia serta jika melakukan interaksi dengan individu *co-infection* chlamydia-pneumonia. Individu yang terinfeksi pneumonia akan dapat sembuh kembali melalui imunitas tubuh atau pengobatan yang tepat. Individu yang terinfeksi chlamydia jika berinteraksi dengan individu yang terinfeksi pneumonia maka akan terinfeksi pneumonia juga. Selain itu individu yang terinfeksi pneumonia jika berinteraksi dengan individu yang terinfeksi chlamydia maka akan terinfeksi chlamydia juga. Hal tersebut menyebabkan munculnya *co-infection* chlamydia-pneumonia.

Berikut ini diberikan beberapa asumsi yang digunakan dalam pembentukan model penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia-pneumonia, yaitu:

1. Populasi bersifat tertutup yang berarti bahwa pertambahan ataupun pengurangan jumlah individu melalui emigrasi dan imigrasi tidak diperhatikan.
2. Populasi bersifat homogen, artinya setiap individu mempunyai peluang yang sama untuk tertular suatu virus karena adanya kontak dengan individu terinfeksi.
3. Hanya terdapat dua penyakit yang menyebar dalam populasi.
4. Laju kelahiran dan laju kematian diasumsikan sama. Setiap individu yang lahir masuk kedalam kelas individu

Susceptible dan setiap individu yang mati dari setiap kelas mempunyai laju proporsional dengan jumlah individu pada masing-masing kelas.

5. Kematian akibat terinfeksi penyakit tidak diperhatikan, hanya kematian alami yang terjadi dalam setiap sub populasi.
6. Penyakit chlamydia dan pneumonia hanya menular melalui kontak langsung dengan penderita.
7. Terdapat masa inkubasi (periode laten) pada proses penularan penyakit chlamydia dan pneumonia.
8. Individu yang berada dalam periode laten tidak dapat menularkan penyakit.
9. Individu yang rentan terinfeksi penyakit dan individu yang terinfeksi pneumonia dapat terinfeksi chlamydia jika berinteraksi dengan penderita chlamydia.
10. Individu yang rentan dan individu yang terinfeksi chlamydia dapat terinfeksi pneumonia jika berinteraksi dengan penderita pneumonia.
11. Individu yang terinfeksi penyakit dapat sembuh.
12. Individu yang terinfeksi chlamydia atau terinfeksi *co-infection* chlamydia-pneumonia dapat sembuh dari infeksi chlamydia dengan adanya pengobatan chlamydia.
13. Individu yang terinfeksi pneumonia atau terinfeksi *co-infection* chlamydia-pneumonia dapat sembuh dari infeksi pneumonia dengan adanya pengobatan pneumonia.

Adapun notasi serta definisi dari variabel dan masing-masing parameter yang digunakan pada model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia-pneumonia tertera pada tabel di bawah ini:

Tabel 4.1 Variabel pada Model Matematika Penyebaran Penyakit *Co-Infection* Chlamydia-Pneumonia

Variabel	Keterangan
$S(t)$	Jumlah individu yang sehat dan rentan terinfeksi penyakit
$E_1(t)$	Jumlah individu yang sudah terinfeksi

	chlamydia tetapi belum dapat menginfeksi
$E_2(t)$	Jumlah individu yang sudah terinfeksi pneumonia tetapi belum dapat menginfeksi
$E_{12}(t)$	Jumlah individu yang sudah mengalami *co-infection* chlamydia-pneumonia tetapi belum dapat menginfeksi
$I_1(t)$	Jumlah individu yang terinfeksi chlamydia dan dapat menginfeksi
$I_2(t)$	Jumlah individu yang terinfeksi pneumonia dan dapat menginfeksi
$I_{12}(t)$	Jumlah individu yang mengalami *co-infection* chlamydia-pneumonia dan dapat menginfeksi
$R_1(t)$	Jumlah individu yang telah sembuh dari infeksi chlamydia
$R_2(t)$	Jumlah individu yang telah sembuh dari infeksi pneumonia

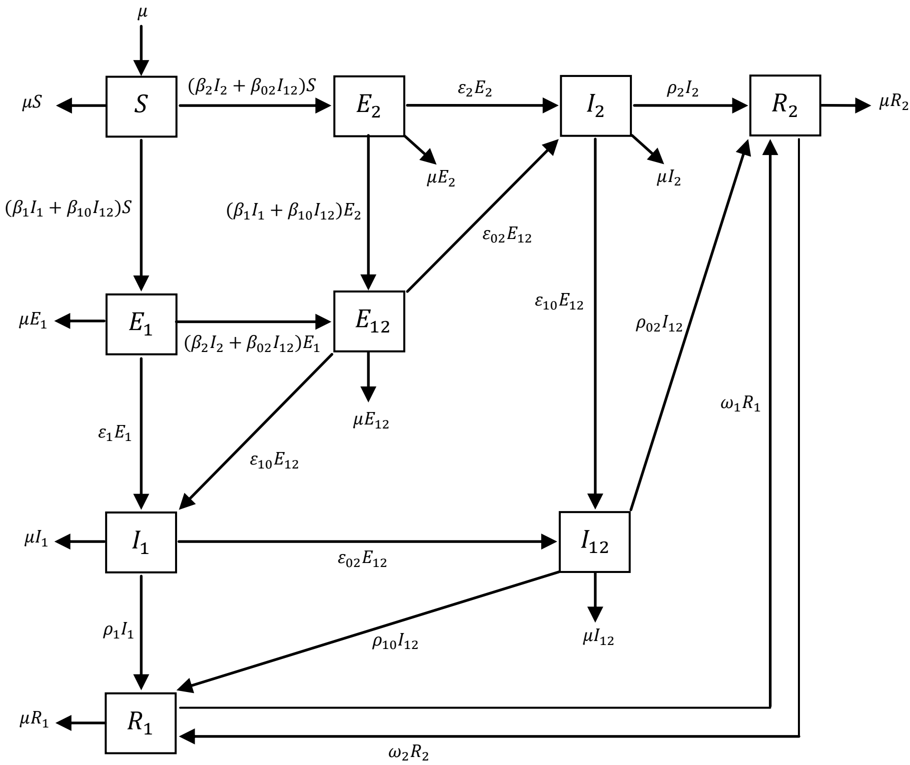
Tabel 4.2 Parameter pada Model Matematika Penyebaran Penyakit *Co-Infection* Chlamydia-Pneumonia

Parameter	Keterangan
μ	*Rate* kelahiran atau kematian alami
β_1	*Rate* transmisi chlamydia dari individu yang terinfeksi chlamydia
β_2	*Rate* transmisi pneumonia dari individu yang terinfeksi pneumonia
β_{10}	*Rate* transmisi chlamydia dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia
β_{02}	*Rate* transmisi pneumonia dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia
ε_1	*Rate* kemajuan untuk populasi *exposed* chlamydia
ε_2	*Rate* kemajuan untuk populasi *exposed* pneumonia
ε_{10}	*Rate* kemajuan untuk populasi *exposed*

	chlamydia dari *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia
ε_{02}	*Rate* kemajuan untuk populasi *exposed* pneumonia dari *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia
ρ_1	*Rate* penyembuhan infeksi chlamydia
ρ_2	*Rate* penyembuhan infeksi pneumonia
ρ_{10}	*Rate* penyembuhan infeksi chlamydia pada individu *co-infection* chlamydia-pneumonia
ρ_{02}	*Rate* penyembuhan infeksi pneumonia pada individu *co-infection* chlamydia-pneumonia
ω_1	*Rate* populasi yang telah sembuh dari infeksi chlamydia menjadi sembuh dari infeksi pneumonia
ω_2	*Rate* populasi yang telah sembuh dari infeksi pneumonia menjadi sembuh dari infeksi chlamydia

Karena $S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1$ dan R_2 merupakan notasi yang menyatakan jumlah individu pada masing-masing subpopulasi, maka diasumsikan $S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2 \geq 0$. Selain itu, untuk setiap parameter diasumsikan selalu bernilai positif.

Berdasarkan mekanisme penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia-pneumonia yang telah dijelaskan serta asumsi-asumsi dan parameter yang telah disebutkan, dapat dibentuk diagram transmisi penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia-pneumonia sebagai berikut.



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Matematika Penyebaran Penyakit *Co-Infection* Chlamydia-Pneumonia

Berdasarkan diagram kompartemen di atas, model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia-pneumonia dapat disajikan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \mu S - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S \qquad (4.1a)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - \mu E_1 - \varepsilon_1 E_1 - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 \qquad (4.1b)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S - \mu E_2 - \varepsilon_2 E_2 - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 \quad (4.1c)$$

$$\frac{dE_{12}}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 - \mu E_{12}$$
$$-\varepsilon_{10} E_{12} - \varepsilon_{02} E_{12} \quad (4.1d)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_1 - \varepsilon_{02} E_{12} - \rho_1 I_1 \quad (4.1e)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \varepsilon_2 E_2 + \varepsilon_{02} E_{12} - \mu I_2 - \varepsilon_{10} E_{12} - \rho_2 I_2 \quad (4.1f)$$

$$\frac{dI_{12}}{dt} = \varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_{12} - \rho_{10} I_{12} - \rho_{02} I_{12} \quad (4.1g)$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2 - \mu R_1 - \omega_1 R_1 \quad (4.1h)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1 - \mu R_2 - \omega_2 R_2 \quad (4.1i)$$

Persamaan (4.1a) merepresentasikan laju perubahan populasi individu yang sehat atau rentan terinfeksi penyakit tiap satuan waktu. Populasi individu yang sehat atau rentan terinfeksi penyakit bertambah karena adanya kelahiran alami populasi individu yang sehat, berkurang karena adanya kematian alami pada populasi individu yang sehat atau rentan terinfeksi. Berkurang karena adanya interaksi antara individu yang sehat atau rentan terinfeksi penyakit dengan individu yang terinfeksi chlamydia sehingga menjadi *exposed* chlamydia (sudah terinfeksi chlamydia tetapi belum bisa menginfeksi) serta berkurang karena adanya interaksi dengan individu *co-infection* chlamydia-pneumonia kemudian mendapat transmisi bakteri chlamydia sehingga menjadi *exposed* chlamydia. Berkurang karena adanya interaksi antara individu yang sehat atau rentan terinfeksi penyakit dengan individu yang terinfeksi pneumonia sehingga menjadi *exposed* pneumonia (sudah terinfeksi pneumonia tetapi belum bisa menginfeksi) serta berkurang karena adanya interaksi dengan individu *co-infection* chlamydia-pneumonia kemudian mendapat transmisi bakteri pneumonia sehingga menjadi *exposed* pneumonia.

Persamaan (4.1b) merepresentasikan laju perubahan populasi individu *exposed* chlamydia (sudah terinfeksi chlamydia tetapi belum bisa menginfeksi) tiap satuan waktu. Populasi individu *exposed* chlamydia bertambah karena adanya interaksi antara individu yang sehat atau rentan terinfeksi penyakit dengan individu yang terinfeksi chlamydia sehingga menjadi *exposed* chlamydia serta bertambah karena adanya interaksi dengan individu *co-infection* chlamydia-pneumonia kemudian mendapat transmisi bakteri chlamydia sehingga menjadi *exposed* chlamydia. Berkurang karena adanya kematian alami pada populasi individu *exposed* chlamydia. Berkurang karena adanya kemajuan populasi *exposed* chlamydia menjadi terinfeksi chlamydia.

Persamaan (4.1c) merepresentasikan laju perubahan populasi individu *exposed* pneumonia (sudah terinfeksi pneumonia tetapi belum bisa menginfeksi) tiap satuan waktu. Populasi individu *exposed* pneumonia bertambah karena adanya interaksi antara individu yang sehat atau rentan terinfeksi penyakit dengan individu yang terinfeksi pneumonia sehingga menjadi *exposed* pneumonia serta bertambah karena adanya interaksi dengan individu *co-infection* chlamydia-pneumonia kemudian mendapat transmisi bakteri pneumonia sehingga menjadi *exposed* pneumonia. Berkurang karena adanya kematian alami pada populasi individu yang *exposed* pneumonia. Berkurang karena adanya kemajuan populasi *exposed* pneumonia menjadi terinfeksi pneumonia.

Persamaan (4.1d) merepresentasikan laju perubahan populasi individu *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia (sudah mengalami *co-infection* chlamydia-pneumonia tetapi belum bisa menginfeksi) tiap satuan waktu. Populasi individu *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia bertambah karena adanya interaksi antara individu yang *exposed* chlamydia dengan individu yang terinfeksi pneumonia sehingga menjadi *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia serta bertambah karena adanya interaksi antara individu *exposed* chlamydia dengan individu *co-infection* chlamydia-pneumonia kemudian mendapat transmisi bakteri pneumonia sehingga menjadi *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia. Bertambah karena adanya interaksi antara individu *exposed* pneumonia dengan individu yang terinfeksi chlamydia sehingga menjadi *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia serta bertambah karena adanya interaksi antara individu *exposed* pneumonia dengan individu *co-infection* chlamydia-pneumonia kemudian mendapat transmisi bakteri chlamydia sehingga menjadi *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia. Berkurang karena adanya kemajuan populasi *exposed* chlamydia dari populasi *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia menjadi terinfeksi chlamydia. Berkurang karena adanya kemajuan populasi *exposed* pneumonia dari populasi *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia menjadi terinfeksi pneumonia. Berkurang karena adanya kematian alami pada populasi individu *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia.

Persamaan (4.1e) merepresentasikan laju perubahan populasi individu yang terinfeksi chlamydia (*infected* chlamydia) tiap satuan waktu. Populasi individu yang terinfeksi chlamydia bertambah karena adanya kemajuan populasi *exposed* chlamydia menjadi terinfeksi chlamydia. Bertambah karena adanya kemajuan populasi *exposed* chlamydia dari populasi *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia menjadi terinfeksi chlamydia. Berkurang karena adanya kematian alami pada populasi individu yang terinfeksi chlamydia. Berkurang karena adanya kemajuan populasi individu *exposed* pneumonia menjadi *co-infection* chlamydia-pneumonia. Berkurang karena adanya kesembuhan dari individu terinfeksi chlamydia menjadi individu sembuh dari chlamydia (*recovered* chlamydia).

Persamaan (4.1f) merepresentasikan laju perubahan populasi individu yang terinfeksi pneumonia (*infected* pneumonia) tiap satuan waktu. Populasi individu yang terinfeksi pneumonia bertambah karena adanya kemajuan populasi *exposed* pneumonia menjadi terinfeksi pneumonia. Bertambah karena adanya kemajuan populasi *exposed* pneumonia dari populasi *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia menjadi terinfeksi pneumonia. Berkurang karena adanya kematian alami pada populasi individu yang terinfeksi pneumonia. Berkurang karena adanya kemajuan populasi individu *exposed* chlamydia menjadi *co-infection* chlamydia-pneumonia. Berkurang karena adanya kesembuhan dari individu terinfeksi pneumonia menjadi individu sembuh dari pneumonia (*recovered* pneumonia).

Persamaan (4.1g) merepresentasikan laju perubahan populasi individu *co-infection* chlamydia-pneumonia tiap satuan waktu. Populasi individu *co-infection* chlamydia-pneumonia bertambah karena adanya kemajuan populasi individu *exposed* pneumonia menjadi *co-infection* chlamydia-pneumonia. Bertambah karena adanya kemajuan populasi individu *exposed* chlamydia menjadi *co-infection* chlamydia-pneumonia. Berkurang karena adanya kematian alami pada populasi individu *co-infection* chlamydia-pneumonia. Berkurang karena adanya kesembuhan dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia menjadi individu sembuh dari chlamydia (*recovered* chlamydia). Berkurang karena adanya kesembuhan dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia menjadi individu sembuh dari pneumonia (*recovered* pneumonia).

Persamaan (4.1h) merepresentasikan laju perubahan populasi individu sembuh dari chlamydia (*recovered* chlamydia) tiap satuan waktu. Populasi individu sembuh dari chlamydia bertambah karena adanya kesembuhan dari individu terinfeksi chlamydia menjadi individu sembuh dari chlamydia (*recovered* chlamydia). Bertambah karena adanya kesembuhan dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia menjadi individu sembuh dari chlamydia (*recovered* chlamydia). Bertambah karena adanya kesembuhan dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia yang telah sembuh dari pneumonia menjadi sembuh dari chlamydia (*recovered* chlamydia). Berkurang karena adanya kematian alami pada populasi individu sembuh dari chlamydia. Berkurang karena adanya kesembuhan dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia yang telah sembuh dari chlamydia menjadi sembuh dari pneumonia (*recovered* pneumonia).

Persamaan (4.1i) merepresentasikan laju perubahan populasi individu sembuh dari pneumonia (*recovered* pneumonia) tiap satuan waktu. Populasi individu sembuh dari pneumonia bertambah karena adanya kesembuhan dari individu terinfeksi pneumonia menjadi individu sembuh dari pneumonia (*recovered* pneumonia). Bertambah karena adanya kesembuhan dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia menjadi individu sembuh dari pneumonia (*recovered* pneumonia). Bertambah karena adanya kesembuhan dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia yang telah sembuh dari chlamydia menjadi sembuh dari pneumonia (*recovered* pneumonia). Berkurang karena adanya kematian alami pada populasi individu sembuh dari pneumonia. Berkurang karena adanya kesembuhan dari individu *co-infection* chlamydia-pneumonia yang telah sembuh dari pneumonia menjadi sembuh dari chlamydia (*recovered* chlamydia).

4.2 Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran Penyakit *Co-Infection* Chlamydia dan Pneumonia

Keadaan setimbang adalah suatu keadaan ketika perubahan jumlah subpopulasi tertentu sepanjang waktu adalah nol. Berdasarkan ***Definisi 2.1***, model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia-pneumonia memenuhi keadaan setimbang pada saat $\frac{dS}{dt}=\frac{dE_1}{dt}=\frac{dE_2}{dt}=\frac{dE_{12}}{dt}=\frac{dI_1}{dt}=\frac{dI_2}{dt}=\frac{dI_{12}}{dt}=\frac{dR_1}{dt}=\frac{dR_2}{dt}=0$, sehingga Persamaan (4.1a)-(4.1b) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt}=\mu-\mu S-(\beta_1 I_1+\beta_{10}I_{12})S-(\beta_2 I_2+\beta_{02}I_{12})S=0 \quad (4.2a)$$

$$\frac{dE_1}{dt}=(\beta_1 I_1+\beta_{10}I_{12})S-\mu E_1-\varepsilon_1 E_1 -(\beta_2 I_2+\beta_{02}I_{12})E_1=0 \quad (4.2b)$$

$$\frac{dE_2}{dt}=(\beta_2 I_2+\beta_{02}I_{12})S-\mu E_2-\varepsilon_2 E_2 -(\beta_1 I_1+\beta_{10}I_{12})E_2=0 \quad (4.2c)$$

$$\frac{dE_{12}}{dt}=(\beta_2 I_2+\beta_{02}I_{12})E_1+(\beta_1 I_1+\beta_{10}I_{12})E_2-\mu E_{12} -\varepsilon_{10}E_{12}-\varepsilon_{02}E_{12}=0 \quad (4.2d)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_1 - \varepsilon_{02} E_{12} - \rho_1 I_1 = 0 \qquad (4.2e)$$
$$\frac{dI_2}{dt} = \varepsilon_2 E_2 + \varepsilon_{02} E_{12} - \mu I_2 - \varepsilon_{10} E_{12} - \rho_2 I_2 = 0 \qquad (4.2f)$$
$$\frac{dI_{12}}{dt} = \varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_{12} - \rho_{10} I_{12} - \rho_{02} I_{12} = 0 \qquad (4.2g)$$
$$\frac{dR_1}{dt} = \rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2 - \mu R_1 - \omega_1 R_1 = 0 \qquad (4.2h)$$
$$\frac{dR_2}{dt} = \rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1 - \mu R_2 - \omega_2 R_2 = 0 \qquad (4.2i)$$

Titik setimbang dibedakan menjadi dua, yaitu titik setimbang bebas penyakit (non endemik) dan titik setimbang endemik. Dari persamaan (4.2a) – (4.2i) diperoleh satu titik setimbang non endemik dan tiga titik setimbang endemik yang terdiri dari titik setimbang endemik chlamydia, titik setimbang endemik pneumonia, dan titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia dan pneumonia.

4.2.1 Titik Setimbang Non Endemik

Titik setimbang non endemik atau titik setimbang bebas penyakit merupakan suatu kondisi saat tidak terjadi penyebaran penyakit chlamydia dan pneumonia pada suatu wilayah. Keadaan ini terjadi ketika tidak ada manusia yang terinfeksi chlamydia dan tidak ada manusia yang terinfeksi pneumonia. Oleh karena itu dapat dinyatakan bahwa populasi manusia yang terinfeksi chlamydia sama dengan nol ($I_1 = 0$), dan populasi manusia yang terinfeksi pneumonia sama dengan nol ($I_2 = 0$). Karena tidak ada populasi manusia yang terinfeksi chlamydia dan terinfeksi pneumonia, maka tidak ada populasi manusia yang menderita *co-infection* chlamydia dan pneumonia ($I_{12} = 0$), dan tidak ada populasi manusia *exposed* chlamydia ($E_1 = 0$), *exposed* pneumonia ($E_2 = 0$), maupun *exposed co-infection* chlamydia dan pneumonia ($E_{12} = 0$). Serta tidak ada pula populasi yang sembuh dari chlamydia ($R_1 = 0$) maupun sembuh dari pneumonia ($R_2 = 0$). Dengan mensubstitusi nilai $I_1 = 0, I_2 = 0, I_{12} = 0, E_1 = 0, E_2 = 0, E_{12} = 0,$ $R_1 = 0$ dan $R_2 = 0$ pada Pers. (4.2a-4.2i) dapat diperoleh

$$\mu - \mu S - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S = 0$$

$$\mu - \mu S = 0$$

$$-\mu S = -\mu$$

$$S = \frac{\mu}{\mu}$$

$$S = 1$$

Misalkan titik setimbang bebas penyakit (non endemik) dari model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia dinyatakan dalam $E_0 = (S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) = (S, 0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0)$.

Maka titik setimbang bebas penyakit (non endemik) dari model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia-pneumonia adalah $E_0 = (1{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0)$.

Selanjutnya, akan ditentukan *basic reproduction number* (R_0) sebagai parameter ambang penentuan kriteria endemik penyakit pada populasi. Penentuan R_0 menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM), yaitu dengan membangun matriks yang membangkitkan jumlah individu baru yang terinfeksi. Dari perhitungan dengan metode tersebut, diperoleh dua nilai R_0, yaitu R_0 penyebaran penyakit chlamydia yang dinotasikan dengan R_{0_1} dan R_0 penyebaran penyakit pneumonia yang dinotasikan dengan R_{0_2}. Adapun nilai R_{0_1} dan R_{0_2} adalah

$$R_{0_1} = \frac{\beta_1 \varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} \text{ dan } R_{0_2} = \frac{\beta_2 \varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}$$

Perhitungan R_0 secara lengkap dapat dilihat pada **Lampiran A**.

4.2.2 Titik Setimbang Endemik

Titik setimbang endemik yaitu suatu kondisi ketika terjadi penyebaran penyakit chlamydia atau pneumonia pada suatu wilayah. Pada model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia-pneumonia terdapat tiga titik setimbang endemik yaitu titik setimbang endemik chlamydia, titik setimbang endemik pneumonia, dan titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia.

4.2.2.1 Titik Setimbang Endemik Chlamydia

Titik setimbang endemik chlamydia yaitu suatu kondisi ketika terjadi penyebaran penyakit chlamydia pada suatu wilayah, sehingga dalam wilayah tesebut terdapat manusia yang terinfeksi chlamydia ($I_1 \neq 0$), terdapat manusia *exposed* chlamydia ($E_1 \neq 0$) dan terdapat manusia yang telah sembuh dari chlamydia ($R_1 \neq 0$), tetapi tidak terdapat manusia yang terinfeksi pneumonia ($I_2 = 0$), tidak terdapat manusia *exposed* pneumonia ($E_2 = 0$) dan tidak terdapat pula manusia yang sembuh dari pneumonia ($R_2 = 0$). Karena tidak terdapat manusia yang terinfeksi pneumonia, maka tidak terdapat manusia yang menderita *co-infection* chlamydia-pneumonia ($I_{12} = 0$) dan tidak terdapat pula manusia *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia ($E_{12} = 0$).

Dengan mensubstitusi nilai $I_2 = 0, I_{12} = 0,\quad E_2 = 0$, $R_2 = 0$ dan $E_{12} = 0$ pada Persamaan (4.2a)-(4.2i) dapat diperoleh titik setimbang endemik chlamydia dari model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia yang dinyatakan dalam

$$(E_0)_1 = (S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2)$$

$$(E_0)_1 = (S^c, E_1^c, 0, 0, I_1^c, 0, 0, R_1^c, 0)$$

dengan

$$S^c = \frac{(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \rho_1)}{\varepsilon_1 \beta_1}$$

$$E_1^c = \frac{\beta_1 \mu \varepsilon_1 - (\mu + \rho_1)(\mu + \varepsilon_1)\mu}{\beta_1 \varepsilon_1 (\mu + \varepsilon_1)}$$

$$I_1^C = \frac{\mu \varepsilon_1}{(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \rho_1)} - \frac{\mu}{\beta_1}$$

$$R_1^c = \frac{\rho_1 \mu \varepsilon_1 \beta_1 - \rho_1 \mu (\mu + \varepsilon_1)(\mu + \rho_1)}{(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \rho_1)(\mu + \omega_1)\beta_1}$$

Berdasarkan uraian diatas, karena semua parameter bernilai positif maka titik setimbang $(E_0)_1$ eksis jika $R_{0_1} > 1$. Hal ini merepresentasikan bahwa infeksi chlamydia menyebar pada wilayah tersebut. Uraian lengkap mengenai perhitungan titik setimbang endemik chlamydia dapat dilihat pada **Lampiran B**.

4.2.2.2 Titik Setimbang Endemik Pneumonia

Titik setimbang endemik pneumonia yaitu suatu kondisi ketika terjadi penyebaran penyakit pneumonia pada suatu wilayah, sehingga dalam wilayah tesebut terdapat manusia yang terinfeksi pneumonia ($I_2 \neq 0$), terdapat manusia *exposed* pneumonia ($E_2 \neq 0$) dan terdapat manusia yang telah sembuh dari pneumonia ($R_2 \neq 0$), tetapi tidak terdapat manusia yang terinfeksi chlamydia ($I_1 = 0$), tidak terdapat manusia *exposed* chlamydia ($E_1 = 0$) dan tidak terdapat pula manusia yang sembuh dari chlamydia ($R_1 = 0$). Karena tidak terdapat manusia yang terinfeksi chlamydia, maka tidak terdapat manusia yang menderita *co-infection* chlamydia-pneumonia ($I_{12} = 0$) dan tidak terdapat pula manusia *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia ($E_{12} = 0$).

Dengan mensubstitusi nilai $I_1 = 0, I_{12} = 0,\ E_1 = 0$, $R_1 = 0$ dan $E_{12} = 0$ pada Persamaan (4.2a)-(4.2i) dapat diperoleh titik setimbang endemik pneumonia dari model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia yang dinyatakan dalam

$$(E_0)_2 = (S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2)$$
$$(E_0)_2 = \left(S^p, 0, E_2^p, 0{,}0, I_2^p, 0{,}0, R_2^p\right)$$

dengan

$$S^p = \frac{(\mu + \varepsilon_2)\left(\mu + \rho_2\right)}{\varepsilon_2 \beta_2}$$

$$E_2^p = \frac{\beta_2 \mu \varepsilon_2 - \left(\mu + \rho_2\right)(\mu + \varepsilon_2)\mu}{\beta_2 \varepsilon_2 (\mu + \varepsilon_2)}$$

$$I_2^p = \frac{\mu \varepsilon_2}{(\mu + \varepsilon_2)\left(\mu + \rho_2\right)} - \frac{\mu}{\beta_2}$$

$$R_2^p = \frac{\rho_2 \mu \varepsilon_2 \beta_2 - \rho_2 \mu (\mu + \varepsilon_2)\left(\mu + \rho_2\right)}{(\mu + \varepsilon_2)\left(\mu + \rho_2\right)(\mu + \omega_2)\beta_2}$$

Berdasarkan uraian diatas, karena semua parameter bernilai positif maka titik setimbang $(E_0)_2$ eksis jika $R_{0_2} > 1$. Hal ini merepresentasikan bahwa infeksi pneumonia menyebar pada wilayah tersebut. Uraian lengkap mengenai perhitungan titik setimbang endemik pneumonia dapat dilihat pada **Lampiran C**.

4.2.2.3 Titik Setimbang Endemik *Co-infection* Chlamydia-Pneumonia

Titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia yaitu suatu kondisi ketika terjadi penyebaran penyakit chlamydia dan pneumonia pada suatu wilayah yang menyebabkan timbulnya *co-infection* chlamydia-pneumonia. Oleh karena itu dalam wilayah tersebut terdapat manusia yang terinfeksi chlamydia, manusia yang terinfeksi pneumonia, manusia yang terinfeksi chlamydia dan pneumonia $(I_1 \neq 0, I_2 \neq 0, I_{12} \neq 0)$, maka terdapat manusia *exposed* chlamydia, *exposed* pneumonia, *exposed co-infection* chlamydia-pneumonia $(E_1 \neq 0, E_2 \neq$

$0, E_{12} \neq 0)$ serta terdapat manusia yang sembuh dari chlamydia $(R_1 \neq 0)$ dan manusia yang sembuh dari pneumonia $(R_2 \neq 0)$.

Dengan mensubstitusi nilai $I_1 \neq 0, I_2 \neq 0, I_{12} \neq 0, E_1 \neq 0, E_2 \neq 0, E_{12} \neq 0, R_1 \neq 0$ dan $R_2 \neq 0$ pada Persamaan (4.2a)-(4.2i) dapat diperoleh titik setimbang endemik pneumonia dari model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia yang dinyatakan dalam
$(E_0)_3 = (S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2)$
$(E_0)_3 = \left(S^{cp}, E_1^{cp}, E_2^{cp}, E_{12}^{cp}, I_1^{cp}, I_2^{cp}, I_{12}^{cp}, R_1^{cp}, R_2^{cp}\right)$

dengan

$$S^{cp} = \frac{\mu}{(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12} + \beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12} + \mu)}$$

$$E_1^{cp} = \frac{(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12}) S}{(\mu + \varepsilon_1 + \beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})}$$

$$E_2^{cp} = \frac{(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12}) S}{(\mu + \varepsilon_2 + \beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})}$$

$$E_{12}^{cp} = \frac{(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12}) E_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12}) E_2}{(\mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02})}$$

$$I_1^{cp} = \frac{\varepsilon_1 E_1 + (\varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}) E_{12}}{(\mu + \rho_1)}$$

$$I_2^{cp} = \frac{\varepsilon_2 E_2 + (\varepsilon_{02} - \varepsilon_{10}) E_{12}}{(\mu + \rho_2)}$$

$$I_{12}^{cp} = \frac{\varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12}}{(\mu + \rho_{10} + \rho_{02})}$$

$$R_1^{cp} = \frac{\rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2}{(\mu + \omega_1)}$$

$$R_2^{cp} = \frac{\rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1}{(\mu + \omega_2)}$$

Berdasarkan uraian diatas, karena semua parameter bernilai positif maka titik setimbang $(E_0)_3$ eksis jika $R_{0_1} > 1$ dan $R_{0_2} > 1$. Hal ini merepresentasikan bahwa infeksi chlamydia, infeksi pneumonia menyebar pada wilayah tersebut, sehingga *co-infection* chlamydia-pneumonia juga menyebar pada wilayah tersebut. Uraian lengkap mengenai perhitungan titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia dapat dilihat pada **Lampiran D**.

4.3 Analisis Kestabilan pada Titik Setimbang

Model matematika penyebaran penyakit chlamydia dan pneumonia merupakan sistem persamaan differensial autonomous yang tak linear. Oleh karena itu, untuk mendapatkan kestabilan lokal dari titik setimbang non endemik (E_0), titik setimbang endemik chlamydia $(E_0)_1$, titik setimbang endemik pneumonia $(E_0)_2$, dan titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia $(E_0)_3$, perlu dilakukan linearisasi model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia-pneumonia menggunakan mariks Jacobian. Matriks Jacobian merupakan hampiran linear dari sistem tak linear dari model tersebut. Kestabilan pada keempat titik setimbang bersifat lokal karena berlaku disekitar titik setimbang.

Misalkan sistem autonomous model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia-pneumonia didefinisikan sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \mu S - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S$$
$$= f_1(S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) \qquad (4.3a)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - \mu E_1 - \varepsilon_1 E_1 - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1$$
$$= f_2(S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) \qquad (4.3b)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S - \mu E_2 - \varepsilon_2 E_2 - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2$$

$$= f_3(S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) \quad (4.3c)$$

$$\frac{dE_{12}}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 - \mu E_{12}$$
$$-\varepsilon_{10} E_{12} - \varepsilon_{02} E_{12}$$
$$= f_4(S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) \quad (4.3d)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_1 - \varepsilon_{02} E_{12} - \rho_1 I_1$$
$$= f_5(S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) \quad (4.3e)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \varepsilon_2 E_2 + \varepsilon_{02} E_{12} - \mu I_2 - \varepsilon_{10} E_{12} - \rho_2 I_2$$
$$= f_6(S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) \quad (4.3f)$$

$$\frac{dI_{12}}{dt} = \varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_{12} - \rho_{10} I_{12} - \rho_{02} I_{12}$$
$$= f_7(S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) \quad (4.3g)$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2 - \mu R_1 - \omega_1 R_1$$
$$= f_8(S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) \quad (4.3h)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1 - \mu R_2 - \omega_2 R_2$$
$$= f_9(S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) \quad (4.3i)$$

Kemudian dilakukan linearisasi dengan matrik Jacobian.

