



TESIS - SM 142501

**KENDALI OPTIMAL PRODUKSI LIPID PADA
MIKROALGA DENGAN KETERBATASAN
NUTRISI DAN KARBONDIOKSIDA
MENGUNAKAN METODE LINEAR
QUADRATIK REGULATOR**

PRISMAHARDI AJI RIYANTOKO
NRP 0611 1650 012 013

DOSEN PEMBIMBING:
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018



THESIS - SM 142501

**OPTIMAL CONTROL OF LIPIDS
PRODUCTION IN MICROALGAE WITH
NUTRIENTS AND CARBONDIOXIDE
LIMITATION USING LINEAR QUADRATIC
REGULATOR METHOD**

PRISMAHARDI AJI RIYANTOKO
NRP 0611 1650 012 013

SUPERVISOR:
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTING AND DATA SCIENCE
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)

di

Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

Prismahardi Aji Riyantoko
NRP. 0611 1650 012 013

Tanggal Ujian : 31 Juli 2018
Periode Wisuda : September 2018

Disetujui oleh:

Dr. Dra. Mardlijah, M.T.
NIP 19670114 199102 2 001

(Pembimbing)

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP 19660414 199102 2 001

(Penguji)

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
NIP 19730930 199702 1 001

(Penguji)



Dekan FMKSD,

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

KENDALI OPTIMAL PRODUKSI LIPID PADA MIKROALGA DENGAN KETERBATASAN NUTRISI DAN KARBONDIOKSIDA MENGGUNAKAN METODE LINEAR QUADRATIK REGULATOR

Nama Mahasiswa : Prismahardi Aji Riyantoko
NRP : 0611 1650 012 013
Pembimbing : Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

ABSTRAK

Mikroalga memiliki kemampuan yang tinggi untuk memproduksi lipid. Semakin cepat proses pembentukan lipid oleh mikroalga, semakin cepat juga minyak yang dihasilkan. Produksi lipid pada mikroalga dipengaruhi oleh nutrisi, karbon dioksida dan proses fotosintesis. Dalam penelitian ini akan ditunjukkan verifikasi model produksi lipid pada mikroalga, agar didapatkan nilai yang optimal pada variabel state. Dengan kendali optimal produksi lipid pada mikroalga dengan faktor pengendalinya adalah substrat nutrisi dan karbon dioksida. Verifikasi model menunjukkan bahwa model produksi lipid pada mikroalga bersifat safe dengan spesifikasi yang telah ditentukan. Metode Linear Quadratic Regulator menghasilkan konsentrasi mikroalga sebesar $X = 33.8 \text{ mgCL}^{-1}\text{d}^{-1}$ dan $Q_l = 78.5 \text{ mgCL}^{-1}\text{d}^{-1}$.

Kata-kunci: Mikroalga, Kendali Optimal, Linear Quadratic Regulator, Verifikasi Model

OPTIMAL CONTROL OF LIPIDS PRODUCTION IN MICROALGAE WITH NUTRIENTS AND CARBONDIOXIDE LIMITATION USING LINEAR QUADRATIC REGULATOR METHOD

Name : Prismahardi Aji Riyantoko
NRP : 0611 1650 012 013
Supervisor : Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

ABSTRACT

Microalgae have a high ability to produces lipids. The greater produced of lipids by microalgae, will increasing biomass production. The lipids produced in the microalgae with influenced by nutrients, carbon dioxide and photosynthetic process. In this research, will be proposed using model verification to get a value from the state space, thats influence in the optimal control problem. The optimal control problem of the lipids production in the microalgae will be proposed using the optimal control method. The objective function is to maximize the lipids production while the control is substrate of nutrients and carbon dioxide. The model verification can be present, its was safety system using specification before. Furthermore, the results from the Linear Quadratic Method was the microalgae can produced $X = 33.8 \text{ mgCL}^{-1}\text{d}^{-1}$ and lipid quota $Q_l = 78.5 \text{ mgCL}^{-1}\text{d}^{-1}$.

Key-words: Microalgae, Optimal Control, Linear Quadratic Regulator, Model Verification

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul

"Kendali Optimal Produksi Lipid pada Mikroalga dengan Keterbatasan Nutrisi dan Karbondioksida Menggunakan Metode Linear Kuadrat Regulator"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Magister Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tesis ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Orang Tua dan keluarga. Terima Kasih atas doa yang tak henti-hentinya, cinta, kasih sayang, perhatian, dan dukungannya selama ini. Semoga Penulis bisa membahagiakan Orang tua. Aamiin
2. Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. selaku Dekan Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data ITS Surabaya.
4. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Kepala Departemen Matematika FMKSD ITS Surabaya.
5. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, MT selaku pembimbing Tesis atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tesis ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik dan selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.
6. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si, dan Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si. selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tesis ini.
7. Bapak Dr. Subiono, M.S selaku dosen wali yang selalu memberikan saran mengenai perkuliahan.

8. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Departemen Matematika FMKSD ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
9. Teman-teman se-angkatan S2 Matematika ITS, terima kasih atas doa dan dukungan kalian selama ini.

Apabila dalam penulisan Tesis ini masih terdapat kekurangan, maka penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan Tesis ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Agustus 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR SIMBOL	xvii
DAFTAR TABEL	xix
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Mikroalga	5
2.2 Model Matematika Produksi Lipid pada Mikroalga	5
2.3 Kestabilan Sistem	6
2.4 Keterkontrolan Sistem	7
2.5 Verifikasi Model	8
2.6 Linear Quadratic Regulator	9
2.7 Hubungan Aljabar Riccati dengan Gain Regulator	10
2.8 Algoritma Kunang-kunang	11
2.8.1 Tarik-Menarik	12
2.8.2 Jarak	12
2.8.3 Pergerakan	12
BAB 3 METODE PENELITIAN	15
3.1 Diagram Alir Penelitian	15
3.2 Tahapan Penelitian	16
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN	19
4.1 Deskripsi Model Matematika Produksi Lipid Pada Mikroalga	19
4.2 Analisis Sistem Dinamik Model Produksi Lipid pada Mikroalga	22
4.2.1 Titik Setimbang	22
4.2.2 Analisis Kestabilan	26

4.2.3 Analisis Keterkontrolan	34
4.3 Verifikasi Model Produksi Lipid Pada Mikroalga	43
4.4 Penyelesaian Kendali Optimal	50
4.5 Analisis Hasil Simulasi LQR	54
BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN	59
5.1 Kesimpulan	59
5.2 Saran	59
DAFTAR PUSTAKA	61
LAMPIRAN	63

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Model Pertumbuhan Mikroalga	6
Gambar 2.2	Skema Verifikasi Model	8
Gambar 2.3	<i>Pseudo Code</i> untuk Algoritma Kunang-kunang	13
Gambar 3.1	Diagram Alir Penelitian	15
Gambar 4.1	Model Pertumbuhan Mikroalga	21
Gambar 4.2	Perbandingan Verifikasi Model pada Konsentrasi Nutrisi	45
Gambar 4.3	Perbandingan Verifikasi Model pada Konsentrasi Kuota Nitrogen	46
Gambar 4.4	Perbandingan Verifikasi Model pada Konsentrasi Mikroalga	47
Gambar 4.5	Perbandingan Verifikasi Model pada Konsentrasi Kuota Lipid	48
Gambar 4.6	Perbandingan Verifikasi Model pada Konsentrasi Kuota Karbon	49
Gambar 4.7	<i>Pseudo Code</i> Algoritma Kunang-kunang untuk mendapatkan nilai Q_c dan R_c	53
Gambar 4.8	Perbandingan Konsentrasi Nutrisi	54
Gambar 4.9	Perbandingan Konsentrasi Kuota Nitrogen	55
Gambar 4.10	Perbandingan Konsentrasi Mikroalga	55
Gambar 4.11	Perbandingan Konsentrasi Kuota Lipid	56
Gambar 4.12	Perbandingan Konsentrasi Kuota Karbon	57
Gambar 4.13	Kendali u_1 dan u_2	57

DAFTAR SIMBOL

J	fungsi bbjektif pada Metode Linier Quadratik Regulator
S	onsentrasi nutrisi
Q_n	konsentrasi kuota nitrogen
X	konsentrasi mikroalga
Q_l	konsentrasi kuota lipid
Q_f	konsentrasi kuota karbon
D	laju pengenceran
ρ	laju penyerapan nutrisi
$\bar{\mu}$	laju pertumbuhan
Q_0	kuota minimum nitrogen
δ	laju penyerapan CO_2
α	sintesis protein
β	sintesis asam lemak
γ	mobilisasi asam lemak
K_s	konstanta setengah saturasi
s_{in}	nutrisi yang masuk
δ_k	parameter untuk mendapatkan nilai α baru
α_k	parameter pengacakan nilai awal $[0,1]$
β_{k0}	daya tarik awal antar kunang-kunang
γ_k	koefisien absorpsi untuk mengontrol instensistas cahaya
n_k	jumlah kunang-kunang untuk mencari kombinasi nilai bobot
x_k	banyaknya parameter untuk dioptimasi

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Nilai Parameter Model Produksi Lipid pada Mikroalga . . .	22
Tabel 4.2	Perbandingan Waktu Simulasi pada Nutrisi	45
Tabel 4.3	Perbandingan Waktu Simulasi pada Nitrogen	46
Tabel 4.4	Perbandingan Waktu Simulasi pada Mikroalga	47
Tabel 4.5	Perbandingan Waktu Simulasi pada Kuota Lipid	48
Tabel 4.6	Perbandingan Waktu Simulasi pada Kuota Karbon	49
Tabel 4.7	Hasil Simulasi Parameter dengan nilai α_k yang berbeda . .	51
Tabel 4.8	Hasil Simulasi Parameter dengan nilai γ_k yang berbeda . .	51
Tabel 4.9	Hasil Simulasi Parameter dengan nilai β_{k0} yang berbeda . .	52
Tabel 4.10	Hasil Simulasi Parameter dengan nilai δ_k yang berbeda . .	52

BAB 1

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai informasi yang menjadi latar belakang penelitian baik secara umum atau khusus yang berkaitan dengan rencana penelitian yang akan dilakukan, sehingga dapat merumuskan masalah. Maka, dari pemaparan masalah tersebut dapat mencapai tujuan penelitian serta memperoleh manfaat penelitian.

1.1 Latar Belakang

Semakin bertambahnya jumlah populasi manusia, kebutuhan akan konsumsi sumber energi juga semakin meningkat. Salah satu sumber energi yang digunakan oleh manusia adalah energi dari bahan bakar fosil. Namun sampai saat ini, telah diprediksi bahwa cadangan bahan bakar fosil akan semakin berkurang. Oleh karena itu, sumber energi terbarukan sangat diperlukan untuk menggantikan bahan bakar fosil. Salah satu alternatif pengganti bahan bakar fosil adalah mikroalga. Mikroalga memiliki potensi yang tinggi sebagai sumber biomassa, karena mengandung banyak lipid untuk memproduksi minyak (Meeting, 1996). Selain itu manfaat dari mikroalga diantaranya untuk memproduksi biomassa dengan biaya yang relatif murah, dan hanya membutuhkan lahan budidaya yang cukup. Selain hal tersebut, biomassa berbahan baku mikroalga juga ramah lingkungan dan menghasilkan sedikit limbah.

Mikroalga memiliki kesamaan sifat seperti tumbuhan lain yang dapat berfotosintesi pada siang hari dan berespirasi pada malam hari. Kedua siklus tersebut sangat berpengaruh pembentukan lipid pada mikroalga. Mikroalga memiliki kemampuan yang baik dalam mensintesis dan mengumpulkan lipid (Meeting, 1996). Lipid yang terkandung di dalam mikrolaga diperkirakan dapat mencapai 200 kali lebih banyak dibandingkan dengan tumbuhan penghasil minyak lainnya seperti kelapa sawit dan jarak pagar (Rachmaniah, etc., 2010).

Pada penelitian terdahulu, telah dilakukan penelitian tentang optimal kontrol dalam sistem pertumbuhan alga dan produksi lipid pada mikroalga. Pada penelitian (Hajar, Mardlijah, 2015) dijelaskan kendali optimal pada aliran nutrisi, digunakan untuk mendapatkan pertumbuhan alga yang maksimal. Sama halnya dengan penelitian (Mardlijah, etc., 2017), dengan dua kendali optimal yaitu aliran nutrisi dan karbondioksida, untuk mendapatkan pertumbuhan alga yang maksimal. Dengan menggunakan metode Pontryagin Maksimum Principle, dua penelitian tersebut membuat fungsi objektif untuk mendapatkan hasil yang optimal pada proses pertumbuhan alga.

Dalam penelitian (Mairet, etc., 2011), dijelaskan mengenai proses produksi lipid dan pembentukan kuota karbon, yang dihasilkan dari proses

pemecahan sel intraselular pada mikroalga. Untuk mendapatkan hasil yang optimal pada produksi lipid, (Mairet, etc., 2011) menggunakan keterbatasan nitrogen sebagai parameter kendali optimal. Kemudian, dalam penelitian (Nasria, Mardlijah, 2015) digunakan parameter keterbatasan nutrisi sebagai kendali optimal untuk menghasilkan produksi lipid yang optimal. Setelah itu dilanjutkan pada penelitian (Mardlijah, etc., 2017) dengan menggunakan keterbatasan nutrisi dan karbondioksida untuk mendapatkan hasil produksi lipid yang optimal dengan menggunakan metode Pontriyagin Maksimum Principle. Pada proses penambahan parameter karbondioksida, menyebabkan terjadi perubahan pada model yang sudah ada. Sehingga, memerlukan uji kestabilan dan keterkontrolan terhadap model.

Dalam (Baier, Katoen, 2008) dijelaskan bahwa suatu model matematika dapat dilakukan verifikasi sistem. Verifikasi sistem bertujuan untuk mengetahui keadaan variabel, parameter serta perubahan yang terjadi pada kondisi sistem yang ditentukan. Penyelesaian verifikasi dengan menggunakan aplikasi. Aplikasi verifikasi yang dibutuhkan untuk menyelesaikan model sistem dinamik adalah Flowstar (Chen, etc., 2015). Untuk mendapatkan biomassa dan lipid yang optimal, kita memilih metode Linear Quadratic Regulator sebagai metode optimasi. Dalam metode tersebut terdapat fungsi objektif yang digunakan sebagai ukuran seberapa besar kinerja sistem. Sehingga, formulasi *Linear Quadratic Regulator* memiliki kemudahan menganalisis sistem menggunakan analisis numerik dan penerapannya (Naidu, 2002).

Dalam penelitian ini, peneliti melihat solusi verifikasi (Baier, Katoen, 2008), (Chen, etc., 2015) dan kendali optimal (Naidu, 2002) dapat memberikan manfaat untuk menyempurnakan penelitian (Mardlijah, etc., 2017). Oleh karena itu peneliti mengambil topik tersebut dikarenakan belum ada yang meneliti lebih lanjut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan maka penulis memperoleh beberapa masalah yaitu adanya penambahan parameter karbondioksida sehingga menyebabkan perubahan pada model produksi lipid pada mikroalga, yang mana karbondioksida tersebut merupakan salah satu parameter yang akan digunakan sebagai kendali optimal. Dengan demikian penulis memperoleh beberapa rumusan masalah sebagai berikut,

1. Bagaimana implementasi verifikasi model matematika produksi lipid agar didapatkan hasil yang sesuai spesifikasi?
2. Bagaimana mengkonstruksi kendali optimal produksi lipid pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi dan karbondioksida menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator*?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini permasalahan yang akan dibahas dibatasi pada model matematika produksi lipid pada mikroalga diperoleh dari referensi (Mairet, etc., 2011).

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam perencanaan penelitian tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Memperoleh spesifikasi model matematika pada produksi lipid mikroalga.
2. Memperoleh analisis hasil produksi lipid pada mikroalga dengan mengoptimalkan keterbatasan nutrisi dan karbondioksida dengan menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator*

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari perencanaan penelitian tesis ini adalah:

1. Memberikan informasi mengenai hasil produksi lipid pada mikroalga dengan memanfaatkan keterbatasan nutrisi dan karbondioksida sehingga diperoleh hasil produksi yang maksimal dan dapat menghasilkan biomassa yang tinggi.
2. Memberikan wawasan penerapan ilmu matematika terapan dalam kimia dan biologi

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Dalam bab ini dibahas mengenai kajian pustaka dan dasar teori yang berkaitan dengan topik penelitian tesis yaitu berupa model produksi lipid pada mikroalga, formulasi kestabilan, keterkontrolan, verifikasi model dengan Flowstar, dan metode kendali optimal *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

2.1 Mikroalga

Mikroalga merupakan makhluk hidup yang dapat tumbuh dan berkembang sangat cepat di dalam habitat perairan. Mikroorganisme fotosintetik ini menggunakan karbondioksida dan sinar matahari untuk menghasilkan biomassa serta oksigen yang terdapat di atmosfer. Mikroalga memiliki komponen utama antara lain, karbohidrat, protein, asam nukleat dan lipid. Sifat yang dimiliki mikroalga menyerupai tumbuhan lain, artinya jika pada siang hari melakukan fotosintesis dengan mengonsumsi air, karbondioksida, sinar matahari serta klorofil untuk menghasilkan oksigen dan salah satunya adalah lipid yang digunakan untuk bahan dasar biomassa. Maka mikroalga pada waktu malam hari akan melakukan respirasi dengan mengonsumsi oksigen, untuk memecah molekul glukosa menjadi karbondioksida dan air.

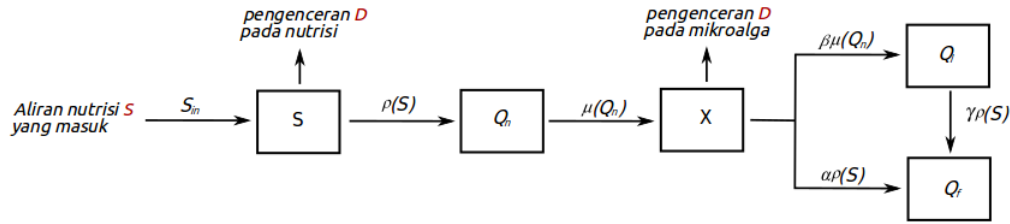
Mikroalga memiliki keunggulan dibandingkan dengan sumber energi dari bahan baku lain. Manfaat yang dapat diperoleh dari penggunaan mikroalga sebagai bahan baku sumber energi terbarukan, antara lain memiliki kandungan lipid mencapai 70%, memiliki tingkat efisiensi fotosintesis yang tinggi, pertumbuhan mikroalga yang sangat cepat dan mampu mengurangi jumlah karbondioksida yang berlebih.

Salah satu komponen yang terdapat didalam lipid mikroalga adalah trigliserida. Senyawa trigliserida diubah menjadi metil ester melalui proses transesterifikasi. Asam lemak metil ester yang diperoleh dapat digunakan sebagai bahan baku biomassa. Oleh karena itu banyak hal yang melatar belakangi pemilihan jenis mikroalga yang akan digunakan sebagai bahan dasar pembuatan biomassa. Salah satu jenis mikroalga yang digunakan adalah *Isochrysis aff. Galbana*. Jenis mikroalga tersebut dipilih karena memiliki tingkat pertumbuhan yang tinggi dan menghasilkan jumlah lipid yang sangat besar (Mairet, etc., 2011).

2.2 Model Matematika Produksi Lipid pada Mikroalga

Proses produksi lipid dari mikroalga diilustrasikan pada Gambar 2.1. Proses pertumbuhan mikroalga dilakukan dengan memasukkan nutrisi kedalam bioreaktor yang berisi mikroalga. Lalu berubah menjadi glukosa melalui proses fotosintesis. Glukosa dimobilisasi untuk membentuk kuota lipid dan kuota karbon. Kuota lipid digunakan untuk menyimpan minyak hasil

dari proses pembelahan sel didalam glukosa. Kuota karbon digunakan untuk menyimpan protein dari hasil penyerapan nitrogen oleh mikroalga. Karena didalam hari terjadi proses respirasi maka terjadi proses pembelahan sel protein didalam kuota karbon, sehingga menghasilkan karbondioksida dan air. Hasil karbondioksida ditampung ulang untuk digunakan kembali pada proses fotosintesis. Perubahan nutrisi dipengaruhi oleh jumlah nutrisi yang masuk



Gambar 2.1: Model Pertumbuhan Mikroalga

S_{in} dan dipengaruhi oleh laju pengenceran D terhadap nutrisi. Penyerapan nutrisi $\rho(S)$ yang dilakukan oleh mikroalga untuk dapat menghasilkan nitrogen Q_n yang digunakan untuk pembelahan sel. Nitrogen dipengaruhi oleh penyerapan nutrisi, sehingga menyebabkan pembelahan sel $\mu(Q_n)$. Nutrisi yang berada didalam intra-seluler sel mempengaruhi laju pertumbuhan mikroalga untuk menghasilkan biomassa $\mu(Q_n)X$. Didalam glukosa terdapat lipid Q_l dan karbon Q_f . Glukosa menghasilkan asam lemak bebas β yang disimpan didalam lipid $\beta Q_n \mu(Q_n)X$. Penyerapan nitrogen menghasilkan protein α yang disimpan didalam karbon $\alpha \rho(S)X$. Asam lemak bebas γ dimobilisasi untuk menghasilkan karbon fungsional yang didalam sel karbon $\gamma \rho(S)X$.

