



**TUGAS AKHIR - SM141501**

# **ANALISIS STABILITAS MODEL MATEMATIKA DENGAN TREATMENT PADA PENDERITA HPV-KANKER SERVIKS**

**ASTIKA FEBRIANI  
NRP.0611144000021**

**Dosen Pembimbing :  
Dr. Drs. Hariyanto, M.Si  
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya  
2018**





TUGAS AKHIR - SM141501

## **ANALISIS STABILITAS MODEL MATEMATIKA DENGAN PERLAKUAN PADA PENDERITA HPV-KANKER SERVIKS**

ASTIKA FEBRIANI  
NRP. 0611144000021

Pembimbing:  
Dr. Drs. Hariyanto, M.Si  
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya  
2018





FINAL PROJECT - SM141501

## **STABILITY ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODEL WITH TREATMENT IN PATIENTS HPV-CERVICAL CANCER**

ASTIKA FEBRIANI  
NRP. 0611144000021

Supervisors:  
Dr. Drs. Hariyanto, M.Si  
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

DEPARTEMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Mathematics, Computations and Data Sciences  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya  
2018



## LEMBAR PENGESAHAN

**ANALISIS STABILITAS MODEL MATEMATIKA DENGAN  
PERLAKUAN PADA PENDERITA HPV-KANKER SERVIKS**

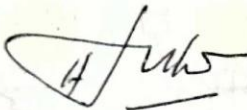
***STABILITY ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODEL WITH  
TREATMENT IN PATIENTS HPV-CERVICAL CANCER***

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Departemen Matematika  
Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :  
**ASTIKA FEBRIANI**  
NRP. 0611144000021

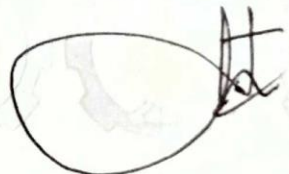
Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



**Drs. Lukman Hanafi, M.Sc**  
NIP. 19640624 198803 1 001

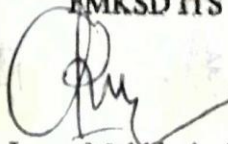
Dosen Pembimbing I,



**Dr.Drs. Hariyanto, M.Si**  
NIP. 19530414 198203 1 002

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika  
EMKSD ITS



**Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT**  
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 30 Juli 2018





# ANALISIS STABILITAS MODEL MATEMATIKA DENGAN PERLAKUAN PADA PENDERITA HPV-KANKER SERVIKS

**Nama Mahasiswa** : Astika Febriani  
**NRP** : 0611144000021  
**Departemen** : Matematika FMKSD-ITS  
**Pembimbing** : 1. Dr. Drs. Hariyanto, M.Si  
2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

## Abstrak

*Human Papillomavirus* (HPV) adalah salah satu virus yang menyebabkan terjangkitnya penyakit kanker yang mematikan kedua setelah kanker payudara. Virus HPV ini dapat menyerang laki-laki dan perempuan sehingga dibutuhkan pemberian vaksin pada suatu individu untuk mencegah terjangkitnya terinfeksi HPV. Pemberian vaksin dilakukan secara berkala untuk meminimalisir terinfeksi virus HPV. Pada penelitian ini model matematika pengaruh pemberian vaksin infeksi HPV terhadap kanker serviks dibedakan menjadi 2 sub populasi yaitu laki-laki dan perempuan, sedangkan populasi perempuan diambil titik pengamatan usia 26 tahun. Adapun masing-masing sub populasi didapatkan titik kesetimbangan dan rasio reproduksi dasar ( $R_0$ ). Berdasarkan hasil simulasi yang diperoleh dengan menggunakan *software* MATLAB 2013a menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan variasi langkah waktu(h) adalah 0.5 dan 0.0005 menunjukkan bahwa semakin kecil nilai h maka semakin sedikit waktu yang dibutuhkan untuk menuju persekitaran titik setimbang. Selanjutnya dengan menginput nilai gejala penyebaran virus dan usia kematangan perempuan adalah 0.5 dan 1 menunjukkan bahwa semakin kecil laju gejala virus maka semakin lambat virus menyebar dan semakin besar laju kematangan usia perempuan maka semakin kecil waktu yang dibutuhkan untuk terinfeksi.

**Kata Kunci:** *Human Papillomavirus* (HPV), Kanker Serviks, analisis stabilitas, model matematika



# STABILITY ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODEL WITH TREATMENT IN PATIENTS HPV-CERVICAL CANCER

**Name** : Astika Febriani  
**NRP** : 0611144000021  
**Departement** : Matematika FMKSD-ITS  
**Supervisor** : 1. Dr. Drs. Hariyanto, M.Si  
2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

## ***Abstract***

*Human Papillomavirus (HPV) is a virus that cause the deadly disease of cancer second only to breast cancer. This HPV virus can attack the men and women so required the granting of vaccines in order to prevent an individual infected with HPV. Administering vaccines in do periodically to minimize the HPV virus infected. This mathematical model study on the influence of HPV infection vaccine allotment against cervical cancer is distinguished into 2 sub population i.e., men and woman, while female population is taken observation point 26 years old. As for each sub group obtained equilibrium point and basic reproduction ratio( $R_0$ ). Based on simulated results obtained by using the MATLAB software 2013a using Runge-Kutta method with four-order variation of time step ( $h$ ) is 0.5 and 0.0005 suggests that the smaller the value of  $h$  then the less time needed to go to the neighborhood of a point of equilibrium. Next to the input value of a symptom of the age of maturity of females is 0.5 and 1 show that the rate of symptoms of the virus is slow then the virus spreads and the greater the rate of maturity age women then getting smaller the time it takes to get infected.*

**Keyword:** *Human Papillomavirus (HPV), Cervical Cancer stability analysis, mathematical model*



## DAFTAR ISI

	Hal
HALAMAN JUDUL .....	i
LEMBAR PENGESAHAN.....	v
Abstrak.....	vii
<i>Abstract</i> .....	ix
DAFTAR ISI.....	xi
KATA PENGANTAR .....	xiii
DAFTAR GAMBAR .....	xv
DAFTAR TABEL .....	xvii
DAFTAR SIMBOL .....	xix
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah .....	2
1.4 Tujuan .....	3
1.5 Manfaat .....	3
1.6 Sistematika Penulisan .....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....	5
2.1 Penelitian Terdahulu .....	5
2.2 Kanker Serviks .....	6
2.3 <i>Human Papillomavirus</i> .....	6
2.4 Model Matematika Pemberian Vaksin <i>Human Papillomavirus</i> terhadap Kanker Serviks .....	6
2.5 Bilangan Reproduksi Dasar.....	9
2.6 Kestabilan Titik Tetap .....	10
2.6 Pelinieran .....	11
2.7 Kestabilan Asimtotik Lokal .....	14

Hal

2.8 Metode Runge-Kutta .....	15
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>	<b>17</b>
3.1 Studi Literatur .....	17
3.2 Tahap Mengkaji Model Pemberian Vaksin pada Infeksi <i>Human Papillomavirus</i> (HPV) terhadap Kanker Serviks.	17
3.3 Menganalisis Kestabilan Lokal .....	17
3.4 Simulasi Numerik Runge-Kutta Orde-4 .....	17
3.5 Penarikan Kesimpulan dan Laporan Tugas Akhir .....	18
<b>BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN .....</b>	<b>19</b>
4.1 Model Matematika Pemberian Vaksin pada Infeksi <i>Human Papillomavirus</i> terhadap Kanker Serviks .....	19
4.2 Analisis Titik Keseimbangan .....	26
4.2.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit .....	27
4.2.2 Titik Keseimbangan Endemik .....	30
4.3 Bilangan Reproduksi Dasar .....	36
4.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan .....	48
4.4.1 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit .....	49
4.4.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik .....	54
4.5 Simulasi Numerik .....	58
<b>BAB V PENUTUP .....</b>	<b>83</b>
5.1 Kesimpulan .....	83
5.2 Saran .....	83
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>85</b>
<b>LAMPIRAN A .....</b>	<b>87</b>
<b>LAMPIRAN B .....</b>	<b>103</b>
<b>BIODATA PENULIS .....</b>	<b>122</b>

## KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah atas kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

### **“ANALISIS STABILITAS MODEL MATEMATIKA DENGAN PERLAKUAN PADA PENDERITA HPV- KANKER SERVIKS”**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Ketua Departemen dan Ibu Dr.Dra Mardijah, MT selaku Sekretaris Departemen Matematika FMKSD-ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si selaku Kaprodi Sarjana dan Bapak Drs.Iis Herisman, M.Sc selaku Sekretaris Kaprodi Sarjana Departemen Matematika FMKSD-ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi
3. Bapak Dr.Drs Hariyanto, M.Si selaku Dosen Pembimbing I dan Bapak Drs.Lukman Hanafi,M.Sc selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan motivasi dan pengarahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
4. Bapak Drs. Suharmadi Sanjaya, Dipl, Sc.M.Phil, dan Ibu Dra Rinurwati selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan pengarahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
5. Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto M.Si, sebagai dosen wali selama penulis kuliah di Departemen Matematika FMKSD-ITS.
6. Bapak, Ibum dan keluarga besar saya yang telah banyak mendukung dan memberi semangat saya dalam menjalani masa perkuliahan.
7. Teman-teman mahasiswa Firas, Zulfa, Fitriani, Anindya,Tal, dan Halim serta seluruh mahasiswa Matematika 2014 serta

keluarga STI-49 AKSIOMA ( yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu) yang telah banyak mendukung baik dari doa maupun tindakan yang telah memberi semangat saya saat menjalani perkuliahan.

8. Semua pihak yang telah memberikan dukungan dan ilmu kepada penulis dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.

Apabila dalam penulisan laporan Tugas Akhir ini ada kekurangan, kami mohon kritik dan saran demi penyempurnaan laporan Tugas Akhir di masa yang akan datang. Semoga laporan Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak. Amin.

Surabaya,

Penulis



## DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 3. 1 Diagram Alir Metode Penelitian.....	18
Gambar 4. 1 Tampilan “Home” pada GUI .....	67
Gambar 4. 2 Tampilan “Simulasi” pada GUI.....	67
Gambar 4. 3 Flow Chart Simulasi .....	68
Gambar 4. 4 Grafik masing-masing populasi perempuan usia dibawah 26 tahun saat $h=0.0005$ .....	70
Gambar 4. 5 Grafik masing-masing populasi perempuan usia dibawah 26 tahun saat $h=0.5$ .....	70
Gambar 4. 6 Grafik masing-masing populasi perempuan usia diatas 26 tahun saat $h=0.0005$ .....	71
Gambar 4. 7 Grafik masing-masing populasi perempuan usia diatas 26 tahun saat $h=0.5$ .....	72
Gambar 4. 8 Grafik masing-masing populasi laki-laki saat $h=0.0005$ .....	73
Gambar 4. 9 Grafik masing-masing populasi laki-laki saat $h=0.5$ .....	73
Gambar 4. 10 Grafik <i>exposed</i> perempuan usia dibawah 26 tahun saat $\rho_{11} =0.25$ dan $\rho_{12} =0.75$ .....	75
Gambar 4. 11 Grafik <i>exposed</i> perempuan usia diatas 26 tahun saat $\rho_{21} =0.25$ dan $\rho_{22} =0.75$ .....	75
Gambar 4. 12 Grafik <i>exposed</i> laki-laki saat $\rho_{m1} =0.25$ dan $\rho_{m2} =0.75$ .....	76
Gambar 4. 13 Grafik <i>exposed</i> perempuan usia dibawah 26 tahun saat $\xi_1 =1$ dan $\xi_2 =0.5$ .....	77
Gambar 4. 14 Grafik <i>exposed</i> perempuan dengan usia diatas 26 tahun saat $\xi_1 =1$ dan $\xi_2 =0.5$ .....	77
Gambar 4. 15 Grafik <i>exposed</i> pada laki-laki saat $\xi_1 =1$ dan $\xi_2 =0.5$ .....	78

Gambar 4. 16 Grafik *exposed* perempuan usia di bawah 26 tahun dan *exposed* perempuan usia di atas 26 tahun .....79

Gambar 4. 17 Grafik individu *exposed* laki-laki dan perempuan usia dibawah 26 tahun .....80

Gambar 4. 18 Grafik *exposed* laki-laki dan *exposed* perempuan dengan usia diatas 26 tahun .....81

## DAFTAR TABEL

	Hal
Tabel 1. Nilai-Nilai Parameter pada Model Matematika Pengaruh Pemberian Vaksin HPV.....	69



## DAFTAR SIMBOL

- $S_1(t)$  Populasi perempuan yang rentan dengan usia dibawah 26 tahun
- $S_2(t)$  Populasi perempuan yang rentan dengan usia diatas 26 tahun
- $S_m(t)$  Populasi laki-laki yang rentan
- $U_1(t)$  Populasi perempuan rentan dengan pemberian dosis pertama pada usia dibawah 26 tahun
- $U_2(t)$  Populasi perempuan rentan dengan pemberian dosis pertama pada usia diatas 26 tahun
- $U_m(t)$  Populasi laki-laki rentan dengan pemberian dosis pertama
- $V_1(t)$  Populasi perempuan rentan dengan pemberian dosis kedua pada usia dibawah 26 tahun
- $V_2(t)$  Populasi perempuan rentan dengan pemberian dosis kedua pada usia diatas 26 tahun
- $V_m(t)$  Populasi laki-laki rentan dengan pemberian dosis kedua
- $W_1(t)$  Populasi perempuan rentan dengan pemberian dosis ketiga pada usia dibawah 26 tahun
- $W_2(t)$  Populasi perempuan rentan dengan pemberian dosis ketiga pada usia diatas 26 tahun
- $W_m(t)$  Populasi laki-laki rentan dengan pemberian dosis ketiga
- $E_1(t)$  Populasi perempuan yang terkena infeksi HPV pada usia dibawah 26 tahun
- $E_2(t)$  Populasi perempuan yang terkena infeksi HPV pada usia diatas 26 tahun
- $E_m(t)$  Populasi laki-laki yang terkena infeksi HPV
- $I_1(t)$  Populasi perempuan yang terinfeksi HPV pada usia dibawah 26 tahun

$I_2(t)$	Populasi perempuan yang terinfeksi HPV pada usia diatas 26 tahun
$I_m(t)$	Populasi laki-laki yang terinfeksi HPV pada usia diatas 26 tahun
$R_1(t)$	Populasi perempuan yang sembuh terhadap infeksi HPV pada usia dibawah 26 tahun
$R_2(t)$	Populasi perempuan yang sembuh terhadap infeksi HPV pada usia diatas 26 tahun
$R_m(t)$	Populasi laki-laki yang sembuh terhadap infeksi HPV
$R_c(t)$	Populasi perempuan yang sembuh terhadap kanker serviks
$P(t)$	Populasi perempuan dengan persistensi infeksi HPV
$Q(t)$	Populasi perempuan dengan lesi prakanker
$P(t)$	Populasi perempuan yang terkena kanker serviks
$\pi_f$	Tingkat perekrutan baru yang aktif secara seksual pada perempuan
$\pi_m$	Tingkat perekrutan baru yang aktif secara seksual pada laki-laki
$\beta_m$	Probabilitas transfer infeksi dari laki-laki ke perempuan setiap kali berhubungan
$\beta_f$	Probabilitas transfer infeksi dari perempuan ke laki-laki setiap kali berhubungan
$c_m$	Rata-rata jumlah hubungan seksual dengan laki-laki
$c_f$	Rata-rata jumlah hubungan seksual dengan wanita
$\theta_1$	Modifikasi parameter untuk terinfeksi
$\theta_2$	Modifikasi parameter untuk terinfeksi
$\theta_m$	Modifikasi parameter untuk terinfeksi
$\eta$	Modifikasi parameter untuk terinfeksi
$\mu_f$	Laju kematian pada perempuan

$\mu_m$	Laju kematian pada laki-laki
$\phi_f$	Fraksi perempuan yang aktif secara seksual yang akan di vaksinasi
$\phi_m$	Fraksi laki-laki yang aktif secara seksual yang akan di vaksinasi
$\psi_u$	Laju vaksinasi untuk perempuan pada dosis pertama
$\psi_v$	Laju vaksinasi untuk perempuan pada dosis kedua
$\psi_w$	Laju vaksinasi untuk perempuan pada dosis ketiga
$\omega_u$	Laju vaksinasi untuk laki-laki pada dosis pertama
$\omega_v$	Laju vaksinasi untuk laki-laki pada dosis kedua
$\omega_w$	Laju vaksinasi untuk laki-laki pada dosis ketiga
$\epsilon_u$	Keberhasilan dari pemberian vaksin pada dosis pertama
$\epsilon_v$	Keberhasilan dari pemberian vaksin pada dosis kedua
$\epsilon_w$	Keberhasilan dari pemberian vaksin pada dosis kedua
$\xi$	Laju pematangan perempuan
$\rho_1$	Laju perkembangan gejala pada perempuan dengan usia di bawah 26 tahun
$\rho_2$	Laju perkembangan gejala pada perempuan dengan usia di atas 26 tahun
$\rho_m$	Laju perkembangan gejala pada laki-laki
$\sigma_1$	Laju pemulihan perempuan dari infeksi grup pertama
$\sigma_2$	Laju pemulihan perempuan dari infeksi grup grup kedua
$\sigma_3$	Laju pemulihan perempuan dari infeksi persistensi
$\sigma_4$	Laju pemulihan perempuan dari infeksi neoplasia serviks
$r$	Fraksi dari perempuan yang pulih
$\sigma_m$	Laju pemulihan pada laki-laki
$\kappa$	Laju perkembangan infeksi HPV untuk lesi prakanker
$\alpha$	Laju perkembangan kanker serviks dari lesi

- $\gamma$  Laju pemulihan perempuan dari kanker serviks  
 $\delta_f$  Laju kematian akibat kanker serviks



## **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini membahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup identifikasi permasalahan pada topik Tugas Akhir. Uraian ini bersifat umum yang menjelaskan secara ringkas hal-hal yang dilakukan pada penyelesaian Tugas Akhir. Informasi yang telah diperoleh tersebut kemudian dirumuskan menjadi permasalahan, kemudian diberikan asumsi dan batasan-batasan untuk membatasi pembahasan serta manfaat dan sistematika penulisan pada Tugas Akhir ini.

### **1.1 Latar Belakang**

Pada tahun 2017 telah diprediksikan hampir 9 juta orang meninggal di seluruh dunia akibat kanker dan akan terus meningkat hingga 13 juta orang tahun di 2030[1]. Salah satu kanker yang menyerang adalah kanker serviks. Kanker serviks merupakan penyakit mematikan bagi perempuan setelah kanker payudara. Salah satu penyebab terjangkitnya penyakit kanker serviks adalah karena terdapat virus, yaitu *Human Papillomavirus* (HPV). Virus ini dapat menyerang perempuan maupun laki-laki. Selain kutil ano-genital pada pria dan wanita, HPV dapat menyebabkan papillomatosis respirasi berulang. Infeksi HPV sebagian besar bersifat asimtotik local dan berlangsung kurang dari satu tahun [2].

Pada data rekapulasi deteksi dini kanker serviks pada tahun 2016 sebanyak 1.925.943 perempuan telah melakukan pemeriksaan kanker serviks dan sebanyak 73.453 telah di nyatakan positif terinfeksi[3]. Salah satu penularan virus HPV yang menyebabkan kanker serviks adalah dengan hubungan seksual antara laki-laki dan perempuan. Kanker serviks dapat dicegah dengan memberikan vaksin HPV secara berkala. Kementerian Kesehatan RI telah mengestimasi jumlah wanita dengan usia masa subur 15-39 tahun sebanyak 69.739.202 jiwa dan telah diimunisasi sebanyak 53.172 jiwa [1]. Di Amerika Serikat *Centers for Disease Control and Prevention* (CDC) telah merekomendasikan tiga dosis vaksin HPV untuk anak laki-laki dan anak perempuan berusia 11

tahun atau 12 tahun atau usia 26 tahun pada perempuan dan usia 21 tahun pada laki-laki jika belum mendapatkan vaksin[4].

Dalam model yang dibangun dalam Tugas Akhir ini perempuan pada usia pertama dianggap lebih rentan terhadap infeksi HPV dan akan divaksinasi. Pada kelompok ini diasumsikan tidak ada kemungkinan terkena kanker serviks. Kelompok usia kedua diasumsikan beresiko rendah terhadap infeksi HPV baru namun lebih rentan untuk menunjukkan infeksi pada kanker serviks. Kelompok usia ini tidak mendapatkan vaksin HPV baru karena lebih signifikan pada kanker serviks. Diasumsikan bahwa kelompok usia pertama berada pada usia di bawah 26 tahun sedangkan kelompok usia kedua berada pada usia di atas 26 tahun.

Pada penelitian ini menggunakan model yang sudah dibuat oleh penelitian sebelumnya yang menggambarkan infeksi HPV dalam kanker serviks yang dirujuk oleh Oluwaseun Sharomi. Analisis yang dilakukan pada model matematika ini menggunakan analisis stabilitas dengan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik dengan vaksinasi HPV terhadap kanker serviks. Selanjutnya di bagian akhir Tugas Akhir ini akan dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan *software* MATLAB R2013a dengan metode Runge-Kutta orde ke empat.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Rumusan masalah dalam Tugas Akhir ini, yaitu:

1. Bagaimana menganalisis kestabilan model matematika dari pengaruh pemberian vaksin infeksi HPV terhadap kanker serviks?
2. Bagaimana menginterpretasikan simulasi numerik dari pengaruh pemberian vaksin infeksi HPV terhadap kanker serviks?

## **1.3 Batasan Masalah**

Batasan masalah dalam Tugas Akhir ini, yaitu:

1. Data yang digunakan merujuk pada penelitian Oluwaseun Sharomi, Taufail Malik (2017)
2. *Human Papillomavirus* adalah virus penyebab penyakit kanker serviks.

#### **1.4 Tujuan**

Tujuan yang ingin dicapai dalam Tugas Akhir, yaitu:

1. Menganalisis kestabilan model matematika pengaruh pemberian vaksin infeksi HPV terhadap kanker serviks.
2. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik dari model matematika pengaruh pemberian vaksin infeksi HPV terhadap kanker serviks.

#### **1.5 Manfaat**

Manfaat yang diharapkan dari Tugas Akhir ini, yaitu:

1. Sebagai informasi untuk penelitian selanjutnya tentang analisis kestabilan model matematika pengaruh pemberian vaksin *Human Papillomavirus* terhadap kanker serviks.
2. Sebagai referensi bagi pihak terkait dalam menyelesaikan masalah pencegahan penyakit kanker serviks dengan pemberian vaksin *Human Papillomavirus*.

#### **1.6 Sistematika Penulisan**

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

##### **1. BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang gambaran-gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir meliputi; latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

##### **2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini berisi tentang referensi yang berhubungan dengan penelitian sebelumnya, *Human Papillomavirus*, kanker serviks, model matematika pemberian vaksin pada infeksi *Human Papillomavirus* terhadap kanker serviks, titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, pelinieran, kestabilan asimtotik lokal, metode Runge-Kutta.

##### **3. BAB III METODE PENELITIAN**

Bab ini menjelaskan tentang tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir, tahapan-tahapan tersebut antara lain adalah mengkaji model yang telah dibuat oleh peneliti sebelumnya, mencari titik kesetimbangan dari masing-masing

model, menentukan bilangan reproduksi, menganalisis kestabilan dengan pelinieran model, simulasi numerik. Tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan serta simulasi numerik yang telah dilakukan.

#### 4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang model matematika pemberian vaksin pada infeksi *Human Papillomavirus* terhadap kanker serviks, analisis titik kesetimbangan, menentukan bilangan reproduksi dengan asumsi-asumsi P. Van den Driessche, analisis kestabilan lokal, analisis hasil dari simulasi numerik dari fenomena yang dilakukan dengan menggunakan software MATLAB 2013a.

#### 5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta kritik dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai dasar teori yang digunakan dalam penyusunan Tugas Akhir ini. Dasar teori yang digunakan meliputi penelitian terdahulu, *Human Papillomavirus*, kanker serviks, bilangan reproduksi dasar, titik kesetimbangan, pelinieran, kestabilan asimtotik lokal, metode Runge-Kutta orde ke empat.

### 2.1 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian sebelumnya telah dilakukan oleh Utami Dyah (2012) yang berjudul “*Bilangan Reproduksi pada Model DISP dari Penyebaran Virus HIV-AID*” mengkonstruksi formulasi reproduksi dasar endemik berdasarkan model DISP yang dibuat oleh James.M Hyun dan Jia Li dengan populasi yang dibagi 3 grup dengan masing-masing grup mempunyai 2 sub populasi *rate* infeksiitas berbeda, konstruksi bilangan reproduksi dasar yang digunakan menggunakan metode dari P.van den Driessche dan James Wathmough dengan 5 asumsi dasar yang harus dipenuhi.[5]

Tufail Malik (2013) juga melakukan penelitian dengan judul “*Qualitative Analysis of an Age- and Sex-Structured Vaccination Model for Human Papillomavirus*” menjelaskan tentang analisis model transmisi dinamika *Human Papillomavirus* berdasarkan umur yang terstruktur dengan mengambil bentuk sistem deterministik dari sistem persamaan diferensial parsial non-linier dengan transmisi terpisah. Pengendalian *Human Papilomavirus* yang efektif menggunakan vaksin yang diatur oleh ambang batas kuantitas kuantitas  $R_v$  (penggunaan vaksin menyebabkan pengendalian penyakit yang efektif atau terhapuskan jika dan hanya jika mengurangi kuantitas  $R_v < 1$  sedangkan penggunaan vaksin tersebut tidak mengarah ke penyakit jika gagal  $R_v < 1$ ) [6].

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Liu G (2016) dengan judul “*HPV Vaccine Completion and Dose Adherence Among Commercially Insured Females Aged 9 Through in The Us*” dengan melakukan studi kohort retrospektif menggunakan data

MarketScan 2008-2011 untuk memeriksa vaksin HPV dengan mengasumsikan struktur populasi perempuan diusia 9-26 tahun[4].

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Oluwaseun S. (2017) dengan judul “*A Model to Asses The Effect of Vaccine Comliance on Human Papillomavirus Infection and Cervical Cancer*” yang membahas tentang tiga dosis vaksin *Human Papillomavirus* (HPV) yang direkomendasikan untuk laki-laki dan perempuan dan kepatuhan dosis. Pada penelitian ini dibangun model deterministik untuk infeksi Human Papillomavirus terhadap kanker serviks. [7]

## 2.2 Kanker Serviks

Kanker serviks merupakan keganasan yang berasal dari serviks. Serviks adalah sepertiga uterus berbentuk silindris menonjol dan berhubungan dengan vagina melalui *ostium uteri eksternum* [8].

## 2.3 Human Papillomavirus

*Human Papillomavirus* (HPV) adalah penyebab infeksi yang paling sering ditularkan melalui hubungan seksual (*sexually transmitted infection*) di dunia. Infeksi persisten HPV, khususnya HPV tipe *high risk* dapat menimbulkan kanker serviks pada wanita dan kanker anogenital lainnya(vulva,vagina,penis dan anus), sedangkan infeksi HPV tipe *low risk* dapat menimbulkan kutil kelamin (*condyloma acuminatum*), pada wanita maupun pria [8].

## 2.4 Model Matematika Pemberian Vaksin *Human Papillomavirus* terhadap Kanker Serviks

Berdasarkan struktur populasi model pemberian vaksin HPV terhadap kanker serviks pada penelitian Oluwaseun Sharomi dkk (2017) dapat dikelompokkan menjadi dua kelompok yaitu:

a) Model 1

Berdasarkan struktur populasi model pertama merupakan populasi perempuan dengan pengamatan usia di bawah 26 tahun. Pada usia ini perempuan lebih signifikan untuk terinfeksi HPV sehingga diberikan tiga dosis vaksin HPV. Model vaksinasi pada usia dibawah 26 tahun dapat di modelkan adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS_1}{dt} = \pi_f(1 - \phi_f) - \psi_u S_1 - \lambda_m S_1 - (\xi + \mu_f) S_1$$

$$\begin{aligned}
\frac{dU_1}{dt} &= \pi_f \phi_f + \psi_u S_1 - (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_1 - (\psi_v + \xi + \mu_f) U_1 \\
\frac{dV_1}{dt} &= \psi_v U_1 - (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_1 - (\psi_w + \xi + \mu_f) V_1 \\
\frac{dW_1}{dt} &= \psi_w V_1 - (1 - \epsilon_w) \lambda_m W_1 - (\xi + \mu_f) W_1 \\
\frac{dE_1}{dt} &= \lambda_m [S_1 + (1 - \epsilon_u) U_1 + (1 - \epsilon_v) V_1 + (1 - \epsilon_w) W_1] - (\rho_1 \\
&\quad + \xi + \mu_f) E_1 \\
\frac{dI_1}{dt} &= \rho_1 E_1 - (\sigma_1 + \xi + \mu_f) I_1 \\
\frac{dR_1}{dt} &= \sigma_1 I_1 - (\xi + \mu_f) R_1
\end{aligned} \tag{2.1}$$

b) Model 2

Berdasarkan struktur populasi model kedua adalah populasi perempuan dengan usia pengamatan di atas 26 tahun. Pada usia ini perempuan lebih beresiko tinggi dan signifikan untuk terkena kanker serviks. Model vaksinasi pada usia diatas 26 tahun yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_2}{dt} &= \xi S_1 - \eta \lambda_m S_2 - \mu_f S_2 \\
\frac{dU_2}{dt} &= \xi U_1 - \eta (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_2 - \mu_f U_2 \\
\frac{dV_2}{dt} &= \xi V_1 - \eta (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_2 - \mu_f V_2 \\
\frac{dW_2}{dt} &= \xi W_1 - \eta (1 - \epsilon_w) \lambda_m W_2 - \mu_f W_2 \\
\frac{dE_2}{dt} &= \xi W_1 + \eta \lambda_m [S_2 + (1 - \epsilon_u) U_2 + (1 - \epsilon_v) V_2 \\
&\quad + (1 - \epsilon_w) W_2] - (\rho_2 + \mu_f) E_2 \\
\frac{dI_2}{dt} &= \xi I_1 + \rho_2 E_2 - (\sigma_2 + \mu_f) I_2 \\
\frac{dR_2}{dt} &= \xi R_1 + r \sigma_2 I_2 + \sigma_3 P + \sigma_4 Q - \mu_f R_2
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Pada usia diatas 26 tahun perempuan lebih rentan terhadap kanker serviks. Hal ini disebabkan telah terinfeksi HPV sehingga model penyebaran kanker serviks yang telah terinfeksi HPV yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= (1-r)\sigma_2 I_2 - (\sigma_3 + \kappa + \mu_f)P \\
\frac{dQ}{dt} &= \kappa P - (\sigma_4 + \alpha + \mu_f)Q \\
\frac{dC}{dt} &= \alpha Q - (\gamma + \mu_f + \delta_f)C \\
\frac{dR_c}{dt} &= \gamma C - \mu_f R_c
\end{aligned} \tag{2.3}$$

c) Model 3

Infeksi *Human Papillomavirus* dapat menular melalui hubungan seksual antara laki-laki dan perempuan, sehingga laki-laki juga membutuhkan tiga dosis vaksin HPV untuk mencegah terjadinya penularan virus dengan usia yang tidak terstruktur. Model vaksinasi pada laki-laki dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_m}{dt} &= \pi_m(1 - \emptyset_m) - \omega_u S_m - \lambda_f S_m - \mu_m S_m \\
\frac{dU_m}{dt} &= \pi_m \emptyset_m + \omega_u S_m - (1 - \epsilon_u)\lambda_f U_m - (\omega_v + \mu_m)U_m \\
\frac{dV_m}{dt} &= \omega_v U_m - (1 - \epsilon_v)\lambda_f V_m - (\omega_w + \mu_m)V_m \\
\frac{dW_m}{dt} &= \omega_w V_m - (1 - \epsilon_w)\lambda_f W_m - \mu_m W_m \\
\frac{dE_m}{dt} &= \lambda_f [S_m + (1 - \epsilon_u)U_m + (1 - \epsilon_v)V_m + (1 - \epsilon_w)W_m] \\
&\quad - (\rho_m + \mu_m)E_m \\
\frac{dI_m}{dt} &= \rho_m E_m - (\sigma_m + \mu_m)I_m \\
\frac{dR_m}{dt} &= \sigma_m I_m - \mu_m R_m
\end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan  $\lambda_m = \frac{\beta_m c_f (\theta_m E_m + I_m)}{N_m}$  dan

$$\lambda_f = \frac{\beta_f c_m (\theta_1 E_1 + I_1 + \theta_1 E_2 + I_2 + \theta_2 P)}{N_f}$$

dimana  $c_m N_m = c_f N_f$ .



Jumlah populasi dari perempuan yaitu  $N_f(t) = \sum_{i=1}^2 [S_i(t) + U_i(t) + V_i(t) + W_i(t) + E_i(t) + I_i(t) + R_i(t)] + P(t) + Q(t) + C(t) + R_c(t)$ .

Sedangkan jumlah populasi laki-laki adalah  $N_m(t) = S_m(t) + U_m(t) + V_m(t) + W_m(t) + E_m(t) + I_m(t) + R_m(t)$ .

## 2.5 Bilangan Reproduksi Dasar

Menurut Giesecke (2002), bilangan reproduksi dasar adalah rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi dan masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan. Namun adapula yang mengartikan rasio atau perbandingan yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang menderita penyakit yang diakibatkan oleh satu individu *infected*.

Kondisi yang timbul adalah salah satu dari kemungkinan berikut:

1. Jika  $R_0 < 1$  maka penyakit akan menghilang
2. Jika  $R_0 > 1$  maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) berdasarkan linierisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit.

Menurut P.van den Driessche, J.Watmough (2002), perhitungan bilangan reproduksi sangat penting untuk membedakan individu yang baru terinfeksi dari populasi lainnya. Misalkan  $X_s$  adalah keadaan bebas penyakit.

Diberikan  $X_s = \{x \geq 0 | x_i = 0, i = 1, \dots, m\}$ .

Dimana  $F_i(x)$  merupakan laju infeksi baru yang muncul pada kompartemen  $i$ ,  $V_i^+(x)$  merupakan laju dari individu transfer yang masuk pada kompartemen  $i$ , dan  $V_i^-(x)$  merupakan laju dari individu transfer yang keluar pada kompartemen  $i$ . Asumsi pada setiap persamaan diferensial yang kontinu paling sedikit dua setiap variabel. Model penyakit transisi dari keadaan non negative dengan mengikuti persamaan sistem sebagai berikut:

$$\dot{x}_i = f_i(x) = F_i(x) - V_i(x), i = 1, \dots, n$$

Dimana  $V_i(x) = V_i^-(x) - V_i^+(x)$  dan fungsi memenuhi asumsi (A1)-(A5). Jika setiap individu merepresentasikan individu transfer maka semuanya non-negatif. Sehingga,

(A1) Jika  $x \geq 0$ , maka  $F_i(x), V_i^+(x), V_i^-(x) \geq 0$  untuk  $i = 1, \dots, n$

(A2) Jika  $x_i = 0$  maka  $V_i^- = 0$ . Jika  $x \in X_s$  maka  $V_i^- = 0$  untuk  $i = 1, \dots, m$ .

(A3)  $F_i = 0$  jika  $i > m$

(A4) Jika  $x \in X_s$  maka  $F_i(x) = 0$  dan  $V_i^+(x) = 0$  untuk  $i = 1, \dots, m$ .

(A5) Jika  $F(x)$  dipreposisi nol, maka semua nilai eigen dari  $Df(x_0)$  mempunyai bagian riil negative. [14]

### Definisi 2.5.1 [14]

Jika  $x_0$  adalah DFE (Dease Free Equilibrium) dari (1) dan  $f_i(x)$  memenuhi (A1)-(A5) maka derivative  $DF(x_0)$  dan  $DV(x_0)$  dapat dipartisi begai berikut:

$DF(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, DV(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$ , dimana  $F$  dan  $V$  adalah matrik  $m \times m$  di definisikan sebagai berikut

$$F = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \text{ dan } V = \left[ \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x_0) \right]$$

Selanjutnya  $F$  adalah non-negatif,  $V$  adalah  $M$ -matrik non-singular dan semua nilai eigen dari  $J_4$  adalah riil positif.