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E_1} & \frac{\partial f_1}{\partial E_2} & \frac{\partial f_1}{\partial E_{12}} & \frac{\partial f_1}{\partial I_1} & \frac{\partial f_1}{\partial I_2} & \frac{\partial f_1}{\partial I_{12}} & \frac{\partial f_1}{\partial R_1} & \frac{\partial f_1}{\partial R_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E_1} & \frac{\partial f_2}{\partial E_2} & \frac{\partial f_2}{\partial E_{12}} & \frac{\partial f_2}{\partial I_1} & \frac{\partial f_2}{\partial I_2} & \frac{\partial f_2}{\partial I_{12}} & \frac{\partial f_2}{\partial R_1} & \frac{\partial f_2}{\partial R_2}\\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E_1} & \frac{\partial f_3}{\partial E_2} & \frac{\partial f_3}{\partial E_{12}} & \frac{\partial f_3}{\partial I_1} & \frac{\partial f_3}{\partial I_2} & \frac{\partial f_3}{\partial I_{12}} & \frac{\partial f_3}{\partial R_1} & \frac{\partial f_3}{\partial R_2}\\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E_1} & \frac{\partial f_4}{\partial E_2} & \frac{\partial f_4}{\partial E_{12}} & \frac{\partial f_4}{\partial I_1} & \frac{\partial f_4}{\partial I_2} & \frac{\partial f_4}{\partial I_{12}} & \frac{\partial f_4}{\partial R_1} & \frac{\partial f_4}{\partial R_2}\\ \frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial E_1} & \frac{\partial f_5}{\partial E_2} & \frac{\partial f_5}{\partial E_{12}} & \frac{\partial f_5}{\partial I_1} & \frac{\partial f_5}{\partial I_2} & \frac{\partial f_5}{\partial I_{12}} & \frac{\partial f_5}{\partial R_1} & \frac{\partial f_5}{\partial R_2}\\ \frac{\partial f_6}{\partial S} & \frac{\partial f_6}{\partial E_1} & \frac{\partial f_6}{\partial E_2} & \frac{\partial f_6}{\partial E_{12}} & \frac{\partial f_6}{\partial I_1} & \frac{\partial f_6}{\partial I_2} & \frac{\partial f_6}{\partial I_{12}} & \frac{\partial f_6}{\partial R_1} & \frac{\partial f_6}{\partial R_2}\\ \frac{\partial f_7}{\partial S} & \frac{\partial f_7}{\partial E_1} & \frac{\partial f_7}{\partial E_2} & \frac{\partial f_7}{\partial E_{12}} & \frac{\partial f_7}{\partial I_1} & \frac{\partial f_7}{\partial I_2} & \frac{\partial f_7}{\partial I_{12}} & \frac{\partial f_7}{\partial R_1} & \frac{\partial f_7}{\partial R_2}\\ \frac{\partial f_8}{\partial S} & \frac{\partial f_8}{\partial E_1} & \frac{\partial f_8}{\partial E_2} & \frac{\partial f_8}{\partial E_{12}} & \frac{\partial f_8}{\partial I_1} & \frac{\partial f_8}{\partial I_2} & \frac{\partial f_8}{\partial I_{12}} & \frac{\partial f_8}{\partial R_1} & \frac{\partial f_8}{\partial R_2}\\ \frac{\partial f_9}{\partial S} & \frac{\partial f_9}{\partial E_1} & \frac{\partial f_9}{\partial E_2} & \frac{\partial f_9}{\partial E_{12}} & \frac{\partial f_9}{\partial I_1} & \frac{\partial f_9}{\partial I_2} & \frac{\partial f_9}{\partial I_{12}} & \frac{\partial f_9}{\partial R_1} & \frac{\partial f_9}{\partial R_2}\end{pmatrix}$$

Dari sistem persamaan (4.3a)-(4.3i), diperoleh matrik Jacobian

$$J=\begin{pmatrix}-a_1-a_2-\mu & 0 & 0 & 0 & -a_8 & -a_{11} & -a_{14}-a_{15} & 0 & 0\\ a_1 & -a_3-a_2 & 0 & 0 & a_8 & -a_{12} & a_{14}-a_{16} & 0 & 0\\ a_2 & 0 & -a_4-a_1 & 0 & -a_9 & a_{11} & a_{15}-a_{17} & 0 & 0\\ 0 & a_2 & a_1 & -a_5 & a_9 & a_{12} & a_{16}-a_{17} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & a_6 & -a_{10} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & -a_6 & 0 & -a_{13} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_7 & 0 & 0 & -a_{18} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_{10} & -a_{19} & \omega_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & \rho_{02} & \omega_1 & -a_{20}\end{pmatrix}$$

dengan

$a_1=\beta_1 I_1+\beta_{10}I_{12}$ $\quad$ $a_8=\beta_1 S$ $\quad$ $a_{15}=\beta_{02}S$

$a_2=\beta_2 I_2+\beta_{02}I_{12}$ $\quad$ $a_9=\beta_1 E_2$ $\quad$ $a_{16}=\beta_{02}E_1$

$a_3 = \mu + \varepsilon_1$ $\quad a_{10} = \mu + \rho_1$ $\quad a_{17} = \beta_{10} E_2$

$a_4 = \mu + \varepsilon_2$ $\quad a_{11} = \beta_2 S$ $\quad a_{18} = \mu + \rho_{10} + \rho_{02}$

$a_5 = \mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02}$ $\quad a_{12} = \beta_2 E_1$ $\quad a_{19} = \mu + \omega_1$

$a_6 = \varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}$ $\quad a_{13} = \mu + \rho_2$ $\quad a_{20} = \mu + \omega_2$

$a_7 = \varepsilon_{02} + \varepsilon_{10}$ $\quad a_{14} = \beta_{10} S$

Berikutnya akan dilakukan analisis kestabilan lokal dari titik setimbang non endemik (E_0), titik setimbang endemik chlamydia $(E_0)_1$, titik setimbang endemik pneumonia $(E_0)_2$, dan titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia $(E_0)_3$.

4.3.1 Analisis Kestabilan pada Titik Setimbang Non Endemik

Langkah pertama dalam menentukan kestabilan titik setimbang non endemik adalah mengevaluasi nilai titik setimbang $E_0 = (1,0,0,0,0,0,0,0,0)$ pada matrik Jacobian, sehingga diperoleh

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_{10} - \beta_{02} & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & \beta_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & \beta_2 & \beta_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & b_4 & -b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & -b_4 & 0 & -b_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & -b_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_{10} & -b_9 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & \rho_{02} & \omega_1 & -b_{10} \end{pmatrix}$$

dengan

$b_1 = \mu + \varepsilon_1$ $\quad b_6 = \mu + \rho_2$

$b_2 = \mu + \varepsilon_2$ $\quad b_7 = \mu + \rho_2$

$b_3 = \mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02}$ $\qquad$ $b_8 = \mu + \rho_{10} + \rho_{02}$

$b_4 = \varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}$ $\qquad$ $b_9 = \mu + \omega_1$

$b_5 = \varepsilon_{02} + \varepsilon_{10}$ $\qquad$ $b_{10} = \mu + \omega_2$

Berdasarkan matriks J_{E_0} dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $\det\left(\lambda I - J_{E_0}\right) = 0$, yaitu

$$(\lambda + \mu)(\lambda + b_3)(\lambda + b_8)[\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4][\lambda^2 + B_1\lambda + B_2] = 0 \qquad (4.4)$$

dengan

$A_1 = b_1 + b_6 + b_2 + b_7$

$A_2 = b_2b_1 + b_7b_1 + b_2b_6 + b_7b_6 + b_1b_6 + b_2b_7 - \varepsilon_2\beta_2 - \varepsilon_1\beta_1$

$A_3 = b_1b_6b_2 + b_1b_6b_7 + b_2b_7b_1 - \varepsilon_2\beta_2b_1 + b_2b_7b_6 - \varepsilon_2\beta_2b_6$

$\quad -\varepsilon_1\beta_1b_2 - \varepsilon_1\beta_1b_7$

$A_4 = b_2b_7b_1b_6 - \varepsilon_2\beta_2b_1b_6 - \varepsilon_1\beta_1b_2b_7 + \varepsilon_1\varepsilon_2\beta_1\beta_2$

$B_1 = b_9 + b_{10}$

$B_2 = b_9b_{10} - \omega_2\omega_1$

Uraian lengkap mengenai proses perhitungan untuk mendapatkan persamaan karakteristik dari titik setimbang non endemik (E_0), bisa dilihat pada **Lampiran E**.

Pada persamaan karakteristik (4.4) diperoleh nilai eigen dari matriks J_{E_0} adalah $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -b_3$, $\lambda_3 = -b_8$ dan sisanya adalah akar-akar dari persamaan

$$[\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4][\lambda^2 + B_1\lambda + B_2] = 0 \qquad (4.5)$$

Persamaan karakteristik (4.5) dapat ditulis sebagai

$$\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0 \quad (4.5a)$$

$$\lambda^2 + B_1\lambda + B_2 = 0 \quad (4.5b)$$

Titik setimbang non endemik stabil asimtotis jika hanya jika Persamaan (4.4) mempunyai akar-akar yang negatif, sesuai dengan ***Teorema 2.2***. Dari persamaan karakteristik tersebut terlihat bahwa nilai eigen $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ karena semua parameter bernilai positif. Selanjutnya ditentukan syarat untuk Persamaan (4.5) agar memiliki akar-akar negatif dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, Persamaan (4.5) akan memiliki akar-akar yang negatif jika dan hanya jika

$\leftrightarrow A_1, A_2, A_3, A_4 > 0$

$\leftrightarrow A_1A_2 > A_3$

$\leftrightarrow (A_1A_2 - A_3)A_3 > {A_1}^2A_4$

Persamaan (4.5b) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika $B_1, B_2 > 0$.

Berdasarkan uraian diatas, kondisi tersebut merepresentasikan bahwa jumlah matinya virus chlamydia maupun pneumonia lebih dari jumlah infeksi chlamydia, pneumonia maupun *co-infection* chlamydia-pneumonia, oleh karena itu infeksi tidak akan meningkat dan sistem akan menjadi titik setimbang bebas penyakit.

Uraian lengkap mengenai proses perhitungan kriteria Routh-Hurwitz persamaan karakteristik dari titik setimbang non endemik (E_0) bisa dilihat pada **Lampiran F**.

4.3.2 Analisis Kestabilan pada Titik Setimbang Endemik Chlamydia

Langkah pertama dalam menentukan kestabilan titik setimbang endemik chlamydia adalah mengevaluasi nilai titik setimbang $(E_0)_1 = (S^c, E_1^c, 0{,}0, I_1^c, 0{,}0, R_1^c, 0)$ pada matrik Jacobian, sehingga diperoleh

$$J_{(E_0)_1} = \begin{pmatrix} -c_1-\mu & 0 & 0 & 0 & -c_7 & -c_9 & -c_{12}-c_{13} & 0 & 0 \\ c_1 & -c_2 & 0 & 0 & c_7 & -c_{10} & c_{12}-c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3-c_1 & 0 & 0 & c_9 & c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & -c_4 & 0 & c_{10} & c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & c_5 & -c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & -c_5 & 0 & -c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 & -c_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_{10} & -c_{16} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & \rho_{02} & \omega_1 & -c_{17} \end{pmatrix}$$

dengan

$c_1 = \beta_1 I_1^c$

$c_2 = \mu + \varepsilon_1$

$c_3 = \mu + \varepsilon_2$

$c_4 = \mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02}$

$c_5 = \varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}$

$c_6 = \varepsilon_{02} + \varepsilon_{10}$

$c_7 = \beta_1 S^c$

$c_8 = \mu + \rho_1$

$c_9 = \beta_2 S^c$

$c_{10} = \beta_2 E_1^c$

$c_{11} = \mu + \rho_2$

$c_{12} = \beta_{10} S^c$

$c_{13} = \beta_{02} S^c$

$c_{14} = \beta_{02} E_1^c$

$c_{15} = \mu + \rho_{10} + \rho_{02}$

$c_{16} = \mu + \omega_1$

$c_{17} = \mu + \omega_2$

Berdasarkan matriks $J_{(E_0)_1}$ dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $\det\left(\lambda I - J_{(E_0)_1}\right) = 0$, yaitu

$$[\lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3][\lambda^4 + D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_3\lambda + D_4][\lambda^2 + F_1\lambda + F_2] = 0 \qquad (4.6)$$

dengan $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, D_4, F_1$ dan F_2 serta uraian lengkap mengenai proses perhitungan untuk mendapatkan persamaan karakteristik dari titik setimbang endemik chlamydia $(E_0)_1$, bisa dilihat pada **Lampiran G**.

Persamaan karakteristik (4.6) dapat ditulis sebagai

$$\lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3 = 0 \quad (4.6a)$$

$$\lambda^4 + D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_3\lambda + D_4 = 0 \quad (4.6b)$$

$$\lambda^2 + F_1\lambda + F_2 = 0 \quad (4.6c)$$

Titik setimbang endemik chlamydia stabil asimtotis jika hanya jika Persamaan (4.6) mempunyai akar-akar yang negatif, sesuai dengan ***Teorema 2.2***. Selanjutnya ditentukan syarat untuk Persamaan (4.6) agar memiliki akar-akar negatif dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, Persamaan (4.6a) akan memiliki akar-akar yang negatif jika dan hanya jika $C_1, C_2, C_3 > 0$ dan $C_1C_2 > C_3$

Persamaan (4.6b) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika

$\leftrightarrow D_1, D_2, D_3, D_4 > 0$

$\leftrightarrow D_1D_2 > D_3$

$\leftrightarrow (D_1D_2 - D_3)D_3 - {D_1}^2D_4$

Persamaan (4.6c) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika $F_1, F_2 > 0$.

Berdasarkan uraian diatas, kondisi tersebut merepresentasikan bahwa jumlah matinya virus kurang dari jumlah infeksi, oleh karena itu infeksi akan berlanjut di zona endemik. Dalam hal ini direpresentasikan bahwa jumlah matinya virus chlamydia kurang dari jumlah infeksi chlamydia, oleh karena itu infeksi akan berlanjut dan terus meningkat. Sehingga sistem akan menjadi titik setimbang endemik chlamydia.

Uraian lengkap mengenai proses perhitungan kriteria Routh-Hurwitz persamaan karakteristik dari titik setimbang endemik chlamydia $(E_0)_1$ bisa dilihat pada **Lampiran H**.

4.3.3 Analisis Kestabilan pada Titik Setimbang Endemik Pneumonia

Langkah pertama dalam menentukan kestabilan titik setimbang endemik pneumonia adalah mengevaluasi nilai titik setimbang $(E_0)_2 = \left(S^p, 0, E_2^p, 0,0, I_2^p, 0,0, R_2^p\right)$ pada matrik Jacobian, sehingga diperoleh

$$J_{(E_0)_2} = \begin{pmatrix} -d_1-\mu & 0 & 0 & 0 & -d_7 & -d_{10} & -d_{12}-d_{13} & 0 & 0 \\ 0 & -d_2-d_1 & 0 & 0 & d_7 & 0 & d_{12} & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & -d_3 & 0 & -d_8 & d_{10} & d_{13}-d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & -d_4 & d_8 & 0 & -d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & d_5 & -d_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & -d_5 & 0 & -d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_6 & 0 & 0 & -d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_{10} & -d_{16} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & \rho_{02} & \omega_1 & -d_{17} \end{pmatrix}$$

dengan

$d_1 = \beta_1 I_1^p$

$d_2 = \mu + \varepsilon_1$

$d_3 = \mu + \varepsilon_2$

$d_4 = \mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02}$

$d_5 = \varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}$

$d_6 = \varepsilon_{02} + \varepsilon_{10}$

$d_7 = \beta_1 S^p$

$d_8 = \beta_1 E_2^p$

$d_9 = \mu + \rho_1$

$d_{10} = \beta_2 S^p$

$d_{11} = \mu + \rho_2$

$d_{12} = \beta_{10} S^p$

$d_{13} = \beta_{02} S^p$

$d_{14} = \beta_{10} E_2^p$

$d_{15} = \mu + \rho_{10} + \rho_{02}$

$d_{16} = \mu + \omega_1$

$d_{17} = \mu + \omega_2$

Berdasarkan matriks $J_{(E_0)_2}$ dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $\det\left(\lambda I - J_{(E_0)_2}\right) = 0$, yaitu

$$[\lambda^3 + G_1\lambda^2 + G_2\lambda + G_3][\lambda^4 + H_1\lambda^3 + H_2\lambda^2 + H_3\lambda + H_4][\lambda^2 + K_1\lambda + K_2] = 0 \qquad (4.7)$$

dengan $G_1, G_2, G_3, H_1, H_2, H_3, H_4, K_1$ dan K_2 serta uraian lengkap mengenai proses perhitungan untuk mendapatkan persamaan karakteristik dari titik setimbang endemik pneumonia $(E_0)_2$, bisa dilihat pada **Lampiran I**.

Persamaan karakteristik (4.7) dapat ditulis sebagai

$$\lambda^3 + G_1\lambda^2 + G_2\lambda + G_3 = 0 \quad (4.7a)$$

$$\lambda^4 + H_1\lambda^3 + H_2\lambda^2 + H_3\lambda + H_4 = 0 \quad (4.7b)$$

$$\lambda^2 + K_1\lambda + K_2 = 0 \quad (4.7c)$$

Titik setimbang endemik pneumonia stabil asimtotis jika dan hanya jika Persamaan (4.7) mempunyai akar-akar yang negatif, sesuai dengan ***Teorema 2.2***. Selanjutnya ditentukan syarat untuk Persamaan (4.7) agar memiliki akar-akar negatif dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, Persamaan (4.7a) akan memiliki akar-akar yang negatif jika dan hanya jika $G_1, G_2, G_3 > 0$ dan $G_1G_2 > G_3$

Persamaan (4.7b) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika

$\leftrightarrow H_1, H_2, H_3, H_4 > 0$

$\leftrightarrow H_1H_2 > H_3$

$\leftrightarrow (H_1H_2 - H_3)H_3 - {H_1}^2H_4$

Persamaan (4.7c) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika $K_1, K_2 > 0$.

Berdasarkan uraian diatas, kondisi tersebut merepresentasikan bahwa jumlah matinya virus kurang dari jumlah infeksi, oleh karena itu infeksi akan berlanjut di zona endemik. Dalam hal ini direpresentasikan bahwa jumlah matinya virus pneumonia kurang dari jumlah infeksi pneumonia, oleh karena itu infeksi akan berlanjut dan terus meningkat. Sehingga sistem akan menjadi titik setimbang endemik pneumonia.

Uraian lengkap mengenai proses perhitungan kriteria Routh-Hurwitz persamaan karakteristik dari titik setimbang endemik pneumonia $(E_0)_2$ bisa dilihat pada **Lampiran J**.

4.3.4 Analisis Kestabilan pada Titik Setimbang Endemik *Co-infection* Chlamydia-Pneumonia

Langkah pertama dalam menentukan kestabilan titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia adalah mengevaluasi nilai titik setimbang $(E_0)_3 = \left(S^{cp}, E_1^{cp}, E_2^{cp}, E_{12}^{cp}, I_1^{cp}, I_2^{cp}, I_{12}^{cp}, R_1^{cp}, R_2^{cp}\right)$ pada matrik Jacobian, sehingga diperoleh

$$J_{(E_0)_3} = \begin{pmatrix} -e_1 - e_2 - \mu & 0 & 0 & 0 & -e_8 & -e_{11} & -e_{14} - e_{15} & 0 & 0 \\ e_1 & -e_3 - e_2 & 0 & 0 & e_8 & -e_{12} & e_{14} - e_{16} & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & -e_4 - e_1 & 0 & -e_9 & e_{11} & e_{15} - e_{17} & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & e_1 & -e_5 & e_9 & e_{12} & e_{16} - e_{17} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & e_6 & -e_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & -e_6 & 0 & -e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_7 & 0 & 0 & -e_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_{10} & -e_{19} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & \rho_{02} & \omega_1 & -e_{20} \end{pmatrix}$$

dengan

$e_1 = \beta_1 I_1^{cp} + \beta_{10} I_{12}^{cp}$ $\quad$ $e_{11} = \beta_2 S^{cp}$

$e_2 = \beta_2 I_2^{cp} + \beta_{02} I_{12}^{cp}$ $\quad$ $e_{12} = \beta_2 E_1^{cp}$

$e_3 = \mu + \varepsilon_1$ $\quad$ $e_{13} = \mu + \rho_2$

$e_4 = \mu + \varepsilon_2$ $\quad$ $e_{14} = \beta_{10} S^{cp}$

$e_5 = \mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02}$ $\quad$ $e_{15} = \beta_{02} S^{cp}$

$e_6 = \varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}$ $\quad$ $e_{16} = \beta_{02} E_1^{cp}$

$e_7 = \varepsilon_{02} + \varepsilon_{10}$ $\quad$ $e_{17} = \beta_{10} E_2^{cp}$

$e_8 = \beta_1 S^{cp}$ $\quad$ $e_{18} = \mu + \rho_{10} + \rho_{02}$

$e_9 = \beta_1 E_2^{cp}$ $\quad$ $e_{19} = \mu + \omega_1$

$e_{10} = \mu + \rho_1$ $\quad$ $e_{20} = \mu + \omega_2$

Berdasarkan matriks $J_{(E_0)_3}$ dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $\det\left(\lambda I - J_{(E_0)_3}\right) = 0$, yaitu

$$[\lambda^7 + L_1\lambda^6 + L_2\lambda^5 + L_3\lambda^4 + L_4\lambda^3 + L_5\lambda^2 + L_6\lambda + L_7][\lambda^2 + M_1\lambda + M_2] = 0 \quad (4.8)$$

dengan $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, M_1$ dan M_2 serta uraian lengkap mengenai proses perhitungan untuk mendapatkan persamaan karakteristik dari titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia $(E_0)_3$, bisa dilihat pada **Lampiran K**.
Persamaan karakteristik (4.8) dapat ditulis sebagai

$$\lambda^7 + L_1\lambda^6 + L_2\lambda^5 + L_3\lambda^4 + L_4\lambda^3 + L_5\lambda^2 + L_6\lambda + L_7 = 0 \quad (4.8a)$$

$$\lambda^2 + M_1\lambda + M_2 = 0 \quad (4.8b)$$

Titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia stabil asimtotis jika hanya jika Persamaan (4.8) mempunyai akar-akar yang negatif, sesuai dengan ***Teorema 2.2***. Selanjutnya ditentukan syarat untuk Persamaan (4.8) agar memiliki akar-akar negatif dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, Persamaan (4.8a) akan memiliki akar-akar yang negatif jika dan hanya jika

$\leftrightarrow L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7 > 0$

$\leftrightarrow (L_1L_2 - L_3)L_3 > L_1(L_1L_4 - L_5).$

$$\leftrightarrow \left(\frac{L_1L_4 - L_5}{L_1}\right) > \left(\frac{L_1L_2 - L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_5 - L_1(L_1L_6 - L_7)}{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}\right)$$

Persamaan (4.8b) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika $M_1, M_2 > 0$.

Berdasarkan uraian diatas, kondisi tersebut merepresentasikan bahwa jumlah matinya virus kurang dari jumlah infeksi, oleh karena itu infeksi akan berlanjut di zona endemik. Dalam hal ini direpresentasikan bahwa jumlah matinya virus chlamydia maupun virus pneumonia kurang dari jumlah infeksi chlamydia maupun pneumonia, oleh karena itu infeksi akan berlanjut dan terus meningkat. Sehingga sistem akan menjadi titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia.

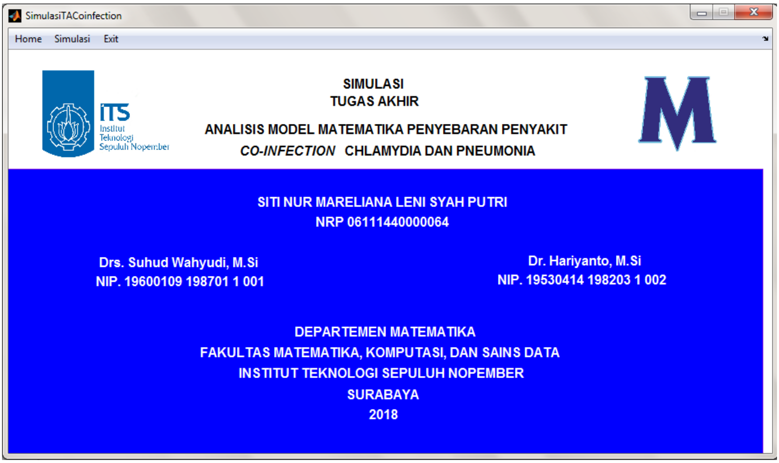
Uraian lengkap mengenai proses perhitungan kriteria Routh-Hurwitz persamaan karakteristik dari titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia $(E_0)_2$ bisa dilihat pada **Lampiran L**.

4.4 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini akan dilakukan simulasi model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia dengan menggunakan *software* MATLAB R2013a.

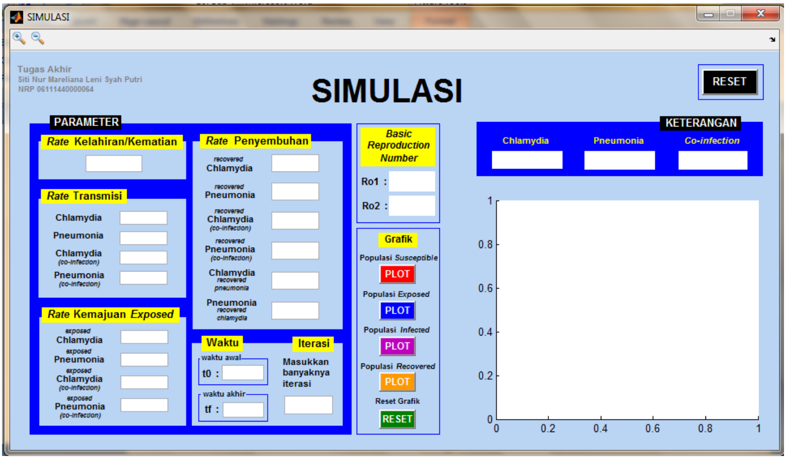
4.4.1 Implementasi Antarmuka

Impementasi antarmuka digunakan untuk mempermudah penggunaan program, implementasi antarmuka terdiri dari 3 menu yaitu menu "Home", "Simulasi" dan "Exit".



Gambar 4.2 Home GUIDE Simulasi

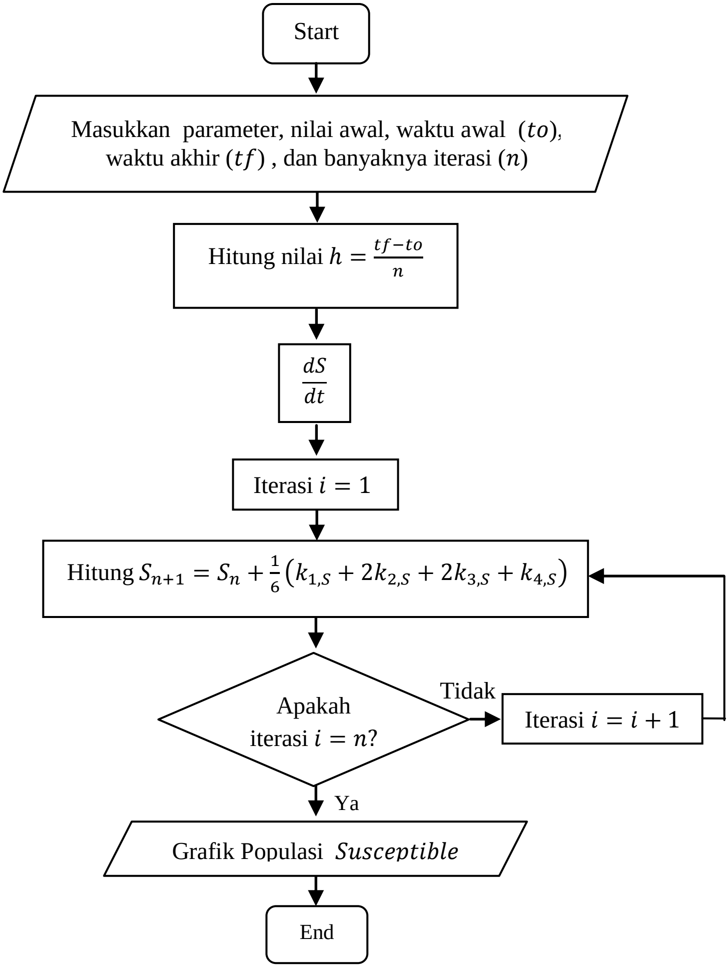
Simulasi numerik dilakukan pada menu "Simulasi". Menu "Simulasi" ini terdiri dari 7 *pushbutton* yaitu 5 *pushbutton* "Plot" dan 2 *pushbutton* "Reset". 5 *pushbutton* "Plot" tersebut terdiri dari *pushbutton* "Plot" warna merah yang digunakan untuk menampilkan grafik populasi *susceptible*, *pushbutton* “Plot” warna biru yang digunakan untuk menampilkan grafik populasi *exposed*, *pushbutton* “Plot” warna ungu yang digunakan untuk menampilkan grafik populasi *infected*, *pushbutton* “Plot” warna orange yang digunakan untuk menampilkan grafik populasi *recovered*. 2 *pushbutton* “Reset” tersebut terdiri dari *pushbutton* “Reset” warna hijau yang digunakan untuk menghapus grafik. Sedangkan *pushbutton* “Reset” warna hitam digunakan untuk menghapus hasil *input*-an parameter, grafik, nilai *basic reproduction number* serta keterangan. Kemudian menu “Exit” yang digunakan untuk keluar dari program.



Gambar 4.3 GUIDE Simulasi

4.4.2 Flow Chart

Flow Chart merupakan diagram yang digunakan untuk menjelaskan proses berjalannya program dari sistem yang disimulasikan. Simulasi ini dilakukan dengan memberi nilai parameter $\mu, \beta_1, \beta_2, \beta_{10}, \beta_{02}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{10}, \varepsilon_{02}, \rho_1, \rho_2, \rho_{10}, \rho_{02}, \omega_1, \omega_2$ dan nilai awal untuk masing-masing subpopulasi $S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1$ dan R_2 serta waktu awal, waktu akhir dan banyaknya iterasi yang diinginkan. Kemudian nilai tersebut dihitung menggunakan metode Runge-Kutta sesuai rumus pada **subbab 2.7**. *Flow Chart* simulasi numerik pada model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia ditunjukkan oleh **Gambar 4.4**.



Gambar 4.4 *Flow Chart* Simulasi

4.4.3 Hasil Simulasi

Simulasi dilakukan dalam 4 percobaan, dengan nilai awal untuk setiap percobaan adalah $S = 0.25$, $E_1 = 0.18$, $E_2 = 0.15$, $E_{12} = 0.12$, $I_1 = 0.1$, $I_2 = 0.09$, $I_{12} = 0.06$, $R_1 = 0.03$, dan $R_2 = 0.02$.

