TUGAS AKHIR– SM141501

PENERAPAN METODE BAYESIAN UNTUK MENDAPATKAN MODEL KETAHANAN HIDUP PASIEN PENDERITA DIABETES MELITUS
(Studi Kasus: Penderita Diabetes Melitus di Rumah Sakit XYZ)

SITI UMROKAH
NRP 06111440000057

Dosen Pembimbing :
Valeriana Lukitosari, S.Si., MT
Dra. Farida Agustini Widjajati, MS

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018

FINAL PROJECT– SM141501

APPLICATION OF BAYESIAN METHOD TO OBTAIN SURVIVAL MODEL OF PATIENTS WITH DIABETES MELITUS
(Case Study: Diabetes Melitus Patient at XYZ Hospital)

SITI UMROKAH
NRP 06111440000057

Supervisor :
Valeriana Lukitosari, S.Si., MT
Dra. Farida Agustini Widjajati, MS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics, Computation, and Data Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2018

LEMBAR PENGESAHAN

PENERAPAN METODE BAYESIAN UNTUK MENDAPATKAN MODEL KETAHANAN HIDUP PASIEN PENDERITA DIABETES MELITUS (Studi Kasus: Penderita Diabetes Melitus di Rumah Sakit XYZ)

APPLICATION OF BAYESIAN METHOD TO OBTAIN SURVIVAL MODEL OF PATIENTS WITH DIABETES MELITUS (Case Study: Diabetes Mellitus Patient at XYZ Hospital)

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

SITI UMROKAH

NRP. 06111440000057

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Dra. Farida Agustini Widjajati, MS	Valeriana Lukitosari, S.Si., MT.
NIP. 19540817 198103 2 003	NIP. 19710928 199802 2 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika

Dr. Imam Mukhlash. S.Si., MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Agustus 2018

PENERAPAN METODE BAYESIAN UNTUK MENDAPATKAN MODEL KETAHANAN HIDUP PASIEN PENDERITA DIABETES MELITUS (Studi Kasus: Penderita Diabetes Melitus di Rumah Sakit XYZ)

Nama	**: Siti Umrokah**
NRP	**: 06111440000057**
Departemen	**: Matematika FMKSD-ITS**
Pembimbing	**: Valeriana Lukitosari, S.Si., MT**
	Dra. Farida Agustini Widjajati, MS

ABSTRAK

Analisis ketahanan hidup dapat diterapkan untuk menganalisis waktu tahan hidup pasien terhadap suatu penyakit. Pada Tugas Akhir ini, analisis ketahanan hidup dilakukan pada pasien penderita diabetes melitus. Ketahanan hidup suatu kelompok dapat diperoleh dengan mengetahui banyaknya individu yang mengalami kegagalan. Waktu ketahanan hidup didefinisikan sebagai lamanya pasien menjalani perawatan di Rumah Sakit XYZ. Sebelum diperoleh fungsi ketahanan hidup, dilakukan estimasi parameter peluang kegagalan dari distribusi Binomial dengan menggunakan metode Bayesian. Adapun distribusi prior yang digunakan untuk estimasi peluang kegagalan yaitu distribusi Beta yang merupakan prior konjugat dari distribusi Binomial. Setelah itu, estimasi parameter Weibull dengan menerapkan metode *Least Square* sehingga diperoleh fungsi ketahanan hidup pasien diabetes melitus yang menjalani perawatan di Rumah Sakit XYZ. Faktor resiko dari penyakit diabetes melitus dapat diketahui dengan model *Cox Proportional Hazard* menggunakan algoritma *Gibbs Sampling* dengan bantuan *software* WinBUGS. Diperoleh parameter untuk distribusi Weibull $\hat{\gamma} = 1{,}9629$ dan $\hat{\eta} = 831{,}1894$ sehingga fungsi ketahanan hidup pasien diabetes melitus dapat diketahui dengan mensubstitusi waktu ketahanan hidup pasien.

Berdasarkan model *Cox Proportional Hazard*, diketahui bahwa faktor jenis kelamin, usia, tekanan darah, dan penyakit penyerta mempengaruhi ketahanan hidup pasien penderita diabetes melitus.

Kata Kunci: *Analisis Ketahanan Hidup, Diabetes Melitus, Least Square, Metode Bayesian, Distribusi Weibull*

APPLICATION OF BAYESIAN METHOD TO OBTAIN SURVIVAL MODEL OF PATIENTS WITH DIABETES MELITUS
(Case Study: Diabetes Melitus Patient at XYZ Hospital)

Name : Siti Umrokah
NRP : 06111440000057
Department : Mathematics FMKSD-ITS
Supervisor : Valeriana Lukitosari, S.Si., MT
Dra. Farida Agustini Widjajati, MS

ABSTRACT

The survival analysis can be applied to analyze the patient's survival time against a disease. In this Final Project, survival analysis was performed in patients with diabetes mellitus. The survival of a group can be obtained by knowing the number of individuals who fail. The survival time is defined as the length of time patients undergo treatment at XYZ Hospital. Before the survival function is obtained, an estimated probability parameter of the Binomial distribution by Bayesian method is obtained. The prior distribution used for the estimated probability of failure is the Beta distribution which is the prior conjugate of the Binomial distribution. After that, Weibull parameter estimation by applying Least Square method to obtain survival function of diabetes mellitus patient who underwent treatment at XYZ Hospital. Risk factors from diabetes mellitus can be known by Cox Proportional Hazard model using Gibbs Sampling algorithm with the help of WinBUGS software. Obtained parameters for Weibull distribution γ = 1.9629 and η = 831,1894 so that the survival function of patients with diabetes mellitus can be known by substituting the patient's survival time. Based on the Cox Proportional Hazard model, it is known that

the factors of sex, age, blood pressure, and comorbidities affect the survival of patients with diabetes mellitus.
Keywords*: Survival Analysis, Diabetes Mellitus, Least Square, Bayesian Methods, Weibull Distribution*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillaahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"PENERAPAN METODE BAYESIAN UNTUK MENDAPATKAN MODEL KETAHANAN HIDUP PASIEN PENDERITA DIABETES MELITUS (Studi Kasus: Penderita Diabetes Melitus di Rumah Sakit XYZ)"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Kepala Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Kaprodi S1 Departemen Matematika dan sekretaris prodi S1 yang telah memberikan arahan akademik selama penulis kuliah di Departemen Matematika FMKSD-ITS.
3. Ibu Valeriana Lukitosari, S.Si, MT dan Dra. Farida Agustini Widjajati, MS sebagai dosen pembimbing yang telah memberikan motivasi dan pengarahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
4. Ibu Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes., Bapak Drs. I Gusti Ngurah Rai Usadha, M.Si., serta Ibu Dra. Rinurwati, M.Si., selaku dosen penguji.