Kemudian didefinisikan matrik  $K$  sebagai berikut:

$$K = FV^{-1}$$

dengan  $K$  disebut sebagai matriks *next generation*. Nilai dari infeksi sekunder pada populasi rentan adalah radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks  $K$  [14], sehingga

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

## 2.6 Kestabilan Titik Tetap

Pandang persamaan diferensial:

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

(2.5)

Titik  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0,)$  merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (2.5) jika memenuhi  $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, ) = 0$  dan  $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0, ) = 0$ . Jika titik  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0,)$  adalah titik kesetimbangan sistem *autonomous*, maka fungsi-fungsi konstan  $x(t) = \bar{x}_0$  dan  $y(t) = \bar{y}_0$  merupakan solusi penyelesaian dari sistem *autonomous*. Artinya penyelesaian yang diperoleh memiliki hasil yang tetap seiring berubahnya waktu [9].

## 2.6 Pelinieran

Analisis kestabilan pada sistem yang mempunyai bentuk non linier dilakukan analisis kestabilannya dengan menggunakan cara menganalisis transformasi kestabilan lokal disekitar titik setimbang dari sistem tersebut. Untuk melakukan analisis transformasi kestabilan lokal tersebut maka digunakan Deret Taylor untuk mencari hampiran solusi disekitar titik setimbang.

Misalkan diberikan bentuk nonlinear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \\ \frac{dx_3}{dt} &= F_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \\ &\vdots \\ \frac{dx_m}{dt} &= F_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Asumsikan bahwa fungsi  $F_1, F_2, F_3$  hingga sampai  $F_m$  mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik  $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_m^*)$ . Deret Taylor fungsi  $F_1, F_2, F_3$  hingga sampai  $F_m$  disekitar  $\bar{x}^*$  adalah

$$\begin{aligned} F_1(\bar{x}) &= F_1(\bar{x}^*) + \frac{\partial F_1(\bar{x}^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_1(\bar{x}^*)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) \\ &\quad + \frac{\partial F_1(\bar{x}^*)}{\partial x_3} (x_3 - x_3^*) + \dots + \frac{\partial F_1(\bar{x}^*)}{\partial x_m} (x_m - x_m^*) \\ &\quad + \eta_1(\bar{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(\bar{x}) &= F_2(\bar{x}^*) + \frac{\partial F_2(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_2(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \\
&\quad \frac{\partial F_2(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \cdots + \frac{\partial F_2(\bar{x}^*)}{\partial x_m}(x_m - x_m^*) + \eta_2(\bar{x}) \\
F_3(\bar{x}) &= F_3(\bar{x}^*) + \frac{\partial F_3(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_3(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \\
&\quad \frac{\partial F_3(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \cdots + \frac{\partial F_3(\bar{x}^*)}{\partial x_m}(x_m - x_m^*) + \eta_3(\bar{x}) \\
&\quad \vdots \\
F_m(\bar{x}) &= F_m(\bar{x}^*) + \frac{\partial F_m(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_m(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \\
&\quad \frac{\partial F_m(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \cdots + \frac{\partial F_m(\bar{x}^*)}{\partial x_m}(x_m - x_m^*) + \eta_m(\bar{x})
\end{aligned} \tag{2.8}$$

dengan  $\eta_1(\bar{x}), \eta_2(\bar{x}), \eta_3(\bar{x})$  dan  $\eta_m(\bar{x})$  adalah suku sisa. Hampiran orde satu terhadap  $F_1, F_2, F_3$  dan  $F_m$  suku sisa memenuhi sifat;

$$\begin{aligned}
\lim_{(x) \rightarrow (\bar{x})} \frac{\eta_1(\bar{x})}{\|w\|} &= 0 \\
\lim_{(x) \rightarrow (\bar{x})} \frac{\eta_2(\bar{x})}{\|w\|} &= 0 \\
\lim_{(x) \rightarrow (\bar{x})} \frac{\eta_3(\bar{x})}{\|w\|} &= 0 \\
&\quad \vdots \\
\lim_{(x) \rightarrow (\bar{x})} \frac{\eta_m(\bar{x})}{\|w\|} &= 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

dengan  $(x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, x_3 - x_3^*, \dots, x_m - x_m^*)^T$ .

Berdasarkan Persamaan (2.8) dan (2.9) serta mengingat

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{d(x_1 - x_1^*)}{dt}, \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{d(x_2 - x_2^*)}{dt}, \\
\frac{dx_3}{dt} &= \frac{d(x_3 - x_3^*)}{dt},
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{dx_m}{dt} = \frac{d(x_m - x_m^*)}{dt} \end{array}$$

Maka Persamaan (2.7) dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \\ \vdots \\ x_m - x_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x^*) \\ F_2(x^*) \\ F_3(x^*) \\ \vdots \\ F_m(x^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \frac{\partial F_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \\ \vdots \\ x_m - x_m^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\bar{x}) \\ \eta_2(\bar{x}) \\ \eta_3(\bar{x}) \\ \vdots \\ \eta_m(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\text{Matriks } J(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \frac{\partial F_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} (x^*)$$

disebut matriks Jacobi atau partikal derivatif matriks dan dinotasikan dengan  $J(x^*)$ .

Jika dimisalkan  $u = x_1 - x_1^*$ ,  $v = x_2 - x_2^*$ ,  $y = x_3 - x_3^*$  dan  $z = x_m - x_m^*$  sehingga  $w = (u, v, y, \dots, z)^T$  dan dengan mengingat bahwa  $F_1(x^*) = F_2(x^*) = F_3(x^*) = \dots = F_m(x^*) = 0$  maka persamaan (2.10) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_3}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \frac{\partial F_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} (\bar{x}^*)$$

$$\text{atau } \frac{dw}{dt} = J(x^*)w + \eta. \quad (2.10)$$

Pada  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$  yang berbeda cukup dekat dengan  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_m^*)$ ,  $(u, v, y, \dots, z)$  bernilai kecil sehingga  $\|\eta\| \leq \|w\|$ . Oleh karena itu,  $\eta$  dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.9) dapat dihampiri oleh sistem linear  $\frac{dw}{dt} = J(x^*)w$ . (2.11)

Jika  $x_1 = x_1^*$ ,  $x_2 = x_2^*$ ,  $x_3 = x_3^*$ , ...  $x_m = x_m^*$  maka  $(u^*, v^*, y^*, \dots, z^*) = (0, 0, 0, \dots, 0)$  sehingga sistem linear (2.11) memiliki titik kesetimbangan  $(u^*, v^*, y^*, \dots, z^*) = (0, 0, 0, \dots, 0)$  [11].

## 2.7 Kestabilan Asimtotik Lokal

Kestabilan asimtotis lokal adalah kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari linier atau kestabilan dari linierisasi sistem tak linier. Kestabilan lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda bagian real dari akar-akar karakteristik sistem dari matriks Jacobian yang dihitung disekitar titik kesetimbangan.

### Definisi 2.8.1 [10]

Jika  $J$  adalah matriks berukuran  $n \times n$  maka vector tak nol  $x$  dinamakan vector karakteristik (vector eigen) dari  $J$  jika memenuhi:

$$Jx = \lambda x \quad (2.12)$$

Untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  disebut nilai karakteristik dari  $J$  dan  $x$  disebut vector karakteristik (vector eigen) yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .

Untuk mencari nilai karakteristik matriks  $J$  berukuran  $n \times n$ , maka persamaan (2.12) dapat ditulis:

$$(\lambda I - J)x = 0 \text{ mempunyai penyelesaian } x \text{ tak nol jika dan hanya jika } |\lambda I - J| = 0 \quad (2.13)$$

Jika matriks didefinisikan dengan  $J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  dan juga

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  maka pada persamaan (2.13) dapat ditulis

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0 \text{ atau} \\ \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

Sehingga akar-akar karakteristiknya adalah sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2(-a_{11} - a_{22})}$$

### **Teorema 2.8.1** [10]

*Jika  $J$  adalah matriks segitiga (segitiga atas, segitiga bawah atau diagonal) berukuran  $n \times n$ , maka determinan dari  $J$  adalah perkalian dari diagonal utama matriks tersebut yaitu  $\det(J) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ .*

### **Teorema 2.8.2** [11]

*Titik setimbang  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik matriks  $J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ , mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.*

## **2.8 Metode Runge-Kutta**

Metode Runge-Kutta orde keempat adalah sebuah cara numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa yang memiliki bentuk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); y(0) = y_0$$

Adapun metode Runge-Kutta orde keempat memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4)h$$

Diketahui nilai dari  $y = y_i$  pada  $x_i$ , maka kita dapat menemukan nilai dari  $y = y_{i+1}$  pada  $x_{i+1}$  dan  $h = x_{i+1} - x_i$ . Adapun bentuk persamaan bentuk metode maju Runge-Kutta yang sering digunakan adalah

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (2.15)$$

dengan;

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad (2.16)$$



## **BAB III METODE PENELITIAN**

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Kegiatan penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas: studi literatur, mengkaji model pemberian vaksin pada infeksi *Human Papillomavirus* terhadap kanker serviks, menganalisis kestabilan local, analisis dan simulasi numerik, penarikan kesimpulan.

### **3.1 Studi Literatur**

Pada tahap ini dilakukan analisis model dengan mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan model pengaruh pemberian vaksin pada infeksi HPV terhadap kanker serviks dan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta.

### **3.2 Tahap Mengkaji Model Pemberian Vaksin pada Infeksi *Human Papillomavirus* (HPV) terhadap Kanker Serviks.**

Pada tahap ini dilakukan kajian model pemberian vaksin pada infeksi *Human Papillomavirus* terhadap kanker serviks terlebih dahulu dengan menyusun asumsi-asumsi tertentu sehingga dapat dibuat model kompartemen dengan 25 kelompok individu dimana struktur populasi perempuan diambil usia pengamatan 26 tahun.

### **3.3 Menganalisis Kestabilan Lokal**

Pada tahap ini ditentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik dengan pemberian vaksin *Human Papillomavirus* dimana stuktur populasi perempuan usia pengamatan 26 tahun. Kemudian untuk menentukan kestabilan lokal didapatkan bilangan reproduksi dasar pada tiap sub populasi.

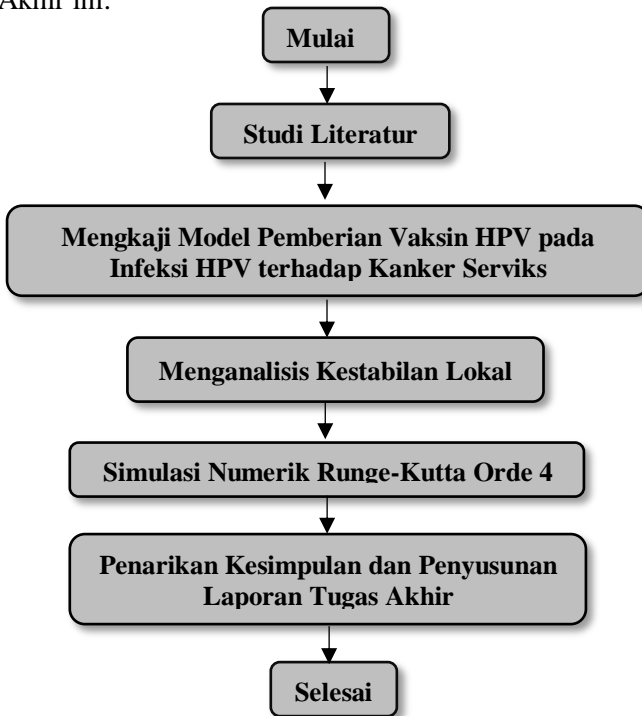
### **3.4 Simulasi Numerik Runge-Kutta Orde-4**

Pada tahap ini dilakukan penyusunan simulasi numerik Runge-Kutta Orde ke-4 menggunakan *software* MATLAB 2013a yang menggambarkan kestabilan dan penyelesaian numerik serta untuk mendapatkan nilai parameter dari fenomena yang terjadi pada model pemberian vaksin infeksi HPV terhadap kanker serviks.

### 3.5 Penarikan Kesimpulan dan Laporan Tugas Akhir

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil dari analisis kestabilan pengaruh pemberian vaksin pada infeksi HPV terhadap kanker serviks. Setelah menarik kesimpulan akan dilakukan penyusunan laporan Tugas Akhir.

Berikut ini adalah gambar diagram alir metode penelitian pada Tugas Akhir ini:



**Gambar 3. 1** Diagram Alir Metode Penelitian

## BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang model matematika pemberian vaksin HPV terhadap kanker serviks dan ditentukan masing-masing titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik masing-masing sub grup, selanjutnya penentuan bilangan reproduksi dari masing-masing grup dan kemudian dilakukan analisis kestabilan model sistem. Selanjutnya hasil analisis di simulasikan menggunakan *software* MATLAB 2013a dengan metode Runge-Kutta orde 4 untuk mengetahui perilaku dari virus HPV. Selanjutnya dari hasil simulasi dianalisis untuk mengetahui karakteristik perilaku pada virus HPV terhadap kanker serviks.

### 4.1 Model Matematika Pemberian Vaksin pada Infeksi *Human Papillomavirus* terhadap Kanker Serviks

Berikut ini adalah model matematika pemberian vaksin pada infeksi HPV terhadap kanker serviks yang merujuk pada penelitian Oluwaseun Sharomi yakni sebagai berikut:

#### a) Model 1

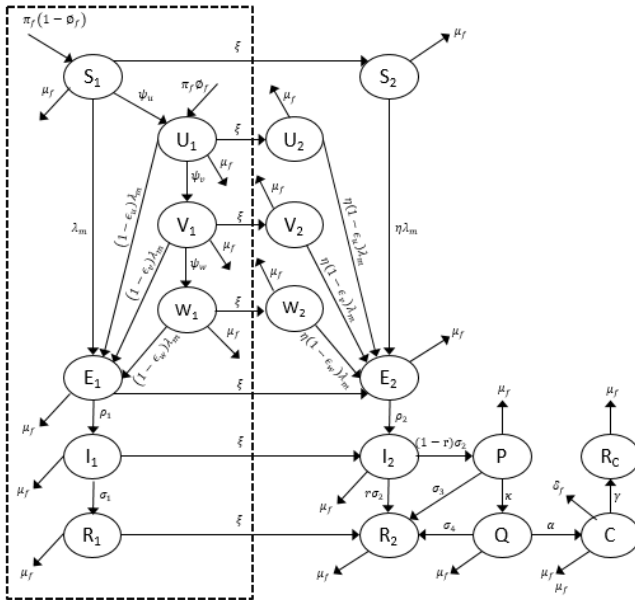
Berdasarkan struktur populasi model pertama merupakan sub populasi perempuan dengan usia dibawah 26 tahun. Pada usia ini perempuan lebih signifikan untuk terkena infeksi HPV, sehingga model matematika pemberian vaksin pada infeksi HPV yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= \pi_f(1 - \phi_f) - \psi_u S_1 - \lambda_m S_1 - (\xi + \mu_f) S_1 \\ \frac{dU_1}{dt} &= \pi_f \phi_f + \psi_u S_1 - (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_1 - (\psi_v + \xi + \mu_f) U_1 \\ \frac{dV_1}{dt} &= \psi_v U_1 - (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_1 - (\psi_w + \xi + \mu_f) V_1 \\ \frac{dW_1}{dt} &= \psi_w V_1 - (1 - \epsilon_w) \lambda_m W_1 - (\xi + \mu_f) W_1 \\ \frac{dE_1}{dt} &= \lambda_m [S_1 + (1 - \epsilon_u) U_1 + (1 - \epsilon_v) V_1 + (1 - \epsilon_w) W_1] - (\rho_1 \\ &\quad + \xi + \mu_f) E_1\end{aligned}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \rho_1 E_1 - (\sigma_1 + \xi + \mu_f) I_1$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \sigma_1 I_1 - (\xi + \mu_f) R_1$$

dengan  $\lambda_m = \frac{\beta_m c_f (\theta_m E_m + I_m)}{N_m}$  dan  $c_m N_m = c_f N_f$



**Gambar 4. 1** [7] Diagram Kompartemen Pemberian Vaksin infeksi HPV terhadap Kanker Serviks perempuan usia dibawah 26 tahun

- $S_1$  adalah populasi perempuan *susceptible* usia dibawah 26 tahun.
- $U_1$  adalah polulasi perempuan *susceptible* usia dibawah 26 tahun dengan pemberian vaksin dosis pertama.
- $V_1$  adalah populasi perempuan *susceptible* usia dibawah 26 tahun dengan pemberian dosis pertama dan kedua.
- $W_1$  adalah populasi perempuan *susceptible* usia dibawah 26 tahun dengan pemberian dosis pertama, kedua dan ketiga.
- $E_1$  adalah populasi perempuan *exposed* usia dibawah 26 tahun
- $I_1$  adalah populasi perempuan *infected* usia dibawah 26
- $R_1$  adalah populasi perempuan *recovered* usia dibawah 26 tahun
- $\pi_m$  adalah laju perekutan baru yang aktif secara seksual laki-laki

$\emptyset_f$  adalah fraksi perempuan yang aktif secara seksual

$\beta_m$  adalah probabilitas transfer infeksi dari laki-laki ke perempuan setiap berhubungan seksual.

$c_f$  adalah rata-rata jumlah hubungan seksual pada perempuan

$\mu_f$  adalah laju kematian alami perempuan.

$\psi_u, \psi_v, \psi_w$  adalah laju vaksinasi perempuan dengan dosis pertama, kedua atau ketiga.

$\epsilon_u, \epsilon_v, \epsilon_w$  adalah laju keberhasilan vaksinasi dosis pertama, kedua dan ketiga.

$\xi$  adalah laju pematangan perempuan (misalnya rata-rata waktu yang dihabiskan dalam kelompok usia pertama, sebelum pindah ke dalam kelompok usia kedua).

$\rho_1$  adalah laju perkembangan gejala perempuan .

$\sigma_1$  adalah laju pemulihan .

#### b) Model 2

Berdasarkan struktur populasi model kedua merupakan sub populasi perempuan dengan usia pengamatan diatas 26 tahun. Pada usia ini perempuan lebih signifikan untuk terkena kanker serviks, sehingga model matematika pemberian vaksin pada model kedua adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS_2}{dt} = \xi S_1 - \eta \lambda_m S_2 - \mu_f S_2$$

$$\frac{dU_2}{dt} = \xi U_1 - \eta(1 - \epsilon_u) \lambda_m U_2 - \mu_f U_2$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \xi V_1 - \eta(1 - \epsilon_v) \lambda_m V_2 - \mu_f V_2$$

$$\frac{dW_2}{dt} = \xi W_1 - \eta(1 - \epsilon_w) \lambda_m W_2 - \mu_f W_2$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \xi E_1 + \eta \lambda_m [S_2 + (1 - \epsilon_u) U_2 + (1 - \epsilon_v) V_2 + (1 - \epsilon_w) W_2] - (\rho_2 + \mu_f) E_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \xi I_1 + \rho_2 E_2 - (\sigma_2 + \mu_f) I_2$$

$$\frac{dP}{dt} = (1 - r) \sigma_2 I_2 - (\sigma_3 + \kappa + \mu_f) P$$

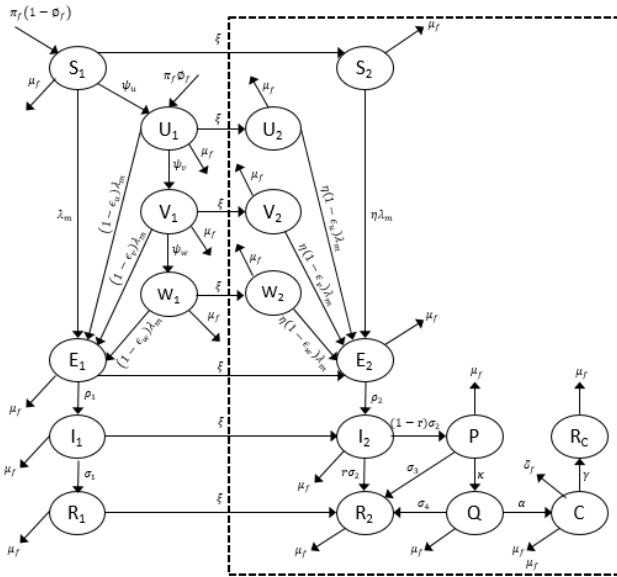
$$\frac{dQ}{dt} = \kappa P - (\sigma_4 + \alpha + \mu_f)Q$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha Q - (\gamma + \mu_f + \delta_f)C$$

$$\frac{dR_c}{dt} = \gamma C - \mu_f R_c$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \xi R_1 + r\sigma_2 I_2 + \sigma_3 P + \sigma_4 Q - \mu_f R_2$$

dengan  $\lambda_m = \frac{\beta_m c_f (\theta_m E_m + I_m)}{N_m}$  dan  $c_m N_m = c_f N_f$



**Gambar 4. 2** [7] Diagram Kompartemen Pemberian Vaksin infeksi HPV terhadap Kanker Serviks perempuan usia diatas 26 tahun  
 $S_2$  adalah populasi perempuan *susceptible* usia diatas 26 tahun.  
 $U_2$  adalah polulasi perempuan *susceptible* usia diatas 26 tahun dengan pemberian vaksin dosis pertama.  
 $V_2$  adalah populasi perempuan *susceptible* usia diatas 26 tahun dengan pemberian dosis pertama dan kedua.  
 $W_2$  adalah populasi perempuan *susceptible* usia diatas 26 tahun dengan pemberian dosis pertama, kedua dan ketiga.

$E_2$  adalah populasi perempuan *exposed* usia diatas 26 tahun  
 $I_2$  adalah populasi perempuan *infected* usia diatas 26 tahun  
 $P$  adalah populasi perempuan dengan persistensi infeksi HPV  
 $Q$  adalah populasi perempuan dengan lesi pra kanker  
 $C$  adalah populasi perempuan yang terkena kanker serviks  
 $R_c$  adalah populasi perempuan *recovered* dari kanker serviks  
 $R_2$  adalah populasi perempuan *recovered* usia diatas 26 tahun  
 $\pi_f$  adalah rate perekrutan baru yang aktif secara seksual perempuan  
 $\beta_m$  adalah probabilitas transfer infeksi dari laki-laki ke perempuan dengan laki-laki) setiap berhubungan seksual.  
 $c_f$  adalah rata-rata jumlah hubungan seksual pada perempuan  
 $\mu_f$  adalah laju kematian alami perempuan  
 $\epsilon_u, \epsilon_v, \epsilon_w$  adalah laju keberhasilan vaksinasi dosis pertama, kedua dan ketiga  
 $\xi$  adalah laju pematangan perempuan (misalnya rata-rata waktu yang dihabiskan dalam kelompok usia pertama, sebelum pindah ke dalam kelompok usia kedua).  
 $\rho_1$  adalah laju perkembangan gejala perempuan  
 $\sigma_2$  adalah laju pemulihan virus perempuan usia diatas 26 tahun  
 $\sigma_3$  adalah laju pemulihan infeksi persistensi kanker  
 $\sigma_4$  adalah laju pemulihan neoplasia kanker serviks.  
 $r$  adalah fraksi perempuan yang telah pulih  
 $\kappa$  adalah laju perkembangan infeksi HPV untuk lesi pra kanker  
 $\alpha$  adalah laju perkembangan kanker serviks dari lesi  
 $\gamma$  adalah laju pemulihan perempuan dari kanker serviks  
 $\delta_f$  adalah laju kematian alami akibat kanker serviks

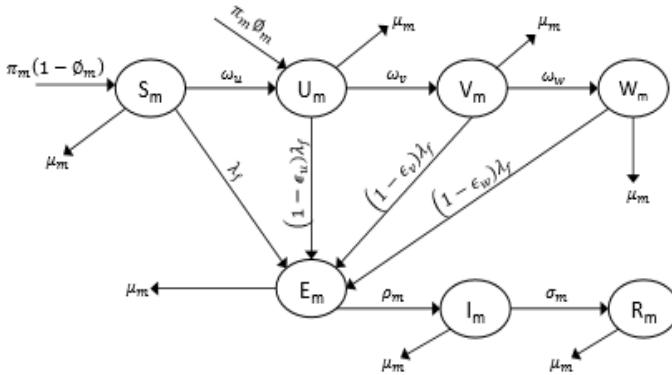
### c) Model 3

*Human Papilomavirus* dapat menular melalui hubungan seksual antara laki-laki dengan perempuan maupun sebaliknya, sehingga laki-laki juga membutuhkan vaksin untuk mencegah terjadinya penularan virus HPV. Berikut ini model pemberian vaksin pada infeksi HPV

$$\frac{dS_m}{dt} = \pi_m(1 - \phi_m) - \omega_u S_m - \lambda_f S_m - \mu_m S_m$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_m}{dt} &= \pi_m \phi_m + \omega_u S_m - (1 - \epsilon_u) \lambda_f U_m - (\omega_v + \mu_m) U_m \\ \frac{dV_m}{dt} &= \omega_v U_m - (1 - \epsilon_v) \lambda_f V_m - (\omega_w + \mu_m) V_m \\ \frac{dW_m}{dt} &= \omega_w V_m - (1 - \epsilon_w) \lambda_f W_m - \mu_m W_m \\ \frac{dE_m}{dt} &= \lambda_f [S_m + (1 - \epsilon_u) U_m + (1 - \epsilon_v) V_m + (1 - \epsilon_w) W_m] \\ &\quad - (\rho_m + \mu_m) E_m \\ \frac{dI_m}{dt} &= \rho_m E_m - (\sigma_m + \mu_m) I_m \\ \frac{dR_m}{dt} &= \sigma_m I_m - \mu_m R_m \end{aligned}$$

Dengan  $\lambda_f = \frac{\beta_f c_m (\theta_1 E_1 + I_1 + \theta_1 E_2 + I_2 + \theta_2 P)}{N_f}$  dan  $c_m N_m = c_f N_f$



**Gambar 4. 3[7]** Diagram Kompartemen Pemberian Vaksin pada infeksi HPV terhadap Kanker Serviks pada laki-laki

$S_m$  adalah populasi laki-laki *susceptible*

$U_m$  adalah polulasi laki-laki *susceptible* dengan pemberian vaksin dosis pertama.

$V_m$  adalah populasi laki-laki *susceptible* dengan pemberian dosis pertama dan kedua.

$W_m$  adalah populasi laki-laki *susceptible* dengan pemberian dosis pertama, kedua dan ketiga.

$E_m$  adalah populasi laki-laki *exposed*



$I_m$  adalah populasi laki-laki *infected*

$R_m$  adalah populasi laki-laki *recovered*

$\pi_m$  adalah laju perekrutan baru yang aktif secara seksual laki-laki

$\beta_f$  adalah probabilitas transfer infeksi dari perempuan ke laki-laki setiap berhubungan seksual.

$c_m$  adalah rata-rata jumlah hubungan seksual pada laki-laki

$\mu_m$  adalah laju kematian alami laki-laki

$\omega_v, \omega_v, \omega_v$  adalah laju pemberian vaksin dosis pertama, kedua dan ketiga

$\epsilon_u, \epsilon_v, \epsilon_w$  adalah laju keberhasilan vaksinasi dosis pertama, kedua dan ketiga

$\rho_m$  adalah laju perkembangan gejala laki-laki

$\sigma_m$  adalah laju pemulihan laki-laki

Jika  $N$  adalah proporsi jumlah seluruh populasi maka  $N_f$  adalah proporsi jumlah seluruh populasi pada perempuan yaitu

$$N_f(t) = \sum_{i=1}^2 [S_i(t) + U_i(t) + V_i(t) + W_i(t) + E_i(t) + I_i(t) + R_i(t)] + P(t) + Q(t) + C(t) + R_c(t).$$

Nilai dari masing-masing perubahan keadaan dapat dibuat sederhana jika dapat dirubah dalam bentuk non dimensional sehingga dapat di asumsikan total populasi sama dengan 1 yaitu

$$\sum_{i=1}^2 [S_i(t) + U_i(t) + V_i(t) + W_i(t) + E_i(t) + I_i(t) + R_i(t)] + P(t) + Q(t) + C(t) + R_c(t) = 1$$

$$\frac{dN_f}{dt} = \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{dS_i}{dt} + \frac{dU_i}{dt} + \frac{dV_i}{dt} + \frac{dW_i}{dt} + \frac{dE_i}{dt} + \frac{dI_i}{dt} + \frac{dR_i}{dt} \right] + \frac{dP}{dt} + \frac{dQ}{dt} + \frac{dC}{dt} + \frac{dR_c}{dt} = 0$$

Berdasarkan persamaan pada model 1 maka daerah penyelesaiannya yaitu,

$$\Omega 1 = \{(S_1, U_1, V_1, W_1, E_1, I_1, R_1) \in R_+^7 : (S_1 + U_1 + V_1 + W_1 + E_1 + I_1 + R_1) \leq 1\}$$

Sedangkan daerah penyelesaian pada model 2 adalah

$$\Omega 2 = \{(S_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \in R_+^{11} : (S_2 + U_2 + V_2 + W_2 + E_2 + I_2 + P + Q + C + R_c + R_2) \leq 1\}.$$

$N_m$  adalah proporsi jumlah seluruh populasi pada laki-laki.

$N_m(t) = S_m(t) + U_m(t) + V_m(t) + W_m(t) + E_m(t) + I_m(t) + R_m(t)$ .  
 Nilai dari masing-masing perubah keadaan dapat dibuat sederhana jika dapat dirubah dalam bentuk non dimensional sehingga dapat di asumsikan total populasi sama dengan 1 yaitu  $S_m(t) + U_m(t) + V_m(t) + W_m(t) + E_m(t) + I_m(t) + R_m(t) = 1$   
 $\frac{dN_m}{dt} = \frac{dS_m}{dt} + \frac{dU_m}{dt} + \frac{dV_m}{dt} + \frac{dW_m}{dt} + \frac{dE_m}{dt} + \frac{dI_m}{dt} + \frac{dR_m}{dt} = 0$

Berdasarkan persamaan pada model 3 maka daerah penyelesaiannya yaitu

$$\Omega_3 = \{(S_m, U_m, V_m, W_m, E_m, I_m, R_m) \in R_+^7 : (S_m + U_m + V_m + W_m + E_m + I_m + R_m) \leq 1\}$$

## 4.2 Analisis Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan adalah titik-titik koordinat dimana titik kesetimbangan di peroleh dari masing-masing kelompok yaitu kelompok model 1, model 2 dan model 3 adalah sebagai berikut:

### a. Model 1

Berdasarkan definisi titik kesetimbangan model 1 dapat diperoleh  $\frac{dS_1}{dt} = 0, \frac{dU_1}{dt} = 0, \frac{dV_1}{dt} = 0, \frac{dW_1}{dt} = 0, \frac{dE_1}{dt} = 0, \frac{dI_1}{dt} = 0, \frac{dR_1}{dt} = 0$ , sehingga di dapat :

$$\pi_f(1 - \phi_f) - \psi_u S_1 - \lambda_m S_1 - (\xi + \mu_f) S_1 = 0 \quad (4.1)$$

$$\pi_f \phi_f + \psi_u S_1 - (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_1 - (\psi_v + \xi + \mu_f) U_1 = 0 \quad (4.2)$$

$$\psi_v U_1 - (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_1 - (\psi_w + \xi + \mu_f) V_1 = 0 \quad (4.3)$$

$$\psi_w V_1 - (1 - \epsilon_w) \lambda_m W_1 - (\xi + \mu_f) W_1 = 0 \quad (4.4)$$

$$\lambda_m [S_1 + (1 - \epsilon_u) U_1 + (1 - \epsilon_v) V_1 + (1 - \epsilon_w) W_1] - (\rho_1 + \xi + \mu_f) E_1 = 0 \quad (4.5)$$

$$\rho_1 E_1 - (\sigma_1 + \xi + \mu_f) I_1 = 0 \quad (4.6)$$

$$\sigma_1 I_1 - (\xi + \mu_f) R_1 = 0 \quad (4.7)$$

### b. Model 2

Berdasarkan definisi titik kesetimbangan model 2 dapat diperoleh  $\frac{dS_2}{dt} = 0, \frac{dU_2}{dt} = 0, \frac{dV_2}{dt} = 0, \frac{dW_2}{dt} = 0, \frac{dE_2}{dt} = 0, \frac{dI_2}{dt} = 0, \frac{dP}{dt} = 0, \frac{dQ}{dt} = 0, \frac{dC}{dt} = 0, \frac{dR_C}{dt} = 0, \frac{dR_2}{dt} = 0$  sehingga didapatkan :

$$\xi S_1 - \eta \lambda_m S_2 - \mu_f S_2 = 0 \quad (4.8)$$

$$\xi U_1 - \eta(1 - \epsilon_u) \lambda_m U_2 - \mu_f U_2 = 0 \quad (4.9)$$

$$\xi V_1 - \eta(1 - \epsilon_v) \lambda_m V_2 - \mu_f V_2 = 0 \quad (4.10)$$

$$\xi W_1 - \eta(1 - \epsilon_w) \lambda_m W_2 - \mu_f W_2 = 0 \quad (4.11)$$

$$\xi E_1 + \eta \lambda_m [S_2 + (1 - \epsilon_u) U_2 + (1 - \epsilon_v) V_2 + (1 - \epsilon_w) W_2] - (\rho_2 + \mu_f) E_2 = 0 \quad (4.12)$$

$$\xi I_1 + \rho_2 E_2 - (\sigma_2 + \mu_f) I_2 = 0 \quad (4.13)$$

$$(1 - r) \sigma_2 I_2 - (\sigma_3 + \kappa + \mu_f) P = 0 \quad (4.14)$$

$$\kappa P - (\sigma_4 + \alpha + \mu_f) = 0 \quad (4.15)$$

$$\alpha Q - (\gamma + \mu_f + \delta_f) C = 0 \quad (4.16)$$

$$\gamma C - \mu_f R_c = 0 \quad (4.17)$$

$$\xi R_1 + r \sigma_2 I_2 + \sigma_3 P + \sigma_4 Q - \mu_f R_2 = 0 \quad (4.18)$$

### c. Model 3

Berdasarkan definisi titik kesetimbangan model 3 dapat diperoleh  $\frac{dS_m}{dt} = 0, \frac{dU_m}{dt} = 0, \frac{dV_m}{dt} = 0, \frac{dW_m}{dt} = 0, \frac{dE_m}{dt} = 0, \frac{dI_m}{dt} = 0, \frac{dR_m}{dt} = 0$  sehingga di dapat :

$$\pi_m (1 - \phi_m) - \omega_u S_m - \lambda_f S_m - \mu_m S_m = 0 \quad (4.19)$$

$$\pi_m \phi_m + \omega_u S_m - (1 - \epsilon_u) \lambda_f U_m - (\omega_v + \mu_m) U_m = 0 \quad (4.20)$$

$$\omega_v U_m - (1 - \epsilon_v) \lambda_f V_m - (\omega_w + \mu_m) V_m = 0 \quad (4.21)$$

$$\omega_u V_m - (1 - \epsilon_w) \lambda_f W_m - \mu_m W_m = 0 \quad (4.22)$$

$$\lambda_f [S_m + (1 - \epsilon_u) U_m + (1 - \epsilon_v) V_m + (1 - \epsilon_w) W_m] - (\rho_m + \mu_m) E_m = 0 \quad (4.23)$$

$$\rho_m E_m - (\sigma_m + \mu_m) I_m = 0 \quad (4.24)$$

$$\sigma_m I_m - \mu_m R_m = 0 \quad (4.25)$$

#### 4.2.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat di cari dari masing-masing sub populasi adalah sebagai berikut;

##### a) Model 1

Titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) adalah suatu keadaan dimana tidak terjadi penyebaran virus pada

populasi. Titik tersebut didapatkan saat  $E_1 = 0$ . Sehingga jika  $E_1 = 0$  di substitusi pada persamaan (4.6) dan (4.7) maka  $I_1 = 0$  dan  $R_1 = 0$  terpenuhi.