4.4.3.1 Percobaan Pertama

Percobaan pertama dilakukan saat $t_0 = 0$ dan $t_f = 4000$ hari. Nilai parameter yang digunakan untuk percobaan pertama tertera pada **Tabel 4.3.**

Tabel 4.3 Nilai Parameter untuk Percobaan Pertama

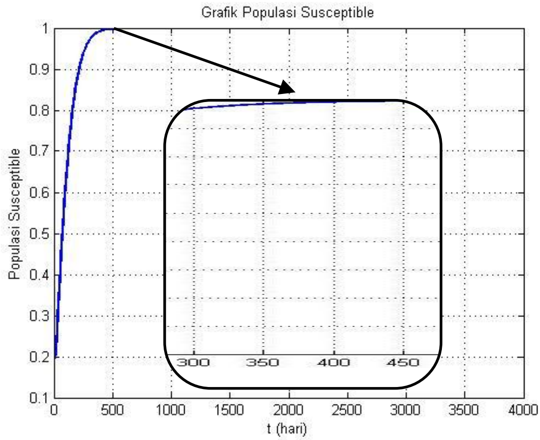
Parameter	Nilai Parameter	Sumber
μ	0.02	Daozhao dkk (2016)
β_1	0.9	Daozhao dkk (2016)
β_2	0.2	Daozhao dkk (2016)
β_{10}	0.3	Daozhao dkk (2016)
β_{02}	0.05	Daozhao dkk (2016)
ε_1	0.0001	Sharomi dkk (2011)
ε_2	0.00274	Jacob dkk (2013)
ε_{10}	0.003	Asumsi
ε_{02}	0.003	Asumsi
ρ_1	0.03	Sharomi dkk (2011)
ρ_2	0.0476	Jacob dkk (2013)
ρ_{10}	0.027	Asumsi
ρ_{02}	0.03	Asumsi
ω_1	0.025	Asumsi
ω_2	0.0238	Asumsi

Dengan menggunakan nilai parameter pada **Tabel 4.3**, diperoleh

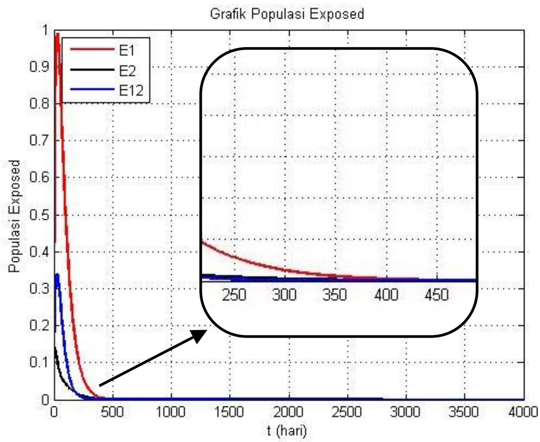
$$R_{0_1} = \frac{\beta_1 \varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} = 0.0896 < 1$$

$$R_{0_2} = \frac{\beta_2 \varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)} = 0.3565 < 1.$$

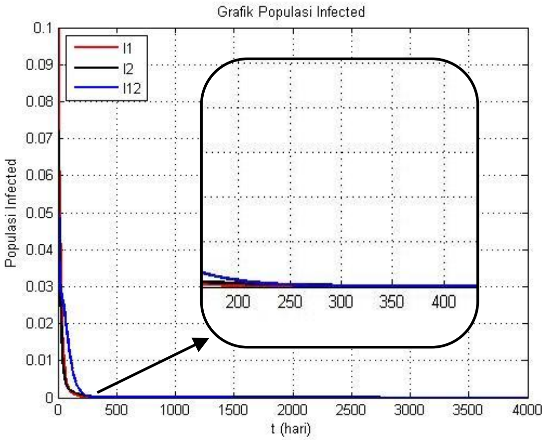
Berikut ini adalah grafik hasil percobaan pertama.



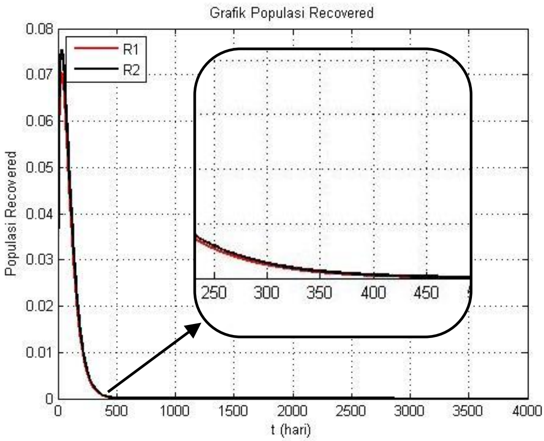
Gambar 4.5 Grafik Populasi *Susceptible* Percobaan Pertama



Gambar 4.6 Grafik Populasi *Exposed* Percobaan Pertama



Gambar 4.7 Grafik Populasi *Infected* Percobaan Pertama



Gambar 4.8 Grafik Populasi *Recovered* Percobaan Pertama

Pada **Gambar 4.5**, diperoleh hasil bahwa populasi *susceptible* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 400$

hari. Pada **Gambar 4.6**, diperoleh hasil bahwa populasi *exposed* chlamydia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 400$ hari, populasi *exposed* pneumonia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 300$ hari dan populasi *exposed co-infection* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 250$ hari. Pada **Gambar 4.7**, diperoleh hasil bahwa populasi *infected* chlamydia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 200$ hari, populasi *infected* pneumonia dan populasi *infected co-infection* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 250$ hari. Pada **Gambar 4.8**, diperoleh hasil bahwa populasi *recovered* chlamydia dan populasi *recovered* pneumonia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 450$ hari.

Pada percobaan pertama juga diperoleh hasil $R_{0_1} < 1$ dan $R_{0_2} < 1$. Hal ini merepresentasikan bahwa $R_{0_1} < 1$ merupakan kondisi dimana setiap individu yang terinfeksi chlamydia dapat menularkan penyakit chlamydia rata-rata kurang dari satu penderita baru, atau dengan kata lain tidak terjadi penyebaran penyakit chlamydia. Sedangkan $R_{0_2} < 1$ merupakan kondisi dimana setiap individu yang terinfeksi pneumonia dapat menularkan penyakit pneumonia rata-rata kurang dari satu penderita baru atau dengan kata lain tidak terdapat penyebaran penyakit pneumonia.

4.4.3.2 Percobaan Kedua

Percobaan kedua dilakukan saat $t_0 = 0$ dan $t_f = 4000$ hari. Nilai parameter yang digunakan untuk percobaan kedua tertera pada **Tabel 4.4.**

Tabel 4.4 Nilai Parameter untuk Percobaan Kedua

Parameter	Nilai Parameter	Sumber
μ	0.02	Daozhao dkk (2016)
β_1	0.9	Daozhao dkk (2016)
β_2	0.2	Daozhao dkk (2016)
β_{10}	0.2	Daozhao dkk (2016)

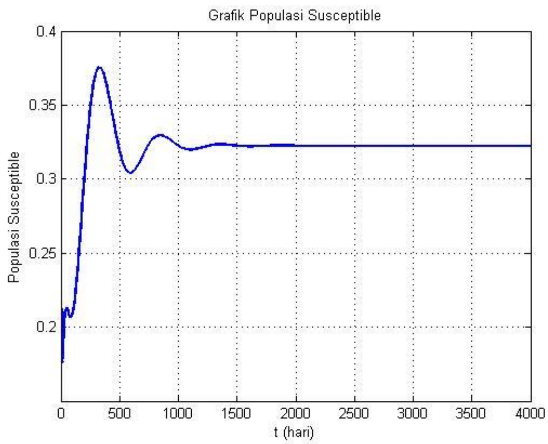
β_{02}	0.6	Daozhao dkk (2016)
ε_1	0.003	Asumsi
ε_2	0.00274	Jacob dkk (2013)
ε_{10}	0.003	Asumsi
ε_{02}	0.003	Asumsi
ρ_1	0.050	Asumsi
ρ_2	0.0475	Jacob dkk (2013)
ρ_{10}	0.03	Asumsi
ρ_{02}	0.027	Asumsi
ω_1	0.025	Asumsi
ω_2	0.0238	Asumsi

Dengan menggunakan nilai parameter pada **Tabel 4.4**, diperoleh

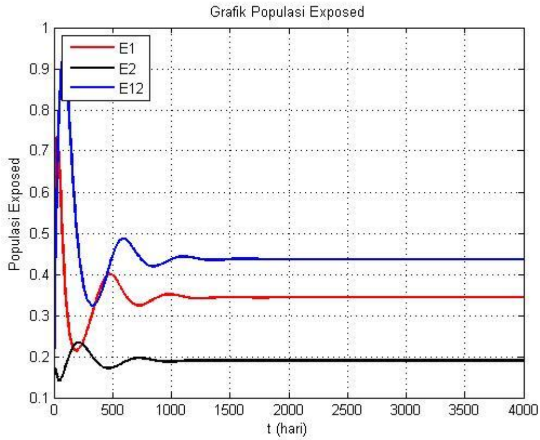
$$R_{0_1} = \frac{\beta_1\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} = 1.6770 > 1$$

$$R_{0_2} = \frac{\beta_2\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)} = 0.3570 < 1.$$

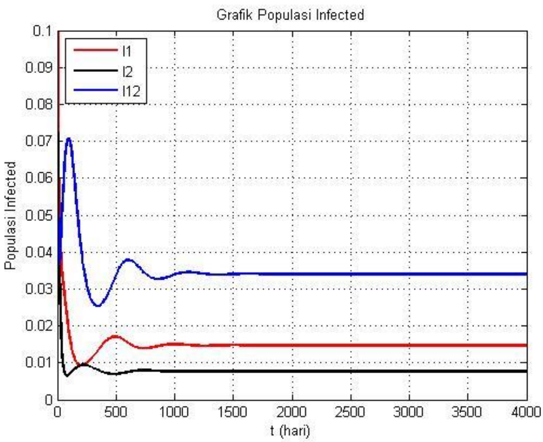
Berikut ini adalah grafik hasil percobaan kedua.



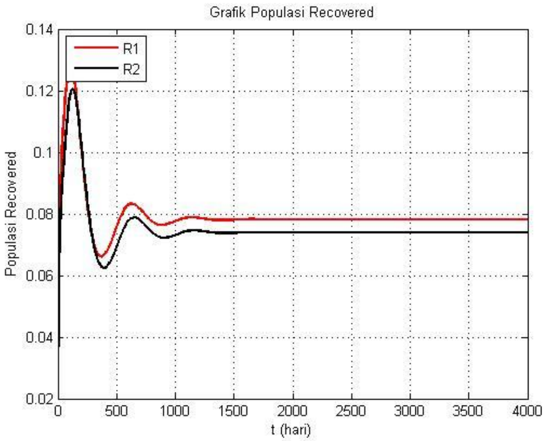
Gambar 4.9 Grafik Populasi *Susceptible* Percobaan Kedua



Gambar 4.10 Grafik Populasi *Exposed* Percobaan Kedua



Gambar 4.11 Grafik Populasi *Infected* Percobaan Kedua



Gambar 4.12 Grafik Populasi *Recovered* Percobaan Kedua

Pada **Gambar 4.9**, diperoleh hasil bahwa populasi *susceptible* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 2000$ hari. Pada **Gambar 4.10**, diperoleh hasil bahwa populasi *exposed* chlamydia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 2060$ hari, populasi *exposed* pneumonia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 1100$ hari dan populasi *exposed co-infection* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 1810$ hari. Pada **Gambar 4.11**, diperoleh hasil bahwa populasi *infected* chlamydia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 1400$ hari, populasi *infected* pneumonia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 1150$ hari dan populasi *infected co-infection* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 1500$ hari. Pada **Gambar 4.12**, diperoleh hasil bahwa populasi *recovered* chlamydia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 1700$ hari dan populasi *recovered* pneumonia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 1550$ hari.

Pada percobaan kedua juga diperoleh hasil $R_{0_1} > 1$ dan $R_{0_2} < 1$. Hal ini merepresentasikan bahwa $R_{0_1} > 1$ merupakan kondisi dimana setiap individu yang terinfeksi chlamydia dapat menularkan penyakit chlamydia rata-rata lebih dari satu penderita baru, atau dengan kata lain terjadi penyebaran penyakit chlamydia. Sedangkan $R_{0_2} < 1$ merupakan kondisi dimana setiap individu yang terinfeksi pneumonia dapat menularkan penyakit pneumonia rata-rata kurang dari satu penderita baru atau dengan kata lain tidak terdapat penyebaran penyakit pneumonia.

4.4.3.3 Percobaan Ketiga

Percobaan ketiga dilakukan saat $t_0 = 0$ dan $t_f = 4000$ hari. Nilai parameter yang digunakan untuk percobaan ketiga tertera pada **Tabel 4.5.**

Tabel 4.5 Nilai Parameter untuk Percobaan Ketiga

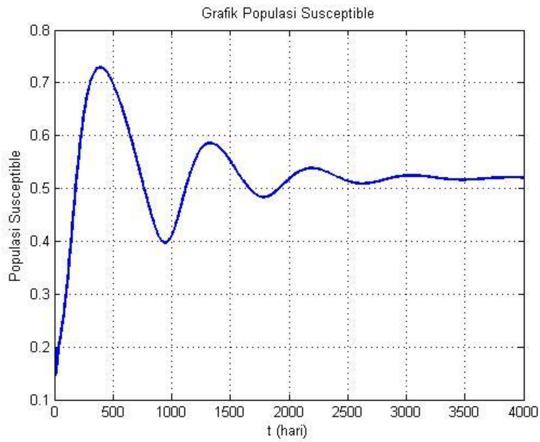
Parameter	Nilai Parameter	Sumber
μ	0.02	Daozhao dkk (2016)
β_1	0.9	Daozhao dkk (2016)
β_2	0.7	Daozhao dkk (2016)
β_{10}	0.6	Daozhao dkk (2016)
β_{02}	0.1	Daozhao dkk (2016)
ε_1	0.0001	Sharomi dkk (2011)
ε_2	0.00274	Jacob dkk (2013)
ε_{10}	0.003	Asumsi
ε_{02}	0.003	Asumsi
ρ_1	0.03	Sharomi dkk (2011)
ρ_2	0.0476	Jacob dkk (2013)
ρ_{10}	0.027	Asumsi
ρ_{02}	0.03	Asumsi
ω_1	0.025	Asumsi
ω_2	0.0238	Asumsi

Dengan menggunakan nilai parameter pada **Tabel 4.5**, diperoleh

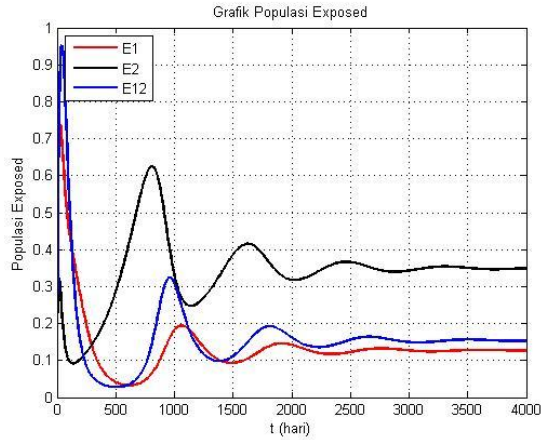
$$R_{0_1} = \frac{\beta_1 \varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} = 0.0896 < 1$$

$$R_{0_2} = \frac{\beta_2 \varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)} = 1.2477 > 1.$$

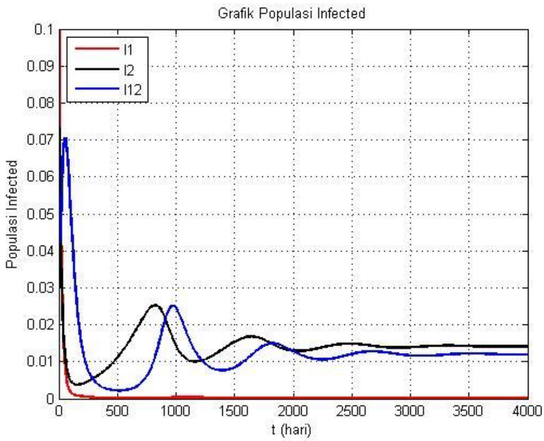
Berikut ini adalah grafik hasil percobaan ketiga.



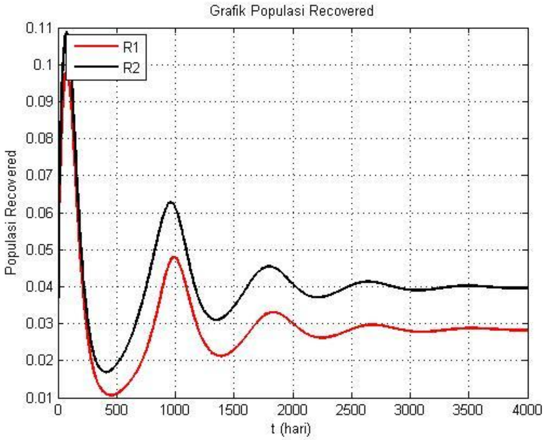
Gambar 4.13 Grafik Populasi *Susceptible* Percobaan Ketiga



Gambar 4.14 Grafik Populasi *Exposed* Percobaan Ketiga



Gambar 4.15 Grafik Populasi *Infected* Percobaan Ketiga



Gambar 4.16 Grafik Populasi *Recovered* Percobaan Ketiga

Pada **Gambar 4.13**, diperoleh hasil bahwa populasi *susceptible* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 3500$ hari. Pada **Gambar 4.14**, diperoleh hasil bahwa populasi *exposed* chlamydia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 3900$ hari, populasi *exposed* pneumonia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 3650$ hari dan populasi *exposed co-infection* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 3800$ hari. Pada **Gambar 4.15**, diperoleh hasil bahwa populasi *infected* chlamydia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 12400$ hari, populasi *infected* pneumonia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 3650$ hari dan populasi *infected co-infection* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 3850$ hari. Pada **Gambar 4.16**, diperoleh hasil bahwa populasi *recovered* chlamydia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 3850$ hari dan populasi *recovered* pneumonia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 3890$ hari.

Pada percobaan ketiga juga diperoleh hasil $R_{0_1} < 1$ dan $R_{0_2} > 1$. Hal ini merepresentasikan bahwa $R_{0_1} < 1$ merupakan kondisi dimana setiap individu yang terinfeksi chlamydia dapat menularkan penyakit chlamydia rata-rata kurang dari satu penderita baru, atau dengan kata lain tidak terjadi penyebaran penyakit chlamydia. Sedangkan $R_{0_2} > 1$ merupakan kondisi dimana setiap individu yang terinfeksi pneumonia dapat menularkan penyakit pneumonia rata-rata lebih dari satu penderita baru atau dengan kata lain terdapat penyebaran penyakit pneumonia.

4.4.3.4 Percobaan Keempat

Percobaan keempat dilakukan saat $t_0 = 0$ dan $t_f = 4000$ hari. Nilai parameter yang digunakan untuk percobaan keempat tertera pada **Tabel 4.6.**

Tabel 4.6 Nilai Parameter untuk Percobaan Keempat

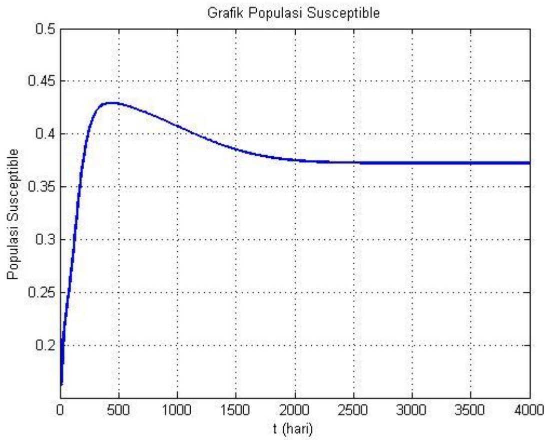
Parameter	Nilai Parameter	Sumber
μ	0.02	Daozhao dkk (2016)
β_1	0.9	Daozhao dkk (2016)
β_2	0.7	Daozhao dkk (2016)
β_{10}	0.2	Daozhao dkk (2016)
β_{02}	0.2	Daozhao dkk (2016)
ε_1	0.002	Asumsi
ε_2	0.00274	Jacob dkk (2013)
ε_{10}	0.004	Asumsi
ε_{02}	0.004	Asumsi
ρ_1	0.050	Sharomi dkk (2011)
ρ_2	0.0475	Jacob dkk (2013)
ρ_{10}	0.03	Asumsi
ρ_{02}	0.027	Asumsi
ω_1	0.025	Asumsi
ω_2	0.0238	Asumsi

Dengan menggunakan nilai parameter pada **Tabel 4.6**, diperoleh

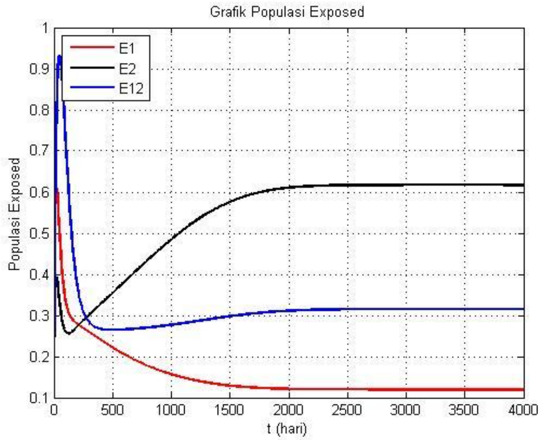
$$R_{0_1} = \frac{\beta_1 \varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} = 1.1688 > 1$$

$$R_{0_2} = \frac{\beta_2 \varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)} = 1.2496 > 1.$$

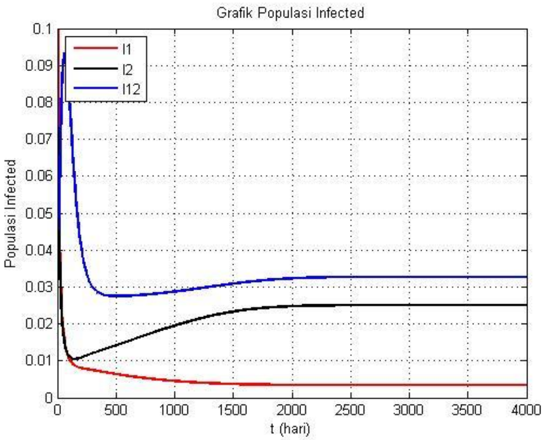
Berikut ini adalah grafik hasil percobaan keempat.



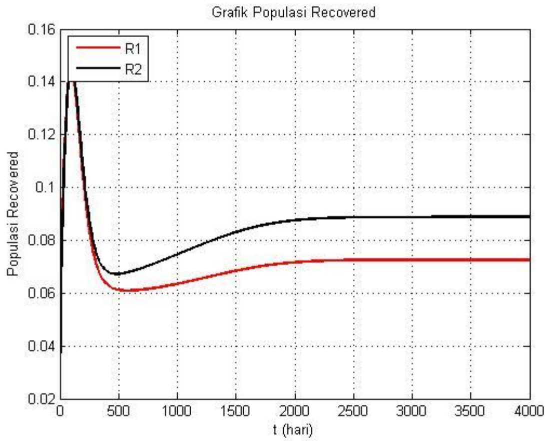
Gambar 4.17 Grafik Populasi *Susceptible* Percobaan Keempat



Gambar 4.18 Grafik Populasi *Exposed* Percobaan Keempat



Gambar 4.19 Grafik Populasi *Infected* Percobaan Keempat



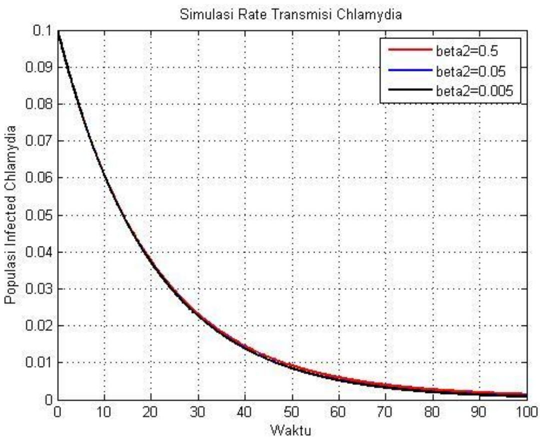
Gambar 4.20 Grafik Populasi *Recovered* Percobaan Keempat

Pada **Gambar 4.17**, diperoleh hasil bahwa populasi *susceptible* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 2200$ hari. Pada **Gambar 4.18**, diperoleh hasil bahwa populasi *exposed* chlamydia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 2150$ hari, populasi *exposed* pneumonia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 2550$ hari dan populasi *exposed co-infection* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 2300$ hari. Pada **Gambar 4.19**, diperoleh hasil bahwa populasi *infected* chlamydia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 1800$ hari, populasi *infected* pneumonia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 2150$ hari dan populasi *infected co-infection* akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 2250$ hari. Pada **Gambar 4.20**, diperoleh hasil bahwa populasi *recovered* chlamydia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 2500$ hari dan populasi *recovered* pneumonia akan mendekati titik setimbang pada waktu $t > 2400$ hari.

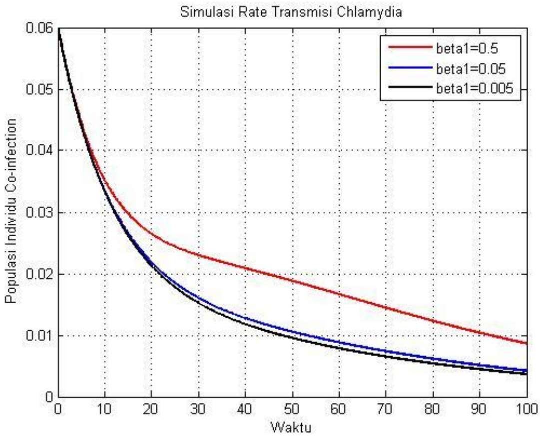
Pada percobaan keempat juga diperoleh hasil $R_{0_1} > 1$ dan $R_{0_2} > 1$. Hal ini merepresentasikan bahwa $R_{0_1} > 1$ merupakan kondisi dimana setiap individu yang terinfeksi chlamydia dapat menularkan penyakit chlamydia rata-rata lebih dari satu penderita baru, atau dengan kata lain terjadi penyebaran penyakit chlamydia. Sedangkan $R_{0_2} > 1$ merupakan kondisi dimana setiap individu yang terinfeksi pneumonia dapat menularkan penyakit pneumonia rata-rata lebih dari satu penderita baru atau dengan kata lain terdapat penyebaran penyakit pneumonia.

4.4.3.5 Simulasi *Rate* Transmisi Chlamydia

Simulasi dilakukan untuk mengetahui pengaruh *rate* transmisi chlamydia pada populasi manusia yang terinfeksi chlamydia serta pada populasi manusia yang terinfeksi *co-infection* chlamydia dan pneumonia saat $t_0 = 0$ dan $t_f = 100$. Parameter yang digunakan dalam simulasi *rate* transmisi chlamydia tertera pada **Tabel 4.3** dengan $\beta_{1_1} = 0.5$, $\beta_{1_2} = 0.05$ dan $\beta_{1_3} = 0.005$. Hasil simulasi *rate* transmisi chlamydia adalah sebagai berikut.



Gambar 4.20 Pengaruh *Rate* Transmisi Chlamydia pada Populasi Manusia yang Terinfeksi Chlamydia



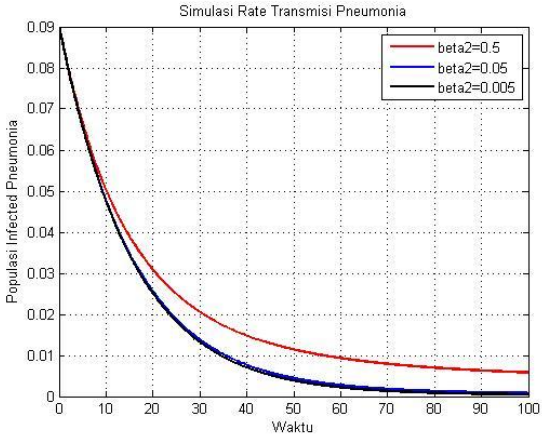
Gambar 4.22 Pengaruh *Rate* Transmisi Chlamydia pada Populasi Manusia yang Terinfeksi *Co-Infection* Chlamydia dan Pneumonia

Gambar 4.21 merupakan hasil simulasi pengaruh *rate* transmisi chlamydia terhadap populasi manusia yang terinfeksi chlamydia. **Gambar 4.22** merupakan hasil simulasi pengaruh *rate* transmisi chlamydia terhadap populasi manusia yang terinfeksi *co-infection* chlamydia dan pneumonia. Dari hasil tersebut terlihat bahwa semakin besar nilai β_1 maka semakin besar jumlah populasi manusia yang terinfeksi chlamydia, namun peningkatan tersebut tidak terlalu besar. Semakin besar nilai β_1 maka semakin besar pula jumlah populasi manusia yang terinfeksi *co-infection* chlamydia dan pneumonia.

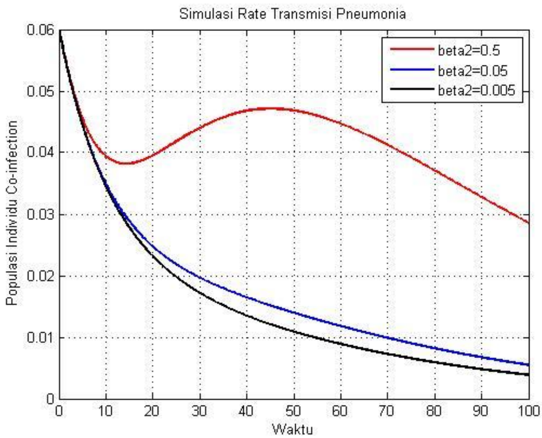
4.4.3.6 Simulasi *Rate* Transmisi Pneumonia

Simulasi dilakukan untuk mengetahui pengaruh *rate* transmisi pneumonia pada populasi manusia yang terinfeksi pneumonia serta pada populasi manusia yang terinfeksi *co-infection* chlamydia dan pneumonia saat $t_0 = 0$ dan $t_f = 100$. Parameter yang digunakan dalam simulasi *rate* transmisi chlamydia tertera pada **Tabel 4.3** dengan $\beta_{2_1} = 0.5$, $\beta_{2_2} = 0.05$

dan $\beta_{2_3} = 0.005$. Hasil simulasi *rate* transmisi pneumonia adalah sebagai berikut.



Gambar 4.23 Pengaruh *Rate* Transmisi Pneumonia pada Populasi Manusia yang Terinfeksi *Co-Infection* Chlamydia dan Pneumonia



Gambar 4.24 Pengaruh *Rate* Transmisi Pneumonia pada Populasi Manusia yang Terinfeksi *Co-Infection* Chlamydia dan Pneumonia

Gambar 4.21 merupakan hasil simulasi pengaruh *rate* transmisi chlamydia terhadap populasi manusia yang terinfeksi chlamydia. **Gambar 4.22** merupakan hasil simulasi pengaruh *rate* transmisi chlamydia terhadap populasi manusia yang terinfeksi *co-infection* chlamydia dan pneumonia. Dari hasil tersebut terlihat bahwa semakin besar nilai β_2 maka semakin besar jumlah populasi manusia yang terinfeksi pneumonia dan semakin besar pula jumlah populasi manusia yang terinfeksi *co-infection* chlamydia dan pneumonia.

Dari dan **Gambar 4.22** dan **Gambar 4.24** terlihat bahwa *rate* transmisi pneumonia (β_2) lebih mempengaruhi jumlah populasi manusia yang terinfeksi *co-infection* chlamydia dan pneumonia.

BAB V
PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan serta saran yang diberikan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

1. Berdasarkan analisis model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia, diperoleh empat titik setimbang yaitu:
   a. Titik setimbang non endemik (E_0), yang stabil asimtotis lokal jika $R_{0_1} < 1$ dan $R_{0_2} < 1$.
   b. Titik setimbang endemik chlamydia $(E_0)_1$, yang stabil asimtotis lokal jika $R_{0_1} > 1$ dan $R_{0_2} < 1$.
   c. Titik setimbang endemik pneumonia $(E_0)_2$, yang stabil asimtotis lokal jika $R_{0_1} < 1$ dan $R_{0_2} > 1$.
   d. Titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia dan pneumonia $(E_0)_3$, yang stabil asimtotis lokal jika $R_{0_1} > 1$ dan $R_{0_2} > 1$.
2. Berdasarkan hasil simulasi numerik, laju transmisi pneumonia mempunyai pengaruh besar terhadap jumlah populasi manusia yang menderita *co-infection* chlamydia dan pneumonia.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan estimasi parameter untuk model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia dengan data yang ada di Indonesia. Dengan demikian model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia dapat digunakan untuk memprediksi penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia dan pneumonia di Indonesia. Model matematika penyebaran penyakit co-infection chlamydia dan pneumonia dapat dikembangkan dalam model epidemi tipe SEIRS. Serta dapat dilakukan simulasi dengan metode yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Palupi, Azizah N.D. (2016). **Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Chlamydia**. Skripsi: Surabaya, Universitas Airlangga.

[2] Samanta, G.P. dkk. (2014). *Analysis of a delayed Chlamydia epidemic model with pulse vaccination*. **Applied Mathematics and Computation Vol. 230**, Hal. 555-569.

[3] Tolan RW. (2008). **Chlamydia Infections**. Emedicine from webMD. URL< http://www.emedicine.com/ped/Topic378.htm > Diakses 13 Desember 2017.

[4] Depkes R.I. (2002). **Pedoman Pemberantasan Penyakit Infeksi Saluran Pernafasan Akut untuk Penanggulangan Pneumonia pada Balita dalam Pelita VI**. Jakarta: Dirjen PPM & PLP.

[5] Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan. (2016). **Riset Kesehatan Dasar : RISKESDAS 2016**. Jakarta: Kementerian Kesehatan Republik Indonesia.

[6] Sharomi, O. dkk. (2011). *Mathematical study of a risk-structured two-group model for Chlamydia transmission dynamics*. **Applied Mathematical Modelling Vol. 35,** Hal. 3653–3673.

[7] Ong'ala, J. dkk. (2013). *Mathematical Model for Pneumonia Dynamics with Carriers*. **Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7,** Hal. 2457 - 2473.

[8] D. Gao, T.C. Porco. (2016). *Coinfection Dynamics of Two Diseases in A Single Host Population*. **J. Math. Anal. Appl. Vol. 442**, Hal. 171-188.

[9] Asfihani, T. dkk. (2016). *Analisis Model Lintasan Nanopartikel Magnet pada Pembuluh Darah didalam Medan Magnet dengan Metode Runge-Kutta Orde ke-empat*. **J. Math. and Its Appl . Vol. 3, No. 1,** Hal. 1-10.

[10] Putra, R.T. dkk. (2015). *Kestabilan Model Epidemi SEIR dengan Laju Insidensi*. **Poli Rekayasa Vol. 10**, Hal. 1858-3709.

[11] Subiono. (2003). **Matematika Sistem**. Jurusan Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Institut Teknologi Sepuluh Nopember: Surabaya..

[12] Olsder, G.J. (2003). **Mathematical Sistem Theory**. Delft University Press, Netherlands.