5. Bapak Dr. Chairul Imron, MI. Komp. sebagai dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis kuliah di Departemen Matematika FMKSD-ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Departemen Matematika FMKSD-ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. Para *masyayikh*, dan guru atas doa serta bimbingannya selama ini.
8. Kedua orang tua saya, Bapak Rasiman dan Ibu Sumiati yang tak hentinya mendoakan dan memberi semangat.
9. Segenap keluarga yang telah mendukung perjalanan penulis, Bani Imbar dan Purhadi, terkhusus untuk adik tercinta Siti Nur Abidah.
10. Mas Wahyu Widodo S.Kom, terima kasih atas doa dan semangat yang diberikan.
11. Teman-taman seperjuangan saya, Matematika ITS 2014 yang tergabung dalam AKSIOM14 khususnya Keluarga Ashar yang turut menemani suka duka masa perkuliahan.
12. Teman dekat saya Reny Ariani, Naimatul Khoiroh, Ana Wulandari, Meylita Sari, Lita Navi'u R, Lia Zahrotun Nafisa, Anak bimbingan bu Valeriana dan bu Farida, Teletubbies, Muhyidin, SuperCamp 2014 yang saya sayangi yang telah membantu dan memotivasi saya dan tak lupa rumah belajar di UKM Cinta Rebana serta PMII1011, tempat menimba banyak ilmu dan pengalaman.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini masih mempunyai banyak kekurangan. Kritik dan saran dari berbagai pihak yang bersifat membangun juga sangat diharapkan sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang.

Surabaya,   Agustus 2018

Siti Umrokah

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Hal

DAFTAR LAMPIRAN

Hal

DAFTAR SIMBOL

$F(t)$	: Fungsi kepadatan kumulatif dari t
$f(t)$	: Fungsi kepadatan peluang dari t
$S(t)$	: Fungsi ketahanan hidup dari t
$\hat{S}(t)$	: Estimasi fungsi ketahanan hidup dari t
$P(T > t)$	: Peluang individu bertahan hidup lebih dari t
$P(B_i \| A)$	: Peluang kejadian B_i bersyarat A
t_i	: Waktu ketahanan hidup ke$-i$
p_i	: Peluang kegagalan ke$-i$
$(1 - p_i)$	: Peluang sukses ke $-i$
$\hat{p}_i$	: Estimasi peluang kegagalan ke$-i$
n_i	: Jumlah individu yang diamati pada waktu t_i
r_i	: Jumlah individu yang mengalami kegagalan/kematian pada waktu t_i
s_i	: Jumlah individu yang diamati pada saat $j = 1$ sampai dengan m
e_i	: Jumlah individu yang meninggal pada saat $j = 1$ sampai dengan m
$Bin(r; n, p)$	: Fungsi kepadatan peluang dari distribusi Binomial
γ	: Parameter bentuk dari distribusi Weibull
η	: Parameter skala dari distribusi Weibull
$h(t, X)$	: Model *cox proportional hazard*
$h_0(t)$	: *Baseline hazard*
$B(a, b)$	: Fungsi Beta
$\Gamma(.)$	: Fungsi Gamma
$E(X)$	: Ekspektasi dari X
$Var(X)$	: Varian dari X
$L(r_i \| p_i)$	: Fungsi likelihood

$\pi(p_i \mid a, b)$	: Distribusi prior
$h(p_i \mid r_i)$	: Distribusi posterior
x_1	: Variabel jenis kelamin
x_2	: Variabel usia
x_3	: Variabel tekanan darah
x_4	: Variabel penyakit penyerta
α_1	: Koefisien variabel jenis kelamin
α_2	: Koefisien variabel usia
α_3	: Koefisien variabel tekanan darah
α_4	: Koefisien penyakit penyerta

BAB I
PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan mengenai latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang Masalah

Analisis ketahanan hidup merupakan hal penting di bidang manufaktur, bisnis, dan kesehatan. Dalam bidang industri dan manufaktur, analisis ketahanan hidup berkaitan dengan keandalan produk, cara kerja produk yang berhasil dan sedikitnya kerusakan atau kegagalan suatu produk. Daya tahan produk berhubungan dengan waktu hidup suatu komponen tertentu yang biasanya dapat dilihat dari besar nilai keandalan suatu produk tersebut. Keandalan berkaitan dengan peluang atau kemungkinan suatu barang/produk berhasil menjalankan fungsinya setiap kali digunakan dalam periode waktu tertentu dan dalam kondisi tertentu pula.

Pada bidang medis, analisis ketahanan hidup dapat diterapkan untuk menganalisis waktu tahan hidup pasien terhadap suatu penyakit. Analisis ketahanan hidup sering disebut juga analisis antar kejadian *(time to event analysis)*. Dalam bidang kesehatan, kejadian tersebut antara lain adalah kematian karena penyakit tertentu, munculnya penyakit baru atau keadaan sakit yang terulang kembali setelah pengobatan [1]. Analisis ketahanan hidup (*survival*) adalah analisis mengenai data yang diperoleh dari catatan waktu yang dicapai suatu obyek sampai terjadinya peristiwa tertentu yang disebut sebagai *failure event*.

Kemajuan teknologi yang semakin pesat, menuntut berbagai aspek untuk melakukan inovasi guna mempermudah kebutuhan manusia. Berbagai inovasi teknologi yang canggih memberikan dampak pada perubahan gaya hidup masyarakat yang cenderung serba instan. Pola hidup tersebut membawa dampak negatif, diantaranya yaitu munculnya penyakit yang berbahaya dan mematikan. Salah satu penyakit yang kerap diderita oleh masyarakat yaitu diabetes melitus. Diabetes melitus merupakan penyakit metabolik menahun akibat pankreas tidak memproduksi cukup insulin atau tubuh tidak dapat menggunakan insulin yang diproduksi secara efektif [2].