Dari persamaan (4.5) dilakukan substitusi  $E_1 = 0$  maka diperoleh  $\lambda_m = 0$ . Sehingga jika  $\lambda_m = 0$  di substitusikan pada persamaan (4.1) didapatkan  $S_1^0 = \frac{\pi_f(1-\phi_f)}{(\psi_u+k_1)}$  dimana  $k_1 = (\xi + \mu_f)$ . Selanjutnya pada persamaan (4.3) disubstitusikan  $\lambda_m = 0$  dan juga  $S_1^0 = \frac{\pi_f(1-\phi_f)}{(\psi_u+k_1)}$  diperoleh  $U_1^0 = \frac{\pi_f(\phi_f k_1 + \psi_u)}{(k_2)(\psi_u+k_1)}$  dimana  $k_2 = (\psi_v + \xi + \mu_f)$ . Kemudian persamaan (4.4) di substitusikan  $\lambda_m = 0$  dan  $U_1^0 = \frac{\pi_f(\phi_f k_1 + \psi_u)}{(k_2)(\psi_u+k_1)}$  didapatkan  $V_1^0 = \frac{\psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{k_3 k_2 (\psi_u+k_1)}$  dengan  $k_3 = (\psi_w + \xi + \mu_f)$ . Serta substitusi  $\lambda_m = 0$  dan  $V_1^0 = \frac{\psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{k_3 k_2 (\psi_u+k_1)}$  pada persamaan (4.5) sehingga diperoleh  $W_1^0 = \frac{\psi_w \psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{k_3 k_2 k_1 (\psi_u+k_1)}$ .

Jika  $E_1 = 0$  maka  $I_1 = 0$  dan  $R_1 = 0$  terpenuhi.

Dari uraian diatas diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit model pertama yaitu  $\varepsilon_1^0 = (S_1^0, U_1^0, V_1^0, W_1^0, 0, 0, 0)$  dengan;

$$S_1^0 = \frac{\xi \pi_f (1 - \phi_f)}{\mu_f (\psi_u + k_1)}, U_1^0 = \frac{\pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{(k_2) (\psi_u + k_1)},$$

$$V_1^0 = \frac{\psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{k_3 k_2 (\psi_u + k_1)}, W_1^0 = \frac{\psi_w \psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{k_3 k_2 k_1 (\psi_u + k_1)}$$

## b) Model 2

Titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) adalah suatu keadaan dimana tidak terjadi penyebaran penyakit pada populasi. Titik tersebut didapatkan saat  $E_2 = 0$ . Sehingga dengan substitusi  $E_2 = 0$  pada persamaan maka  $I_2 = 0, P = 0, Q = 0, C = 0, R_c = 0$  dan  $R_2 = 0$  terpenuhi.

Dari persamaan (4.12) dan substitusi  $E_2 = 0$  maka diperoleh  $\lambda_m = 0$ . Sehingga jika  $\lambda_m = 0$  di substitusikan pada persamaan (4.8) maka didapatkan  $S_2^0 = \frac{\xi \pi_f (1 - \phi_f)}{\mu_f (\psi_u + k_1)}$  dimana  $k_1 = (\xi + \mu_f)$ . Selanjutnya pada persamaan (4.13) dilakukan substitusi  $\lambda_m = 0$  dan

$S_2^0 = \frac{\xi\pi_f(1-\phi_f)}{\mu_f(\psi_u+k_1)}$  maka diperoleh  $U_2^0 = \frac{\xi\pi_f(\phi_fk_1+\psi_u)}{\mu_fk_2(\psi_u+k_1)}$  dimana  $k_2 = (\psi_v + \xi + \mu_f)$ . Kemudian persamaan (4.14) dilakukan substitusi  $\lambda_m = 0$  dan  $U_2^0 = \frac{\xi\pi_f(\phi_fk_1+\psi_u)}{\mu_fk_2(\psi_u+k_1)}$  sehingga diperoleh  $V_2^0 = \frac{\xi\psi_v\pi_f(\phi_fk_1+\psi_u)}{\mu_fk_3k_2(\psi_u+k_1)}$  dengan  $k_3 = (\psi_w + \xi + \mu_f)$ . Serta substitusi  $\lambda_m = 0$  dan  $V_2^0 = \frac{\psi_v\pi_f(\phi_fk_1+\psi_u)}{k_3k_2(\psi_u+k_1)}$  pada persamaan (4.5) sehingga dapat diperoleh  $W_2^0 = \frac{\psi_w\psi_v\pi_f(\phi_fk_1+\psi_u)}{k_3k_2k_1(\psi_u+k_1)}$ .

Dari uraian diatas diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit model pertama yaitu

$$\varepsilon_2^0 = (S_2^0, U_2^0, V_2^0, W_2^0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

dengan;

$$\begin{aligned}
 S_2^0 &= \frac{\xi\pi_f(1-\phi_f)}{\mu_f(\psi_u+k_1)}, & U_2^0 &= \frac{\xi\pi_f(\phi_fk_1+\psi_u)}{\mu_fk_2(\psi_u+k_1)}, \\
 V_2^0 &= \frac{\psi_v\pi_f(\phi_fk_1+\psi_u)}{k_3k_2(\psi_u+k_1)}, & W_2^0 &= \frac{\psi_w\psi_v\pi_f(\phi_fk_1+\psi_u)}{k_3k_2k_1(\psi_u+k_1)}.
 \end{aligned}$$

### c) Model 3

Pada titik kesetimbangan bebas penyakit model ketiga didapatkan ketika  $E_m = 0$ . Sehingga jika  $E_m = 0$  di lakukan substitusi persamaan (4.24) dan (4.25) maka  $I_m = 0$  dan  $R_m = 0$ .

Dari persamaan (4.23) dan substitusi  $E_m = 0$  maka diperoleh  $\lambda_f = 0$ . Sehingga jika  $\lambda_m = 0$  di substitusikan pada persamaan (4.19) maka didapatkan  $S_m = \frac{\pi_m(1-\phi_m)}{(\omega_u+\mu_m)}$ . Selanjutnya

pada persamaan (4.20) substitusi  $\lambda_m = 0$  dan  $S_m^0 = \frac{\pi_m(1-\phi_m)}{(\omega_u+\mu_m)}$  maka diperoleh  $U_m^0 = \frac{\pi_m\phi_m\omega_u+\omega_u\pi_m}{k_4(\omega_u+\mu_m)}$  dimana  $k_4 = (\omega_v + \mu_m)$ . Pada

persamaan (4.21) di substitusi  $\lambda_m = 0$  dan  $U_m^0 = \frac{\pi_m\phi_m\omega_u+\omega_u\pi_m}{k_4(\omega_u+\mu_m)}$  didapatkan  $V_m^0 = \frac{\omega_v\pi_m\phi_m\omega_u+\omega_u\pi_m}{k_4k_5(\omega_u+\mu_m)}$  dengan  $k_5 = (\omega_w + \mu_m)$ .

Serta substitusi  $\lambda_m = 0$  dan  $V_m^0 = \frac{\omega_v\pi_m\phi_m\omega_u+\omega_u\pi_m}{k_4k_5(\omega_u+\mu_m)}$  pada persamaan (4.22) sehingga diperoleh  $W_m^0 = \frac{\omega_u\omega_v\pi_m\phi_m\omega_u+\omega_u\pi_m}{k_4k_5\mu_m(\omega_u+\mu_m)}$ .

Dari uraian diatas diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit model ketiga yaitu  $\varepsilon_m^0 = (S_m^0, U_m^0, V_m^0, W_m^0, 0, 0, 0)$

$$\text{Dengan: } S_m^0 = \frac{\pi_m(1-\phi_m)}{(\omega_u + \mu_m)}, U_m^0 = \frac{\pi_m \phi_m \omega_u + \omega_u \pi_m}{k_4(\omega_u + \mu_m)},$$

$$V_m^0 = \frac{\omega_v \pi_m \phi_m \omega_u + \omega_u \pi_m}{k_4 k_5 (\omega_u + \mu_m)}, W_m^0 = \frac{\omega_u \omega_v \pi_m \phi_m \omega_u + \omega_u \pi_m}{k_4 k_5 \mu_m (\omega_u + \mu_m)}$$

$$\text{Misalkan } \lambda_f^0 = \frac{\beta_f C_m (\theta_1 E_1^0 + I_1^0 + \theta_1 E_2^0 + I_2^0 + \theta_2 P^0)}{N_f^{**}}, \lambda_m^0 = \frac{\beta_m C_f (\theta_m E_m^0 + I_m^0)}{N_m^0}$$

Dengan melakukan substitusi masing-masing titik kesetimbangan bebas penyakit dimana keadaan tidak ada virus yang menyerang maka diperoleh  $\lambda_m^0 = 0$  artinya laju hubungan seksual yang mengakibatkan terserang virus pada perempuan tidak disebabkan oleh populasi laki-laki. Sedangkan  $\lambda_f^0 = 0$  adalah laju hubungan seksual yang mengakibatkan terserangnya virus pada populasi laki-laki tidak disebabkan oleh populasi perempuan.

#### 4.2.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik adalah suatu keadaan dimana terjadi penyebaran penyakit. Titik kesetimbangan endemik pada sistem model ditentukan dari masing-masing sub grub yaitu :

a) Model 1

Titik kesetimbangan endemik pada populasi perempuan dibawah 26 tahun adalah suatu keadaan dimana terjadi penyebaran virus pada populasi tersebut.

Pada persamaan (4.1)

$$\pi_f(1 - \phi_f) - \psi_u S_1 - \lambda_m S_1 - (\xi + \mu_f) S_1 = 0$$

$$\text{diperoleh } S_1^{**} = \frac{\pi_f(1-\phi_f)}{\psi_u + \lambda_m^{**} + k_1} \equiv \frac{\pi_f(1-\phi_f)}{\lambda_m^{**} + D_{11}} \text{ dengan } D_{11} = \psi_u + k_1.$$

Pada persamaan (4.2) didapatkan  $U_1^{**} = \frac{\pi_f \phi_f + \psi_u S_1^{**}}{(1-\epsilon_u)\lambda_m^{**} + k_2}$  dengan

$$\text{dilakukan substitusi } S_1^{**} = \frac{\pi_f(1-\phi_f)}{\lambda_m^{**} + D_{11}} \text{ maka } U_1^{**} = \frac{\pi_f(m_{10}\lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(D_u\lambda_m^{**} + k_2)}$$

dengan  $D_u = (1 - \epsilon_u)$ , selanjutnya pada persamaan (4.3) diperoleh

$$V_1^{**} = \frac{\psi_v U_1^{**}}{(1-\epsilon_v)\lambda_m^{**} + k_3}, \text{ dengan substitusi } U_1^{**} = \frac{\pi_f(m_{10}\lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(D_u\lambda_m^{**} + k_2)}$$

$$\text{maka } V_1^{**} = \frac{\psi_v \pi_f (m_{10}\lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}, \text{ dimana } D_v = (1 - \epsilon_v).$$

Pada persamaan (4.4) diperoleh  $W_1^{**} = \frac{\psi_w V_1^{**}}{(1-\epsilon_v)\lambda_m^{**} + k_1}$  kemudian substitusikan persamaan  $V_1^{**} = \frac{\psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$  dan didapatkan  $W_1^{**} = \frac{\psi_w \psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$  dengan  $D_w = (1 - \epsilon_w)$ . Selanjutnya pada persamaan (4.5) diperoleh  $E_1^{**} = \frac{\lambda_m^{**} [S_m^{**} + (1-\epsilon_u)U_1^{**} + (1-\epsilon_v)V_1^{**} + (1-\epsilon_w)W_1^{**}]}{k_4}$ , lalu disubstitusikan masing-masing  $S_1^{**}, U_1^{**}, V_1^{**}, W_1^{**}$  yang sesuai dengan uraian diatas sehingga diperoleh  $E_1^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$  dimana  $m_{jk} > 0$  untuk  $j, k=0, 1, \dots, 7$ . Pada persamaan (4.6) diperoleh  $I_1^{**} = \frac{\rho_1 E_1^{**}}{k_5}$  kemudian substitusikan  $E_1^{**}$  sehingga didapatkan  $I_1^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \rho_1 [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 k_5 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$ .

Selanjutnya pada persamaan (4.7) diperoleh  $R_1^{**} = \frac{\sigma_1 I_1^{**}}{k_6}$ . Dengan melakukan substitusi  $I_1^{**}$  pada persamaan maka didapatkan  $R_1^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \rho_1 \sigma_1 [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 k_5 k_6 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$ ,

Dari uraian diatas maka didapatkan titik kesetimbangan endemik yaitu  $\epsilon_1^{**} = (S_1^{**}, U_1^{**}, V_1^{**}, W_1^{**}, E_1^{**}, I_1^{**}, R_1^{**})$

dimana :

$$\begin{aligned} S_1^{**} &= \frac{\pi_f (1 - \phi_f)}{\lambda_m^{**} + D_{11}}, \\ U_1^{**} &= \frac{\pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (D_u \lambda_m^{**} + k_2)}, \\ V_1^{**} &= \frac{\psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}, \\ W_1^{**} &= \frac{\psi_w \psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}, \\ E_1^{**} &= \frac{\lambda_m^{**} \pi_f [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}, \\ I_1^{**} &= \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \rho_1 [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 k_5 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}, \\ R_1^{**} &= \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \rho_1 \sigma_1 [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 k_5 k_6 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}. \end{aligned}$$

## b) Model 2

Titik kesetimbangan endemik pada populasi perempuan diatas 26 tahun adalah suatu keadaan dimana terjadi penyebaran virus pada populasi sehingga lebih rentan untuk terkena kanker serviks.

Pada persamaan (4.8)

$$\xi S_1 - \eta \lambda_m S_2 - \mu_f S_2 = 0$$

didapatkan  $S_2^{**} = \frac{\xi S_1^{**}}{\eta \lambda_m^{**} + \mu_f}$  dengan substitusi  $S_1^{**} = \frac{\pi_f(1-\phi_f)}{\lambda_m^{**} + D_{11}}$  maka diperoleh  $S_2^{**} = \frac{\xi \mu_f(1-\phi_f)}{(\eta \lambda_m^{**} + \mu_f)(\lambda_m^{**} + D_{11})}$  dimana  $D_{11} = \psi_u + k_1$ .

Kemudian pada persamaan (4.9) didapatkan  $U_2^{**} = \frac{\xi U_1^{**}}{\eta(1-\epsilon_u)\lambda_m^{**} + \mu_f}$

dengan substitusi  $U_1^{**} = \frac{\pi_f(m_{10}\lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(D_u\lambda_m^{**} + k_2)}$  maka diperoleh  $U_2^{**} = \frac{\xi \pi_f(m_{10}\lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(D_u\lambda_m^{**} + k_2)(\eta D_u\lambda_m^{**} + \mu_f)}$  dengan  $D_u = (1 - \epsilon_u)$ , selanjutnya

pada persamaan (4.10) didapatkan  $V_2^{**} = \frac{\xi V_1^{**}}{\eta(1-\epsilon_v)\lambda_m^{**} + \mu_f}$  dengan

mensubstitusikan  $V_1^{**} = \frac{\psi_v \pi_f(m_{10}\lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)}(D_i\lambda_m^{**} + k_j)}$  sehingga

didapatkan  $V_2^{**} = \frac{\psi_v \xi \pi_f(m_{10}\lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(\eta D_v\lambda_m^{**} + \mu_f) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)}(D_i\lambda_m^{**} + k_j)}$  untuk

$D_v = (1 - \epsilon_v)$ . Selanjutnya pada persamaan (4.11) didapatkan

$W_2^{**} = \frac{\xi W_1^{**}}{\eta(1-\epsilon_w)\lambda_m^{**} + \mu_f}$ , kemudian dengan melakukan substitusi

$W_1^{**} = \frac{\psi_w \psi_v \pi_f(m_{10}\lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)}(D_i\lambda_m^{**} + k_j)}$  maka akan diperoleh

$W_2^{**} = \frac{\xi \psi_w \psi_v \pi_f(m_{10}\lambda_m^{**} + m_{11})}{a(\eta D_w\lambda_m^{**} + \mu_f) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)}(D_i\lambda_m^{**} + k_j)}$  dengan  $D_w = (1 -$

$\epsilon_w)$  dan  $a = (\lambda_m^{**} + D_{11})$ . Selanjutnya pada persamaan (4.12)

$E_2^{**} = \frac{\xi E_1^{**} + \eta \lambda_m^{**} [S_2^{**} + (1-\epsilon_u)U_2^{**} + (1-\epsilon_v)V_2^{**} + (1-\epsilon_w)W_2^{**}]}{k_7}$  kemudian

substitusikan masing-masing  $E_1^{**}, S_2^{**}, U_2^{**}, V_2^{**}, W_2^{**}$  sesuai dengan uraian diatas sehingga diperoleh

$E_2^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{3i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{a(\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) k_4 k_7 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)}(D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w}(\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$

dengan  $m_{jk} > 0$  untuk  $j, k=0, 1, \dots, 7$  dan  $a = (\lambda_m^{**} + D_{11})$ .



Pada persamaan (4.13) diperoleh  $I_2^{**} = \frac{\xi I_1^{**} + \rho_2 E_2^{**}}{k_8}$  kemudian substitusi  $I_1^{**}$  dan  $E_2^{**}$  sehingga didapatkan  $I_2^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{a(\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) k_4 k_7 k_8 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$  dengan  $a = (\lambda_m^{**} + D_{11})$ . Selanjutnya persamaan (4.14) diperoleh  $P^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2 I_2^{**}}{k_9}$  dan substitusi  $I_2^{**}$  maka didapatkan

$$P^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2 \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab k_4 k_5 \prod_{i=7}^9 k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

Dimana  $a = (\lambda_m^{**} + D_{11})$  dan  $b = (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f)$ .

Pada persamaan (4.15) diperoleh  $Q^{**} = \frac{\kappa P^{**}}{k_{10}}$  dengan melakukan substitusi  $P^{**}$  pada persamaan maka didapatkan

$$Q^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2 \kappa \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab k_4 k_5 \prod_{i=7}^{10} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

dimana  $a = (\lambda_m^{**} + D_{11})$  dan  $b = (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f)$ . Pada persamaan (4.16) didapatkan  $C^{**} = \frac{\alpha Q^{**}}{k_{11}}$  dengan melakukan substitusi  $Q^{**}$  maka

$$C^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2 \kappa \alpha \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab k_4 k_5 \prod_{i=7}^{11} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

Selanjutnya pada persamaan (4.17) diperoleh  $R_c^{**} = \frac{\gamma C^{**}}{\mu_f}$  kemudian

dengan mensubstitusikan  $C^{**}$  maka diperoleh  $R_c^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2 \kappa \alpha \gamma \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab \mu_f k_4 k_5 \prod_{i=7}^{11} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$

Dimana  $a = (\lambda_m^{**} + D_{11})$  dan  $b = (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f)$ . Kemudian pada persamaan (4.18) didapatkan  $R_2^{**} = \frac{\xi R_1^{**} + r \sigma_2 I_2^{**} + \sigma_3 P^{**} + \sigma_4 Q^{**}}{\mu_f}$  maka

dengan substitusikan persamaan  $R_1^{**}, I_2^{**}, P^{**}, Q^{**}$  akan didapatkan

$$R_2^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{5i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab \mu_f \prod_{i=4}^{10} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

Dimana  $a = (\lambda_m^{**} + D_{11})$  dan  $b = (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f)$ .

Dari uraian diatas maka didapatkan titik kesetimbangan endemik pada sub populasi kedua dimana populasi perempuan dengan umur diatas 26 tahun yang signifikan terhadap kanker serviks yaitu

$$\varepsilon_2^{**} = (S_2^{**}, U_2^{**}, V_2^{**}, W_2^{**}, E_2^{**}, I_2^{**}, P^{**}, Q^{**}, C^{**}, R_c^{**}, R_2^{**})$$

Dengan;

$$\begin{aligned}
S_2^{**} &= \frac{\xi \mu_f (1 - \phi_f)}{(\eta \lambda_m^{**} + \mu_f)(\lambda_m^{**} + D_{11})} \\
U_2^{**} &= \frac{\xi \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(D_u \lambda_m^{**} + k_2)(\eta D_u \lambda_m^{**} + \mu_f)} \\
V_2^{**} &= \frac{\psi_v \xi \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(\eta D_v \lambda_m^{**} + \mu_f) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)} \\
W_2^{**} &= \frac{\xi \psi_v \psi_w \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(\eta D_w \lambda_m^{**} + \mu_f) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)} \\
E_2^{**} &= \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{3i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab k_4 k_7 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)} \\
I_2^{**} &= \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab k_4 k_7 k_8 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)} \\
P^{**} &= \frac{(1-r) \sigma_2 \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab k_4 k_5 \prod_{i=7}^9 k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)} \\
Q^{**} &= \frac{(1-r) \sigma_2 \kappa \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab k_4 k_5 \prod_{i=7}^{10} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)} \\
C^{**} &= \frac{(1-r) \sigma_2 \kappa \alpha \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab k_4 k_5 \prod_{i=7}^{11} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)} \\
R_c^{**} &= \frac{(1-r) \sigma_2 \kappa \alpha \gamma \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab \mu_f k_4 k_5 \prod_{i=7}^{11} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)} \\
R_2^{**} &= \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{5i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{ab \mu_f \prod_{i=4}^{10} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}
\end{aligned}$$

dimana  $a = (\lambda_m^{**} + D_{11})$  dan  $b = (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f)$ .

### c) Model 3

Titik kesetimbangan endemik pada populasi laki-laki adalah suatu keadaan dimana terjadi penyebaran virus pada populas.

Pada persamaan (4.19) yaitu  $\pi_m(1 - \phi_m) - \omega_u S_m - \lambda_f S_m - \mu_m S_m = 0$  akan didapatkan  $S_m^{**} = \frac{\pi_m(1-\phi_m)}{\omega_u + \lambda_f^{**} + \mu_m} = \frac{\pi_m(1-\phi_m)}{\lambda_f^{**} + D_{11}}$  dimana  $D_{11} = \psi_u + k_1$ . Selanjutnya pada persamaan (4.20) diperoleh  $U_m^{**} = \frac{\pi_m \phi_m + \omega_u S_m^{**}}{(1-\epsilon_u)\lambda_f^{**} + k_{12}}$  dengan substitusi  $S_m^{**} = \frac{\pi_m(1-\phi_m)}{\lambda_f^{**} + D_{11}}$  maka diperoleh  $U_m^{**} = \frac{\pi_m(n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})}$  dengan  $D_u = (1 - \epsilon_u)$ , kemudian pada persamaan (4.21) didapatkan  $V_m^{**} = \frac{\omega_v U_m^{**}}{(1-\epsilon_v)\lambda_f^{**} + k_{13}}$  lalu substitusikan  $U_m^{**} = \frac{\pi_m(n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})}$  maka akan diperoleh  $V_m^{**} = \frac{\omega_v \pi_m(n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})}$  dimana  $D_v = (1 - \epsilon_v)$ . Kemudian persamaan (4.22) diperoleh  $W_m^{**} = \frac{\omega_w V_m^{**}}{(1-\epsilon_w)\lambda_f^{**} + \mu_m}$ , lalu substitusikan  $V_m^{**} = \frac{\omega_v \pi_m(n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})}$  maka akan didapatkan  $W_m^{**} = \frac{\omega_v \omega_w \pi_m(n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})(D_w\lambda_f^{**} + \mu_m)}$  dengan  $D_w = (1 - \epsilon_w)$ . Selanjutnya pada persamaan (4.23) didapatkan  $E_m^{**} = \frac{\lambda_f^{**}(S_m^{**} + (1-\epsilon_u)U_m^{**} + (1-\epsilon_v)V_m^{**} + (1-\epsilon_w)W_m^{**})}{k_{14}}$ , dengan melakukan substitusi masing-masing  $S_m^{**}, U_m^{**}, V_m^{**}, W_m^{**}$  sesuai uraian diatas maka diperoleh  $E_m^{**} = \frac{\lambda_f^{**} \pi_m \sum_{i=0}^3 n_{2i} (\lambda_f^{**})^{3-i}}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})(D_w\lambda_f^{**} + \mu_m)k_{14}}$  dengan  $n_{jk} > 0$  untuk  $j, k=0, 1, \dots, 7$ .

Pada persamaan (4.24) diperoleh  $I_m^{**} = \frac{\rho_m I_m^{**}}{k_{15}}$  dengan melakukan substitusi  $E_m^{**}$  pada persamaan maka akan didapatkan  $I_m^{**} = \frac{\rho_m \lambda_f^{**} \pi_m \sum_{i=0}^3 n_{2i} (\lambda_f^{**})^{3-i}}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})(D_w\lambda_f^{**} + \mu_m)k_{14}k_{15}}$ . Selanjutnya pada persamaan (4.25) diperoleh  $R_m^{**} = \frac{\sigma_m I_m^{**}}{\mu_m}$ . Dengan substitusi  $I_m^{**}$  maka  $R_m^{**} = \frac{\sigma_m \rho_m \lambda_f^{**} \pi_m \sum_{i=0}^3 n_{2i} (\lambda_f^{**})^{3-i}}{\mu_m (\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})(D_w\lambda_f^{**} + \mu_m)k_{14}k_{15}}$ .

Dari uraian diatas diperoleh titik kesetimbangan endemik yaitu

$$\varepsilon_m^{**} = (S_m^{**}, U_m^{**}, V_m^{**}, W_m^{**}, E_m^{**}, I_m^{**}, R_m^{**})$$

dengan :

$$S_m^{**} = \frac{\pi_m(1-\phi_m)}{\lambda_f^{**}+D_{11}},$$

$$U_m^{**} = \frac{\pi_m(n_{10}\lambda_f^{**}+n_{11})}{(\lambda_f^{**}+D_{11})(D_u\lambda_f^{**}+k_{12})},$$

$$V_m^{**} = \frac{\omega_v\pi_m(n_{10}\lambda_f^{**}+n_{11})}{(\lambda_f^{**}+D_{11})(D_u\lambda_f^{**}+k_{12})(D_v\lambda_f^{**}+k_{13})},$$

$$W_m^{**} = \frac{\omega_v\omega_w\pi_m(n_{10}\lambda_f^{**}+n_{11})}{(\lambda_f^{**}+D_{11})(D_u\lambda_f^{**}+k_{12})(D_v\lambda_f^{**}+k_{13})(D_w\lambda_f^{**}+\mu_m)},$$

$$E_m^{**} = \frac{\lambda_f^{**}\pi_m\sum_{i=0}^3 n_{2i}(\lambda_f^{**})^{3-i}}{(\lambda_f^{**}+D_{11})(D_u\lambda_f^{**}+k_{12})(D_v\lambda_f^{**}+k_{13})(D_w\lambda_f^{**}+\mu_m)k_{14}},$$

$$I_m^{**} = \frac{\rho_m\lambda_f^{**}\pi_m\sum_{i=0}^3 n_{2i}(\lambda_f^{**})^{3-i}}{(\lambda_f^{**}+D_{11})(D_u\lambda_f^{**}+k_{12})(D_v\lambda_f^{**}+k_{13})(D_w\lambda_f^{**}+\mu_m)k_{14}k_{15}},$$

$$R_m^{**} = \frac{\sigma_m\rho_m\lambda_f^{**}\pi_m\sum_{i=0}^3 n_{2i}(\lambda_f^{**})^{3-i}}{\mu_m(\lambda_f^{**}+D_{11})(D_u\lambda_f^{**}+k_{12})(D_v\lambda_f^{**}+k_{13})(D_w\lambda_f^{**}+\mu_m)k_{14}k_{15}}.$$

### 4.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan rata-rata penularan penyakit. Bilangan reproduksi pada penelitian ini ditentukan dari model masing-masing grup maupun pada model sistem sehingga didapatkan teorema sebagai berikut:

#### Teorema 1

- 1) Bilangan reproduksi dari sistem persamaan model 1 adalah

$$R_1 = \frac{\tau_{1.1} + \tau_{1.2} + \tau_{1.3}}{(\rho_1 + \xi + \mu_f)}$$

- 2) Bilangan reproduksi dari sistem persamaan model 2 adalah

$$R_2 = \frac{\tau_{2.1} + \tau_{2.2} + \tau_{2.3}}{(\rho_2 + \mu_f)}$$

- 3) Bilangan reproduksi dari sistem persamaan model 3 adalah

$$R_m = \frac{\tau_{m.1} + \tau_{m.2} + \tau_{m.3}}{(\rho_m + \mu_m)}$$

**Bukti:**

Berdasarkan asumsi-asumsi dasar (A1)-(A5) menurut P.van den Driessche dan Pmaka bilangan reproduksi masing-masing populasi yaitu

## a) Model 1

Misalkan pada grup model 1 dapat dinyatakan dalam bentuk  $F_i, V_i$  yaitu  $\frac{dX}{dt} = f(X, t) = F_i(X, t) - V_i(X, t)$ , dengan  $F_i(X, t)$  merupakan matriks dengan elemen-elemennya berbentuk parameter dari individual yang baru terinfeksi pada kompartemen i dan berbentuk

$$F_i(X, t) = \begin{pmatrix} \lambda_m[S_1 + (1 - \epsilon_u)U_1 + (1 - \epsilon_v)V_1 + (1 - \epsilon_w)W_1] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dan  $V_i(X, t)$  menyatakan matriks dengan elemen-elemen berbentuk parameter dan individual yang keluar dan masuk pada kompartemen i atau  $V_i(X, t) = V_i(X, t)^- - V_i(X, t)^+$

$$V_i(X, t) = \begin{pmatrix} (\rho_1 + \xi + \mu_f)E_1 \\ (\sigma_1 + \xi + \mu_f)I_1 - \rho_1 E_1 \\ (\psi_u + \lambda_m + \xi + \mu_f)S_1 - \pi_f(1 - \phi_f) \\ (1 - \epsilon_u)\lambda_m U_1 + (\psi_v + \xi + \mu_f)U_1 - \pi_f\phi_f - \psi_u S_1 \\ (1 - \epsilon_v)\lambda_m V_1 + (\psi_w + \xi + \mu_f)U_1 - \pi_f\phi_f - \psi_u S_1 \\ (1 - \epsilon_w)\lambda_m W_1 + (\xi + \mu_f)W_1 - \psi_w V_1 \\ (\xi + \mu_f)R_1 - \sigma_1 I_1 \end{pmatrix}$$

Sehingga fungsi  $F_i, V_i^-$  dan  $V_i^+$  harus memenuhi asumsi dasar.

Misalkan  $X_S = \{x \geq 0 | E_1, I_1, R_1 = 0\}$  adalah himpunan dari semua keadaan yang bebas penyakit, maka:

1. Jika  $x \geq 0$  maka  $F_i, V_i^-, V_i^+ \geq 0$ .  
 $x \geq 0$  artinya populasi  $S_1, U_1, V_1, W_1$  ada dan apabila terjadi kontak dengan individual terinfeksi mengakibatkan terjadinya individual baru terinfeksi dan perubahan pada populasi. Jadi  $F_i, V_i^-, V_i^+$  dari model memenuhi.
2. Jika  $x \in X_S$  maka  $V_i^- = 0$  untuk  $x = 1, 2, 3, \dots, 7$ .  
 Pada transmisi dinamis setiap kejadian infeksi populasi  $S_1, U_1, V_1, W_1$  sama dengan nol, jadi  $V_i^-$  dari model terpenuhi.
3.  $F_i = 0$  jika  $i > m$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  menyatakan banyaknya variabel keadaan dimana individual baru terinfeksi artinya populasi lain tidak terdapat individual baru terinfeksi.
4. Jika  $x \in X_S$  maka  $F_i(x) = 0$  dan  $V_i^+(x) = 0$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ .  
 $x \in X_S$  elemen-elemen pada himpunan *susceptible* berarti  $F_i(x) \neq 0$ , untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, 5$  dan berdasarkan asumsi (2) diperoleh  $V_i^- = 0$ . Jadi dapat diperoleh  $F_i(x) = 0$  dan  $V_i^+ = 0$  untuk variabel keadaan  $E_1$  dan  $I_1$ .
5. Jika  $F(x) = 0$  maka matriks Jacobian  $D_f(X_0)$  dengan  $X_0$  sebagai titik kesetimbangan mempunyai bagian *real negative*.

$D_f(X_0)$  merupakan hasil linearisasi dari persamaan (5) dan definisikan matriks  $F = \left( \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} (X_0) \right)$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  dengan menggunakan asumsi (3) dan (4) yaitu  $F_i = 0$ , jika  $i > m$ ,  $x \in X_S$  maka  $F_i = 0$  dan  $V_i^+ = 0$  untuk  $i = 1, 2$  dapat diperoleh  $\left( \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} (X_0) \right)$  untuk  $i > 2$  atau  $j > 2$  dan dapat dikembangkan menjadi:

$F(X_0) \neq 0$  untuk  $1 \leq i, j \leq 2$ .

$F(X_0) = 0$  untuk  $i > 2$  atau  $j > 2$

$F(X_0) = 0$  untuk  $i < 2$  atau  $j < 2$ .

Definisikan matriks  $V = \left( \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} (X_0) \right)$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  dengan menggunakan asumsi (2) dan (4) dapat diperoleh :  $V(X_0) = 0$

untuk  $1 \leq i$  dan  $j > 2$  dan dapat dikembangkan menjadi  $V(X_0) \neq 0$  untuk  $i > 2$  atau  $j \leq 2$  dan untuk  $i < 2$  atau  $j < 2$

$V(X_0) \neq 0$ , dengan asumsi (5) maka semua nilai *eigen* dari  $D_f(X_0)$  mempunyai bagian *real negative*.

Berdasarkan asumsi (5) maka diperoleh

$$F_i = \begin{pmatrix} \lambda_m[S_1 + (1 - \epsilon_u)U_1 + (1 - \epsilon_v)V_1 + (1 - \epsilon_w)W_1] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_m(1 - \epsilon_u)U_1$ ,  $\lambda_m(1 - \epsilon_v)V_1$ ,  $\lambda_m(1 - \epsilon_w)W_1$ , masing-masing merupakan populasi perempuan yang rentan terhadap virus HPV dengan usia dibawah 26 tahun yang belum atau gagal divaksinasi pada dosis pertama, kedua dan ketiga tetapi telah melakukan hubungan intim dengan individu laki-laki maka dapat diasumsikan bahwa individu tersebut telah mendekati untuk menjadi individu yang telah terkena infeksi virus HPV sehingga dapat dinotasikan  $\lambda_m(1 - \epsilon_u)U_1 \approx \tau_{1.1}E_1$ ,  $\lambda_m(1 - \epsilon_u)U_1 \approx \tau_{1.2}E_1$  dan  $\lambda_m(1 - \epsilon_u)U_1 \approx \tau_{1.3}E_1$  dimana  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  masing-masing adalah laju perkembangan individu yang rentan menjadi terjangkit virus. Sehingga didapatkan

$$F_i = \begin{pmatrix} \lambda_m S_1 + \tau_{1.1} E_1 + \tau_{1.2} E_1 + \tau_{1.3} E_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = DF_i = \begin{bmatrix} \tau_{1.1} + \tau_{1.2} + \tau_{1.3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_i = \begin{pmatrix} (\rho_1 + \xi + \mu_f) E_1 \\ (\sigma_1 + \xi + \mu_f) I_1 - \rho_1 E_1 \\ (\psi_u + \lambda_m + \xi + \mu_f) S_1 - \pi_f (1 - \phi_f) \\ (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_1 + (\psi_v + \xi + \mu_f) U_1 - \pi_f \phi_f - \psi_u S_1 \\ (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_1 + (\psi_w + \xi + \mu_f) U_1 - \pi_f \phi_f - \psi_u S_1 \\ (1 - \epsilon_w) \lambda_m W_1 + (\xi + \mu_f) W_1 - \psi_w V_1 \\ (\xi + \mu_f) R_1 - \sigma_1 I_1 \end{pmatrix}$$

$$V = DV_i = \begin{bmatrix} \rho_1 + \xi + \mu_f & 0 \\ -\rho_1 & \sigma_1 + \xi + \mu_f \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{(\rho_1 + \xi + \mu_f)(\sigma_1 + \xi + \mu_f)} \begin{bmatrix} \sigma_1 + \xi + \mu_f & 0 \\ \rho_1 & \rho_1 + \xi + \mu_f \end{bmatrix}$$

$V$  merupakan M-matriks non singular jika terdapat bilangan  $k$  dan matriks  $P$  sedemikian hingga  $\rho(P) < k$  yang memenuhi

$$V = kI - P$$

$$V = DV_i = (\xi + \mu_f) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\rho_1 & 0 \\ \rho_1 & -\sigma_1 \end{bmatrix} \text{diperoleh } \rho(P) < (\xi + \mu_f)$$

atau  $\rho_1 < \sigma_1$  yang menunjukkan bahwa rate gejala virus HPV oleh perempuan dari infeksi grup pertama yang mempengaruhi transisi usia pada sub populasi mengalami penurunan karena adanya vaksinasi pada dosis pertama, kedua dan ketiga dan mengalami laju pemulihan sembuh dari virus HPV yang meningkat Jadi  $V$  merupakan matriks M-non singular dan bilangan reproduksi dapat di tentukan dari dari  $R_0 = \rho(FV^{-1})$  dimana  $\rho$  adalah bilangan *spectral* sehingga diperoleh

$$R_1 = \frac{\tau_{1.1} + \tau_{1.2} + \tau_{1.3}}{(\rho_1 + \xi + \mu_f)}$$

#### b) Model 2

Misalkan pada grup model 1 dapat dinyatakan dalam bentuk  $F_i, V_i$  yaitu  $\frac{dX}{dt} = f(X, t) = F_i(X, t) - V_i(X, t)$ , dengan  $F_i(X, t)$  merupakan matriks dengan elemen-elemennya berbentuk parameter dari individual yang baru terinfeksi pada kompartemen  $i$  dan berbentuk

$$F_i(X, t) = \begin{pmatrix} \eta\lambda_m[S_2 + (1 - \epsilon_u)U_2 + (1 - \epsilon_v)V_2 + (1 - \epsilon_w)W_2] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



dan  $V_i(X, t)$  menyatakan matriks dengan elemen-elemen berbentuk parameter dan individual yang keluar dan masuk pada kompartemen  $i$  atau  $V_i(X, t) = V_i(X, t)^- - V_i(X, t)^+$

$$V_i(X, t) = \begin{pmatrix} (\rho_2 + \mu_f)E_2 \\ (\sigma_2 + \mu_f)I_2 - \xi I_1 - \rho_2 E_2 \\ \eta \lambda_m S_2 + \mu_f S_2 - \xi S_1 \\ \eta(1 - \epsilon_u)\lambda_m U_2 + \mu_f U_2 - \xi U_1 \\ \eta(1 - \epsilon_v)\lambda_m V_2 + \mu_f V_2 - \xi V_1 \\ \eta(1 - \epsilon_w)\lambda_m W_2 + \mu_f W_2 - \xi W_1 \\ (\sigma_3 + \kappa + \mu_f)P - (1 - r)\sigma_2 I_2 \\ (\sigma_4 + \alpha + \mu_f)Q - \kappa P \\ (\gamma + \mu_f + \delta_f)C - \alpha Q \\ \mu_f R_c - \gamma C \\ \mu_f R_2 - \xi R_1 + r\sigma_2 I_2 + \sigma_3 P + \sigma_4 Q \end{pmatrix}$$

Sehingga fungsi  $F_i$ ,  $V_i^-$  dan  $V_i^+$  harus memenuhi asumsi dasar.