Berikut ini merupakan model produksi lipid pada mikroalga (Mairet, etc., 2011),

$$\begin{aligned}\dot{S} &= DS_{in} - \rho_m(S)X - DS \\ \dot{Q}_n &= \rho_m(S) - \mu(Q_n)Q_n \\ \dot{X} &= \mu(Q_n)X - DX \\ \dot{Q}_l &= (\beta Q_n - Q_l)\mu(Q_n) - \gamma \rho_m(S) \\ \dot{Q}_f &= -Q_f \mu(Q_n) + (\alpha + \gamma)\rho_m(S)\end{aligned}$$

untuk S merupakan konsentrasi nutrisi, Q_n konsentrasi kuota nitrogen, X konsentrasi mikroalga, Q_l konsentrasi kuota lipid, dan Q_f konsentrasi kuota karbon.

2.3 Kestabilan Sistem

Terdapat beberapa konsep kestabilan untuk persamaan differensial. Kestabilan ini dibedakan menurut kestabilan autonomous (berdasarkan vektor keadaan) dan kestabilan dikaitkan dengan masukan atau keluaran sistem. Didalam penelitian ini terdapat pengujian sistem kestabilan model produksi

lipid pada mikroalga. Berikut penjelasan mengenai kestabilan sistem dari segi nilai karakteristik,

Definisi 2.1. (Subiono, 2013) Diberikan persamaan differensial tingkat satu $\dot{x}(t) = f(x(t))$ dengan $x \in \mathbb{R}^n$, penyelesaian dengan keadaan awal $x(0) = x_0$ dinotasikan oleh $x(t, x_0)$.

1. Suatu vektor \bar{x} yang memenuhi $f(x) = 0$ disebut suatu **titik setimbang**.
2. Suatu titik setimbang \bar{x} dikatakan **stabil** jika untuk setiap $\epsilon > 0$ ada $\delta > 0$ dan t_δ sedemikian hingga jika $\|x_{t_\delta} - \bar{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, t_\delta) - \bar{x}\| < \epsilon$ untuk semua $t > t_\delta$.
3. Suatu titik setimbang \bar{x} dikatakan **stabil asimtotik** jika ia stabil dan jika ada $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, t_\delta) - \bar{x}\| = 0$ jika $\|x_{t_\delta} - \bar{x}\| < \delta_1$.
4. Suatu titik setimbang dikatakan **takstabil** jika ia tidak stabil.

Pada definisi (2.1), terdapat norm yang biasanya digunakan pada norm Euclidean. Pengertian stabil berarti mempunyai penyelesaian sangat dekat atau berada disekitar titik setimbang. Sedangkan stabil asimtotik berarti mempunyai penyelesaian konvergen ke titik setimbang (untuk titik awal diasumsikan berada dekat dengan titik setimbang). Untuk takstabil berarti penyelesaian yang mendekati titik setimbang dari manapun tetapi akhirnya tetap menjauhi titik setimbang.

2.4 Keterkontrolan Sistem

Keterkontrolan suatu sistem dapat digunakan untuk penstabilan sistem. Diberikan sistem linear invarian-waktu yang disajikan oleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definisi 2.2. (Subiono, 2013) Sistem linear (2.6) dikatakan terkontrol jika untuk setiap keadaan sebarang $x(0) = x_0$ ada masukan $u(t)$ yang tidak dibatasi mentransfer keadaan x_0 ke sebarang keadaan akhir $x(t_1) = x_1$ dengan waktu akhir t_1 hingga.

Dalam definisi (2.2), jika diberikan sebarang keadaan awal $x(0)$ dan sebarang keadaan akhir $x(t_1)$ akan selalu ada pengontrol $u(t)$ yang akan mentransfer keadaan awal $x(0)$ ke keadaan akhir dengan $x(t_1)$ dalam waktu yang berhingga t_1 . Perlu diingat bahwa sebarang keadaan awal dan sebarang keadaan akhir ini terdiri dari n komponen dan apa bila semua komponen dari keadaan awal ini bisa dikontrol ke n komponen yang sesuai keadaan akhir, maka sistem bisa dikontrol. Solusi dari persamaan (2.1) dikatakan terkontrol

apabila ada masukan $u(t)$ yang mentransfer dari waktu $x(0)$ ke $x(1)$ dalam waktu berhingga t_1 . Sehingga dapat dituliskan oleh persamaan :

$$x_1 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.2)$$

Berdasarkan persamaan (2.2) memberikan syarat perlu dan cukup untuk mengetahui bahwa suatu sistem terkontrol. Teorema disajikan sebagai berikut,

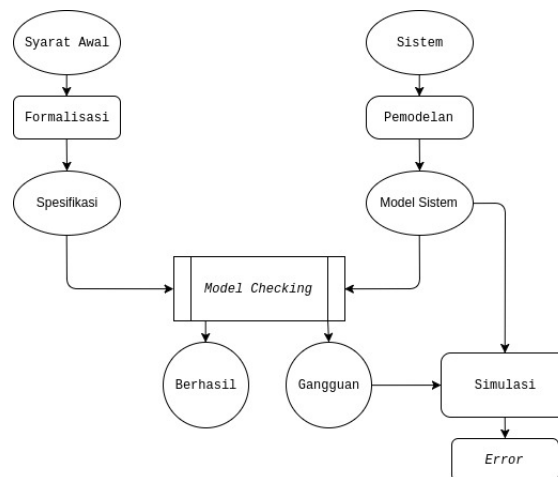
Teorema 2.1. (Subiono, 2013) *Syarat perlu dan cukup sistem terkontrol adalah*

1. $w(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau$ non-singulir
2. Matriks : $M_c = (B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B)$ mempunyai rank sama dengan n

Pada teorema pertama mempunyai arti bahwa untuk menjamin keberadaan pengontrol $u(t)$ untuk mentransfer sebarang keadaan awal x_0 ke sebarang keadaan akhir $x(t_1)$ yang diinginkan dalam waktu berhingga t_1 . Sedangkan pada teorema kedua menjamin bahwa semua n komponen dari keadaan awal bisa dikontrol ke n komponen yang bersesuaian dari keadaan akhir yang diinginkan.

2.5 Verifikasi Model

Verifikasi model merupakan teknik dasar untuk menggambarkan model sesuai perilaku sistem. Berikut ilustrasi verifikasi model



Gambar 2.2: Skema Verifikasi Model (Baier, Katoen, 2008) .

Dari banyak penelitian tentang model, verifikasi model digunakan untuk melakukan pengecekan pada sistem, model matematika, verifikasi dan

spesifikasi yang diharapkan (Baier, Katoen, 2008). Masalah seperti itu biasanya hanya ditemukan pada tahap pendesainan model yang rumit. Sistem model yang disertai dengan algoritma dapat secara sistematis mengeksplorasi semua keadaan awal hingga keadaan akhir. Hal ini memberikan dasar untuk keseluruhan teknik verifikasi mulai dari eksplorasi menyeluruh (pengecekan model) sampai eksperimen dengan serangkaian pendesaian yang memiliki syarat batas dalam melakukan simulasi model. Verifikasi model dapat diterapkan pada sistem biologi, sistem kontrol serta model yang memiliki variabel *state* dan parameter. Untuk menyelesaikan verifikasi model dapat menggunakan perangkat lunak, salah satunya adalah Flowstar.

Flowstar merupakan perangkat lunak yang digunakan untuk melakukan verifikasi model. Flowstar juga merupakan salah satu perangkat lunak untuk menyelesaikan sistem Persamaan Diferensial Biasa. Pada penelitian sebelumnya, sudah ada penelitian mengenai perhitungan komputasi untuk menyelesaikan sistem kontinu pada sistem *non-linear* Persamaan Diferensial Biasa (Chen, etc., 2015). Keluaran yang diharapkan dengan menggunakan Flowstar adalah dengan mengetahui perkiraan nilai pada variabel *state* berdasarkan interval waktu yang diperlukan.

2.6 Linear Quadratic Regulator

Metode *Linear Quadratic Regulator* merupakan salah satu metode optimal kontrol. Metode LQR mempunyai kelebihan mudah dalam menganalisis dan pengimplementasiannya. Dalam sistem kontrol optimal, istilah optimal sering kali merujuk pada minimal, misalnya meminimalkan bahan bakar, waktu, dan kesalahan. Kontrol optimal secara umum digunakan untuk memilih *input plant* u dengan indeks performansi yang minimum. Pada suatu sistem, indeks performansi dipilih sesuai dengan bagian yang akan dioptimalkan. Bentuk umum dari persamaan state sistem linear dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Keterangan :

- $A_{n \times n}$: Matriks Ruang Keadaan
- $B_{n \times m}$: Matriks Masukan Kendali
- $C_{r \times n}$: Matriks Keteramatan
- $x(t)$: Vektor Ruang Keadaan
- $y(t)$: Proses Keluaran
- $u(t)$: Proses Masukkan

untuk matriks A, B dan C merupakan matriks yang memiliki sifat invarian waktu. Metode LQR berfungsi untuk untuk mencari gain regulator sesuai dengan persamaan model *state space* dengan meminimumkan nilai dari fungsi biaya (Naidu, 2002) sebagai berikut :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q_c x + u^T R_c u) dt \quad (2.3)$$

2.7 Hubungan Aljabar Riccati dengan Gain Regulator

Pada subbab ini akan dibahas mengenai hubungan Persamaan Differensial Riccati dengan gain regulator P_c . Dengan mengambil persamaan *state* \dot{x} , maka dapat ditulis dengan :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.4)$$

Untuk memperoleh persamaan diferensial Riccati, akan dilakukan beberapa pembuktian dengan langkah langkah sebagai berikut :

1. Fungsi Hamiltonian

Diberikan Fungsi Hamiltonian yang di formulasikan dari persamaan (2.4), sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}x^T Qx + \frac{1}{2}u_c^T R u_c + \lambda^T (Ax + Bu_c) \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) digunakan untuk mencari persamaan *state*, *costate* dan fungsi kendali.

2. Kendali Optimal

Untuk mendapat fungsi kendali u_c^* , maka dengan menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap u_c . Sehingga dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \longrightarrow Ru_c + B^T \lambda = 0$$

sehingga diperoleh nilai u_c^* sebagai berikut :

$$u_c^* = -R^{-1}B^T \lambda \quad (2.6)$$

3. Persamaan *State* dan *Costate*

Persamaan *state* didapatkan dengan cara menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap λ , sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right) \longrightarrow \dot{x} = Ax + Bu_c \quad (2.7)$$

Persamaan *costate* didapatkan dengan menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap x , sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right) \longrightarrow \dot{\lambda} = -Qx - A^T \lambda \quad (2.8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan kendali optimal persamaan (2.6) kedalam persamaan *state* persamaan (2.7) sehingga akan dibentuk matriks persamaan *state* dan *costate* sebagai berikut ini :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

4. Persamaan Differensial Riccati

Persamaan berikut dapat diasumsikan dengan transformasi, sehingga dapat ditulis,

$$\lambda = P_c x \quad (2.10)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.10) kedalam fungsi kendali optimal (2.7), maka dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$u_c^* = -R^{-1} B^T P_c x \quad (2.11)$$

Fungsi turunan dari persamaan (2.10) ditulis sebagai berikut :

$$\dot{\lambda} = \dot{P}_c x + P_c \dot{x} \quad (2.12)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan transformasi (2.10) kedalam persamaan kendali, *state* dan *costate* didapatkan hasil sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1} B^T P_c x \quad (2.13)$$

$$\dot{\lambda} = -Qx - A^T P_c x \quad (2.14)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.13) dan (2.14) kedalam persamaan (2.12) sehingga dapat dinyatakan dengan persamaan berikut,

$$\begin{aligned} -Qx - A^T P_c x &= \dot{P}_c x + P_c (Ax - BR^{-1} B^T P_c x) \\ \left[\dot{P}_c + P_c A + A^T + Q + P_c B R^{-1} B^T P_c \right] x &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dari persamaan (2.15) dapat disimpulkan bahwa Persamaan Differensial Riccati (Naidu, 2002) dapat ditulis sebagai berikut,

$$\dot{P}_c = -P_c A - A^T P_c - Q + P_c B R^{-1} B^T P_c \quad (2.16)$$

2.8 Algoritma Kunang-kunang

Algoritma kunang-kunang (*Firefly Algorithm*) adalah sebuah algoritma metaheuristik terinspirasi oleh alam, yaitu optimasi yang didasarkan pada perilaku sosial kunang-kunang yang berkedip yang terdapat pada daerah tropis. Algoritma ini dikembangkan oleh Dr. Xin-She Yang di Cambridge University pada tahun 2007, dan didasarkan pada perilaku kawanan (*swarm*) seperti ikan, serangga, atau burung di alam (Xin, 2009). Secara khusus, meskipun algoritma kunang-kunang memiliki banyak kesamaan dengan algoritma lain yang didasarkan pada kecerdasan berkelompok (*swarm intelligence*) seperti *Particle Swarm Optimization*, *Artificial Bee Colony Optimization* dan *Bacterial Foraging Algorithms*, memang jauh lebih sederhana baik dalam konsep dan implementasi. Selanjutnya, menurut bibliografi terakhir, algoritma ini sangat efisien serta dapat mengungguli algoritma konvensional lain, seperti *Genetic Algorithm* untuk memecahkan

banyak masalah optimasi, sebuah fakta yang telah dibenarkan dalam penelitian terbaru, dimana statistik kinerja algoritma kunang-kunang diukur terhadap algoritma optimasi terkenal yang lain menggunakan berbagai fungsi uji stokastik standar. Keuntungan utamanya adalah fakta bahwa ia menggunakan bilangan acak real, dan didasarkan pada komunikasi global antar kumpulan partikel dalam hal ini adalah kunang-kunang.

Algoritma kunang-kunang memiliki tiga aturan ideal tertentu yang didasarkan pada beberapa karakteristik utama kunang-kunang yang berkedip di alam sebagaimana berikut:

1. Semua kunang-kunang adalah *unisex*, dan kunang-kunang tersebut akan bergerak menuju yang lebih menarik dan cerah.
2. Daya tarik-menarik (*attractiveness*) kunang-kunang sebanding dengan kecerahan yang menurun sebagai jarak dari kunang-kunang yang lain dengan kecerahan yang meningkat karena fakta bahwa udara menyerap cahaya. Jika tidak ada kunang-kunang terang atau lebih menarik maka kunang-kunang tersebut akan bergerak secara acak.
3. Kecerahan atau intensitas cahaya kunang-kunang ditentukan oleh nilai dari fungsi tujuan dari masalah yang diberikan.

2.8.1 Tarik-Menarik

Berdasarkan algoritma kunang-kunang, bentuk fungsi tarik-menarik kunang-kunang adalah fungsi menurun secara monoton sebagaimana berikut:

$$\beta(r) = \beta_0 * \exp(-\gamma r^m) \quad (2.17)$$

dengan $m \geq 1$ dengan r adalah jarak antara dua kunang-kunang, β_0 adalah daya tarik awal pada $r = 0$, dan γ adalah koefisien absorpsi yang mengontrol penurunan intensitas cahaya yang nilainya berkisar antara 0 sampai 1. (Xin She Yang, 2010).

2.8.2 Jarak

Jarak antara dua kunang-kunang i dan j pada posisi x_i dan x_j masing-masing dapat didefinisikan sebagai *Cartesian* atau *Euclidean distance* sebagai berikut :

$$r_{ij} = \|x_i - x_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_{i,k} - x_{j,k})^2} \quad (2.18)$$

di mana $x_{i,k}$ adalah komponen ke- k dari koordinat spasial x_i dari kunang-kunang ke- i dan d adalah jumlah dimensi(Xin She Yang, 2010)

2.8.3 Pergerakan

Pergerakan kunang-kunang ke- i yang tertarik pada kunang-kunang j yang lebih menarik (lebih cerah) diberikan oleh Persamaan berikut:

$$x_i = x_i + \beta_0 * \exp(-\gamma r_{ij}^2) * (x_j - x_i) + \alpha * \left(X - \frac{1}{2}\right) \quad (2.19)$$

Koefisien α adalah parameter pengacakan ditentukan oleh rasio permasalahan yang nilainya berkisar antara 0 sampai 1, sedangkan X adalah pembangkit bilangan acak berdistribusi *uniform* pada interval $(0, 1)$ atau $X \sim U(0, 1)$. (Xin She Yang, 2010). Pseudo code dari firefly algorithm yang telah dirumuskan ditampilkan dalam Gambar 2.3

```

Algoritma kunang-kunang
input :  $n_k$  (banyak solusi)
          $x_k$  (solusi awal berukuran n)
         MaxGeneration (banyaknya iterasi)
          $\alpha_k$ 
          $\gamma_k$ 
          $\beta_{k0}$ 
          $\delta_k$ 
output : xbest (solusi terbaik)

for  $i = 1 : \text{MaxGeneration}$ 
  for  $i = 1 : n$ 
    for  $j = 1 : n$ 
      if  $I_j > I_i$ 
        Hitung nilai  $r_{ij}$  berdasarkan formula (2.18)
        Pergerakan solusi  $x_i$  berdasarkan formula (2.19)
        Update nilai  $I_i$ 
      end
    end
  end
  Urutkan  $x$  berdasarkan nilai  $I_i$  dan Tentukan xbest
end

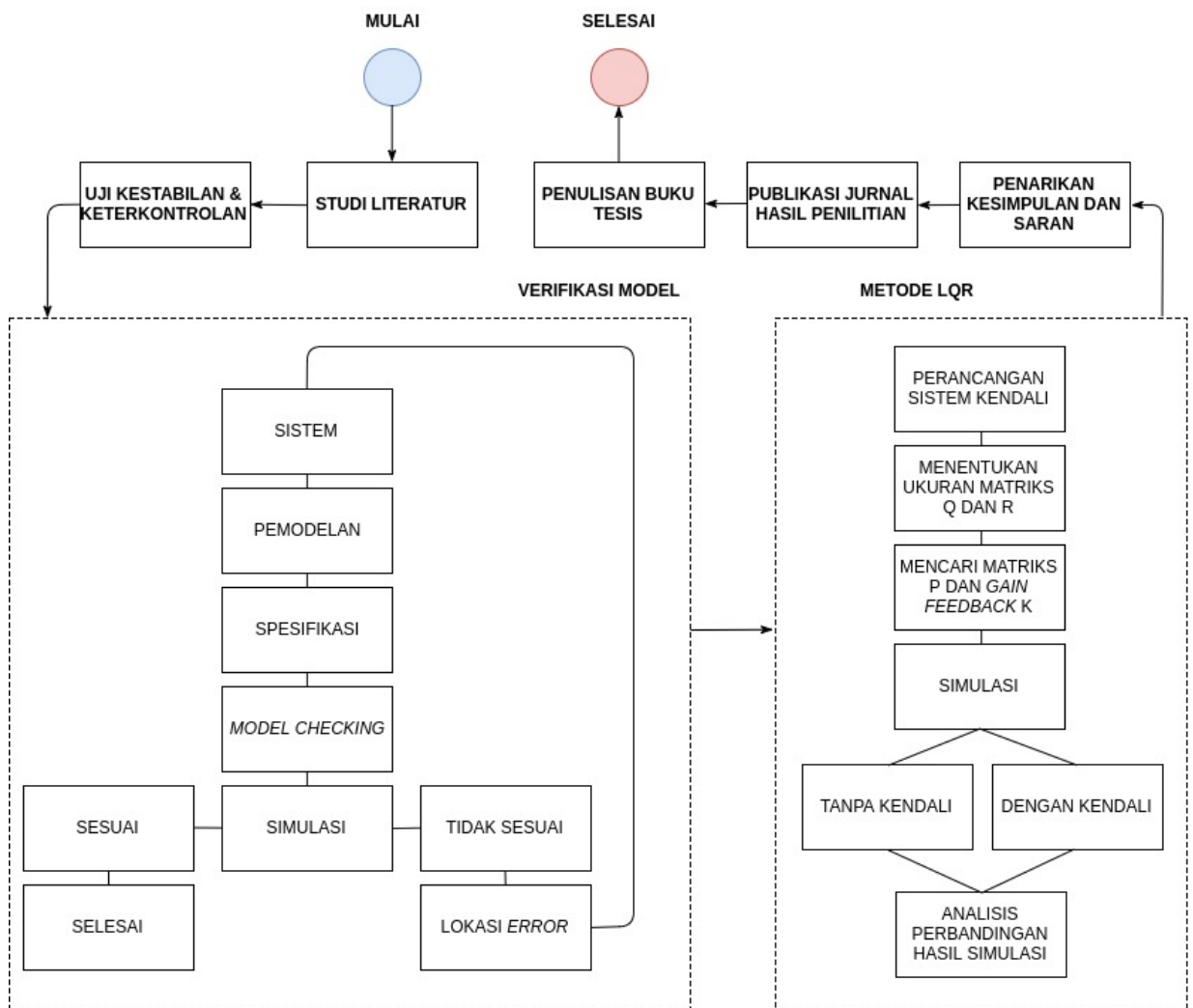
```

Gambar 2.3: *Pseudo Code* untuk Algoritma Kunang-kunang

BAB 3 METODE PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang akan digunakan atau dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian

3.1 Diagram Alir Penelitian



Gambar 3.1: Diagram Alir Penelitian

Diagram alir di atas menggambarkan proses pengerjaan penelitian dari awal hingga akhir.