[13] Zill, D.G., Cullen, M.R. (2009). **Differential Equations with Boundary-Value Problem**. Seventh Edition. Nelson Education Ltd, Canada.

[14] Anton, H. (2005). **Aljabar Linier Elementer**. Jakarta: Erlangga.

[15] Diekmann, O. Heesterbeek dkk. (2009). *The Construction of Next-Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models*. **The Royal Society Interface Vol. 7**, Hal. 873-885.

[16] Holland J., James. (2007). **Notes On** $\boldsymbol{R_0}$. Department of Anthropological Sciences. Stanford University.

[17] Munir, R. (2003). **Metode Numerik**. Bandung: Informatika.

LAMPIRAN

Lampiran A. Perhitungan *Basic Reproduction Number* (R_0)

Diketahui titik setimbang non endemik $E_0 = (1,0,0,0,0,0,0,0,0)$
Pada model matematika penyebaran penyakit *co-infection* chlamydia-pneumonia, kelas yang menyebabkan infeksi adalah kelas $E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2$ dan I_{12} sehingga persamaan differensial yang digunakan adalah

$$\frac{dE_1}{dt} = (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - \mu E_1 - \varepsilon_1 E_1 - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 \quad (4.1b)$$
$$\frac{dE_2}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S - \mu E_2 - \varepsilon_2 E_2 - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 \quad (4.1c)$$
$$\frac{dE_{12}}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 - \mu E_{12}$$
$$-\varepsilon_{10} E_{12} - \varepsilon_{02} E_{12} \quad (4.1d)$$
$$\frac{dI_1}{dt} = \varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_1 - \varepsilon_{02} E_{12} - \rho_1 I_1 \quad (4.1e)$$
$$\frac{dI_2}{dt} = \varepsilon_2 E_2 + \varepsilon_{02} E_{12} - \mu I_2 - \varepsilon_{10} E_{12} - \rho_2 I_2 \quad (4.1f)$$
$$\frac{dI_{12}}{dt} = \varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_{12} - \rho_{10} I_{12} - \rho_{02} I_{12} \quad (4.1g)$$

Sehingga dapat dibentuk matrik $\mathcal{F}$dan $\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$: matrik dari laju individu baru terinfeksi penyakit yang menambah kelas infeksi
$\mathcal{V}$: matrik laju perkembangan, kematian dan kesembuhan yang mengurangi kelas infeksi
Matrik $\mathcal{F}$ dan matrik $\mathcal{V}$ sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 \\ (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 \\ (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lampiran A. Lanjutan

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mu E_1 + \varepsilon_1 E_1 \\ \mu E_2 - \varepsilon_2 E_2 \\ \mu E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12} + \varepsilon_{02} E_{12} \\ -\varepsilon_1 E_1 - \varepsilon_{10} E_{12} + \mu I_1 + \varepsilon_{02} E_{12} + \rho_1 I_1 \\ -\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_{02} E_{12} + \mu I_2 + \varepsilon_{10} E_{12} + \rho_2 I_2 \\ -\varepsilon_{02} E_{12} - \varepsilon_{10} E_{12} + \mu I_{12} + \rho_{10} I_{12} + \rho_{02} I_{12} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya matrik $\mathcal{F}$ dan matrik $\mathcal{V}$ masing-masing diturunkan terhadap $E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2$ dan I_{12}. Sehingga diperoleh matrik $\mathbb{F}$ dan $\mathbb{V}$ sebagai berikut

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} -(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12}) & 0 & 0 & \beta_1 S & -\beta_2 E_1 & \beta_{10} S - \beta_{02} E_1 \\ 0 & -(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12}) & 0 & -\beta_1 E_2 & \beta_2 S & \beta_{02} S - \beta_{10} E_2 \\ (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12}) & (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12}) & 0 & \beta_1 E_2 & \beta_2 E_1 & \beta_{02} E_1 + \beta_{10} E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mu + \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02} & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & -\varepsilon_{10} + \varepsilon_{02} & \mu + \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_{02} + \varepsilon_{10} & 0 & \mu + \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{02} - \varepsilon_{10} & 0 & 0 & \mu + \rho_{10} + \rho_{02} \end{pmatrix}$$

Substitusi nilai titik setimbang non endemik E_0 pada $\mathbb{F}$. Diperoleh

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & \beta_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & \beta_{02} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan memisalkan
$a = \mu + \varepsilon_1$
$b = \mu + \varepsilon_2$

Lampiran A. Lanjutan

$c = \mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02}$
$d = \mu + \rho_1$
$e = \mu + \rho_2$
$f = \mu + \rho_{10} + \rho_{02}$
Kemudian dicari $\mathbb{V}^{-1}$, sehingga diperoleh

$$\mathbb{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon_1}{ad} & 0 & \frac{\varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}}{cd} & \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2}{be} & \frac{\varepsilon_{02} - \varepsilon_{10}}{ce} & 0 & \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_{02} + \varepsilon_{10}}{cf} & 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya didapatkan matriks G. Dimana $G = \mathbb{F}\mathbb{V}^{-1}$, sehingga diperoleh

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & \beta_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & \beta_{02} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon_1}{ad} & 0 & \frac{\varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}}{cd} & \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2}{be} & \frac{\varepsilon_{02} - \varepsilon_{10}}{ce} & 0 & \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_{02} + \varepsilon_{10}}{cf} & 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Lampiran A. Lanjutan

$$G=\begin{pmatrix} \frac{\beta_1\varepsilon_1}{ad} & 0 & \frac{\beta_1(\varepsilon_{10}-\varepsilon_{02})}{cd}+\frac{\beta_{10}(\varepsilon_{02}+\varepsilon_{10})}{cf} & \frac{\beta_1}{d} & 0 & \frac{\beta_{10}}{f} \\ 0 & \frac{\beta_2\varepsilon_2}{be} & \frac{\beta_2(\varepsilon_{02}-\varepsilon_{10})}{ce}+\frac{\beta_{10}(\varepsilon_{02}+\varepsilon_{10})}{cf} & 0 & \frac{\beta_2}{e} & \frac{\beta_{02}}{f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian ditentukan nilai eigen dari $\mathbb{FV}^{-1}$ dengan $\det(\lambda I-\mathbb{FV}^{-1})=0$ sehingga diperoleh

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-\frac{\beta_1\varepsilon_1}{ad} & 0 & -\frac{\beta_1(\varepsilon_{10}-\varepsilon_{02})}{cd}-\frac{\beta_{10}(\varepsilon_{02}+\varepsilon_{10})}{cf} & -\frac{\beta_1}{d} & 0 & -\frac{\beta_{10}}{f} \\ 0 & \lambda-\frac{\beta_2\varepsilon_2}{be} & -\frac{\beta_2(\varepsilon_{02}-\varepsilon_{10})}{ce}-\frac{\beta_{10}(\varepsilon_{02}+\varepsilon_{10})}{cf} & 0 & -\frac{\beta_2}{e} & -\frac{\beta_{02}}{f} \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\leftrightarrow \left(\lambda-\frac{\beta_1\varepsilon_1}{ad}\right)\begin{vmatrix} \lambda-\frac{\beta_2\varepsilon_2}{be} & -\frac{\beta_2(\varepsilon_{02}-\varepsilon_{10})}{ce}-\frac{\beta_{10}(\varepsilon_{02}+\varepsilon_{10})}{cf} & 0 & -\frac{\beta_2}{e} & -\frac{\beta_{02}}{f} \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\leftrightarrow \left(\lambda-\frac{\beta_1\varepsilon_1}{ad}\right)\left(\lambda-\frac{\beta_2\varepsilon_2}{be}\right)\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\leftrightarrow \left(\lambda-\frac{\beta_1\varepsilon_1}{ad}\right)\left(\lambda-\frac{\beta_2\varepsilon_2}{be}\right)\lambda\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\leftrightarrow \left(\lambda-\frac{\beta_1\varepsilon_1}{ad}\right)\left(\lambda-\frac{\beta_2\varepsilon_2}{be}\right)\lambda^2\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\leftrightarrow \left(\lambda-\frac{\beta_1\varepsilon_1}{ad}\right)\left(\lambda-\frac{\beta_2\varepsilon_2}{be}\right)\lambda^4=0$$

Dengan mensubstitusi kembali nilai a, b, d dan e

Lampiran A. Lanjutan

$$\leftrightarrow \left(\lambda - \frac{\beta_1\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}\right)\left(\lambda - \frac{\beta_2\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}\right)\lambda^4 = 0$$

Sehingga diperoleh $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{\beta_1\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}, \lambda_3 = \frac{\beta_2\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}$.
Berdasarkan hasil perhitungan nilai eigen dari G diperoleh *basic reproduction number* yaitu
$R_{0_1} = \frac{\beta_1\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}$ dan $R_{0_2} = \frac{\beta_2\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}$

Lampiran B. Perhitungan Titik Setimbang Endemik Chlamydia $(E_0)_1$

Berdasarkan persamaan berikut

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \mu S - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S = 0 \quad (4.2a)$$
$$\frac{dE_1}{dt} = (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - \mu E_1 - \varepsilon_1 E_1$$
$$-(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 = 0 \quad (4.2b)$$
$$\frac{dE_2}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S - \mu E_2 - \varepsilon_2 E_2$$
$$-(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 = 0 \quad (4.2c)$$
$$\frac{dE_{12}}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 - \mu E_{12}$$
$$-\varepsilon_{10} E_{12} - \varepsilon_{02} E_{12} = 0 \quad (4.2d)$$
$$\frac{dI_1}{dt} = \varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_1 - \varepsilon_{02} E_{12} - \rho_1 I_1 = 0 \quad (4.2e)$$
$$\frac{dI_2}{dt} = \varepsilon_2 E_2 + \varepsilon_{02} E_{12} - \mu I_2 - \varepsilon_{10} E_{12} - \rho_2 I_2 = 0 \quad (4.2f)$$
$$\frac{dI_{12}}{dt} = \varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_{12} - \rho_{10} I_{12} - \rho_{02} I_{12} = 0 \quad (4.2g)$$
$$\frac{dR_1}{dt} = \rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2 - \mu R_1 - \omega_1 R_1 = 0 \quad (4.2h)$$
$$\frac{dR_2}{dt} = \rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1 - \mu R_2 - \omega_2 R_2 = 0 \quad (4.2i)$$

Titik setimbang endemik chlamydia diperoleh ketika $I_2 = 0, E_2 = 0, I_{12} = 0, E_{12} = 0$ dan $R_2 = 0$, sedangkan $I_1 \neq 0$, $E_1 \neq 0$ dan $R_1 \neq 0$.
Dari Persamaan (4.2a) diperoleh

$$\mu - \mu S - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S = 0$$

$$\mu - \mu S^c - \beta_1 I_1^c S^c = 0$$

$$-\beta_1 I_1^c S^c = -\mu + \mu S^c$$

$$I_1^c = \frac{\mu - \mu S^c}{\beta_1 S^c}$$

Lampiran B. Lanjutan

$$I_1^c = \frac{\mu}{\beta_1 S^c} - \frac{\mu S^c}{\beta_1 S^c}$$

$$I_1^c = \frac{\mu}{\beta_1 S^c} - \frac{\mu}{\beta_1} \qquad (*)$$

Dari Persamaan (4.2b) diperoleh

$$(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - \mu E_1 - \varepsilon_1 E_1 - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 = 0$$

$$\beta_1 I_1^c S^c - \mu E_1^c - \varepsilon_1 E_1^c = 0$$

$$\beta_1 I_1^c S^c - (\mu + \varepsilon_1) E_1^c = 0$$

$$\beta_1 I_1^c S^c = (\mu + \varepsilon_1) E_1^c$$

$$S^c = \frac{(\mu + \varepsilon_1) E_1^c}{\beta_1 I_1^c} \qquad (**)$$

Dari Persamaan (4.2e) diperoleh

$$\varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_1 - \varepsilon_{02} E_{12} - \rho_1 I_1 = 0$$

$$\varepsilon_1 E_1^c - \mu I_1^c - \rho_1 I_1^c = 0$$

$$\varepsilon_1 E_1^c - (\mu + \rho_1) I_1^c = 0$$

$$\varepsilon_1 E_1^c = (\mu + \rho_1) I_1^c$$

$$E_1^c = \frac{(\mu + \rho_1) I_1^c}{\varepsilon_1} \qquad (***)$$

Substitusi Persamaan (***) ke Persamaan (**)

Lampiran B. Lanjutan

$$S^c = \frac{(\mu + \varepsilon_1)\left(\frac{(\mu + \rho_1)I_1^c}{\varepsilon_1}\right)}{\beta_1 I_1^c}$$

$$S^c = \frac{(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \rho_1)I_1^c}{\varepsilon_1 \beta_1 I_1^c}$$

$$S^c = \frac{(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \rho_1)}{\varepsilon_1 \beta_1} \qquad (****)$$

Substitusi Persamaan (****) ke Persamaan (*)

$$I_1^c = \frac{\mu}{\beta_1 S^c} - \frac{\mu}{\beta_1}$$

$$I_1^c = \frac{\mu}{\beta_1\left(\frac{(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \rho_1)}{\varepsilon_1 \beta_1}\right)} - \frac{\mu}{\beta_1}$$

$$I_1^c = \frac{\mu}{\left(\frac{(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \rho_1)}{\varepsilon_1}\right)} - \frac{\mu}{\beta_1}$$

$$I_1^c = \frac{\beta_1 \mu}{\beta_1\left(\frac{(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \rho_1)}{\varepsilon_1}\right)} - \frac{\mu\left(\frac{(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \rho_1)}{\varepsilon_1}\right)}{\beta_1\left(\frac{(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \rho_1)}{\varepsilon_1}\right)}$$

Lampiran B. Lanjutan

$$I_1^c = \frac{\beta_1\mu - \mu\left(\frac{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}{\varepsilon_1}\right)}{\left(\frac{\beta_1(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}{\varepsilon_1}\right)}$$

$$I_1^c = \left(\beta_1\mu - \mu\left(\frac{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}{\varepsilon_1}\right)\right) \times \left(\frac{\varepsilon_1}{\beta_1(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}\right)$$

$$I_1^c = \beta_1\mu \times \left(\frac{\varepsilon_1}{\beta_1(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}\right) - \mu\left(\frac{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}{\varepsilon_1}\right) \times \left(\frac{\varepsilon_1}{\beta_1(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}\right)$$

$$I_1^c = \frac{\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} - \frac{\mu}{\beta_1} \qquad (*****)$$

Substitusi Persamaan (*****) ke Persamaan (***)

$$E_1^c = \frac{(\mu+\rho_1)I_1^c}{\varepsilon_1}$$

$$E_1^c = \frac{(\mu+\rho_1)\left(\frac{\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} - \frac{\mu}{\beta_1}\right)}{\varepsilon_1}$$

$$E_1^c = \frac{\left(\frac{(\mu+\rho_1)\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} - \frac{(\mu+\rho_1)\mu}{\beta_1}\right)}{\varepsilon_1}$$

Lampiran B. Lanjutan

$$E_1^c = \frac{\left(\frac{\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)} - \frac{(\mu+\rho_1)\mu}{\beta_1}\right)}{\varepsilon_1}$$

$$E_1^c = \left(\frac{\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)} - \frac{(\mu+\rho_1)\mu}{\beta_1}\right) \times \frac{1}{\varepsilon_1}$$

$$E_1^c = \frac{\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)\varepsilon_1} - \frac{(\mu+\rho_1)\mu}{\beta_1\varepsilon_1}$$

$$E_1^c = \frac{\beta_1\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)\varepsilon_1\beta_1} - \frac{(\mu+\rho_1)(\mu+\varepsilon_1)\mu}{(\mu+\varepsilon_1)\beta_1\varepsilon_1}$$

$$E_1^c = \frac{\beta_1\mu\varepsilon_1 - (\mu+\rho_1)(\mu+\varepsilon_1)\mu}{\beta_1\varepsilon_1(\mu+\varepsilon_1)}$$

Dari Persamaan (4.2h) diperoleh

$$\rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2 - \mu R_1 - \omega_1 R_1 = 0$$

$$\rho_1 I_1^c - \mu R_1^c - \omega_1 R_1^c = 0$$

$$\rho_1 I_1^c - (\mu+\omega_1) R_1^c = 0$$

$$-(\mu+\omega_1) R_1^c = -\rho_1 I_1^c$$

$$R_1^c = \frac{\rho_1 I_1^c}{(\mu+\omega_1)}$$

Substitusi Persamaan (*****), sehingga diperolah

Lampiran B. Lanjutan

$$R_1^c = \frac{\rho_1\left(\frac{\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} - \frac{\mu}{\beta_1}\right)}{(\mu+\omega_1)}$$

$$R_1^c = \frac{\left(\frac{\rho_1\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} - \frac{\rho_1\mu}{\beta_1}\right)}{(\mu+\omega_1)}$$

$$R_1^c = \left(\frac{\rho_1\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} - \frac{\rho_1\mu}{\beta_1}\right) \times \frac{1}{(\mu+\omega_1)}$$

$$R_1^c = \frac{\rho_1\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)(\mu+\omega_1)} - \frac{\rho_1\mu}{\beta_1(\mu+\omega_1)}$$

$$R_1^c = \frac{\rho_1\mu\varepsilon_1\beta_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)(\mu+\omega_1)\beta_1} - \frac{\rho_1\mu(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}{\beta_1(\mu+\omega_1)(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}$$

$$R_1^c = \frac{\rho_1\mu\varepsilon_1\beta_1 - \rho_1\mu(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)(\mu+\omega_1)\beta_1}$$

Berdasarkan uraian diatas, diperoleh titik setimbang endemik chlamydia yang dinyatakan dalam $(E_0)_1 = (S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) = (S^c, E_1^c, 0{,}0, I_1^c, 0{,}0, R_1^c, 0)$

dengan

$$S^c = \frac{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}{\varepsilon_1\beta_1}$$

$$E_1^c = \frac{\beta_1\mu\varepsilon_1 - (\mu+\rho_1)(\mu+\varepsilon_1)\mu}{\beta_1\varepsilon_1(\mu+\varepsilon_1)}$$

Lampiran B. Lanjutan

$$I_1^C = \frac{\mu\varepsilon_1}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)} - \frac{\mu}{\beta_1}$$

$$R_1^c = \frac{\rho_1\mu\varepsilon_1\beta_1 - \rho_1\mu(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)}{(\mu+\varepsilon_1)(\mu+\rho_1)(\mu+\omega_1)\beta_1}$$

Lampiran C. Perhitungan Titik Setimbang Endemik Pneumonia $(E_0)_2$

Berdasarkan persamaan berikut

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \mu S - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S = 0 \quad (4.2a)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - \mu E_1 - \varepsilon_1 E_1$$
$$-(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 = 0 \quad (4.2b)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S - \mu E_2 - \varepsilon_2 E_2$$
$$-(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 = 0 \quad (4.2c)$$

$$\frac{dE_{12}}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 - \mu E_{12}$$
$$-\varepsilon_{10} E_{12} - \varepsilon_{02} E_{12} = 0 \quad (4.2d)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_1 - \varepsilon_{02} E_{12} - \rho_1 I_1 = 0 \quad (4.2e)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \varepsilon_2 E_2 + \varepsilon_{02} E_{12} - \mu I_2 - \varepsilon_{10} E_{12} - \rho_2 I_2 = 0 \quad (4.2f)$$

$$\frac{dI_{12}}{dt} = \varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_{12} - \rho_{10} I_{12} - \rho_{02} I_{12} = 0 \quad (4.2g)$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2 - \mu R_1 - \omega_1 R_1 = 0 \quad (4.2h)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1 - \mu R_2 - \omega_2 R_2 = 0 \quad (4.2i)$$

Titik setimbang endemik pneumonia diperoleh ketika $I_1 = 0, E_1 = 0, I_{12} = 0, E_{12} = 0$ dan $R_1 = 0,$ sedangkan $I_2 \neq 0,$ $E_2 \neq 0$ dan $R_2 \neq 0.$
Dari Persamaan (4.2a) diperoleh

$$\mu - \mu S - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S = 0$$

$$\mu - \mu S^p - \beta_2 I_2^p S^p = 0$$

$$-\beta_2 I_2^p S^p = -\mu + \mu S^p$$

$$I_2^p = \frac{\mu - \mu S^p}{\beta_2 S^p}$$

Lampiran C. Lanjutan

$$I_2^p = \frac{\mu}{\beta_2 S^p} - \frac{\mu S^p}{\beta_2 S^p}$$

$$I_2^p = \frac{\mu}{\beta_2 S^p} - \frac{\mu}{\beta_2} \qquad (*)$$

Dari Persamaan (4.2c) diperoleh

$$(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S - \mu E_2 - \varepsilon_2 E_2 - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 = 0$$

$$\beta_2 I_2^p S^p - \mu E_2^p - \varepsilon_2 E_2^p = 0$$

$$\beta_2 I_2^p S^p - (\mu + \varepsilon_2)E_2^p = 0$$

$$\beta_2 I_2^p S^p = (\mu + \varepsilon_2)E_2^p$$

$$S^p = \frac{(\mu + \varepsilon_2)E_2^p}{\beta_2 I_2^p} \qquad (**)$$

Dari Persamaan (4.2f) diperoleh

$$\varepsilon_2 E_2 + \varepsilon_{02} E_{12} - \mu I_2 - \varepsilon_{10} E_{12} - \rho_2 I_2 = 0$$

$$\varepsilon_2 E_2^p - \mu I_2^p - \rho_2 I_2^p = 0$$

$$\varepsilon_2 E_2^p - (\mu + \rho_2)I_2^p = 0$$

$$\varepsilon_2 E_2^p = (\mu + \rho_2)I_2^p$$

$$E_2^p = \frac{(\mu + \rho_2)I_2^p}{\varepsilon_2} \qquad (***)$$

Substitusi Persamaan (***) ke Persamaan (**)

Lampiran C. Lanjutan

$$S^p = \frac{(\mu+\varepsilon_2)\left(\frac{(\mu+\rho_2)I_2^p}{\varepsilon_2}\right)}{\beta_2 I_2^p}$$

$$S^p = \frac{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)I_2^p}{\varepsilon_2\beta_2 I_2^p}$$

$$S^p = \frac{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}{\varepsilon_2\beta_2} \qquad (****)$$

Substitusi Persamaan (****) ke Persamaan (*)

$$I_2^p = \frac{\mu}{\beta_2 S^p} - \frac{\mu}{\beta_2}$$

$$I_2^p = \frac{\mu}{\beta_2\left(\frac{(\mu+\varepsilon_2)\left(\mu+\rho_2\right)}{\varepsilon_2\beta_2}\right)} - \frac{\mu}{\beta_2}$$

$$I_2^p = \frac{\mu}{\left(\frac{(\mu+\varepsilon_2)\left(\mu+\rho_2\right)}{\varepsilon_2}\right)} - \frac{\mu}{\beta_2}$$

$$I_2^p = \frac{\beta_2\mu}{\beta_2\left(\frac{(\mu+\varepsilon_2)\left(\mu+\rho_2\right)}{\varepsilon_2}\right)} - \frac{\mu\left(\frac{(\mu+\varepsilon_2)\left(\mu+\rho_2\right)}{\varepsilon_2}\right)}{\beta_2\left(\frac{(\mu+\varepsilon_2)\left(\mu+\rho_2\right)}{\varepsilon_2}\right)}$$

Lampiran C. Lanjutan

$$I_2^p = \frac{\beta_2\mu - \mu\left(\frac{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}{\varepsilon_2}\right)}{\left(\frac{\beta_2(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}{\varepsilon_2}\right)}$$

$$I_2^p = \left(\beta_2\mu - \mu\left(\frac{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}{\varepsilon_2}\right)\right) \times \left(\frac{\varepsilon_2}{\beta_2(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}\right)$$

$$I_2^p = \beta_2\mu \times \left(\frac{\varepsilon_2}{\beta_2(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}\right) - \mu\left(\frac{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}{\varepsilon_2}\right) \times \left(\frac{\varepsilon_2}{\beta_2(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}\right)$$

$$I_2^p = \frac{\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)} - \frac{\mu}{\beta_2} \qquad (*****)$$

Substitusi Persamaan (*****) ke Persamaan (***)

$$E_2^p = \frac{(\mu+\rho_2)I_2^p}{\varepsilon_2}$$

$$E_2^p = \frac{(\mu+\rho_2)\left(\frac{\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)} - \frac{\mu}{\beta_2}\right)}{\varepsilon_2}$$

$$E_2^p = \frac{\left(\frac{(\mu+\rho_2)\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)} - \frac{(\mu+\rho_2)\mu}{\beta_2}\right)}{\varepsilon_2}$$

Lampiran C. Lanjutan

$$E_2^p = \frac{\left(\frac{\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)} - \frac{(\mu+\rho_2)\mu}{\beta_2}\right)}{\varepsilon_2}$$

$$E_2^p = \left(\frac{\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)} - \frac{(\mu+\rho_2)\mu}{\beta_2}\right) \times \frac{1}{\varepsilon_2}$$

$$E_2^p = \frac{\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)\varepsilon_2} - \frac{(\mu+\rho_2)\mu}{\beta_2\varepsilon_2}$$

$$E_2^p = \frac{\beta_2\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)\varepsilon_2\beta_2} - \frac{(\mu+\rho_2)(\mu+\varepsilon_2)\mu}{(\mu+\varepsilon_2)\beta_2\varepsilon_2}$$

$$E_2^p = \frac{\beta_2\mu\varepsilon_2 - (\mu+\rho_2)(\mu+\varepsilon_2)\mu}{\beta_2\varepsilon_2(\mu+\varepsilon_2)}$$

Dari Persamaan (4.2i) diperoleh

$$\rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1 - \mu R_2 - \omega_2 R_2 = 0$$

$$\rho_2 I_2^p - \mu R_2^p - \omega_2 R_2^p = 0$$

$$\rho_2 I_2^p - (\mu+\omega_2) R_2^p = 0$$

$$-(\mu+\omega_2) R_2^p = -\rho_2 I_2^p$$

$$R_2^p = \frac{\rho_2 I_2^p}{(\mu+\omega_2)}$$

Substitusi Persamaan (*****), sehingga diperolah

Lampiran C. Lanjutan

$$R_2^p = \frac{\rho_2\left(\frac{\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)} - \frac{\mu}{\beta_2}\right)}{(\mu+\omega_2)}$$

$$R_2^p = \frac{\left(\frac{\rho_2\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)} - \frac{\rho_2\mu}{\beta_2}\right)}{(\mu+\omega_2)}$$

$$R_2^p = \left(\frac{\rho_2\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)} - \frac{\rho_2\mu}{\beta_2}\right) \times \frac{1}{(\mu+\omega_2)}$$

$$R_2^p = \frac{\rho_2\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)(\mu+\omega_2)} - \frac{\rho_2\mu}{\beta_2(\mu+\omega_2)}$$

$$R_2^p = \frac{\rho_2\mu\varepsilon_2\beta_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)(\mu+\omega_2)\beta_2} - \frac{\rho_2\mu(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}{\beta_2(\mu+\omega_2)(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}$$

$$R_2^p = \frac{\rho_2\mu\varepsilon_2\beta_2 - \rho_2\mu(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)(\mu+\omega_2)\beta_2}$$

Berdasarkan uraian diatas, diperoleh titik setimbang endemik pneumonia yang dinyatakan dalam $(E_0)_1 = (S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2) = \left(S^p, 0, E_2^p, 0,0, I_2^p, 0,0, R_2^p\right)$

dengan

$$S^p = \frac{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}{\varepsilon_2\beta_2}$$

$$E_2^p = \frac{\beta_2\mu\varepsilon_2 - (\mu+\rho_2)(\mu+\varepsilon_2)\mu}{\beta_2\varepsilon_2(\mu+\varepsilon_2)}$$

Lampiran C. Lanjutan

$$I_2^p = \frac{\mu\varepsilon_2}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)} - \frac{\mu}{\beta_2}$$

$$R_2^p = \frac{\rho_2\mu\varepsilon_2\beta_2 - \rho_2\mu(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)}{(\mu+\varepsilon_2)(\mu+\rho_2)(\mu+\omega_2)\beta_2}$$

Lampiran D. Perhitungan Titik Setimbang Endemik *Co-infection* Chlamydia-Pneumonia $(E_0)_3$

Berdasarkan persamaan berikut

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \mu S - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S = 0 \quad (4.2a)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - \mu E_1 - \varepsilon_1 E_1 - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 = 0 \quad (4.2b)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S - \mu E_2 - \varepsilon_2 E_2 - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 = 0 \quad (4.2c)$$

$$\frac{dE_{12}}{dt} = (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 - \mu E_{12} - \varepsilon_{10} E_{12} - \varepsilon_{02} E_{12} = 0 \quad (4.2d)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_1 - \varepsilon_{02} E_{12} - \rho_1 I_1 = 0 \quad (4.2e)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \varepsilon_2 E_2 + \varepsilon_{02} E_{12} - \mu I_2 - \varepsilon_{10} E_{12} - \rho_2 I_2 = 0 \quad (4.2f)$$

$$\frac{dI_{12}}{dt} = \varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_{12} - \rho_{10} I_{12} - \rho_{02} I_{12} = 0 \quad (4.2g)$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2 - \mu R_1 - \omega_1 R_1 = 0 \quad (4.2h)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1 - \mu R_2 - \omega_2 R_2 = 0 \quad (4.2i)$$

Titik setimbang endemik chlamydia diperoleh ketika $I_1 \neq 0, I_2 \neq 0, I_{12} \neq 0, E_1 \neq 0, E_2 \neq 0, E_{12} \neq 0, R_1 \neq 0$ dan $R_2 \neq 0$.