Misalkan  $X_s = \{x \geq 0 | E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2 = 0\}$  adalah himpunan dari semua keadaan yang bebas penyakit, maka:

1. Jika  $x \geq 0$  maka  $F_i, V_i^-, V_i^+ \geq 0$ .  
 $x \geq 0$  artinya populasi  $S_2, U_2, V_2, W_2$  ada dan apabila terjadi kontak dengan individual terinfeksi mengakibatkan terjadinya individual baru terinfeksi dan perubahan pada populasi. Jadi  $F_i, V_i^-, V_i^+$  dari model memenuhi.
2. Jika  $x \in X_s$  maka  $V_i^- = 0$  untuk  $x = 1, 2, 3, \dots, 11$ .  
 Pada transmisi dinamis setiap kejadian infeksi populasi  $S_2, U_2, V_2, W_2$  sama dengan nol, jadi  $V_i^-$  dari model terpenuhi.
3.  $F_i = 0$  jika  $i > m$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ .  $m$  menyatakan banyaknya variabel keadaan dimana individual baru terinfeksi artinya populasi lain tidak terdapat individual terinfeksi.
4. Jika  $x \in X_s$  maka  $F_i(x) = 0$  dan  $V_i^+(x) = 0$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ .

$x \in X_s$  elemen-elemen pada himpunan *susceptible* berarti  $F_i(x) \neq 0$ , untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, 9$  dan berdasarkan asumsi (2) diperoleh  $V_i^- = 0$ . Jadi dapat diperoleh  $F_i(x) = 0$  dan  $V_i^+ = 0$  untuk variabel keadaan  $E_2$  dan  $I_2$ .

5. Jika  $F(x) = 0$  maka matriks Jacobian  $D_f(X_0)$  dengan  $X_0$  sebagai titik kesetimbangan mempunyai bagian real negative.

$D_f(X_0)$  merupakan hasil linearisasi dari persamaan (5) dan definisikan matriks  $F = \left( \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} (X_0) \right)$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  dengan menggunakan asumsi (3) dan (4) yaitu  $F_i = 0$ , jika  $i > m$ ,  $x \in X_s$  maka  $F_i = 0$  dan  $V_i^+ = 0$  untuk  $i = 1, 2$  dapat diperoleh  $\left( \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} (X_0) \right)$  untuk  $i > 2$  atau  $j > 2$  dan dapat dikembangkan menjadi:

$F(X_0) \neq 0$  untuk  $1 \leq i, j \leq 2$ .

$F(X_0) = 0$  untuk  $i > 2$  atau  $j > 2$

$F(X_0) = 0$  untuk  $i < 2$  atau  $j < 2$ .

Definisikan matriks  $V = \left( \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} (X_0) \right)$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  dengan menggunakan asumsi (2) dan (4) dapat diperoleh :  $V(X_0) = 0$  untuk  $1 \leq i$  dan  $j > 2$  dan dapat dikembangkan menjadi  $V(X_0) \neq 0$  untuk  $i > 2$  atau  $j \leq 2$  dan untuk  $i < 2$  atau  $j < 2$

$V(X_0) \neq 0$ , dengan asumsi (5) maka semua nilai *eigen* dari  $D_f(X_0)$  mempunyai bagian real negative.

Berdasarkan asumsi (5) maka diperoleh

$$F_i(X, t) = \begin{pmatrix} \eta\lambda_m [S_2 + (1 - \epsilon_u)U_2 + (1 - \epsilon_v)V_2 + (1 - \epsilon_w)W_2] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\eta\lambda_m(1 - \epsilon_u)U_2$ ,  $\eta\lambda_m(1 - \epsilon_v)V_2$ ,  $\eta\lambda_m(1 - \epsilon_w)W_2$ , masing-masing merupakan populasi perempuan pada usia diatas 26 tahun yang rentan terhadap virus HPV yang belum atau gagal divaksinasi pada dosis pertama, kedua dan ketiga tetapi telah melakukan hubungan intim dengan individu laki-laki maka dapat diasumsikan bahwa individu tersebut telah mendekati untuk menjadi individu

yang telah terkena infeksi virus HPV sehingga dapat dinotasikan  $\eta\lambda_m(1 - \epsilon_u)U_2 \approx \tau_{2.1}E_2$ ,  $\eta\lambda_m(1 - \epsilon_u)U_2 \approx \tau_{2.2}E_2$  dan  $\lambda_m(1 - \epsilon_u)U_2 \approx \tau_{2.3}E_2$  dimana  $\tau_{2.1}, \tau_{2.2}, \tau_{2.3}$  masing-masing adalah laju perkembangan individu yang rentan menjadi terjangkit virus . Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 F_i(X, t) &= \begin{pmatrix} \lambda_m S_2 + \tau_{2.1} E_2 + \tau_{2.2} E_2 + \tau_{2.3} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 F &= DF_i(X, t) = \begin{pmatrix} \tau_{2.1} + \tau_{2.2} + \tau_{2.3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 V_i(X, t) &= \begin{pmatrix} (\rho_2 + \mu_f) E_2 \\ (\sigma_2 + \mu_f) I_2 - \xi I_1 - \rho_2 E_2 \\ \eta \lambda_m S_2 + \mu_f S_2 - \xi S_1 \\ \eta(1 - \epsilon_u) \lambda_m U_2 + \mu_f U_2 - \xi U_1 \\ \eta(1 - \epsilon_v) \lambda_m V_2 + \mu_f V_2 - \xi V_1 \\ \eta(1 - \epsilon_w) \lambda_m W_2 + \mu_f W_2 - \xi W_1 \\ (\sigma_3 + \kappa + \mu_f) P - (1 - r) \sigma_2 I_2 \\ (\sigma_4 + \alpha + \mu_f) Q - \kappa P \\ (\gamma + \mu_f + \delta_f) C - \alpha Q \\ \mu_f R_c - \gamma C \\ \mu_f R_2 - \xi R_1 + r \sigma_2 I_2 + \sigma_3 P + \sigma_4 Q \end{pmatrix} \\
 V &= DV_i = \begin{bmatrix} \rho_2 + \mu_f & 0 \\ -\rho_2 & \sigma_2 + \mu_f \end{bmatrix} \\
 V^{-1} &= \frac{1}{(\rho_2 + \mu_f)(\sigma_2 + \mu_f)} \begin{bmatrix} \sigma_2 + \mu_f & 0 \\ \rho_2 & \rho_2 + \mu_f \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$V$  merupakan M-matriks non singular jika terdapat bilangan  $k$  dan matriks  $P$  sedemikian hingga  $\rho(P) < k$  yang memenuhi

$$V = kI - P$$

$$V = DV_i = (\mu_f) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\rho_2 & 0 \\ \rho_2 & -\sigma_2 \end{bmatrix} \quad \text{diperoleh } \rho(P) < \mu_f$$

atau  $\rho_2 < \sigma_2$  yang menunjukkan bahwa rate gejala virus HPV oleh perempuan dengan usia diatas 26 tahun mengalami penurunan karena adanya vaksinasi pada dosis pertama, kedua dan ketiga sehingga tidak menyebarkan virus ke kanker serviks dan

mengalami laju pemulihan untuk sembuh dari virus HPV yang meningkat karena adanya vaksinasi dengan dosis tertentu.

Jadi  $V$  merupakan matriks  $M$ -non singular dan bilangan reproduksi dapat di tentukan dari dari  $R_0 = \rho(FV^{-1})$  dimana  $\rho$  adalah bilangan spectral sehingga diperoleh

$$R_2 = \frac{\tau_{2.1} + \tau_{2.2} + \tau_{2.3}}{(\rho_2 + \mu_f)}$$

c) Model 3

Misalkan pada grup model 3 dapat dinyatakan dalam bentuk  $F_i, V_i$  yaitu  $\frac{dx}{dt} = f(X, t) = F_i(X, t) - V_i(X, t)$ , dengan  $F_i(X, t)$  merupakan matriks dengan elemen-elemennya berbentuk parameter dari individual yang baru terinfeksi pada kompartemen  $i$  dan berbentuk

$$F_i(X, t) = \begin{pmatrix} \lambda_f[S_m + (1 - \epsilon_u)U_m + (1 - \epsilon_v)V_m + (1 - \epsilon_w)W_m] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dan  $V_i(X, t)$  menyatakan matriks dengan elemen-elemen berbentuk parameter dan individual yang keluar dan masuk pada kompartemen  $i$  atau  $V_i(X, t) = V_i(X, t)^- - V_i(X, t)^+$

$$V_i(X, t) = \begin{pmatrix} (\rho_m + \mu_m)E_1 \\ (\sigma_m + \mu_m)I_m - \rho_m E_m \\ (\omega_u + \lambda_f + \mu_m)S_m - \pi_m(1 - \Phi_m) \\ (1 - \epsilon_u)\lambda_f U_m + (\omega_u + \mu_m)U_m - \pi_m\Phi_m - \omega_u S_m \\ (1 - \epsilon_v)\lambda_f V_m + (\omega_v + \mu_m)U_m - \omega_u U_m \\ (1 - \epsilon_w)\lambda_f W_m + \mu_m W_m - \psi_w V_m \\ \mu_m R_m - \sigma_m I_m \end{pmatrix}$$

Misalkan  $X_s = \{x \geq 0 | E_m, I_m, R_m = 0\}$  adalah himpunan dari semua keadaan yang bebas penyakit, maka:

1. Jika  $x \geq 0$  maka  $F_i, V_i^-, V_i^+ \geq 0$ .

$x \geq 0$  artinya populasi  $S_m, U_m, V_m, W_m$  ada dan apabila terjadi kontak dengan individual terinfeksi mengakibatkan terjadinya individual baru terinfeksi dan perubahan pada populasi. Jadi  $F_i, V_i^-, V_i^+$  dari model memenuhi.

2. Jika  $x \in X_s$  maka  $V_i^- = 0$  untuk  $x = 1, 2, 3, \dots, 7$ .  
Pada transmisi dinamis setiap kejadian infeksi populasi  $S_m, U_m, V_m, W_m$  sama dengan nol, jadi  $V_i^-$  dari model terpenuhi.
3.  $F_i = 0$  jika  $i > m$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ .  $m$  menyatakan banyaknya variabel keadaan dimana individual baru terinfeksi artinya populasi lain tidak terdapat individual baru terinfeksi.
4. Jika  $x \in X_s$  maka  $F_i(x) = 0$  dan  $V_i^+(x) = 0$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, 7$ .  
 $x \in X_s$  elemen-elemen pada himpunan susceptible berarti  $F_i(x) \neq 0$ , untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, 5$  dan berdasarkan asumsi (2) diperoleh  $V_i^- = 0$ . Jadi dapat diperoleh  $F_i(x) = 0$  dan  $V_i^+ = 0$  untuk variabel keadaan  $E_m$  dan  $I_m$ .
5. Jika  $F(x) = 0$  maka matriks Jacobian  $D_f(X_0)$  dengan  $X_0$  sebagai titik kesetimbangan mempunyai bagian *real negative*.  
 $D_f(X_0)$  merupakan hasil linearisasi dari persamaan (5).

Definisikan matriks  $F = \left( \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} (X_0) \right)$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$

Dengan menggunakan asumsi (3) dan (4) yaitu

$F_i = 0$ , jika  $i > m$ ,  $x \in X_s$  maka  $F_i = 0$  dan  $V_i^+ = 0$  untuk  $i = 1, 2$  dapat diperoleh  $\left( \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} (X_0) \right)$  untuk  $i > 2$  atau  $j > 2$  dan dapat

dikembangkan menjadi:

$F(X_0) \neq 0$  untuk  $1 \leq i, j \leq 2$ ,

$F(X_0) = 0$  untuk  $i > 2$  atau  $j > 2$ ,

$F(X_0) = 0$  untuk  $i < 2$  atau  $j < 2$ .

Definisikan matriks  $V = \left( \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} (X_0) \right)$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  dengan

menggunakan asumsi (2) dan (4) dapat diperoleh :  $V(X_0) = 0$  untuk  $1 \leq i$  dan  $j > 2$  dan dapat dikembangkan menjadi  $V(X_0) \neq 0$  untuk  $i > 2$  atau  $j \leq 2$  dan untuk  $i < 2$  atau  $j < 2$ .

$V(X_0) \neq 0$ , dengan asumsi (5) maka semua nilai eigen dari  $D_f(X_0)$  mempunyai bagian *real negative*.

Berdasarkan asumsi (5) maka diperoleh

$$F_i(X, t) = \begin{pmatrix} \lambda_f[S_m + (1 - \epsilon_u)U_m + (1 - \epsilon_v)V_m + (1 - \epsilon_w)W_m] \\ 0 \\ \lambda_f(1 - \epsilon_u)U_m, \lambda_f(1 - \epsilon_v)V_m, \lambda_f(1 - \epsilon_w)W_m \end{pmatrix}$$
 masing-masing merupakan populasi laki-laki yang rentan terhadap virus HPV yang belum atau gagal divaksinasi pada dosis pertama, kedua dan ketiga tetapi telah melakukan hubungan intim dengan individu perempuan maka dapat diasumsikan bahwa individu tersebut telah mendekati untuk menjadi individu yang telah terkena infeksi virus HPV sehingga dapat dinotasikan  $\lambda_f(1 - \epsilon_u)U_m \approx \tau_{m.1}E_m$ ,  $\lambda_f(1 - \epsilon_u)U_m \approx \tau_{m.2}E_m$  dan  $\lambda_f(1 - \epsilon_u)U_m \approx \tau_{m.3}E_m$  dimana  $\tau_{m.1}, \tau_{m.2}, \tau_{m.3}$  masing-masing adalah laju perkembangan individu yang rentan menjadi terjangkit virus. Sehingga didapatkan

$$F = DF_i(X, t) = \begin{pmatrix} \tau_{m.1} + \tau_{m.2} + \tau_{m.3} & 0 \\ 0 & 0 \\ (\rho_m + \mu_m)E_1 & \\ (\sigma_m + \mu_m)I_m - \rho_m E_m & \\ (\omega_u + \lambda_f + \mu_m)S_m - \pi_m(1 - \Phi_m) & \\ (1 - \epsilon_u)\lambda_f U_m + (\omega_u + \mu_m)U_m - \pi_m \Phi_m - \omega_u S_m & \\ (1 - \epsilon_v)\lambda_f V_m + (\omega_v + \mu_m)U_m - \omega_u U_m & \\ (1 - \epsilon_w)\lambda_f W_m + \mu_m W_m - \psi_w V_m & \\ \mu_m R_m - \sigma_m I_m & \end{pmatrix}$$

$$V = DV_i = \begin{bmatrix} \rho_m + \mu_m & 0 \\ -\rho_1 & \sigma_m + \mu_m \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{(\rho_m + \mu_m)(\sigma_m + \mu_m)} \begin{bmatrix} \sigma_m + \mu_m & 0 \\ \rho_m & \rho_m + \mu_m \end{bmatrix}$$

$V$  merupakan M-matriks non singular jika terdapat bilangan  $k$  dan matriks  $P$  sedemikian hingga  $\rho(P) < k$  yang memenuhi

$$V = kI - P$$

$$V = DV_i = (\mu_m) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\rho_m & 0 \\ \rho_m & -\sigma_m \end{bmatrix}$$
 diperoleh  $\rho(P) < \mu_m$  atau  $\rho_m < \sigma_m$  yang menunjukkan bahwa laju gejala virus HPV

oleh laki-laki mengalami penurunan karena adanya vaksinasi pada dosis pertama, kedua dan ketiga dan mengalami laju pemulihan untuk sembuh dari virus HPV yang meningkat karena vaksinasi. Jadi  $V$  merupakan matriks  $M$ -non singular dan bilangan reproduksi dapat di tentukan dari  $R_0 = \rho(FV^{-1})$  dimana  $\rho$  adalah bilangan *spectral* sehingga diperoleh

$$R_m = \frac{\tau_{m.1} + \tau_{m.2} + \tau_{m.3}}{(\rho_m + \mu_m)}$$

### **Teorema 4.3.2**

Jika  $x_0$  adalah titik bebas penyakit pada model maka  $x_0$  adalah stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$ , tetapi tidak stabil jika  $R_0 > 1$ .

### **Bukti:**

Jumlah ambang batas  $R_0$  masing masing model adalah bilangan reproduksi dari infeksi HPV. Rata-rata bilangan yang bertindak dari infeksi HPV secara umum dari salah satu individu terinfeksi dari populasi yang telah divaksinasi. Kuantitas  $R_0$  merupakan sebuah hasil ukur nilai rata-rata dari masing-masing bilangan reproduksi laki-laki dan perempuan. Bilangan reproduksi pada perempuan ( $R_f$ ) adalah penjumlahan dari bilangan reproduksi perempuan dengan usia dibawah 26 tahun ( $R_1$ ) dan bilangan reproduksi perempuan dengan usia diatas 26 tahun ( $R_2$ ). Ketika  $R_m$  bertindak sebagai rata-rata bilangan dari infeksi HPV baru pada populasi laki-laki yang umumnya dari individu perempuan yang terinfeksi yang di perkenalkan dalam populasi laki-laki yang rentan maka  $R_f$  bertindak sebagai rata-rata bilangan dari infeksi HPV baru pada populasi perempuan yang umumnya dari individu laki-laki yang terinfeksi yang di perkenalkan dalam populasi perempuan yang rentan ( $R_1$  bertindak sebagai bilangan rata-rata dari infeksi HPV baru pada populasi perempuan dengan usia dibawah 26 tahun; ketika  $R_2$  bertindak sebagai bilangan rata-rata dari infeksi HPV baru pada populasi perempuan dengan usia diatas 26 tahun. Sehingga bilangan reproduksi secara keseluruhan dari model sistem adalah

$$R_0 = R_f R_m$$

Dengan

$$R_m = \frac{\tau_{m.1} + \tau_{m.2} + \tau_{m.3}}{(\rho_m + \mu_m)} \text{ dan } R_f = R_1 + R_2$$

$$\text{Dimana } R_1 = \frac{\tau_{1.1} + \tau_{1.2} + \tau_{1.3}}{(\rho_1 + \xi + \mu_f)} \text{ dan } R_2 = \frac{\tau_{2.1} + \tau_{2.2} + \tau_{2.3}}{(\rho_2 + \mu_f)}$$

$$\text{Sehingga } R_0 = \left( \frac{\tau_{1.1} + \tau_{1.2} + \tau_{1.3}}{(\rho_1 + \xi + \mu_f)} + \frac{\tau_{2.1} + \tau_{2.2} + \tau_{2.3}}{(\rho_2 + \mu_f)} \right) \frac{\tau_{m.1} + \tau_{m.2} + \tau_{m.3}}{(\rho_m + \mu_m)}$$

Berdasarkan nilai bilangan reproduksi dipengaruhi oleh parameter-parameter  $\rho$ ,  $\xi$ ,  $\mu$  dan  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_2$ . Padatitik kesetimbangan bebas penyakit tidak ada virus yang menyerang sehingga tidak ada gejala yang menyebar atau menghilang dari populasi. Hal ini terjadi ketika  $R_0 < 1$ . Jadi dapat dikatakan jika  $x_0$  adalah titik bebas penyakit pada model maka  $x_0$  adalah stabil asimtotik lokal.

#### 4.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Setelah didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit ( $\varepsilon^0$ ) dan titik kesetimbangan endemik ( $\varepsilon^*$ ) selanjutnya akan di analisa kestabilan lokal dari masing-masing titik kesetimbangan. Karena pada persamaan model dapat terlihat bahwa persamaan tersebut tak linier, maka untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan nilai karakteristik ( $\lambda$ ) maka pada persamaan masing-masing model 1, 2 dan 3 harus di linearkan. Dari hasil pendekatan linier diperoleh matriks jacobian dari masing-masing model yaitu:

a) Matriks jacobian pada model 1 yaitu

$$J = \begin{pmatrix} -(k_6 + k_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(k_7 + k_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_v & -(k_8 + k_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_w & -(k_9 + k_1) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_m & k_7 & k_8 & k_9 & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & -k_1 \end{pmatrix}$$

dimana  $k_1 = (\xi + \mu_f)$ ,  $k_2 = \psi_v + \xi + \mu_f$ ,  $k_3 = \psi_w + \xi + \mu_f$ ,

$k_4 = (\rho_1 + \xi + \mu_f)$ ,  $k_5 = (\sigma_1 + \xi + \mu_f)$ ,  $k_6 = \psi_u + \lambda_m$ ,

$k_7 = (1 - \varepsilon_u)\lambda_m$ ,  $k_8 = (1 - \varepsilon_v)\lambda_m$ ,  $k_9 = (1 - \varepsilon_w)\lambda_m$ .



b) Matriks jacobian model 2 yaitu

$$J = \begin{pmatrix} -k_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta\lambda_m & k_{23} & k_{22} & k_{21} & -k_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & -k_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{19} & -k_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & -k_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -k_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r\sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & 0 & 0 & -\mu_f \end{pmatrix}$$

dimana  $k_{10} = \eta\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{11} = \eta(1 - \epsilon_u)\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{12} = \eta(1 - \epsilon_v)\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{13} = \eta(1 - \epsilon_w)\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{14} = \rho_2 + \mu_f$ ,  $k_{15} = r\sigma_2 + \mu_f$ ,  $k_{16} = (\sigma_3 + \kappa + \mu_f)$ ,  $k_{17} = (\sigma_4 + \alpha + \mu_f)$ ,  $k_{18} = (\gamma + \delta_f + \mu_f)$ ,  $k_{19} = (1 - r)\sigma_2$ ,  $k_{20} = \eta(1 - \epsilon_u)\lambda_m$ ,  $k_{21} = \eta(1 - \epsilon_v)\lambda_m$ , dan  $k_{22} = \eta(1 - \epsilon_w)\lambda_m$ .

c) Matriks jacobian model 3 yaitu

$$J = \begin{pmatrix} -k_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_u & -k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_v & -k_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_w & -k_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_m & k_{31} & k_{30} & k_{29} & -k_{27} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m & -k_{28} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_m & -\mu_m & 0 \end{pmatrix}$$

dimana  $k_{23} = (\omega_u + \lambda_f + \mu_m)$ ,  $k_{24} = ((1 - \epsilon_u)\lambda_f + \omega_v + \mu_m)$ ,  $k_{25} = ((1 - \epsilon_v)\lambda_f + \omega_w + \mu_m)$ ,  $k_{26} = ((1 - \epsilon_w)\lambda_f - \mu_m)$ ,  $k_{27} = (\rho_m + \mu_m)$ ,  $k_{28} = (\sigma_m + \mu_m)$ ,  $k_{29} = (1 - \epsilon_w)\lambda_f$ ,  $k_{30} = (1 - \epsilon_v)\lambda_f$  dan  $k_{31} = (1 - \epsilon_w)\lambda_f$ .

#### 4.4.1 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dari nilai *eigen* matriks jacobian dari masing-masing model yaitu:

a) Model 1

$$J(\epsilon_1^0) = \begin{pmatrix} -(k_6 + k_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(k_7 + k_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_v & -(k_8 + k_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_w & -(k_9 + k_1) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_m & k_7 & k_8 & k_9 & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 - k_1 \end{pmatrix}$$

dimana  $k_1 = (\xi + \mu_f)$ ,  $k_2 = \psi_v + \xi + \mu_f$ ,  $k_3 = \psi_w + \xi + \mu_f$ ,  
 $k_4 = (\rho_1 + \xi + \mu_f)$ ,  $k_5 = (\sigma_1 + \xi + \mu_f)$ ,  $k_6 = \psi_u + \lambda_m$ ,  $k_7 =$   
 $(1 - \epsilon_u)\lambda_m$ ,  $k_8 = (1 - \epsilon_v)\lambda_m$ ,  $k_9 = (1 - \epsilon_w)\lambda_m$ .

Untuk mendapatkan nilai eigen dari persamaan karakteristiknya  
 $|J(\epsilon_1^*) - \lambda I| = 0$  diperoleh  $(-(k_6 + k_1) - \lambda)(-(k_7 + k_2) - \lambda)$   
 $(-(k_8 + k_3) - \lambda)(-(k_9 + k_1) - \lambda)(-k_4 - \lambda)(-k_5 - \lambda)$   
 $(-k_1 - \lambda) = 0$

Sehingga didapatkan nilai eigen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -(k_6 + k_1) = -(\psi_u + \lambda_m + \xi + \mu_f) \\ \lambda_2 &= -(k_7 + k_2) = -(1 - \epsilon_u)\lambda_m - (\psi_v + \xi + \mu_f) \\ \lambda_3 &= -(k_8 + k_3) = -(1 - \epsilon_v)\lambda_m - (\psi_w + \xi + \mu_f) \\ \lambda_4 &= -(k_9 + k_1) = -(1 - \epsilon_w)\lambda_m - (\xi + \mu_f) \\ \lambda_5 &= -k_4 = -(\rho_1 + \xi + \mu_f) \\ \lambda_6 &= -k_5 = -(\sigma_1 + \xi + \mu_f) \\ \lambda_7 &= -k_1 = -(\xi + \mu_f)\end{aligned}$$

Didapatkan bahwa nilai *eigen*  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 < 0$ ,  
 $\lambda_5 < 0$ ,  $\lambda_6 < 0$  dan  $\lambda_7 < 0$  maka berdasarkan sifat stabilitas titik  
kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik terhadap model  
penyebaran. Artinya ketika nilai *eigen*  $\lambda_1 < 0$  maka jumlah laju  
dari vaksinasi perempuan dengan dosis pertama, laju hubungan  
seksual dengan laki-laki, laju kematangan usia dan laju kematian  
alami mengalami penurunan. Hal ini juga terlihat ketika nilai  
*eigen*  $\lambda_2 < 0$  dimana kegagalan vaksinasi yang dipengaruhi oleh  
laju hubungan seksual mengalami penurunan dan juga jumlah dari  
laju pemberian vaksin perempuan dengan dosis kedua, laju  
perpindahan usia dan laju kematian alami yang semakin menurun.  
Saat  $\lambda_3 < 0$  menunjukkan bahwa adanya penurunan dari  
kegagalan vaksinasi yang dipengaruhi oleh laju hubungan seksual  
dan juga penurunan pada laju vaksinasi dosis ketiga, perpindahan  
usia dan juga menurunnya laju kematian alami.

Pada saat  $\lambda_4 < 0$  menunjukkan bahwa laju kegagalan vaksinasi  
terhadap laju hubungan seksual mengalami penurunan dan laju  
kematangan usia serta laju kematian alami mengalami penurunan.

Ketika  $\lambda_5 < 0$  maka pada laju gejala yang muncul, laju kematangan usia dan laju kematian alami akan mengalami penurunan. Saat  $\lambda_6 < 0$  laju pemulihan virus, laju kematangan usia dan kematian alami mengalami penurunan sedangkan ketika  $\lambda_7 < 0$  menunjukkan adanya penurunan laju kematangan usia dan laju kematian alami.

b) Model 2

$$J(\varepsilon_2^0) = \begin{pmatrix} -k_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta\lambda_m & k_{23} & k_{22} & k_{21} & -k_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & -k_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{19} & -k_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & -k_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -k_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r\sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & 0 & 0 & -\mu_f \end{pmatrix}$$

Dimana  $k_{10} = \eta\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{11} = \eta(1 - \varepsilon_u)\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{12} = \eta(1 - \varepsilon_v)\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{13} = \eta(1 - \varepsilon_w)\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{14} = \rho_2 + \mu_f$ ,  $k_{15} = r\sigma_2 + \mu_f$ ,  $k_{16} = (\sigma_3 + \kappa + \mu_f)$ ,  $k_{17} = (\sigma_4 + \alpha + \mu_f)$ ,  $k_{18} = (\gamma + \delta_f + \mu_f)$ ,  $k_{19} = (1 - r)\sigma_2$ ,  $k_{20} = \eta(1 - \varepsilon_u)\lambda_m$ ,  $k_{21} = \eta(1 - \varepsilon_v)\lambda_m$ , dan  $k_{22} = \eta(1 - \varepsilon_w)\lambda_m$ .

Untuk mendapatkan nilai eigen dari persamaan karakteristiknya  $|J(\varepsilon_1^*) - \lambda I| = 0$  diperoleh  $(-k_{10} - \lambda)(-k_{11} - \lambda)(-k_{12} - \lambda)(-k_{13} - \lambda)(-k_{14} - \lambda)(-k_{15} - \lambda)(-k_{16} - \lambda)(-k_{17} - \lambda)(-k_{18} - \lambda)(-\mu_f - \lambda)(-\mu_f - \lambda) = 0$

Sehingga didapatkan nilai eigen adalah sebagai berikut;

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -k_{10} = -(\eta\lambda_m + \mu_f) \\ \lambda_2 &= -k_{11} = -\eta(1 - \varepsilon_u)\lambda_m - \mu_f \\ \lambda_3 &= -k_{12} = -\eta(1 - \varepsilon_v)\lambda_m - \mu_f \\ \lambda_4 &= -k_{13} = -\eta(1 - \varepsilon_w)\lambda_m - \mu_f \\ \lambda_5 &= -k_{14} = -(\rho_2 + \mu_f) \\ \lambda_6 &= -k_{15} = -(r\sigma_2 + \mu_f) \\ \lambda_7 &= -k_{16} = -(\sigma_3 + \kappa + \mu_f) \\ \lambda_8 &= -k_{17} = -(\sigma_4 + \alpha + \mu_f) \end{aligned}$$

$$\lambda_9 = -k_{18} = -(\gamma + \delta_f + \mu_f),$$

$$\lambda_{10} = -\mu_f$$

$$\lambda_{11} = -\mu_f$$

Didapatkan bahwa nilai eigen  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 < 0$ ,  $\lambda_5 < 0$ ,  $\lambda_6 < 0$ ,  $\lambda_7 < 0$ ,  $\lambda_8 < 0$ ,  $\lambda_9 < 0$ ,  $\lambda_{10} < 0$ , dan  $\lambda_{11} < 0$  maka berdasarkan sifat stabilitas titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik. Hal ini dapat diartikan bahwa saat  $\lambda_1 < 0$  laju hubungan seksual terhadap laki-laki dan kematian alami mengalami penurunan. Ketika  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 < 0$  artinya laju hubungan seksual terhadap laki-laki yang disertai dengan laju kegagalan vaksinasi dosis pertama, kedua, ketiga dan kematian alami mengalami penurunan pada usia diatas 26 tahun.

Pada saat  $\lambda_5 < 0$  menunjukkan bahwa laju gejala pada usia diatas 26 tahun dan laju kematian alami mengalami penurunan. Sedangkan ketika  $\lambda_6 < 0$  menunjukkan bahwa laju pemulihan usia diatas 26 tahun dengan fraksi perempuan yang pulih dan kematian alami mengalami penurunan. Ketika  $\lambda_7 < 0$  menunjukkan bahwa laju pemulihan dari infeksi persistensi, laju perkembangan infeksi HPV untuk lesi prakanker mengalami serta kematian alami mengalami penurunan. Sedangkan untuk  $\lambda_8 < 0$  mengalami penurunan pada laju pemulihan dari infeksi neoplasia serviks serta kematian alami. Saat  $\lambda_9 < 0$  juga mengalami penurunan pada laju pemulihan perempuan dari kanker serviks dan kematian alami. Sedangkan  $\lambda_{10} < 0$  dan  $\lambda_{11} < 0$  menunjukkan bahwa laju kematian alami pada perempuan usia diatas 26 tahun menurun.

c) Model 3

$$J(\varepsilon_m^0) = \begin{pmatrix} -k_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_u & -k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_v & -k_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_w & -k_{26} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_m & k_{31} & k_{30} & k_{29} & -k_{27} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m & -k_{28} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_m & -\mu_m \end{pmatrix}$$

Dimana  $k_{23} = (\omega_u + \lambda_f + \mu_m)$ ,  $k_{24} = ((1 - \epsilon_u)\lambda_f + \omega_v + \mu_m)$ ,  
 $k_{25} = ((1 - \epsilon_v)\lambda_f + \omega_w + \mu_m)$ ,  $k_{26} = ((1 - \epsilon_w)\lambda_f - \mu_m)$ ,  
 $k_{27} = (\rho_m + \mu_m)$ ,  $k_{28} = (\sigma_m + \mu_m)$ ,  $k_{29} = (1 - \epsilon_w)\lambda_f$ ,  $k_{30} =$   
 $(1 - \epsilon_v)\lambda_f$  dan  $k_{31} = (1 - \epsilon_w)\lambda_f$ .

Untuk mendapatkan nilai eigen dari persamaan karakteristiknya  $|J(\mathcal{E}_m^0) - \lambda I| = 0$  diperoleh  $(-k_{23} - \lambda)(-k_{24} - \lambda)(-k_{25} - \lambda)$   
 $(-k_{26} - \lambda)(-k_{27} - \lambda)(-k_{28} - \lambda)(-\mu_m - \lambda) = 0$

Sehingga didapatkan nilai eigen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -k_{23} = -(\omega_u + \lambda_f + \mu_m) \\ \lambda_2 &= -k_{24} = -((1 - \epsilon_u)\lambda_f + \omega_v + \mu_m) \\ \lambda_3 &= -k_{25} = -((1 - \epsilon_v)\lambda_f + \omega_w + \mu_m) \\ \lambda_4 &= -k_{26} = -(1 - \epsilon_w)\lambda_f - \mu_m \\ \lambda_5 &= -k_{27} = -(\rho_m + \mu_m) \\ \lambda_6 &= -k_{28} = -(\sigma_m + \mu_m) \\ \lambda_7 &= -\mu_m\end{aligned}$$

Didapatkan bahwa nilai eigen  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 < 0$ ,  $\lambda_5 < 0$ ,  $\lambda_6 < 0$  dan  $\lambda_7 < 0$  maka berdasarkan sifat stabilitas titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik. Artinya saat  $\lambda_1 < 0$  menunjukkan bahwa laju vaksinasi dengan dosis pertama dengan hubungan seksual dan laju kematian alami pada laki-laki mengalami penurunan. Sedangkan  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$  menunjukkan bahwa laju kegagalan vaksinasi dengan dosis kedua, ketiga dan kematian alami pada laki-laki mengalami penurunan pula.