3.2 Tahapan Penelitian

(a.) Studi Literatur

Pada tahapan ini dilakukan kajian beberapa jurnal dan buku yang berkaitan dengan penelitian ini sebagai berikut.

- (i) Mempelajari konsep kestabilan dan keterkontrolan dengan mengkaji buku dari (Subiono, 2013).
- (ii) Mempelajari konsep verifikasi model pada buku (Baier, Katoen, 2008) dan melakukan implementasi verifikasi model pada perangkat lunak Flowstar (Chen, etc., 2015).
- (iii) Mempelajari konsep optimal kontrol dengan metode *Linear Quadratic Regulator* pada buku (Naidu, 2002)

(b.) Menentukan Kestabilan dan Keterkontrolan Sistem

Pada tahapan ini, dilakukan pengujian kestabilan dan keterkontrolan di model matematika produksi lipid pada mikroalga.

(c.) Melakukan Verifikasi Model

Pada tahapan ini, dilakukan verifikasi model dan menganalisis model matematika produksi lipid pada mikroalga. Setelah itu, menentukan keadaan awal dan keadaan akhir dalam waktu yang sudah ditentukan.

(d.) Menentukan Kendali Optimal

Pada tahap ini, dilakukan pengoptimalan sistem dengan menggunakan metode Metode Linear Quadratic Regulator. Dengan menggunakan parameter keterbatasan nutrisi D dan keterbatasan karbondioksida δ sebagai parameter kendali. Oleh karena itu, agar didapatkan produksi biomassa dan lipid yang optimal.

(e.) Algoritma Kunang-Kunang

Pada tahap ini dilakukan pemilihan bobot pada matriks R_c dan Q_c dengan algoritma Kunang-kunang.

(f.) Simulasi

Pada tahap ini, dilakukan implementasi pada perangkat lunak yang digunakan untuk menyempurnakan penelitian.

- (i) Melakukan simulasi pada proses verifikasi model dengan perangkat lunak Flowstar (Chen, etc., 2015).
- (ii) Melakukan simulasi pada proses kendali optimal dengan mendesain Simulink pada perangkat lunak Matlab 2014b.

(g.) Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini, hasil keluaran yang diharapkan berupa Grafik. Setelah itu, dilakukan analisis dan membuat pembahasan terhadap hasil simulasi verifikasi model dan kendali optimal.

(h.) Penyusunan Tesis

Pada tahapan ini penulis melakukan penyusunan buku yang berisikan semua hasil yang penulis peroleh dari tahapan b sampai f. Hal ini dilakukan supaya segala sesuatu yang penulis peroleh dapat bermanfaat bagi pembaca sekalian.

(i.) Publikasi Penelitian

Pada tahapan ini, dilakukan publikasi hasil penelitian dengan berpartisipasi pada seminar internasional atau jurnal internasional. Kegiatan ini bertujuan untuk menunjukkan hasil penelitian yang telah dilakukan yang dapat dijadikan sebagai bahan kajian untuk melakukan penelitian selanjutnya.

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas kendali optimal produksi lipid pada mikroalga. Pembahasan dimulai dengan penjelasan model produksi lipid pada mikroalga dengan mengecek kestabilan dan keterkontrolan sistem. Kemudian dilakukan pengecekan model dengan verifikasi formal dari model produksi lipid pada mikroalga. Selanjutnya, menentukan formulasi kendali optimal dan penyelesaiannya menggunakan Linear Quadratic Regulator. Selanjutnya, diberikan analisis hasil simulasi untuk menunjukkan pengaruh kendali optimal produksi lipid pada mikroalga.

4.1 Deskripsi Model Matematika Produksi Lipid Pada Mikroalga

Pada bagian ini dibahas deskripsi model matematika dari model produksi lipid pada mikroalga yang dimodifikasi. Adapun asumsi-asumsi yang diberikan adalah :

a. Pertumbuhan dapat dimodelkan dalam lima variabel, yaitu:

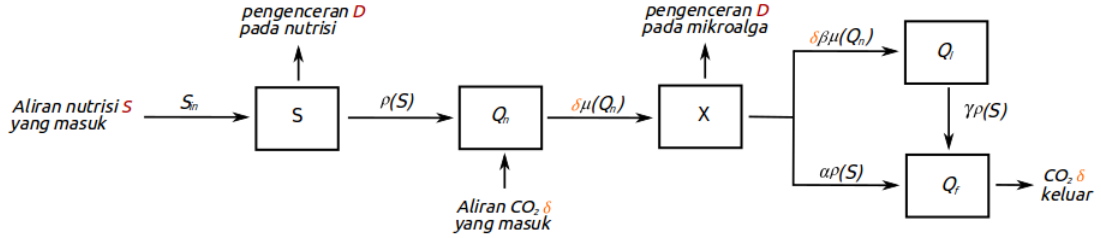
- $S(t)$: konsentrasi nutrisi pada waktu t , $S(t) > 0$
- $Q_n(t)$: konsentrasi kuota nitrogen t , $Q_n(t) > 0$
- $X(t)$: konsentrasi mikroalga pada waktu t , $X(t) > 0$
- $Q_l(t)$: konsentrasi kuota lipid pada waktu t , $Q_l(t) > 0$
- $Q_f(t)$: konsentrasi kuota karbon pada waktu t , $Q_f(t) > 0$

b. Laju perubahan dari konsentrasi nutrisi dipengaruhi oleh:

1. Aliran nutrisi yang masuk dalam sistem dinyatakan dalam $DS_{in}(t)$. Aliran nutrisi yang masuk tersebut dipengaruhi oleh laju pengenceran yang menyebabkan konsentrasi nutrisi bertambah.
2. Adanya penyerapan nutrisi secara maksimal untuk produksi mikroalga dinyatakan dengan $\rho(S)X(t)$. Jumlah mikroalga yang diproduksi menyebabkan konsentrasi nutrisi berkurang.
3. Adanya laju pengenceran nutrisi yang digunakan untuk pertumbuhan dan pembelahan sel mikroalga $-DS(t)$. Hal ini menyebabkan jumlah konsentrasi nutrisi berkurang.

- c. Laju perubahan dari konsentrasi kuota nitrogen dipengaruhi oleh:
1. Adanya jumlah konsentrasi nutrisi yang masuk yang digunakan untuk pertumbuhan sel $\rho(S)(t)$. Hal ini menyebabkan jumlah sel yang mengalami pertumbuhan bertambah.
 2. Adanya pembelahan sel yang dipengaruhi oleh karbondioksida $-\delta\mu(Q_n)Q_n(t)$. Hal ini menyebabkan jumlah konsentrasi kuota nitrogen berkurang.
- d. Laju perubahan dari konsentrasi mikroalga dipengaruhi oleh:
1. Adanya pertumbuhan maksimal sel mikroalga yang menghasilkan glukosa $\delta\mu(Q_n)X(t)$. Hal ini menyebabkan jumlah konsentrasi mikroalga bertambah.
 2. Adanya pengaruh laju pengenceran nutrisi pada mikroalga $-DX(t)$. Hal ini menyebabkan jumlah konsentrasi mikroalga berkurang.
- e. Laju perubahan dari konsentrasi kuota lipid dipengaruhi oleh:
1. Adanya mobilisasi glukosa yang menghasilkan asam lemak dan disimpan dalam kuota lipid $(\beta Q_n - Q_l)\delta\mu(Q_n)(t)$. Hal ini menyebabkan kuota lipid bertambah.
 2. Adanya mobilisasi protein $-\gamma\rho(S)(t)$. Hal ini menyebabkan konsentrasi kuota lipid berkurang.
- f. Laju perubahan dari konsentrasi kuota karbon dipengaruhi oleh:
1. Adanya sintesis protein $(\alpha + \gamma)\rho(S)(t)$. Hal ini menyebabkan konsentrasi kuota karbon bertambah.
 2. Adanya pelepasan asam lemak bebas yang menghasilkan karbon dioksida dan air $-Q_f\delta\mu(Q_n)(t)$. Hal ini menyebabkan konsentrasi kuota karbon berkurang.

Dari penurunan model produksi lipid pada mikroalga yang telah dimodifikasi, maka akan di visualisasikan dalam bentuk diagram kompartemen sebagai berikut,



Gambar 4.1: Model Pertumbuhan Mikroalga

Laju penyerapan nutrisi $\rho(S)$ menggunakan fungsi Michaelis-Menten karena merepresentasikan laju penyerapan maksimum ρ_m dan konstanta setengah saturasi K_s . Konstanta setengah saturasi merupakan konsentrasi substrat pada waktu setengah pertumbuhan maksimum, yang artinya mikroalga akan menyerap nutrisi hingga mencapai kondisi jenuh. Maka laju penyerapan maksimum dinyatakan sebagai berikut ini:

$$\rho(S) = \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right)$$

Model laju pertumbuhan spesifik menggunakan model Droop, sebagai berikut ini:

$$\mu(Q_n) = \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right)$$

Berdasarkan fungsi Michaelis Menten dan Droop (Droop, 1970), dapat diartikan jika model pertumbuhan mikroalga bergantung pada keterbatasan nutrisi dan karbondioksida. Oleh karena itu, model produksi lipid pada mikroalga dapat dinyatakan dengan,

$$\dot{S} = DS_{in} - \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) X - DS \quad (4.1)$$

$$\dot{Q}_n = \rho_m \frac{S}{S + K_s} - \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) Q_n \quad (4.2)$$

$$\dot{X} = \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) X - DX \quad (4.3)$$

$$\dot{Q}_l = (\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - \gamma \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \quad (4.4)$$

$$\dot{Q}_f = -Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \quad (4.5)$$

dan kondisi awal $S_s = 3$, $Q_{n_s} = 0.5$, $X_s = 0.02$, $Q_{l_s} = 0.25$ dan $Q_{f_s} = 0.25$.

Berikut nilai parameter yang digunakan untuk melakukan simulasi,

Tabel 4.1: Nilai Parameter Model Produksi Lipid pada Mikroalga

Simbol	Keterangan	Nilai	Referensi
D	Laju Pengenceran	0.35 mg/L	(Nasria, Mardlijah, 2015)
ρ	Laju Penyerapan	$0.095 \text{ mg}[N] \text{ mg}[C]^{-1}$	(Mairet, etc., 2011)
$\bar{\mu}$	Laju Pertumbuhan	0.5 d^{-1}	(Mairet, etc., 2011)
Q_0	Kuota Nitrogen Minimum	$0.05 \text{ mg}[N] \text{ mg}[C]^{-1}$	(Mairet, etc., 2011)
δ	Laju Penyerapan CO_2	1.42 mg/d	(Prapta, etc., 2012)
α	Sintesis Protein	$2.6 \text{ mg}[N] \text{ mg}[C]^{-1}$	(Mairet, etc., 2011)
β	Sintesis Asam Lemak	$4.6 \text{ mg}[N] \text{ mg}[C]^{-1}$	(Mairet, etc., 2011)
γ	Mobilisasi Asam Lemak	$3 \text{ mg}[N] \text{ mg}[C]^{-1}$	(Mairet, etc., 2011)
K_s	Konstanta Saturasi	$0.018 \text{ mg}[N] \text{ L}^{-1}$	(Mairet, etc., 2011)
s_{in}	Nutrisi Masuk	1.7 mg/L	(Nasria, Mardlijah, 2015)

4.2 Analisis Sistem Dinamik Model Produksi Lipid pada Mikroalga

Persamaan (4.1) - (4.5) adalah model matematika yang merupakan sistem dinamik dari permasalahan kendali optimal nutrisi dan karbon dioksida pada model produksi lipid pada mikroalga. Untuk melakukan analisis dinamik, terlebih dahulu menentukan titik setimbang dari sistem dinamik. Selanjutnya, dilakukan analisis kestabilan dan keterkontrolan pada titik setimbang.

4.2.1 Titik Setimbang

Titik setimbang dari sistem dinamik dapat diperoleh dari $\dot{S} = 0$, $\dot{Q}_n = 0$, $\dot{X} = 0$, $\dot{Q}_l = 0$ dan $\dot{Q}_f = 0$. Sehingga persamaan (4.1)-(4.5) menjadi,

$$DS_{in} - \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) X - DS = 0 \quad (4.6)$$

$$\rho_m \frac{S}{S + K_s} - \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) Q_n = 0 \quad (4.7)$$

$$\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) X - DX = 0 \quad (4.8)$$

$$(\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - \gamma \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) = 0 \quad (4.9)$$

$$-Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) = 0 \quad (4.10)$$

Dari persamaan (4.8), akan diperoleh penyelesaian sebagai berikut

$$\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) X - DX = 0$$

$$\left(\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - D \right) X = \begin{cases} \left(\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - D \right) = 0, X \neq 0 \\ \left(\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - D \right) \neq 0, X = 0 \end{cases}$$

Sehingga, dapat diperoleh dua kasus untuk mencari titik setimbang dengan **asumsi** sebagai berikut

1. $\left(\delta\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n}\right) - D\right) = 0$ atau $X \neq 0$
2. $\left(\delta\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n}\right) - D\right) \neq 0$ atau $X = 0$

Selanjutnya untuk mendapatkan titik setimbang akan dibahas sesuai kasus tersebut. Berikut ini akan dilakukan penyelesaian pada kasus pertama. Dari persamaan (4.8), akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned} \delta\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n}\right) X - DX &= 0 \\ \delta\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n}\right) - D &= 0 \\ Q_n &= \frac{Q_0\delta\mu}{\delta\mu - D} \end{aligned} \tag{4.11}$$

jika persamaan (4.11) disubstitusikan ke Persamaan (4.7) didapatkan

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{S}{S + K_s} - \delta\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n}\right) Q_n &= 0 \\ \frac{Q_0\delta^2\mu^2 \left(\frac{\delta\mu - D}{\delta\mu} - 1\right)}{\delta\mu - D} + \frac{S\rho_m}{K_s + S} &= 0 \\ S &= -\frac{DK_sQ_0\delta\mu}{DQ_0\delta\mu - (\delta\mu - D)\rho_m} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Selanjutnya, Persamaan (4.11) dan (4.12) disubstitusikan ke Persamaan (4.6)

$$\begin{aligned} DS_{in} - \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s}\right) X - DS &= 0 \\ \frac{D^2K_sQ_0\delta\mu}{DQ_0\delta\mu - (\delta\mu - D)\rho_m} - \frac{DK_sQ_0X\delta\mu\rho_m}{(DQ_0\delta\mu - (\delta\mu - D)\rho_m) \left(\frac{DK_sQ_0\delta\mu}{DQ_0\delta\mu - (\delta\mu - D)\rho_m} - K_s\right)} + DS_{in} &= 0 \\ \frac{DK_sQ_0\delta^2\mu^2 - D^2K_sQ_0\delta\mu + (DQ_0\delta^2\mu^2 - D^2Q_0\delta\mu - (\delta^2\mu^2 - 2D\delta\mu + D^2)\rho_m)S_{in}}{DQ_0^2\delta^2\mu^2 - (Q_0\delta^2\mu^2 - DQ_0\delta\mu)\rho_m} &= X \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dengan menggunakan Persamaan (4.11) dan (4.12) yang disubstitusikan ke Persamaan (4.9) diperoleh

$$\begin{aligned}
& (\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - \gamma \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) = 0 \\
& \frac{DK_s Q_0 \delta \gamma \mu \rho_m}{(DQ_0 \delta \mu - (\delta \mu - D) \rho_m) \left(\frac{DK_s Q_0 \delta \mu}{DQ_0 \delta \mu - (\delta \mu - D) \rho_m} - K_s \right)} \\
& - \left(\frac{Q_0 \beta \delta \mu}{\delta \mu - D} - Q_l \right) \delta \mu \left(\frac{\delta \mu - D}{\delta \mu} - 1 \right) = 0 \\
& Q_l = \frac{(Q_0 \beta \delta - Q_0 \delta \gamma) \mu}{\delta \mu - D}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Dengan menggunakan Persamaan (4.11) dan (4.12) yang disubstitusikan ke Persamaan (4.10) diperoleh

$$\begin{aligned}
& -Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) = 0 \\
& \frac{DK_s Q_0 (\alpha + \gamma) \delta \mu \rho_m}{(DQ_0 \delta \mu - (\delta \mu - D) \rho_m) \left(\frac{DK_s Q_0 \delta \mu}{DQ_0 \delta \mu - (\delta \mu - D) \rho_m} - K_s \right)} + Q_f \delta \mu \left(\frac{\delta \mu - D}{\delta \mu} - 1 \right) = 0 \\
& \frac{(Q_0 \alpha \delta + Q_0 \delta \gamma) \mu}{\delta \mu - D} = Q_f
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Berdasarkan Persamaan (4.11) sampai dengan (4.15) dapat diperoleh titik setimbang dengan

$$\begin{aligned}
S^* &= -\frac{DK_s Q_0 \delta \mu}{DQ_0 \delta \mu - (\delta \mu - D) \rho_m} \\
Q_n^* &= \frac{Q_0 \delta \mu}{\delta \mu - D} \\
X^* &= \frac{DK_s Q_0 \delta^2 \mu^2 - D^2 K_s Q_0 \delta \mu + (DQ_0 \delta^2 \mu^2 - D^2 Q_0 \delta \mu - (\delta^2 \mu^2 - 2D\delta \mu + D^2) \rho_m) s_{in}}{DQ_0^2 \delta^2 \mu^2 - (Q_0 \delta^2 \mu^2 - DQ_0 \delta \mu) \rho_m} \\
Q_l^* &= \frac{(Q_0 \beta \delta - Q_0 \delta \gamma) \mu}{\delta \mu - D} \\
Q_f^* &= \frac{(Q_0 \alpha \delta + Q_0 \delta \gamma) \mu}{\delta \mu - D}
\end{aligned}$$

sehingga dapat ditulis dengan $E_1 = (S^*, Q_n^*, X^*, Q_l^*, Q_f^*)$

Berikut akan dilakukan penyelesaian kasus kedua. Dari (4.8) diperoleh penyelesaian sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\delta\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n}\right) X - DX &= 0 \\ X \left(\delta\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n}\right) - D\right) &= 0 \\ X &= 0\end{aligned}\tag{4.16}$$

Dari persamaan (4.16) di substitusikan kedalam persamaan (4.6) diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}DS_{in} - \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s}\right) X - DS &= 0 \\ -DS + Ds_{in} &= 0 \\ S &= S_{in}\end{aligned}\tag{4.17}$$

Persamaan (4.16) dan (4.17) di substitusikan ke dalam persamaan (4.7) sebagai berikut

$$\begin{aligned}\rho_m \frac{S}{S + K_s} - \delta\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n}\right) Q_n &= 0 \\ \rho_m \frac{s_{in}}{s_{in} + K_s} - \delta\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n}\right) Q_n &= 0 \\ \frac{K_s Q_0 \delta\mu + (Q_0 \delta\mu + \rho_m) s_{in}}{K_s \delta\mu + \delta\mu s_{in}} &= Q_n\end{aligned}\tag{4.18}$$

Dari persamaan (4.17) dan (4.18) di substitusikan ke dalam (4.9) akan diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}(\beta Q_n - Q_l) \delta\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n}\right) - \gamma \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s}\right) &= 0 \\ \left(\frac{(K_s \delta\mu + \delta\mu s_{in}) Q_0}{K_s Q_0 \delta\mu + (Q_0 \delta\mu + \rho_m) s_{in}} - 1\right) \left(Q_l - \frac{(K_s Q_0 \delta\mu + (Q_0 \delta\mu + \rho_m) s_{in}) \beta}{K_s \delta\mu + \delta\mu s_{in}}\right) \delta\mu \dots &= 0 \\ \dots - \frac{\gamma \rho_m s_{in}}{K_s + s_{in}} \\ \frac{(K_s Q_0 \beta \delta - K_s Q_0 \delta \gamma) \mu + ((Q_0 \beta \delta - Q_0 \delta \gamma) \mu + (\beta - \gamma) \rho_m) s_{in}}{K_s \delta\mu + \delta\mu s_{in}} &= Q_l\end{aligned}\tag{4.19}$$

Dari persamaan (4.17) dan (4.18) di substitusikan ke dalam (4.10) akan diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}-Q_f \delta\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n}\right) + (\alpha + \gamma) \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s}\right) &= 0 \\ \left(\frac{(K_s \delta\mu + \delta\mu s_{in}) Q_0}{K_s Q_0 \delta\mu + (Q_0 \delta\mu + \rho_m) s_{in}} - 1\right) Q_f \delta\mu + \frac{(\alpha + \gamma) \rho_m s_{in}}{K_s + s_{in}} &= 0 \\ \frac{(K_s Q_0 \alpha \delta + K_s Q_0 \delta \gamma) \mu + ((Q_0 \alpha \delta + Q_0 \delta \gamma) \mu + (\alpha - \gamma) \rho_m) s_{in}}{K_s \delta\mu + \delta\mu s_{in}} &= Q_f\end{aligned}\tag{4.20}$$

Berdasarkan Persamaan (4.16) sampai dengan (4.20) dapat diperoleh titik setimbang dengan

$$\begin{aligned}\bar{S} &= S_{in} \\ \bar{Q}_n &= \frac{K_s Q_0 \delta \mu + (Q_0 \delta \mu + \rho_m) s_{in}}{K_s \delta \mu + \delta \mu s_{in}} \\ \bar{X} &= 0 \\ \bar{Q}_l &= \frac{(K_s Q_0 \beta \delta - K_s Q_0 \delta \gamma) \mu + ((Q_0 \beta \delta - Q_0 \delta \gamma) \mu + (\beta - \gamma) \rho_m) s_{in}}{K_s \delta \mu + \delta \mu s_{in}} \\ \bar{Q}_f &= \frac{(K_s Q_0 \alpha \delta + K_s Q_0 \delta \gamma) \mu + ((Q_0 \alpha \delta + Q_0 \delta \gamma) \mu + (\alpha - \gamma) \rho_m) s_{in}}{K_s \delta \mu + \delta \mu s_{in}}\end{aligned}$$

sehingga dapat ditulis dengan $E_2 = (\bar{S}, \bar{Q}_n, 0, \bar{Q}_l, \bar{Q}_f)$

Selanjutnya dari penyelesaian kasus pertama dan kedua didapatkan 2 titik setimbang yaitu E_1 dan E_2 .