Estimasi terakhir *International Diabetes Federation* (IDF), pada tahun 2013 terdapat lebih dari 382 juta orang di dunia yang hidup dengan diabetes melitus. Pada tahun 2035, prevalensi diabetes melitus diperkirakan akan meningkat menjadi 592 juta orang [2]. Secara epidemiologi, diperkirakan bahwa prevalensi diabetes melitus di Indonesia pada tahun 2030 mencapai 21,3 juta orang [3]. Selain itu, data *International Diabetes Federation* (IDF) menunjukkan jumlah penyandang diabetes di Indonesia menempati urutan ketujuh tertinggi di dunia [4]. Pada Tugas Akhir ini, analisis ketahanan hidup dilakukan pada pasien penderita diabetes melitus.

Terdapat dua model yang sering digunakan dalam analisis ketahanan hidup berdasarkan data ketahanan hidup yang diperoleh yaitu model parametrik dan model nonparametrik. Model parametrik adalah suatu model ketahanan hidup dengan data ketahanan hidup yang mengikuti asumsi distribusi tertentu. Beberapa model parametrik yang sering digunakan dalam analisis ketahanan hidup terdiri dari distribusi Eksponensial, distribusi Weibull, distribusi Log-

Normal, distribusi Log-Logistik, distribusi Gamma dsb. Jika distribusi yang mendasari data ketahanan hidup tidak diketahui, atau data tidak mengikuti suatu distribusi tertentu maka digunakan model nonparametrik. Salah satu metode nonparametrik yang sering digunakan untuk analisis ketahanan hidup yaitu metode Kaplan Meier. Metode Kaplan Meier menghasilkan suatu kurva yang menggambarkan ketahanan hidup dari populasi atau sampel yang dipilih.

Analisis ketahanan hidup menggunakan data ketahanan pasien penderita diabetes melitus. Data yang dihasilkan dapat berupa data tak tersensor atau data tersensor [1]. Data tak tersensor adalah data yang diperoleh dari individu dalam sampel yang mengalami kegagalan atau meninggal dunia. Sedangkan data tersensor yaitu individu dalam sampel yang dinyatakan sembuh sebelum waktu penelitian berakhir, individu yang tidak mengikuti penelitian, atau individu yang berhenti diberi perlakuan karena suatu alasan. Data ketahanan hidup biasanya berupa waktu dengan satuan tahun, bulan, minggu, atau hari.

Adapun pada Tugas Akhir ini digunakan data ketahanan hidup berdistribusi Weibull dengan memperhatikan status pasien yang berdistribusi Binomial. Dalam bidang kesehatan, seringkali data ketahanan hidup mengikuti distribusi Weibull. Jika distribusi suatu data diketahui, maka dapat diperoleh ketahanan hidup dari suatu populasi atau sampel yang diamati dengan cara mengestimasi parameter dari distribusinya. Terdapat dua metode untuk estimasi parameter yaitu metode klasik *(classical method)* dan metode Bayesian *(Bayesian Method)* [5]. Salah satu metode klasik yaitu *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Metode ini mengestimasi parameter dengan cara memaksimalkan fungsi likelihood. Sedangkan metode Bayesian merupakan metode estimasi yang menggabungkan distribusi prior dan fungsi likelihood. Metode Bayesian memandang parameter sebagai variabel yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut dengan distribusi prior [6]. Distribusi prior dan fungsi likelihood membentuk distribusi baru disebut distribusi posterior yang menyatakan tingkat keyakinan mengenai suatu parameter setelah sampel diamati. Keunggulan dari metode Bayesian diantaranya mampu memberikan kemungkinan yang kaya dengan inferensia dengan perbedaan-perbedaan interpretasi data terhadap kriteria prior yang digunakan.

Telah banyak dilakukan penelitian terkait ketahanan hidup. Pada tahun 2007, penelitian mengenai estimasi peluang kegagalan telah dilakukan oleh Han [7]. Han mengembangkan metode *E-Bayesian* untuk mengestimasi peluang kegagalan dengan menggunakan distribusi Beta konjugat sebagai distribusi prior. Penelitian lain terkait metode bayesian dilakukan oleh Chandra [8]. Dalam penelitiannya, Chandra menerapkan metode Bayesian dengan menggunakan distribusi Beta dan distribusi Uniform sebagai prior konjugat dari distribusi Binomial. Metode untuk estimasi interval dari peluang kegagalan distribusi Weibull pernah dilakukan oleh Jiang [9]. Estimasi dari peluang kegagalan menggunakan pendekatan Bayesian. Penelitian terkait diabetes melitus pernah dilakukan oleh Sanusi [10]. Pada penelitiannya, dilakukan analisis ketahanan hidup dengan metode regresi *Cox Proportional Hazards*.

Pada Tugas Akhir ini bertujuan untuk mendapatkan model ketahanan hidup distribusi Weibull pada kasus penderita diabetes melitus dengan menggunakan metode Bayesian. Adapun distribusi prior yang digunakan yaitu distribusi Beta yang merupakan prior konjugat/sekawan dari distribusi Binomial. Estimasi parameter dilakukan sebelum mendapatkan Model estimasi ketahanan hidup menggunakan metode Bayesian pada pasien penderita diabetes melitus yang selanjutnya menjadi *output* dari penulisan Tugas Akhir ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. Bagaimana model estimasi ketahanan hidup dengan menggunakan metode Bayesian?
2. Bagaimana penerapan model estimasi ketahanan hidup penderita diabetes melitus di Rumah Sakit XYZ?