Dari persamaan (4.2a) diperoleh

$$-(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S + \mu - \mu S = 0$$

$$-(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12} + \beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12} + \mu)S + \mu = 0$$

$$-(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12} + \beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12} + \mu)S = -\mu$$

$$S^{cp} = \frac{\mu}{(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12} + \beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12} + \mu)}$$

Lampiran D. Lanjutan

Dari persamaan (4.2b) diperoleh

$$(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - \mu E_1 - \varepsilon_1 E_1 - (\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 = 0$$

$$(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S - (\mu + \varepsilon_1 + \beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 = 0$$

$$-(\mu + \varepsilon_1 + \beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 = -(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S$$

$$E_1^{cp} = \frac{(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})S}{(\mu + \varepsilon_1 + \beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})}$$

Dari persamaan (4.2c) diperoleh

$$(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S - \mu E_2 - \varepsilon_2 E_2 - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 = 0$$

$$(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S - (\mu + \varepsilon_2 + \beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 = 0$$

$$-(\mu + \varepsilon_2 + \beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 = -(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S$$

$$E_2^{cp} = \frac{(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})S}{(\mu + \varepsilon_2 + \beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})}$$

Dari persamaan (4.2d) diperoleh

$$(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 - \mu E_{12} - \varepsilon_{10} E_{12} - \varepsilon_{02} E_{12} = 0$$

$$(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2 - (\mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02})E_{12} = 0$$

$$-(\mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02})E_{12} = -(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})E_1 - (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})E_2$$

$$E_{12}^{cp} = \frac{\left(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12}\right)E_1 + \left(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12}\right)E_2}{(\mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02})}$$

Dari persamaan (4.2e) diperoleh

$$\varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_1 - \varepsilon_{02} E_{12} - \rho_1 I_1 = 0$$

Lampiran D. Lanjutan

$$\varepsilon_1 E_1 + (\varepsilon_{10} - \varepsilon_{02})E_{12} - (\mu + \rho_1)I_1 = 0$$

$$-(\mu + \rho_1)I_1 = -\varepsilon_1 E_1 - (\varepsilon_{10} - \varepsilon_{02})E_{12}$$

$$I_1^{cp} = \frac{\varepsilon_1 E_1 + (\varepsilon_{10} - \varepsilon_{02})E_{12}}{(\mu + \rho_1)}$$

Dari persamaan (4.2f) diperoleh

$$\varepsilon_2 E_2 + \varepsilon_{02} E_{12} - \mu I_2 - \varepsilon_{10} E_{12} - \rho_2 I_2 = 0$$

$$\varepsilon_2 E_2 + (\varepsilon_{02} - \varepsilon_{10})E_{12} - (\mu + \rho_2)I_2 = 0$$

$$-(\mu + \rho_2)i_2 = -\varepsilon_2 E_2 - (\varepsilon_{02} - \varepsilon_{10})E_{12}$$

$$I_2^{cp} = \frac{\varepsilon_2 E_2 + (\varepsilon_{02} - \varepsilon_{10})E_{12}}{(\mu + \rho_2)}$$

Dari persamaan (4.2g) diperoleh

$$\varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12} - \mu I_{12} - \rho_{10} I_{12} - \rho_{02} I_{12} = 0$$

$$\varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12} - (\mu + \rho_{10} + \rho_{02})I_{12} = 0$$

$$-(\mu + \rho_{10} + \rho_{02})I_{12} = -\varepsilon_{02} E_{12} - \varepsilon_{10} E_{12}$$

$$I_{12}^{cp} = \frac{\varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12}}{(\mu + \rho_{10} + \rho_{02})}$$

Dari persamaan (4.2h) diperoleh

$$\rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2 - \mu R_1 - \omega_1 R_1 = 0$$

$$\rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2 - (\mu + \omega_1)R_1 = 0$$

$$-(\mu + \omega_1)R_1 = -\rho_1 I_1 - \rho_{10} I_{12} - \omega_2 R_2$$

Lampiran D. Lanjutan

$$R_1^{cp} = \frac{\rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2}{(\mu + \omega_1)}$$

Dari persamaan (4.2i) diperoleh

$$\rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1 - \mu R_2 - \omega_2 R_2 = 0$$

$$\rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1 - (\mu + \omega_2) R_2 = 0$$

$$-(\mu + \omega_2) R_2 = -\rho_2 I_2 - \rho_{02} I_{12} - \omega_1 R_1$$

$$R_2^{cp} = \frac{\rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1}{(\mu + \omega_2)}$$

Berdasarkan uraian diatas, diperoleh titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia yang dinyatakan dalam

$$(E_0)_3 = (S, E_1, E_2, E_{12}, I_1, I_2, I_{12}, R_1, R_2)$$

$$= \left(S^{cp}, E_1^{cp}, E_2^{cp}, E_{12}^{cp}, I_1^{cp}, I_2^{cp}, I_{12}^{cp}, R_1^{cp}, R_2^{cp}\right)$$

dengan

$$S^{cp} = \frac{\mu}{(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12} + \beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12} + \mu)}$$

$$E_1^{cp} = \frac{(\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12}) S}{(\mu + \varepsilon_1 + \beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12})}$$

$$E_2^{cp} = \frac{(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12}) S}{(\mu + \varepsilon_2 + \beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12})}$$

$$E_{12}^{cp} = \frac{(\beta_2 I_2 + \beta_{02} I_{12}) E_1 + (\beta_1 I_1 + \beta_{10} I_{12}) E_2}{(\mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02})}$$

Lampiran D. Lanjutan

$$I_1^{cp} = \frac{\varepsilon_1 E_1 + (\varepsilon_{10} - \varepsilon_{02})E_{12}}{(\mu + \rho_1)}$$

$$I_2^{cp} = \frac{\varepsilon_2 E_2 + (\varepsilon_{02} - \varepsilon_{10})E_{12}}{(\mu + \rho_2)}$$

$$I_{12}^{cp} = \frac{\varepsilon_{02} E_{12} + \varepsilon_{10} E_{12}}{(\mu + \rho_{10} + \rho_{02})}$$

$$R_1^{cp} = \frac{\rho_1 I_1 + \rho_{10} I_{12} + \omega_2 R_2}{(\mu + \omega_1)}$$

$$R_2^{cp} = \frac{\rho_2 I_2 + \rho_{02} I_{12} + \omega_1 R_1}{(\mu + \omega_2)}$$

Lampiran E. Perhitungan Persamaan Karakteristik Titik Setimbang Non Endemik (E_0)

Substitusi titik setimbang $E_0 = (1,0,0,0,0,0,0,0,0)$ pada matrik Jacobian, sehingga diperoleh

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_{10}-\beta_{02} & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & \beta_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & \beta_2 & \beta_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & b_4 & -b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & -b_4 & 0 & -b_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & -b_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_{10} & -b_9 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & \rho_{02} & \omega_1 & -b_{10} \end{pmatrix}$$

dengan

$b_1 = \mu + \varepsilon_1$	$b_6 = \mu + \rho_1$
$b_2 = \mu + \varepsilon_2$	$b_7 = \mu + \rho_2$
$b_3 = \mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02}$	$b_8 = \mu + \rho_{10} + \rho_{02}$
$b_4 = \varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}$	$b_9 = \mu + \omega_1$
$b_5 = \varepsilon_{02} + \varepsilon_{10}$	$b_{10} = \mu + \omega_2$

Selanjutnya dicari nilai eigen dari matriks di atas dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\leftrightarrow \det\left(\lambda I - J_{E_0}\right) = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+\mu & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_{10}+\beta_{02} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+b_1 & 0 & 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+b_2 & 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & -b_4 & \lambda+b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+b_{10} \end{vmatrix} = 0$$

Lampiran E. Lanjutan

$$\leftrightarrow (\lambda+\mu)\begin{vmatrix} \lambda+b_1 & 0 & 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+b_2 & 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & -b_4 & \lambda+b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+b_{10} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+\mu)(\lambda+b_1)\begin{vmatrix} \lambda+b_2 & 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_4 & \lambda+b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 & b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+b_{10} \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+\mu)\varepsilon_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} & 0 & 0 \\ \lambda+b_2 & 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 & b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+b_{10} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+\mu)(\lambda+b_1)(\lambda+b_2)\begin{vmatrix} \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda+b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+b_{10} \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+\mu)(\lambda+b_1)\varepsilon_2\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} & 0 & 0 \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda+b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+b_{10} \end{vmatrix}$$

$$-(\lambda+\mu)\varepsilon_1(\lambda+b_2)\begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} & 0 & 0 \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+b_{10} \end{vmatrix}$$

Lampiran E. Lanjutan

$$+(\lambda+\mu)\varepsilon_1\varepsilon_2\begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} & 0 & 0 \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+b_{10} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+\mu)(\lambda+b_1)(\lambda+b_2)\omega_2\begin{vmatrix} \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda+b_6 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+\mu)(\lambda+b_1)(\lambda+b_2)(\lambda+b_{10})\begin{vmatrix} \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda+b_6 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+\mu)(\lambda+b_1)\varepsilon_2\omega_2\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} & 0 \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda+b_6 & 0 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+\mu)(\lambda+b_1)\varepsilon_2(\lambda+b_{10})\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} & 0 \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda+b_6 & 0 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 \end{vmatrix}$$

$$-(\lambda+\mu)\varepsilon_1(\lambda+b_2)\omega_2\begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} & 0 \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 \end{vmatrix}$$

$$-(\lambda+\mu)\varepsilon_1(\lambda+b_2)(\lambda+b_{10})\begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} & 0 \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 \end{vmatrix}$$

Lampiran E. Lanjutan

$$+(\lambda+\mu)\varepsilon_1\varepsilon_2\omega_2\begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} & 0 \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+\mu)\varepsilon_1\varepsilon_2(\lambda+b_{10})\begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} & 0 \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 & 0 \\ 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+b_9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+b_1)(\lambda+b_2)[-\omega_2\omega_1+(\lambda+b_{10})(\lambda+b_9)]\begin{vmatrix} \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda+b_6 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+\mu)(\lambda+b_1)\varepsilon_2[-\omega_2\omega_1+(\lambda+b_{10})(\lambda+b_9)]\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda+b_6 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 \end{vmatrix}$$

$$-(\lambda+\mu)\varepsilon_1(\lambda+b_2)[-\omega_2\omega_1+(\lambda+b_{10})(\lambda+b_9)]\begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & \lambda+b_7 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+\mu)\varepsilon_1\varepsilon_2[-\omega_2\omega_1+(\lambda+b_{10})(\lambda+b_9)]\begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} \\ 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} \\ \lambda+b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda+b_8 \end{vmatrix} = 0$$

Lampiran E. Lanjutan

$$
\begin{aligned}
\leftrightarrow \Bigg[(\lambda + b_1)(\lambda + b_2) & \begin{vmatrix} \lambda + b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda + b_6 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & \lambda + b_7 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda + b_8 \end{vmatrix} \\
& + (\lambda + b_1)\varepsilon_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} \\ \lambda + b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda + b_6 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda + b_8 \end{vmatrix} \\
& - \varepsilon_1(\lambda + b_2) \begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} \\ \lambda + b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & \lambda + b_7 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda + b_8 \end{vmatrix} \\
& + \varepsilon_1\varepsilon_2 \begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & -\beta_{10} \\ 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} \\ \lambda + b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & 0 & \lambda + b_8 \end{vmatrix} \Bigg] (\lambda + \mu)[-\omega_2\omega_1 \\
& + (\lambda + b_{10})(\lambda + b_9)] = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leftrightarrow \Bigg[(\lambda + b_1)(\lambda + b_2)(\lambda + b_8) & \begin{vmatrix} \lambda + b_3 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda + b_6 & 0 \\ b_4 & 0 & \lambda + b_7 \end{vmatrix} \\
& - (\lambda + b_1)\varepsilon_2\beta_2 \begin{vmatrix} \lambda + b_3 & 0 & 0 \\ -b_4 & \lambda + b_6 & 0 \\ -b_5 & 0 & \lambda + b_8 \end{vmatrix} \\
& - \varepsilon_1(\lambda + b_2)\beta_1 \begin{vmatrix} \lambda + b_3 & 0 & 0 \\ b_4 & \lambda + b_7 & 0 \\ -b_5 & 0 & \lambda + b_8 \end{vmatrix} \\
& + \varepsilon_1\varepsilon_2\beta_1 \begin{vmatrix} 0 & -\beta_2 & -\beta_{02} \\ \lambda + b_3 & 0 & 0 \\ -b_5 & 0 & \lambda + b_8 \end{vmatrix} \Bigg] (\lambda + \mu)[-\omega_2\omega_1 \\
& + (\lambda + b_{10})(\lambda + b_9)] = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leftrightarrow \Bigg[(\lambda + b_1)[(\lambda + b_2)(\lambda + b_8)(\lambda + b_7) - \varepsilon_2\beta_2(\lambda + b_8)] & \begin{vmatrix} \lambda + b_3 & 0 \\ -b_4 & \lambda + b_6 \end{vmatrix} \\
& - \varepsilon_1(\lambda + b_2)\beta_1(\lambda + b_8) \begin{vmatrix} \lambda + b_3 & 0 \\ b_4 & \lambda + b_7 \end{vmatrix} \\
& + \varepsilon_1\varepsilon_2\beta_1\beta_2 \begin{vmatrix} \lambda + b_3 & 0 \\ -b_5 & \lambda + b_8 \end{vmatrix} \Bigg] (\lambda + \mu)[-\omega_2\omega_1 \\
& + (\lambda + b_{10})(\lambda + b_9)] = 0
\end{aligned}
$$

Lampiran E. Lanjutan

$$\leftrightarrow (\lambda+\mu)(\lambda+b_3)(\lambda+b_8)[(\lambda+b_1)(\lambda+b_6)[(\lambda+b_2)(\lambda+b_7)-\varepsilon_2\beta_2] \\ -\varepsilon_1(\lambda+b_2)\beta_1(\lambda+b_7)+\varepsilon_1\varepsilon_2\beta_1\beta_2][-\omega_2\omega_1 \\ +(\lambda+b_{10})(\lambda+b_9)]=0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+\mu)(\lambda+b_3)(\lambda+b_8)[\lambda^4+(b_1+b_6+b_2+b_7)\lambda^3 \\ +(b_2b_1+b_7b_1+b_2b_6+b_7b_6+b_1b_6+b_2b_7-\varepsilon_2\beta_2 \\ -\varepsilon_1\beta_1)\lambda^2 \\ +(b_1b_6b_2+b_1b_6b_7+b_2b_7b_1-\varepsilon_2\beta_2b_1+b_2b_7b_6 \\ -\varepsilon_2\beta_2b_6-\varepsilon_1\beta_1b_2-\varepsilon_1\beta_1b_7)\lambda+b_2b_7b_1b_6-\varepsilon_2\beta_2b_1b_6 \\ -\varepsilon_1\beta_1b_2b_7+\varepsilon_1\varepsilon_2\beta_1\beta_2][\lambda^2+(b_9+b_{10})\lambda+b_9b_{10} \\ -\omega_2\omega_1]=0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik untuk titik setimbang non endemik sebagai berikut

$$\leftrightarrow (\lambda+\mu)(\lambda+b_3)(\lambda+b_8)[\lambda^4+A_1\lambda^3+A_2\lambda^2+A_3\lambda+ \\ A_4][\lambda^2+B_1\lambda+B_2]=0$$

dengan

$$A_1=b_1+b_6+b_2+b_7$$
$$A_2=b_2b_1+b_7b_1+b_2b_6+b_7b_6+b_1b_6+b_2b_7-\varepsilon_2\beta_2-\varepsilon_1\beta_1$$
$$A_3=b_1b_6b_2+b_1b_6b_7+b_2b_7b_1-\varepsilon_2\beta_2b_1+b_2b_7b_6-\varepsilon_2\beta_2b_6 \\ -\varepsilon_1\beta_1b_2-\varepsilon_1\beta_1b_7$$
$$A_4=b_2b_7b_1b_6-\varepsilon_2\beta_2b_1b_6-\varepsilon_1\beta_1b_2b_7+\varepsilon_1\varepsilon_2\beta_1\beta_2$$
$$B_1=b_9+b_{10}$$
$$B_2=b_9b_{10}-\omega_2\omega_1$$

Lampiran F. Perhitungan Kriteria Routh-Hurwitz Persamaan Karakteristik Titik Setimbang Non Endemik (E_0)

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.5) agar memiliki akar-akar negatif dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz

$$[\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4][\lambda^2 + B_1\lambda + B_2] = 0 \quad (4.5)$$

Persamaan karakteristik (4.5) dapat ditulis sebagai

$$\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0 \quad (4.5a)$$

$$\lambda^2 + B_1\lambda + B_2 = 0 \quad (4.5b)$$

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.5a)

$$\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0 \quad (4.5a)$$

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^4 & 1 & A_2 & A_4 \\ \lambda^3 & A_1 & A_3 & \\ \lambda^2 & b_1 & b_2 & \\ \lambda & c_1 & & \\ 1 & d_1 & & \end{array}$$

dengan

$$b_1 = \frac{A_1A_2 - A_3}{A_1}$$

$$b_2 = \frac{A_1A_4}{A_1}$$

$$= A_4$$

$$c_1 = \frac{b_1A_3 - A_1b_2}{b_1}$$

$$= \left(\frac{(A_1A_2 - A_3)}{A_1}A_3 - A_1A_4\right)\frac{A_1}{(A_1A_2 - A_3)}$$

Lampiran F. Lanjutan

$$= \left(\frac{(A_1A_2 - A_3)}{A_1}A_3 \times \frac{A_1}{(A_1A_2 - A_3)}\right) - \left(A_1A_4 \times \frac{A_1}{(A_1A_2 - A_3)}\right)$$

$$= A_3 - \frac{{A_1}^2A_4}{A_1A_2 - A_3}$$

$$= \frac{(A_1A_2 - A_3)A_3 - {A_1}^2A_4}{(A_1A_2 - A_3)}$$

$$d_1 = \frac{c_1b_2}{c_1}$$

$$= b_2$$

$$= A_4$$

Persamaan (4.5a) akan memiliki akar-akar yang negatif jika dan hanya jika.

$\leftrightarrow A_1, A_2, A_3, A_4 > 0$

$\leftrightarrow A_1A_2 > A_3$

$\leftrightarrow (A_1A_2 - A_3)A_3 > {A_1}^2A_4$

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.5b)

$$\lambda^2 + B_1\lambda + B_2 = 0 \qquad (4.5b)$$

$$\begin{array}{c|ll} \lambda^2 & 1 & B_2 \\ \lambda & B_1 & \\ 1 & b_1 & \end{array}$$

dengan

$$b_1 = \frac{B_1B_2}{B_1}$$

Persamaan (4.5b) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika $B_1, B_2 > 0$.

Lampiran G. Perhitungan Persamaan Karakteristik Titik Setimbang Endemik Chlamydia $(E_0)_1$

Substitusi titik setimbang $(E_0)_1 = (S^c, E_1^c, 0,0, I_1^c, 0,0, R_1^c, R_2^c)$ pada matrik Jacobian, sehingga diperoleh

$$J_{(E_0)_1} = \begin{pmatrix} -c_1-\mu & 0 & 0 & 0 & -c_7 & -c_9 & -c_{12}-c_{13} & 0 & 0 \\ c_1 & -c_2 & 0 & 0 & c_7 & -c_{10} & c_{12}-c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3-c_1 & 0 & 0 & c_9 & c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & -c_4 & 0 & c_{10} & c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & c_5 & -c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & -c_5 & 0 & -c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 & -c_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_{10} & -c_{16} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & \rho_{02} & \omega_1 & -c_{17} \end{pmatrix}$$

dengan

$c_1 = \beta_1 I_1^c$

$c_2 = \mu + \varepsilon_1$

$c_3 = \mu + \varepsilon_2$

$c_4 = \mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02}$

$c_5 = \varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}$

$c_6 = \varepsilon_{02} + \varepsilon_{10}$

$c_7 = \beta_1 S^c$

$c_8 = \mu + \rho_1$

$c_9 = \beta_2 S^c$

$c_{10} = \beta_2 E_1^c$

$c_{11} = \mu + \rho_2$

$c_{12} = \beta_{10} S^c$

$c_{13} = \beta_{02} S^c$

$c_{14} = \beta_{02} E_1^c$

$c_{15} = \mu + \rho_{10} + \rho_{02}$

$c_{16} = \mu + \omega_1$

$c_{17} = \mu + \omega_2$

Selanjutnya dicari nilai eigen dari matriks di atas dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\det\left(\lambda I - J_{(E_0)_1}\right) = 0$$

Lampiran G. Lanjutan

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+c_1+\mu & 0 & 0 & 0 & c_7 & c_9 & c_{12}+c_{13} & 0 & 0 \\ -c_1 & \lambda+c_2 & 0 & 0 & -c_7 & c_{10} & -c_{12}+c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & -c_5 & \lambda+c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+c_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+c_{17} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+c_1+\mu)\begin{vmatrix} \lambda+c_2 & 0 & 0 & -c_7 & c_{10} & -c_{12}+c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & -c_5 & \lambda+c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+c_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+c_{17} \end{vmatrix}$$

$$-c_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & c_7 & c_9 & c_{12}+c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & -c_5 & \lambda+c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+c_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+c_{17} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+c_1+\mu)(\lambda+c_2)\begin{vmatrix} \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 & 0 \\ -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & -c_5 & \lambda+c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+c_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+c_{17} \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+c_1+\mu)\varepsilon_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & -c_7 & c_{10} & -c_{12}+c_{14} & 0 & 0 \\ \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 & 0 \\ -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+c_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+c_{17} \end{vmatrix}$$

$$-c_1\varepsilon_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & c_7 & c_9 & c_{12}+c_{13} & 0 & 0 \\ \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 & 0 \\ -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+c_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+c_{17} \end{vmatrix} = 0$$

Lampiran G. Lanjutan

$$\leftrightarrow (\lambda+c_1+\mu)(\lambda+c_2)\omega_2 \begin{vmatrix} \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 \\ -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 \\ 0 & -c_5 & \lambda+c_8 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+c_1+\mu)(\lambda+c_2)(\lambda+c_{17}) \begin{vmatrix} \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 \\ -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 \\ 0 & -c_5 & \lambda+c_8 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+c_{16} \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+c_1+\mu)\varepsilon_1\omega_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -c_7 & c_{10} & -c_{12}+c_{14} & 0 \\ \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 \\ -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+c_1+\mu)\varepsilon_1(\lambda+c_{17}) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -c_7 & c_{10} & -c_{12}+c_{14} & 0 \\ \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 \\ -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+c_{16} \end{vmatrix}$$

$$-c_1\varepsilon_1\omega_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_7 & c_9 & c_{12}+c_{13} & 0 \\ \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 \\ -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 \end{vmatrix}$$

$$-c_1\varepsilon_1(\lambda+c_{17}) \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_7 & c_9 & c_{12}+c_{13} & 0 \\ \lambda+c_3+c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} & 0 \\ -c_1 & \lambda+c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} & 0 \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda+c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda+c_{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+c_{16} \end{vmatrix} = 0$$

Lampiran G. Lanjutan

$$
\begin{aligned}
\leftrightarrow (\lambda + c_1 + \mu)(\lambda + c_2) &\begin{vmatrix} \lambda + c_3 + c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} \\ -c_1 & \lambda + c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} \\ 0 & -c_5 & \lambda + c_8 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda + c_{11} & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda + c_{15} \end{vmatrix} [-\omega_1 \omega_2 \\
&+ (\lambda + c_{16})(\lambda + c_{17})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+(\lambda + c_1 + \mu)\varepsilon_1 &\begin{vmatrix} 0 & 0 & -c_7 & c_{10} & -c_{12} + c_{14} \\ \lambda + c_3 + c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} \\ -c_1 & \lambda + c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda + c_{11} & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda + c_{15} \end{vmatrix} [-\omega_1 \omega_2 \\
&+ (\lambda + c_{16})(\lambda + c_{17})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-c_1 \varepsilon_1 &\begin{vmatrix} 0 & 0 & c_7 & c_9 & c_{12} + c_{13} \\ \lambda + c_3 + c_1 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{13} \\ -c_1 & \lambda + c_4 & 0 & -c_{10} & -c_{14} \\ -\varepsilon_2 & c_5 & 0 & \lambda + c_{11} & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & 0 & \lambda + c_{15} \end{vmatrix} [-\omega_1 \omega_2 \\
&+ (\lambda + c_{16})(\lambda + c_{17})] = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leftrightarrow [(\lambda + c_1 + \mu)&[(\lambda + c_2)(\lambda + c_8) - \varepsilon_1 c_7] \\
&- c_1 \varepsilon_1 c_7] \begin{vmatrix} \lambda + c_3 + c_1 & 0 & -c_9 & -c_{13} \\ -c_1 & \lambda + c_4 & -c_{10} & -c_{14} \\ -\varepsilon_2 & c_5 & \lambda + c_{11} & 0 \\ 0 & -c_6 & 0 & \lambda + c_{15} \end{vmatrix} [-\omega_1 \omega_2 \\
&+ (\lambda + c_{16})(\lambda + c_{17})] = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leftrightarrow [(\lambda + c_1 + \mu)&[(\lambda + c_2)(\lambda + c_8) - \varepsilon_1 c_7] \\
&- c_1 \varepsilon_1 c_7] \Bigg[(\lambda + c_3 + c_1) \begin{vmatrix} \lambda + c_4 & -c_{10} & -c_{14} \\ c_5 & \lambda + c_{11} & 0 \\ -c_6 & 0 & \lambda + c_{15} \end{vmatrix} \\
&+ c_1 \begin{vmatrix} 0 & -c_9 & -c_{13} \\ c_5 & \lambda + c_{11} & 0 \\ -c_6 & 0 & \lambda + c_{15} \end{vmatrix} \\
&- \varepsilon_2 \begin{vmatrix} 0 & -c_9 & -c_{13} \\ \lambda + c_4 & -c_{10} & -c_{14} \\ -c_6 & 0 & \lambda + c_{15} \end{vmatrix} \Bigg] [-\omega_1 \omega_2 \\
&+ (\lambda + c_{16})(\lambda + c_{17})] = 0
\end{aligned}
$$

Lampiran G. Lanjutan

$$
\begin{aligned}
\leftrightarrow [(\lambda + c_1 + \mu)[(\lambda + c_2)(\lambda + c_8) - \varepsilon_1 c_7]
&- c_1\varepsilon_1 c_7]\left[(\lambda + c_3 + c_1)\left[c_{10}\begin{vmatrix} c_5 & 0 \\ -c_6 & \lambda + c_{15}\end{vmatrix}\right.\right. \\
&+ (\lambda + c_{11})\left.\begin{vmatrix} \lambda + c_4 & -c_{14} \\ -c_6 & \lambda + c_{15}\end{vmatrix}\right] \\
&+ c_1\left[c_9\begin{vmatrix} c_5 & 0 \\ -c_6 & \lambda + c_{15}\end{vmatrix} + (\lambda + c_{11})\begin{vmatrix} 0 & -c_{13} \\ -c_6 & \lambda + c_{15}\end{vmatrix}\right] \\
&- \varepsilon_2\left.\left[c_9\begin{vmatrix} \lambda + c_4 & -c_{14} \\ -c_6 & \lambda + c_{15}\end{vmatrix} - c_{10}\begin{vmatrix} 0 & -c_{13} \\ -c_6 & \lambda + c_{15}\end{vmatrix}\right]\right][-\omega_1\omega_2 \\
&+ (\lambda + c_{16})(\lambda + c_{17})] = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leftrightarrow [(\lambda + c_1 + \mu)[(\lambda + c_2)(\lambda + c_8) - \varepsilon_1 c_7]
&- c_1\varepsilon_1 c_7]\Big[(\lambda + c_3 + c_1)\big[c_{10}c_5(\lambda + c_{15}) \\
&+ (\lambda + c_{11})[(\lambda + c_4)(\lambda + c_{15}) - c_6 c_{14}]\big] \\
&+ c_1[c_9 c_5(\lambda + c_{15}) - (\lambda + c_{11})c_6 c_{13}] \\
&- \varepsilon_2[c_9[(\lambda + c_4)(\lambda + c_{15}) - c_6 c_{14}] + c_6 c_{10} c_{13}]\Big][-\omega_1\omega_2 \\
&+ (\lambda + c_{16})(\lambda + c_{17})] = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leftrightarrow [\lambda^3 + (c_2 + c_8 + c_1 + \mu)\lambda^2 + (c_2 c_8 - \varepsilon_1 c_7 + c_1 c_2 + c_1 c_8 + \mu c_2 + \mu c_8)\lambda
&+ c_1 c_2 c_8 - c_1\varepsilon_1 c_7 + \mu c_2 c_8 - \mu\varepsilon_1 c_7 - c_1\varepsilon_1 c_7][\lambda^4 \\
&+ (c_{11} + c_4 + c_{15} + c_3 + c_1)\lambda^3 \\
&+ (c_{11}c_4 + c_{15}c_{11} + c_{15}c_4 + c_{10}c_5 - c_6 c_{14} + c_3 c_{11} + c_{11}c_1 \\
&+ c_4 c_3 + c_4 c_1 + c_{15}c_3 + c_{15}c_1 - \varepsilon_2 c_9)\lambda^2 \\
&+ (c_{15}c_{11}c_4 - c_6 c_{14}c_{11} + c_{15}c_{10}c_5 + c_3 c_{11}c_4 + c_{11}c_4 c_1 \\
&+ c_{15}c_{11}c_3 + c_{15}c_{11}c_1 + c_{15}c_4 c_3 + c_{15}c_4 c_1 + c_{10}c_5 c_3 \\
&+ c_{10}c_5 c_1 - c_6 c_{14}c_3 - c_6 c_{14}c_1 + c_1 c_9 c_5 - c_1 c_6 c_{13} \\
&- \varepsilon_2 c_9 c_4 - \varepsilon_2 c_9 c_{15})\lambda + c_{15}c_{11}c_4 c_3 + c_{15}c_{11}c_4 c_1 \\
&- c_6 c_{14}c_{11}c_3 - c_6 c_{14}c_{11}c_1 + c_{15}c_{10}c_5 c_3 + c_{15}c_{10}c_5 c_1 \\
&+ c_1 c_9 c_5 c_{15} - c_1 c_6 c_{13}c_{11} - \varepsilon_2 c_9 c_4 c_{15} + \varepsilon_2 c_9 c_6 c_{14} \\
&- \varepsilon_2 c_6 c_{10}c_{13}][\lambda^2 + (c_{16} + c_{17})\lambda + c_{16}c_{17} - \omega_1\omega_2] = 0
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh persamaan karkteristik untuk titik setimbang endemik chlamydia sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\leftrightarrow (\lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3)(\lambda^4 + D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_3\lambda + D_4)(\lambda^2
&+ F_1\lambda + F_2) = 0
\end{aligned}
$$

Lampiran G. Lanjutan

dengan

$$
\begin{aligned}
C_1 &= c_2 + c_8 + c_1 + \mu \\
C_2 &= c_2c_8 - \varepsilon_1c_7 + c_1c_2 + \mu c_2 + c_1c_8 + \mu c_8 \\
C_3 &= c_1c_2c_8 + \mu c_2c_8 - c_1\varepsilon_1c_7 + \mu\varepsilon_1c_7 - c_1\varepsilon_1c_7 \\
D_1 &= c_{11} + c_4 + c_{15} + c_3 + c_1 \\
D_2 &= c_{11}c_4 + c_{15}c_{11} + c_{15}c_4 + c_{10}c_5 - c_6c_{14} + c_3c_{11} + c_{11}c_1 \\
&\quad +c_4c_3 + c_4c_1 + c_{15}c_3 + c_{15}c_1 - \varepsilon_2c_9 \\
D_3 &= c_{15}c_{11}c_4 - c_6c_{14}c_{11} + c_{15}c_{10}c_5 + c_3c_{11}c_4 + c_{11}c_4c_1 \\
&\quad +c_{15}c_{11}c_3 + c_{15}c_{11}c_1 + c_{15}c_4c_3 + c_{15}c_4c_1 + c_{10}c_5c_3 \\
&\quad +c_{10}c_5c_1 - c_6c_{14}c_3 - c_6c_{14}c_1 + c_1c_9c_5 - c_1c_6c_{13} \\
&\quad -\varepsilon_2c_9c_4 - \varepsilon_2c_9c_{15} \\
D_4 &= c_{15}c_{11}c_4c_3 + c_{15}c_{11}c_4c_1 - c_6c_{14}c_{11}c_3 - c_6c_{14}c_{11}c_1 \\
&\quad +c_{15}c_{10}c_5c_3 + c_{15}c_{10}c_5c_1 + c_1c_9c_5c_{15} - c_1c_6c_{13}c_{11} \\
&\quad -\varepsilon_2c_9c_4c_{15} + \varepsilon_2c_9c_6c_{14} - \varepsilon_2c_6c_{10}c_{13} \\
F_1 &= c_{16} + c_{17} \\
F_2 &= c_{16}c_{17} - \omega_1\omega_2
\end{aligned}
$$

Lampiran H. Perhitungan Kriteria Routh-Hurwitz Persamaan Karakteristik Titik Setimbang Endemik Chlamydia $(E_0)_1$

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.6) agar memiliki akar-akar negatif dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz

$$(\lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3)(\lambda^4 + D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_3\lambda + D_4)(\lambda^2 + F_1\lambda + F_2) = 0 \quad (4.6)$$

Persamaan karakteristik (4.6) dapat ditulis sebagai

$$\lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3 = 0 \quad (4.6a)$$

$$\lambda^4 + D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_3\lambda + D_4 = 0 \quad (4.6b)$$

$$\lambda^2 + F_1\lambda + F_2 = 0 \quad (4.6c)$$

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.6a)

$$\lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3 = 0 \quad (4.6a)$$

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & C_2 \\ \lambda^2 & C_1 & C_3 \\ \lambda & b_1 & \\ 1 & c_1 & \end{array}$$

dengan

$$b_1 = \frac{C_1C_2 - C_3}{C_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1C_3}{b_1}$$

$$= C_3$$

Persamaan (4.6a) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika $C_1, C_2, C_3 > 0$ dan $C_1C_2 > C_3$.

Lampiran H. Lanjutan

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.6b)

$$\lambda^4 + D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 + D_3\lambda + D_4 = 0 \qquad (4.6b)$$

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^4 & 1 & D_2 & D_4 \\ \lambda^3 & D_1 & D_3 & \\ \lambda^2 & b_1 & b_2 & \\ \lambda & c_1 & & \\ 1 & d_1 & & \end{array}$$

dengan

$$b_1 = \frac{D_1D_2 - D_3}{D_1}$$

$$b_2 = \frac{D_1D_4}{D_1}$$

$$= D_4$$

$$c_1 = \frac{b_1D_3 - D_1b_2}{b_1}$$

$$= \left(\frac{(D_1D_2 - D_3)}{D_1}D_3 - D_1D_4\right)\frac{D_1}{(D_1D_2 - D_3)}$$

$$= \left(\frac{(D_1D_2 - D_3)}{D_1}D_3 \times \frac{D_1}{(D_1D_2 - D_3)}\right)$$

$$-\left(D_1D_4 \times \frac{D_1}{(D_1D_2 - D_3)}\right)$$

$$= D_3 - \frac{{D_1}^2D_4}{(D_1D_2 - D_3)}$$

Lampiran H. Lanjutan

$$= \frac{(D_1D_2 - D_3)D_3 - {D_1}^2D_4}{(D_1D_2 - D_3)}$$

$$d_1 = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1}$$

$$= \left[\left(\frac{(D_1D_2 - D_3)D_3 - {D_1}^2D_4}{(D_1D_2 - D_3)}\right)D_4\right]\left(\frac{(D_1D_2 - D_3)}{(D_1D_2 - D_3)D_3 - {D_1}^2D_4}\right)$$

$$= D_4$$

Persamaan (4.6b) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika
$\leftrightarrow D_1, D_2, D_3, D_4 > 0$
$\leftrightarrow D_1D_2 > D_3$
$\leftrightarrow (D_1D_2 - D_3)D_3 - {D_1}^2D_4$

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.6c)

$$\lambda^2 + F_1\lambda + F_2 = 0 \qquad (4.6c)$$

$$\begin{array}{c|ll} \lambda^2 & 1 & F_2 \\ \lambda & F_1 & \\ 1 & b_1 & \end{array}$$

dengan

$$b_1 = \frac{F_1F_2}{F_1}$$

Persamaan (4.6c) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika $F_1, F_2 > 0$.