Catatan :

Untuk titik setimbang kedua E_2 , $\bar{X} = 0$ (mikroalga) hal ini dapat dikatakan bahwa mikroalga tidak mengalami pertumbuhan karena tidak adanya masukan berupa nutrisi ataupun karbondioksida. Sehingga, secara logika sistem tidak berjalan apabila menggunakan E_2 . Di sisi lain, E_2 tetap akan dibuktikan secara kestabilan dan keterkontrolan.

4.2.2 Analisis Kestabilan

Pada tahap ini akan dilakukan pengujian kestabilan sistem dengan menggunakan titik setimbang E_1 dan E_2 . Dengan kembali melihat sistem, model produksi lipid pada mikroalga tergolong sistem non-linier, oleh karena itu akan dilakukan linierisasi terlebih dahulu. Sebelumnya akan ditunjukkan kembali model tersebut berdasarkan persamaan (4.1-4.5) sebagai berikut

$$f_1 = DS_{in} - \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) X - DS \quad (4.21)$$

$$f_2 = \rho_m \frac{S}{S + K_s} - \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) Q_n \quad (4.22)$$

$$f_3 = \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) X - DX \quad (4.23)$$

$$f_4 = (\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - \gamma \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \quad (4.24)$$

$$f_5 = -Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \quad (4.25)$$

Selanjutnya, persamaan (4.21 - 4.25) diturunkan terhadap S, Q_n, X, Q_l, Q_f dengan menggunakan matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J(S, Q_n, X, Q_l, Q_f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial Q_n} & \frac{\partial f_1}{\partial X} & \frac{\partial f_1}{\partial Q_l} & \frac{\partial f_1}{\partial Q_f} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial Q_n} & \frac{\partial f_2}{\partial X} & \frac{\partial f_2}{\partial Q_l} & \frac{\partial f_2}{\partial Q_f} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial Q_n} & \frac{\partial f_3}{\partial X} & \frac{\partial f_3}{\partial Q_l} & \frac{\partial f_3}{\partial Q_f} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial Q_n} & \frac{\partial f_4}{\partial X} & \frac{\partial f_4}{\partial Q_l} & \frac{\partial f_4}{\partial Q_f} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial Q_n} & \frac{\partial f_5}{\partial X} & \frac{\partial f_5}{\partial Q_l} & \frac{\partial f_5}{\partial Q_f} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(DS_{in} - \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) X - DS \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} (DS_{in}) - \frac{\partial}{\partial S} \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) X - \frac{\partial}{\partial S} (DS) \\ &= 0 - \rho_m X \left(\frac{(1)(S + K_s) - (1)(S)}{(S + K_s)^2} \right) - D \\ &= -\rho_m X \left(\frac{(S + K_s) - S}{(S + K_s)^2} \right) - D \\ &= -\rho_m X \left(\frac{1}{(S + K_s)} - \frac{S}{(S + K_s)^2} \right) - D \\ &= -\frac{\rho_m X}{(S + K_s)} + \frac{\rho_m X S}{(S + K_s)^2} - D \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial Q_n} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial S} (DS_{in}) - \frac{\partial}{\partial S} \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) X - \frac{\partial}{\partial S} (DS) \\ &= 0 - \frac{\partial}{\partial S} \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) X - 0 \\ &= -\frac{\rho_m S}{S + K_s} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial Q_l} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial Q_f} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} - \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) Q_n \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) - \frac{\partial}{\partial S} \left(\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) Q_n \right) \\ &= \rho_m \left(\frac{(1)(S + K_s) - (1)(S)}{(S + K_s)^2} \right) - 0 \\ &= \rho_m \left(\frac{(S + K_s) - S}{(S + K_s)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_m \left(\frac{1}{(S + K_s)} - \frac{S}{(S + K_s)^2} \right) \\
&= \frac{\rho_m}{(S + K_s)} - \frac{\rho_m S}{(S + K_s)^2} \\
\frac{\partial f_2}{\partial Q_n} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} - \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) Q_n \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_n} \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) - \frac{\partial}{\partial Q_n} \left(\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) Q_n \right) \\
&= 0 - \frac{\partial}{\partial Q_n} (\delta \bar{\mu} (Q_n - Q_0)) \\
&= -\delta \bar{\mu} + 0 \\
&= -\delta \bar{\mu}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial Q_l} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial Q_f} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial S} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3}{\partial Q_n} &= \frac{\partial}{\partial Q_n} \left(\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) X - DX \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_n} \left(\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) X \right) - \frac{\partial}{\partial Q_n} (DX) \\
&= (\delta \bar{\mu} X) \frac{\partial}{\partial Q_n} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \\
&= (\delta \bar{\mu} X) \left(0 - \frac{(0)Q_n - Q_0(1)}{(Q_n)^2} \right) \\
&= \frac{\delta \bar{\mu} X Q_0}{(Q_n)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) X - DX \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial X} \left(\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) X \right) - \frac{\partial}{\partial X} (DX) \\
&= \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - D
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial Q_l} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial Q_f} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_4}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left((\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - \gamma \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S} \left((\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial S} \left(\gamma \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= 0 - \gamma \frac{\partial}{\partial S} \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \\
&= -\gamma \rho_m \left(\frac{(1)(S + K_s) - (1)(S)}{(S + K_s)^2} \right) \\
&= -\gamma \rho_m \left(\frac{(S + K_s) - S}{(S + K_s)^2} \right) \\
&= -\gamma \rho_m \left(\frac{1}{(S + K_s)} - \frac{S}{(S + K_s)^2} \right) \\
&= -\frac{\gamma \rho_m}{(S + K_s)} + \frac{\gamma \rho_m S}{(S + K_s)^2} \\
\frac{\partial f_4}{\partial Q_n} &= \frac{\partial}{\partial Q_n} \left((\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - \gamma \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_n} \left((\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial S} \left(\gamma \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_n} \left((\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) - 0 \\
&= \delta \bar{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial Q_n} \left((\beta Q_n - Q_l) \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) \right) \\
&= \delta \bar{\mu} \left(\beta \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - (\beta Q_n - Q_l) \left(\frac{-Q_0}{(Q_n)^2} \right) \right) \\
&= \delta \bar{\mu} \beta \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) + \frac{(\beta Q_n - Q_l) (\delta \bar{\mu} Q_0)}{(Q_n)^2} \\
\frac{\partial f_4}{\partial X} &= 0 \\
\frac{\partial f_4}{\partial Q_l} &= \frac{\partial}{\partial Q_l} \left((\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) - \gamma \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_l} \left((\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial Q_l} \left(\gamma \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_l} \left((\beta Q_n - Q_l) \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) - 0 \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_l} \left(\beta Q_n \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial Q_l} \left(Q_l \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) \\
&= - \left(\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) \\
\frac{\partial f_4}{\partial Q_f} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_5}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(-Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S} \left(-Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial S} \left((\alpha + \gamma) \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= 0 + (\alpha + \gamma) \frac{\partial}{\partial S} \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \\
&= (\alpha + \gamma) \rho_m \left(\frac{(1)(S + K_s) - (1)(S)}{(S + K_s)^2} \right) \\
&= (\alpha + \gamma) \rho_m \left(\frac{(S + K_s) - S}{(S + K_s)^2} \right) \\
&= (\alpha + \gamma) \rho_m \left(\frac{1}{(S + K_s)} - \frac{S}{(S + K_s)^2} \right) \\
&= \frac{(\alpha + \gamma) \rho_m}{(S + K_s)} - \frac{(\alpha + \gamma) \rho_m S}{(S + K_s)^2} \\
\frac{\partial f_4}{\partial Q_n} &= \frac{\partial}{\partial Q_n} \left(-Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_n} \left(-Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial S} \left((\alpha + \gamma) \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_n} \left(-Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) + 0 \\
&= (-Q_f \delta \bar{\mu}) \frac{\partial}{\partial Q_n} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \\
&= (-Q_f \delta \bar{\mu}) \left(0 - \frac{(0)Q_n - Q_0(1)}{(Q_n)^2} \right) \\
&= -\frac{Q_f \delta \bar{\mu} Q_0}{(Q_n)^2} \\
\frac{\partial f_5}{\partial X} &= 0 \\
\frac{\partial f_5}{\partial Q_l} &= 0 \\
\frac{\partial f_5}{\partial Q_f} &= \frac{\partial}{\partial Q_f} \left(-Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_f} \left(-Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial Q_f} \left((\alpha + \gamma) \left(\rho_m \frac{S}{S + K_s} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_f} \left(-Q_f \delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \right) + 0 \\
&= -\delta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right)
\end{aligned}$$

Sehingga dari penyelesaian persamaan differensial parsial tersebut didapatkan matriks Jacobian sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} j_1 & 0 & j_3 & 0 & 0 \\ j_6 & j_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_{12} & j_{13} & 0 & 0 \\ j_{16} & j_{17} & 0 & j_{19} & 0 \\ j_{21} & j_{22} & 0 & 0 & j_{25} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Selanjutnya, akan disubstitusikan titik setimbang pertama E_1 kedalam persamaan (4.26) sehingga diperoleh matriks J_1 sebagai berikut

$$J_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ m_6 & m_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{12} & m_{13} & 0 & 0 \\ m_{16} & m_{17} & 0 & m_{19} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} \end{bmatrix}_{(S^*, Q_n^*, X^*, Q_l^*, Q_f^*)} \quad (4.27)$$

Dari persamaan (4.27) akan dilakukan pengujian kestabilan sistem, maka dapat ditinjau melalui nilai eigen dari matriks J_1 , dengan cara penyelesaian $\det(J - \lambda I) = 0$.

$$\begin{vmatrix} (m_1 - \lambda_1) & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ m_6 & (m_7 - \lambda_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (m_{13} - \lambda_3) & 0 & 0 \\ m_{16} & m_{17} & 0 & (m_{19} - \lambda_4) & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & (m_{25} - \lambda_5) \end{vmatrix} = 0$$

Selanjutnya akan diselesaikan matriks J_1 sebagai berikut,

$$\begin{aligned} 0 - 0 + 0 - 0 + (m_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (m_1 - \lambda_1) & 0 & m_3 & 0 \\ m_6 & (m_7 - \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (m_{13} - \lambda_3) & 0 \\ m_{16} & m_{17} & 0 & (m_{19} - \lambda_4) \end{vmatrix} = 0 \\ (m_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (m_1 - \lambda_1) & 0 & m_3 & 0 \\ m_6 & (m_7 - \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (m_{13} - \lambda_3) & 0 \\ m_{16} & m_{17} & 0 & (m_{19} - \lambda_4) \end{vmatrix} = 0 \\ -0 + 0 - 0 + (m_{19} - \lambda_4)(m_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (m_1 - \lambda_1) & 0 & m_3 \\ m_6 & (m_7 - \lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & (m_{13} - \lambda_3) \end{vmatrix} = 0 \\ (m_{19} - \lambda_4)(m_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (m_1 - \lambda_1) & 0 & m_3 \\ m_6 & (m_7 - \lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & (m_{13} - \lambda_3) \end{vmatrix} = 0 \\ 0 - 0 + (m_{13} - \lambda_3)(m_{19} - \lambda_4)(m_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (m_1 - \lambda_1) & 0 \\ m_6 & (m_7 - \lambda_2) \end{vmatrix} = 0 \\ (m_{13} - \lambda_3)(m_{19} - \lambda_4)(m_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (m_1 - \lambda_1) & 0 \\ m_6 & (m_7 - \lambda_2) \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$(m_1 - \lambda_1)(m_7 - \lambda_2)(m_{13} - \lambda_3)(m_{19} - \lambda_4)(m_{25} - \lambda_5) = 0$$

dari hasil tersebut dapat diperoleh nilai eigen dengan

$$\lambda_1 = m_1$$

$$\lambda_2 = m_7$$

$$\lambda_3 = m_{13}$$

$$\lambda_4 = m_{19}$$

$$\lambda_5 = m_{25}$$

dengan,

$$m_1 = -\frac{(DK_s Q_0 \delta^2 \mu^2 - D^2 K_s Q_0 \delta \mu + (DQ_0 \delta^2 \mu^2 - D^2 Q_0 \delta \mu - (\delta^2 \mu^2 - 2D\delta\mu + D^2)\rho_m) s_{in}) \dots}{(DQ_0^2 \delta^2 \mu^2 - (Q_0 \delta^2 \mu^2 - DQ_0 \delta \mu)\rho_m)(DQ_0 \delta \mu - (\delta\mu - D)\rho_m) \left(\frac{DK_s Q_0 \delta \mu}{DQ_0 \delta \mu - (\delta\mu - D)\rho_m} - K_s \right)^2}$$

$$\dots \frac{DK_s Q_0 \delta \mu \rho_m}{(DQ_0^2 \delta^2 \mu^2 - (Q_0 \delta^2 \mu^2 - DQ_0 \delta \mu)\rho_m)(DQ_0 \delta \mu - (\delta\mu - D)\rho_m) \left(\frac{DK_s Q_0 \delta \mu}{DQ_0 \delta \mu - (\delta\mu - D)\rho_m} - K_s \right)^2}$$

$$+ \frac{(DK_s Q_0 \delta^2 \mu^2 - D^2 K_s Q_0 \delta \mu + (DQ_0 \delta^2 \mu^2 - D^2 Q_0 \delta \mu - (\delta^2 \mu^2 - 2D\delta\mu + D^2)\rho_m) s_{in}) \rho_m}{(DQ_0^2 \delta^2 \mu^2 - (Q_0 \delta^2 \mu^2 - DQ_0 \delta \mu)\rho_m) \left(\frac{DK_s Q_0 \delta \mu}{DQ_0 \delta \mu - (\delta\mu - D)\rho_m} - K_s \right)}$$

$$m_7 = -\delta \bar{\mu}$$

$$m_{13} = -\delta \mu \left(1 - \frac{\delta \mu - D}{\delta \mu} \right) - D$$

$$m_{19} = -\delta \mu \left(1 - \frac{\delta \mu - D}{\delta \mu} \right)$$

$$m_{25} = -\delta \mu \left(1 - \frac{\delta \mu - D}{\delta \mu} \right)$$

Dapat disimpulkan dari penyelesaian tersebut bahwa penyelesaian nilai eigen semua bertanda negatif. Sehingga, sistem dinamik dapat dikatakan stabil asimtotik.

Selanjutnya, mensubstitusikan titik setimbang yang kedua E_2 ke dalam matriks Jacobian pada Persamaan (4.26) sehingga diperoleh

$$J_2 = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_3 & 0 & 0 \\ n_6 & n_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{13} & 0 & 0 \\ n_{16} & n_{17} & 0 & n_{19} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 & 0 & n_{25} \end{bmatrix}_{(\bar{s}, \bar{Q}_n, 0, \bar{Q}_l, \bar{Q}_f)} \quad (4.28)$$

Dari persamaan (4.28) akan dilakukan pengujian kestabilan sistem, maka dapat ditinjau melalui nilai eigen dari matriks J_2 , dengan cara penyelesaian

$$\det(J - \lambda I) = 0.$$

$$\begin{aligned}
0 - 0 + 0 - 0 + (n_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (n_1 - \lambda_1) & 0 & n_3 & 0 \\ n_6 & (n_7 - \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n_{13} - \lambda_3) & 0 \\ n_{16} & n_{17} & 0 & (n_{19} - \lambda_4) \end{vmatrix} = 0 \\
(n_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (n_1 - \lambda_1) & 0 & n_3 & 0 \\ n_6 & (n_7 - \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n_{13} - \lambda_3) & 0 \\ n_{16} & n_{17} & 0 & (n_{19} - \lambda_4) \end{vmatrix} = 0 \\
-0 + 0 - 0 + (n_{19} - \lambda_4)(n_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (n_1 - \lambda_1) & 0 & n_3 & 0 \\ n_6 & (n_7 - \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n_{13} - \lambda_3) & 0 \\ n_{16} & n_{17} & 0 & (n_{19} - \lambda_4) \end{vmatrix} = 0 \\
(n_{19} - \lambda_4)(n_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (n_1 - \lambda_1) & 0 & n_3 & 0 \\ n_6 & (n_7 - \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n_{13} - \lambda_3) & 0 \\ n_{16} & n_{17} & 0 & (n_{19} - \lambda_4) \end{vmatrix} = 0 \\
0 - 0 + (n_{13} - \lambda_3)(n_{19} - \lambda_4)(n_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (n_1 - \lambda_1) & 0 & n_3 & 0 \\ n_6 & (n_7 - \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n_{13} - \lambda_3) & 0 \\ n_{16} & n_{17} & 0 & (n_{19} - \lambda_4) \end{vmatrix} = 0 \\
(n_{13} - \lambda_3)(n_{19} - \lambda_4)(n_{25} - \lambda_5) & \begin{vmatrix} (n_1 - \lambda_1) & 0 & n_3 & 0 \\ n_6 & (n_7 - \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n_{13} - \lambda_3) & 0 \\ n_{16} & n_{17} & 0 & (n_{19} - \lambda_4) \end{vmatrix} = 0 \\
(n_1 - \lambda_1)(n_7 - \lambda_2)(n_{13} - \lambda_3)(n_{19} - \lambda_4)(n_{25} - \lambda_5) & = 0
\end{aligned}$$

dari hasil tersebut dapat diperoleh nilai eigen dengan

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= n_1 \\
\lambda_2 &= n_7 \\
\lambda_3 &= n_{13} \\
\lambda_4 &= n_{19} \\
\lambda_5 &= n_{25}
\end{aligned}$$

dengan,

$$\begin{aligned}
n_1 &= -D \\
n_7 &= -\delta\bar{\mu} \\
n_{13} &= -\left(\frac{1 - (K_s\delta\mu + \delta\mu s_{in})Q_0}{K_sQ_0\delta\mu + (Q_0\delta\mu + \rho_m)s_{in}}\right)\delta\mu - D \\
n_{19} &= -\left(1 - \frac{(K_s\delta\mu + \delta\mu s_{in})Q_0}{K_sQ_0\delta\mu + (Q_0\delta\mu + \rho_m)s_{in}}\right)\delta\mu \\
n_{25} &= -\left(\frac{1 - (K_s\delta\mu + \delta\mu s_{in})Q_0}{K_sQ_0\delta\mu + (Q_0\delta\mu + \rho_m)s_{in}}\right)\delta\mu
\end{aligned}$$

Dapat disimpulkan dari penyelesaian tersebut bahwa penyelesaian nilai eigen semua bertanda negatif. Sehingga, sistem dinamik dapat dikatakan stabil asimtotik.