1.3 Batasan Masalah

Ruang lingkup permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. Distribusi waktu ketahanan hidup yang digunakan yaitu distribusi Weibull dua parameter.
2. Faktor resiko yang diamati yaitu jenis kelamin, usia, tekanan darah, dan penyakit penyerta.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dari penelitian Tugas Akhir ini yaitu:

1. Mendapatkan model estimasi ketahanan hidup dengan menggunakan metode Bayesian.
2. Memperoleh analisis dari penerapan model estimasi ketahanan hidup penderita diabetes melitus di Rumah Sakit XYZ

1.5 Manfaat

Penelitian ini memberi manfaat sebagai berikut :

1. Mendapatkan peluang ketahanan hidup yang akan berguna bagi dunia kesehatan terutama bagi penderita diabetes melitus sehingga dapat dilakukan penanganan yang tepat.
2. Bagi perusahaan asuransi kejiwaan, dapat digunakan untuk membuat perhitungan asuransi sehubungan dengan orang-orang yang dipilih dalam cakupan asuransi.
3. Memberikan pengetahuan terkait metode untuk mendapatkan model ketahanan hidup dengan pendekatan metode Bayesian menggunakan prior konjugat Beta.
4. Mengetahui faktor resiko yang berpengaruh terhadap ketahanan hidup diabetes melitus.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk memberikan gambaran mengenai keseluruhan isi Tugas Akhir ini, dikemukakan sistematika penulisan dalam Tugas Akhir ini yang terdiri dari lima bab yaitu sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan hasil Tugas Akhir.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini membahas mengenai penelitian terdahulu serta teori-teori yang mendukung dalam proses penyelesaian permasalahan dalam Tugas Akhir ini.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tentang tahapan-tahapan dalam proses menyelesaikan masalah dan mencapai tujuan Tugas Akhir.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini membahas mengenai penentuan distribusi prior dan fungsi likelihood, pembuktian distribusi Beta sebagai prior konjugat dari distribusi Binomial, pembentukan distribusi posterior menggunakan metode Bayesian, pembentukan fungsi ketahanan hidup, dan simulasi.

BAB V PENUTUP

Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini membahas mengenai teori-teori yang mendukung dalam proses penyelesaian permasalahan dalam Tugas Akhir ini untuk mendapatkan model estimasi untuk menganalisis ketahanan hidup dengan menggunakan metode Bayesian.

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada tahun 2007, penelitian mengenai estimasi peluang kegagalan telah dilakukan oleh Han [7]. Han mengembangkan metode *E-Bayesian* untuk mengestimasi peluang kegagalan dengan menggunakan distribusi Beta konjugat sebagai distribusi prior. Setelah diperoleh estimasi dari peluang kegagalan, analisis ketahanan hidup dapat dilakukan dengan mengetahui parameter dari distribusi data. Penelitian lain terkait metode Bayesian dilakukan oleh Chandra [8]. Dalam penelitiannya, Chandra menentukan inferensi statistik berupa estimasi titik, estimasi interval dan uji hipotesis untuk proporsi Binomial menggunakan prior konjugat yaitu distribusi Beta dan distribusi Uniform dengan metode Bayes, serta membandingkan metode Bayes dengan metode maksimum likelihood untuk distribusi Binomial dengan parameter yang tidak diketahui. Metode untuk estimasi interval dari peluang kegagalan dari distribusi Weibull pernah dilakukan oleh Jiang [9]. Estimasi dari peluang kegagalan menggunakan pendekatan Bayesian serta metode *least square* digunakan untuk estimasi parameter distribusi Weibull. Penelitian terkait diabetes melitus pernah dilakukan oleh Sanusi [10]. Sanusi menggunakan model *Cox Proportional Hazard* untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi ketahanan hidup pasien penderita diabetes melitus. Hasil penelitiannya diketahui faktor resiko diabetes dapat mempengaruhi pasien diabetes melitus dan terikat oleh waktu yaitu faktor umur dan kadar gula.

2.2 Analisis Ketahanan Hidup

Ketahanan hidup *(survival analysis)* berkaitan dengan waktu ketahanan hidup *(survival time).* Analisis ketahanan hidup merupakan metode statistik dengan variabel yang diperhatikan adalah waktu sampai terjadinya kejadian *(event)* yang disebut dengan waktu ketahanan hidup *(survival)* [1]. Waktu ketahanan hidup mengindikasikan bahwa seorang individu dapat bertahan *(survived)* selama periode pengamatan. Suatu kejadian *(event)* dapat pula disebut sebagai sebuah kegagalan *(failure)* semisal kematian, munculnya penyakit baru, atau peristiwa buruk lainnya yang menimpa objek. Akan tetapi suatu kegagalan *(failure)* tidak selamanya merupakan peristiwa yang buruk, terdapat peristiwa yang kegagalannya merupakan peristiwa positif seperti sembuhnya individu dari suatu penyakit, seseorang yang mendapatkan pekerjaan. Beberapa hal yang harus diperhatikan dalam menentukan waktu kegagalan adalah [11]:

1. Waktu awal pencatatan *(start point)* dan akhir pencatatan (*end point)* tidak ambigu dan terdefinisi dengan baik.
2. Skala waktu pengukuran yang jelas.
3. Kejelasan definisi waktu kegagalan.

Analisis ketahanan hidup mempunyai beberapa tujuan dasar yaitu [1]: (1) memperkirakan fungsi ketahanan hidup dan fungsi *hazard,* (2) membandingkan fungsi ketahanan hidup dan fungsi *hazard* pada dua atau lebih kelompok, (3) mengetahui hubungan antara variabel-variabel tertentu terhadap waktu ketahanan hidup.

Pada analisis ketahanan hidup seringkali terkendala pada data ketahanan hidup karena adanya kemungkinan beberapa individu tidak bisa diobservasi sehingga tidak dapat diperoleh waktu ketahanan hidup secara tepat yang disebut dengan data tersensor. Adanya data tersensor dapat mengatasi beberapa masalah dalam suatu analisis, misalnya peneliti membutuhkan waktu yang lama untuk mendapatkan data yang lengkap sampai individu pengamatan mengalami *event* yang diinginkan dan seringkali menelan biaya yang banyak. Alasan yang menyebabkan terjadinya data tersensor yaitu [1]:

1. *Lost to follow up*, individu pengamatan hilang selama penelitian.
2. *Study ends-no event*, individu pengamatan yang diamati tidak mengalami *event* sampai penelitian berakhir.
3. *Withdraws from the study*, individu pengamatan ditarik dari penelitian karena meninggal bila meninggal merupakan suatu peristiwa yang tidak diperhatikan oleh peneliti atau alasan yang lain, misalnya reaksi obat yang buruk atau resiko yang lain.