Lampiran I. Perhitungan Persamaan Karakteristik Titik Setimbang Endemik Pneumonia $(E_0)_2$

Substitusi titik setimbang $(E_0)_2 = \left(S^p, 0, E_2^p, 0,0, I_2^p, 0, R_1^p, R_2^p\right)$ pada matrik Jacobian, sehingga diperoleh

$$J_{(E_0)_2} = \begin{pmatrix} -d_1-\mu & 0 & 0 & 0 & -d_7 & -d_{10} & -d_{12}-d_{13} & 0 & 0 \\ 0 & -d_2-d_1 & 0 & 0 & d_7 & 0 & d_{12} & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & -d_3 & 0 & -d_8 & d_{10} & d_{13}-d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & -d_4 & d_8 & 0 & -d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & d_5 & -d_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & -d_5 & 0 & -d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_6 & 0 & 0 & -d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_{10} & -d_{16} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & \rho_{02} & \omega_1 & -d_{17} \end{pmatrix}$$

dengan

$d_1 = \beta_1 I_1^p$ $\quad$ $d_{10} = \beta_2 S^p$

$d_2 = \mu + \varepsilon_1$ $\quad$ $d_{11} = \mu + \rho_2$

$d_3 = \mu + \varepsilon_2$ $\quad$ $d_{12} = \beta_{10} S^p$

$d_4 = \mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02}$ $\quad$ $d_{13} = \beta_{02} S^p$

$d_5 = \varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}$ $\quad$ $d_{14} = \beta_{10} E_2^p$

$d_6 = \varepsilon_{02} + \varepsilon_{10}$ $\quad$ $d_{15} = \mu + \rho_{10} + \rho_{02}$

$d_7 = \beta_1 S^p$ $\quad$ $d_{16} = \mu + \omega_1$

$d_8 = \beta_1 E_2^p$ $\quad$ $d_{17} = \mu + \omega_2$

$d_9 = \mu + \rho_1$

Selanjutnya dicari nilai eigen dari matriks di atas dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\det\left(\lambda I - J_{(E_0)_2}\right) = 0$$

Lampiran I. Lanjutan

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+d_1+\mu & 0 & 0 & 0 & d_7 & d_{10} & d_{12}+d_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+d_2+d_1 & 0 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 & 0 \\ -d_1 & 0 & \lambda+d_3 & 0 & d_8 & -d_{10} & -d_{13}+d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & -d_1 & 0 & \lambda+d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & -d_5 & \lambda+d_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & d_5 & 0 & \lambda+d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda+d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+d_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+d_{17} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+d_1+\mu) \begin{vmatrix} \lambda+d_2+d_1 & 0 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+d_3 & 0 & d_8 & -d_{10} & -d_{13}+d_{14} & 0 & 0 \\ -d_1 & 0 & \lambda+d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & -d_5 & \lambda+d_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & d_5 & 0 & \lambda+d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda+d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+d_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+d_{17} \end{vmatrix}$$

$$-d_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d_7 & d_{10} & d_{12}+d_{13} & 0 & 0 \\ \lambda+d_2+d_1 & 0 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 & 0 \\ -d_1 & 0 & \lambda+d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & -d_5 & \lambda+d_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & d_5 & 0 & \lambda+d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda+d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+d_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+d_{17} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+d_1+\mu)(\lambda+d_3) \begin{vmatrix} \lambda+d_2+d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 & 0 \\ -d_1 & \lambda+d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda+d_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_5 & 0 & \lambda+d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda+d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+d_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+d_{17} \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+d_1+\mu)\varepsilon_2 \begin{vmatrix} \lambda+d_2+d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_8 & -d_{10} & -d_{13}+d_{14} & 0 & 0 \\ -d_1 & \lambda+d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda+d_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda+d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+d_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+d_{17} \end{vmatrix}$$

$$-d_1\varepsilon_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & d_7 & d_{10} & d_{12}+d_{13} & 0 & 0 \\ \lambda+d_2+d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 & 0 \\ -d_1 & \lambda+d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda+d_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda+d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+d_{16} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+d_{17} \end{vmatrix} = 0$$

Lampiran I. Lanjutan

$$\leftrightarrow (\lambda + d_1 + \mu)(\lambda + d_3)\omega_2 \begin{vmatrix} \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_5 & 0 & \lambda + d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda + d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda + d_1 + \mu)(\lambda + d_3)(\lambda + d_{17}) \begin{vmatrix} \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_5 & 0 & \lambda + d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda + d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda + d_{16} \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda + d_1 + \mu)\varepsilon_2\omega_2 \begin{vmatrix} \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 \\ 0 & 0 & d_8 & -d_{10} & -d_{13} + d_{14} & 0 \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda + d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda + d_1 + \mu)\varepsilon_2(\lambda + d_{17}) \begin{vmatrix} \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 \\ 0 & 0 & d_8 & -d_{10} & -d_{13} + d_{14} & 0 \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda + d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda + d_{16} \end{vmatrix}$$

$$-d_1\varepsilon_2\omega_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & d_7 & d_{10} & d_{12} + d_{13} & 0 \\ \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda + d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 \end{vmatrix}$$

$$-d_1\varepsilon_2(\lambda + d_{17}) \begin{vmatrix} 0 & 0 & d_7 & d_{10} & d_{12} + d_{13} & 0 \\ \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} & 0 \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} & 0 \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda + d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda + d_{16} \end{vmatrix} = 0$$

Lampiran I. Lanjutan

$$\leftrightarrow (\lambda + d_1 + \mu)(\lambda + d_3)\begin{vmatrix} \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 & 0 \\ 0 & d_5 & 0 & \lambda + d_{11} & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda + d_{15} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + d_{17})(\lambda + d_{16})]$$

$$+(\lambda + d_1 + \mu)\varepsilon_2\begin{vmatrix} \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} \\ 0 & 0 & d_8 & -d_{10} & -d_{13} + d_{14} \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda + d_{15} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + d_{17})(\lambda + d_{16})]$$

$$-d_1\varepsilon_2\begin{vmatrix} 0 & 0 & d_7 & d_{10} & d_{12} + d_{13} \\ \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & 0 & -d_{12} \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & 0 & d_{14} \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & 0 & \lambda + d_{15} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + d_{17})(\lambda + d_{16})] = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda + d_1 + \mu)(\lambda + d_3)(\lambda + d_{11})\begin{vmatrix} \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & -d_{12} \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & d_{14} \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & \lambda + d_{15} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + d_{17})(\lambda + d_{16})]$$

$$-(\lambda + d_1 + \mu)\varepsilon_2 d_{10}\begin{vmatrix} \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & -d_{12} \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & d_{14} \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & \lambda + d_{15} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + d_{17})(\lambda + d_{16})]$$

$$+d_1\varepsilon_2 d_{10}\begin{vmatrix} \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & -d_{12} \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & d_{14} \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & \lambda + d_{15} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + d_{17})(\lambda + d_{16})] = 0$$

$$\leftrightarrow [(\lambda + d_1 + \mu)[(\lambda + d_3)(\lambda + d_{11}) - \varepsilon_2 d_{10}] + d_1\varepsilon_2 d_{10}]\begin{vmatrix} \lambda + d_2 + d_1 & 0 & -d_7 & -d_{12} \\ -d_1 & \lambda + d_4 & -d_8 & d_{14} \\ -\varepsilon_1 & -d_5 & \lambda + d_9 & 0 \\ 0 & -d_6 & 0 & \lambda + d_{15} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + d_{17})(\lambda + d_{16})] = 0$$

Lampiran I. Lanjutan

$$\leftrightarrow [(\lambda + d_1 + \mu)[(\lambda + d_3)(\lambda + d_{11}) - \varepsilon_2 d_{10}] + d_1\varepsilon_2 d_{10}]\left[(\lambda + d_2 + d_1)\begin{vmatrix}\lambda + d_4 & -d_8 & d_{14}\\ -d_5 & \lambda + d_9 & 0\\ -d_6 & 0 & \lambda + d_{15}\end{vmatrix} + d_1\begin{vmatrix}0 & -d_7 & -d_{12}\\ -d_5 & \lambda + d_9 & 0\\ -d_6 & 0 & \lambda + d_{15}\end{vmatrix} - \varepsilon_1\begin{vmatrix}0 & -d_7 & -d_{12}\\ \lambda + d_4 & -d_8 & d_{14}\\ -d_6 & 0 & \lambda + d_{15}\end{vmatrix}\right][-\omega_1\omega_2 + (\lambda + d_{17})(\lambda + d_{16})] = 0$$

$$\leftrightarrow [(\lambda + d_1 + \mu)[(\lambda + d_3)(\lambda + d_{11}) - \varepsilon_2 d_{10}] + d_1\varepsilon_2 d_{10}]\left[(\lambda + d_2 + d_1)\left[d_{14}\begin{vmatrix}-d_5 & \lambda + d_9\\ -d_6 & 0\end{vmatrix} + (\lambda + d_{15})\begin{vmatrix}\lambda + d_4 & -d_8\\ -d_5 & \lambda + d_9\end{vmatrix}\right] + d_1\left[-d_{12}\begin{vmatrix}-d_5 & \lambda + d_9\\ -d_6 & 0\end{vmatrix} + (\lambda + d_{15})\begin{vmatrix}0 & -d_7\\ -d_5 & \lambda + d_9\end{vmatrix}\right] - \varepsilon_1\left[d_7\begin{vmatrix}\lambda + d_4 & d_{14}\\ -d_6 & \lambda + d_{15}\end{vmatrix} - d_8\begin{vmatrix}0 & -d_{12}\\ -d_6 & \lambda + d_{15}\end{vmatrix}\right]\right][-\omega_1\omega_2 + (\lambda + d_{17})(\lambda + d_{16})] = 0$$

$$\leftrightarrow [(\lambda + d_1 + \mu)[(\lambda + d_3)(\lambda + d_{11}) - \varepsilon_2 d_{10}] + d_1\varepsilon_2 d_{10}]\Big[(\lambda + d_2 + d_1)\big[d_{14}d_6(\lambda + d_9) + (\lambda + d_{15})[(\lambda + d_4)(\lambda + d_9) - d_5 d_8]\big] + d_1[-d_{12}d_6(\lambda + d_9) - d_5 d_7(\lambda + d_{15})] - \varepsilon_1[d_7[(\lambda + d_4)(\lambda + d_{15}) + d_6 d_{14}] + d_8 d_{12} d_6]\Big][-\omega_1\omega_2 + (\lambda + d_{17})(\lambda + d_{16})] = 0$$

$$\leftrightarrow [\lambda^3 + (d_3 + d_{11} + d_1 + \mu)\lambda^2 + (d_3 d_{11} - \varepsilon_2 d_{10} + d_1 d_3 + \mu d_3 + d_1 d_{11} + \mu d_{11})\lambda + d_1 d_3 d_{11} + \mu d_3 d_{11} - d_1\varepsilon_2 d_{10} + \mu\varepsilon_2 d_{10} + d_1\varepsilon_2 d_{10}][\lambda^4 + (d_{15} + d_4 + d_9 + d_2 + d_1)\lambda^3 + (d_4 d_{15} + d_9 d_{15} + d_9 d_4 + d_{14} d_6 - d_5 d_8 + d_2 d_{15} + d_1 d_{15} + d_2 d_4 + d_1 d_4 + d_2 d_9 + d_1 d_9 - \varepsilon_1 d_7)\lambda^2 + (d_9 d_4 d_{15} - d_5 d_8 d_{15} + d_{14} d_6 d_9 + d_2 d_4 d_{15} + d_1 d_4 d_{15} + d_2 d_9 d_{15} + d_1 d_9 d_{15} + d_2 d_9 d_4 + d_1 d_9 d_4 + d_2 d_{14} d_6 + d_1 d_{14} d_6 - d_2 d_5 d_8 - d_5 d_8 d_1 - d_1 d_{12} d_6 - d_1 d_5 d_7 - \varepsilon_1 d_7 d_4 - \varepsilon_1 d_7 d_{15})\lambda + d_2 d_9 d_4 d_{15} + d_9 d_4 d_{15} d_1 - d_2 d_5 d_8 d_{15} - d_5 d_8 d_{15} d_1 + d_2 d_{14} d_6 d_9 + d_{14} d_6 d_9 d_1 - d_1 d_{12} d_6 d_9 - d_1 d_5 d_7 d_{15} - \varepsilon_1 d_7 d_4 d_{15} - \varepsilon_1 d_7 d_6 d_{14} - \varepsilon_1 d_8 d_{12} d_6][\lambda^2 + (d_{17} + d_{16})\lambda + d_{16} d_{17} - \omega_1\omega_2] = 0$$

Lampiran I. Lanjutan

Sehingga diperoleh persamaan karkteristik untuk titik setimbang endemik pneumonia sebagai berikut

$$\leftrightarrow [\lambda^3 + G_1\lambda^2 + G_2\lambda + G_3][\lambda^4 + H_1\lambda^3 + H_2\lambda^2 + H_3\lambda + H_4][\lambda^2 + K_1\lambda + K_2] = 0$$

dengan

$$G_1 = d_3 + d_{11} + d_1 + \mu$$
$$G_2 = d_3d_{11} - \varepsilon_2 d_{10} + d_1d_3 + \mu d_3 + d_1d_{11} + \mu d_{11}$$
$$G_3 = d_1d_3d_{11} + \mu d_3d_{11} - d_1\varepsilon_2 d_{10} + \mu\varepsilon_2 d_{10} + d_1\varepsilon_2 d_{10}$$
$$H_1 = d_{15} + d_4 + d_9 + d_2 + d_1$$
$$H_2 = d_4d_{15} + d_9d_{15} + d_9d_4 + d_{14}d_6 - d_5d_8 + d_2d_{15} + d_1d_{15} + d_2d_4 + d_1d_4 + d_2d_9 + d_1d_9 - \varepsilon_1 d_7$$
$$H_3 = d_9d_4d_{15} - d_5d_8d_{15} + d_{14}d_6d_9 + d_2d_4d_{15} + d_1d_4d_{15} + d_2d_9d_{15} + d_1d_9d_{15} + d_2d_9d_4 + d_1d_9d_4 + d_2d_{14}d_6 + d_1d_{14}d_6 - d_2d_5d_8 - d_5d_8d_1 - d_1d_{12}d_6 - d_1d_5d_7 - \varepsilon_1 d_7d_4 - \varepsilon_1 d_7d_{15}$$
$$H_4 = d_2d_9d_4d_{15} + d_9d_4d_{15}d_1 - d_2d_5d_8d_{15} - d_5d_8d_{15}d_1 + d_2d_{14}d_6d_9 + d_{14}d_6d_9d_1 - d_1d_{12}d_6d_9 - d_1d_5d_7d_{15} - \varepsilon_1 d_7d_4d_{15} - \varepsilon_1 d_7d_6d_{14} - \varepsilon_1 d_8d_{12}d_6$$
$$K_1 = d_{17} + d_{16}$$
$$K_2 = d_{16}d_{17} - \omega_1\omega_2$$

Lampiran J. Perhitungan Kriteria Routh-Hurwitz Persamaan Karakteristik Titik Setimbang Endemik Pneumonia $(E_0)_2$

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.7) agar memiliki akar-akar negatif dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz

$$[\lambda^3 + G_1\lambda^2 + G_2\lambda + G_3][\lambda^4 + H_1\lambda^3 + H_2\lambda^2 + H_3\lambda + H_4][\lambda^2 + K_1\lambda + K_2] = 0 \qquad (4.7)$$

Persamaan karakteristik (4.7) dapat ditulis sebagai

$$\lambda^3 + G_1\lambda^2 + G_2\lambda + G_3 = 0 \qquad (4.7a)$$

$$\lambda^4 + H_1\lambda^3 + H_2\lambda^2 + H_3\lambda + H_4 = 0 \qquad (4.7b)$$

$$\lambda^2 + K_1\lambda + K_2 = 0 \qquad (4.7c)$$

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.7a)

$$\lambda^3 + G_1\lambda^2 + G_2\lambda + G_3 = 0 \qquad (4.7a)$$

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & G_2 \\ \lambda^2 & G_1 & G_3 \\ \lambda & b_1 & \\ 1 & c_1 & \end{array}$$

dengan

$$b_1 = \frac{G_1G_2 - G_3}{G_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1G_3}{b_1}$$

$$= G_3$$

Persamaan (4.7a) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika $G_1, G_2, G_3 > 0$. Dan $G_1G_2 > G_3$.

Lampiran J. Lanjutan

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.7b)

$$\lambda^4 + H_1\lambda^3 + H_2\lambda^2 + H_3\lambda + H_4 = 0 \qquad (4.6b)$$

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^4 & 1 & H_2 & H_4 \\ \lambda^3 & H_1 & H_3 & \\ \lambda^2 & b_1 & b_2 & \\ \lambda & c_1 & & \\ 1 & d_1 & & \end{array}$$

dengan

$$b_1 = \frac{H_1H_2 - H_3}{H_1}$$

$$b_2 = \frac{H_1H_4}{H_1}$$

$$= H_4$$

$$c_1 = \frac{b_1H_3 - H_1b_2}{b_1}$$

$$= \left(\frac{(H_1H_2 - H_3)}{H_1}H_3 - H_1H_4\right)\frac{H_1}{(H_1H_2 - H_3)}$$

$$= \left(\frac{(H_1H_2 - H_3)}{H_1}H_3 \times \frac{H_1}{(H_1H_2 - H_3)}\right)$$

$$-\left(H_1H_4 \times \frac{H_1}{(H_1H_2 - H_3)}\right)$$

$$= H_3 - \frac{{H_1}^2H_4}{(H_1H_2 - H_3)}$$

Lampiran J. Lanjutan

$$= \frac{(H_1H_2 - H_3)H_3 - {H_1}^2H_4}{(H_1H_2 - H_3)}$$

$$d_1 = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1}$$

$$= \left[\left(\frac{(H_1H_2 - H_3)H_3 - {H_1}^2H_4}{(H_1H_2 - H_3)}\right)H_4\right]\left(\frac{(H_1H_2 - H_3)}{(H_1H_2 - H_3)H_3 - {H_1}^2H_4}\right)$$

$$= H_4$$

Persamaan (4.7b) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika
$\leftrightarrow H_1, H_2, H_3, H_4 > 0$
$\leftrightarrow H_1H_2 > H_3$
$\leftrightarrow (H_1H_2 - H_3)H_3 - {H_1}^2H_4$

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.7c)

$$\lambda^2 + K_1\lambda + K_2 = 0 \tag{4.7c}$$

$$\begin{array}{c|ll} \lambda^2 & 1 & K_2 \\ \lambda & K_1 & \\ 1 & b_1 & \end{array}$$

dengan

$$b_1 = \frac{K_1K_2}{K_1}$$

Persamaan (4.7c) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika $K_1, K_2 > 0$.

Lampiran K. Perhitungan Persamaan Karakteristik Titik Setimbang Endemik *Co-infection* Chlamydia-Pneumonia $(E_0)_3$

Substitusi titik setimbang

$(E_0)_3 = \left(S^{cp}, E_1^{cp}, E_2^{cp}, E_{12}^{cp}, I_1^{cp}, I_2^{cp}, I_{12}^{cp}, R_1^{cp}, R_2^{cp}\right)$ pada matrik Jacobian, sehingga diperoleh

$$J_{(E_0)_3} = \begin{pmatrix} -e_1 - e_2 - \mu & 0 & 0 & 0 & -e_8 & -e_{11} & -e_{14} - e_{15} & 0 & 0 \\ e_1 & -e_3 - e_2 & 0 & 0 & e_8 & -e_{12} & e_{14} - e_{16} & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & -e_4 - e_1 & 0 & -e_9 & e_{11} & e_{15} - e_{17} & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & e_1 & -e_5 & e_9 & e_{12} & e_{16} - e_{17} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & e_6 & -e_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & -e_6 & 0 & -e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_7 & 0 & 0 & -e_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & 0 & \rho_{10} & -e_{19} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & \rho_{02} & \omega_1 & -e_{20} \end{pmatrix}$$

dengan

$e_1 = \beta_1 I_1^{cp} + \beta_{10} I_{12}^{cp}$ $\qquad$ $e_{11} = \beta_2 S^{cp}$

$e_2 = \beta_2 I_2^{cp} + \beta_{02} I_{12}^{cp}$ $\qquad$ $e_{12} = \beta_2 E_1^{cp}$

$e_3 = \mu + \varepsilon_1$ $\qquad$ $e_{13} = \mu + \rho_2$

$e_4 = \mu + \varepsilon_2$ $\qquad$ $e_{14} = \beta_{10} S^{cp}$

$e_5 = \mu + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{02}$ $\qquad$ $e_{15} = \beta_{02} S^{cp}$

$e_6 = \varepsilon_{10} - \varepsilon_{02}$ $\qquad$ $e_{16} = \beta_{02} E_1^{cp}$

$e_7 = \varepsilon_{02} + \varepsilon_{10}$ $\qquad$ $e_{17} = \beta_{10} E_2^{cp}$

$e_8 = \beta_1 S^{cp}$ $\qquad$ $e_{18} = \mu + \rho_{10} + \rho_{02}$

$e_9 = \beta_1 E_2^{cp}$ $\qquad$ $e_{19} = \mu + \omega_1$

$e_{10} = \mu + \rho_1$ $\qquad$ $e_{20} = \mu + \omega_2$

Lampiran K. Lanjutan

Selanjutnya dicari nilai eigen dari matriks di atas dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\det\left(\lambda I - J_{(E_0)_3}\right) = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+e_1+e_2+\mu & 0 & 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} & 0 & 0 \\ -e_1 & \lambda+e_3+e_2 & 0 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} & 0 & 0 \\ -e_2 & 0 & \lambda+e_4+e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} & 0 & 0 \\ 0 & -e_2 & -e_1 & \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+e_{19} & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 & \lambda+e_{20} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow \omega_2 \begin{vmatrix} \lambda+e_1+e_2+\mu & 0 & 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} & 0 \\ -e_1 & \lambda+e_3+e_2 & 0 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} & 0 \\ -e_2 & 0 & \lambda+e_4+e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} & 0 \\ 0 & -e_2 & -e_1 & \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2 & -\rho_{02} & -\omega_1 \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+e_{20}) \begin{vmatrix} \lambda+e_1+e_2+\mu & 0 & 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} & 0 \\ -e_1 & \lambda+e_3+e_2 & 0 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} & 0 \\ -e_2 & 0 & \lambda+e_4+e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} & 0 \\ 0 & -e_2 & -e_1 & \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 & -\rho_{10} & \lambda+e_{19} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow -\omega_1\omega_2 \begin{vmatrix} \lambda+e_1+e_2+\mu & 0 & 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ -e_1 & \lambda+e_3+e_2 & 0 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ -e_2 & 0 & \lambda+e_4+e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ 0 & -e_2 & -e_1 & \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}$$

$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19}) \begin{vmatrix} \lambda+e_1+e_2+\mu & 0 & 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ -e_1 & \lambda+e_3+e_2 & 0 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ -e_2 & 0 & \lambda+e_4+e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ 0 & -e_2 & -e_1 & \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix} = 0$$

Lampiran K. Lanjutan

$$\leftrightarrow [-\omega_1\omega_2 + (\lambda + e_{20})(\lambda + e_{19})]\begin{vmatrix} \lambda + e_1 + e_2 + \mu & 0 & 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14} + e_{15} \\ -e_1 & \lambda + e_3 + e_2 & 0 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14} + e_{16} \\ -e_2 & 0 & \lambda + e_4 + e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15} + e_{17} \\ 0 & -e_2 & -e_1 & \lambda + e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16} + e_{17} \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & -e_6 & \lambda + e_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda + e_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda + e_{18} \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda + e_1 + e_2 + \mu)\begin{vmatrix} \lambda + e_3 + e_2 & 0 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14} + e_{16} \\ 0 & \lambda + e_4 + e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15} + e_{17} \\ -e_2 & -e_1 & \lambda + e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16} + e_{17} \\ -\varepsilon_1 & 0 & -e_6 & \lambda + e_{10} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda + e_{13} & 0 \\ 0 & 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda + e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + e_{20})(\lambda + e_{19})]$$

$$+e_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14} + e_{15} \\ 0 & \lambda + e_4 + e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15} + e_{17} \\ -e_2 & -e_1 & \lambda + e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16} + e_{17} \\ -\varepsilon_1 & 0 & -e_6 & \lambda + e_{10} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda + e_{13} & 0 \\ 0 & 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda + e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + e_{20})(\lambda + e_{19})]$$

$$-e_2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14} + e_{15} \\ \lambda + e_3 + e_2 & 0 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14} + e_{16} \\ -e_2 & -e_1 & \lambda + e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16} + e_{17} \\ -\varepsilon_1 & 0 & -e_6 & \lambda + e_{10} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda + e_{13} & 0 \\ 0 & 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda + e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + e_{20})(\lambda + e_{19})] = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda + e_1 + e_2 + \mu)(\lambda + e_3 + e_2)\begin{vmatrix} \lambda + e_4 + e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15} + e_{17} \\ -e_1 & \lambda + e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16} + e_{17} \\ 0 & -e_6 & \lambda + e_{10} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda + e_{13} & 0 \\ 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda + e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + e_{20})(\lambda + e_{19})]$$

$$-(\lambda + e_1 + e_2 + \mu)e_2\begin{vmatrix} 0 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14} + e_{16} \\ \lambda + e_4 + e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15} + e_{17} \\ 0 & -e_6 & \lambda + e_{10} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda + e_{13} & 0 \\ 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda + e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + e_{20})(\lambda + e_{19})]$$

$$+(\lambda + e_1 + e_2 + \mu)\varepsilon_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14} + e_{16} \\ \lambda + e_4 + e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15} + e_{17} \\ -e_1 & \lambda + e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16} + e_{17} \\ -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda + e_{13} & 0 \\ 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda + e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda + e_{20})(\lambda + e_{19})]$$

Lampiran K. Lanjutan

$$-e_1e_2\begin{vmatrix} 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ \lambda+e_4+e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ 0 & -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_1\varepsilon_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ \lambda+e_4+e_1 & 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ -e_1 & \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} \\ -\varepsilon_2 & e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_2e_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ \lambda+e_3+e_2 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ -\varepsilon_1 & -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ 0 & e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_2\varepsilon_2\begin{vmatrix} 0 & 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ \lambda+e_3+e_2 & 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ -e_2 & \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} \\ -\varepsilon_1 & -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ 0 & -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]=0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)(\lambda+e_4+e_1)\begin{vmatrix} \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} \\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)e_1\begin{vmatrix} 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)\varepsilon_2\begin{vmatrix} 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} \\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)e_2(\lambda+e_4+e_1)\begin{vmatrix} 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-(\lambda+e_1+e_2+\mu)e_2\varepsilon_2\begin{vmatrix} 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

Lampiran K. Lanjutan

$$-(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1(\lambda+e_4+e_1)\begin{vmatrix} 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} \\ e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1 e_1\begin{vmatrix} 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1\varepsilon_2\begin{vmatrix} 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_1e_2(\lambda+e_4+e_1)\begin{vmatrix} 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_1e_2\varepsilon_2\begin{vmatrix} 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_1\varepsilon_1(\lambda+e_4+e_1)\begin{vmatrix} 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} \\ e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_1\varepsilon_1 e_1\begin{vmatrix} 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_1\varepsilon_1\varepsilon_2\begin{vmatrix} 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ 0 & e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17} \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2e_1(\lambda+e_3+e_2)\begin{vmatrix} 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0 \\ e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2e_1\varepsilon_1\begin{vmatrix} 0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15} \\ 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ e_6 & 0 & \lambda+e_{13} & 0 \\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18} \end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

Lampiran K. Lanjutan

$$+e_2\varepsilon_2(\lambda+e_3+e_2)\begin{vmatrix}0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0\\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2\varepsilon_2 e_2\begin{vmatrix}0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0 & 0\\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_2\varepsilon_2\varepsilon_1\begin{vmatrix}0 & e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ 0 & -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ \lambda+e_5 & -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\\ -e_7 & 0 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]=0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)(\lambda+e_4+e_1)e_9\begin{vmatrix}-e_6 & 0 & 0\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)(\lambda+e_4+e_1)(\lambda+e_{10})\begin{vmatrix}\lambda+e_5 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-(\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)e_1e_9\begin{vmatrix}-e_6 & 0 & 0\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)e_1(\lambda+e_{10})\begin{vmatrix}0 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17}\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-(\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)\varepsilon_2e_{11}\begin{vmatrix}\lambda+e_5 & -e_9 & -e_{16}+e_{17}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)\varepsilon_2e_{12}\begin{vmatrix}0 & e_9 & -e_{15}+e_{17}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)e_2(\lambda+e_4+e_1)e_8\begin{vmatrix}-e_6 & 0 & 0\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

Lampiran K. Lanjutan

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)e_2(\lambda+e_4+e_1)(\lambda+e_{10})\begin{vmatrix}0 & e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-(\lambda+e_1+e_2+\mu)e_2\varepsilon_2 e_{12}\begin{vmatrix}0 & e_9 & -e_{15}+e_{17}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-(\lambda+e_1+e_2+\mu)e_2\varepsilon_2 e_{11}\begin{vmatrix}0 & -e_8 & -e_{14}+e_{16}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1(\lambda+e_4+e_1)e_8\begin{vmatrix}\lambda+e_5 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1(\lambda+e_4+e_1)e_9\begin{vmatrix}0 & e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1 e_1 e_8\begin{vmatrix}0 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17}\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1 e_1 e_9\begin{vmatrix}0 & e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1\varepsilon_2(\lambda+e_5)\begin{vmatrix}-e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17}\\ 0 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1\varepsilon_2 e_7\begin{vmatrix}-e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17}\\ -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_1e_2(\lambda+e_4+e_1)e_{11}\begin{vmatrix}-e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ e_6 & 0 & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_1e_2(\lambda+e_4+e_1)(\lambda+e_{13})\begin{vmatrix}0 & e_8 & e_{14}+e_{15}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_1e_2\varepsilon_2 e_{11}\begin{vmatrix}0 & e_9 & -e_{15}+e_{17}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

Lampiran K. Lanjutan

$$-e_1e_2\varepsilon_2e_{11}\begin{vmatrix}0 & e_8 & e_{14}+e_{15}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_1\varepsilon_1(\lambda+e_4+e_1)e_8\begin{vmatrix}\lambda+e_5 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_1\varepsilon_1(\lambda+e_4+e_1)e_9\begin{vmatrix}0 & e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_1\varepsilon_1e_1e_8\begin{vmatrix}0 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17}\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_1\varepsilon_1e_1e_9\begin{vmatrix}0 & e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ e_6 & \lambda+e_{13} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_1\varepsilon_1\varepsilon_2(\lambda+e_5)\begin{vmatrix}e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17}\\ 0 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_1\varepsilon_1\varepsilon_2e_7\begin{vmatrix}e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ e_9 & -e_{11} & -e_{15}+e_{17}\\ -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2e_1(\lambda+e_3+e_2)e_{11}\begin{vmatrix}-e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ e_6 & 0 & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2e_1(\lambda+e_3+e_2)(\lambda+e_{13})\begin{vmatrix}0 & e_8 & e_{14}+e_{15}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2e_1\varepsilon_1e_6\begin{vmatrix}e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ 0 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2e_1\varepsilon_1e_7\begin{vmatrix}e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ 0 & \lambda+e_{13} & 0\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2\varepsilon_2(\lambda+e_3+e_2)e_{11}\begin{vmatrix}\lambda+e_5 & -e_9 & -e_{16}+e_{17}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

Lampiran K. Lanjutan

$$+e_2\varepsilon_2(\lambda+e_3+e_2)e_{12}\begin{vmatrix}0 & e_8 & e_{14}+e_{15}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2\varepsilon_2e_2e_{11}\begin{vmatrix}0 & -e_8 & -e_{14}+e_{16}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_2\varepsilon_2e_2e_{12}\begin{vmatrix}0 & e_8 & e_{14}+e_{15}\\ -e_6 & \lambda+e_{10} & 0\\ -e_7 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_2\varepsilon_2\varepsilon_1(\lambda+e_5)\begin{vmatrix}e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ 0 & 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_2\varepsilon_2\varepsilon_1e_7\begin{vmatrix}e_8 & e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ -e_8 & e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ -e_9 & -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\end{vmatrix}[-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]=0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)(\lambda+e_4+e_1)\Bigg[e_9(\lambda+e_{18})\begin{vmatrix}-e_6 & 0\\ e_6 & \lambda+e_{13}\end{vmatrix}$$
$$+(\lambda+e_{10})\Bigg[e_{12}\begin{vmatrix}e_6 & 0\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}$$
$$+(\lambda+e_{13})\begin{vmatrix}\lambda+e_5 & -e_{16}+e_{17}\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\Bigg]\Bigg][-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)e_1\Bigg[-e_9(\lambda+e_{18})\begin{vmatrix}-e_6 & 0\\ e_6 & \lambda+e_{13}\end{vmatrix}$$
$$+(\lambda+e_{10})\Bigg[-e_{11}\begin{vmatrix}e_6 & 0\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}$$
$$+(\lambda+e_{13})\begin{vmatrix}0 & -e_{15}+e_{17}\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\Bigg]\Bigg][-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)\varepsilon_2\Bigg[-e_{11}\Bigg[e_9\begin{vmatrix}-e_6 & 0\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}+(\lambda+e_{10})\begin{vmatrix}\lambda+e_5 & -e_{16}+e_{17}\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\Bigg]$$
$$+e_{12}\Bigg[e_6\begin{vmatrix}e_9 & -e_{15}+e_{17}\\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}-e_7\begin{vmatrix}e_9 & -e_{15}+e_{17}\\ \lambda+e_{10} & 0\end{vmatrix}\Bigg]\Bigg][-\omega_1\omega_2$$
$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)e_2(\lambda+e_4+e_1)\Bigg[e_8(\lambda+e_{13})\begin{vmatrix}-e_6 & 0\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}$$
$$+(\lambda+e_{10})\Bigg[-e_6\begin{vmatrix}e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}$$
$$-e_7\begin{vmatrix}e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ \lambda+e_{13} & 0\end{vmatrix}\Bigg]\Bigg][-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