Pada saat  $\lambda_4 < 0$  menunjukkan bahwa laju kegagalan vaksinasi dosis ketiga dengan adanya hubungan seksual dan laju kematian alami mengalami penurunan. Sama halnya  $\lambda_5 < 0$  yang menunjukkan bahwa laju gejala dan kematian alami pada populasi menurun. Sedangkan ketika  $\lambda_6 < 0$  menunjukkan bahwa laju pemulihan dan kematian mengalami penurunan sedangkan penurunan akibat kematian alami juga dialami pada saat  $\lambda_7 < 0$ .

#### 4.4.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Kestabilan local pada titik kesetimbangan endemik diperoleh dari nilai eigen matriks jacobianya pada masing-masing sub grup yaitu sebagai berikut:

a) Model 1

$$J(\varepsilon_1^*) = \begin{pmatrix} -(k_6 + k_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(k_7 + k_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_v & -(k_8 + k_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_w & -(k_9 + k_1) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_m & k_7 & k_8 & k_9 & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & -k_1 \end{pmatrix}$$

dimana  $k_1 = (\xi + \mu_f)$ ,  $k_2 = \psi_v + \xi + \mu_f$ ,  $k_3 = \psi_w + \xi + \mu_f$ ,  $k_4 = (\rho_1 + \xi + \mu_f)$ ,  $k_5 = (\sigma_1 + \xi + \mu_f)$ ,  $k_6 = \psi_u + \lambda_m$ ,  $k_7 = (1 - \epsilon_u)\lambda_m$ ,  $k_8 = (1 - \epsilon_v)\lambda_m$ ,  $k_9 = (1 - \epsilon_w)\lambda_m$ .

Untuk mendapatkan nilai eigen dari persamaan karakteristiknya  $|J(\varepsilon_1^*) - \lambda I| = 0$  diperoleh  $(-(k_6 + k_1) - \lambda)(-(k_7 + k_2) - \lambda)(-(k_8 + k_3) - \lambda)(-(k_9 + k_1) - \lambda)(-k_4 - \lambda)(-k_5 - \lambda)(-k_1 - \lambda) = 0$

Sehingga didapatkan nilai eigen;

$$\lambda_1 = -(k_6 + k_1) = -(\psi_u + \lambda_m + \xi + \mu_f)$$

$$\lambda_2 = -(k_7 + k_2) = -(1 - \epsilon_u)\lambda_m - (\psi_v + \xi + \mu_f)$$

$$\lambda_3 = -(k_8 + k_3) = -(1 - \epsilon_v)\lambda_m - (\psi_w + \xi + \mu_f)$$

$$\lambda_4 = -(k_9 + k_1) = -(1 - \epsilon_w)\lambda_m - (\xi + \mu_f),$$

$$\lambda_5 = -k_4 = -(\rho_1 + \xi + \mu_f)$$

$$\lambda_6 = -k_5 = -(\sigma_1 + \xi + \mu_f)$$

$$\lambda_7 = -k_1 = -(\xi + \mu_f)$$

Didapatkan bahwa nilai eigen  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 < 0$ ,  $\lambda_5 < 0$ ,  $\lambda_6 < 0$  dan  $\lambda_7 < 0$  maka berdasarkan sifat stabilitas titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik. Artinya saat  $\lambda_5 < 0$  laju pemberian vaksin pertama pada perempuan mengalami penurunan, hal ini di ikuti dengan laju hubungan seksual terhadap laki-laki dan juga perpindahan usia serta kematian alami yang menurun. Ketika  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$  menunjukkan bahwa kegagalan vaksinasi dengan adanya hubungan seksual, laju vaksinasi pada dosis

pertama, kedua, laju perubahan usia dan laju kematian alami mengalami penurunan. Sedangkan untuk  $\lambda_4 < 0$  menunjukkan bahwa laju kegagalan vaksinasi dosis ketiga, laju perubahan usia dan kematian alami mengalami penurunan pula. Hal ini juga terjadi pada  $\lambda_5 < 0$  dimana laju gejala virus pada usia dibawah 26 tahun, laju perubahan usia dan laju kematian alami mengalami penurunan. Selanjutnya  $\lambda_6 < 0$  yang artinya laju pemulihan pada usia dibawah 26 tahun, laju perubahan usia, dan laju kematian alami mengalami penurunan. Sedangkan pada saat  $\lambda_7 < 0$  menunjukkan bahwa perubahan usia dan kematian alami mengalami penurunan pula.

b) Model 2

$$J(\varepsilon_2^*) = \begin{pmatrix} -k_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta\lambda_m & k_{23} & k_{22} & k_{21} & -k_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & -k_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{19} & -k_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & -k_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -k_{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r\sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & -\mu_f \end{pmatrix}$$

Dimana  $k_{10} = \eta\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{11} = \eta(1 - \varepsilon_u)\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{12} = \eta(1 - \varepsilon_v)\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{13} = \eta(1 - \varepsilon_w)\lambda_m + \mu_f$ ,  $k_{14} = \rho_2 + \mu_f$ ,  $k_{15} = r\sigma_2 + \mu_f$ ,  $k_{16} = (\sigma_3 + \kappa + \mu_f)$ ,  $k_{17} = (\sigma_4 + \alpha + \mu_f)$ ,  $k_{18} = (\gamma + \delta_f + \mu_f)$ ,  $k_{19} = (1 - r)\sigma_2$ ,  $k_{20} = \eta(1 - \varepsilon_u)\lambda_m$ ,  $k_{21} = \eta(1 - \varepsilon_v)\lambda_m$ , dan  $k_{22} = \eta(1 - \varepsilon_w)\lambda_m$ .

Untuk mendapatkan nilai eigen dari persamaan karakteristiknya  $|J(\varepsilon_1^*) - \lambda I| = 0$  diperoleh  $(-k_{10} - \lambda)(-k_{11} - \lambda)(-k_{12} - \lambda)(-k_{13} - \lambda)(-k_{14} - \lambda)(-k_{15} - \lambda)(-k_{16} - \lambda)(-k_{17} - \lambda)(-k_{18} - \lambda)(-\mu_f - \lambda)(-\mu_f - \lambda) = 0$

Sehingga didapatkan nilai eigen adalah sebagai berikut;

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -k_{10} = -(\eta\lambda_m + \mu_f) \\ \lambda_2 &= -k_{11} = -\eta(1 - \varepsilon_u)\lambda_m - \mu_f \\ \lambda_3 &= -k_{12} = -\eta(1 - \varepsilon_v)\lambda_m - \mu_f \\ \lambda_4 &= -k_{13} = -\eta(1 - \varepsilon_w)\lambda_m - \mu_f \end{aligned}$$

$$\lambda_5 = -k_{14} = -(\rho_2 + \mu_f)$$

$$\lambda_6 = -k_{15} = -(r\sigma_2 + \mu_f)$$

$$\lambda_7 = -k_{16} = -(\sigma_3 + \kappa + \mu_f)$$

$$\lambda_8 = -k_{17} = -(\sigma_4 + \alpha + \mu_f)$$

$$\lambda_9 = -k_{18} = -(\gamma + \delta_f + \mu_f),$$

$$\lambda_{10} = -\mu_f$$

$$\lambda_{11} = -\mu_f$$

Didapatkan bahwa nilai eigen  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 < 0$ ,  $\lambda_5 < 0$ ,  $\lambda_6 < 0$ ,  $\lambda_7 < 0$ ,  $\lambda_8 < 0$ ,  $\lambda_9 < 0$ ,  $\lambda_{10} < 0$ , dan  $\lambda_{11} < 0$  maka berdasarkan sifat stabilitas titik kesetimbangan endemic asimtotik. Artinya dalam keadaan yang terdapat penyebaran virus dimana ketika  $\lambda_1 < 0$  maka laju hubungan seksual dan laju kematian alami mengalami penurunan. Sedangkan ketika  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 < 0$  menunjukkan bahwa laju kegagalan vaksinasi dosis pertama, kedua, ketiga dengan adanya hubungan seksual dan kematian alami mengalami penurunan pula.

Pada saat  $\lambda_5 < 0$  menunjukkan bahwa laju gejala dan kematian alami menurun. Hal ini di ikuti dengan  $\lambda_6 < 0$  yang menunjukkan laju pemulihan dengan fraksi pemulihan dan laju kematian alami mengalami penurunan pula. Sedangkan pada saat  $\lambda_7 < 0$  laju pemulihan dari lesi prakanker dan kematian alami mengalami penurunan pula. Ketika  $\lambda_8 < 0$  maka dapat diartikan bahwa laju pemulihan perempuan dari infeksi neoplasia serviks dan kematian alami mengalami penurunan. Hal ini juga terjadi saat  $\lambda_9 < 0$  dimana laju pemulihan perempuan dari kanker, laju kematian akibat kanker serviks dan laju kematian alami mengalami penurunan. Sedangkan pada saat  $\lambda_{10} < 0$ ,  $\lambda_{11} < 0$  menunjukkan bahwa laju kematian akan mengalami penurunan

c) Model 3

$$J(\varepsilon_m^*) = \begin{pmatrix} -k_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_u & -k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_v & -k_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_w & -k_{26} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_m & k_{31} & k_{30} & k_{29} & -k_{27} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m & -k_{28} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_m & -\mu_m \end{pmatrix}$$



Dimana;  $k_{23} = (\omega_u + \lambda_f + \mu_m)$ ,  $k_{24} = ((1 - \epsilon_u)\lambda_f + \omega_v + \mu_m)$ ,  
 $k_{25} = ((1 - \epsilon_v)\lambda_f + \omega_w + \mu_m)$ ,  $k_{26} = ((1 - \epsilon_w)\lambda_f - \mu_m)$ ,  
 $k_{27} = (\rho_m + \mu_m)$ ,  $k_{28} = (\sigma_m + \mu_m)$ ,  $k_{29} = (1 - \epsilon_w)\lambda_f$ ,  $k_{30} =$   
 $(1 - \epsilon_v)\lambda_f$  dan  $k_{31} = (1 - \epsilon_w)\lambda_f$ .

Untuk mendapatkan nilai eigen dari persamaan karakteristiknya  $|J(\mathcal{E}_m^0) - \lambda I| = 0$  diperoleh  $(-k_{23} - \lambda)(-k_{24} - \lambda)(-k_{25} - \lambda)$   
 $(-k_{26} - \lambda)(-k_{27} - \lambda)(-k_{28} - \lambda)(-\mu_m - \lambda) = 0$

Sehingga didapatkan nilai eigen :

$$\lambda_1 = -k_{23} = -(\omega_u + \lambda_f + \mu_m)$$

$$\lambda_2 = -k_{24} = -((1 - \epsilon_u)\lambda_f + \omega_v + \mu_m)$$

$$\lambda_3 = -k_{25} = -((1 - \epsilon_v)\lambda_f + \omega_w + \mu_m)$$

$$\lambda_4 = -k_{26} = -(1 - \epsilon_w)\lambda_f - \mu_m$$

$$\lambda_5 = -k_{27} = -(\rho_m + \mu_m)$$

$$\lambda_6 = -k_{28} = -(\sigma_m + \mu_m)$$

$$\lambda_7 = -\mu_m$$

Didapatkan bahwa nilai eigen  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 < 0$ ,  
 $\lambda_5 < 0$ ,  $\lambda_6 < 0$  dan  $\lambda_7 < 0$  maka berdasarkan sifat stabilitas titik  
kesetimbangan endemik stabil asimtotik. Artinya saat  $\lambda_1 < 0$  laju  
vaksinasi perempuan dengan dosis pertama menurun, di ikuti  
dengan laju hubungan seksual dengan perempuan dan kematian  
alami yang menurun pula. Hal ini terjadi juga saat  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$   
masing-masing menunjukkan kegagalan vaksinasi dosis pertama,  
kedua dengan adanya hubungan seksual dengan perempuan, laju  
pemberian vaksin dosis kedua, ketiga dan kematian alami yang  
mengalami penurunan. Sedangkan  $\lambda_4 < 0$  dapat diartikan bahwa  
laju kegagalan vaksinasi dosis ketiga dengan laju hubungan  
seksual dan kematian alami mengalami penurunan pula.  $\lambda_5 < 0$ ,  
 $\lambda_6 < 0$  masing-masing menunjukkan bahwa laju gejala virus,  
laju pemulihan virus dan kematian alami mengalami penurunan.  
Hal ini sama dengan saat  $\lambda_7 < 0$  dimana laju kematian alami  
mengalami penurunan pula.

## 4.5 Simulasi Numerik

### 4.5.1 Penyelesain Numerik

Metode Runge-Kutta Orde 4 (RK4) yang merupakan salah satu metode numeric yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang menyangkut nilai awal dengan ukuran langkah waktu yang bervariasi. Pada penelitian in penyelesaian numerik dilakukan berdasarkan model sistem. Misalnya diberikan persamaan diferensial pada model (1), (2) dan (3).

a) Model 1

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= a(t, S_1, E_1, U_1, V_1, W_1, E_1, I_1, R_1) \\ &\equiv \pi_f(1 - \phi_f) - \psi_u S_1 - \lambda_m S_1 - (\xi + \mu_f) S_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dU_1}{dt} &= b(t, S_1, E_1, U_1, V_1, W_1, E_1, I_1, R_1) \\ &\equiv \pi_f \phi_f + \psi_u S_1 - (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_1 - (\psi_v + \xi + \mu_f) U_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dV_1}{dt} &= c(t, S_1, E_1, U_1, V_1, W_1, E_1, I_1, R_1) \\ &\equiv \psi_v U_1 - (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_1 - (\psi_w + \xi + \mu_f) V_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dW_1}{dt} &= d(t, S_1, E_1, U_1, V_1, W_1, E_1, I_1, R_1) \\ &\equiv \psi_w W_1 - (1 - \epsilon_w) \lambda_m W_1 - (\xi + \mu_f) W_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt} &= e(t, S_1, E_1, U_1, V_1, W_1, E_1, I_1, R_1) \\ &\equiv \lambda_m [S_1 + (1 - \epsilon_u) U_1 + (1 - \epsilon_v) V_1 + (1 - \epsilon_w) W_1] - (\rho_1 \\ &\quad + \xi + \mu_f) E_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= f(t, S_1, E_1, U_1, V_1, W_1, E_1, I_1, R_1) \\ &\equiv \rho_1 E_1 - (\sigma_1 + \xi + \mu_f) I_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dt} &= g(t, S_1, E_1, U_1, V_1, W_1, E_1, I_1, R_1) \\ &\equiv \sigma_1 I_1 - (\xi + \mu_f) R_1\end{aligned}$$

b) Model 2

$$\begin{aligned}\frac{dS_2}{dt} &= i(t, S_2, E_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \\ &\equiv \xi S_1 - \eta \lambda_m S_2 - \mu_f S_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dU_2}{dt} &= j(t, S_2, E_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \\ &\equiv \xi U_1 - \eta(1 - \epsilon_u) \lambda_m U_2 - \mu_f U_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dV_2}{dt} &= k(t, S_2, E_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \\ &\equiv \xi V_1 - \eta(1 - \epsilon_v) \lambda_m V_2 - \mu_f V_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dW_2}{dt} &= l(t, S_2, E_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \\ &\equiv \xi W_1 - \eta(1 - \epsilon_w) \lambda_m W_2 - \mu_f W_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dE_2}{dt} &= m(t, S_2, E_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \\ &\equiv \xi W_1 + \eta \lambda_m [S_2 + (1 - \epsilon_u) U_2 + (1 - \epsilon_v) V_2 \\ &\quad + (1 - \epsilon_w) W_2] - (\rho_2 + \mu_f) E_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dI_2}{dt} &= n(t, S_2, E_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \\ &\equiv \xi I_1 + \rho_2 E_2 - (\sigma_2 + \mu_f) I_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= o(t, S_2, E_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \\ &\equiv (1 - r) \sigma_2 I_2 - (\sigma_3 + \kappa + \mu_f) P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= p(t, S_2, E_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \\ &\equiv \kappa P - (\sigma_4 + \alpha + \mu_f) Q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= q(t, S_2, E_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \\ &\equiv \alpha Q - (\gamma + \mu_f + \delta_f) C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dR_c}{dt} &= r(t, S_2, E_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \\ &\equiv \gamma C - \mu_f R_c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dR_2}{dt} &= s(t, S_2, E_2, U_2, V_2, W_2, E_2, I_2, P, Q, C, R_c, R_2) \\ &\equiv \xi R_1 + r \sigma_2 I_2 + \sigma_3 P + \sigma_4 Q - \mu_f R_2\end{aligned}$$

c) Model 3

$$\begin{aligned}\frac{dS_m}{dt} &= t(t, S_m, E_m, U_m, V_m, W_m, E_m, I_m, R_m) \\ &\equiv \pi_f(1 - \phi_f) - \psi_u S_m - \lambda_f S_m - (\xi + \mu_f) S_m \\ \frac{dU_m}{dt} &= u(t, S_m, E_m, U_m, V_m, W_m, E_m, I_m, R_m) \\ &\equiv \pi_f \phi_f + \psi_u S_m - (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_m - (\psi_v + \mu_f) U_m \\ \frac{dV_m}{dt} &= v(t, S_m, E_m, U_m, V_m, W_m, E_m, I_m, R_m) \\ &\equiv \psi_v U_m - (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_m - (\psi_w + \mu_f) V_m \\ \frac{dW_m}{dt} &= w(t, S_m, E_m, U_m, V_m, W_m, E_m, I_m, R_m) \\ &\equiv \psi_w W_m - (1 - \epsilon_w) \lambda_m W_m - \mu_f W_m \\ \frac{dE_m}{dt} &= x(t, S_m, E_m, U_m, V_m, W_m, E_m, I_m, R_m) \\ &\equiv \lambda_f [S_m + (1 - \epsilon_u) U_m + (1 - \epsilon_v) V_m + (1 - \epsilon_w) W_m] \\ &\quad - (\rho_m + \mu_f) E_m \\ \frac{dI_m}{dt} &= y(t, S_m, E_m, U_m, V_m, W_m, E_m, I_m, R_m) \\ &\equiv \rho_m E_m - (\sigma_m + \mu_f) I_m \\ \frac{dR_m}{dt} &= z(t, S_m, E_m, U_m, V_m, W_m, E_m, I_m, R_m) \\ &\equiv \sigma_m I_m - \mu_f R_m\end{aligned}$$

Integrasi numerik dari persamaan dengan metode Runge-Kutta orde empat dapat dinyatakan sebagai berikut:

a) Model 1

$$S_{(1)n+1} = S_{(1)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,S(1)} = ha(t_n, S_{(1)n})$

$$k_{2,S(1)} = ha\left(t_n + \frac{h}{2}, S_{(1)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,S(1)} = ha\left(t_n + \frac{h}{2}, S_{(1)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,S(1)} = ha(t_n + h, S_{(1)n} + k_3)$$

$$U_{(1)n+1} = U_{(1)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,U(1)} = hb(t_n, U_{(1)n})$

$$k_{2,U(1)} = hb\left(t_n + \frac{h}{2}, U_{(1)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,U(1)} = hb\left(t_n + \frac{h}{2}, U_{(1)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,U(1)} = hb(t_n + h, U_{(1)n} + k_3)$$

$$V_{(1)n+1} = V_{(1)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,V(1)} = hc(t_n, V_{(1)n})$

$$k_{2,V(1)} = hc\left(t_n + \frac{h}{2}, V_{(1)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,V(1)} = hc\left(t_n + \frac{h}{2}, V_{(1)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,V(1)} = hc(t_n + h, V_{(1)n} + k_3)$$

$$W_{(1)n+1} = W_{(1)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,W(1)} = hd(t_n, W_{(1)n})$

$$k_{2,W(1)} = hd\left(t_n + \frac{h}{2}, W_{(1)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,W(1)} = hd\left(t_n + \frac{h}{2}, W_{(1)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,W(1)} = hd(t_n + h, W_{(1)n} + k_3)$$

$$E_{(1)n+1} = E_{(1)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,E(1)} = he(t_n, E_{(1)n})$

$$k_{2,E(1)} = he\left(t_n + \frac{h}{2}, E_{(1)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,E(1)} = he\left(t_n + \frac{h}{2}, E_{(1)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,E(1)} = he(t_n + h, E_{(1)n} + k_3)$$

$$I_{(1)n+1} = I_{(1)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,S(1)} = hf(t_n, I_{(1)n})$

$$k_{2,I(1)} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, I_{(1)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,I(1)} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, I_{(1)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,I(1)} = hf(t_n + h, I_{(1)n} + k_3)$$

$$R_{(1)n+1} = R_{(1)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,R(1)} = hg(t_n, S_{(1)n})$

$$k_{2,R(1)} = hg\left(t_n + \frac{h}{2}, R_{(1)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,R(1)} = hg\left(t_n + \frac{h}{2}, R_{(1)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,R(1)} = hg(t_n + h, R_{(1)n} + k_3)$$

b) Model 2

$$S_{(2)n+1} = S_{(2)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,S(2)} = hi(t_n, S_{(2)n})$

$$k_{2,S(2)} = hi\left(t_n + \frac{h}{2}, S_{(2)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,S(2)} = hi\left(t_n + \frac{h}{2}, S_{(2)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,S(2)} = hi(t_n + h, S_{(2)n} + k_3)$$

$$U_{(2)n+1} = U_{(2)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,U(2)} = hj(t_n, U_{(2)n})$

$$k_{2,U(2)} = hj\left(t_n + \frac{h}{2}, U_{(2)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,U(2)} = hj\left(t_n + \frac{h}{2}, U_{(2)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,U(2)} = hj(t_n + h, U_{(2)n} + k_3)$$

$$V_{(2)n+1} = V_{(2)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,V(2)} = hk(t_n, V_{(2)n})$

$$k_{2,V(2)} = hk \left( t_n + \frac{h}{2}, V_{(2)n} + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_{3,V(2)} = hk \left( t_n + \frac{h}{2}, V_{(2)n} + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_{4,V(2)} = hk(t_n + h, V_{(2)n} + k_3)$$

$$W_{(2)n+1} = W_{(2)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,W(2)} = hl(t_n, W_{(2)n})$

$$k_{2,W(2)} = hl \left( t_n + \frac{h}{2}, W_{(2)n} + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_{3,W(2)} = hl \left( t_n + \frac{h}{2}, W_{(2)n} + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_{4,W(2)} = hl(t_n + h, W_{(2)n} + k_3)$$

$$E_{(2)n+1} = E_{(2)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,E(2)} = hm(t_n, E_{(2)n})$

$$k_{2,E(2)} = hm \left( t_n + \frac{h}{2}, E_{(2)n} + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_{3,E(2)} = hm \left( t_n + \frac{h}{2}, E_{(2)n} + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_{4,E(2)} = hm(t_n + h, E_{(2)n} + k_3)$$

$$I_{(2)n+1} = I_{(2)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,I(2)} = hm(t_n, I_{(2)n})$

$$k_{2,I(2)} = hm \left( t_n + \frac{h}{2}, I_{(2)n} + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_{3,I(2)} = hm \left( t_n + \frac{h}{2}, I_{(2)n} + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_{4,I(2)} = hm(t_n + h, I_{(2)n} + k_3)$$

$$P_{n+1} = P_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,P} = hn(t_n, P_n)$

$$k_{2,P} = hn \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_{3,P} = hn \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_{4,P} = hn(t_n + h, P_n + k_3)$$

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,Q} = ho(t_n, Q_n)$

$$k_{2,Q} = ho \left( t_n + \frac{h}{2}, Q_n + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_{3,Q} = ho \left( t_n + \frac{h}{2}, Q_n + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_{4,Q} = ho(t_n + h, Q_n + k_3)$$

$$C_{n+1} = C_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,C} = hp(t_n, C_n)$

$$k_{2,C} = hp \left( t_n + \frac{h}{2}, C_n + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_{3,C} = hp \left( t_n + \frac{h}{2}, C_n + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_{4,C} = hp(t_n + h, C_n + k_3)$$

$$R_{(c)n+1} = R_{(c)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,R(c)} = hq(t_n, R_{(c)n})$

$$k_{2,R(c)} = hq \left( t_n + \frac{h}{2}, R_{(c)n} + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_{3,R(c)} = hq \left( t_n + \frac{h}{2}, R_{(c)n} + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_{4,R(c)} = hq(t_n + h, R_{(c)n} + k_3)$$

$$R_{(2)n+1} = R_{(2)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,R(2)} = hr(t_n, S_{(2)n})$

$$k_{2,R(2)} = hr \left( t_n + \frac{h}{2}, R_{(2)n} + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_{3,R(2)} = hr \left( t_n + \frac{h}{2}, R_{(2)n} + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_{4,R(2)} = hr(t_n + h, R_{(2)n} + k_3)$$



c) Model 3

$$S_{(m)n+1} = S_{(m)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,S(m)} = hs(t_n, S_{(m)n})$

$$k_{2,S(m)} = hs\left(t_n + \frac{h}{2}, S_{(m)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,S(m)} = hs\left(t_n + \frac{h}{2}, S_{(m)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,S(m)} = hs(t_n + h, S_{(m)n} + k_3)$$

$$U_{(m)n+1} = U_{(m)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,U(m)} = hu(t_n, U_{(m)n})$

$$k_{2,U(m)} = hu\left(t_n + \frac{h}{2}, U_{(m)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,U(m)} = hu\left(t_n + \frac{h}{2}, U_{(m)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,U(m)} = hu(t_n + h, U_{(m)n} + k_3)$$

$$V_{(m)n+1} = V_{(m)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,V(m)} = hv(t_n, V_{(m)n})$

$$k_{2,V(m)} = hv\left(t_n + \frac{h}{2}, V_{(m)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,V(m)} = hv\left(t_n + \frac{h}{2}, V_{(m)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,V(m)} = hv(t_n + h, V_{(m)n} + k_3)$$

$$W_{(m)n+1} = W_{(m)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:  $k_{1,W(m)} = hw(t_n, W_{(m)n})$

$$k_{2,W(m)} = hw\left(t_n + \frac{h}{2}, W_{(m)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,W(m)} = hw\left(t_n + \frac{h}{2}, W_{(m)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,W(m)} = hw(t_n + h, W_{(m)n} + k_3)$$

$$E_{(m)n+1} = E_{(m)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\text{Dengan: } k_{1,E(m)} = hx(t_n, E_{(m)n})$$

$$k_{2,E(m)} = hx\left(t_n + \frac{h}{2}, E_{(m)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,E(m)} = hx\left(t_n + \frac{h}{2}, E_{(m)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,E(m)} = hx(t_n + h, E_{(m)n} + k_3)$$

$$I_{(m)n+1} = I_{(m)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\text{Dengan: } k_{1,S(m)} = hy(t_n, I_{(m)n})$$

$$k_{2,I(m)} = hy\left(t_n + \frac{h}{2}, I_{(m)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_{3,I(m)} = hy\left(t_n + \frac{h}{2}, I_{(m)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,I(m)} = hy(t_n + h, I_{(m)n} + k_3)$$

$$R_{(m)n+1} = R_{(m)n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\text{Dengan: } k_{1,R(m)} = hz(t_n, R_{(m)n})$$

$$k_{2,R(m)} = hz\left(t_n + \frac{h}{2}, R_{(m)n} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

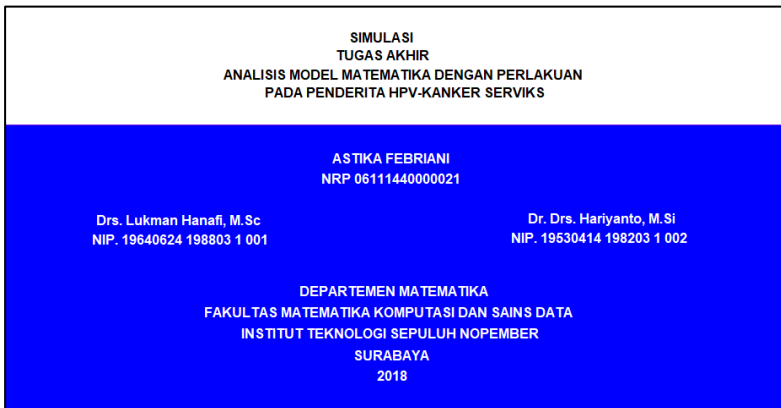
$$k_{3,R(m)} = hz\left(t_n + \frac{h}{2}, R_{(m)n} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_{4,R(m)} = hz(t_n + h, R_{(m)n} + k_3)$$

Dengan  $h$  adalah langkah waktu.

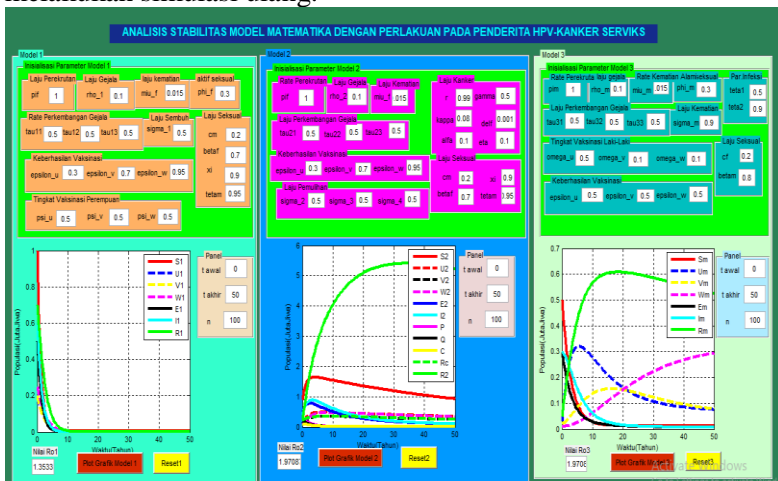
#### 4.5.2 Impementasi Antarmuka

Impementasi antarmuka digunakan untuk mempermudah penggunaan program dalam mencari penyelesaian numeric dari sistem, implementasi antarmuka terdiri dari 3 button yaitu “Home”, “Simulasi”, dan “Exit”. Pada button “Home” merupakan bagian dimana menampilkan *cover* dari simulasi. Saat pengguna ingin mencari simulasi numerik maka dilakukan perhitungan pada bagian button “Simulasi” sedangkan jika pengguna ingin keluar dari program maka dilakukan pada bagian button “Exit”.



**Gambar 4. 1** Tampilan “Home” pada GUI

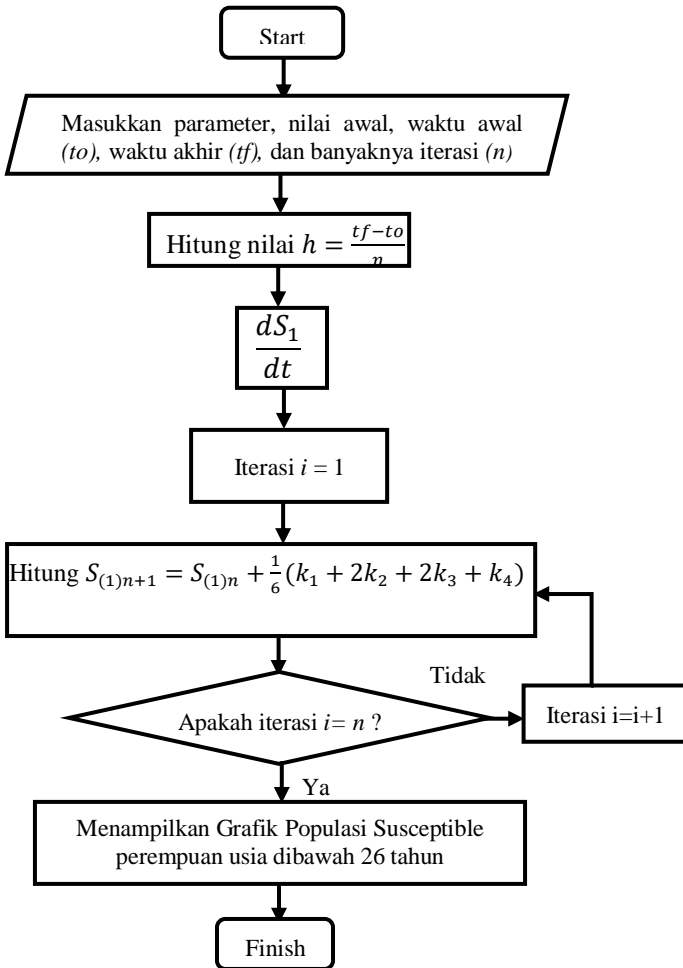
Pada bagian “Simulasi 1” ini terdiri 6 button yaitu “Plot Grafik Model 1”, “Plot Grafik Model 2”, “Plot Grafik Model 3” yang masing-masing digunakan untuk menampilkan grafik sesuai masukkan dari pengguna dan “Reset1”, “Reset2” dan “Reset3” yang digunakan untuk menghapus hasil masukan parameter dan melakukan simulasi ulang.



**Gambar 4. 2** Tampilan “Simulasi” pada GUI

### 4.5.3 Flow Chart

*Flow Chart* adalah diagram yang digunakan untuk menjelaskan proses berjalannya program dari sistem yang disimulasikan.



**Gambar 4. 3** *Flow Chart* Simulasi

**Tabel 1 [7].** Nilai-Nilai Parameter pada Model Matematika Pemberian Vaksin HPV terhadap Kanker Serviks

Parameter	Nilai	Satuan
$\pi_m, \pi_f$	10,000	per tahun
$\beta_m(\beta_f)$	0.8(0.7)	per kontak
$c_f, c_m$	0.2	per tahun
$\theta_1, \theta_2, \theta_m, \eta$	0.5, 0.9, 0.95, 0.1	per tahun
$\xi$	0.9	per tahun
$\rho_m, \rho_1, \rho_2$	0.1, 0.1, 0.1	per tahun
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$	0.5, 0.5, 0.5, 0.5	per tahun
$\mu_m, \mu_f$	0.015	per tahun
$\phi_m, \phi_f$	0.3, 0.3	per tahun
$\psi_u, \psi_v, \psi_w$	0.5, 0.5, 0.5	per tahun
$\omega_u, \omega_v, \omega_w$	0.5, 0.1, 0.1	per tahun
$\epsilon_u, \epsilon_v, \epsilon_w$	0.3, 0.7, 0.95	per tahun
$r$	0.99	per tahun
$\sigma_m$	0.9	per tahun
$\kappa$	0.08	per tahun
$\alpha$	0.1	per tahun
$\gamma$	0.5	per tahun
$\delta_f$	0.001	per tahun
$\tau_1, \tau_2, \tau_3$	0.5	per tahun

Dengan menggunakan parameter yang terdapat pada Tabel 1 dan nilai awal  $S_1(0) = 1, U_1(0) = 0.15, V_1(0) = 0.2, W_1(0) = 0.25, E_1(0) = 0.5, I_1(0) = 0.6, R_1(0) = 0.75, S_2(0) = 0.9, U_2(0) = 0.2, V_2(0) = 0.25, W_2(0) = 0.3, E_2(0) = 0.5, I_2(0) = 0.65, R_2(0) = 0.45, S_m(0) = 1, U_m(0) = 0.25, V_m(0) = 0.3, W_m(0) = 0.35, E_m(0) = 0.5, I_m(0) = 0.4, R_m(0)$ . Kemudian masukkan parameter tersebut dihitung menggunakan metode Runge-Kutta sesuai rumus pada subbab 4.5.1 dan hasil akhir menampilkan grafik simulasi numerik.

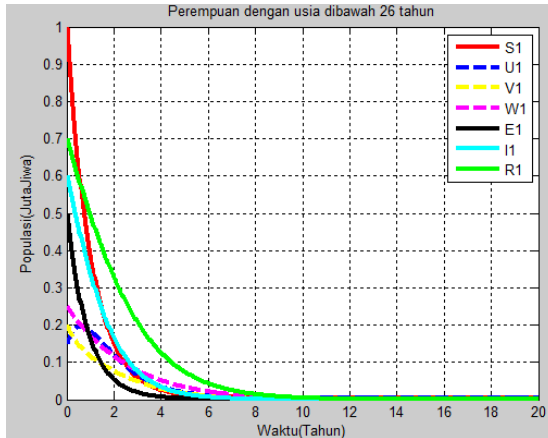
#### 4.5.4 Hasil Simulasi

Pada simulasi numerik dipilih 3 subpopulasi yang sesuai dengan fenomena yang terjadi pada model, yaitu populasi perempuan dengan usia dibawah 26 tahun, populasi perempuan dengan usia diatas 26 tahun, serta populasi laki-laki.