Pada analisis ketahanan hidup dapat dinyatakan dengan tiga fungsi utama yaitu fungsi kepadatan peluang, fungsi ketahanan hidup dan fungsi *hazard*.

2.2.1 Fungsi Kepadatan Peluang

Fungsi kepadatan peluang atau *Probability Density Function* (PDF) merupakan peluang suatu individu mengalami *event*, gagal atau mati dalam interval waktu t sampai $(t + \Delta t)$ yang dinotasikan dengan $f(t)$. Fungsi ini dirumuskan sebagai berikut:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < (t + \Delta t))}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \tag{2.1}$$

T merupakan variabel acak non negatif dalam interval $[0, \infty)$, $F(t)$ merupakan fungsi kepadatan kumulatif atau *Cumulative Density Function* (CDF) dari T. Fungsi ini didefinisikan sebagai peluang suatu individu mengalami *event* sampai dengan waktu t yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F(t) = P(T \leq t)$$

$$= \int_0^t f(x)\ dx \tag{2.2}$$

2.2.2 Fungsi Ketahanan Hidup

Fungsi ketahanan hidup dinotasikan dengan $S(t)$. Fungsi ketahanan hidup $S(t)$ mendefinisikan peluang dari suatu individu untuk bertahan setelah waktu yang ditetapkan [1]. $S(t)$ adalah peluang bahwa variabel acak T lebih besar dari t.

$$S(t) = \mathrm{P}\ \text{(individu tahan hidup lebih dari t)}$$

$$= \mathrm{P}(T > t)$$

$$= \int_t^\infty f(x)\ dx \tag{2.3}$$

Menggunakan definisi fungsi kepadatan kumulatif $F(t) = P(T \leq t)$, fungsi ketahanan hidup dapat dituliskan sebagai berikut:

$$S(t) = P(T > t)$$

$$= 1 - P(T \leq t)$$

$$= 1 - F(t) \tag{2.4}$$

Secara teori, fungsi ketahanan hidup dapat digambarkan sebagai kurva ketahanan hidup yang menggambarkan peluang ketahanan hidup individu pada waktu t dalam interval 0 sampai dengan ∞. Fungsi ketahanan hidup memiliki beberapa karakteristik yaitu sebagai berikut [1]:

1. Fungsi ketahanan hidup merupakan fungsi tak naik.
2. Ketika $t = 0$, diperoleh $S(t) = S(0) = 1$ artinya awal dimulainya penelitian karena tidak ada objek/individu yang mengalami *event* sehingga peluang pada saat $t = 0$ adalah 1.
3. Ketika $t \rightarrow \infty$, nilai $S(t) \rightarrow 0$ yang berarti ketika waktu penelitian bertambah tanpa batas maka tidak ada individu yang hidup sehingga pada kurva fungsi ketahanan hidup akan menuju nol.

2.2.3 Fungsi *Hazard*

Fungsi *hazard* atau *hazard rate* dinotasikan dengan $h(t)$ didefinisikan sebagai laju suatu individu untuk mengalami *event* selama interval waktu yang kecil Δt dengan asumsi individu masih bertahan pada awal interval atau limit dari peluang individu gagal pada interval waktu yang kecil $(t, t + \Delta t)$ dengan individu masih bertahan sampai waktu t. Secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut [1]:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \tag{2.5}$$

Dengan menggunakan teorema peluang bersyarat, diperoleh persamaan untuk fungsi *hazard* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\Big(\big(t \leq T < (t + \Delta t)\big) \cap (T > t)\Big)}{P(T > t)\Delta t} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\big(t \le T < (t + \Delta t)\big)}{S(t)\Delta t}$$

$$= \frac{1}{S(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{F'(t)}{S(t)}$$

$$= \frac{f(t)}{S(t)} \tag{2.6}$$

Fungsi *hazard* dapat diplot sebagai kurva fungsi *hazard* terhadap t seperti fungsi ketahanan hidup. Akan tetapi, terdapat perbedaan antara kedua fungsi tersebut. Pada fungsi *hazard*, kurva $h(t)$ tidak harus dimulai dari satu dan bergerak menuju nol, tetapi kurva $h(t)$ dapat dimulai dari nilai berapapun dengan syarat $h(t) \geq 0$ dan dapat bergerak ke atas maupun ke bawah terhadap waktu t. Fungsi *hazard* $h(t)$ mempunyai karakteristik sebagai berikut [1]:

1. Fungsi *hazard* selalu tidak negatif yang artinya $h(t) \geq 0$.
2. Fungsi *hazard* tidak mempunyai batas atas.

2.3 Diabetes Melitus

Sebelum mengetahui ketahanan hidup penderita diabetes melitus terlebih dahulu dijelaskan terkait pengertian diabetes melitus dan faktor yang mempengaruhi ketahanan hidup penderita diabetes melitus.

2.3.1 Pengertian

Diabetes melitus atau disebut diabetes saja merupakan gangguan metabolik menahun akibat pankreas tidak memproduksi cukup insulin atau tubuh tidak dapat menggunakan insulin yang diproduksi secara efektif. Insulin adalah hormon yang mengatur keseimbangan kadar gula darah. Akibatnya terjadi peningkatan konsentrasi glukosa didalam darah (hiperglikemia) [2].

Terdapat dua kategori utama diabetes melitus yaitu diabetes melitus tipe 1 dan tipe 2. Diabetes tipe 1, disebut *insulin dependent* ditandai dengan kurangnya produksi insulin. Diabetes tipe 2, disebut *non-insuline dependent*, disebabkan penggunaan insulin yang kurang efektif didalam tubuh. Diabetes tipe 2 merupakan 90% dari seluruh diabetes. Sedangkan diabetes gestasional adalah hiperglikemia yang didapatkan saat kehamilan. Toleransi Glukosa Terganggu dan Glukosa Darah Puasa terganggu (GDP terganggu) merupakan kondisi transisi antara normal dan diabetes [2].