Lampiran K. Lanjutan

$$\begin{aligned}
+(\lambda+e_1+e_2+\mu)e_2\varepsilon_2\Bigg[&-e_{12}\left[e_6\begin{vmatrix} e_9 & -e_{15}+e_{17} \\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} - e_7\begin{vmatrix} e_9 & -e_{15}+e_{17} \\ \lambda+e_{10} & 0\end{vmatrix}\right] \\
&- e_{11}\left[e_6\begin{vmatrix} -e_8 & -e_{14}+e_{16} \\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} - e_7\begin{vmatrix} -e_8 & -e_{14}+e_{16} \\ \lambda+e_{10} & 0\end{vmatrix}\right]\Bigg][-\omega_1\omega_2 \\
&+ (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1(\lambda+e_4+e_1)\Bigg[&-e_8\left[e_{12}\begin{vmatrix} e_6 & 0 \\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} + (\lambda+e_{13})\begin{vmatrix} \lambda+e_5 & -e_{16}+e_{17} \\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right] \\
&+ e_9\left[-e_6\begin{vmatrix} e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} - e_7\begin{vmatrix} e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ \lambda+e_{13} & 0\end{vmatrix}\right]\Bigg][-\omega_1\omega_2 \\
&+ (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1 e_1\Bigg[&-e_8\left[e_{11}\begin{vmatrix} e_6 & 0 \\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} + (\lambda+e_{13})\begin{vmatrix} 0 & -e_{15}+e_{17} \\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right] \\
&- e_9\left[-e_{12}\begin{vmatrix} e_6 & 0 \\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} + (\lambda+e_{13})\begin{vmatrix} 0 & -e_{14}+e_{16} \\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right]\Bigg][-\omega_1\omega_2 \\
&+ (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1\varepsilon_2\Bigg[&(\lambda+e_5)\left[-e_8\begin{vmatrix} -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} - e_9\begin{vmatrix} e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right] \\
&+ e_7\left[-e_8\begin{vmatrix} -e_{11} & -e_{15}+e_{17} \\ -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\end{vmatrix} - e_9\begin{vmatrix} e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\end{vmatrix}\right. \\
&\left.- e_9\begin{vmatrix} e_{12} & -e_{14}+e_{16} \\ -e_{11} & -e_{15}+e_{17}\end{vmatrix}\right]\Bigg][-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+e_1e_2(\lambda+e_4+e_1)\Bigg[&e_{11}(\lambda+e_{10})\begin{vmatrix} e_6 & 0 \\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} \\
&+ (\lambda+e_{13})\left[e_6\begin{vmatrix} e_8 & e_{14}+e_{15} \\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right. \\
&\left.- e_7\begin{vmatrix} e_8 & e_{14}+e_{15} \\ \lambda+e_{10} & 0\end{vmatrix}\right]\Bigg][-\omega_1\omega_2 + (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+e_1e_2\varepsilon_2\Bigg[&-e_{11}\left[e_6\begin{vmatrix} e_9 & -e_{15}+e_{17} \\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} - e_7\begin{vmatrix} e_9 & -e_{15}+e_{17} \\ \lambda+e_{10} & 0\end{vmatrix}\right] \\
&- e_{11}\left[e_6\begin{vmatrix} e_8 & e_{14}+e_{15} \\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} - e_7\begin{vmatrix} e_8 & e_{14}+e_{15} \\ \lambda+e_{10} & 0\end{vmatrix}\right]\Bigg][-\omega_1\omega_2 \\
&+ (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+e_1\varepsilon_1(\lambda+e_4+e_1)\Bigg[&e_8\left[e_{12}\begin{vmatrix} e_6 & 0 \\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} + (\lambda+e_{13})\begin{vmatrix} \lambda+e_5 & -e_{16}+e_{17} \\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right] \\
&+ e_9\left[-e_{11}\begin{vmatrix} e_6 & 0 \\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix} + (\lambda+e_{13})\begin{vmatrix} 0 & e_{14}+e_{15} \\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right]\Bigg][-\omega_1\omega_2 \\
&+ (\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}$$

Lampiran K. Lanjutan

$$+e_1\varepsilon_1e_1\left[e_8\left[e_{11}\begin{vmatrix}e_6 & 0\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}+(\lambda+e_{13})\begin{vmatrix}0 & -e_{15}+e_{17}\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right]\right.$$
$$-e_9\left[-e_{11}\begin{vmatrix}e_6 & 0\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right.$$
$$\left.\left.+(\lambda+e_{13})\begin{vmatrix}0 & e_{14}+e_{15}\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right]\right][-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_1\varepsilon_1\varepsilon_2\left[(\lambda+e_5)\left[e_8\begin{vmatrix}-e_{11} & -e_{15}+e_{17}\\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}-e_9\begin{vmatrix}e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right]\right.$$
$$+e_7\left[e_8\begin{vmatrix}-e_{11} & -e_{15}+e_{17}\\ -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\end{vmatrix}-e_9\begin{vmatrix}e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\end{vmatrix}\right.$$
$$\left.\left.-e_9\begin{vmatrix}e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ -e_{11} & -e_{15}+e_{17}\end{vmatrix}\right]\right][-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2e_1(\lambda+e_3+e_2)\left[e_{11}(\lambda+e_{18})\begin{vmatrix}-e_6 & \lambda+e_{10}\\ e_6 & 0\end{vmatrix}\right.$$
$$+(\lambda+e_{13})\left[e_6\begin{vmatrix}e_8 & e_{14}+e_{15}\\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right.$$
$$\left.\left.-e_7\begin{vmatrix}e_8 & e_{14}+e_{15}\\ \lambda+e_{10} & 0\end{vmatrix}\right]\right][-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2e_1\varepsilon_1\left[e_6\left[e_8\begin{vmatrix}e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}+e_8\begin{vmatrix}e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right]\right.$$
$$+e_7\left[e_8\begin{vmatrix}e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ \lambda+e_{13} & 0\end{vmatrix}\right.$$
$$\left.\left.+e_8\begin{vmatrix}e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ \lambda+e_{13} & 0\end{vmatrix}\right]\right][-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2\varepsilon_2(\lambda+e_3+e_2)\left[e_{11}\left[e_9\begin{vmatrix}-e_6 & 0\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}+(\lambda+e_{10})\begin{vmatrix}\lambda+e_5 & -e_{16}+e_{17}\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right]\right.$$
$$+e_{12}\left[-e_8\begin{vmatrix}-e_6 & 0\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right.$$
$$\left.\left.+(\lambda+e_{10})\begin{vmatrix}0 & e_{14}+e_{15}\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right]\right][-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2\varepsilon_2e_2\left[e_{11}\left[e_8\begin{vmatrix}-e_6 & 0\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}+(\lambda+e_{10})\begin{vmatrix}0 & -e_{14}+e_{16}\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right]\right.$$
$$-e_{12}\left[-e_8\begin{vmatrix}-e_6 & 0\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right.$$
$$\left.\left.+(\lambda+e_{10})\begin{vmatrix}0 & e_{14}+e_{15}\\ -e_7 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right]\right][-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

Lampiran K. Lanjutan

$$-e_2\varepsilon_2\varepsilon_1\left[(\lambda+e_5)\left[e_8\begin{vmatrix}e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}+e_8\begin{vmatrix}e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ 0 & \lambda+e_{18}\end{vmatrix}\right]\right.$$
$$+e_7\left[e_8\begin{vmatrix}e_{12} & -e_{14}+e_{16}\\ -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\end{vmatrix}+e_8\begin{vmatrix}e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ -e_{12} & -e_{16}+e_{17}\end{vmatrix}\right.$$
$$\left.\left.-e_9\begin{vmatrix}e_{11} & e_{14}+e_{15}\\ e_{12} & -e_{14}+e_{16}\end{vmatrix}\right]\right][-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]=0$$

$$\leftrightarrow (\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)(\lambda+e_4+e_1)\Big[-e_6e_9(\lambda+e_{18})(\lambda+e_{13})$$
$$+(\lambda+e_{10})\big[e_{12}e_6(\lambda+e_{18})$$
$$+(\lambda+e_{13})[(\lambda+e_5)(\lambda+e_{18})+e_7(-e_{16}+e_{17})]\big]\Big][-\omega_1\omega_2$$
$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3+e_2)e_1\big[e_6e_9(\lambda+e_{18})(\lambda+e_{13})$$
$$+(\lambda+e_{10})[-e_{11}e_6(\lambda+e_{18})+(\lambda+e_{13})e_7(-e_{15}+e_{17})]\big][-\omega_1\omega_2$$
$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)(\lambda+e_3$$
$$+e_2)\varepsilon_2\Big[e_{11}\big[e_9e_6(\lambda+e_{18})$$
$$+(\lambda+e_{10})[(\lambda+e_5)(\lambda+e_{18})+e_7(-e_{16}+e_{17})]\big]$$
$$+e_{12}[e_6e_9(\lambda+e_{18})-e_7(\lambda+e_{10})(-e_{15}+e_{17})]\Big][-\omega_1\omega_2$$
$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)e_2(\lambda+e_4+e_1)\big[-e_8(\lambda+e_{13})e_6(\lambda+e_{18})$$
$$+(\lambda+e_{10})[-e_6e_{12}(\lambda+e_{18})+e_7(\lambda+e_{13})(-e_{14}+e_{16})]\big][-\omega_1\omega_2$$
$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)e_2\varepsilon_2\big[-e_{12}[e_6e_9(\lambda+e_{18})+e_7(\lambda+e_{10})(-e_{15}+e_{17})]$$
$$-e_{11}[-e_8e_6(\lambda+e_{18})+e_7(\lambda+e_{10})(-e_{14}+e_{16})]\big][-\omega_1\omega_2$$
$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1(\lambda+e_4$$
$$+e_1)\Big[-e_8\big[e_{12}e_6(\lambda+e_{18})$$
$$+(\lambda+e_{13})[(\lambda+e_5)(\lambda+e_{18})+e_7(-e_{16}+e_{17})]\big]$$
$$+e_9[-e_6e_{12}(\lambda+e_{18})+e_7(\lambda+e_{13})(-e_{14}+e_{16})]\Big][-\omega_1\omega_2$$
$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1e_1\big[-e_8[e_{11}e_6(\lambda+e_{18})+(\lambda+e_{13})e_7(-e_{15}+e_{17})]$$
$$-e_9[-e_{12}e_6(\lambda+e_{18})+(\lambda+e_{13})e_7(-e_{14}+e_{16})]\big][-\omega_1\omega_2$$
$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

Lampiran K. Lanjutan

$$
\begin{aligned}
+(\lambda+e_1+e_2+\mu)\varepsilon_1\varepsilon_2\Big[&(\lambda+e_5)[e_8e_{11}(\lambda+e_{18})-e_9e_{12}(\lambda+e_{18})]\\
&+e_7\big[-e_8[-e_{11}(-e_{16}+e_{17})+e_{12}(-e_{15}+e_{17})]\\
&-e_9[e_{12}(-e_{16}+e_{17})+e_{12}(-e_{14}+e_{16})]\\
&-e_9[e_{12}(-e_{15}+e_{17})+e_{11}(-e_{14}+e_{16})]\big]\Big][-\omega_1\omega_2\\
&+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+e_1e_2(\lambda+e_4+e_1)\big[&e_{11}(\lambda+e_{10})e_6(\lambda+e_{18})\\
&+(\lambda+e_{13})[e_6e_8(\lambda+e_{18})+e_7(\lambda+e_{10})(e_{14}+e_{15})]\big][-\omega_1\omega_2\\
&+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+e_1e_2\varepsilon_2\big[&-e_{11}[e_6e_9(\lambda+e_{18})+e_7(\lambda+e_{10})(-e_{15}+e_{17})]\\
&-e_{11}[e_6e_8(\lambda+e_{18})+e_7(\lambda+e_{10})(e_{14}+e_{15})]\big][-\omega_1\omega_2\\
&+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+e_1\varepsilon_1(\lambda+e_4+e_1)\Big[&e_8\big[e_{12}e_6(\lambda+e_{18})+(\lambda+e_{13})[(\lambda+e_5)(\lambda+e_{18})+e_7(-e_{16}+e_{17})]\big]\\
&+e_9[-e_{11}e_6(\lambda+e_{18})+(\lambda+e_{13})e_7(e_{14}+e_{15})]\Big][-\omega_1\omega_2\\
&+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+e_1\varepsilon_1e_1\big[&e_8[e_{11}e_6(\lambda+e_{18})+(\lambda+e_{13})e_7(-e_{15}+e_{17})]\\
&-e_9[-e_{11}e_6(\lambda+e_{18})+(\lambda+e_{13})e_7(e_{14}+e_{15})]\big][-\omega_1\omega_2\\
&+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+e_1\varepsilon_1\varepsilon_2\Big[&(\lambda+e_5)[-e_8e_{11}(\lambda+e_{18})-e_9e_{11}(\lambda+e_{18})]\\
&+e_7\big[e_8[-e_{11}(-e_{16}+e_{17})+e_{12}(-e_{15}+e_{17})]\\
&-e_9[e_{11}(-e_{16}+e_{17})+e_{12}(e_{14}+e_{15})]\\
&-e_9[e_{11}(-e_{15}+e_{17})+e_{11}(e_{14}+e_{15})]\big]\Big][-\omega_1\omega_2\\
&+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+e_2e_1(\lambda+e_3+e_2)\big[&-e_{11}(\lambda+e_{18})e_6(\lambda+e_{10})\\
&+(\lambda+e_{13})[e_6e_8(\lambda+e_{18})+e_7(\lambda+e_{10})(e_{14}+e_{15})]\big][-\omega_1\omega_2\\
&+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+e_2e_1\varepsilon_1\big[&e_6[e_8e_{12}(\lambda+e_{18})+e_8e_{11}(\lambda+e_{18})]\\
&+e_7[-e_8(\lambda+e_{13})(-e_{14}+e_{16})\\
&-e_8(\lambda+e_{13})(e_{14}+e_{15})]\big][-\omega_1\omega_2+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]
\end{aligned}
$$

Lampiran K. Lanjutan

$$+e_2\varepsilon_2(\lambda+e_3+e_2)\Big[e_{11}[-e_9e_6(\lambda+e_{18})$$
$$+(\lambda+e_{10})[(\lambda+e_5)(\lambda+e_{18})+e_7(-e_{16}+e_{17})]]$$
$$+e_{12}[e_8e_6(\lambda+e_{18})+(\lambda+e_{10})e_7(e_{14}+e_{15})]\Big][-\omega_1\omega_2$$
$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$+e_2\varepsilon_2e_2\big[e_{11}[-e_8e_6(\lambda+e_{18})+(\lambda+e_{10})e_7(-e_{14}+e_{16})]$$
$$-e_{12}[e_8e_6(\lambda+e_{18})+(\lambda+e_{10})e_7(e_{14}+e_{15})]\big][-\omega_1\omega_2$$
$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]$$

$$-e_2\varepsilon_2\varepsilon_1\Big[(\lambda+e_5)[e_8e_{12}(\lambda+e_{18})+e_8e_{11}(\lambda+e_{18})]$$
$$+e_7\big[e_8[e_{12}(-e_{16}+e_{17})+e_{12}(-e_{14}+e_{16})]$$
$$+e_8[e_{11}(-e_{16}+e_{17})+e_{12}(e_{14}+e_{15})]$$
$$-e_9[e_{11}(-e_{14}+e_{16})-e_{12}(e_{14}+e_{15})]\big]\Big][-\omega_1\omega_2$$
$$+(\lambda+e_{20})(\lambda+e_{19})]=0$$

Sehingga diperoleh persamaan karkteristik untuk titik setimbang endemik *co-infection* chlamydia-pneumonia dengan pangkat tertinggi adalah 9, yang ditunjukkan sebagai berikut

$$\leftrightarrow [\lambda^7+L_1\lambda^6+L_2\lambda^5+L_3\lambda^4+L_4\lambda^3+L_5\lambda^2+L_6\lambda+L_7][\lambda^2$$
$$+M_1\lambda+M_2]=0$$

Lampiran L. Perhitungan Kriteria Routh-Hurwitz Persamaan Karakteristik Titik Setimbang Endemik *Co-infection* Chlamydia-Pneumonia $(E_0)_3$

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.8) agar memiliki akar-akar negatif dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz

$$[\lambda^7 + L_1\lambda^6 + L_2\lambda^5 + L_3\lambda^4 + L_4\lambda^3 + L_5\lambda^2 + L_6\lambda + L_7][\lambda^2 + M_1\lambda + M_2] = 0 \qquad (4.8)$$

Persamaan karakteristik (4.8) dapat ditulis sebagai

$$\lambda^7 + L_1\lambda^6 + L_2\lambda^5 + L_3\lambda^4 + L_4\lambda^3 + L_5\lambda^2 + L_6\lambda + L_7 = 0 \qquad (4.8a)$$

$$\lambda^2 + M_1\lambda + M_2 = 0 \qquad (4.8b)$$

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.8a)

$$\lambda^7 + L_1\lambda^6 + L_2\lambda^5 + L_3\lambda^4 + L_4\lambda^3 + L_5\lambda^2 + L_6\lambda + L_7 = 0 \qquad (4.8a)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
\lambda^7 & 1 & L_2 & L_4 & L_6 \\
\lambda^6 & L_1 & L_3 & L_5 & L_7 \\
\lambda^5 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\
\lambda^4 & c_1 & c_2 & c_3 & \\
\lambda^3 & d_1 & d_2 & & \\
\lambda^2 & e_1 & e_2 & & \\
\lambda & f_1 & & & \\
1 & & & &
\end{array}$$

dengan

$$b_1 = \frac{L_1L_2 - L_3}{L_1}$$

$$b_2 = \frac{L_1L_4 - L_5}{L_1}$$

$$b_3 = \frac{L_1L_6 - L_7}{L_1}$$

Lampiran L. Lanjutan

$$c_1 = \frac{b_1L_3 - L_1b_2}{b_1}$$

$$= \left(\frac{(L_1L_2 - L_3)}{L_1}L_3 - L_1\frac{L_1L_4 - L_5}{L_1}\right)\frac{L_1}{(L_1L_2 - L_3)}$$

$$= \left(\frac{(L_1L_2 - L_3)}{L_1}L_3 \times \frac{L_1}{(L_1L_2 - L_3)}\right)$$

$$-\left(L_1\frac{L_1L_4 - L_5}{L_1} \times \frac{L_1}{(L_1L_2 - L_3)}\right)$$

$$= L_3 - L_1\frac{L_1L_4 - L_5}{L_1L_2 - L_3}$$

$$= \frac{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}{(L_1L_2 - L_3)}$$

$$c_2 = \frac{b_1L_5 - L_1b_3}{b_1}$$

$$= \left(\frac{(L_1L_2 - L_3)}{L_1}L_5 - L_1\frac{L_1L_6 - L_7}{L_1}\right)\frac{L_1}{(L_1L_2 - L_3)}$$

$$= \left(\frac{(L_1L_2 - L_3)}{L_1}L_5 \times \frac{L_1}{(L_1L_2 - L_3)}\right)$$

$$-\left(L_1\frac{L_1L_6 - L_7}{L_1} \times \frac{L_1}{(L_1L_2 - L_3)}\right)$$

$$= L_5 - L_1\frac{L_1L_6 - L_7}{L_1L_2 - L_3}$$

Lampiran L. Lanjutan

$$= \frac{(L_1L_2 - L_3)L_5 - L_1(L_1L_6 - L_7)}{(L_1L_2 - L_3)}$$

$$c_3 = \frac{b_1L_7 - L_1b_4}{b_1}$$

$$= \left(\frac{(L_1L_2 - L_3)}{L_1}L_7\right)\frac{L_1}{(L_1L_2 - L_3)}$$

$$= L_7$$

$$d_1 = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1}$$

$$= \left[\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}{(L_1L_2 - L_3)}\right)\left(\frac{L_1L_4 - L_5}{L_1}\right) - \left(\frac{L_1L_2 - L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_5 - L_1(L_1L_6 - L_7)}{(L_1L_2 - L_3)}\right)\right]$$

$$\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)}{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}\right)$$

$$= \left(\frac{L_1L_4 - L_5}{L_1}\right) - \left(\frac{L_1L_2 - L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_5 - L_1(L_1L_6 - L_7)}{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}\right)$$

$$d_2 = \frac{c_1b_3 - b_1c_3}{c_1}$$

Lampiran L. Lanjutan

$$= \left[\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}{(L_1L_2 - L_3)}\right)\left(\frac{L_1L_6 - L_7}{L_1}\right) - \left(\frac{L_1L_2 - L_3}{A_1}\right)(L_7)\right]\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)}{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}\right)$$

$$= \left(\frac{L_1L_6 - L_7}{L_1}\right) - \left(\frac{L_1L_2 - L_3}{L_1}\right)(L_7)\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)}{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}\right)$$

$$e_1 = \frac{d_1c_2 - c_1d_2}{d_1}$$

$$= \left[\left(\left(\frac{L_1L_4 - L_5}{L_1}\right) - \left(\frac{L_1L_2 - L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_5 - L_1(L_1L_6 - L_7)}{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}\right)\right)\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_5 - L_1(L_1L_6 - L_7)}{(L_1L_2 - L_3)}\right) - \left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}{(L_1L_2 - L_3)}\right)\left(\left(\frac{L_1L_6 - L_7}{L_1}\right) - \left(\frac{L_1L_2 - L_3}{L_1}\right)(L_7)\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)}{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}\right)\right)\right]$$

$$\left(\frac{1}{\left(\frac{L_1L_4 - L_5}{L_1}\right) - \left(\frac{L_1L_2 - L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_5 - L_1(L_1L_6 - L_7)}{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}\right)}\right)$$

$$= \left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_5 - L_1(L_1L_6 - L_7)}{(L_1L_2 - L_3)}\right) - \left(\frac{\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}{(L_1L_2 - L_3)}\right)\left(\left(\frac{L_1L_6 - L_7}{L_1}\right) - \left(\frac{L_1L_2 - L_3}{L_1}\right)(L_7)\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)}{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}\right)\right)}{\left(\frac{L_1L_4 - L_5}{L_1}\right) - \left(\frac{L_1L_2 - L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2 - L_3)L_5 - L_1(L_1L_6 - L_7)}{(L_1L_2 - L_3)L_3 - L_1(L_1L_4 - L_5)}\right)}\right)$$

Lampiran L. Lanjutan

$$e_2 = \frac{d_1c_3 - c_1d_3}{d_1}$$

$$= c_3$$

$$= L_7$$

$$f_1 = \frac{e_1d_2 - d_1e_2}{e_1}$$

$$= \Bigg[\Bigg(\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)}\right) - \left(\frac{\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}{(L_1L_2-L_3)}\right)\left(\left(\frac{L_1L_6-L_7}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)(L_7)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)\right)}{\left(\frac{L_1L_4-L_5}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)}\right)\Bigg)\Bigg(\left(\frac{L_1L_6-L_7}{L_1}\right)$$

$$-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)(L_7)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)\Bigg) - \left(\left(\frac{L_1L_4-L_5}{L_1}\right)-L_7\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)\right)\Bigg]$$

$$\left(\frac{1}{\left(\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)}\right)-\left(\frac{\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}{(L_1L_2-L_3)}\right)\left(\left(\frac{L_1L_6-L_7}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)(L_7)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)\right)}{\left(\frac{L_1L_4-L_5}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)}\right)\right)}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{L_1L_6-L_7}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)(L_7)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)\right)$$

$$- \frac{\left(\left(\frac{L_1L_4-L_5}{L_1}\right)-L_7\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)\right)}{\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)}\right)-\left(\frac{\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}{(L_1L_2-L_3)}\right)\left(\left(\frac{L_1L_6-L_7}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)(L_7)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)\right)}{\left(\frac{L_1L_4-L_5}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)}\right)}$$

Persamaan (4.8a) akan memiliki akar-akar yang negatif jika dan hanya jika $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7 > 0$

Lampiran L. Lanjutan

$$\leftrightarrow (L_1L_2-L_3)L_3 > L_1(L_1L_4-L_5).$$

$$\leftrightarrow \left(\frac{L_1L_4-L_5}{L_1}\right) > \left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)}\right) >$$

$$\left(\frac{\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}{(L_1L_2-L_3)}\right)\left(\left(\frac{L_1L_6-L_7}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)(L_7)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)\right)}{\left(\frac{L_1L_4-L_5}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\left(\frac{L_1L_6-L_7}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)(L_7)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)\right) >$$

$$\frac{\left(\left(\frac{L_1L_4-L_5}{L_1}\right)-L_7\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)\right)}{\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)}\right)-\left(\frac{\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}{(L_1L_2-L_3)}\right)\left(\left(\frac{L_1L_6-L_7}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)(L_7)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)\right)}{\left(\frac{L_1L_4-L_5}{L_1}\right)-\left(\frac{L_1L_2-L_3}{L_1}\right)\left(\frac{(L_1L_2-L_3)L_5-L_1(L_1L_6-L_7)}{(L_1L_2-L_3)L_3-L_1(L_1L_4-L_5)}\right)}\right)}$$

Menentukan syarat untuk Persamaan (4.8b)

$$\lambda^2 + M_1\lambda + M_2 = 0 \qquad (4.8b)$$

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^2 & 1 & M_2 \\ \lambda & M_1 & \\ 1 & b_1 & \end{array}$$

dengan

$$b_1 = \frac{M_1M_2}{M_1}$$

Persamaan (4.8b) akan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika $M_1, M_2 > 0$.

Lampiran M. *Source Code* Simulasi

***Source Code* pada Pushbutton ‘PlotSusceptible’**

```
% --- Executes on button press in PlotSusceptible.
function PlotSusceptible_Callback(hObject, eventdata,
handles)
%------------------- inisialisasi parameter -----------------
t0 = str2double(get(handles.t0,'String'));
tf = str2double(get(handles.tf,'String'));
n=str2double(get(handles.n,'String'));
miu = str2double(get(handles.miu,'String'));
beta1 = str2double(get(handles.beta1,'String'));
beta2 = str2double(get(handles.beta2,'String'));
beta10 = str2double(get(handles.beta10,'String'));
beta02 = str2double(get(handles.beta02,'String'));
epsilon1 = str2double(get(handles.epsilon1,'String'));
epsilon2 = str2double(get(handles.epsilon2,'String'));
epsilon10 = str2double(get(handles.epsilon10,'String'));
epsilon02 = str2double(get(handles.epsilon02,'String'));
rho1 = str2double(get(handles.rho1,'String'));
rho2 = str2double(get(handles.rho2,'String'));
rho10 = str2double(get(handles.rho10,'String'));
rho02 = str2double(get(handles.rho02,'String'));
omega1 = str2double(get(handles.omega1,'String'));
omega2 = str2double(get(handles.omega2,'String'));
h =(tf-t0)/n ;
t = 0:h:n*h;
hh = 1/2;
%---------------------- variable state ---------------------
S=zeros(n+1,1);
E1=zeros(n+1,1);
E2=zeros(n+1,1);
E12=zeros(n+1,1);
I1=zeros(n+1,1);
I2=zeros(n+1,1);
I12=zeros(n+1,1);
R1=zeros(n+1,1);
R2=zeros(n+1,1);
%---------------- inisialisasi variabel state --------------
S(1)=0.25;
E1(1)=0.18;
E2(1)=0.15;
E12(1)=0.12;
I1(1)=0.1;
I2(1)=0.09;
I12(1)=0.06;
R1(1)=0.03;
R2(1)=0.02;
N(1)=S(1)+E1(1)+E2(1)+E12(1)+I1(1)+I2(1)+I12(1)+R1(1)+R2(1)
```

Lampiran M. Lanjutan

```
%------------------ Basic Reproduction Number ----------------
Ro1=(beta1*epsilon1)/((miu+epsilon1)*(miu+rho1))
Ro2=(beta2*epsilon2)/((miu+epsilon2)*(miu+rho2))
%Menampilkan hasil perhitungan Ro
set(handles.Ro1,'string', Ro1);
set(handles.Ro2,'string', Ro2);
if Ro1 >= 1
      % if condition is true then print the following
      chlamydia='Stabil'
      set(handles.chlamydia,'string',chlamydia);
   elseif( Ro1 < 1 )
      % if else if condition is true
      chlamydia='Tidak Stabil'
      set(handles.chlamydia,'string',chlamydia);
end
if Ro2 >= 1
      % if condition is true then print the following
      pneumonia='Stabil'
      set(handles.pneumonia,'string',pneumonia);
   elseif( Ro2 < 1 )
      % if else if condition is true
      pneumonia='Tidak Stabil'
      set(handles.pneumonia,'string',pneumonia);
   end
   if Ro1 >= 1 & Ro2>=1
      % if condition is true then print the following
      coinfection='Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
   elseif( Ro1 < 1 & Ro2 < 1 )
      % if else if condition is true
      coinfection='Tidak Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
      elseif( Ro1 < 1 & Ro2 >= 1 )
      % if else if condition is true
      coinfection='Tidak Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
      elseif( Ro1 >= 1 & Ro2 < 1 )
      % if else if condition is true
      coinfection='Tidak Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
   end
%------------- Representasi Metode Runge-Kutta -------------
for i=1:n
    %Step 1
    K1_S(i)= h*(miu-(miu*S(i))-
((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i)))*S(i)-
((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*S(i));
```

Lampiran M. Lanjutan

```
    K1_E1(i)= h*((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i))*S(i)-
(miu*E1(i))-(epsilon1*E1(i))-
((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*E1(i));
    K1_E2(i)= h*((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i))*S(i)-
(miu*E2(i))-(epsilon2*E2(i))-
((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i)))*E2(i));
    K1_E12(i)=
h*(((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*E1(i)+((beta1*I1(i))+(bet
a10*I12(i)))*E2(i)-(miu*E12(i))-(epsilon10*E12(i))-
(epsilon02*E12(i)));
    K1_I1(i)= h*((epsilon1*E1(i))+(epsilon10*E12(i))-
(miu*I1(i))-(epsilon02*E12(i))-(rho1*I1(i)));
    K1_I2(i)= h*((epsilon2*E2(i))+(epsilon02*E12(i))-
(miu*I2(i))-(epsilon10*E12(i))-(rho2*I2(i)));
    K1_I12(i)= h*((epsilon02*E12(i))+(epsilon10*E12(i))-
(miu*I12(i))-(rho10*I12(i))-(rho02*I12(i)));
    K1_R1(i)= h*((rho1*I1(i))+(rho10*I12(i))+(omega2*R2(i))-
(miu*R1(i))-(omega1*R1(i)));
    K1_R2(i)= h*((rho2*I2(i))+(rho02*I12(i))+(omega1*R1(i))-
(miu*R2(i))-(omega2*R2(i)));
    %Step2
    K2_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+hh*K1_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(S(i)+hh*K1_S(i))-
((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(S(i)+hh*K1_S(i)));
    K2_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))
)*(S(i)+hh*K1_S(i))-(miu*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))-
((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(E1(i)+hh*K1_E1(i)));
    K2_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))
)*(S(i)+hh*K1_S(i))-(miu*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(E2(i)+hh*K1_E2(i)));
    K2_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i)
)))*(E1(i)+hh*K1_E1(i))+((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10
*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))*(E2(i)+hh*K1_E2(i))-
(miu*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i))));
    K2_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E
12(i)))-(miu*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))-
```

Lampiran M. Lanjutan

```
(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+hh*K1_I1(i))));
    K2_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E
12(i)))-(miu*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+hh*K1_I2(i))));
    K2_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K
1_E12(i)))-(miu*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))-
(rho10*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))));
    K2_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))+
(omega2*(R2(i)+hh*K1_R2(i)))-(miu*(R1(i)+hh*K1_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+hh*K1_R1(i))));
    K2_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))+
(omega1*(R1(i)+hh*K1_R1(i)))-(miu*(R2(i)+hh*K1_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+hh*K1_R2(i))));
    %Step3
    K3_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+hh*K2_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(S(i)+hh*K2_S(i))-
((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(S(i)+hh*K2_S(i)));
    K3_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))
)*(S(i)+hh*K2_S(i))-(miu*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))-
((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(E1(i)+hh*K2_E1(i)));
    K3_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))
)*(S(i)+hh*K2_S(i))-(miu*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(E2(i)+hh*K2_E2(i)));
    K3_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i)
)))*(E1(i)+hh*K2_E1(i))+((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10
*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))*(E2(i)+hh*K2_E2(i))-
(miu*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i))));
    K3_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E
12(i)))-(miu*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))-
```

Lampiran M. Lanjutan

```
(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+hh*K2_I1(i))));
    K3_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E
12(i)))-(miu*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+hh*K2_I2(i))));
    K3_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K
2_E12(i)))-(miu*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))-
(rho10*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))));
    K3_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))+
(omega2*(R2(i)+hh*K2_R2(i)))-(miu*(R1(i)+hh*K2_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+hh*K2_R1(i))));
    K3_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))+
(omega1*(R1(i)+hh*K2_R1(i)))-(miu*(R2(i)+hh*K2_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+hh*K2_R2(i))));
    %Step4
    K4_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+K3_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i))))*(S(i)
+K3_S(i))-
((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(S(i)
+K3_S(i)));
    K4_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i)))*(S(i
)+K3_S(i))-(miu*(E1(i)+K3_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+K3_E1(i)))-
((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E1(i
)+K3_E1(i)));
    K4_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i)))*(S(i
)+K3_S(i))-(miu*(E2(i)+K3_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+K3_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E2(i
)+K3_E2(i)));
    K4_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E
1(i)+K3_E1(i))+((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_
I12(i))))*(E2(i)+K3_E2(i))-(miu*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i))));
    K4_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+K3_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i))
)-(miu*(I1(i)+K3_I1(i)))-(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+K3_I1(i))));
```