4.2.3 Analisis Keterkontrolan

Sebelum menganalisis keterkontrolan sistem dinamik, syarat perlu dan cukup suatu sistem terkontrol sudah dibuktikan pada Teorema 2.1. Selanjutnya, diberikan matriks A (diambil dari persamaan 4.26) dengan,

$$A = \begin{bmatrix} j_1 & 0 & j_3 & 0 & 0 \\ j_6 & j_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j_{13} & 0 & 0 \\ j_{16} & j_{17} & 0 & j_{19} & 0 \\ j_{21} & j_{22} & 0 & 0 & j_{25} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

sedangkan matriks B akan dilakukan penyelesaian sebagai berikut,

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial D} & \frac{\partial f_1}{\partial \delta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial D} & \frac{\partial f_2}{\partial \delta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial D} & \frac{\partial f_3}{\partial \delta} \\ \frac{\partial f_4}{\partial D} & \frac{\partial f_4}{\partial \delta} \\ \frac{\partial f_5}{\partial D} & \frac{\partial f_5}{\partial \delta} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

dengan,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial D} &= S_{in} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \delta} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial D} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta} &= -Q_n \mu \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \\ \frac{\partial f_3}{\partial D} &= -X \\ \frac{\partial f_3}{\partial \delta} &= X \mu \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \\ \frac{\partial f_4}{\partial D} &= 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial \delta} &= (Q_n \beta - Q_l) \mu \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \\ \frac{\partial f_5}{\partial D} &= 0 \\ \frac{\partial f_5}{\partial \delta} &= -Q_f \mu \left(1 - \frac{Q_0}{Q_n} \right) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh matriks B sebagai berikut,

$$B = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \\ p_3 & p_4 \\ 0 & p_5 \\ 0 & p_6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, mensubstitusikan titik setimbang E_1 ke dalam matriks B , maka dapat ditulis sebagai berikut

$$B_1 = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \\ p_3 & p_4 \\ 0 & p_5 \\ 0 & p_6 \end{bmatrix}_{(S^*, Q_n^*, X^*, Q_l^*, Q_f^*)} \quad (4.31)$$

dengan,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{DK_s Q_0 \delta \mu}{DQ_0 \delta \mu - (\delta \mu - D)\rho_m} + s_{in} \\ p_2 &= \frac{Q_0 \delta \mu^2 \left(\frac{\delta \mu - D}{\delta \mu} - 1 \right)}{\delta \mu - D} \\ p_3 &= -\frac{DK_s Q_0 \delta^2 \mu^2 - D^2 K_s Q_0 \delta \mu + (DQ_0 \delta^2 \mu^2 - D^2 Q_0 \delta \mu - (\delta^2 \mu^2 - 2D\delta \mu + D^2)\rho_m)s_{in}}{DQ_0^2 \delta^2 \mu^2 - (Q_0 \delta^2 \mu^2 - DQ_0 \delta \mu)\rho_m} \\ p_4 &= -\frac{(DK_s Q_0 \delta^2 \mu^2 - D^2 K_s Q_0 \delta \mu + (DQ_0 \delta^2 \mu^2 - D^2 Q_0 \delta \mu - (\delta^2 \mu^2 - 2D\delta \mu + D^2)\rho_m)s_{in})}{DQ_0^2 \delta^2 \mu^2 - (Q_0 \delta^2 \mu^2 - DQ_0 \delta \mu)\rho_m} \\ p_5 &= -\frac{\mu \left(\frac{\delta \mu - D}{\delta \mu} - 1 \right)}{DQ_0^2 \delta^2 \mu^2 - (Q_0 \delta^2 \mu^2 - DQ_0 \delta \mu)\rho_m} \\ p_6 &= \frac{(Q_0 \alpha \delta + Q_0 \delta \gamma) \mu^2 \left(\frac{\delta \mu - D}{\delta \mu} - 1 \right)}{\delta \mu - D} \end{aligned}$$

Selanjutnya, juga mensubstitusikan titik setimbang E_2 ke dalam matriks B , maka dapat ditulis sebagai berikut

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}_{(\bar{S}, \bar{Q}_n, 0, \bar{Q}_l, \bar{Q}_f)} \quad (4.32)$$

dengan,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{(K_s Q_0 \delta \mu + (Q_0 \delta \mu + \rho_m)s_{in}) \left(\frac{(K_s \delta \mu + \delta \mu s_{in}) Q_0}{K_s Q_0 \delta \mu + (Q_0 \delta \mu + \rho_m)s_{in}} - 1 \right) \mu}{K_s \delta \mu + \delta \mu s_{in}} \\ p_2 &= -\left(\frac{(K_s \delta \mu + \delta \mu s_{in}) Q_0}{K_s Q_0 \delta \mu + (Q_0 \delta \mu + \rho_m)s_{in}} - 1 \right) \dots \\ &\dots \left(\frac{(K_s Q_0 \delta \mu + (Q_0 \delta \mu + \rho_m)s_{in}) \beta}{K_s \delta \mu + \delta \mu s_{in}} \dots \right) \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots - \frac{(K_s Q_0 \beta \delta - K_s Q_0 \delta \gamma) \mu + ((Q_0 \beta \delta - Q_0 \delta \gamma) \mu + (\beta - \gamma) \rho_m) s_{in}}{K_s \delta \mu + \delta \mu s_{in}} \\
p_3 = & \frac{((K_s Q_0 \alpha \delta + K_s Q_0 \delta \gamma) \mu + ((Q_0 \alpha \delta + Q_0 \delta \gamma) \mu + (\alpha - \gamma) \rho_m) s_{in}) \dots}{K_s \delta \mu + \delta \mu s_{in}} \\
& \dots \frac{\left(\frac{(K_s \delta \mu + \delta \mu s_{in}) Q_0}{K_s Q_0 \delta \mu + (Q_0 \delta \mu + \rho_m) s_{in}} - 1 \right) \mu}{K_s \delta \mu + \delta \mu s_{in}}
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.6, dapat disusun matriks keterkontrolan berukuran 5×10 . Pada tahap ini diberikan matriks B_1 berdasarkan persamaan (4.31), dimana sudah dilakukan pelinieran terhadap titik setimbang E_1 . Sehingga dapat diperoleh matriks Ktr_1 sebagai berikut

$$Ktr_1 = (B_1 | AB_1 | A^2 B_1 | A^3 B_1 | A^4 B_1)$$

Selanjutnya untuk matriks AB_1 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
AB_1 &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ m_6 & m_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{12} & m_{13} & 0 & 0 \\ m_{16} & m_{17} & 0 & m_{19} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \\ p_3 & p_4 \\ 0 & p_5 \\ 0 & p_6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \\ q_5 & q_6 \\ q_7 & q_8 \\ q_9 & q_{10} \end{bmatrix} \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Dengan nilai dari matriks AB_1 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
q_1 &= m_1 p_1 + m_3 p_5 &= -0.3584 \\
q_2 &= m_3 p_6 &= -0.1457 \\
q_3 &= m_6 p_1 &= 0.02075 \\
q_4 &= m_7 p_4 &= 0.0172 \\
q_5 &= m_{13} p_5 &= 0 \\
q_6 &= m_{12} p_4 + m_{13} p_6 &= -1.5201 \\
q_7 &= m_{16} p_1 &= -0.0622 \\
q_8 &= m_{17} p_4 + m_{19} p_8 &= 0.0925 \\
q_9 &= m_{21} p_1 &= 0.1162 \\
q_{10} &= m_{25} p_{10} + m_{22} p_4 &= 0.1001
\end{aligned}$$

Untuk matriks A^2B_1 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
A^2B_1 &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ m_6 & m_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{12} & m_{13} & 0 & 0 \\ m_{16} & m_{17} & 0 & m_{19} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \\ q_5 & q_6 \\ q_7 & q_8 \\ q_9 & q_{10} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \\ r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 \\ r_9 & r_{10} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Dengan nilai dari matriks A^2B_1 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
r_1 &= m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1 &= 13.2677 \\
r_2 &= m_1m_3p_6 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_3 &= 5.4474 \\
r_3 &= m_6m_7p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_6 &= -0.7817 \\
r_4 &= m_7^2p_4 + m_3m_6p_6 &= 0.3241 \\
r_5 &= m_{12}m_6p_1 + m_{13}^2p_5 &= 1.2982 \\
r_6 &= m_{12}m_7p_4 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_{13} &= 1.0792 \\
r_7 &= m_{16}m_{19}p_1 + m_{17}m_6p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_{16} &= 2.3799 \\
r_8 &= m_{17}m_7p_4 + m_{16}m_3p_6 + (m_{17}p_4 + m_{19}p_8)m_{19} &= 1.0156 \\
r_9 &= m_{21}m_{25}p_1 + m_{22}m_6p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_{21} &= -4.3775 \\
r_{10} &= m_{22}m_7p_4 + m_{21}m_3p_6 + (m_{25}p_{10} + m_{22}p_4)m_{25} &= -1.8162
\end{aligned}$$

Untuk matriks A^3B_1 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
A^3B_1 &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ m_6 & m_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{12} & m_{13} & 0 & 0 \\ m_{16} & m_{17} & 0 & m_{19} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \\ r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 \\ r_9 & r_{10} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \\ s_5 & s_6 \\ s_7 & s_8 \\ s_9 & s_{10} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Dengan nilai dari matriks A^3B_1 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
s_1 &= (m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1)m_1 \\
&\quad + (m_{12}m_6p_1 + m_{13}^2p_5)m_3 \\
s_1 &= -491.1010
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_2 &= (m_1 m_3 p_6 + (m_{12} p_4 + m_{13} p_6) m_3) m_1 \\
&\quad + (m_{12} m_7 p_4 + (m_{12} p_4 + m_{13} p_6) m_{13}) m_3 \\
s_2 &= -201.6532 \\
s_3 &= (m_{13} m_3 p_5 + (m_1 p_1 + m_3 p_5) m_1) m_6 \\
&\quad + (m_6 m_7 p_1 + (m_1 p_1 + m_3 p_5) m_6) m_7 \\
s_3 &= 28.9416 \\
s_4 &= (m_1 m_3 p_6 + (m_{12} p_4 + m_{13} p_6) m_3) m_6 \\
&\quad + (m_7^2 p_4 + m_3 m_6 p_6) m_7 \\
s_4 &= 11.8849 \\
s_5 &= (m_6 m_7 p_1 + (m_1 p_1 + m_3 p_5) m_6) m_{12} \\
&\quad + (m_{12} m_6 p_1 + m_{13}^2 p_5) m_{13} \\
s_5 &= -48.9004 \\
s_6 &= (m_7^2 p_4 + m_3 m_6 p_6) m_{12} \\
&\quad + (m_{12} m_7 p_4 + (m_{12} p_4 + m_{13} p_6) m_{13}) m_{13} \\
s_6 &= -20.2754 \\
s_7 &= (m_{13} m_3 p_5 + (m_1 p_1 + m_3 p_5) m_1) m_{16} \\
&\quad + (m_6 m_7 p_1 + (m_1 p_1 + m_3 p_5) m_6) m_{17} \\
&\quad + (m_{16} m_{19} p_1 + m_{17} m_6 p_1 + (m_1 p_1 + m_3 p_5) m_{16}) m_{19} \\
s_7 &= -88.1503 \\
s_8 &= (m_1 m_3 p_6 + (m_{12} p_4 + m_{13} p_6) m_3) m_{16} + (m_7^2 p_4 + m_3 m_6 p_6) m_{17} \\
&\quad + (m_{17} m_7 p_4 + m_{16} m_3 p_6 + (m_{17} p_4 + m_{19} p_8) m_{19}) m_{19} \\
s_8 &= -36.2146 \\
s_9 &= (m_{13} m_3 p_5 + (m_1 p_1 + m_3 p_5) m_1) m_{21} + (m_6 m_7 p_1 + (m_1 p_1 + m_3 p_5) m_6) m_{22} \\
&\quad + (m_{21} m_{25} p_1 + m_{22} m_6 p_1 + (m_1 p_1 + m_3 p_5) m_{21}) m_{25} \\
s_9 &= 162.0730 \\
s_{10} &= (m_1 m_3 p_6 + (m_{12} p_4 + m_{13} p_6) m_3) m_{21} + (m_7^2 p_4 + m_3 m_6 p_6) m_{22} \\
&\quad + (m_{22} m_7 p_4 + m_{21} m_3 p_6 + (m_{25} p_{10} + m_{22} p_4) m_{25}) m_{25} \\
s_{10} &= 66.5563
\end{aligned}$$

Untuk matriks A^4B_1 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
A^4B_1 &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ m_6 & m_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{12} & m_{13} & 0 & 0 \\ m_{16} & m_{17} & 0 & m_{19} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \\ s_5 & s_6 \\ s_7 & s_8 \\ s_9 & s_{10} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \\ t_5 & t_6 \\ t_7 & t_8 \\ t_9 & t_{10} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Dengan nilai dari matriks A^4B_1 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
t_1 &= ((m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1)m_1 + (m_{12}m_6p_1 + m_{13}^2p_5)m_3)m_1 \\
&\quad + ((m_6m_7p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_6)m_{12} + (m_{12}m_6p_1 + m_{13}^2p_5)m_{13})m_3 \\
t_1 &= 18177.9169 \\
t_2 &= ((m_1m_3p_6 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_3)m_1 + (m_{12}m_7p_4 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_{13})m_3)m_1 \\
&\quad + ((m_7^2p_4 + m_3m_6p_6)m_{12} + (m_{12}m_7p_4 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_{13})m_{13})m_3 \\
t_2 &= 7464.1239 \\
t_3 &= ((m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1)m_1 + (m_{12}m_6p_1 + m_{13}^2p_5)m_3)m_6 \\
&\quad + ((m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1)m_6 + (m_6m_7p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_6)m_7)m_7 \\
t_3 &= -1071.2663 \\
t_4 &= ((m_1m_3p_6 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_3)m_1 + (m_{12}m_7p_4 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_{13})m_3)m_6 \\
&\quad + ((m_1m_3p_6 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_3)m_6 + (m_7^2p_4 + m_3m_6p_6)m_7)m_7 \\
t_4 &= -439.8783 \\
t_5 &= ((m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1)m_6 + (m_6m_7p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_6)m_7)m_{12} \\
&\quad + ((m_6m_7p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_6)m_{12} + (m_{12}m_6p_1 + m_{13}^2p_5)m_{13})m_{13} \\
t_5 &= 1810.4675 \\
t_6 &= ((m_1m_3p_6 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_3)m_6 + (m_7^2p_4 + m_3m_6p_6)m_7)m_{12} \\
&\quad + ((m_7^2p_4 + m_3m_6p_6)m_{12} + (m_{12}m_7p_4 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_{13})m_{13})m_{13} \\
t_6 &= 743.4754 \\
t_7 &= ((m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1)m_1 + (m_{12}m_6p_1 + m_{13}^2p_5)m_3)m_{16} \\
&\quad + ((m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1)m_6 + (m_6m_7p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_6)m_7)m_{17} \\
&\quad + ((m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1)m_{16} + (m_6m_7p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_6)m_{17})m_{19} \dots \\
&\quad \dots + (m_{16}m_{19}p_1 + m_{17}m_6p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_{16})m_{19} \\
t_7 &= 3262.8848 \\
t_8 &= ((m_1m_3p_6 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_3)m_1 + (m_{12}m_7p_4 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_{13})m_3)m_{16} \\
&\quad + ((m_1m_3p_6 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_3)m_6 + (m_7^2p_4 + m_3m_6p_6)m_7)m_{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ((m_1m_3p_6 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_3)m_{16} + (m_7^2p_4 + m_3m_6p_6)m_{17})\dots \\
& \dots + (m_{17}m_7p_4 + m_{16}m_3p_6 + (m_{17}p_4 + m_{19}p_8)m_{19})m_{19} \\
t_8 & = 1339.7977 \\
t_9 & = ((m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1)m_1 + (m_{12}m_6p_1 + m_{13}^2p_5)m_3)m_{21} \\
& + ((m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1)m_6 + (m_6m_7p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_6)m_7)m_{22} \\
& + ((m_{13}m_3p_5 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_1)m_{21} + (m_6m_7p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_6)m_{22})\dots \\
& \dots + (m_{21}m_{25}p_1 + m_{22}m_6p_1 + (m_1p_1 + m_3p_5)m_{21})m_{25} \\
t_9 & = -5999.0914 \\
t_{10} & = ((m_1m_3p_6 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_3)m_1 + (m_{12}m_7p_4 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_{13})m_3)m_{21} \\
& + ((m_1m_3p_6 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_3)m_6 + (m_7^2p_4 + m_3m_6p_6)m_7)m_{22} \\
& + ((m_1m_3p_6 + (m_{12}p_4 + m_{13}p_6)m_3)m_{21} + (m_7^2p_4 + m_3m_6p_6)m_{22})\dots \\
& \dots + (m_{22}m_7p_4 + m_{21}m_3p_6 + (m_{25}p_{10} + m_{22}p_4)m_{25})m_{25} \\
t_{10} & = -2463.3189
\end{aligned}$$

Persamaan (4.31) dan (4.33-4.36) dapat disusun matriks keterkontrolan Ktr berukuran 5×10 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
Ktr_1 & = [B_1 | AB_1 | A^2B_1 | A^3B_1 | A^5B_1]_{(S^*, Q_n^*, X^*, Q_l^*, Q_f^*)} \\
Ktr_1 & = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & q_1 & q_2 & r_1 & r_2 & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 \\ 0 & p_2 & q_3 & q_4 & r_3 & r_4 & s_3 & s_4 & t_3 & t_4 \\ p_3 & p_4 & q_5 & q_6 & r_5 & r_6 & s_5 & s_6 & t_5 & t_6 \\ 0 & p_5 & q_7 & q_8 & r_7 & r_8 & s_7 & s_8 & t_7 & t_8 \\ 0 & p_6 & q_9 & q_{10} & r_9 & r_{10} & s_9 & s_{10} & t_9 & t_{10} \end{bmatrix}_{(S^*, Q_n^*, X^*, Q_l^*, Q_f^*)}
\end{aligned}$$

dari matriks Ktr_1 didapatkan rank sama dengan 5. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa sistem dinamik terkontrol.

Catatan :

Setiap elemen matriks Ktr_1 dilakukan simbolisasi, dengan tujuan untuk memisalkan setiap elemen matriks. Apabila tidak dilakukann simbolisasi, ukuran setiap elemen matriks Ktr_1 sangat besar. Selanjutnya, untuk proses pencarian rank dilakukan dengan menggunakan software Sagemath. Hal ini dilakukan karena ukuran setiap elemen matriks Ktr_1 sangat besar, sehingga diperlukan aplikasi untuk meminimalisasi proses penyelesaian.

Berdasarkan Definisi 2.6, dapat disusun matriks keterkontrolan berukuran 5×10 . Pada tahap ini diberikan matriks B_2 berdasarkan persamaan (4.32), dimana sudah dilakukan pelinieran terhadap titik setimbang E_2 . Sehingga dapat diperoleh matriks Ktr_2 sebagai berikut

$$Ktr_2 = (B_2|AB_2|A^2B_2|A^3B_2|A^4B_2)$$

Selanjutnya untuk matriks AB_2 sebagai berikut

$$\begin{aligned} AB_2 &= \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_3 & 0 & 0 \\ n_6 & n_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{13} & 0 & 0 \\ n_{16} & n_{17} & 0 & n_{19} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 & 0 & n_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dengan nilai dari matriks AB_2 sebagai berikut

$$\begin{aligned} b_1 &= n_7 a_4 & = 0.0470 \\ b_2 &= n_{17} a_4 + n_{19} a_8 & = -0.3047 \\ b_3 &= n_{25} a_{10} + n_{22} a_4 & = 0.0585 \end{aligned}$$

untuk matriks A^2B_2 sebagai berikut

$$\begin{aligned} A^2B_2 &= \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_3 & 0 & 0 \\ n_6 & n_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{13} & 0 & 0 \\ n_{16} & n_{17} & 0 & n_{19} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 & 0 & n_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dengan nilai dari matriks A^2B_2 sebagai berikut

$$\begin{aligned} c_1 &= n_7^2 p_4 & = -0.0333 \\ c_2 &= n_{17} n_7 a_4 + (n_{17} a_4 + n_{19} a_8) n_{19} & = 0.3007 \\ c_3 &= n_{22} n_7 p_4 + (n_{25} a_{10} + n_{22} a_4) n_{25} & = -0.0415 \end{aligned}$$

untuk matriks A^3B_2 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 A^3B_2 &= \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_3 & 0 & 0 \\ n_6 & n_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{13} & 0 & 0 \\ n_{16} & n_{17} & 0 & n_{19} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 & 0 & n_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & d_2 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Dengan nilai dari matriks A^3B_2 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 d_1 &= n_7^3 a_4 && = 0.0236 \\
 d_2 &= n_{17} n_7^2 a_4 + (n_{17} n_7 a_4 + (n_{17} a_4 + n_{19} a_8) n_{19}) n_{19} && = -0.2570 \\
 d_3 &= n_{22} n_7^2 a_4 + (n_{22} n_7 a_4 + (n_{25} a_{10} + n_{22} a_4) n_{25}) n_{25} && = 0.0294
 \end{aligned}$$

untuk matriks A^4B_2 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 A^4B &= \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_3 & 0 & 0 \\ n_6 & n_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{13} & 0 & 0 \\ n_{16} & n_{17} & 0 & n_{19} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 & 0 & n_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & d_2 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & e_2 \\ 0 & e_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Dengan nilai dari matriks A^4B_2 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 e_1 &= n_7^4 a_4 \\
 &= -0.0168 \\
 e_2 &= n_{17} n_7^3 a_4 + (n_{17} n_7^2 a_4 + (n_{17} n_7 a_4 + (n_{17} a_4 + n_{19} a_8) n_{19}) n_{19}) n_{19} \\
 &= 0.2049 \\
 e_3 &= n_{22} n_7^3 a_4 + (n_{22} n_7^2 a_4 + (n_{22} n_7 a_4 + (n_{25} a_{10} + n_{22} a_4) n_{25}) n_{25}) n_{25} \\
 &= -0.0209
 \end{aligned}$$

Persamaan (4.32) dan (4.36-4.40) dapat disusun matriks keterkontrolan Ktr

berukuran 5×10 sebagai berikut

$$Ktr_2 = [B_2 | AB_2 | A^2B_2 | A^3B_2 | A^5B_2]_{\bar{s}, \bar{Q}_n, 0, \bar{Q}_l, \bar{Q}_f}$$

$$Ktr_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & b_2 & c_1 & c_2 & d_1 & d_2 & e_1 & e_2 \\ 0 & a_2 & b_3 & b_4 & c_3 & c_4 & d_3 & d_4 & e_3 & e_4 \\ a_3 & a_4 & b_5 & b_6 & c_5 & c_6 & d_5 & d_6 & e_5 & e_6 \\ 0 & a_5 & b_7 & b_8 & c_7 & c_8 & d_7 & d_8 & e_7 & e_8 \\ 0 & a_6 & b_9 & b_{10} & c_9 & c_{10} & d_9 & d_{10} & e_9 & e_{10} \end{bmatrix}_{\bar{s}, \bar{Q}_n, 0, \bar{Q}_l, \bar{Q}_f}$$

dari matriks Ktr_2 didapatkan rank sama dengan 4. Oleh karena itu, dapat di simpulkan bahwa sistem dinamik tidak terkontrol.