Dari berbagai penelitian epidemiologis di Indonesia yang dilakukan oleh pusat-pusat diabetes, sekitar tahun 1980 prevalensi diabetes melitus pada penduduk usia 15 tahun ke atas sebesar 1,5-2,3% dengan prevalensi didaerah pedesaan lebih rendah dibandingkan perkotaan [2]. Survei Kesehatan Rumah Tangga (SKRT) 2001 mendapatkan prevalensi diabetes melitus pada usia 25-64 tahun di Jawa dan Bali sebesar 7,5% [2].

2.3.2 Faktor Resiko

Melihat jumlah penderita Diabetes Melitus yang meningkat setiap tahunnya, diperlukan suatu program pengendalian Diabetes Melitus. Diabetes Melitus tipe 2 dapat dicegah, ditunda kedatangannya atau dihilangkan dengan mengendalikan faktor resiko. Faktor resiko penyakit tidak menular termasuk Diabetes Melitus tipe 2 dibedakan menjadi dua. Faktor pertama yaitu faktor resiko yang tidak dapat berubah seperti ras dan etnik, jenis kelamin, usia, faktor genetik, riwayat melahirkan bayi dengan berat badan lebih dari 4000 gram, dan riwayat lahir dengan berat badan lahir rendah (kurang dari 2500 gram). Faktor kedua yaitu factor resiko yang dapat dapat dimodifikasi erat kaitannya dengan perilaku hidup yang kurang sehat, yaitu berat badan lebih, obesitas abdominal/sentral, kurangnya aktivitas fisik, hipertensi, dislipidemia, diet tidak sehat/seimbang, dan merokok [2]. Berdasarkan penelitian yang telah berkembang, faktor resiko yang diamati dan diduga berpengaruh terhadap ketahanan hidup pasien diabetes melitus di Rumah Sakit XYZ pada Tugas Akhir ini yaitu jenis kelamin, usia, penyakit penyerta, dan tekanan darah.

1. Jenis Kelamin

   Pada Tugas Akhir ini, pasien penderita diabetes melitus yang menjalani perawatan di Rumah Sakit XYZ akan dibedakan berdasarkan jenis kelamin yaitu laki-laki dan perempuan. Berdasarkan analisis jenis kelamin pada penderita diabetes melitus, prevalensi kejadian diabetes melitus pada perempuan lebih tinggi daripada laki-laki [12].

2. Usia

   Telah banyak penelitian terkait hubungan signifikan antara umur dengan penyakit diabetes melitus. Terdapat hubungan yang signifikan antara faktor usia dengan penyakit diabetes melitus yang berarti usia memberikan pengaruh terhadap ketahanan hidup pasien penderita diabetes melitus [13].

3. Penyakit Penyerta
   Hiperglikemia yang terjadi dari waktu ke waktu dapat menyebabkan kerusakan berbagai sistem tubuh terutama syaraf dan pembuluh darah. *Diabetes Complications and Severity Index* (DCSI) dikembangkan untuk memodelkan tingkat keparahan komplikasi diabetes. Indeks keparahan mencakup 7 kategori komplikasi berikut: Penyakit Kardiovaskular, Nefropati,

Retinopati, Penyakit Vaskular Perifer, Stroke, Neuropati, dan Metabolik [13]. Beberapa konsekuensi dari diabetes yang sering terjadi adalah [2]:

a. Meningkatnya resiko penyakit jantung dan stroke.
b. Neuropati (kerusakan syaraf) di kaki yang meningkatkan ulkus kaki, infeksi, bahkan keharusan untuk amputasi kaki.
c. Retinopati diabetikum, yang merupakan salah satu penyebab utama kebutaan, terjadi akibat kerusakan pembuluh darah kecil di retina.
d. Diabetes merupakan salah satu penyebab utama gagal ginjal.
e. Resiko kematian penderita diabetes melitus secara umum adalah dua kali lipat dibandingkan bukan penderita diabetes.

4. Tekanan Darah

Hipertensi yang diderita seseorang erat kaitannya dengan tekanan sistolik dan diastolik atau keduanya secara terus-menerus. Tekanan sistolik berkaitan dengan tingginya tekanan pada arteri bila jantung berkontraksi, sedangkan tekanan darah diastolik berkaitan dengan tekanan arteri pada saat jantung relaksasi diantara dua denyut jantung [14]. Hipertensi dapat didefinisikan sebagai tekanan darah dengan tekanan darah sistoliknya diatas 140 mmHg dan tekanan diastolik diatas 90 mmHg.

2.4 Peluang Bersyarat dan Kaidah Bayes

Dasar dari aturan Bayes adalah peluang bersyarat. Peluang terjadinya kejadian B bila diketahui bahwa suatu kejadian lain A telah terjadi disebut peluang bersyarat dan dilambangkan dengan $P(A|B)$.

Definisi 2.1 [5]
Peluang bersyarat B, bila A diketahui dilambangkan dengan $P(B|A)$, didefinisikan sebagai:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{Jika } P(A) > 0$$

Definisi 2.2 [5]
Dua kejadian A dan B dikatakan bebas bila:

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{atau} \quad P(A|B) = P(A)$$

Bila hal itu tidak terpenuhi, A dan B dikatakan tidak bebas.

Dalil 2.1 [5]
Bila dalam suatu percobaan kejadian A dan B keduanya dapat terjadi sekaligus, maka

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Peluang terjadinya A dan B sekaligus sama dengan peluang A digandakan dengan peluang terjadinya B bila A telah terjadi. Kejadian $A \cap B$ dan $B \cap A$ setara, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(A|B)$$

Dalil 2.2 [5]
Bila dua kejadian A dan B bebas, maka

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Dalil 2.3 [5]
Jika dalam suatu percobaan kejadian-kejadian $A_1, A_2, .., A_k$ dapat terjadi, maka

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A\_k|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

Jika kejadian-kejadian $A_1, A_2, \dots, A_k$ bebas, maka

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_k)$$

Setelah diberikan definisi dan dalil peluang bersyarat, selanjutnya diberikan teori yang berkaitan dengan kaidah bayes.