Lampiran M. Lanjutan

```
    K4_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+K3_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i))
)-(miu*(I2(i)+K3_I2(i)))-(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+K3_I2(i))));
    K4_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(
i)))-(miu*(I12(i)+K3_I12(i)))-(rho10*(I12(i)+K3_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+K3_I12(i))));
    K4_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+K3_I12(i)))+(omega
2*(R2(i)+K3_R2(i)))-(miu*(R1(i)+K3_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+K3_R1(i))));
    K4_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+K3_I12(i)))+(omega
1*(R1(i)+K3_R1(i)))-(miu*(R2(i)+K3_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+K3_R2(i))));
    %Total
    S(i+1) = S(i) + (1/6)*(K1_S(i) + (2*K2_S(i)) +
(2*K3_S(i)) + K4_S(i));
End

axes(handles.axes1);
plot(t,S,'r','LineWidth',2)
hold off
xlabel('Waktu')
ylabel('Populasi');
title('Grafik Populasi Susceptible');
legend('S');
grid on
```

Source Code **pada Pushbutton 'PlotExposed'**

```
% --- Executes on button press in PlotExposed.
function PlotExposed_Callback(hObject, eventdata, handles)
%-------------------- inisialisasi parameter ----------------
t0 = str2double(get(handles.t0,'String'));
tf = str2double(get(handles.tf,'String'));
n=str2double(get(handles.n,'String'));
miu = str2double(get(handles.miu,'String'));
beta1 = str2double(get(handles.beta1,'String'));
beta2 = str2double(get(handles.beta2,'String'));
beta10 = str2double(get(handles.beta10,'String'));
beta02 = str2double(get(handles.beta02,'String'));
epsilon1 = str2double(get(handles.epsilon1,'String'));
epsilon2 = str2double(get(handles.epsilon2,'String'));
epsilon10 = str2double(get(handles.epsilon10,'String'));
epsilon02 = str2double(get(handles.epsilon02,'String'));
rho1 = str2double(get(handles.rho1,'String'));
rho2 = str2double(get(handles.rho2,'String'));
```

Lampiran M. Lanjutan

```
rho10 = str2double(get(handles.rho10,'String'));
rho02 = str2double(get(handles.rho02,'String'));
omega1 = str2double(get(handles.omega1,'String'));
omega2 = str2double(get(handles.omega2,'String'));
h =(tf-t0)/n ;
t = 0:h:n*h;
hh = 1/2;
%---------------------- variable state ---------------------
S=zeros(n+1,1);
E1=zeros(n+1,1);
E2=zeros(n+1,1);
E12=zeros(n+1,1);
I1=zeros(n+1,1);
I2=zeros(n+1,1);
I12=zeros(n+1,1);
R1=zeros(n+1,1);
R2=zeros(n+1,1);
%---------------- inisialisasi variabel state --------------
S(1)=0.25;
E1(1)=0.18;
E2(1)=0.15;
E12(1)=0.12;
I1(1)=0.1;
I2(1)=0.09;
I12(1)=0.06;
R1(1)=0.03;
R2(1)=0.02;
N(1)=S(1)+E1(1)+E2(1)+E12(1)+I1(1)+I2(1)+I12(1)+R1(1)+R2(1)
%------------------ Basic Reproduction Number ---------------
Ro1=(beta1*epsilon1)/((miu+epsilon1)*(miu+rho1))
Ro2=(beta2*epsilon2)/((miu+epsilon2)*(miu+rho2))
%Menampilkan hasil perhitungan Ro
set(handles.Ro1,'string', Ro1);
set(handles.Ro2,'string', Ro2);
if Ro1 >= 1
      % if condition is true then print the following
      chlamydia='Stabil'
      set(handles.chlamydia,'string',chlamydia);
   elseif( Ro1 < 1 )
      % if else if condition is true
      chlamydia='Tidak Stabil'
      set(handles.chlamydia,'string',chlamydia);
end
if Ro2 >= 1
      % if condition is true then print the following
      pneumonia='Stabil'
      set(handles.pneumonia,'string',pneumonia);
   elseif( Ro2 < 1 )
```

Lampiran M. Lanjutan

```
      % if else if condition is true
      pneumonia='Tidak Stabil'
      set(handles.pneumonia,'string',pneumonia);
   end
   if Ro1 >= 1 & Ro2>=1
      % if condition is true then print the following
      coinfection='Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
   elseif( Ro1 < 1 & Ro2 < 1 )
      % if else if condition is true
      coinfection='Tidak Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
      elseif( Ro1 < 1 & Ro2 >= 1 )
      % if else if condition is true
      coinfection='Tidak Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
      elseif( Ro1 >= 1 & Ro2 < 1 )
      % if else if condition is true
      coinfection='Tidak Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
   end
%------------- Representasi Metode Runge-Kutta -------------
for i=1:n
    %Step 1
    K1_S(i)= h*(miu-(miu*S(i))-
((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i)))*S(i)-
((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*S(i));
    K1_E1(i)= h*((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i))*S(i)-
(miu*E1(i))-(epsilon1*E1(i))-
((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*E1(i));
    K1_E2(i)= h*((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i))*S(i)-
(miu*E2(i))-(epsilon2*E2(i))-
((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i)))*E2(i));
    K1_E12(i)=
h*(((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*E1(i)+((beta1*I1(i))+(bet
a10*I12(i)))*E2(i)-(miu*E12(i))-(epsilon10*E12(i))-
(epsilon02*E12(i)));
    K1_I1(i)= h*((epsilon1*E1(i))+(epsilon10*E12(i))-
(miu*I1(i))-(epsilon02*E12(i))-(rho1*I1(i)));
    K1_I2(i)= h*((epsilon2*E2(i))+(epsilon02*E12(i))-
(miu*I2(i))-(epsilon10*E12(i))-(rho2*I2(i)));
    K1_I12(i)= h*((epsilon02*E12(i))+(epsilon10*E12(i))-
(miu*I12(i))-(rho10*I12(i))-(rho02*I12(i)));
    K1_R1(i)= h*((rho1*I1(i))+(rho10*I12(i))+(omega2*R2(i))-
(miu*R1(i))-(omega1*R1(i)));
    K1_R2(i)= h*((rho2*I2(i))+(rho02*I12(i))+(omega1*R1(i))-
(miu*R2(i))-(omega2*R2(i)));
```

Lampiran M. Lanjutan

```
    %Step2
    K2_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+hh*K1_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(S(i)+hh*K1_S(i))-
((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(S(i)+hh*K1_S(i)));
    K2_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))
)*(S(i)+hh*K1_S(i))-(miu*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))-
((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(E1(i)+hh*K1_E1(i)));
    K2_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))
)*(S(i)+hh*K1_S(i))-(miu*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(E2(i)+hh*K1_E2(i)));
    K2_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i)
)))*(E1(i)+hh*K1_E1(i))+((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10
*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))*(E2(i)+hh*K1_E2(i))-
(miu*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i))));
    K2_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E
12(i)))-(miu*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+hh*K1_I1(i))));
    K2_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E
12(i)))-(miu*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+hh*K1_I2(i))));
    K2_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K
1_E12(i)))-(miu*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))-
(rho10*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))));
    K2_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))+
(omega2*(R2(i)+hh*K1_R2(i)))-(miu*(R1(i)+hh*K1_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+hh*K1_R1(i))));
    K2_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))+
(omega1*(R1(i)+hh*K1_R1(i)))-(miu*(R2(i)+hh*K1_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+hh*K1_R2(i))));
```

Lampiran M. Lanjutan

```
    %Step3
    K3_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+hh*K2_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(S(i)+hh*K2_S(i))-
((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(S(i)+hh*K2_S(i)));
    K3_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))
)*(S(i)+hh*K2_S(i))-(miu*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))-
((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(E1(i)+hh*K2_E1(i)));
    K3_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))
)*(S(i)+hh*K2_S(i))-(miu*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(E2(i)+hh*K2_E2(i)));
    K3_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i)
)))*(E1(i)+hh*K2_E1(i))+((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10
*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))*(E2(i)+hh*K2_E2(i))-
(miu*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i))));
    K3_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E
12(i)))-(miu*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+hh*K2_I1(i))));
    K3_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E
12(i)))-(miu*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+hh*K2_I2(i))));
    K3_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K
2_E12(i)))-(miu*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))-
(rho10*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))));
    K3_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))+
(omega2*(R2(i)+hh*K2_R2(i)))-(miu*(R1(i)+hh*K2_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+hh*K2_R1(i))));
    K3_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))+
(omega1*(R1(i)+hh*K2_R1(i)))-(miu*(R2(i)+hh*K2_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+hh*K2_R2(i))));
```

Lampiran M. Lanjutan

```
    %Step4
    K4_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+K3_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i))))*(S(i)
+K3_S(i))-
((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(S(i)
+K3_S(i)));
    K4_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i)))*(S(i
)+K3_S(i))-(miu*(E1(i)+K3_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+K3_E1(i)))-
((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E1(i
)+K3_E1(i)));
    K4_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i)))*(S(i
)+K3_S(i))-(miu*(E2(i)+K3_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+K3_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E2(i
)+K3_E2(i)));
    K4_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E
1(i)+K3_E1(i))+((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_
I12(i))))*(E2(i)+K3_E2(i))-(miu*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i))));
    K4_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+K3_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i))
)-(miu*(I1(i)+K3_I1(i)))-(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+K3_I1(i))));
    K4_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+K3_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i))
)-(miu*(I2(i)+K3_I2(i)))-(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+K3_I2(i))));
    K4_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(
i)))-(miu*(I12(i)+K3_I12(i)))-(rho10*(I12(i)+K3_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+K3_I12(i))));
    K4_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+K3_I12(i)))+(omega
2*(R2(i)+K3_R2(i)))-(miu*(R1(i)+K3_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+K3_R1(i))));
    K4_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+K3_I12(i)))+(omega
1*(R1(i)+K3_R1(i)))-(miu*(R2(i)+K3_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+K3_R2(i))));
    %Total
    E1(i+1) = E1(i) + (1/6)*(K1_E1(i) + (2*K2_E1(i)) +
(2*K3_E1(i)) + K4_E1(i));
```

Lampiran M. Lanjutan

```
    E2(i+1) = E2(i) + (1/6)*(K1_E2(i) + (2*K2_E2(i)) +
(2*K3_E2(i)) + K4_E2(i));
    E12(i+1) = E12(i) + (1/6)*(K1_E12(i) + (2*K2_E12(i)) +
(2*K3_E12(i)) + K4_E12(i));
end

axes(handles.axes1);
plot(t,E1,'r','LineWidth',2)
hold on
plot(t,E2,'k','LineWidth',2)
hold on
plot(t,E12,'b','LineWidth',2)
hold off
xlabel('Waktu')
ylabel('Populasi');
title('Grafik Populasi Exposed');
legend('E1','E2','E12');
grid on
```

Source Code pada Pushbutton 'PlotInfected'

```
% --- Executes on button press in PlotInfected.
function PlotInfected_Callback(hObject, eventdata, handles)
%------------------- inisialisasi parameter ----------------
t0 = str2double(get(handles.t0,'String'));
tf = str2double(get(handles.tf,'String'));
n=str2double(get(handles.n,'String'));
miu = str2double(get(handles.miu,'String'));
beta1 = str2double(get(handles.beta1,'String'));
beta2 = str2double(get(handles.beta2,'String'));
beta10 = str2double(get(handles.beta10,'String'));
beta02 = str2double(get(handles.beta02,'String'));
epsilon1 = str2double(get(handles.epsilon1,'String'));
epsilon2 = str2double(get(handles.epsilon2,'String'));
epsilon10 = str2double(get(handles.epsilon10,'String'));
epsilon02 = str2double(get(handles.epsilon02,'String'));
rho1 = str2double(get(handles.rho1,'String'));
rho2 = str2double(get(handles.rho2,'String'));
rho10 = str2double(get(handles.rho10,'String'));
rho02 = str2double(get(handles.rho02,'String'));
omega1 = str2double(get(handles.omega1,'String'));
omega2 = str2double(get(handles.omega2,'String'));

h =(tf-t0)/n ;
t = 0:h:n*h;
hh = 1/2;
%--------------------- variable state ---------------------
S=zeros(n+1,1);
E1=zeros(n+1,1);
```

Lampiran M. Lanjutan

```
E2=zeros(n+1,1);
E12=zeros(n+1,1);
I1=zeros(n+1,1);
I2=zeros(n+1,1);
I12=zeros(n+1,1);
R1=zeros(n+1,1);
R2=zeros(n+1,1);
%---------------- inisialisasi variabel state --------------
S(1)=0.25;
E1(1)=0.18;
E2(1)=0.15;
E12(1)=0.12;
I1(1)=0.1;
I2(1)=0.09;
I12(1)=0.06;
R1(1)=0.03;
R2(1)=0.02;
N(1)=S(1)+E1(1)+E2(1)+E12(1)+I1(1)+I2(1)+I12(1)+R1(1)+R2(1)
%----------------- Basic Reproduction Number ---------------
Ro1=(beta1*epsilon1)/((miu+epsilon1)*(miu+rho1))
Ro2=(beta2*epsilon2)/((miu+epsilon2)*(miu+rho2))
%Menampilkan hasil perhitungan Ro
set(handles.Ro1,'string', Ro1);
set(handles.Ro2,'string', Ro2);
if Ro1 >= 1
      % if condition is true then print the following
      chlamydia='Stabil'
      set(handles.chlamydia,'string',chlamydia);
   elseif( Ro1 < 1 )
      % if else if condition is true
      chlamydia='Tidak Stabil'
      set(handles.chlamydia,'string',chlamydia);
end
if Ro2 >= 1
      % if condition is true then print the following
      pneumonia='Stabil'
      set(handles.pneumonia,'string',pneumonia);
   elseif( Ro2 < 1 )
      % if else if condition is true
      pneumonia='Tidak Stabil'
      set(handles.pneumonia,'string',pneumonia);
   end
   if Ro1 >= 1 & Ro2>=1
      % if condition is true then print the following
      coinfection='Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
   elseif( Ro1 < 1 & Ro2 < 1 )
      % if else if condition is true
```

Lampiran M. Lanjutan

```
        coinfection='Tidak Stabil'
        set(handles.coinfection,'string',coinfection);
        elseif( Ro1 < 1 & Ro2 >= 1 )
        % if else if condition is true
        coinfection='Tidak Stabil'
        set(handles.coinfection,'string',coinfection);
        elseif( Ro1 >= 1 & Ro2 < 1 )
        % if else if condition is true
        coinfection='Tidak Stabil'
        set(handles.coinfection,'string',coinfection);
    end
%------------- Representasi Metode Runge-Kutta -------------
for i=1:n
    %Step 1
    K1_S(i)= h*(miu-(miu*S(i))-
((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i)))*S(i)-
((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*S(i));
    K1_E1(i)= h*((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i))*S(i)-
(miu*E1(i))-(epsilon1*E1(i))-
((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*E1(i));
    K1_E2(i)= h*((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i))*S(i)-
(miu*E2(i))-(epsilon2*E2(i))-
((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i)))*E2(i));
    K1_E12(i)=
h*(((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*E1(i)+((beta1*I1(i))+(bet
a10*I12(i)))*E2(i)-(miu*E12(i))-(epsilon10*E12(i))-
(epsilon02*E12(i)));
    K1_I1(i)= h*((epsilon1*E1(i))+(epsilon10*E12(i))-
(miu*I1(i))-(epsilon02*E12(i))-(rho1*I1(i)));
    K1_I2(i)= h*((epsilon2*E2(i))+(epsilon02*E12(i))-
(miu*I2(i))-(epsilon10*E12(i))-(rho2*I2(i)));
    K1_I12(i)= h*((epsilon02*E12(i))+(epsilon10*E12(i))-
(miu*I12(i))-(rho10*I12(i))-(rho02*I12(i)));
    K1_R1(i)= h*((rho1*I1(i))+(rho10*I12(i))+(omega2*R2(i))-
(miu*R1(i))-(omega1*R1(i)));
    K1_R2(i)= h*((rho2*I2(i))+(rho02*I12(i))+(omega1*R1(i))-
(miu*R2(i))-(omega2*R2(i)));
    %Step2
    K2_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+hh*K1_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(S(i)+hh*K1_S(i))-
((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(S(i)+hh*K1_S(i)));
    K2_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))
)*(S(i)+hh*K1_S(i))-(miu*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))-
```

Lampiran M. Lanjutan

```
((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(E1(i)+hh*K1_E1(i)));
    K2_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))
)*(S(i)+hh*K1_S(i))-(miu*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(E2(i)+hh*K1_E2(i)));
    K2_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i)
)))*(E1(i)+hh*K1_E1(i))+((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10
*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))*(E2(i)+hh*K1_E2(i))-
(miu*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i))));
    K2_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E
12(i)))-(miu*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+hh*K1_I1(i))));
    K2_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E
12(i)))-(miu*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+hh*K1_I2(i))));
    K2_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K
1_E12(i)))-(miu*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))-
(rho10*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))));
    K2_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))+
(omega2*(R2(i)+hh*K1_R2(i)))-(miu*(R1(i)+hh*K1_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+hh*K1_R1(i))));
    K2_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))+
(omega1*(R1(i)+hh*K1_R1(i)))-(miu*(R2(i)+hh*K1_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+hh*K1_R2(i))));
    %Step3
    K3_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+hh*K2_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(S(i)+hh*K2_S(i))-
((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(S(i)+hh*K2_S(i)));
    K3_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))
)*(S(i)+hh*K2_S(i))-(miu*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))-
```

Lampiran M. Lanjutan

```
((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(E1(i)+hh*K2_E1(i)));
    K3_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))
)*(S(i)+hh*K2_S(i))-(miu*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(E2(i)+hh*K2_E2(i)));
    K3_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i)
)))*(E1(i)+hh*K2_E1(i))+((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10
*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))*(E2(i)+hh*K2_E2(i))-
(miu*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i))));
    K3_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E
12(i)))-(miu*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+hh*K2_I1(i))));
    K3_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E
12(i)))-(miu*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+hh*K2_I2(i))));
    K3_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K
2_E12(i)))-(miu*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))-
(rho10*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))));
    K3_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))+
(omega2*(R2(i)+hh*K2_R2(i)))-(miu*(R1(i)+hh*K2_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+hh*K2_R1(i))));
    K3_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))+
(omega1*(R1(i)+hh*K2_R1(i)))-(miu*(R2(i)+hh*K2_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+hh*K2_R2(i))));
    %Step4
    K4_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+K3_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i))))*(S(i)
+K3_S(i))-
((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(S(i)
+K3_S(i)));
    K4_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i)))*(S(i
)+K3_S(i))-(miu*(E1(i)+K3_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+K3_E1(i)))-
```

Lampiran M. Lanjutan

```
((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E1(i
)+K3_E1(i)));
    K4_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i)))*(S(i
)+K3_S(i))-(miu*(E2(i)+K3_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+K3_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E2(i
)+K3_E2(i)));
    K4_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E
1(i)+K3_E1(i))+((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_
I12(i))))*(E2(i)+K3_E2(i))-(miu*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i))));
    K4_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+K3_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i))
)-(miu*(I1(i)+K3_I1(i)))-(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+K3_I1(i))));
    K4_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+K3_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i))
)-(miu*(I2(i)+K3_I2(i)))-(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+K3_I2(i))));
    K4_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(
i)))-(miu*(I12(i)+K3_I12(i)))-(rho10*(I12(i)+K3_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+K3_I12(i))));
    K4_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+K3_I12(i)))+(omega
2*(R2(i)+K3_R2(i)))-(miu*(R1(i)+K3_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+K3_R1(i))));
    K4_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+K3_I12(i)))+(omega
1*(R1(i)+K3_R1(i)))-(miu*(R2(i)+K3_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+K3_R2(i))));
    %Total
    I1(i+1) = I1(i) + (1/6)*(K1_I1(i) + (2*K2_I1(i)) +
(2*K3_I1(i)) + K4_I1(i));
    I2(i+1) = I2(i) + (1/6)*(K1_I2(i) + (2*K2_I2(i)) +
(2*K3_I2(i)) + K4_I2(i));
    I12(i+1) = I12(i) + (1/6)*(K1_I12(i) + (2*K2_I12(i)) +
(2*K3_I12(i)) + K4_I12(i));
end

axes(handles.axes1);
plot(t,I1,'r','LineWidth',2)
hold on
plot(t,I2,'k','LineWidth',2)
hold on
```

Lampiran M. Lanjutan

```
plot(t,I12,'b','LineWidth',2)
hold off
xlabel('Waktu')
ylabel('Populasi');
title('Grafik Populasi Infected');
legend('I1','I2','I12');
grid on
```

***Source Code* pada Pushbutton 'PlotRecovered'**

```
% --- Executes on button press in PlotRecovered.
function PlotRecovered_Callback(hObject, eventdata, handles)
%------------------- inisialisasi parameter -----------------
t0 = str2double(get(handles.t0,'String'));
tf = str2double(get(handles.tf,'String'));
n=str2double(get(handles.n,'String'));
miu = str2double(get(handles.miu,'String'));
beta1 = str2double(get(handles.beta1,'String'));
beta2 = str2double(get(handles.beta2,'String'));
beta10 = str2double(get(handles.beta10,'String'));
beta02 = str2double(get(handles.beta02,'String'));
epsilon1 = str2double(get(handles.epsilon1,'String'));
epsilon2 = str2double(get(handles.epsilon2,'String'));
epsilon10 = str2double(get(handles.epsilon10,'String'));
epsilon02 = str2double(get(handles.epsilon02,'String'));
rho1 = str2double(get(handles.rho1,'String'));
rho2 = str2double(get(handles.rho2,'String'));
rho10 = str2double(get(handles.rho10,'String'));
rho02 = str2double(get(handles.rho02,'String'));
omega1 = str2double(get(handles.omega1,'String'));
omega2 = str2double(get(handles.omega2,'String'));
h =(tf-t0)/n ;
t = 0:h:n*h;
hh = 1/2;
%---------------------- variable state ---------------------
S=zeros(n+1,1);
E1=zeros(n+1,1);
E2=zeros(n+1,1);
E12=zeros(n+1,1);
I1=zeros(n+1,1);
I2=zeros(n+1,1);
I12=zeros(n+1,1);
R1=zeros(n+1,1);
R2=zeros(n+1,1);
%---------------- inisialisasi variabel state --------------
S(1)=0.25;
E1(1)=0.18;
E2(1)=0.15;
```

Lampiran M. Lanjutan

```
E12(1)=0.12;
I1(1)=0.1;
I2(1)=0.09;
I12(1)=0.06;
R1(1)=0.03;
R2(1)=0.02;
N(1)=S(1)+E1(1)+E2(1)+E12(1)+I1(1)+I2(1)+I12(1)+R1(1)+R2(1)
%------------------ Basic Reproduction Number ----------------
Ro1=(beta1*epsilon1)/((miu+epsilon1)*(miu+rho1))
Ro2=(beta2*epsilon2)/((miu+epsilon2)*(miu+rho2))
%Menampilkan hasil perhitungan Ro
set(handles.Ro1,'string', Ro1);
set(handles.Ro2,'string', Ro2);
if Ro1 >= 1
      % if condition is true then print the following
      chlamydia='Stabil'
      set(handles.chlamydia,'string',chlamydia);
   elseif( Ro1 < 1 )
      % if else if condition is true
      chlamydia='Tidak Stabil'
      set(handles.chlamydia,'string',chlamydia);
end
if Ro2 >= 1
      % if condition is true then print the following
      pneumonia='Stabil'
      set(handles.pneumonia,'string',pneumonia);
   elseif( Ro2 < 1 )
      % if else if condition is true
      pneumonia='Tidak Stabil'
      set(handles.pneumonia,'string',pneumonia);
   end
   if Ro1 >= 1 & Ro2>=1
      % if condition is true then print the following
      coinfection='Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
   elseif( Ro1 < 1 & Ro2 < 1 )
      % if else if condition is true
      coinfection='Tidak Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
      elseif( Ro1 < 1 & Ro2 >= 1 )
      % if else if condition is true
      coinfection='Tidak Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
      elseif( Ro1 >= 1 & Ro2 < 1 )
      % if else if condition is true
      coinfection='Tidak Stabil'
      set(handles.coinfection,'string',coinfection);
   end
```

Lampiran M. Lanjutan

```
%------------- Representasi Metode Runge-Kutta -------------
for i=1:n
    %Step 1
    K1_S(i)= h*(miu-(miu*S(i))-
((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i)))*S(i)-
((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*S(i));
    K1_E1(i)= h*((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i))*S(i)-
(miu*E1(i))-(epsilon1*E1(i))-
((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*E1(i));
    K1_E2(i)= h*((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i))*S(i)-
(miu*E2(i))-(epsilon2*E2(i))-
((beta1*I1(i))+(beta10*I12(i)))*E2(i));
    K1_E12(i)=
h*(((beta2*I2(i))+(beta02*I12(i)))*E1(i)+((beta1*I1(i))+(bet
a10*I12(i)))*E2(i)-(miu*E12(i))-(epsilon10*E12(i))-
(epsilon02*E12(i)));
    K1_I1(i)= h*((epsilon1*E1(i))+(epsilon10*E12(i))-
(miu*I1(i))-(epsilon02*E12(i))-(rho1*I1(i)));
    K1_I2(i)= h*((epsilon2*E2(i))+(epsilon02*E12(i))-
(miu*I2(i))-(epsilon10*E12(i))-(rho2*I2(i)));
    K1_I12(i)= h*((epsilon02*E12(i))+(epsilon10*E12(i))-
(miu*I12(i))-(rho10*I12(i))-(rho02*I12(i)));
    K1_R1(i)= h*((rho1*I1(i))+(rho10*I12(i))+(omega2*R2(i))-
(miu*R1(i))-(omega1*R1(i)));
    K1_R2(i)= h*((rho2*I2(i))+(rho02*I12(i))+(omega1*R1(i))-
(miu*R2(i))-(omega2*R2(i)));
    %Step2
    K2_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+hh*K1_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(S(i)+hh*K1_S(i))-
((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(S(i)+hh*K1_S(i)));
    K2_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))
)*(S(i)+hh*K1_S(i))-(miu*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))-
((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(E1(i)+hh*K1_E1(i)));
    K2_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))
)*(S(i)+hh*K1_S(i))-(miu*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))
*(E2(i)+hh*K1_E2(i)));
    K2_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K1_I12(i)
)))*(E1(i)+hh*K1_E1(i))+((beta1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(beta10
*(I12(i)+hh*K1_I12(i))))*(E2(i)+hh*K1_E2(i))-
```

Lampiran M. Lanjutan

```
(miu*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i))));
    K2_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+hh*K1_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E
12(i)))-(miu*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+hh*K1_I1(i))));
    K2_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+hh*K1_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E
12(i)))-(miu*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+hh*K1_I2(i))));
    K2_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+hh*K1_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K
1_E12(i)))-(miu*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))-
(rho10*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+hh*K1_I12(i))));
    K2_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+hh*K1_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))+
(omega2*(R2(i)+hh*K1_R2(i)))-(miu*(R1(i)+hh*K1_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+hh*K1_R1(i))));
    K2_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+hh*K1_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+hh*K1_I12(i)))+
(omega1*(R1(i)+hh*K1_R1(i)))-(miu*(R2(i)+hh*K1_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+hh*K1_R2(i))));
    %Step3
    K3_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+hh*K2_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(S(i)+hh*K2_S(i))-
((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(S(i)+hh*K2_S(i)));
    K3_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))
)*(S(i)+hh*K2_S(i))-(miu*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))-
((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(E1(i)+hh*K2_E1(i)));
    K3_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))
)*(S(i)+hh*K2_S(i))-(miu*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))
*(E2(i)+hh*K2_E2(i)));
    K3_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+hh*K2_I12(i)
)))*(E1(i)+hh*K2_E1(i))+((beta1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(beta10
*(I12(i)+hh*K2_I12(i))))*(E2(i)+hh*K2_E2(i))-
```

Lampiran M. Lanjutan

```
(miu*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i))));
    K3_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+hh*K2_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E
12(i)))-(miu*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+hh*K2_I1(i))));
    K3_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+hh*K2_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E
12(i)))-(miu*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))-
(epsilon10*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+hh*K2_I2(i))));
    K3_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+hh*K2_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+hh*K
2_E12(i)))-(miu*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))-
(rho10*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+hh*K2_I12(i))));
    K3_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+hh*K2_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))+
(omega2*(R2(i)+hh*K2_R2(i)))-(miu*(R1(i)+hh*K2_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+hh*K2_R1(i))));
    K3_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+hh*K2_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+hh*K2_I12(i)))+
(omega1*(R1(i)+hh*K2_R1(i)))-(miu*(R2(i)+hh*K2_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+hh*K2_R2(i))));
    %Step4
    K4_S(i)= h*(miu-(miu*(S(i)+K3_S(i)))-
((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i))))*(S(i)
+K3_S(i))-
((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(S(i)
+K3_S(i)));
    K4_E1(i)=
h*((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i)))*(S(i
)+K3_S(i))-(miu*(E1(i)+K3_E1(i)))-
(epsilon1*(E1(i)+K3_E1(i)))-
((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E1(i
)+K3_E1(i)));
    K4_E2(i)=
h*((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i)))*(S(i
)+K3_S(i))-(miu*(E2(i)+K3_E2(i)))-
(epsilon2*(E2(i)+K3_E2(i)))-
((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E2(i
)+K3_E2(i)));
    K4_E12(i)=
h*(((beta2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(beta02*(I12(i)+K3_I12(i))))*(E
1(i)+K3_E1(i))+((beta1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(beta10*(I12(i)+K3_
I12(i))))*(E2(i)+K3_E2(i))-(miu*(E12(i)+K3_E12(i)))-
```

Lampiran M. Lanjutan

```
(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i))));
    K4_I1(i)=
h*((epsilon1*(E1(i)+K3_E1(i)))+(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i))
)-(miu*(I1(i)+K3_I1(i)))-(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(rho1*(I1(i)+K3_I1(i))));
    K4_I2(i)=
h*((epsilon2*(E2(i)+K3_E2(i)))+(epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i))
)-(miu*(I2(i)+K3_I2(i)))-(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(i)))-
(rho2*(I2(i)+K3_I2(i))));
    K4_I12(i)=
h*((epsilon02*(E12(i)+K3_E12(i)))+(epsilon10*(E12(i)+K3_E12(
i)))-(miu*(I12(i)+K3_I12(i)))-(rho10*(I12(i)+K3_I12(i)))-
(rho02*(I12(i)+K3_I12(i))));
    K4_R1(i)=
h*((rho1*(I1(i)+K3_I1(i)))+(rho10*(I12(i)+K3_I12(i)))+(omega
2*(R2(i)+K3_R2(i)))-(miu*(R1(i)+K3_R1(i)))-
(omega1*(R1(i)+K3_R1(i))));
    K4_R2(i)=
h*((rho2*(I2(i)+K3_I2(i)))+(rho02*(I12(i)+K3_I12(i)))+(omega
1*(R1(i)+K3_R1(i)))-(miu*(R2(i)+K3_R2(i)))-
(omega2*(R2(i)+K3_R2(i))));
    %Total
    R1(i+1) = R1(i) + (1/6)*(K1_R1(i) + (2*K2_R1(i)) +
(2*K3_R1(i)) + K4_R1(i));
    R2(i+1) = R2(i) + (1/6)*(K1_R2(i) + (2*K2_R2(i)) +
(2*K3_R2(i)) + K4_R2(i));
end

axes(handles.axes1);
plot(t,R1,'r','LineWidth',2)
hold on
plot(t,R2,'k','LineWidth',2)
hold off
xlabel('Waktu')
ylabel('Populasi');
title('Grafik Populasi Recovered');
legend('R1','R2');
grid on
```

BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama lengkap Siti Nur Mareliana Leni Syah Putri dan dilahirkan di Bojonegoro tanggal 25 Maret 1996 dari pasangan Latsuri dan Sri Darwati. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Penulis bertempat tinggal di Dsn. Nggandu Ds. Purwoasri, Kec. Sukosewu, Kab. Bojonegoro. Pendidikan formal yang telah ditempuh penulis yaitu TK Dharma Wanita Kedungrejo, SD Negeri Kedungrejo I, SMP Negeri 1 Sugihwaras, dan SMA Negeri 1 Sugihwaras. Saat ini, penulis sedang menempuh pendidikan S1 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan bidang minat Terapan, yang mencakup Pemodelan Matematika serta Riset Operasi dan Pengolahan Data (ROPD).

Selama kuliah, pada tahun 2015-2016 penulis menjadi Staff di Biro Litbang Badan Pelaksana Mentoring (BPM) JMMI TPKI ITS. Penulis juga aktif di Lembaga Dakwah Jurusan Ibnu Muqlah Matematika ITS. Pada tahun 2015-2016 penulis menjadi Staff Keputrian Ibnu Muqlah Matematika ITS. Pada tahun 2016-2017 penulis menjadi Sekretaris Departemen Keputrian Ibnu Muqlah Matematika ITS. Penulis juga aktif di UKM KSR PMI ITS sebagai Staff Pengmas tahun 2016-2017. Serta pada tahun 2016-2017 penulis menjadi Pengajar di Rumah Perjuangan ITS Mengajar. Demikian biodata penulis. Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai laporan Tugas Akhir ini, dapat dikirimkan melalui email nur.mareliana@gmail.com. Terima kasih.