Berikut ini adalah grafik hasil simulasi numerik berdasarkan variasi nilai  $h$  (ukuran langkah waktu) yang mana berpengaruh terhadap kestabilan numeriknya yang terjadi pada tiap sub populasi

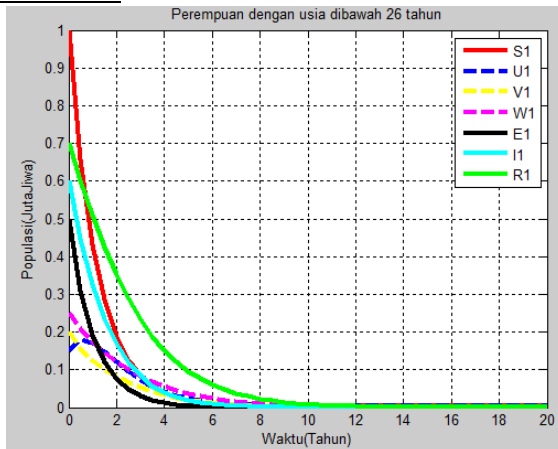
a) Populasi perempuan dibawah 26 tahun

Saat nilai  $h=0.0005$



**Gambar 4. 4** Grafik masing-masing populasi perempuan usia dibawah 26 tahun saat  $h=0.0005$

Saat nilai  $h=0.5$

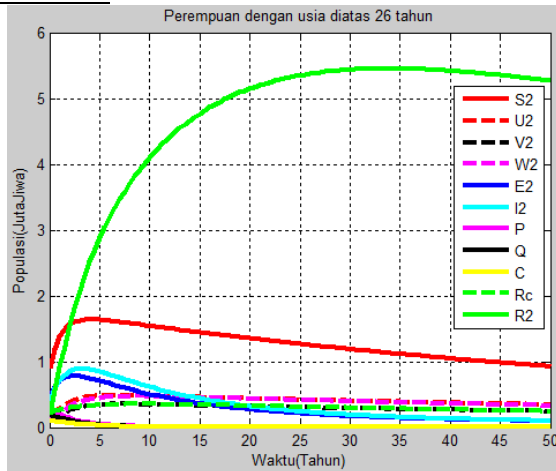


**Gambar 4. 5** Grafik masing-masing populasi perempuan usia dibawah 26 tahun saat  $h=0.5$

Pada gambar diatas menunjukkan masing-masing populasi bergerak menurun mendekati persekitaran titik setimbang dengan jumlah populasi rentan( $S$ ), populasi rentan dengan vaksinasi dosis kedua ( $V$ ), populasi rentan dengan vaksinasi dosis ketiga ( $W$ ), populasi dengan gejala infeksi virus ( $E$ ), populasi terinfeksi ( $I$ ), populasi sembuh ( $R$ ) adalah nol. Sedangkan populasi perempuan rentan dengan vaksinasi dosis pertama ( $U$ ) bergerak naik mulai tahun pertama sampai  $\pm 0.5$  tahun, kemudian bergerak menurun mendekati persekitaran titik setimbang dengan jumlah  $U$  adalah nol. Grafik diatas terlihat masing-masing populasi perempuan usia dibawah 26 bahwa saat nilai  $h=0.0005$  akan stabil ketika mendekati persekitaran titik setimbang saat  $t>10$  tahun, sedangkan saat nilai  $h=0.5$  menunjukkan bahwa masing-masing populasi akan stabil mendekati persekitaran titik setimbang saat  $t>12$  tahun. Hal ini menunjukkan bahwa semakin kecil nilai  $h$  maka semakin kecil waktu yang dibutuhkan untuk mencapai kestabilan titik setimbang. Dari grafik tersebut bilangan reproduksi dasar perempuan usia dibawah 26 tahun yaitu  $R_0 = 1.3534$  atau  $R_0 > 1$  sehingga stabil asimtotik terhadap titik kesetimbangan endemik.

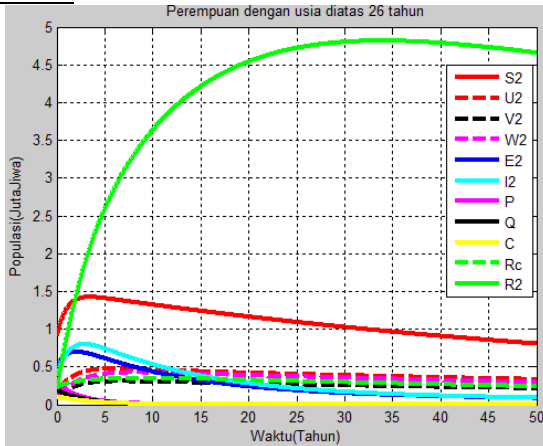
b) Populasi perempuan usia diatas 26 tahun

Saat nilai  $h=0.005$



**Gambar 4. 6** Grafik masing-masing populasi perempuan usia diatas 26 tahun saat  $h=0.005$

### Saat nilai $h=0.5$



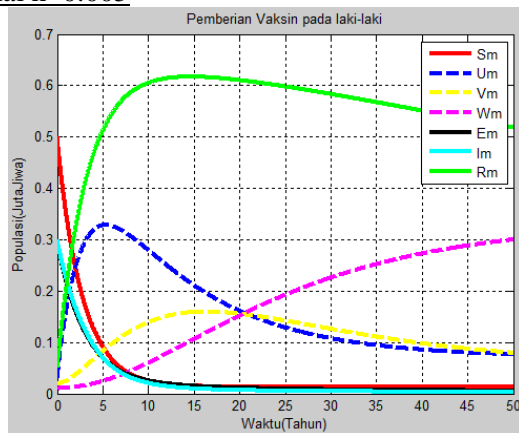
**Gambar 4. 7** Grafik masing-masing populasi perempuan usia diatas 26 tahun saat  $h=0.5$

Pada gambar diatas menunjukkan masing-masing populasi perempuan usia diatas 26 tahun bergerak menurun mendekati persekitaran titik setimbang dengan jumlah populasi dengan persistensi pra kanker ( $P$ ), populasi dengan lesi pra kanker ( $Q$ ), populasi yang terkena kanker serviks adalah nol. Populasi perempuan usia diatas 26 tahun yang rentan ( $S$ ) bergerak naik mulai tahun pertama sampai  $\pm 5$  tahun dan akan menurun mendekati persekitaran titik setimbang. Populasi perempuan dengan vaksinasi dosis pertama ( $U$ ), populasi dengan vaksinasi dosis kedua ( $V$ ), populasi dengan vaksinasi dosis ketiga dan populasi yang sembuh dari kanker serviks bergerak naik mulai tahun pertama sampai  $\pm 5$  tahun dan menurun mendekati persekitaran titik setimbang. Populasi perempuan yang menunjukkan gejala virus ( $E$ ) dan populasi yang terinfeksi virus ( $I$ ) bergerak naik mulai tahun pertama sampai  $\pm 3$  tahun dan bergerak menurun mendekati persekitaran titik setimbang. Grafik diatas terlihat bahwa populasi yang terkena kanker serviks mendekati persekitaran titik setimbang saat  $t > 6$  tahun saat  $h=0.0005$ , sedangkan saat  $h=0.5$  menunjukkan bahwa populasi perempuan yang terkena kanker serviks stabil saat  $t > 7$  tahun. Dari grafik



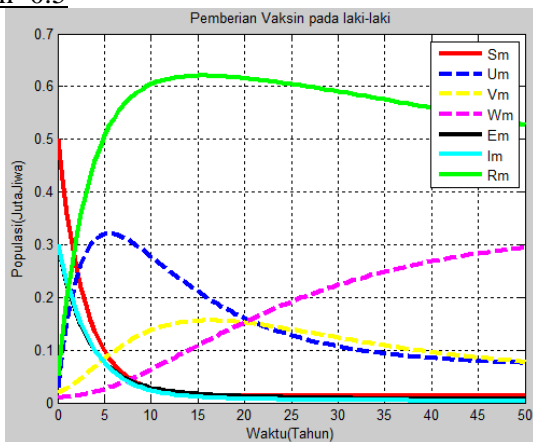
tersebut bilangan reproduksi dasar perempuan usia diatas 26 tahun yaitu  $R_0 = 1.9709$  atau  $R_0 > 1$  sehingga dapat dikatakan stabil asimtotik terhadap titik kesetimbangan endemik.

c) Populasi Laki-Laki  
 Saat nilai  $h=0.005$



**Gambar 4. 8** Grafik masing-masing populasi laki-laki saat  $h=0.005$

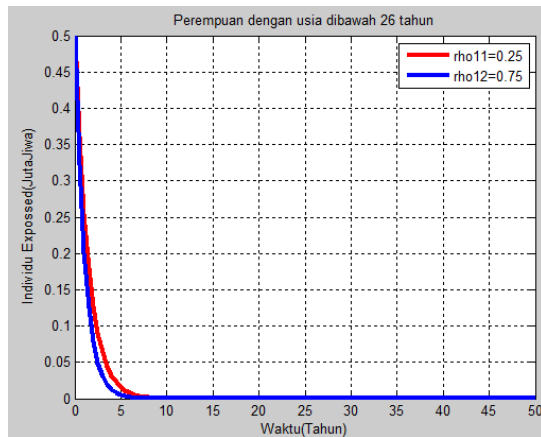
Saat nilai  $h=0.5$



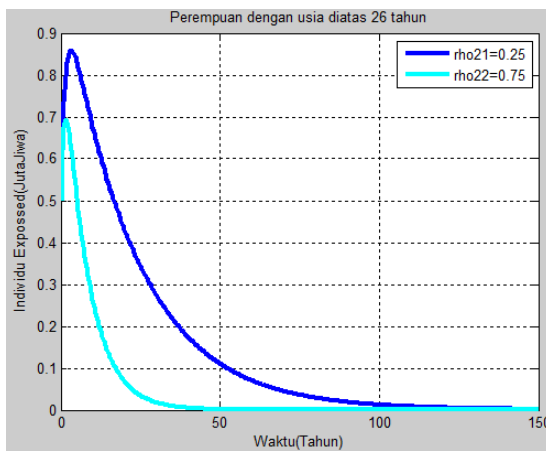
**Gambar 4. 9** Grafik masing-masing populasi laki-laki saat  $h=0.5$

Pada gambar diatas menunjukkan masing-masing populasi bergerak menurun mendekati titik setimbang dengan jumlah ppopulasi perempuan rentan ( $S$ ), populasi yang menunjukkan gejala virus ( $E$ ), populasi yang terinfeksi oleh virus ( $I$ ) pada laki-laki adalah nol. Populasi laki-laki rentan dengan vaksinasi dosis pertama ( $U$ ) bergerak naik mulai tahun pertama sampai  $\pm 5$  tahun dan akan bergerak menurun mendekati persekitaran titik setimbang. Populasi laki-laki rentan dengan vaksinasi dosis kedua ( $V$ ) bergerak naik mulai tahun pertama sampai  $\pm 15$  tahun dan akan menurun mendekati persekitaran titik setimbang. Populasi laki-laki rentan dengan vaksinasi dosis ketiga ( $W$ ) bergerak naik mulai tahun pertama sampai  $\pm 50$  tahun dan akan menurun mendekati persekitaran titik setimbang. Sedangkan populasi laki-laki yang sembuh bergerak naik selama  $\pm 15$  tahun dan menurun mendekati persekitaran titik setimbang. Dari grafik diatas terlihat masing-masing populasi laki-laki  $S, E, I$  bahwa saat  $h=0.0005$  akan stabil ketika mendekati persekitaran titik setimbang saat  $t > 22$  tahun, sedangkan saat nilai  $h=0.5$  menunjukkan bahwa populasi laki-laki  $S, E, I$  stabil saat  $t > 24$  tahun. Dari grafik tersebut bilangan reproduksi dasar laki-laki yaitu  $R_0 = 1.9709$  atau  $R_0 > 1$  sehingga dikatakan stabil asimtotik terhadap titik kesetimbangan endemik.

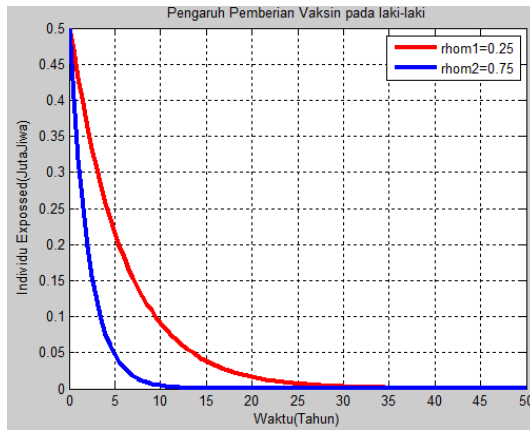
Penyebaran virus tidak lepas dari pengaruh setiap inputan nilai parameter yang diberikan. Variasi nilai input yang diberikan akan berpengaruh terhadap output dari simulasi yang dilakukan. Parameter yang sangat berpengaruh terhadap penyebaran virus yang mana berkaitan dengan bilangan reproduksi yaitu  $\rho$  dan  $\xi$ . Jadi untuk mengetahui seberapa besar penyebaran virus HPV maka dilakukan variasi nilai input setiap sub populasi yaitu  $\rho_1 = 0.25$  dan  $0.75$ ,  $\rho_2 = 0.25$  dan  $0.75$ ,  $\rho_m = 0.25$  dan  $0.75$ ,  $\xi = 1$  dan  $0.5$ .



**Gambar 4. 10** Grafik *exposed* perempuan usia dibawah 26 tahun saat  $\rho_{11} = 0.25$  dan  $\rho_{12} = 0.75$



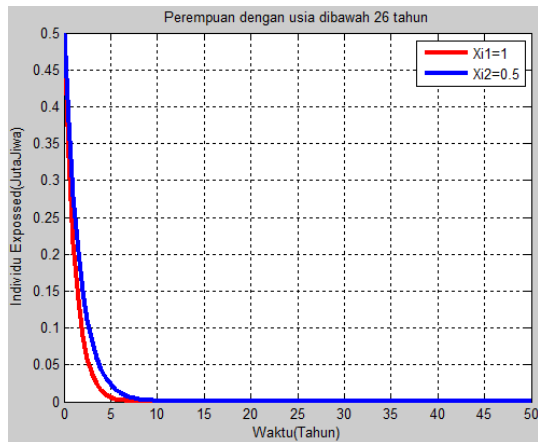
**Gambar 4. 11** Grafik *exposed* perempuan usia diatas 26 tahun saat  $\rho_{21} = 0.25$  dan  $\rho_{22} = 0.75$



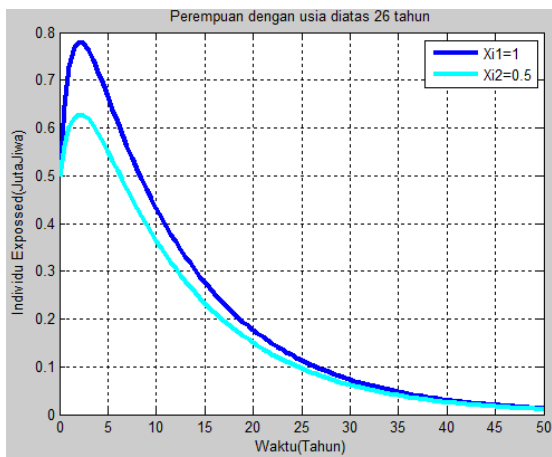
**Gambar 4. 12** Grafik *exposed* laki-laki saat  $\rho_{m1} = 0.25$  dan  $\rho_{m2} = 0.75$

Berikut dilakukan analisis grafik individu *exposed* dengan variasi  $\rho_1 = 0.25$  dan  $\rho_2 = 0.75$  yaitu sebagai berikut:

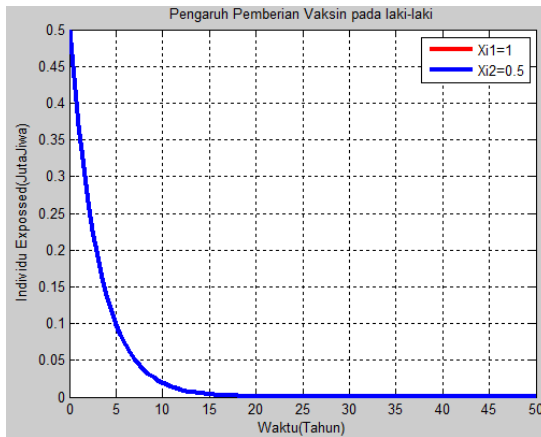
- 1) Pada grafik individu *exposed* pada perempuan dengan usia dibawah 26 tahun menunjukkan bahwa semakin kecil laju gejala penyebaran virus HPV maka semakin sedikit waktu yang dibutuhkan untuk menjadi individu yang terinfeksi virus HPV.
- 2) Pada grafik individu *exposed* pada perempuan dengan usia diatas 26 tahun menunjukkan bahwa semakin kecil laju gejala virus maka semakin sedikit waktu yang dibutuhkan untuk menjadi individu yang terkena kanker serviks.
- 3) Pada grafik individu *exposed* laki-laki menunjukkan bahwa semakin besar gejala virus HPV maka semakin banyak yang dibutuhkan untuk menjadi individu yang terkena virus HPV.



**Gambar 4. 13** Grafik *exposed* perempuan usia dibawah 26 tahun saat  $\xi_1 = 1$  dan  $\xi_2 = 0.5$



**Gambar 4. 14** Grafik *exposed* perempuan dengan usia diatas 26 tahun saat  $\xi_1 = 1$  dan  $\xi_2 = 0.5$



**Gambar 4. 15** Grafik *exposed* pada laki-laki saat  $\xi_1 = 1$  dan  $\xi_2 = 0.5$

Berikut dilakukan analisa grafk dalam individu exposed dengan variasi  $\xi_1 = 1$  dan  $\xi_2 = 0.5$  yaitu sebagai berikut:

- 1) Pada grafik individu *exposed* perempuan dengan usia dibawah 26 tahun menunjukkan bahwa semakin meningkatnya laju kematangan perempuan usia dibawah 26 tahun maka semakin sedikit waktu yang dibutuhkan untuk terkena virus HPV.
- 2) Pada grafik individu *exposed* perempuan dengan usia diatas 26 tahun menunjukkan bahwa waktu yang dibutuhkan untuk mendekati persekitaran titik setimbang memerlukan waktu yang sama. Hal ini di sebabkan karena meningkatnya rate kematangan perempuan usia dibawah 26 tahun, akan tetapi semakin besar rate kematangan perempuan maka semakin meningkat jumlah individu *exposed* usia dibawah 26 tahun .
- 3) Pada grafik individu *exposed* laki-laki, nilai laju kematangan perempuan tidak berpengaruh pada individu laki-laki.

Populasi dibagi menjadi dua sub populasi, populasi perempuan dan laki-laki. Dimana populasi perempuan dibagi menjadi dua sub populasi yaitu populasi perempuan dengan usia dibawah 26 tahun dan perempuan dengan usia diatas 26 tahun. Pada populasi perempuan dan laki-laki terdapat hubungan imbal balik yakni laju hubungan seksual dengan laki-laki yang terinfeksi ( $\lambda_m$ ), maupun

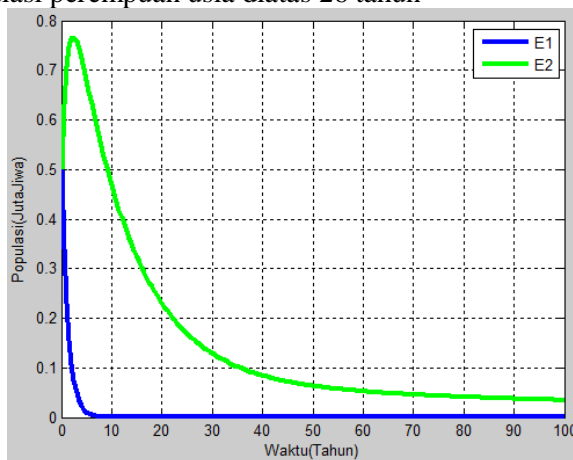
rate hubungan seksual dengan perempuan yang terinfeksi ( $\lambda_f$ ).

Dimana  $\lambda_f = \frac{\beta_f c_m (\theta_1 E_1 + I_1 + \theta_1 E_2 + I_2 + \theta_2 P)}{N_f}$  dan  $\lambda_m = \frac{\beta_m c_f (\theta_m E_m + I_m)}{N_m}$ .

Sedangkan pada populasi perempuan juga terdapat hubungan imbal balik yakni laju kematangan perempuan ( $\xi$ ).

Berikut ini adalah penjelasan hubungan populasi yang dipengaruhi oleh laju hubungan seksual dan usia kematangan perempuan :

- a) Hubungan populasi perempuan usia dibawah 26 tahun dan populasi perempuan usia diatas 26 tahun

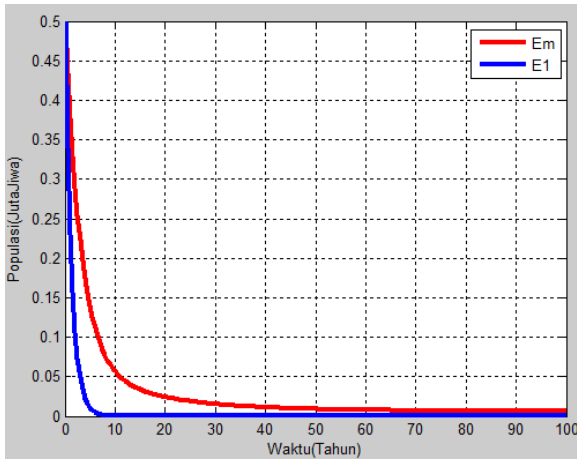


**Gambar 4. 16** Grafik *exposed* perempuan usia di bawah 26 tahun dan *exposed* perempuan usia di atas 26 tahun

Pada grafik diatas terlihat bahwa *exposed* populasi perempuan dengan usia dibawah 26 tahun menunjukkan waktu yang dibutuhkan untuk mendekati persekitaran titik setimbang lebih sedikit dari pada populasi *exposed* perempuan dengan usia diatas 26 tahun. Hal ini di sebabkan karena populasi perempuan usia dibawah 26 tahun mengalami penurunan pada usia pematangan yang mana setiap populasi yang rentan, populasi yang divaksinasi dosis pertama, kedua dan ketiga mengalami peningkatan. Sedangkan pada individu perempuan dengan usia diatas 26 tahun mengalami peningkatan rate usia pematangan perempuan dari usia

di bawah 26 tahun dan meningkatnya setiap populasi yang rentan, individu yang gagal divaksinasi dengan dosis pertama, kedua dan ketiga dari masing-masing usia pematangan perempuan dengan usia dibawah 26 tahun. Sehingga populasi *exposed* perempuan usia diatas 26 tahun bergantung pada populasi usia di bawah 26 tahun.

b) Hubungan populasi perempuan usia dibawah 26 tahun dan populasi laki-laki.

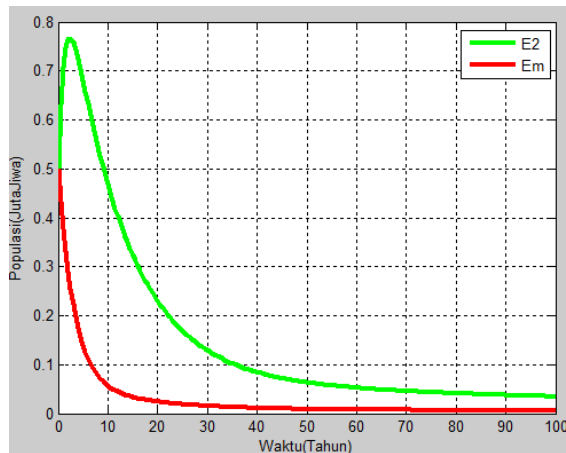


**Gambar 4.17** Grafik *exposed* laki-laki dan perempuan usia dibawah 26 tahun

Pada grafik diatas menunjukkan bahwa populasi *exposed* laki-laki yang mendekati persekitaran titik setimbang memerlukan waktu yang lebih lambat. Hal ini dipengaruhi oleh meningkatnya laju hubungan seksual pada laki-laki yang masih rentan dan laki-laki yang telah gagal divaksinasi dengan dosis pertama, kedua maupun ketiga yang mana populasi perempuan telah terinfeksi virus. Hubungan seksual yang mana perempuan telah terinfeksi dapat dipengaruhi oleh populasi yang terinfeksi virus. Sedangkan individu perempuan dengan usia dibawah 26 tahun yang telah terinfeksi virus dipengaruhi oleh meningkatnya hubungan seksual yang mana sifat infeksi dibawa oleh laki-laki. Sehingga pada populasi perempuan usia dibawah 26 tahun berpengaruh pada populasi laki-laki yang telah terinfeksi atau sebaliknya.



c) Hubungan populasi perempuan usia diatas 26 tahun dan populasi laki-laki



**Gambar 4. 18** Grafik *exposed* laki-laki dan *exposed* perempuan dengan usia diatas 26 tahun

Pada grafik diatas menunjukkan bahwa individu *exposed* perempuan dengan usia di atas 26 tahun memerlukan waktu yang lambat untuk mendekati persekitaran titik setimbang. Hal ini dipengaruhi oleh meningkatnya laju kematangan usia perempuan dari populasi perempuan dibawah 26 tahun dan meningkatnya hubungan seksual yang terjadi pada individu perempuan yang rentan maupun populasi yang rentan dengan kegagalan vaksinasi dosis pertama, kedua dan ketiga. Laju hubungan seksual ini sifat infeksi telah ada pada populasi laki-laki yang nantinya akan menginfeksi populasi perempuan usia diatas 26 tahun. Pada populasi laki-laki juga dipengaruhi oleh meningkatnya hubungan seksual yang mana sifat infeksi dibawa oleh perempuan. Hal ini menyebabkan laki-laki akan menunjukkan gejala infeksi. Laju hubungan seksual yang mana sifat infeksi di bawa oleh perempuan dipengaruhi oleh populasi persistensi infeksi. Populasi persistensi infeksi yang akan menyebabkan kanker serviks ini dipengaruhi oleh meningkatnya laju populasi yang telah terinfeksi oleh virus.



## **BAB V**

### **PENUTUP**

Bab berisi kesimpulan dari semua kegiatan penelitian dari Tugas Akhir dan saran untuk pengembangan dalam Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

#### **5.1 Kesimpulan**

Berdasarkan analisis hasil simulasi yang disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa model matematika pengaruh pemberian vaksin infeksi HPV terhadap kanker serviks dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde ke empat dapat memenuhi syarat stabilitas. Dengan mengambil nilai  $h=0.5$  dan  $0.005$  dapat menunjukkan bahwa semakin kecil nilai  $h$  maka semakin sedikit waktu yang dibutuhkan.
2. Model matematika pengaruh pemberian vaksin infeksi HPV terhadap kanker serviks yang berkaitan dengan bilangan reproduksi dipengaruhi oleh rate gejala virus dan laju usia kematangan perempuan. Dengan parameter  $\rho = 0.25$  dan  $0.75$  serta  $\xi = 0.5$  dan  $1$ , menunjukkan bahwa semakin kecil rate gejala virus maka semakin lambat waktu yang dibutuhkan pada penyebaran virus, tetapi jika laju kematangan usia perempuan semakin besar maka semakin kecil waktu yang dibutuhkan untuk terinfeksi virus HPV yang menyebabkan kanker serviks.
3. Hubungan antara populasi perempuan dengan populasi laki-laki terletak pada laju hubungan seksual, sedangkan hubungan antara sub populasi perempuan dengan usia dibawah 26 tahun dan diatas 26 tahun terletak pada laju usia pematangan.

#### **5.2 Saran**

1. Pada Tugas Akhir ini hanya menganalisis kestabilan model matematika pengaruh pemberian vaksin infeksi HPV terhadap kanker serviks, sehingga perlu di kembangkan penelitian selanjutnya untuk kontrol pemberian vaksin pada infeksi HPV.

2. Pada Tugas Akhir ini simulasi numerik menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde ke empat sehingga dapat dikembangkan dengan menggunakan metode numerik lainnya.

## BAB VI DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kementerian Kesehatan Masyarakat Cegah dan Kendalikan Kanker. (2017, 2 Februari). Kementerian Kesehatan Indonesia 2016. Diperoleh 26 Februari 2018 dari <http://www.depkes.go.id>.
- [2] Data dan Info Kesehatan Propil Kesehatan Indonesia 2016. (2016, 31 Desember). Kementerian Kesehatan Republik Indonesia 2016. Diperoleh 26 Februari 2018, dari <http://www.depkes.go.id> .
- [3] T. Malik, J. Reimer, A. Gumel, E. Elbasha S. Mahmud. (2013). *“The Impact of an Imperfect Vaccine and Pap Cytology Screening on The Transmission of Human Papillomavirus and Occurrence of Associated Cervical Dysplasia and Cancer”*. Math.Biosci. Eng Vol.10 (4), Hal 1173-1205.
- [4] G. Liu, L. Kong, P.Du, (2016). *“HPV Vaccine Completion and Dose Adherence Among Commercially Insured Females Aged 9 Through 26 Year in The Us”*, Papillomavirus Res.2 Hal 1-8.
- [5] D.Utami (2012). *“Bilangan Reproduksi pada Model DISP dari Penyebaran Virus HIV-AIDS”*. Dept. Matematika Universitas Airlangga.
- [6] T.Malik, A.Gumel, E. Elbasha, (2013). *“Qualitative Analysis of An Age-and Sex-Structured Vaccination Model for Human Papillomavirus,”* Discret. Contin.Dyn. Syst, Ser. B 18, Hal 2151-2174.
- [7] S. Oluwaseun, T.Malik. (2017). *“A Model to Assess The Effect of Vaccine Compliance on Human Papillomavirus*

- Infection and Cervical Cancer*". Applied Mathematical Modelling 47. Hal 528-550.
- [8] N.Hera 2012 "*Human Papillomavirus dan Kanker Serviks*", Kalbe Genomics Laboratory, Vol 39 Hal 65-66
- [9] Boyce, W.E, & DiPrima, R.C (2009). "*Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*" (Ninth ed). United States of America: John Wiley & Sons, Inc.
- [10] Anton H., Rorres C. 2005. *Elementary Linear Algebra 9<sup>th</sup> edition*. John Wiley & Sons, Inc.
- [11] Finizio, N dan Landas, G 1988. *Ordinary Differential Equations with Modern Applications*. California: Wadsworth Publishing Company.
- [12] E. Elbasha, E. Dashbach, R. Insinga, R. Haupt. (2009). "*Age-Based Programs for Vaccination Against HPV*", Value Health Vol.12 Hal.697-707.
- [13] Giesecke, J. 2002. "*Modern Infection Disease Epidemiology, Second Edition*". Florida; CRC Press.
- [14] Driessche, P dan Watmough, J. 2002. "*Reproduction Number and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission*". Mathematical Biosciences. Vol 180 Hal 29-48.
- [15] L. Markowitz, V. Tsu, S. Deeks, H. Cubie, S. Wang, A. Vicari, J. Brotherton, (2012). "*Human Papillomavirus Vaccine Introduction-The First Five Years*", Vaccine 30 S. Hal 139-148
- [16] Harberman, R. (1997). *Mathematical Model: "An Introduction to Applied Mathematics."* New Jersey: Prentice-Hall.