Dalil 2.4 [5]

Bila kejadian-kejadian $B_1, B_2, \ldots, B_k \neq 0$ untuk $i = 1,2, \ldots, k,$ maka untuk sebarang kejadian A yang merupakan himpunan bagian S berlaku

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_k)P(A|B_k)$$

Bukti:

Kejadian A dapat dipandang sebagai paduan kejadian-kejadian $B_1 \cap A, B_2 \cap A, \ldots, B_k \cap A$ yang saling terpisah satu sama lain, dengan kata lain,

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \ldots \cup (B_k \cap A)$$

Bila $(B_1 \cap A)$, $(B_2 \cap A), \ldots, (B_k \cap A)$ saling terpisah, $(B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A) \cap \ldots \cap (B_k \cap A) = \emptyset$ sehingga $P\big((B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A) \cap \ldots \cap (B_k \cap A)\big) = P(\emptyset) = 0$ dan menggunakan Dalil 2.1 diperoleh:

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \ldots \cup (B_k \cap A)] \\ &= P[(B_1 \cap A) + (B_2 \cap A) + \cdots + (B_k \cap A)] \\ &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_k)P(A|B_k) \end{aligned}$$

Dalil 2.5 [5]

jika kejadian-kejadian $B_1, B_2, \ldots, B_k$ merupakan sekatan dari ruang contoh S dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1,2, \ldots k$, maka untuk sebarang kejadian A yang bersifat $P(A) \neq 0$,

$$P(B_r|A) = \frac{P(A|B_r)P(B_r)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_k)P(B_k)}$$

Untuk $r = 1,2,..,k$

Bukti:

Dengan menggunakan Dalil 2.4.1 diperoleh hubungan $P(A \cap B_r) = P(B_r \cap A)$ sehingga $P(A|B_r)P(B_r) = P(B_r|A)P(A)$. Bagi kedua ruas dengan $P(A)$, diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$P(B_r|A) = \frac{P(A|B_r)P(B_r)}{P(A)}$$

Dengan menggunakan Dalil 2.4.4, diperoleh:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_k)P(B_k) \end{aligned}$$

Sehingga persamaan menjadi:

$$P(B_r|A) = \frac{P(A|B_r)P(B_r)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_k)P(B_k)}$$

2.5 Distribusi Binomial

Suatu percobaan sering terdiri dari beberapa usaha dengan masing-masing usaha mempunyai kemungkinan sukses atau gagal. Pada Tugas Akhir ini, dimisalkan peluang kegagalan yaitu p maka peluang sukses yaitu $1 - p$. Variabel acak disebut berdistribusi Binomial dan dinyatakan dalam $Bin(r; n, p)$ dengan n merupakan banyak individu dalam pengamatan, r merupakan banyaknya individu yang gagal dan p adalah peluang kegagalan mengikuti fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$Bin(r; n, p) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \qquad r = 0,1,\dots,n \tag{2.7}$$

dengan $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

Setiap percobaan terjadi pada saat t_i dengan t_i merupakan waktu ke$-i$ $(i = 1, 2, \dots m)$. Jika n_i merupakan jumlah individu yang diuji atau diamati pada waktu t_i dan r_i $(r_i = 0,1,\dots,n_i)$ adalah jumlah individu yang mengalami kegagalan pada saat t_i maka fungsi kepadatan peluang dari distribusi Binomial dari t_i yaitu:

$$Bin(r_i; n_i, p_i) = \binom{n_i}{r_i} p_i^{r_i} (1-p_i)^{n_i-r_i} \tag{2.8}$$

Jika distribusi binomial diterapkan pada analisis ketahanan hidup pasien diabetes melitus, kemudian waktu pengamatan sebanyak m, dengan $s_i = \sum_{j=i}^{m} n_j$ dan $e_i = \sum_{j=1}^{i} r_j$, $i = 1,2,3,\dots,m$ diperoleh fungsi sebagai berikut [7]:

$$Bin(e_i; s_i, p_i) = \binom{s_i}{e_i} p_i^{e_i} (1-p_i)^{s_i-e_i} \tag{2.9}$$

dengan,

s_i : Jumlah individu yang diamati pada saat $j = t$ sampai dengan m $(i = 1,2,..,m)$

e_i : Jumlah individu yang meninggal pada saat $j = 1$ sampai dengan i

p_i : Peluang kegagalan

2.6 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi yang sering digunakan dalam analisis ketahanan hidup karena distribusi Weibull dapat menyesuaikan berbagai bentuk berdasarkan parameter yang diberikan [9]. Distribusi Weibull dikenalkan oleh fisikawan bernama W. Weibull dan merupakan distribusi kontinu yang juga merupakan pilihan yang sangat populer sebagai distribusi waktu kegagalan [15]. Variabel acak T dikatakan sebagai distribusi Weibull dengan parameter $\gamma > 0$ dan $\eta > 0$ dan Parameter γ merupakan parameter bentuk, η sebagai parameter skala mempunyai fungsi kepadatan peluang didefinisikan sebagai berikut [15]:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right] & 0 < t < \infty \\ 0 & t \text{ yang lain} \end{cases} \tag{2.10}$$

Fungsi kepadatan kumulatif dapat diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (2.10) ke persamaan (2.4) hingga diperoleh fungsi kepadatan kumulatif dari distribusi Weibull

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right] \tag{2.11}$$

Bukti:

Substitusikan persamaan (2.10) ke persamaan (2.2)

$$\begin{aligned} F(t) &= P(T \leq t) \\ &= \int_0^t f(t)\ dt \\ &= \int_0^t \frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right] dt \end{aligned} \tag{2.12}$$

Misalkan:

$$u = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\gamma}{\eta^{\gamma}} t^{\gamma-1}$$

$\eta^{\gamma} du = \gamma\, t^{\gamma-1}\, dt$

Persamaan (2.12) menjadi:

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\eta}\, \eta^{\gamma} \frac{1}{\eta^{\gamma-1}} \exp(-u)\ du$$

$$= \int_0^t \exp(-u)\ du$$

$$= -\exp(-u)]_0^t$$

Substitusi $u = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}$ sehingga diperoleh fungsi kepadatan kumulatif.