Catatan :

Setiap elemen matriks Ktr_2 dilakukan simbolisasi, dengan tujuan untuk memisalkan setiap elemen matriks. Apabila tidak dilakukann simbolisasi, ukuran setiap elemen matriks Ktr_2 sangat besar. Selanjutnya, untuk proses pencarian rank dilakukan dengan menggunakan software Sagemath. Hal ini dilakukan karena ukuran setiap elemen matriks Ktr_2 sangat besar, sehingga diperlukan aplikasi untuk meminimalisasi proses penyelesaian.

4.3 Verifikasi Model Produksi Lipid Pada Mikroalga

Pada bagian ini akan dibahas mengenai verifikasi model pada model produksi lipid pada mikroalga dengan Persamaan (4.1)-(4.5). Tujuan menggunakan metode verifikasi model adalah untuk melakukan pengecekan pada himpunan yang berada di kondisi awal variabel *state* dengan menggunakan sebuah spesifikasi yang diinginkan untuk mengetahui keadaan model sistem dinamik non-linier orde satu bersifat *safe* atau *unsafe*. Penyelesaian verifikasi model dilakukan dengan menggunakan deret Taylor. Berikut langkah-langkah menyelesaikan verifikasi model :

1. Menentukan model sistem dinamik
Model sistem dinamik yang akan digunakan adalah model sistem dinamik awal (Mairet, etc., 2011) dan model modifikasi produksi lipid pada mikroalga dengan dua kendali atau dapat dikatakan model modifikasi.
2. Menentukan parameter
Paramater yang akan digunakan berdasarkan Tabel 4.1.
3. Menentukan interval waktu serta batas minimal dan maksimal Deret Taylor
Pada penelitian ini digunakan interval plot sebesar 0.01. Serta digunakan batas minimal dan maksimal deret Taylor dari TM *Orders* 1 hingga 100.

4. Menentukan kondisi awal variabel state

Berdasarkan penelitian sebelumnya (Nasria, Mardlijah, 2015) diberikan himpunan kondisi awal sebagai berikut :

$$\begin{aligned}S(t_0) &= [3, 3.5] \\Q_n(t_0) &= [0.5, 1] \\X(t_0) &= [0.02, 0.07] \\Q_l(t_0) &= [0.25, 0.5] \\Q_f(t_0) &= [0.25, 0.5]\end{aligned}$$

5. Menentukan spesifikasi model

Untuk nilai spesifikasi diperoleh dari hasil model awal dengan

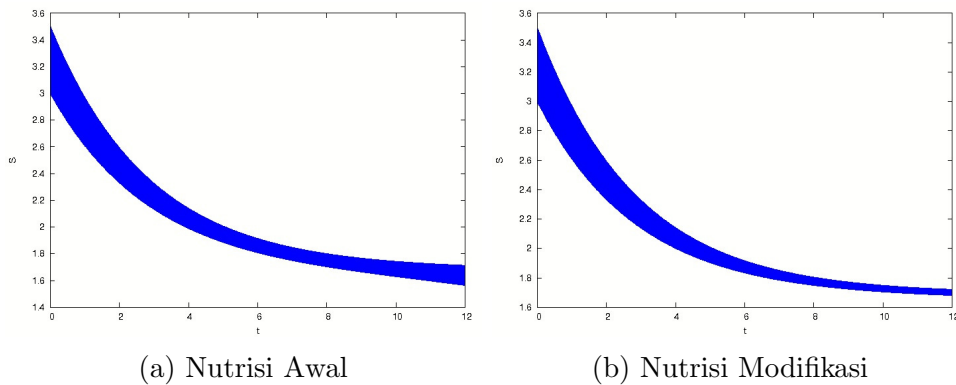
$$\begin{aligned}S_s &= [1.58, 1.75] \\Q_{n_s} &= [0.17, 0.19] \\X_s &= [0.021, 0.169] \\Q_{l_s} &= [0.32, 0.39] \\Q_{f_s} &= [1.01, 1.04]\end{aligned}$$

Dari spesifikasi tersebut akan dilakukan verifikasi pada model modifikasi. Berdasarkan sifat sistem, model dikatakan *safe* apabila berada atau lebih dari nilai spesifikasi. Begitu juga dengan sifat sistem *unsafe* apabila berada pada kurang dari nilai spesifikasi. Berikut ini akan didefinisikan sistem dinamik akan bersifat *safe* apabila

$$\begin{aligned}S_s &\geq 1.58 \\Q_{n_s} &\geq 0.17 \\X_s &\geq 0.021 \\Q_{l_s} &\geq 0.32 \\Q_{f_s} &\geq 1.01\end{aligned}$$

Sebelum melakukan simulasi akan diberikan penjelasan ulang mengenai model awal dan model modifikasi. Untuk model awal menggunakan model dari (Mairet, etc., 2011) atau satu kendali dan model modifikasi menggunakan model dengan dua kendali.

a. Simulasi Verifikasi Model pada Konsentrasi Nutrisi



Gambar 4.2: Perbandingan Verifikasi Model pada Konsentrasi Nutrisi

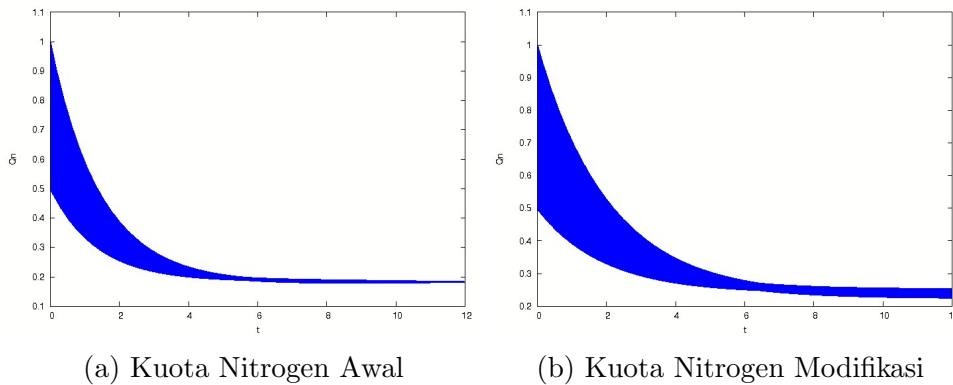
Berdasarkan hasil simulasi Gambar 4.2 terdapat kondisi awal dan kondisi modifikasi dengan waktu $0 \leq t \leq 12$ dengan nilai $S(t_0) = [3, 3.5]$. Pada Gambar 4.2a konsentrasi nutrisi mengalami penurunan hingga $S_s(t_{12}) = [1.58, 1.75]$. Pada Gambar 4.2b konsentrasi nutrisi mengalami penurunan hingga $S(t_{12}) = [1.70, 1.75]$. Kedua simulasi menunjukkan grafik penurunan, dikarenakan konsentrasi nutrisi diserap oleh mikroalga untuk melakukan pertumbuhan. Berdasarkan spesifikasi $S_s \geq 1.58$, terlihat jika $S \geq S_s$, meskipun terdapat nilai S berada dipersekitaran S_s . Sehingga, dapat dikatakan jika sistem dinamik pada konsentrasi nutrisi memiliki sifat *safe*.

Tabel 4.2: Perbandingan Waktu Simulasi pada Nutrisi

Sistem Dinamik	Jumlah Plot	Waktu	Sifat
Konsentrasi Nutrisi Awal	1200 <i>flowpipe</i>	9.5729	-
Konsentrasi Nutrisi Modifikasi	1200 <i>flowpipe</i>	11.9743	<i>Safe</i>

Berdasarkan Tabel 4.2, dengan menggunakan interval plot 0.01 artinya setiap 1 detik dapat melakukan plotting sebanyak 100 kali plot. Karena waktu yang dibutuhkan 12 detik, maka diperoleh 1200 plot. Waktu yang digunakan untuk melakukan simulasi menunjukkan bahwa waktu konsentrasi nutrisi modifikasi lebih lama 2.4014 detik. Waktu simulasi tidak mempengaruhi sifat sistem. Tetapi besar waktu komputasi dipengaruhi oleh sistem dinamik yang digunakan.

b. Simulasi Verifikasi Model pada Konsentrasi Kuota Nitrogen



Gambar 4.3: Perbandingan Verifikasi Model pada Konsentrasi Kuota Nitrogen

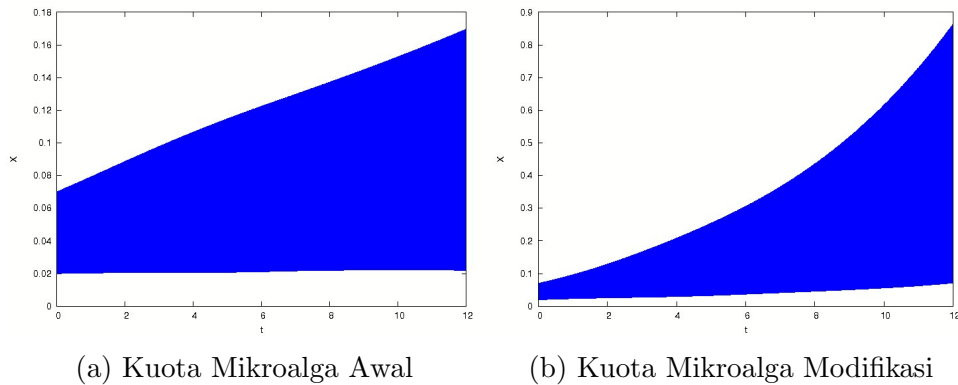
Berdasarkan hasil simulasi Gambar 4.3 terdapat kondisi awal dan kondisi modifikasi dengan waktu $0 \leq t \leq 12$ dengan nilai $Q_n(t_0) = [0.5, 1]$. Pada Gambar 4.3a konsentrasi kuota nitrogen mengalami penurunan hingga $Q_{n_s}(t_{12}) = [0.17, 0.19]$. Pada Gambar 4.3b konsentrasi kuota nitrogen mengalami penurunan hingga $Q_n(t_{12}) = [0.22, 0.26]$. Kedua simulasi menunjukkan grafik penurunan, dikarenakan konsentrasi kuota nitrogen digunakan untuk melakukan pembelahan sel. Berdasarkan spesifikasi $Q_{n_s} \geq 0.17$, terlihat jika $Q_n \geq Q_{n_s}$. Sehingga, dapat dikatakan jika sistem dinamik pada konsentrasi kuota nitrogen memiliki sifat *safe*.

Tabel 4.3: Perbandingan Waktu Simulasi pada Nitrogen

Sistem Dinamik	Jumlah Plot	Waktu	Sifat
Konsentrasi Kuota Nitrogen Awal	1200 <i>flowpipe</i>	10.8574	-
Konsentrasi Kuota Nitrogen Modifikasi	1200 <i>flowpipe</i>	12.0012	<i>Safe</i>

Berdasarkan Tabel 4.3, dengan menggunakan interval plot 0.01 artinya setiap 1 detik dapat melakukan plotting sebanyak 100 kali plot. Karena waktu yang dibutuhkan 12 detik, maka diperoleh 1200 plot. Waktu yang digunakan untuk melakukan simulasi menunjukkan bahwa waktu konsentrasi kuota nitrogen modifikasi lebih lama 1.1437 detik. Waktu simulasi tidak mempengaruhi sifat sistem. Tetapi besar waktu komputasi dipengaruhi oleh sistem dinamik yang digunakan.

c. Simulasi Verifikasi Model pada Konsentrasi Mikroalga



Gambar 4.4: Perbandingan Verifikasi Model pada Konsentrasi Mikroalga

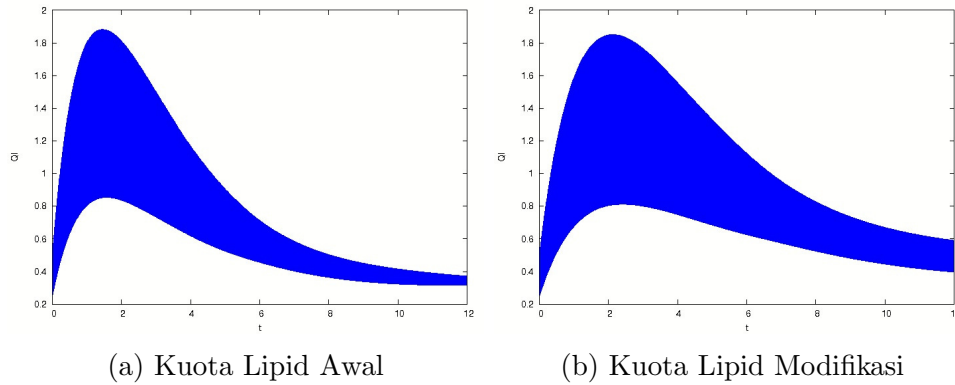
Berdasarkan hasil simulasi Gambar 4.4 terdapat kondisi awal dan kondisi modifikasi dengan waktu $0 \leq t \leq 12$ dengan nilai $Q_n(t_0) = [0.02, 0.07]$. Pada Gambar 4.4a konsentrasi mikroalga mengalami kenaikan hingga $X_s(t_{12}) = [0.021, 0.169]$. Pada Gambar 4.4b konsentrasi mikroalga mengalami kenaikan hingga $X(t_{12}) = [0.07, 0.87]$. Kedua simulasi menunjukkan grafik kenaikan, konsentrasi mikroalga mengalami pertumbuhan yang dipengaruhi oleh karbon dioksida saat fotosintesis yang menghasilkan glukosa dan penyerapan nutrisi yang menyebabkan pembelahan sel. Berdasarkan spesifikasi $X_s \geq 0.021$, terlihat jika $X \geq X_s$. Sehingga, dapat dikatakan jika sistem dinamik pada konsentrasi mikroalga memiliki sifat *safe*.

Tabel 4.4: Perbandingan Waktu Simulasi pada Mikroalga

Sistem Dinamik	Jumlah Plot	Waktu	Sifat
Konsentrasi Mikroalga Awal	1200 <i>flowpipe</i>	9.7271	-
Konsentrasi Mikroalga Modifikasi	1200 <i>flowpipe</i>	12.9150	<i>Safe</i>

Berdasarkan Tabel 4.4, dengan menggunakan interval plot 0.01 artinya setiap 1 detik dapat melakukan plotting sebanyak 100 kali plot. Karena waktu yang dibutuhkan 12 detik, maka diperoleh 1200 plot. Waktu yang digunakan untuk melakukan simulasi menunjukkan bahwa waktu konsentrasi mikroalga modifikasi lebih lama 3.1879 detik. Waktu simulasi tidak mempengaruhi sifat sistem. Tetapi besar waktu komputasi dipengaruhi oleh sistem dinamik yang digunakan.

d. Simulasi Verifikasi Model pada Konsentrasi Kuota Lipid



Gambar 4.5: Perbandingan Verifikasi Model pada Konsentrasi Kuota Lipid

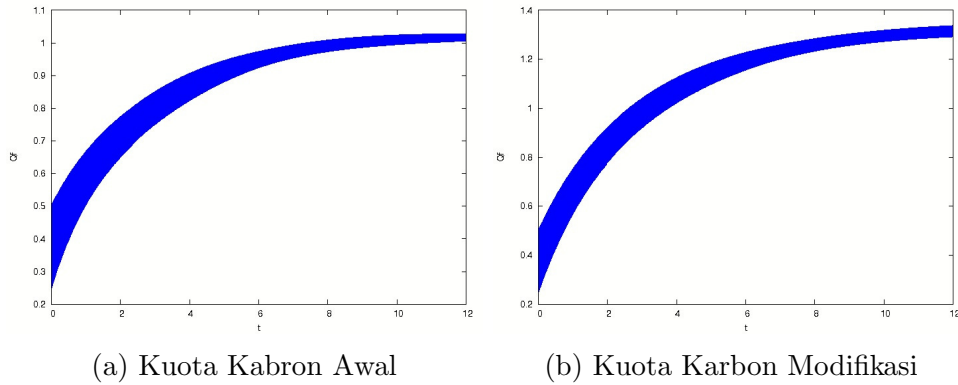
Berdasarkan hasil simulasi Gambar 4.5 terdapat kondisi awal dan kondisi modifikasi dengan waktu $0 \leq t \leq 12$ dengan nilai $Q_l(t_0) = [0.25, 0.5]$. Pada Gambar 4.5a konsentrasi kuota lipid mengalami kenaikan hingga $Q_{l_s}(t_{1.7}) = [0.82, 1.82]$, selanjutnya mengalami penurunan hingga $Q_{l_s}(t_{12}) = [0.32, 0.39]$. Pada Gambar 4.5b konsentrasi kuota lipid mengalami kenaikan hingga $Q_l(t_{1.7}) = [0.8, 1.82]$, selanjutnya mengalami penurunan hingga $Q_{l_s}(t_{12}) = [0.4, 0.6]$. Kedua simulasi menunjukkan grafik kenaikan selanjutnya penurunan, dikarenakan konsentrasi kuota lipid digunakan untuk menampung asam lemak dan kemudian melakukan mobilisasi asam lemak bebas ke dalam kuota karbon. Berdasarkan spesifikasi $Q_{l_s} \geq 0.32$, terlihat jika $Q_l \geq Q_{l_s}$. Sehingga, dapat dikatakan jika sistem dinamik pada konsentrasi kuota nitrogen memiliki sifat *safe*.

Tabel 4.5: Perbandingan Waktu Simulasi pada Kuota Lipid

Sistem Dinamik	Jumlah Plot	Waktu	Sifat
Konsentrasi Kuota Lipid Awal	1200 <i>flowpipe</i>	9.8021	-
Konsentrasi Kuota Lipid Modifikasi	1200 <i>flowpipe</i>	11.8571	<i>Safe</i>

Berdasarkan Tabel 4.5, dengan menggunakan interval plot 0.01 artinya setiap 1 detik dapat melakukan plotting sebanyak 100 kali plot. Karena waktu yang dibutuhkan 12 detik, maka diperoleh 1200 plot. Waktu yang digunakan untuk melakukan simulasi menunjukkan bahwa waktu konsentrasi kuota nitrogen modifikasi lebih lama 2.0590 detik. Waktu simulasi tidak mempengaruhi sifat sistem. Tetapi besar waktu komputasi dipengaruhi oleh sistem dinamik yang digunakan.

e. Simulasi Verifikasi Model pada Konsentrasi Kuota Karbon



Gambar 4.6: Perbandingan Verifikasi Model pada Konsentrasi Kuota Karbon

Berdasarkan hasil simulasi Gambar 4.6 terdapat kondisi awal dan kondisi modifikasi dengan waktu $0 \leq t \leq 12$ dengan nilai $Q_f(t_0) = [0.25, 0.5]$. Pada Gambar 4.6a konsentrasi kuota karbon mengalami kenaikan hingga $Q_{f_s}(t_{12}) = [1.01, 1.04]$. Pada Gambar 4.6b konsentrasi kuota karbon mengalami kenaikan hingga $Q_f(t_{12}) = [1.24, 1.38]$. Kedua simulasi menunjukkan grafik kenaikan, dikarenakan konsentrasi kuota karbon digunakan untuk menampung mobilisasi asam lemak bebas dari kuota lipid dan sintesa protein dari mikroalga. Berdasarkan spesifikasi $Q_{f_s} \geq 1.01$, terlihat jika $Q_f \geq Q_{f_s}$. Sehingga, dapat dikatakan jika sistem dinamik pada konsentrasi kuota karbon memiliki sifat *safe*.

Tabel 4.6: Perbandingan Waktu Simulasi pada Kuota Karbon

Sistem Dinamik	Jumlah Plot	Waktu	Sifat
Konsentrasi Kuota Karbon Awal	1200 <i>flowpipe</i>	10.9179	-
Konsentrasi Kuota Karbon Modifikasi	1200 <i>flowpipe</i>	12.4274	<i>Safe</i>

Berdasarkan Tabel 4.6, dengan menggunakan interval plot 0.01 artinya setiap 1 detik dapat melakukan plotting sebanyak 100 kali plot. Karena waktu yang dibutuhkan 12 detik, maka diperoleh 1200 plot. Waktu yang digunakan untuk melakukan simulasi menunjukkan bahwa waktu konsentrasi kuota karbon modifikasi lebih lama 1.5095 detik. Waktu simulasi tidak mempengaruhi sifat sistem. Tetapi besar waktu komputasi dipengaruhi oleh sistem dinamik yang digunakan.