## LAMPIRAN A

### Listing Program Matlab R2013a Model Matematika Pengaruh Pemberian Vaksin pada Infeksi terhadap Kanker Serviks

```

clear all;
clc;
close all;

%Tugas Akhir
%Astika Febriani/061111440000021
%Analisis Stabilitas Model Matematika Pengaruh
Pemberian Infeksi HPV terhadap Kanker
%Metode Runge-Kutta Orde 4

%-----inisialisasi syarat awal-----
-----
t0 = input('masukkan waktu awal =');
tf = input('masukkan waktu akhir =');
n = input('masukkan banyaknya iterasi =');

h = (tf-t0)/n ;
t = 0:h:n*h;
hh = 1/2;
%----- variable state-----
-
%model 1
S1=zeros(n+1,1);
U1=zeros(n+1,1);
V1=zeros(n+1,1);
W1=zeros(n+1,1);
E1=zeros(n+1,1);
I1=zeros(n+1,1);
R1=zeros(n+1,1);
%model 2
S2=zeros(n+1,1);
U2=zeros(n+1,1);
V2=zeros(n+1,1);
W2=zeros(n+1,1);
E2=zeros(n+1,1);

```

```
I2=zeros (n+1,1);
P=zeros (n+1,1);
Q=zeros (n+1,1);
C=zeros (n+1,1);
Rc=zeros (n+1,1);
R2=zeros (n+1,1);
%model 3
Sm=zeros (n+1,1);
Um=zeros (n+1,1);
Vm=zeros (n+1,1);
Wm=zeros (n+1,1);
Em=zeros (n+1,1);
Im=zeros (n+1,1);
Rm=zeros (n+1,1);
Nf=zeros (n+1,1);
Nm=zeros (n+1,1);

%inialisasi variabel state model 1
S1(1)=1;
U1(1)=0.15;
V1(1)=0.2;
W1(1)=0.25;
E1(1)=0.5;
I1(1)=0.6;
R1(1)=0.7;
%%inialisasi variabel state model 2
S2(1)=0.9;
U2(1)=0.2;
V2(1)=0.1;
W2(1)=0.09;
E2(1)=0.5;
I2(1)=0.4;
P(1)=0.3;
Q(1)=0.2;
C(1)=0.1;
Rc(1)=0.24;
R2(1)=0.2;
%%inialisasi variabel state model 3
Sm(1)=0.5;
Um(1)=0.03;
Vm(1)=0.02;
```



```

Wm(1)=0.01;
Em(1)=0.3;
Im(1)=0.3;
Rm(1)=0.05;

```

```

Nf(1)=S1(1)+U1(1)+V1(1)+W1(1)+E1(1)+I1(1)+R1(1)+
S2(1)+U2(1)+V2(1)+W2(1)+E2(1)+I2(1)+P(1)+Q(1)+C(
1)+R2(1);
Nm(1)=Sm(1)+Um(1)+Vm(1)+Wm(1)+Em(1)+Im(1)+Rm(1);

```

```

%-----inisialisasi
parameter-----
pim=0.01; pif=0.01;
betam=0.8;betaf=0.7;
cf=0.2;
cm=0.2;
mium=0.015; miuf=0.015;
tetal=0.5;teta2=0.9;tetam=0.95; eta=0.1;
phim=0.3; phif=0.3;
psiu=0.5; psiv=0.5; psiw=0.5;
omegau=0.5; omegav=0.1; omegaw=0.1;
epsilonu=0.3; epsilonv=0.7; epsilonw=0.95;
xi=0.9;
rhom=0.5;rho1=0.5; rho2=0.5;
sigma1=0.5; sigma3=0.5; sigma4=0.5;
sigma2=0.5;
r=0.99;
sigmam=0.5;
kappa=0.08;
alfa=0.1;
gamma=0.5;
delf=0.001;
tau11=0.5;
tau12=0.5;
tau13=0.5;
tau21=0.5;
tau22=0.5;
tau23=0.5;
taum1=0.5;

```

```
taum2=0.5;
```

```
taum3=0.5;
```

```
lamdam=betam*cf*(tetam*Em(1)+Im(1))/Nm(1);
```

```
lamdaf=betaf*cm*((teta1*E1(1))+I1(1)+(teta1*E2(1)))+(teta2*P(1))/Nf(1);
```

```
%---Representasi Metode Runge-Kutta
```

```
%=== model 1 =====
```

```
for i=1:n
```

```
    % k1
```

```
    S1k1=h*((pif*(1-phif))- (psiu*S1(i))- (lamdam*S1(i))- ((xi+miuf)*S1(i)));
```

```
    U1k1=h*((pif*phif)+ (psiu*S1(i))- ((1-epsilon)*lamdam*U1(i))- ((psiv+xi+miuf)*U1(i)));
```

```
    V1k1=h*((psiv*U1(i))- ((1-epsilonv)*lamdam*V1(i))- ((psiw+xi+miuf)*V1(i)));
```

```
    W1k1=h*((psiw*V1(i))- ((1-epsilonw)*lamdam*W1(i))- ((xi+miuf)*W1(i)));
```

```
    E1k1=h*((lamdam*(S1(i)+(1-epsilon)*U1(i)+(1-epsilonv)*V1(i)+(1-epsilonw)*W1(i))))- ((rho1+xi+miuf)*E1(i)));
```

```
    I1k1=h*((rho1*E1(i))- ((sigma1+xi+miuf)*I1(i)));
```

```
    R1k1=h*((sigma1*I1(i))- ((xi+miuf)*R1(i)));
```

```
    %k2
```

```
    S1k2=h*((pif*(1-phif))- (psiu*(S1(i)+hh*S1k1))- (lamdam*(S1(i)+hh*S1k1))- ((xi+miuf)*(S1(i)+hh*S1k1)));
```

```
    U1k2=h*((pif*phif+psiu*(S1(i)+hh*S1k1))- ((1-epsilon)*lamdam*(U1(i)+hh*U1k1))- ((psiv+xi+miuf)*(U1(i)+hh*U1k1)));
```

```
    V1k2=h*((psiv*(U1(i)+hh*U1k1))- ((1-epsilonv)*lamdam*(V1(i)+hh*V1k1))- ((psiw+xi+miuf)*(V1(i)+hh*V1k1)));
```

```
    W1k2=h*((psiw*(V1(i)+hh*V1k1))- ((1-epsilonw)*lamdam*(W1(i)+hh*W1k1))- ((xi+miuf)*(W1(i)+hh*W1k1)));
```

```
    E1k2=h*((lamdam*(S1(i)+hh*S1k1)+(1-epsilon)*(U1(i)+hh*U1k1)+(1-epsilonv)*(V1(i)+hh*V1k1)+(1-epsilonw)*(W1(i)+hh*W1k1))))- ((rho1+xi+miuf)*(E1(i)+hh*E1k1)));
```

```
    I1k2=h*((rho1*(E1(i)+hh*E1k1))- ((sigma1+xi+miuf)*(I1(i)+hh*I1k1)));
```

```
    R1k2=h*((sigma1*(I1(i)+hh*I1k1))- ((xi+miuf)*(R1(i)+hh*R1k1)));
```

```
endfor
```

```

W1k2=h*(((psiw*(V1(i)+hh*V1k1)-((1-
epsilonw)*lamdam*(W1(i)+hh*W1k1))-
((xi+miuf)*(W1(i)+hh*W1k1)))));
E1k2=h*(((lamdam*((S1(i)+hh*S1k1))+((1-
epsilonu)*(U1(i)+hh*U1k1)))+(1-
epsilonv)*(V1(i)+hh*V1k1))+((1-
epsilonw)*(W1(i)+hh*W1k1))-
((rho1+xi+miuf)*(E1(i)+hh*E1k1))));
I1k2=h*((rho1*(E1(i)+E1k1))-
((sigma1+xi+miuf)*(I1(i)+hh*I1k1)));
R1k2=h*((sigma1*(I1(i)+hh*I1k1))-
((xi+miuf)*(R1(i)+R1k1)));

%k3
S1k3=h*(((pif*(1-phif))-
(psiu*(S1(i)+hh*S1k2))-lamdam*(S1(i)+hh*S1k2))-
((xi+miuf)*(S1(i)+hh*S1k2)));
U1k3=h*(((pif*phif+psiu*(S1(i)+hh*S1k2))-
((1-epsilonu)*lamdam*(U1(i)+hh*U1k2))-
((psiv+xi+miuf)*(U1(i)+hh*U1k2))));
V1k3=h*(((psiv*(U1(i)+hh*U1k2))-((1-
epsilonv)*lamdam*(V1(i)+hh*V1k2))-
((psiw+xi+miuf)*(V1(i)+hh*V1k2)));
W1k3=h*(((psiw*(V1(i)+hh*V1k2))-((1-
epsilonw)*lamdam*(W1(i)+hh*W1k2))-
((xi+miuf)*(W1(i)+hh*W1k2))));
E1k3=h*(((lamdam*((S1(i)+hh*S1k2))+((1-
epsilonu)*(U1(i)+hh*U1k2)))+(1-
epsilonv)*(V1(i)+hh*V1k2))+((1-
epsilonw)*(W1(i)+hh*W1k2))-
((rho1+xi+miuf)*(E1(i)+hh*E1k2))));
I1k3=h*((rho1*(E1(i)+E1k2))-
((sigma1+xi+miuf)*(I1(i)+hh*I1k2)));
R1k3=h*((sigma1*(I1(i)+hh*I1k2))-
((xi+miuf)*(R1(i)+R1k2)));

%k4
S1k4=h*(((pif*(1-phif))- (psiu*(S1(i)+S1k3))-
lamdam*(S1(i)+S1k3))-
((xi+miuf)*(S1(i)+S1k3)));

```

```

    U1k4=h*(((pif*phif+psiu*(S1(i)+S1k3))-((1-
epsilonu)*lamdam*(U1(i)+U1k3))-
((psiv+xi+miuf)*(U1(i)+U1k3))));
    V1k4=h*(((psiv*(U1(i)+U1k3))-((1-
epsilonv)*lamdam*(V1(i)+V1k3))-
((psiv+xi+miuf)*(V1(i)+V1k3))));
    W1k4=h*(((psiw*(V1(i)+V1k3))-((1-
epsilonw)*lamdam*(W1(i)+W1k3))-
((xi+miuf)*(W1(i)+W1k3))));
    E1k4=h*(((lamdam*((S1(i)+S1k3)+((1-
epsilonu)*(U1(i)+U1k3))+((1-
epsilonv)*(V1(i)+V1k3))+((1-
epsilonw)*(W1(i)+W1k3)))-
((rho1+xi+miuf)*(E1(i)+E1k3)))));
    I1k4=h*((rho1*(E1(i)+E1k3))-
((sigma1+xi+miuf)*(I1(i)+I1k3)));
    R1k4=h*((sigma1*(I1(i)+I1k3))-
((xi+miuf)*(R1(i)+R1k3)));

    S1(i+1)=S1(i)+((1/6)*(S1k1+S1k2+S1k3+S1k4));
    U1(i+1)=U1(i)+((1/6)*(U1k1+U1k2+U1k3+U1k4));
    V1(i+1)=V1(i)+((1/6)*(V1k1+V1k2+V1k3+V1k4));
    W1(i+1)=W1(i)+((1/6)*(W1k1+W1k2+W1k3+W1k4));
    E1(i+1)=E1(i)+((1/6)*(E1k1+E1k2+E1k3+E1k4));
    I1(i+1)=I1(i)+((1/6)*(I1k1+I1k2+I1k3+I1k4));
    R1(i+1)=R1(i)+((1/6)*(R1k1+R1k2+R1k3+R1k4));

```

end

```

%==== model 2 =====

```

```

for i=1:n

```

```

    %k1
    S2k1=h*((xi*S1(i))-(eta*lamdam*S2(i))-
(miuf*S2(i)));
    U2k1=h*((xi*U1(i))-(eta*(1-
epsilonu)*lamdam*U2(i))-(miuf*U2(i)));
    V2k1=h*((xi*V1(i))-(eta*(1-
epsilonv)*lamdam*V2(i))-(miuf*V2(i)));

```

```

W2k1=h*((xi*W1(i))-(eta*(1-
epsilonw)*lamdam*W2(i)-(miuf*W2(i)));
E2k1=h*((xi*E1(i))+(eta*lamdam*(S2(i)+(1-
epsilonu)*U2(i)+(1-epsilonv)*V2(i)+(1-
epsilonw)*W2(i)))-((rho2+miuf)*E2(i)));
I2k1=h*((xi*I1(i))+(rho2*E2(i))-
((sigma2+miuf)*I2(i)));
Pk1=h*((1-r)*sigma2*I2(i))-
((sigma3+kappa+miuf)*P(i));
Qk1=h*((kappa*P(i))-
((sigma4+alfa+miuf)*Q(i)));
Ck1=h*((alfa*Q(i))-
((gamma+miuf+delf)*C(i)));
Rck1=h*((gamma*Q(i))-(miuf*Rc(i)));

R2k1=h*((xi*R1(i))+(r*sigma2*I2(i))+(sigma3*P(i)
)+(sigma4*Q(i))-(miuf*R2(i)));

%k2
S2k2=h*((xi*(S1(i)+hh*S1k1))-
(eta*lamdam*(S2(i)+hh*S2k1))-
(miuf*(S2(i)+hh*S2k1)));
U2k2=h*((xi*(U1(i)+hh*U1k1))-(eta*(1-
epsilonu)*lamdam*(U2(i)+hh*U2k1))-
(miuf*(U2(i)+hh*U2k1)));
V2k2=h*((xi*(V1(i)+hh*V1k1))-(eta*(1-
epsilonv)*lamdam*(V2(i)+hh*V2k1))-
(miuf*(V2(i)+hh*V2k1)));
W2k2=h*((xi*(W1(i)+hh*W1k1))-(eta*(1-
epsilonw)*lamdam*(W2(i)+hh*W2k1))-
(miuf*(W2(i)+hh*W2k1)));

E2k2=h*((xi*(E1(i)+hh*E1k1))+(eta*lamdam*((S2(i)
+hh*S2k1)+((1-epsilonu)*(U2(i)+hh*U2k1))+((1-
epsilonv)*(V2(i)+hh*V2k1))+((1-
epsilonw)*(W2(i)+hh*W2k1))-
((rho2+miuf)*(E2(i)+hh*E2k1)))));

I2k2=h*((xi*(I1(i)+hh*I1k1))+(rho2*(E2(i)+hh*E2k
1))-((sigma2+miuf)*(I2(i)+hh*I2k1)));

```

$$\begin{aligned}
Pk2 &= h * ((1-r) * \sigma_2 * (I_2(i) + hh * I_{2k1}) - \\
& ((\sigma_3 + \kappa + \mu_f) * (P(i) + hh * Pk1))) ); \\
Qk2 &= h * ((\kappa * (P(i) + hh * Pk1)) - \\
& ((\sigma_4 + \alpha + \mu_f) * (Q(i) + hh * Qk1))) ); \\
Ck2 &= h * ((\alpha * (Q(i) + hh * Qk1)) - \\
& ((\gamma + \mu_f + \delta) * (C(i) + hh * Ck1))) ); \\
Rck2 &= h * ((\gamma * (C(i) + hh * Ck1)) - \\
& (\mu_f * (Rc(i) + hh * Rck1))) );
\end{aligned}$$

$$R2k2 = h * ((\xi * (R_1(i) + hh * R_{1k1})) + (r * \sigma_2 * (I_2(i) + hh * I_{2k1})) + (\sigma_3 * (P(i) + hh * Pk1)) + (\sigma_4 * (Q(i) + hh * Qk1)) - (\mu_f * (R_2(i) + hh * R_{2k1}))) );$$

$$\begin{aligned}
& \%k3 \\
S2k3 &= h * ((\xi * (S_1(i) + hh * S_{1k2})) - \\
& (\eta * \lambda_{dam} * (S_2(i) + hh * S_{2k2})) - \\
& (\mu_f * (S_2(i) + hh * S_{2k2}))) ); \\
U2k3 &= h * ((\xi * (U_1(i) + hh * U_{1k2})) - (\eta * (1 - \\
& \epsilon_{nu}) * \lambda_{dam} * (U_2(i) + hh * U_{2k2})) - \\
& (\mu_f * (U_2(i) + hh * U_{2k2}))) ); \\
V2k3 &= h * ((\xi * (V_1(i) + hh * V_{1k2})) - (\eta * (1 - \\
& \epsilon_{nu}) * \lambda_{dam} * (V_2(i) + hh * V_{2k2})) - \\
& (\mu_f * (V_2(i) + hh * V_{2k2}))) ); \\
W2k3 &= h * ((\xi * (W_1(i) + hh * W_{1k2})) - (\eta * (1 - \\
& \epsilon_{nu}) * \lambda_{dam} * (W_2(i) + hh * W_{2k2})) - \\
& (\mu_f * (W_2(i) + hh * W_{2k2}))) );
\end{aligned}$$

$$E2k3 = h * ((\xi * (E_1(i) + hh * E_{1k2})) + (\eta * \lambda_{dam} * ((S_2(i) + hh * S_{2k2}) + (1 - \epsilon_{nu}) * (U_2(i) + hh * U_{2k2}) + (1 - \epsilon_{nu}) * (V_2(i) + hh * V_{2k2}) + (1 - \epsilon_{nu}) * (W_2(i) + hh * W_{2k2}) - ((\rho_2 + \mu_f) * (E_2(i) + hh * E_{2k2}))))));$$

$$\begin{aligned}
I2k3 &= h * ((\xi * (I_1(i) + hh * I_{1k2})) + (\rho_2 * (E_2(i) + hh * E_{2k2})) - ((\sigma_2 + \mu_f) * (I_2(i) + hh * I_{2k2}))) ); \\
Pk3 &= h * ((1-r) * \sigma_2 * (I_2(i) + hh * I_{2k2}) - \\
& ((\sigma_3 + \kappa + \mu_f) * (P(i) + hh * Pk2))) ); \\
Qk3 &= h * ((\kappa * (P(i) + hh * Pk2)) - \\
& ((\sigma_4 + \alpha + \mu_f) * (Q(i) + hh * Qk2))) );
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ck3 &= h * ((\text{alfa} * (Q(i) + hh * Qk2)) - \\ & ((\text{gamma} + \text{miuf} + \text{delf}) * (C(i) + hh * Ck2))); \\ Rck3 &= h * ((\text{gamma} * (C(i) + hh * Ck2)) - \\ & (\text{miuf} * (Rc(i) + hh * Rck2))); \end{aligned}$$

$$R2k3 = h * ((\text{xi} * (R1(i) + hh * R1k2)) + (r * \text{sigma}2 * (I2(i) + hh * I2k2)) + (\text{sigma}3 * (P(i) + hh * Pk2)) + (\text{sigma}4 * (Q(i) + hh * Qk2)) - (\text{miuf} * (R2(i) + hh * R2k2)));$$

$$\begin{aligned} \%k4 \\ S2k4 &= h * ((\text{xi} * (S1(i) + S1k3)) - \\ & (\text{eta} * \text{lamdam} * (S2(i) + S2k3)) - (\text{miuf} * (S2(i) + S2k3))); \\ U2k4 &= h * ((\text{xi} * (U1(i) + U1k3)) - (\text{eta} * (1 - \\ & \text{epsilon}u) * \text{lamdam} * (U2(i) + U2k3)) - \\ & (\text{miuf} * (U2(i) + U2k3))); \\ V2k4 &= h * ((\text{xi} * (V1(i) + V1k3)) - (\text{eta} * (1 - \\ & \text{epsilon}v) * \text{lamdam} * (V2(i) + V2k3)) - \\ & (\text{miuf} * (V2(i) + V2k3))); \\ W2k4 &= h * ((\text{xi} * (W1(i) + W1k3)) - (\text{eta} * (1 - \\ & \text{epsilon}w) * \text{lamdam} * (W2(i) + W2k3)) - \\ & (\text{miuf} * (W2(i) + W2k3))); \end{aligned}$$

$$E2k4 = h * ((\text{xi} * (E1(i) + E1k3)) + (\text{eta} * \text{lamdam} * ((S2(i) + S2k3) + (1 - \text{epsilon}u) * (U2(i) + U2k3) + (1 - \text{epsilon}v) * (V2(i) + V2k3) + (1 - \text{epsilon}w) * (W2(i) + W2k3) - ((\text{rho}2 + \text{miuf}) * (E2(i) + E2k3)))));$$

$$\begin{aligned} I2k4 &= h * ((\text{xi} * (I1(i) + I1k3)) + (\text{rho}2 * (E2(i) + E2k3)) - \\ & ((\text{sigma}2 + \text{miuf}) * (I2(i) + I2k3))); \\ Pk4 &= h * (((1 - r) * \text{sigma}2 * (I2(i) + I2k3)) - \\ & ((\text{sigma}3 + \text{kappa} + \text{miuf}) * (P(i) + Pk3))); \\ Qk4 &= h * ((\text{kappa} * (P(i) + Pk3)) - \\ & ((\text{sigma}4 + \text{alfa} + \text{miuf}) * (Q(i) + Qk3))); \\ Ck4 &= h * ((\text{alfa} * (Q(i) + Qk3)) - \\ & ((\text{gamma} + \text{miuf} + \text{delf}) * (C(i) + Ck3))); \\ Rck4 &= h * ((\text{gamma} * (C(i) + Ck3)) - \\ & (\text{miuf} * (Rc(i) + Rck3))); \end{aligned}$$

$$R2k4 = h * ((\text{xi} * (R1(i) + R1k3)) + (r * \text{sigma}2 * (I2(i) + I2k3))$$

```
) + (sigma3 * (P(i) + Pk3)) + (sigma4 * (Q(i) + Qk3)) -
(miuf * (R2(i) + R2k3));
```

```
S2(i+1) = S2(i) + (1/6) * (S2k1 + S2k2 + S2k3 + S2k4);
U2(i+1) = U2(i) + (1/6) * (U2k1 + U2k2 + U2k3 + U2k4);
V2(i+1) = V2(i) + (1/6) * (V2k1 + V2k2 + V2k3 + V2k4);
W2(i+1) = W2(i) + (1/6) * (W2k1 + W2k2 + W2k3 + W2k4);
E2(i+1) = E2(i) + (1/6) * (E2k1 + E2k2 + E2k3 + E2k4);
I2(i+1) = I2(i) + (1/6) * (I2k1 + I2k2 + I2k3 + I2k4);
P(i+1) = P(i) + (1/6) * (Pk1 + Pk2 + Pk3 + Pk4);
Q(i+1) = Q(i) + (1/6) * (Qk1 + Qk2 + Qk3 + Qk4);
C(i+1) = C(i) + (1/6) * (Ck1 + Ck2 + Ck3 + Ck4);
Rc(i+1) = Rc(i) + (1/6) * (Rck1 + Rck2 + Rck3 + Rck4);
R2(i+1) = R2(i) + (1/6) * (R2k1 + R2k2 + R2k3 + R2k4);
```

```
end
```

```
%===== model 3 =====
```

```
for i=1:n
```

```
    %k1
```

```
    Smk1 = h * ((pim * (1 - phim)) - (omegau * Sm(i)) -
(lamdaf * Sm(i)) - (mium * Sm(i)));
    Umk1 = h * ((pim * phim) + (omegau * Sm(i)) - ((1 -
epsilonu) * lamdaf * Um(i)) - ((omegav + mium) * Um(i)));
    Vmk1 = h * ((omegav * Um(i)) - ((1 -
epsilonv) * lamdaf * Vm(i)) - ((omegaw + mium) * Vm(i)));
    Wmk1 = h * (((omegaw * Vm(i)) - ((1 -
epsilonw) * lamdaf * Wm(i)) - (mium * Wm(i))));
    Emk1 = h * (((lamdaf * (Sm(i) + ((1 -
epsilonu) * Um(i)) + ((1 - epsilonv) * Vm(i)) + ((1 -
epsilonw) * Wm(i)))) - ((rhom + mium) * Em(i)));
    Imk1 = h * ((rhom * Em(i)) - ((sigmam + mium) * Im(i)));
    Rmk1 = h * ((sigmam * Im(i)) - (mium * Rm(i)));
```

```
    %k2
```

```
    Smk2 = h * (((pim * (1 - phim)) -
(omegau * (Sm(i) + hh * Smk1)) -
(lamdaf * (Sm(i) + hh * Smk1)) -
(mium * (Sm(i) + hh * Smk1))));
```



```

    Umk2=h*((pim*phim)+(omegau*(Sm(i)+hh*Smk1))-
    ((1-epsilonu)*lamdaf*(Um(i)+hh*Umk1))-
    ((omegav+mium)*(Um(i)+hh*Umk1)));
    Vmk2=h*((omegav*(Um(i)+Umk1))-((1-
    epsilonv)*lamdaf*(Vm(i)+hh*Vmk1))-
    ((omegaw+mium)*(Vm(i)+hh*Vmk1)));
    Wmk2=h*((omegaw*(Vm(i)+Vmk1))-((1-
    epsilonw)*lamdaf*(Wm(i)+hh*Wmk1))-
    ((mium*(Wm(i)+hh*Wmk1)));
    Emk2=h*((lamdaf*((Sm(i)+hh*Smk1))+((1-
    epsilonu)*(Um(i)+hh*Umk1))+((1-
    epsilonv)*(Vm(i)+hh*Vmk1))+((1-
    epsilonw)*(Wm(i)+hh*Wmk1)))-
    ((rhom+mium)*(Em(i)+hh*Emk1))));
    Imk2=h*((rhom*(Em(i)+hh*Emk1))-
    ((sigmam+mium)*(Im(i)+hh*Imk1)));
    Rmk2=h*((sigmam*(Im(i)+hh*Imk1))-
    (mium*(Rm(i)+hh*Rmk1)));

    %k3
    Smk3=h*((pim*(1-phim))-
    (omegau*(Sm(i)+hh*Smk2))-
    (lamdaf*(Sm(i)+hh*Smk2))-
    (mium*(Sm(i)+hh*Smk2)));
    Umk3=h*((pim*phim)+(omegau*(Sm(i)+hh*Smk2))-
    ((1-epsilonu)*lamdaf*(Um(i)+hh*Umk2))-
    ((omegav+mium)*(Um(i)+hh*Umk2)));
    Vmk3=h*((omegav*(Um(i)+Umk2))-((1-
    epsilonv)*lamdaf*(Vm(i)+hh*Vmk2))-
    ((omegaw+mium)*(Vm(i)+hh*Vmk2)));
    Wmk3=h*((omegaw*(Vm(i)+Vmk2))-((1-
    epsilonw)*lamdaf*(Wm(i)+hh*Wmk2))-
    ((mium*(Wm(i)+hh*Wmk2)));
    Emk3=h*((lamdaf*((Sm(i)+hh*Smk2))+((1-
    epsilonu)*(Um(i)+hh*Umk2))+((1-
    epsilonv)*(Vm(i)+hh*Vmk2))+((1-
    epsilonw)*(Wm(i)+hh*Wmk2)))-
    ((rhom+mium)*(Em(i)+hh*Emk2))));
    Imk3=h*((rhom*(Em(i)+hh*Emk2))-
    ((sigmam+mium)*(Im(i)+hh*Imk2)));

```

```

Rmk3=h* ((sigmam*(Im(i)+hh*Imk2))-
(mium*(Rm(i)+hh*Rmk2)));

%k4
Smk4=h* ((pim*(1-phem))-
(omegau*(Sm(i)+Smk3))- (lamdaf*(Sm(i)+Smk3))-
(mium*(Sm(i)+Smk3)));
Umk4=h* ((pim*phem)+(omegau*(Sm(i)+Smk3))-
((1-epsilonu)*lamdaf*(Um(i)+Umk3))-
((omegav+mium)*(Um(i)+Umk3)));
Vm4=h* ((omegav*(Um(i)+Umk3))- ((1-
epsilonv)*lamdaf*(Vm(i)+Vm3))-
((omegaw+mium)*(Vm(i)+Vm3)));
Wmk4=h* ((omegaw*(Vm(i)+Vm3))- ((1-
epsilonw)*lamdaf*(Wm(i)+Wmk3))-
((mium*(Wm(i)+Wmk3)));
Emk4=h* ((lamdaf*((Sm(i)+Smk3)+((1-
epsilonu)*(Um(i)+Umk3))+((1-
epsilonv)*(Vm(i)+Vm3))+((1-
epsilonw)*(Wm(i)+Wmk3)))-
((rhom+mium)*(Em(i)+Emk3))));
Imk4=h* ((rhom*(Em(i)+Emk3))-
((sigmam+mium)*(Im(i)+Imk3)));
Rmk4=h* ((sigmam*(Im(i)+Imk3))-
(mium*(Rm(i)+Rmk3)));

Sm(i+1)=Sm(i)+((1/6)*(Smk1+Smk2+Smk3+Smk4));
Um(i+1)=Um(i)+((1/6)*(Umk1+Umk2+Umk3+Umk4));
Vm(i+1)=Vm(i)+((1/6)*(Vm41+Vm42+Vm43+Vm44));
Wm(i+1)=Wm(i)+((1/6)*(Wmk1+Wmk2+Wmk3+Wmk4));
Em(i+1)=Em(i)+((1/6)*(Emk1+Emk2+Emk3+Emk4));
Im(i+1)=Im(i)+((1/6)*(Imk1+Imk2+Imk3+Imk4));
Rm(i+1)=Rm(i)+((1/6)*(Rmk1+Rmk2+Rmk3+Rmk4));
end
%Nilai Ro
Ro1=taul1+taul2+taul3/(rho1+xi+miuf);
if Ro1 >=1
    disp('Bilangan Reproduksi Perempuan Usia
dibawah 26 tahun ')
    disp(Ro1)

```

```

        disp('stabil')
elseif (Ro1 <=1)
    disp('Bilangan Reproduksi Perempuan Usia
dibawah 26 tahun')
    disp(Ro1)
    disp('tidak stabil')
end
Ro2=tau21+tau22+tau23/(rho2+miuf);
if Ro2 >=1
    disp('Bilangan Reproduksi Perempuan usia
diatas 26 tahun')
    disp(Ro2)
    disp('stabil')
elseif (Ro2 <=1)
    disp('Bilangan Reproduksi Perempuan usia
diatas 26 tahun')
    disp(Ro2)
    disp('tidak stabil')
end

Rom=taum1+taum2+taum3/(rhom+mium);
if Rom >=1
    ('Bilangan Reproduksi Laki-Laki')
    disp(Rom)
    disp('stabil')
elseif (Ro2 <=1)
    disp('Bilangan Reproduksi Laki-Laki')
    disp(Rom)
    disp('tidak stabil')
end
if Ro1 >=1 & Ro2 >=1
    disp('Keadaan populasi perempuan usia
dibawah dan diatas 26 tahun')
    disp('stabil')
elseif (Ro1 >=1 & Ro2 <=1)
    disp('Keadaan populasi perempuan usia
dibawah dan diatas 26 tahun')
    disp('stabil')
elseif (Ro1 <=1 & Ro2 <=1)
    disp('Keadaan populasi perempuan usia
dibawah dan diatas 26 tahun')

```

```

        disp('tidak stabil')
    elseif (Ro1 <=1 & Ro2 <=1)
        disp('Keadaan populasi perempuan usia
dibawah dan diatas 26 tahun')
        disp('tidak stabil')
    end
    if (Ro1 >=1 & Rom >=1)
        disp('Keadaan populasi laki-laki dan
perempuan usia dibawah 26 tahun')
        disp('stabil')
    elseif (Ro1 >=1 & Rom <=1)
        disp('Keadaan populasi laki-laki dan
perempuan usia dibawah 26 tahun')
        disp('tidak stabil')
    elseif (Ro1 <=1 & Rom >=1)
        disp('Keadaan populasi laki-laki dan
perempuan usia dibawah 26 tahun')
        disp('tidak stabil')
    elseif (Ro1 <=1 & Rom <=1)
        disp('Keadaan populasi laki-laki dan
perempuan usia dibawah 26 tahun')
        disp ('tidak stabil')
    end
    if (Ro2 >=1 & Rom >=1)
        disp('Keadaan populasi laki-laki dan
perempuan usia diatas 26 tahun')
        disp('stabil')
    elseif (Ro2 >=1 & Rom <=1)
        disp('Keadaan populasi laki-laki dan
perempuan usia diatas 26 tahun')
        disp('tidak stabil')
    elseif (Ro2 <=1 & Rom >=1)
        disp('Keadaan populasi laki-laki dan
perempuan usia diatas 26 tahun')
        disp('tidak stabil')
    elseif (Ro2 <=1 & Rom <=1)
        disp('Hubungan antara laki-laki perempuan
usia diatas 26 tahun')
        disp ('tidak stabil')
    end

```

```

%Plot Grafik
%Model 1
figure
plot(t,S1,'r','LineWidth',3)
hold on
plot(t,U1,'--b','LineWidth',3)
plot(t,V1,'--y','LineWidth',3)
plot(t,W1,'--m','LineWidth',3)
plot(t,E1,'k','LineWidth',3)
plot(t,I1,'c','LineWidth',3)
plot(t,R1,'g','LineWidth',3)
hold off
xlabel('Waktu(Tahun)')
ylabel('Populasi(JutaJiwa)');
title('Perempuan dengan usia dibawah 26 tahun');
legend('S1','U1','V1','W1','E1','I1','R1');
grid on

%Model 2
figure
plot(t,S2,'r','LineWidth',3)
hold on
plot(t,U2,'--r','LineWidth',3)
plot(t,V2,'--k','LineWidth',3)
plot(t,W2,'--m','LineWidth',3)
plot(t,E2,'b','LineWidth',3)
plot(t,I2,'c','LineWidth',3)
plot(t,P,'m','LineWidth',3)
plot(t,Q,'k','LineWidth',3)
plot(t,C,'y','LineWidth',3)
plot(t,Rc,'--g','LineWidth',3)
plot(t,R2,'g','LineWidth',3)
hold off
xlabel('Waktu(Tahun)')
ylabel('Populasi(JutaJiwa)');
title('Perempuan dengan usia diatas 26 tahun');
legend('S2','U2','V2','W2','E2','I2','P','Q','C',
'Rc','R2');
grid on

```

```
%Model 3
figure
plot(t,Sm,'r','LineWidth',3)
hold on
plot(t,Um,'--b','LineWidth',3)
plot(t,Vm,'--y','LineWidth',3)
plot(t,Wm,'--m','LineWidth',3)
plot(t,Em,'k','LineWidth',3)
plot(t,Im,'c','LineWidth',3)
plot(t,Rm,'g','LineWidth',3)
hold off
xlabel('Waktu(Tahun)')
ylabel('Populasi(JutaJiwa)');
title('Pemberian Vaksin pada laki-laki');
legend('Sm','Um','Vm','Wm','Em','Im','Rm');
grid on
```

## LAMPIRAN B

### Perhitungan Titik Kesetimbangan

#### 1. Titik kesetimbangan bebas penyakit

##### a) Model 1

$$1) \frac{dE_1}{dt} = \lambda_m [S_1 + (1 - \epsilon_u)U_1 + (1 - \epsilon_v)V_1 + (1 - \epsilon_w)W_1] - (\rho_1 + \xi + \mu_f)E_1 \dots(1)$$

Pada persamaan pertama merupakan bebas penyakit sehingga tidak ada individu yang terserang virus HPV maka  $E_1$  adalah nol.

$$\frac{dE_1}{dt} = 0$$

$$\lambda_m [S_1 + (1 - \epsilon_u)U_1 + (1 - \epsilon_v)V_1 + (1 - \epsilon_w)W_1] - (\rho_1 + \xi + \mu_f)E_1 = 0 \text{ (1a)}$$

Substitusi  $E_1 = 0$  pada persamaan (1a), maka

$$\lambda_m [S_1 + (1 - \epsilon_u)U_1 + (1 - \epsilon_v)V_1 + (1 - \epsilon_w)W_1] = 0$$

$$\lambda_m = 0 \text{ atau}$$

$$[S_1 + (1 - \epsilon_u)U_1 + (1 - \epsilon_v)V_1 + (1 - \epsilon_w)W_1] = 0$$

$$2) \frac{dI_1}{dt} = \rho_1 E_1 - (\sigma_1 + \xi + \mu_f)I_1 \dots(2)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = 0$$

$$\rho_1 E_1 - (\sigma_1 + \xi + \mu_f)I_1 = 0 \dots(2a)$$

Substitusi  $E_1 = 0$  pada persamaan (2a), maka

$$(\sigma_1 + \xi + \mu_f)I_1 = 0 \text{ atau } I_1 = 0$$

$$3) \frac{dS_1}{dt} = \pi_f (1 - \phi_f) - \psi_u S_1 - \lambda_m S_1 - (\xi + \mu_f)S_1$$

$$\frac{dS_1}{dt} = 0$$

$$\pi_f (1 - \phi_f) - \psi_u S_1 - \lambda_m S_1 - (\xi + \mu_f)S_1 = 0 \dots(3a)$$

Substitusi  $\lambda_m = 0$ , pada persamaan (3a), maka

$$\pi_f (1 - \phi_f) - \psi_u S_1 - (\xi + \mu_f)S_1 = 0$$

$$(\psi_u + \xi + \mu_f)S_1 = \pi_f (1 - \phi_f)$$

$$S_1 = \frac{\pi_f(1 - \phi_f)}{(\psi_u + \xi + \mu_f)}$$

Misal  $(\xi + \mu_f) = k_1$ , maka  $S_1 = \frac{\pi_f(1 - \phi_f)}{(\psi_u + k_1)} \dots(3a)$

$$4) \frac{dU_1}{dt} = \pi_f \phi_f + \psi_u S_1 - (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_1 - (\psi_v + \xi + \mu_f) U_1$$

$$\frac{dU_1}{dt} = 0$$

$$\pi_f \phi_f + \psi_u S_1 - (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_1 - (\psi_v + \xi + \mu_f) U_1 = 0 \dots(4a)$$

Substitusi  $\lambda_m = 0$  dan persamaan (3a) pada persamaan (4a), maka

$$\pi_f \phi_f + \psi_u \frac{\pi_f(1 - \phi_f)}{(\psi_u + k_1)} - (\psi_v + \xi + \mu_f) U_1 = 0$$

$$U_1 = \frac{\pi_f \phi_f (\psi_u + k_1) + \psi_u \pi_f (1 - \phi_f)}{(\psi_v + \xi + \mu_f) (\psi_u + k_1)}$$

Misal  $(\psi_v + \xi + \mu_f) = k_2$ , maka

$$U_1 = \frac{\pi_f \phi_f \psi_u + \pi_f \phi_f k_1 + \psi_u \pi_f - \psi_u \pi_f \phi_f}{(k_2) (\psi_u + k_1)}$$

$$U_1 = \frac{\pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{(k_2) (\psi_u + k_1)} \dots(4b)$$

$$5) \frac{dV_1}{dt} = \psi_v U_1 - (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_1 - (\psi_w + \xi + \mu_f) V_1 \dots(5)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = 0$$

$$\psi_v U_1 - (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_1 - (\psi_w + \xi + \mu_f) V_1 = 0 \dots(5a)$$

Substitusi  $\lambda_m = 0$  dan persamaan (4a) pada persamaan (5a), maka

$$\psi_v \frac{\pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{(k_2) (\psi_u + k_1)} - (\psi_w + \xi + \mu_f) V_1 = 0$$

$$V_1 = \psi_v \frac{\pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{(k_2) (\psi_w + \xi + \mu_f) (\psi_u + k_1)}$$

Misal  $(\psi_w + \xi + \mu_f) = k_3$ , maka

$$V_1 = \frac{\psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{k_3 k_2 (\psi_u + k_1)} \dots(5b)$$



$$6) \frac{dW_1}{dt} = \psi_w W_1 - (1 - \epsilon_w) \lambda_m W_1 - (\xi + \mu_f) W_1 \dots (6)$$

$$\frac{dW_1}{dt} = 0$$

$$\psi_w W_1 - (1 - \epsilon_w) \lambda_m W_1 - (\xi + \mu_f) W_1 = 0 \dots (6a)$$

Substitusi  $\lambda_m = 0$  dan persamaan (5b) pada persamaan (6a), maka

$$\psi_w \frac{\psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{k_3 k_2 (\psi_u + k_1)} - (\xi + \mu_f) W_1 = 0$$

$$W_1 = \frac{\psi_w \psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{k_3 k_2 k_1 (\psi_u + k_1)} \quad (6b)$$

$$7) \frac{dR_1}{dt} = \sigma_1 I_1 - (\xi + \mu_f) R_1$$

$$\frac{dR_1}{dt} = 0$$

$$\sigma_1 I_1 - (\xi + \mu_f) R_1 = 0 \quad (7a)$$

Substitusi  $I_1 = 0$  pada persamaan (7a), maka

$$(\xi + \mu_f) R_1 = 0 \text{ atau } R_1 = 0$$

Titik kesetimbangan model 1 yaitu

$$\epsilon_0 = (E_1^0, I_1^0, S_1^0, U_1^0, V_1^0, W_1^0, R_1^0)$$

## b. Model 2

$$1) \frac{dE_2}{dt} = \xi W_1 + \eta \lambda_m [S_2 + (1 - \epsilon_u) U_2 + (1 - \epsilon_v) V_2 + (1 - \epsilon_w) W_2] - (\rho_2 + \mu_f) E_2$$

Pada persamaan pertama merupakan bebas penyakit sehingga tidak ada individu yang terserang virus HPV maka  $E_2$  adalah nol.

$$\xi E_1 + \eta \lambda_m [S_2 + (1 - \epsilon_u) U_2 + (1 - \epsilon_v) V_2 + (1 - \epsilon_w) W_2] - (\rho_2 + \mu_f) E_2 = 0 \dots (8a)$$