4.4 Penyelesaian Kendali Optimal

Pada bagian ini, akan dibahas perancangan kendali LQR untuk sistem model matematika ekstraksi lipid mikroalga. LQR merupakan sebuah sistem kendali yang terdiri atas sistem dan gain feedback sistem. Dengan menentukan fungsi objektif sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q_c x + u^T R_c u) dt$$

LQR yang telah dijabarkan adalah desain untuk sistem kendali dengan rentang waktu yang tak terhingga dimana t_f adalah waktu final kendali serta Q_c adalah matriks simetris, semi-definit positif dan R_c adalah matriks simetris, definit positif.

Tahap selanjutnya adalah penentuan gain feedback regulator. Kemudian diselidiki Gain Regulator LQR dengan karakteristik stabil pada lup tertutup. Hukum kendali dari sebuah sistem dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u_c = -K_c x$$

dengan K_c adalah nilai gain feedback regulator yang diperoleh dari:

$$K_c = R_c^{-1} B^T P_c$$

dengan P_c merupakan penyelesaian Aljabar Riccati:

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R_c^{-1} B^T P_c + Q_c = 0$$

Pada penyelesaian Aljabar Riccati di atas, dibutuhkan nilai Q_c dan R_c terlebih dahulu. Q_c merupakan matriks bobot variabel sistem yang bersifat simetri dan semi definit positif. R_c merupakan matriks bobot nilai masukkan sistem yang bersifat simetri dan definit positif. Nilai Q_c dan R_c diperoleh dengan cara optimasi dengan menggunakan Algoritma Kunang-Kunang. Sebagai, dasar hipotesis semakin kecil nilai R_c dan semakin besar nilai Q_c , maka nilai gain K_c semakin besar.

Berikut adalah tahap-tahap yang dilakukan dalam penentuan gain K_c :

1. Menentukan bobot nilai R_c dan Q_c menggunakan Algoritma Kunang-Kunang
2. Simulasi sistem dengan simulink MATLAB.
3. Analisa karakteristik hingga diperoleh sistem yang optimal, yaitu waktu stabil tercepat dan hasil yang maksimal.

4.4.0.1 Pemilihan Bobot dengan Algoritma Kunang-Kunang

Pada bagian ini dibahas mengenai simulasi penyelesaian model produksi lipid pada mikroalga dengan adanya pengendalian dan menggunakan nilai bobot pada matriks R_c dan Q_c yang diperoleh dari algoritma Kunang-Kunang. Dalam algoritma Kunang-Kunang terdapat empat parameter yang

dijadikan input yaitu $(\alpha_k, \gamma_k, \delta_k, \beta_{k0})$. Untuk mendapatkan nilai parameter dari algoritma Kunang-Kunang yang optimal dari fungsi objektif, maka disimulasikan dengan variasi dari salah satu parameter dan parameter yang lain disamakan (Xin She Yang, 2010).

Simulasi parameter yang pertama adalah simulasi parameter Kunang-Kunang dengan variasi nilai α_k ketika nilai $\gamma_k = 1$, $\delta_k = 0.4$ dan $\beta_{k0} = 0.2$. Dalam algoritma Kunang-Kunang, nilai $\alpha_k \in [0, 1]$ (Xin She Yang, 2010). Hasil dari variasi nilai α_k disajikan dalam Tabel 4.7

Tabel 4.7: Hasil Simulasi Parameter dengan nilai α_k yang berbeda

α_k	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	R1	R2	J
0,1	0.5773	0.3141	0.2059	0.6097	0.9945	0.1559	0.2644	3.4168
0,2	0.7011	0.2432	0.6013	0.3777	0.6672	0.3176	0.2241	3.4275
0,3	0.8880	0.0459	0.3265	0.1024	0.5620	0.4084	0.4587	3.4158
0,4	0.7218	0.2197	0.5572	0.5450	0.7934	0.2830	0.2469	3.4263
0,5	0.5857	0.0152	0.0661	0.6465	0.2212	0.7508	0.7698	3.3251
0,6	0.3084	0.2763	0.8558	0.1489	0.4352	0.3167	0.3789	3.4264
0,7	0.7311	0.2834	0.0583	0.3702	0.4410	0.4341	0.5724	3.3400
0,8	0.3760	0.0630	0.5237	0.2064	0.5264	0.7056	0.3350	3.4233
0,9	0.8763	0.2402	0.0823	0.2038	0.4748	0.2570	0.9907	3.3211
1	0.3858	0.8309	0.3027	0.6165	0.5914	0.8423	0.8065	3.1477

Simulasi parameter yang kedua adalah simulasi parameter Kunang-Kunang dengan variasi nilai γ_k ketika nilai $\alpha_k = 0.2$, $\delta_k = 0.4$ dan $\beta_{k0} = 0.2$. Dalam algoritma Kunang-Kunang, nilai $\gamma_k \in [0, \infty]$ (Xin She Yang, 2010). Hasil dari variasi nilai γ_k disajikan dalam Tabel 4.8

Tabel 4.8: Hasil Simulasi Parameter dengan nilai γ_k yang berbeda

γ_k	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	R1	R2	J
1	0.7011	0.2432	0.6013	0.3777	0.6672	0.3176	0.2241	3.4275
10	0.8366	0.4539	0.2637	0.7724	0.5704	0.6503	0.6502	3.4272
50	0.5341	0.8635	0.6616	0.3689	0.5730	0.3506	0.3360	3.4252
100	0.3345	0.7212	0.0564	0.5358	0.6199	0.1724	0.5230	3.4235
500	0.7358	0.5028	0.2009	0.2528	0.6327	0.6838	0.8196	3.4226
1000	0.2874	0.5318	0.0608	0.8179	0.3566	0.7413	0.7475	3.4204
5000	0.4832	0.3232	0.5870	0.3708	0.6007	0.4869	0.2641	3.4202
10000	0.3209	0.7801	0.1054	0.7254	0.8761	0.3979	0.7109	3.3225
50000	0.5563	0.3879	0.7326	0.1592	0.7510	0.7061	0.5153	3.2224
100000	0.1767	0.7189	0.0637	0.7961	0.8463	0.5975	0.7683	3.1181

Simulasi parameter yang ketiga adalah simulasi parameter Kunang-Kunang dengan variasi nilai β_{k0} ketika nilai $\alpha_k = 0.2$, $\delta_k = 0.4$ dan $\gamma_k = 1$. Dalam algoritma Kunang-Kunang, nilai β_{k0} bervariasi (Xin She Yang, 2010). Hasil dari variasi nilai β_{k0} disajikan dalam Tabel 4.9

Tabel 4.9: Hasil Simulasi Parameter dengan nilai β_{k0} yang berbeda

β_{k0}	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	R1	R2	J
0.06	0.7924	0.2505	0.3336	0.6583	0.2931	0.8031	0.6223	3.4262
0.07	0.2814	0.1115	0.3501	0.1144	0.6059	0.3541	0.5735	3.4264
0.08	0.7607	0.1948	0.3799	0.7049	0.4119	0.2576	0.4940	3.4267
0.09	0.9099	0.6390	0.1083	0.4136	0.5339	0.9446	0.5948	3.4269
0.1	0.2391	0.2878	0.8060	0.5726	0.4121	0.0798	0.0265	3.4272
0.2	0.7011	0.2241	0.6013	0.3777	0.6672	0.3176	0.7475	3.4275
0.3	0.7891	0.6879	0.1702	0.3075	0.3005	0.0205	0.7889	3.4210
0.4	0.3126	0.3986	0.0572	0.6810	0.4762	0.1631	0.9723	3.3183
0.5	0.4109	0.6563	0.1990	0.4700	0.9323	0.6066	0.5722	3.2132
0.6	0.5785	0.3595	0.1588	0.7997	0.6040	0.8432	0.3611	3.2095

Simulasi parameter yang keempat adalah simulasi parameter Kunang-Kunang dengan variasi nilai δ_k ketika nilai $\alpha_k = 0.2$, $\beta_{k0} = 0.2$ dan $\gamma_k = 1$. Dalam algoritma Kunang-Kunang, nilai δ_k berada $0.38 \leq \delta_k \leq 0.42$ (Xin She Yang, 2010). Hasil dari variasi nilai δ_k disajikan dalam Tabel 4.10

Tabel 4.10: Hasil Simulasi Parameter dengan nilai δ_k yang berbeda

δ_k	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	R1	R2	J
0.38	0.2979	0.6907	0.2622	0.6049	0.3847	0.2019	0.4891	3.3126
0.385	0.1597	0.4207	0.6182	0.3078	0.9557	0.7378	0.4910	3.3208
0.39	0.0069	0.4699	0.0891	0.7984	0.6865	0.0979	0.6893	3.3270
0.395	0.5107	0.5113	0.7614	0.5099	0.3538	0.8584	0.1420	3.3224
0.4	0.7011	0.2241	0.6013	0.3777	0.6672	0.3176	0.7475	3.4275
0.405	0.7902	0.7165	0.6156	0.5318	0.0265	0.5666	0.9775	3.2247
0.41	0.2478	0.2950	0.0889	0.1094	0.5868	0.2926	0.3869	3.2211
0.415	0.6922	0.5958	0.2584	0.4438	0.2704	0.8111	0.5237	3.1717
0.418	0.4947	0.9386	0.5432	0.2248	0.6817	0.2852	0.8629	3.2145
0.42	0.5362	0.4414	0.5594	0.2363	0.6067	0.6478	0.4387	3.1609

Dari Tabel 4.7 sampai Tabel 4.10 dapat disimpulkan bahwa nilai parameter kunang-kunang yang menyebabkan nilai fungsi objektif optimal ketika nilai $\alpha_k = 0.2$, $\beta_{k0} = 0.2$, $\gamma_k = 1$ dan $\delta_k = 0.4$. Masukan nilai parameter tersebut digunakan untuk melakukan simulasi mencari nilai elemen matriks $Q_c = Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ dan $R_c = R_1, R_2$ yang optimal pada

model produksi lipid dengan menggunakan metode LQR. Berikut diberikan *pseudocodes* algoritma kunang-kunang model matematika produksi lipid pada mikroalga ,

```

Algoritma kunang-kunang
input :  $n_k=5$  (banyak solusi)
           $x_k=(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, R_1, R_2)$  (solusi awal berukuran n)
          MaxGeneration=10 (banyaknya iterasi)
           $\alpha_k = 0.2$ 
           $\gamma_k = 1$ 
           $\beta_{k0} = 0.2$ 
           $\delta_k = 0.4$ 
output : xbest (solusi terbaik)

for  $i = 1 : \text{MaxGeneration}$ 
  for  $i = 1 : n$ 
    for  $j = 1 : n$ 
      if  $I_j > I_i$ 
        Hitung nilai  $r_{ij}$  berdasarkan formula (2.18)
        Pergerakan solusi  $x_i$  berdasarkan formula (2.19)
        Update nilai  $I_i$ 
      end
    end
  end
  Urutkan  $x$  berdasarkan nilai  $I_i$  dan Tentukan xbest
end

```

Gambar 4.7: *Pseudo Code* Algoritma Kunang-kunang untuk mendapatkan nilai Q_c dan R_c

Dari hasil simulasi algoritma Kunang-kunang diperoleh matriks sebagai berikut

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0.7011 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2432 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3777 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6672 \end{bmatrix}$$

dan

$$R_c = \begin{bmatrix} 0.3176 & 0 \\ 0 & 0.2241 \end{bmatrix}$$

Dengan mendapatkan nilai dari matriks Q_c dan R_c , sehingga nilai P_c dan gain regulator K_c juga diperoleh sebagai berikut,

$$P_c = \begin{bmatrix} 0.3409 & 3.9678 & 0.0604 & -0.0180 & 0.3079 \\ 3.9678 & 72.6616 & 0.9928 & 1.3028 & 0.0607 \\ 0.0604 & 0.9928 & 0.0843 & -0.0015 & 0.0269 \\ -0.0180 & 1.3028 & -0.0015 & 0.5396 & 0.0003 \\ 0.3079 & 0.0607 & 0.0269 & 0.0003 & 0.9483 \end{bmatrix}$$

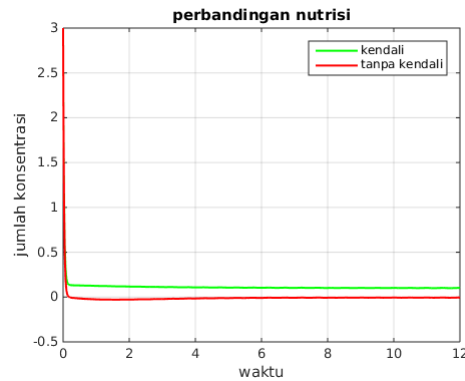
Sehingga nilai gain regulator adalah:

$$K_c = \begin{bmatrix} 0.0290 & 0.3232 & 0.0016 & -0.0016 & 0.0275 \\ 0.5021 & 11.2164 & 1.4623 & 0.0066 & -0.1185 \end{bmatrix}$$

4.5 Analisis Hasil Simulasi LQR

Berikut akan diberikan hasil simulasi dengan menggunakan metode LQR pada model produksi lipid mikroalga. Berikut Hasil yang akan ditampilkan berupa perbandingan model tanpa kendali dan dengan kendali.

a. Simulasi LQR Konsentrasi Nutrisi



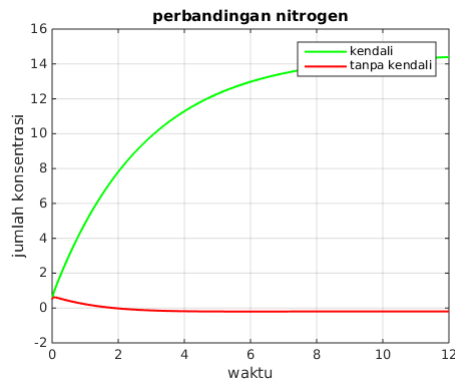
Gambar 4.8: Perbandingan Konsentrasi Nutrisi

Berdasarkan Gambar 4.8, pada saat $t = 0$ besar nutrisi yang diberikan adalah $S = 3 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Untuk grafik tanpa kendali dapat dilihat bahwa konsentrasi nutrisi mengalami penurunan hingga $t = 0.2$ menjadi $S = 0 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Selanjutnya, juga mengalami penurunan hingga $t = 12$ sehingga $S = 0 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Untuk grafik dengan menggunakan kendali, konsentrasi nutrisi mengalami penurunan hingga $t = 0.2$ menjadi $S = 0.04 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Selanjutnya, stabil hingga $t = 12$ menjadi $S = 0.06 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$.

Pada konsentrasi nutrisi, tanpa atau dengan kendali selalu mengalami penurunan, dikarenakan nutrisi digunakan sebagai bahan utama menghasilkan protein dan asam lemak dari mikroalga. Tetapi, pada saat dengan kendali nutrisi dapat stabil pada nilai $S = 0.04 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$ hingga pada saat $t = 12$. Sehingga dapat diambil kesimpulan jika kendali menggunakan laju pengenceran dan karbondioksida dapat berjalan pada model sistem dinamik produksi lipid mikroalga. Berdasarkan nilai titik setimbang $S = 0.01 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$, grafik kendali atau tanpa kendali mendekati titik setimbang.

b. Simulasi LQR Konsentrasi Kuota Nitrogen

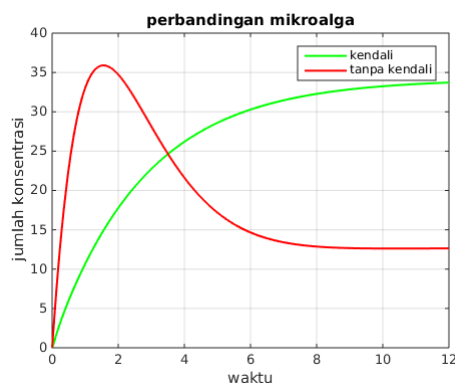
Berdasarkan Gambar 4.9, pada saat $t = 0$ besar konsentrasi kuota nitrogen yang diberikan $Q_n = 0.5 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Untuk grafik tanpa kendali dapat dilihat bahwa konsentrasi kuota nitrogen mengalami penurunan hingga $t = 2$ menjadi $Q_n = 0 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Selanjutnya, juga mengalami penurunan hingga $t = 12$ menjadi $Q_n = -0.3 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Untuk grafik dengan kendali saat $t = 0$ hingga $t = 12$ mengalami kenaikan konsentrasi kuota nitrogen hingga $Q_n = 14.5 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$.



Gambar 4.9: Perbandingan Konsentrasi Kuota Nitrogen

Pada konsentrasi kuota nitrogen, untuk tanpa kendali mengalami penurunan dikarenakan pengaruh nutrisi yang berkurang hingga negatif. Sehingga, proses pembelahan sel pada kuota nitrogen tidak dapat optimal setelah $t = 2$. Setelah dilakukan kendali pada laju pengenceran dan karbondioksida, pengaruh nutrisi yang stabil membuat pembelahan sel pada kuota nitrogen terus meningkat hingga $t = 12$. Berdasarkan titik setimbang $Q_n = 0.0986mgCL^{-1}d^{-1}$, grafik tanpa kendali mengalami penurunan hingga menuju $Q_n = 0mgCL^{-1}d^{-1}$, sehingga menjauhi titik setimbang. Selanjutnya, setelah diberi kendali $Q_nmgCL^{-1}d^{-1}$ juga menjauhi titik setimbang. Dengan melakukan analisis, pengaruh menjauhi titik setimbang dikarenakan jumlah karbondioksida yang diserap terlalu besar, sehingga jumlah pembelahan sel semakin tinggi.

c. Simulasi LQR Konsentrasi Mikroalga

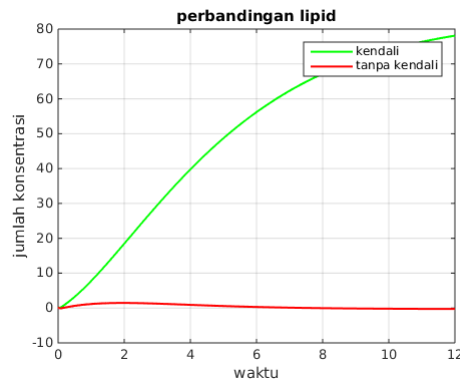


Gambar 4.10: Perbandingan Konsentrasi Mikroalga

Berdasarkan Gambar 4.10, pada saat $t = 0$ besar konsentrasi mikroalga yang diberikan $X = 0.02 mgCL^{-1}d^{-1}$. Untuk grafik tanpa kendali, mikroalga mengalami kenaikan maksimal saat $t = 4.2$ dengan besar nilai $X = 36 mgCL^{-1}d^{-1}$. Setelah, $t = 6$ hingga $t = 12$ mikroalga stabil

di $X = 13 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Untuk grafik dengan kendali, memperlihatkan peningkatan dari $t = 0$ hingga $t = 12$, dengan nilai sebesar $X = 33.8 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Pada saat $t = 4.7$ grafik kendali dan tanpa kendali mengalami perpotongan pada nilai $X = 17 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Tetapi, perpotongan tersebut dikarenakan konsentrasi mikroalga tanpa kendali mengalami penurunan dan dengan kendali mengalami peningkatan hingga $t = 12$. Berdasarkan titik setimbang $X = 17.1353 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$, grafik tanpa kendali berada pada $S = 13 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Selanjutnya, grafik dengan kendali berada pada $S = 20.1 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Menurut analisis, grafik tersebut hampir mendekati titik setimbang.

d. Simulasi LQR Konsentrasi Kuota Lipid

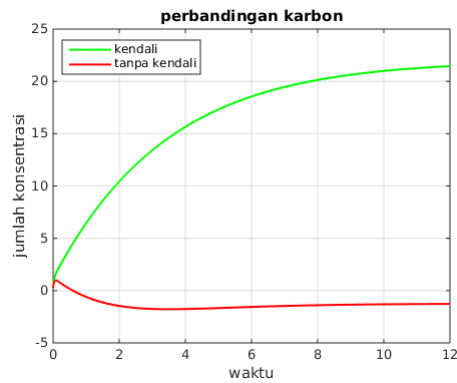


Gambar 4.11: Perbandingan Konsentrasi Kuota Lipid

Berdasarkan Gambar 4.11, pada saat $t = 0$ besar konsentrasi kuota lipid yang diberikan $Q_l = 0.25 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Untuk grafik tanpad kendali, kuota lipid mengalami penurunan hingga $t = 8$, sehingga nilai Q_l menjadi $Q_l = 0 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Selanjutnya, juga mengalami penurunan hingga $t = 12$, dengan nilai $Q_l = -0.52 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Untuk grafik dengan kendali, kuota lipid mengalami peningkatan konsentrasi hingga $t = 12$ dengan nilai konsentrasi sebesar $Q_l = 78.5 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$.