Substitusi  $E_2 = 0$  dan  $E_1 = 0$  pada persamaan (8a)

$$\eta \lambda_m [S_2 + (1 - \epsilon_u) U_2 + (1 - \epsilon_v) V_2 + (1 - \epsilon_w) W_2] = 0$$

$$\lambda_m = 0 \text{ atau } [S_2 + (1 - \epsilon_u) U_2 + (1 - \epsilon_v) V_2 + (1 - \epsilon_w) W_2] = 0$$

$$2) \frac{dI_2}{dt} = \xi I_1 + \rho_2 E_2 - (\sigma_2 + \mu_f) I_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$\xi I_1 + \rho_2 E_2 - (\sigma_2 + \mu_f) I_2 = 0 \quad (9a)$$

Substitusi  $E_2 = 0$  dan  $I_1 = 0$  pada persamaan (8a), maka  $(\sigma_2 + \mu_f) I_2 = 0$  atau  $I_2 = 0$

$$3) \frac{dS_2}{dt} = \xi S_1 - \eta \lambda_m S_2 - \mu_f S_2$$

$$\frac{dS_2}{dt} = 0$$

$$\xi S_1 - \eta \lambda_m S_2 - \mu_f S_2 = 0 \quad (10a)$$

Substitusi  $\lambda_m = 0$  dan (3b) pada persamaan (10a), maka

$$\frac{\xi \pi_f (1 - \phi_f)}{(\psi_u + k_1)} - \mu_f S_2 = 0$$

$$S_2 = \frac{\xi \pi_f (1 - \phi_f)}{\mu_f (\psi_u + k_1)} \dots (10b)$$

$$4) \frac{dU_2}{dt} = \xi U_1 - \eta (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_2 - \mu_f U_2$$

$$\frac{dU_2}{dt} = 0$$

$$\xi U_1 - \eta (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_2 - \mu_f U_2 = 0 \dots (11a)$$

Substitusi  $\lambda_m = 0$  dan (4b) pada persamaan (11a), maka

$$\frac{\xi \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{(k_2)(\psi_u + k_1)} - \mu_f U_2 = 0$$

$$U_2 = \frac{\xi \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{\mu_f (k_2)(\psi_u + k_1)} \quad (11b)$$

$$5) \frac{dV_2}{dt} = \xi V_1 - \eta (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_2 - \mu_f V_2$$

$$\frac{dV_2}{dt} = 0$$

$$\xi V_1 - \eta (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_2 - \mu_f V_2 = 0 \quad (12a)$$

Substitusi  $\lambda_m = 0$  dan (5b) pada persamaan (12a), maka

$$\frac{\xi \psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{k_3 k_2 (\psi_u + k_1)} - \mu_f V_2 = 0$$

$$V_2 = \frac{\xi \psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{\mu_f k_3 k_2 (\psi_u + k_1)} \dots (12b)$$

$$6) \frac{dW_2}{dt} = \xi W_1 - \eta(1 - \epsilon_w)\lambda_m W_2 - \mu_f W_2$$

$$\frac{dW_2}{dt} = 0$$

$$\xi W_1 - \eta(1 - \epsilon_w)\lambda_m W_2 - \mu_f W_2 = 0 \quad (13a)$$

Substitusi  $\lambda_m = 0$  dan (6b) pada persamaan (13a), maka

$$\frac{\xi \psi_w \psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{k_3 k_2 k_1 (\psi_u + k_1)} - \mu_f W_2 = 0$$

$$W_2 = \frac{\xi \psi_w \psi_v \pi_f (\phi_f k_1 + \psi_u)}{\mu_f k_3 k_2 k_1 (\psi_u + k_1)} \dots (13b)$$

$$7) \frac{dP}{dt} = (1 - r)\sigma_2 I_2 - (\sigma_3 + \kappa + \mu_f)P$$

$$\frac{dP}{dt} = 0$$

$$(1 - r)\sigma_2 I_2 - (\sigma_3 + \kappa + \mu_f)P = 0 \dots (14a)$$

Substitusi  $I_2 = 0$  pada persamaan (14a)

$$(\sigma_3 + \kappa + \mu_f)P = 0 \text{ atau } P = 0$$

$$8) \frac{dQ}{dt} = \kappa P - (\sigma_4 + \alpha + \mu_f)Q$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\kappa P - (\sigma_4 + \alpha + \mu_f)Q = 0 \dots (15a)$$

Substitusi  $P = 0$  pada persamaan (15a), maka  $(\sigma_4 + \alpha + \mu_f)Q =$

$$0 \text{ atau } Q = 0$$

$$9) \frac{dC}{dt} = \alpha Q - (\gamma + \mu_f + \delta_f)C$$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

$$\alpha Q - (\gamma + \mu_f + \delta_f)C = 0 \quad (16a)$$

Substitusi  $Q = 0$  pada persamaan (16a) maka  $(\gamma + \mu_f + \delta_f)C = 0$

$$\text{atau } C = 0$$

$$10) \frac{dR_c}{dt} = \gamma C - \mu_f R_c$$

$$\begin{aligned}\frac{dR_c}{dt} &= 0 \\ \gamma C - \mu_f R_c &= 0 \quad (17a)\end{aligned}$$

Substitusi  $C = 0$  pada persamaan (17a), maka  $\mu_f R_c = 0$  atau  $R_c = 0$

$$11) \frac{dR_2}{dt} = \xi R_1 + r\sigma_2 I_2 + \sigma_3 P + \sigma_4 Q - \mu_f R_2$$

$$\begin{aligned}\frac{dR_2}{dt} &= 0 \\ \xi R_1 + r\sigma_2 I_2 + \sigma_3 P + \sigma_4 Q - \mu_f R_2 &= 0 \quad (18a)\end{aligned}$$

Substitusi  $R_1 = 0$ ,  $P = 0$ ,  $Q = 0$ , dan  $I_2$  pada persamaan (18a), maka  $\mu_f R_2 = 0$  atau  $R_2 = 0$

Titik kesetimbangan pada model 2 yaitu

$$\varepsilon_0 = (E_m^0, I_m^0, S_m^0, U_m^0, V_m^0, W_m^0, P^0, Q^0, C^0, R_c^0, R_2^0)$$

### c. Model 3

$$1) \frac{dE_m}{dt} = \lambda_f [S_m + (1 - \varepsilon_u)U_m + (1 - \varepsilon_v)V_m + (1 - \varepsilon_w)W_m] - (\rho_m + \mu_m)E_m$$

$$\begin{aligned}\frac{dE_m}{dt} &= 0 \\ \lambda_f [S_m + (1 - \varepsilon_u)U_m + (1 - \varepsilon_v)V_m + (1 - \varepsilon_w)W_m] - (\rho_m + \mu_m)E_m &= 0 \quad (19)\end{aligned}$$

Pada persamaan pertama perupakan bebas penyakit sehingga tidak ada individu yang terserang virus HPV maka  $E_m$  adalah nol.

$$\lambda_f = 0 \text{ atau } [S_m + (1 - \varepsilon_u)U_m + (1 - \varepsilon_v)V_m + (1 - \varepsilon_w)W_m] = 0$$

$$2) \frac{dI_m}{dt} = \rho_m E_m - (\sigma_m + \mu_m)I_m$$

$$\begin{aligned}\frac{dI_m}{dt} &= 0 \\ \rho_m E_m - (\sigma_m + \mu_m)I_m &= 0 \dots (20a)\end{aligned}$$

Substitusi  $E_m = 0$  pada persamaan (20a), maka  $(\sigma_m + \mu_m)I_m = 0$  atau  $I_m = 0$

$$3) \frac{dS_m}{dt} = \pi_m(1 - \phi_m) - \omega_u S_m - \lambda_f S_m - \mu_m S_m$$

$$\frac{dS_m}{dt} = 0$$

$$\pi_m(1 - \phi_m) - \omega_u S_m - \lambda_f S_m - \mu_m S_m = 0 \dots(21a)$$

Substitusi  $\lambda_m = 0$  pada persamaan (21a), maka

$$\pi_m(1 - \phi_m) - (\omega_u + \mu_m)S_m = 0$$

$$S_m = \frac{\pi_m(1-\phi_m)}{(\omega_u + \mu_m)} \quad (21b)$$

$$4) \frac{dU_m}{dt} = \pi_m \phi_m + \omega_u S_m - (1 - \epsilon_u)\lambda_f U_m - (\omega_v + \mu_m)U_m$$

$$\frac{dU_m}{dt} = 0$$

$$\pi_m \phi_m + \omega_u S_m - (1 - \epsilon_u)\lambda_f U_m - (\omega_v + \mu_m)U_m = 0 \dots(22a)$$

Substitusi  $\lambda_f = 0$  dan persamaan (21b) pada persamaan (22a),maka

$$\pi_m \phi_m + \frac{\omega_u \pi_m (1 - \phi_m)}{(\omega_u + \mu_m)} - (\omega_v + \mu_m)U_m = 0$$

$$U_m = \frac{\pi_m \phi_m (\omega_u + \mu_m) + \omega_u \pi_m (1 - \phi_m)}{(\omega_v + \mu_m)(\omega_u + \mu_m)}$$

$$U_m = \frac{\pi_m \phi_m \omega_u + \pi_m \phi_m \mu_m + \omega_u \pi_m - \omega_u \pi_m \phi_m}{(\omega_v + \mu_m)(\omega_u + \mu_m)}$$

$$U_m = \frac{\pi_m \phi_m \omega_u + \omega_u \pi_m}{(\omega_v + \mu_m)(\omega_u + \mu_m)}, \text{ misal } k_4 = (\omega_v + \mu_m)$$

$$U_m = \frac{\pi_m \phi_m \omega_u + \omega_u \pi_m}{k_4 (\omega_u + \mu_m)} \dots(22b)$$

$$5) \frac{dV_m}{dt} = \omega_v U_m - (1 - \epsilon_v)\lambda_f V_m - (\omega_w + \mu_m)V_m$$

$$\frac{dV_m}{dt} = 0$$

$$\omega_v U_m - (1 - \epsilon_v)\lambda_f V_m - (\omega_w + \mu_m)V_m = 0 \dots(23a)$$

Substitusi  $\lambda_f = 0$  dan persamaan (22b) pada persamaan (23a),  
maka

$$\frac{\omega_v \pi_m \phi_m \omega_u + \omega_u \pi_m}{k_4 (\omega_u + \mu_m)} - (\omega_w + \mu_m) V_m = 0$$

$$V_m = \frac{\omega_v \pi_m \phi_m \omega_u + \omega_u \pi_m}{k_4 (\omega_w + \mu_m) (\omega_u + \mu_m)}$$

Misal  $k_5 = (\omega_w + \mu_m)$ , maka

$$V_m = \frac{\omega_v \pi_m \phi_m \omega_u + \omega_u \pi_m}{k_4 k_5 (\omega_u + \mu_m)} \dots (23b)$$

$$6) \frac{dW_m}{dt} = \omega_u V_m - (1 - \epsilon_w) \lambda_f W_m - \mu_m W_m$$

$$\frac{dW_m}{dt} = 0$$

$$\omega_u V_m - (1 - \epsilon_w) \lambda_f W_m - \mu_m W_m = 0 \dots (24a)$$

Substitusi  $\lambda_f = 0$  dan persamaan (23a) pada persamaan (24a)

$$\frac{\omega_u \omega_v \pi_m \phi_m \omega_u + \omega_u \pi_m}{k_4 k_5 (\omega_u + \mu_m)} - \mu_m W_m = 0$$

$$W_m = \frac{\omega_u \omega_v \pi_m \phi_m \omega_u + \omega_u \pi_m}{k_4 k_5 \mu_m (\omega_u + \mu_m)}$$

$$7) \frac{dR_m}{dt} = \sigma_m I_m - \mu_m R_m$$

$$\frac{dR_m}{dt} = 0$$

$$\sigma_m I_m - \mu_m R_m = 0$$

Substitusi persamaan  $I_m = 0$  pada persamaan (24), maka  $\mu_m R_m = 0$  atau  $R_m = 0$

Jadi titik kesetimbangan pada model 3 adalah

$$\epsilon_0 = S_m^0, U_m^0, V_m^0, W_m^0, E_m^0, I_m^0, R_m^0$$

## 2. Titik kesetimbangan endemik

### a) Model 1

$$1) \frac{dS_1}{dt} = \pi_f (1 - \phi_f) - \psi_u S_1 - \lambda_m S_1 - (\xi + \mu_f) S_1$$

$$\frac{dS_1}{dt} = 0$$

$$\pi_f (1 - \phi_f) - \psi_u S_1^{**} - \lambda_m S_1^{**} - (\xi + \mu_f) S_1^{**} = 0$$

$$S_1^{**}(\psi_u + \lambda_m + \xi + \mu_f) = \pi_f(1 - \phi_f)$$

$$S_1^{**} = \frac{\pi_f(1 - \phi_f)}{(\psi_u + \lambda_m + \xi + \mu_f)}$$

Misal  $k_1 = \xi + \mu_f$ ,  $D_{11} = \psi_u + k_1$ , maka

$$S_1^{**} = \frac{\pi_f(1 - \phi_f)}{(\lambda_m + D_{11})}$$

$$2) \frac{dU_1}{dt} = \pi_f \phi_f + \psi_u S_1 - (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_1 - (\psi_v + \xi + \mu_f) U_1$$

$$\frac{dU_1}{dt} = 0$$

$$\pi_f \phi_f + \psi_u S_1^{**} - (1 - \epsilon_u) \lambda_m U_1^{**} - (\psi_v + \xi + \mu_f) U_1^{**} = 0$$

$$U_1^{**} = \frac{\pi_f \phi_f + \psi_u S_1^{**}}{(1 - \epsilon_u) \lambda_m + \psi_v + \xi + \mu_f}$$

Misal  $k_2 = \psi_v + \xi + \mu_f$ ,  $D_u = (1 - \epsilon_u)$

Maka dengan mensubstitusikan

$$S_1^{**} = \frac{\pi_f(1 - \phi_f)}{(\lambda_m + D_{11})}$$

$$\text{Diperoleh } U_1^{**} = \frac{\pi_f \phi_f + \psi_u S_1^{**}}{(1 - \epsilon_u) \lambda_m + \psi_v + \xi + \mu_f}$$

$$3) \frac{dV_1}{dt} = \psi_v U_1 - (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_1 - (\psi_w + \xi + \mu_f) V_1$$

$$\frac{dV_1}{dt} = 0$$

$$\psi_v U_1^{**} - (1 - \epsilon_v) \lambda_m V_1^{**} - (\psi_w + \xi + \mu_f) V_1^{**} = 0$$

$$V_1^{**} = \frac{\psi_v U_1^{**}}{(1 - \epsilon_v) \lambda_m + (\psi_w + \xi + \mu_f)}$$

$$\text{Dengan mensubstitusikan } U_1^{**} = \frac{\pi_f \phi_f + \psi_u S_1^{**}}{(1 - \epsilon_u) \lambda_m + \psi_v + \xi + \mu_f}$$

Maka di dapatkan

$$V_1^{**} = \frac{\psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

$$4) \frac{dW_1}{dt} = \psi_w V_1 - (1 - \epsilon_w) \lambda_m W_1 - (\xi + \mu_f) W_1$$

$$\frac{dW_1}{dt} = 0$$

$$\psi_w V_1^{**} - (1 - \epsilon_w) \lambda_m W_1^{**} - (\xi + \mu_f) W_1^{**} = 0$$

$$W_1^{**} = \frac{\psi_w V_1^{**}}{(1 - \epsilon_w) \lambda_m + (\xi + \mu_f)}$$

Dengan mensubstitusikan

$$V_1^{**} = \frac{\psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

Maka didapatkan

$$W_1^{**} = \frac{\psi_w \psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

$$5) \quad \frac{dE_1}{dt} = \lambda_m [S_1 + (1 - \epsilon_u) U_1 + (1 - \epsilon_v) V_1 + (1 - \epsilon_w) W_1] - (\rho_1 + \xi + \mu_f) E_1$$

$$\frac{dE_1}{dt} = 0$$

$$\lambda_m [S_1^{**} + (1 - \epsilon_u) U_1^{**} + (1 - \epsilon_v) V_1^{**} + (1 - \epsilon_w) W_1^{**}] - (\rho_1 + \xi + \mu_f) E_1^{**} = 0$$

$$E_1^{**} = \frac{\lambda_m [S_1^{**} + (1 - \epsilon_u) U_1^{**} + (1 - \epsilon_v) V_1^{**} + (1 - \epsilon_w) W_1^{**}]}{(\rho_1 + \xi + \mu_f)}$$

Dengan mensubstitusikan

$$S_1^{**} = \frac{\pi_f (1 - \phi_f)}{\lambda_m^{**} + D_{11}}$$

$$U_1^{**} = \frac{\pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (D_u \lambda_m^{**} + k_2)}$$

$$V_1^{**} = \frac{\psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

$$W_1^{**} = \frac{\psi_w \psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

Maka didapatkan

$$E_1^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$



$$6) \quad \frac{dI_1}{dt} = \rho_1 E_1 - (\sigma_1 + \xi + \mu_f) I_1$$

$$\frac{dI_1}{dt} = 0$$

$$\rho_1 E_1^{**} - (\sigma_1 + \xi + \mu_f) I_1^{**} = 0$$

$$I_1^{**} = \frac{\rho_1 E_1^{**}}{(\sigma_1 + \xi + \mu_f)}$$

Dengan mensubstitusikan

$$E_1^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

Maka didapatkan

$$I_1^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \rho_1 [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 k_5 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

$$7) \quad \frac{dR_1}{dt} = \sigma_1 I_1 - (\xi + \mu_f) R_1$$

$$\frac{dR_1}{dt} = 0$$

$$\sigma_1 I_1^{**} - (\xi + \mu_f) R_1^{**} = 0$$

$$R_1^{**} = \frac{\sigma_1 I_1^{**}}{(\xi + \mu_f)}$$

Dengan mensubstitusikan

$$I_1^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \rho_1 [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 k_5 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

Maka didapatkan

$$R_1^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \rho_1 \sigma_1 [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 k_5 k_6 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

Jadi titik kesetimbangan pada model 3 adalah

$$\varepsilon^* = (S_1^{**}, U_1^{**}, V_1^{**}, W_1^{**}, E_1^{**}, I_1^{**}, R_1^{**})$$

## b. Model 2

$$1) \quad \frac{dS_2}{dt} = \xi S_1 - \eta \lambda_m S_2 - \mu_f S_2$$

$$\frac{dS_2}{dt} = 0$$

$$\xi S_1^{**} - \eta \lambda_m S_2^{**} - \mu_f S_2^{**} = 0$$

$$S_2^{**} = \frac{\xi S_1^{**}}{\eta \lambda_m + \mu_f}$$

Dengan mensubstitusikan  $S_1^{**} = \frac{\pi_f(1-\phi_f)}{(\lambda_m+D_{11})}$  maka di dapatkan

$$S_2^{**} = \frac{\xi \mu_f(1-\phi_f)}{(\eta \lambda_m^{**} + \mu_f)(\lambda_m^{**} + D_{11})}$$

$$2) \frac{dU_2}{dt} = \xi U_1 - \eta(1-\epsilon_u)\lambda_m U_2 - \mu_f U_2$$

$$\frac{dU_2}{dt} = 0$$

$$\xi U_1^{**} - \eta(1-\epsilon_u)\lambda_m U_2^{**} - \mu_f U_2^{**} = 0$$

$$U_2^{**} = \frac{\xi U_1^{**}}{\eta(1-\epsilon_u)\lambda_m + \mu_f}$$

dengan mensubstitusikan  $U_1^{**} = \frac{\pi_f(m_{10}\lambda_m^{**}+m_{11})}{(\lambda_m^{**}+D_{11})(D_u\lambda_m^{**}+k_2)}$

maka didapatkan

$$U_2^{**} = \frac{\xi \pi_f(m_{10}\lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(D_u\lambda_m^{**} + k_2)(\eta D_u\lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

$$3) \frac{dV_2}{dt} = \xi V_1 - \eta(1-\epsilon_v)\lambda_m V_2 - \mu_f V_2$$

$$\frac{dV_2}{dt} = 0$$

$$\xi V_1^{**} - \eta(1-\epsilon_v)\lambda_m V_2^{**} - \mu_f V_2^{**} = 0$$

$$V_2^{**} = \frac{\xi V_1^{**}}{\eta(1-\epsilon_v)\lambda_m + \mu_f}$$

dengan mensubstitusikan  $V_1^{**} = \frac{\psi_v \pi_f(m_{10}\lambda_m^{**}+m_{11})}{(\lambda_m^{**}+D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)}(D_i\lambda_m^{**}+k_j)}$

maka didapatkan

$$V_2^{**} = \frac{\psi_v \pi_f(m_{10}\lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)}(D_i\lambda_m^{**} + k_j)}$$

$$4) \frac{dW_2}{dt} = \xi W_1 - \eta(1-\epsilon_w)\lambda_m W_2 - \mu_f W_2$$

$$\frac{dW_2}{dt} = 0$$

$$\xi W_1^{**} - \eta(1-\epsilon_w)\lambda_m W_2^{**} - \mu_f W_2^{**} = 0$$

$$W_2^{**} = \frac{\xi W_1^{**}}{\eta(1 - \epsilon_w)\lambda_m + \mu_f}$$

Dengan mensubstitusikan

$$W_1^{**} = \frac{\psi_w \psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

Maka didapatkan

$$W_2^{**} = \frac{\xi \psi_w \psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta D_w \lambda_m^{**} + \mu_f) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

$$5) \frac{dE_2}{dt} = \xi W_1 + \eta \lambda_m [S_2 + (1 - \epsilon_u)U_2 + (1 - \epsilon_v)V_2 + (1 - \epsilon_w)W_2] - (\rho_2 + \mu_f)E_2$$

$$\frac{dE_2}{dt} = 0$$

$$\xi E_1^{**} + \eta \lambda_m [S_2^{**} + (1 - \epsilon_u)U_2^{**} + (1 - \epsilon_v)V_2^{**} + (1 - \epsilon_w)W_2^{**}] - (\rho_2 + \mu_f)E_2^{**} = 0$$

$$E_2^{**} = \frac{\xi E_1^{**} + \eta \lambda_m [S_2^{**} + (1 - \epsilon_u)U_2^{**} + (1 - \epsilon_v)V_2^{**} + (1 - \epsilon_w)W_2^{**}]}{(\rho_2 + \mu_f)}$$

Dengan mensubstitusikan

$$S_1^{**} = \frac{\pi_f (1 - \phi_f)}{\lambda_m^{**} + D_{11}}$$

$$S_2^{**} = \frac{\xi \mu_f (1 - \phi_f)}{(\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) (\lambda_m^{**} + D_{11})}$$

$$U_2^{**} = \frac{\xi \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (D_u \lambda_m^{**} + k_2) (\eta D_u \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

$$V_2^{**} = \frac{\psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

$$W_2^{**} = \frac{\xi \psi_w \psi_v \pi_f (m_{10} \lambda_m^{**} + m_{11})}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta D_w \lambda_m^{**} + \mu_f) \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

Maka didapatkan

$$E_2^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{3i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) k_4 k_7 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

$$6) \frac{dI_2}{dt} = \xi I_1 + \rho_2 E_2 - (\sigma_2 + \mu_f) I_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$\xi E_1^{**} + \rho_2 E_2^{**} - (\sigma_2 + \mu_f) I_2^{**} = 0$$

$$I_2^{**} = \frac{\xi E_1^{**} + \rho_2 E_2^{**}}{(\sigma_2 + \mu_f)}$$

Dengan mensubstitusikan

$$E_1^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)} \text{ dan}$$

$$E_2^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{3i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) k_4 k_7 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

Maka didapatkan

$$I_2^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) k_4 k_7 k_8 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

$$7) \frac{dP}{dt} = (1-r)\sigma_2 I_2 - (\sigma_3 + \kappa + \mu_f)P$$

$$\frac{dP}{dt} = 0$$

$$(1-r)\sigma_2 I_2^{**} - (\sigma_3 + \kappa + \mu_f)P^* = 0$$

$$P^* = \frac{(1-r)\sigma_2 I_2^{**}}{(\sigma_3 + \kappa + \mu_f)}$$

Dengan mensubstitusikan

$$I_2^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) k_4 k_7 k_8 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

Maka didapatkan

$$P^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2 \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) k_4 k_5 \prod_{i=7}^9 k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

$$8) \frac{dQ}{dt} = \kappa P - (\sigma_4 + \alpha + \mu_f)Q$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\kappa P^* - (\sigma_4 + \alpha + \mu_f)Q^* = 0$$

$$Q^* = \frac{\kappa P^*}{(\sigma_4 + \alpha + \mu_f)}$$

Dengan mensubstitusikan

$$P^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2 \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) k_4 k_5 \prod_{i=7}^9 k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

Maka didapatkan

$$Q^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2\kappa\lambda_m^{**}\pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i}(\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(\eta\lambda_m^{**} + \mu_f)k_4k_5 \prod_{i=7}^{10} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i\lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i\lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

$$9) \frac{dC}{dt} = \alpha Q - (\gamma + \mu_f + \delta_f)C$$

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

$$\alpha Q^* - (\gamma + \mu_f + \delta_f)C^* = 0$$

$$C^* = \frac{\alpha Q^*}{(\gamma + \mu_f + \delta_f)}$$

Dengan mensubtitusikan

$$Q^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2\kappa\lambda_m^{**}\pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i}(\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(\eta\lambda_m^{**} + \mu_f)k_4k_5 \prod_{i=7}^{10} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i\lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i\lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

Maka didapatkan

$$C^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2\kappa\alpha\lambda_m^{**}\pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i}(\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(\eta\lambda_m^{**} + \mu_f)k_4k_5 \prod_{i=7}^{11} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i\lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i\lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

$$10) \frac{dR_c}{dt} = \gamma C - \mu_f R_c$$

$$\frac{dR_c}{dt} = 0$$

$$\gamma C^* - \mu_f R_c^{**} = 0$$

$$R_c^{**} = \frac{\gamma C^*}{\mu_f}$$

Dengan mensubtitusikan

$$C^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2\kappa\alpha\lambda_m^{**}\pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i}(\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(\eta\lambda_m^{**} + \mu_f)k_4k_5 \prod_{i=7}^{11} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i\lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i\lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

Maka didapatkan

$$R_c^{**} = \frac{(1-r)\sigma_2\kappa\alpha\gamma\lambda_m^{**}\pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i}(\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11})(\eta\lambda_m^{**} + \mu_f)\mu_f k_4k_5 \prod_{i=7}^{11} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i\lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i\lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

$$11) \frac{dR_2}{dt} = \xi R_1 + r\sigma_2 I_2 + \sigma_3 P + \sigma_4 Q - \mu_f R_2$$

$$\frac{dR_2}{dt} = 0$$

$$\xi R_1^{**} + r\sigma_2 I_2^{**} + \sigma_3 P^* + \sigma_4 Q^* - \mu_f R_2^{**} = 0$$

$$R_2^{**} = \frac{\xi R_1^{**} + r\sigma_2 I_2^{**} + \sigma_3 P^* + \sigma_4 Q^*}{\mu_f}$$

Dengan mensubstitusikan

$$R_1^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \rho_1 \sigma_1 [m_{20} (\lambda_m^{**})^3 + m_{21} (\lambda_m^{**})^2 + m_{22} \lambda_m^{**} + m_{23}]}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) k_4 k_5 k_6 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j)}$$

$$I_2^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) k_4 k_7 k_8 \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

$$P^{**} = \frac{(1-r) \sigma_2 \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) k_4 k_5 \prod_{i=7}^9 k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

$$Q^{**} = \frac{(1-r) \sigma_2 \kappa \lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{4i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) k_4 k_5 \prod_{i=7}^{10} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

Maka didapatkan

$$R_2^{**} = \frac{\lambda_m^{**} \pi_f \sum_{i=0}^7 m_{5i} (\lambda_m^{**})^{7-i}}{(\lambda_m^{**} + D_{11}) (\eta \lambda_m^{**} + \mu_f) \mu_f \prod_{i=4}^{10} k_i \prod_{(i,j)=(u,2),(v,3),(w,1)} (D_i \lambda_m^{**} + k_j) \prod_{i=u,v,w} (\eta D_i \lambda_m^{**} + \mu_f)}$$

Titik kesetimbangan endemik model 3 adalah

$$\varepsilon^* = (S_2^{**}, U_2^{**}, V_2^{**}, W_2^{**}, E_2^{**}, I_2^{**}, P^{**}, Q^{**}, C^{**}, R_c^{**}, R_2^{**})$$

### c. Model 3

- 1)  $\frac{dS_m}{dt} = \pi_m (1 - \phi_m) - \omega_u S_m - \lambda_f S_m - \mu_m S_m$   
 $\frac{dS_m}{dt} = 0$   
 $\pi_m (1 - \phi_m) - \omega_u S_m^{**} - \lambda_f S_m^{**} - \mu_m S_m^{**} = 0$   
 $S_m^{**} = \frac{\pi_m (1 - \phi_m)}{\omega_u + \lambda_f + \mu_m}$
- 2)  $\frac{dU_m}{dt} = \pi_m \phi_m + \omega_u S_m - (1 - \epsilon_u) \lambda_f U_m - (\omega_v + \mu_m) U_m$   
 $\frac{dU_m}{dt} = 0$   
 $\pi_m \phi_m + \omega_u S_m^{**} - (1 - \epsilon_u) \lambda_f U_m^{**} - (\omega_v + \mu_m) U_m^{**} = 0$   
 $U_m^{**} = \frac{\pi_m \phi_m + \omega_u S_m^{**}}{(1 - \epsilon_u) \lambda_f + (\omega_v + \mu_m)}$

Dengan mensubstitusikan

$$S_m^{**} = \frac{\pi_m(1 - \Phi_m)}{\omega_u + \lambda_f + \mu_m}$$

Maka di dapatkan

$$U_m^{**} = \frac{\pi_m(n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})}$$

$$3) \frac{dV_m}{dt} = \omega_u U_m - (1 - \epsilon_v)\lambda_f V_m - (\omega_u + \mu_m)V_m$$

$$\frac{dV_m}{dt} = 0$$

$$\omega_u U_m^{**} - (1 - \epsilon_v)\lambda_f V_m^{**} - (\omega_u + \mu_m)V_m^{**} = 0$$

$$V_m^{**} = \frac{\omega_u U_m^{**}}{(1 - \epsilon_v)\lambda_f + (\omega_u + \mu_m)}$$

Dengan mensubstitusikan

$$U_m^{**} = \frac{\pi_m(n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})}$$

Maka didapatkan

$$V_m^{**} = \frac{\omega_v \pi_m (n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})}$$

$$4) \frac{dW_m}{dt} = \omega_u V_m - (1 - \epsilon_w)\lambda_f W_m - \mu_m W_m$$

$$\frac{dW_m}{dt} = 0$$

$$\omega_u V_m^{**} - (1 - \epsilon_w)\lambda_f W_m^{**} - \mu_m W_m^{**} = 0$$

$$W_m^{**} = \frac{\omega_u V_m^{**}}{(1 - \epsilon_w)\lambda_f + \mu_m}$$

Dengan mensubstitusikan

$$V_m^{**} = \frac{\omega_v \pi_m (n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})}$$

Maka didapatkan

$$W_m^{**} = \frac{\omega_v \omega_u \pi_m (n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})(D_w\lambda_f^{**} + \mu_m)}$$

$$5) \frac{dE_m}{dt} = \lambda_f [S_m + (1 - \epsilon_u)U_m + (1 - \epsilon_v)V_m + (1 - \epsilon_w)W_m] - (\rho_m + \mu_m)E_m$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$\lambda_f [S_m^{**} + (1 - \epsilon_u)U_m^{**} + (1 - \epsilon_v)V_m^{**} + (1 - \epsilon_w)W_m^{**}] - (\rho_m + \mu_m)E_m^{**} = 0$$

$$E_m^{**} = \frac{\lambda_f [S_m^{**} + (1 - \epsilon_u)U_m^{**} + (1 - \epsilon_v)V_m^{**} + (1 - \epsilon_w)W_m^{**}]}{(\rho_m + \mu_m)}$$

Dengan mensubstitusikan

$$S_m^{**} = \frac{\pi_m(1 - \phi_m)}{\lambda_f^{**} + D_{11}}$$

$$U_m^{**} = \frac{\pi_m(n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})}$$

$$V_m^{**} = \frac{\omega_v\pi_m(n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})}$$

$$W_m^{**} = \frac{\omega_v\omega_w\pi_m(n_{10}\lambda_f^{**} + n_{11})}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})(D_w\lambda_f^{**} + \mu_m)}$$

Maka didapatkan

$$E_m^{**} = \frac{\lambda_f^{**}\pi_m\sum_{i=0}^3 n_{2i}(\lambda_f^{**})^{3-i}}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})(D_w\lambda_f^{**} + \mu_m)k_{14}}$$

$$6) \frac{dI_m}{dt} = \rho_m E_m - (\sigma_m + \mu_m)I_m$$

$$\frac{dI_m}{dt} = 0$$

$$\rho_m E_m^{**} - (\sigma_m + \mu_m)I_m^{**} = 0$$

$$I_m^{**} = \frac{\rho_m E_m^{**}}{(\sigma_m + \mu_m)}$$

Dengan mensubstitusikan

$$E_m^{**} = \frac{\lambda_f^{**}\pi_m\sum_{i=0}^3 n_{2i}(\lambda_f^{**})^{3-i}}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})(D_w\lambda_f^{**} + \mu_m)k_{14}}$$

Maka didapatkan

$$I_m^{**} = \frac{\rho_m\lambda_f^{**}\pi_m\sum_{i=0}^3 n_{2i}(\lambda_f^{**})^{3-i}}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u\lambda_f^{**} + k_{12})(D_v\lambda_f^{**} + k_{13})(D_w\lambda_f^{**} + \mu_m)k_{14}k_{15}}$$



$$\begin{aligned}
 7) \quad \frac{dR_m}{dt} &= \sigma_m I_m - \mu_m R_m \\
 \frac{dR_m}{dt} &= 0 \\
 \sigma_m I_m^{**} - \mu_m R_m^{**} &= 0 \\
 R_m^{**} &= \frac{\sigma_m I_m^{**}}{\mu_m}
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan

$$I_m^{**} = \frac{\rho_m \lambda_f^{**} \pi_m \sum_{i=0}^3 n_{2i} (\lambda_f^{**})^{3-i}}{(\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u \lambda_f^{**} + k_{12})(D_v \lambda_f^{**} + k_{13})(D_w \lambda_f^{**} + \mu_m) k_{14} k_{15}}$$

Maka di dapatkan

$$R_m^{**} = \frac{\sigma_m \rho_m \lambda_f^{**} \pi_m \sum_{i=0}^3 n_{2i} (\lambda_f^{**})^{3-i}}{\mu_m (\lambda_f^{**} + D_{11})(D_u \lambda_f^{**} + k_{12})(D_v \lambda_f^{**} + k_{13})(D_w \lambda_f^{**} + \mu_m) k_{14} k_{15}}$$

Titik kesetimbangan endemik model 3 adalah

$$\mathcal{E}^* = (S_m^{**}, U_m^{**}, V_m^{**}, W_m^{**}, E_m^{**}, I_m^{**}, R_m^{**})$$

## BIODATA PENULIS



**Astika Febriani** atau biasa dipanggil Astika lahir di Tulungagung, 6 Februari 1996. Penulis telah menempuh pendidikan formal di TK Dharma Wanita, SDN 3 Segawe, SMP Negeri 1 Pagerwojo, SMA Negeri 1 Kauman Tulungagung. Kemudian penulis menempuh pendidikan S1 di Departemen Matematika ITS angkatan 2014, penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan. Penulis juga mengikuti kegiatan organisasi yaitu sebagai Staff Kesejahteraan Mahasiswa HIMATIKA ITS, Staff Departemen Internal UKTK ITS periode 2015-2016, Staff Departemen Pengelola Sumber Daya Anggota UKTK ITS, Sekretaris Departemen Kesejahteraan Mahasiswa HIMATIKA ITS pada periode 2016-2017 serta Staff Ahli Departemen Pengelola Sumber Daya Mahasiswa Lembaga Minat Bakat ITS pada periode 2017-2018. Selain aktif dalam organisasi, penulis juga aktif mengikuti kepanitiaan acara, seperti ICoMPAC 2016, OMITS, PUSAKA, Apresiasi Seni UKTK ITS. Penulis memiliki pengalaman kerja praktek pada tahun 2017 di Kantor Perwakilan Bank Indonesia Kediri. Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai Laporan Tugas Akhir ini, bisa melalui email [astikafebriani06@gmail.com](mailto:astikafebriani06@gmail.com).

Semoga bermanfaat.