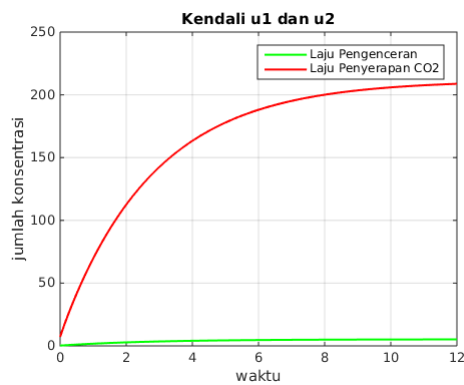
e. Simulasi LQR Konsentrasi Kuota Karbon

Berdasarkan Gambar 4.12, pada saat $t = 0$ besar konsentrasi kuota karbon yang diberikan $Q_f = 0.5 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Untuk grafik tanpa kendali, kuota lipid mengalami kenaikan hingga $t = 0.075$, sehingga nilai Q_f menjadi $Q_f = 1.25 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Selanjutnya, mengalami penurunan hingga $t = 0.7$, dengan nilai $Q_f = 0 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Kondisi menurun ini berlanjut hingga $t = 12$ dengan besar konsentrasi $Q_f = -2.2 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$. Untuk grafik dengan kendali, kuota karbon mengalami peningkatan konsentrasi hingga $t = 12$ dengan nilai konsentrasi sebesar $Q_f = 22.1 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$.



Gambar 4.12: Perbandingan Konsentrasi Kuota Karbon

f. Simulasi Kendali Laju Pengenceran dan Penyerapan Karbondioksida



Gambar 4.13: Kendali u_1 dan u_2

Berdasarkan perbandingan antara model dengan dan tanpa kendali diperoleh hasil yang sesuai dengan konsep fungsi kendali. Tujuan dari fungsi kendali, untuk mengetahui bahwa parameter kendali dapat menunjukkan hasil yang lebih baik dari tanpa kendali. Selain itu, fungsi kendali dapat menunjukkan bahwa nilai tersebut dapat menuju titik stabil kendali. Untuk kendali u_1 laju pengenceran pada saat $t = 0$ hingga $t = 12$ mengalami peningkatan nilai sebesar $u_1 = 0 \text{ mg/L}$ sampai kondisi stabil di $u_1 = 3.9 \text{ mg/L}$. Untuk kendali u_2 laju penyerapan CO_2 pada saat $t = 0$ hingga $t = 12$ mengalami peningkatan nilai sebesar $u_1 = 0 \text{ mg/L}$ sampai kondisi stabil di $u_2 = 215.67 \text{ mg/L}$.

BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tesis beserta saran untuk penelitian selanjutnya

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah diberikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan verifikasi model pada sistem dinamik non-linier orde satu yang di implementasikan pada model produksi lipid mikroalga dengan spesifikasi, menunjukkan bahwa model bersifat *safety*.
2. Dengan menggunakan metode Linear Kuadrat Regulator dan fungsi parameter kendali D laju pengenceran dan δ laju penyerapan karbondioksida dapat menyebabkan produksi lipid mikroalga menjadi lebih optimal. Hasil yang diperoleh pada konsentrasi mikroalga $X = 33.8 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$ dan konsentrasi kuota lipid sebesar $Q_l = 78.5 \text{ mgCL}^{-1}d^{-1}$.

5.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya, hal yang dapat dikembangkan dari tesis ini adalah

1. Menguji himpunan pada kondisi awal, untuk memverifikasi model dapat bersifat *safe* atau *unsafe*.
2. Memaksimal produksi lipid pada mikroalga dengan menggunakan model yang berbeda dengan metode yang sama atau metode yang lain.
3. Mempertimbangkan pengaruh cahaya ke dalam model, agar produksi mikroalga dan lipids lebih optimal.

DAFTAR PUSTAKA

- Baier, C. and Katoen, JP, (2008), *Principles of Model Checking*, The MIT Press, Cambridge Massachusetts, London, UK.
- Prapta, S.C, Slamet A and Hermana, J. Studi Kemampuan Alga dalam Menyerap Karbon (Karbonsink) Sebagai Upaya Alternatif Dalam Upaya Mengurangi Emisi Karbon. Scientific Conferece of Enviromental Technology IX 2012. Surabaya.
- Chen, X. Flow* (Version 2.0). A Verification Tool For Cyber-Physical Systems. <https://flowstar.org/>. Diakses pada 17 Februari 2018.
- Chen X, Sankaranarayanan S, and Erika Abraham, (2015), *Under-approximate Flowpipes for Non-linear Continuous Systems*, ISBN: 978-0-9835678-4-4. Copyright owned jointly by the authors and FMCAD Inc.
- Droop MR, (1970), *Vitamin B12 and Marine Ecology*, Helgol nder wiss. Meeresunters. 20, 629-636. Scottish Marine Biological Association; Oban, Scotland.
- Hajar, dan Mardlijah, (2015), *Kendali Karbon Dioksida Pada Model Pertumbuhan Alga*, Tesis, Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Mairet, F, Bernard, O, Masci,P , Lacour, T, Sciandra, A, (2011), *Modelling neutral lipid production by the microalga Isochrysis aff. galbana under nitrogen limitation*, Bioresource Technology 102 (2011) 142149.
- Mardlijah, Jamil, A., Hanafi, L. dan Sanjaya, S., (2017), *Optimal Control of Algae Growth by Controlling CO₂ and Nutrition Flow using Pontryagin Maximum Principle*. International Conference on Applied Industrial Mathematics and Statistics, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 890.
- Mardlijah, Prismahardi A, A., Hanafi, L. dan Sanjaya, S, (2017), *Optimal Control Of Neutral Lipids in Microalgae Production with Nutrients Limitation*. Proceeding Global Research and Development Service, Thailand .
- Meeting, FB, (2002), *Biodiversity and application of microalgae*, Battelle Pacific Northwest National Laboratory, MSIN P7-54, PO Box 999, 902 Battelle Boulevard, Richland, Washington 99352, USA. Journal of Industrial Microbiology (1996) 17, 477-489.

- Naidu D.S., (2002), *Optimal Control System*, CRC Press, New York.
- Nasria, dan Mardlijah, (2015), *Kendali Optimal Produksi Lipid Netral pada Mikroalga dengan Keterbatasan Nutrisi*, Tesis, Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Rachmaniah, O, Setyarini, R.W dan Maulida, L, (2010), *Pemilihan Metode Ekstraksi Minyak Alga dari Chlorella sp. dan Prediksinya sebagai Biodiesel*, Jurusan Teknik Kimia, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Kampus ITS, Sukolilo, Surabaya.
- Stein, W.A, et al., Sage Mathematics Software (Version 8.0). The Sage Development Team, 2009, <http://www.sagemath.org>.
- Subiono, (2013), *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*, Jurusan Matematika FMIPA-ITS, Surabaya.
- Yang, X.S., (2009), Firefly Algorithms for Multimodal Optimization, Lecture Notes Comput Sci 5792: 169-178.

Lampiran A

Lampiran 1 *Source code* Simulasi Model Produksi Lipid Pada Mikroalga.

```
clc;

Q0    = 0.05;
mu    = 0.5;
K_s   = 0.018;
s_in  = 1.7;
rho_m = 0.095;
D     = 0.35;
beta  = 4.8;
alpha = 2.6;
gamma = 3;
delta = 1.42;

m1=-(D*K_s*Q0*delta^2*mu^2 - D^2*K_s*Q0*delta*mu + (D*Q0*delta^2*mu^2 - D^2*Q0*
(delta^2*mu^2 - 2*D*delta*mu + D^2)*rho_m)*s_in)*D*K_s*Q0*delta*mu*rho_m/((D*Q0
(Q0*delta^2*mu^2 - D*Q0*delta*mu)*rho_m)*(D*Q0*delta*mu - (delta*mu - D)*rho_m)
+ (D*K_s*Q0*delta^2*mu^2 - D^2*K_s*Q0*delta*mu + (D*Q0*delta^2*mu^2 - D^2*Q0*d
D^2)*rho_m)*s_in)*rho_m/((D*Q0^2*delta^2*mu^2 - (Q0*delta^2*mu^2 - D*Q0*delta
- (delta*mu - D)*rho_m) - K_s));
m3=-D*K_s*Q0*delta*mu*rho_m/((D*Q0*delta*mu - (delta*mu - D)*rho_m)*(D*K_s*Q0*
m6=D*K_s*Q0*delta*mu*rho_m/((D*Q0*delta*mu - (delta*mu - D)*rho_m)*(D*K_s*Q0*d
m7=-delta*mu;
m12=(D*K_s*Q0*delta^2*mu^2 - D^2*K_s*Q0*delta*mu + (D*Q0*delta^2*mu^2 - D^2*Q0
m13=delta*mu*((delta*mu - D)/(delta*mu)-1) - D;
m16=-D*K_s*Q0*delta*gamma*mu*rho_m/((D*Q0*delta*mu - (delta*mu - D)*rho_m)*(D*K
m17=-beta*delta*mu*((delta*mu - D)/(delta*mu) - 1) + (Q0*beta*delta*mu/(delta*r
m19=delta*mu*((delta*mu - D)/(delta*mu) - 1);
m21=D*K_s*Q0*(alpha + gamma)*delta*mu*rho_m/((D*Q0*delta*mu - (delta*mu - D)*r
m22=-(Q0*alpha*delta + Q0*delta*gamma)*(delta*mu - D)/(Q0*delta);
m25=delta*mu*((delta*mu - D)/(delta*mu) - 1);

a = [m1 0 m3 0 0; m6 m7 0 0 0; 0 m12 m13 0 0; m16 m17 0 m19 0; m21 m22 0 0 m25]
b = [0.0297 0; 0 -0.0243; -0.0153 4.2234; 0 0.0729; 0 -0.1461]
c = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1]

g = [b a*b a^2*b a^3*b a^4*b]
rank (g)

% kondisi awal
v=[3;0.5;0.02;0.25;0.25]

%Gain Regulator
```

```

%bagus
% Qc = [0.0691 0 0 0 0;0 0.7404 0 0 0; 0 0 0.3894 0 0;0 0 0 0.7904 0; 0 0 0 0 0.345]
% Rc = [0.3623 0;0 0.9872]
%Revisi
Qc = [0.5539 0 0 0 0;0 0.1573 0 0 0; 0 0 0.7326 0 0;0 0 0 0.9298 0; 0 0 0 0 0.2225]
Rc = [0.1093 0;0 0.1620]
% Dengan Algoritma Kunang-kunang
% Qc = [Q1 0 0 0 0;0 Q2 0 0 0; 0 0 Q3 0 0;0 0 0 Q4 0; 0 0 0 0 Q5]
% Rc = [R1 0;0 R2]

% Terbaik
% Qc = [0.7011 0 0 0 0;0 0.2432 0 0 0; 0 0 0.6013 0 0;0 0 0 0.3777 0; 0 0 0 0 0.667]
% Rc = [0.3176 0;0 0.2241]

%ricati
Pc=are(a,b*inv(Rc)*b',c'*Qc*c)
%gain Kc
Kc=inv(Rc)*b'*Pc
yy=impulse(ss(a-b*Kc,b,c,0))
Obj=sum(sum(yy(:,:)))

open_system('LQRSimulink.slx');
sim('LQRSimulink.slx',12);

figure (1)
x=kendali(:,1);
y=kendali(:,2);
z=kendali(:,3);
j=kendali(:,4);
l=kendali(:,5);
l1=kendali(:,6);
plot(x,y,'g-',x,z,'r-',x,j,'b-',x,l,'c-',x,l1,'y-', 'LineWidth',1.5)
title('perbandingan konsentrasi dengan kendali');
legend('nutrisi','nitrogen','mikroalga','lipid','karbon')
xlabel('waktu')
ylabel('jumlah konsentrasi')
grid on

figure (2)
x=kendali(:,1);
y=kendali(:,2);
z=tanpakendali(:,2);
plot(x,y,'g-',x,z,'r-', 'LineWidth',1.5)
title('perbandingan nutrisi');
legend('kendali','tanpa kendali')

```

```
xlabel('waktu')
ylabel('jumlah konsentrasi')
grid on
```

```
figure (3)
x=kendali(:,1);
y=kendali(:,3);
z=tanpakendali(:,3);
plot(x,y,'g-',x,z,'r-','LineWidth',1.5)
title('perbandingan nitrogen');
legend('kendali','tanpa kendali')
xlabel('waktu')
ylabel('jumlah konsentrasi')
grid on
```

```
figure (4)
x=kendali(:,1);
y=kendali(:,4);
z=tanpakendali(:,4);
plot(x,y,'g-',x,z,'r-','LineWidth',1.5)
title('perbandingan mikroalga');
legend('kendali','tanpa kendali')
xlabel('waktu')
ylabel('jumlah konsentrasi')
grid on
```

```
figure (5)
x=kendali(:,1);
y=kendali(:,5);
z=tanpakendali(:,5);
plot(x,y,'g-',x,z,'r-','LineWidth',1.5)
title('perbandingan lipid');
legend('kendali','tanpa kendali')
xlabel('waktu')
ylabel('jumlah konsentrasi')
grid on
```

```
figure (6)
x=kendali(:,1);
y=kendali(:,6);
z=tanpakendali(:,6);
plot(x,y,'g-',x,z,'r-','LineWidth',1.5)
title('perbandingan karbon');
legend('kendali','tanpa kendali')
xlabel('waktu')
```

```

ylabel('jumlah konsentrasi')
grid on

figure (7)
x=tanpakendali(:,1);
y=tanpakendali(:,2);
z=tanpakendali(:,3);
j=tanpakendali(:,4);
l=tanpakendali(:,5);
l1=tanpakendali(:,6);
plot(x,y,'g-',x,z,'r-',x,j,'b-',x,l,'c-',x,l1,'y-','LineWidth',1.5)
title('perbandingan konsentrasi tanpa kendali');
legend('nutrisi','nitrogen','mikroalga','lipid','karbon')
xlabel('waktu')
ylabel('jumlah konsentrasi')
grid on

figure (8)
x=ScopeData7(:,1);
y=ScopeData7(:,2);
z=ScopeData7(:,3);
plot(x,y,'g-',x,z,'r-','LineWidth',1.5)
title('Kendali u1 dan u2');
legend('Laju Pengenceran','Laju Penyerapan CO2')
xlabel('waktu')
ylabel('jumlah konsentrasi')
grid on

```

Lampiran 2 *Source code* Algoritma Kunang-Kunang.

```

%% Parameter of FireFly
% [Q1 Q2 Q3 Q4 Q5 R1 R2]
Lb=[0 0 0 0 0 0 0]; % Batas bawah parameter
Ub=[1 1 1 1 1 1 1]; % Batas atas parameter

% gain1 = 1e-007;
% gain2 = 5e-005;
% gain3 = 0.022945;

% Inisialisasi acak
u0=(Lb+Ub)/2;

% Algorithm's parameters
para=[5 10 0.2 0.2 1];

```

```

% n=10                % Jumlah kunang-kunang
% MaxGeneration=5     % Jumlah iterasi
% alpha=0.2;         % Nilai acak 0--1
% betamn=0.20;       % Nilai beta minimum
% gamma=1;           % Koefisien absorpsi
% -----
nX=para(1);
MaxGeneration=para(2);
alphaX=para(3);
betamin=para(4);
gammaX=para(5);

% Menghitung dimensi pencarian kunang-kunang
dim=length(u0);

% Inisialisasi awal kandidat solusi
for iX=1:nX,
ns(iX,1:dim)=Lb+(Ub-Lb).*rand(1,dim); % Kolom = Dimensi, dan Baris = FireFly
end

% Inisialisasi nilai fitness sebelum evaluasi
Lightn=ones(nX,1);

% Looping Evaluasi algoritma kunang-kunang
% hfig = figure(1);
% hold on
% title('Behaviour of FireFly Algorithm Graphic');
% set(hfig, 'position', [50,40,600,300]);
% set(hfig, 'DoubleBuffer', 'on');
% hbestplot = plot(1:MaxGeneration,zeros(1,MaxGeneration),'-');
% xlabel('Iteration');
% ylabel('Fitness Function');
% hold off
% drawnow;
It=1;
epoch=0;
while It<=MaxGeneration
% start iterations

% Menghitung nilai alpha yang baru
deltaX=1-(0.005/0.9)^(1/MaxGeneration);
alphaX=(1-deltaX)*alphaX;

% Evaluasi fungsi fitness (untuk semua kunang-kunang)
for iX=1:nX

```

```

% T2FSMC 1
epoch=epoch+1
Q1 = ns(iX,1);
Q2 = ns(iX,2);
Q3 = ns(iX,3);
Q4 = ns(iX,4);
Q5 = ns(iX,5);
R1 = ns(iX,6);
R2 = ns(iX,7);
DesainLQR;

%          sim('DesainLQR')
xx=Obj;
ITAE(iX)=xx;
zn(iX)=ITAE(iX);
Lightn(iX)=zn(iX);
end

% Merangking kunang-kunang berdasarkan intensitas cahaya
% masing-masing
[Lightn,Index]=sort(zn);
ns_tmp=ns;
for iX=1:nX,
ns(iX,:)=ns_tmp(Index(iX,:));
end

%% Mencari kunang-kunang yang terbaik
nso=ns; Lighto=Lightn;
nbest=ns(5,:); Lightbest=Lightn(5);

% Gerakkan semua kunang-kunang ke lokasi yang lebih baik
% Faktor skala pada sistem
scale=abs(Ub-Lb);

% Mengupdate posisi kunang-kunang
for iX=1:nX,
% Parameter Attractiveness Kunang-Kunang : beta=exp(-gamma*r)
for jX=1:nX,
rX=sqrt(sum((ns(iX,:)-ns(jX,:)).^2));
% MengUpdate Pergerakan kunang-kunang
if Lightn(iX)>Lighto(jX), % Apakah lebih terang dan attractive
beta0=1; betaX=(beta0-betamin)*exp(-gammaX*rX.^2)+betamin;
tmpf=alphaX.*(rand(1,dim)-0.5).*scale;
ns(iX,:)=ns(iX,:).*(1-betaX)+nso(jX,:).*betaX+tmpf;
end
end

```

```

end % akhir untuk j

end % akhir untuk i
%   plotvector=get(hbestplot,'Ydata');
%   plotvector(It)=Lightn(1);
%   set(hbestplot,'Ydata',plotvector);
%   drawnow
It=It+1;
end   %%Akhir Iterasi

```

Lampiran 3 *Source code* Model Checking.

```

continuous reachability
{
state var S, Qn, X, Ql, Qf, t

par
{
K      = 0.018
rho    = 0.095
D      = 0.35
gamma  = 3
alpha  = 2.6
beta   = 4.8
mu     = 0.5
Q0     = 0.05
sn     = 1.7
delta  = 1.42
}

setting
{
fixed steps 0.01
time 12
remainder estimation 1e-4
identity precondition
gnuplot octagon t,Qf
adaptive orders { min { X :1 , S :1, Ql :1, Qn :1, Qf :1, t :1} ,
max { X :100 , S :100, Ql :100, Qn :100, Qf :100, t :20} }
cutoff 1e-9
precision 256
output tesis8
print on
}

nonpoly ode

```



```

{
S'   = (D*sn)-(X*rho*(S/(S+K)))-(D*S)
Qn'  = (rho*(S/(S+K)))-(Qn*delta*mu*(1-(Q0/Qn)))
X'   = (X*mu*delta*(1-(Q0/Qn)))-D*X
Q1'  = (beta*Qn-Q1)*delta*mu*(1-(Q0/Qn))-(gamma*(rho*(S/(S+K))))
Qf'  = (-Qf*mu*delta*(1-(Q0/Qn)))+((alpha+gamma)*(rho*(S/(S+K))))
t'   = 1
}

```

```

init
{
S   in [3,3.5]
Qn  in [0.5,1]
X   in [0.02,0.07]
Q1  in [0.25,0.5]
Qf  in [0.25,0.5]
}
}

```

```

unsafe
{
S   <= 1.58
Qn  <= 0.17
X   <= 0.021
Q1  <= 0.32
Qf  <= 1.01
}
}

```

BIODATA PENULIS



"Bermanfaat untuk Orang Lain". Tak terasa waktu berlalu begitu cepat sehingga tercipta secuil ilmu yang tertuang dalam bentuk narasi berupa buku tesis. Prismahardi Aji Riyantoko, merupakan sehelai nama yang diberikan oleh kedua orang tua saya pada 11 Oktober 1993. Seiring berjalannya waktu dan masa mencari jati diri, penulis mengembangkan pengetahuan dan keilmuan di rumah belajar. Penulis menempuh jenjang pendidikan secara formal di SD Negeri Kebonsari 01 (2000-2006), SMP Negeri 1 Lumajang (2006-2009) dan SMA Negeri 2 Lumajang (2009-2012). Penulis berharap menjadi seorang yang lebih baik di bidang pendidikan formal, sehingga melanjutkan belajar di Perguruan Tinggi Negeri Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan mengambil Program Sarjana (2012-2016). Ketika menjalankan program S1, penulis mendalami bidang Matematika Komputasi. Harapan untuk menempuh pendidikan yang lebih bermanfaat terwujud ketika penulis mengambil program Magister Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (2016-2018). Ketika mengambil program S2, penulis mengambil serta menekuni keilmuan matematika di bidang matematika terapan. Semoga penelitian tersebut dapat bermanfaat bagi pembaca dan peneliti selanjutnya. Penulis terbuka mengenai informasi Tesis ini, apabila ada saran, kritik, atau pertanyaan dapat berkomunikasi melalui prismahardi11@gmail.com