$$F(t) = -\exp\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right)\Bigg]_0^t$$

$$= -\exp\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right) - \left[-\exp\left(-\left(\frac{0}{\eta}\right)^{\gamma}\right)\right]$$

$$= 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.4) dan (2.6) dapat diperoleh persamaan fungsi ketahanan hidup dan fungsi *hazard* dari distribusi Weibull berturut-turut yaitu:

$$S(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right] \tag{2.13}$$

$$h(t) = \frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma-1} \tag{2.14}$$

2.7 Model *Cox Proportional Hazard*

Pemodelan regresi untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi data ketahanan hidup disebut dengan regresi *Cox*. Regresi *Cox* merupakan metode semiparametrik karena dalam metode ini tidak memerlukan informasi tentang distribusi yang mendasari waktu ketahanan hidup dan fungsi *baseline hazard* tidak harus ditentukan untuk mengestimasi parameter. Metode parametrik mengasumsikan bahwa distribusi yang mendasari waktu ketahanan hidup mengikuti suatu distribusi tertentu, misalnya distribusi Weibull, Gamma, Eksponensial. Model *Cox Proportional Hazard* ditulis dalam rumus model sebagai berikut [1]:

$$\begin{aligned} h(t,X) &= h_0(t)\exp\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i\right) \\ &= h_0(t)\exp(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k) \qquad (2.15) \end{aligned}$$

dengan,

$h_0(t)$: Fungsi *baseline hazard*

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$: Parameter regresi

$X_1, X_2, \ldots, X_k$: variabel-variabel penjelas (kovariat)

$h_0(t)$ merupakan fungsi *baseline hazard* dan tergantung pada distribusi data waktu ketahanan hidup yang digunakan dan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ adalah koefisien regresi dari masing-masing variabel independent yang berpengaruh. Variabel X merepresentasikan variabel yang dimodelkan untuk memprediksi *hazard* individu.

Pada Tugas Akhir ini menggunakan distribusi Weibull sehingga $h_0(t)$ merupakan fungsi *baseline hazard* yang diperoleh dari fungsi *hazard* dari distribusi Weibull dua parameter. Diperoleh persamaan fungsi *Cox Proportional Hazard* dengan *hazard* dasar berdistribusi Weibull sebagai berikut:

$$h(t,X) = \frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma-1} \exp\left(\sum_{i=1}^{p} \beta_i X_i\right) \tag{2.16}$$

2.8 Distribusi Beta

Dalam teori probabilistik dan statistik, distribusi Beta adalah distribusi peluang kontinu dengan dua parameter yang positif dan biasanya dinotasikan dengan a dan b. Distribusi Beta banyak diterapkan dalam statistik klasik dan juga Bayesian.

Distribusi Beta melibatkan konsep fungsi Beta. Fungsi Beta $B(a,b)$ didefinisikan sebagai berikut [16]:

$$B(a,b) = \int_0^1 p^{a-1}(1-p)^{b-1}dp \tag{2.17}$$

Untuk setiap a, b bernilai positif, variabel acak X dikatakan mempunyai fungsi kepadatan Beta ($beta\ density\ function$) jika fungsi kepadatan peluangnya mempunyai bentuk sebagai berikut [16]:

$$f(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1} & \text{Jika } 0 < p < 1 \\ 0 & \text{Jika } p \text{ yang lain} \end{cases} \tag{2.18}$$

Adapun hubungan antara fungsi Beta dan fungsi Gamma diberikan sebagai berikut [16]:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{2.19}$$

Mean dan varian dari fungsi Beta sebagai berikut [16]:

$$E(X) = \frac{a}{a+b} \tag{2.20}$$

$$Var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \tag{2.21}$$

2.9 Keluarga Eksponensial

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots X_n$ variabel acak saling bebas, fungsi kepadatan peluang bersama merupakan anggota keluarga eksponensial k parameter jika mempunyai bentuk:

$$f(x;\theta) = h(x)\ c(\theta)e^{\left(\sum_{i=1}^{k} w_i(\theta)t_i(x)\right)} \tag{2.22}$$

Untuk $i = 1,2, \dots, k$ dan $k \geq 1$, $h(x) \geq 0$ dan $t_1(x), t_2(x), \dots, t_k(x)$ adalah nilai real fungsi dari observasi x (nilai yang tidak bergantung terhadap θ), $w_1(\theta), w_2(\theta), \dots, w_k(\theta)$ adalah nilai real fungsi dari nilai vektor yang mungkin dari parameter θ (tidak bergantung dalam x independent terhadap θ)

2.10 Distribusi Prior

Dalam analisis Bayesian, ketika suatu populasi mengikuti distribusi tertentu dengan suatu parameter di dalamnya (misal dalam hal ini θ), maka dimungkinkan bahwa parameter θ mengikuti suatu distribusi peluang tertentu yang dikenal sebagai distribusi prior. Metode Bayes memandang parameter sebagai variabel yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut dengan distribusi prior [6].

Distribusi prior dibedakan menjadi dua kelompok berdasarkan bentuk fungsi likelihoodnya yaitu sebagai berikut [17]:

1. Berkaitan dengan bentuk distribusi hasil identifikasi pola datanya dibedakan menjadi distribusi prior konjugat dan tidak konjugat sebagai berikut:
   a. Distribusi prior konjugat, mengacu pada acuan analisis model terutama dalam pembentukan fungsi likelihoodnya sehingga dalam penentuan prior konjugat selalu dipikirkan mengenai penentuan pola distribusi prior yang mempunyai bentuk konjugat dengan fungsi kepadatan peluang pembangkit likelihoodnya. Distribusi prior konjugat diasumsikan berasal dari keluarga distribusi yang sama dengan likelihoodnya.
   b. Distribusi prior tidak konjugat, apabila pemberian prior pada suatu model tidak memperhatikan pola pembentuk fungsi likelihood
2. Berkaitan dengan penentuan masing-masing parameter pada pola distribusi prior tersebut dibedakan menjadi distribusi prior informatif dan non informatif sebagai berikut:
   a. Distribusi prior informatif mengacu pada pemberian parameter dari distribusi prior yang telah dipilih baik distribusi konjugat atau tidak.
   b. Distribusi prior non informatif, pemilihannya tidak didasarkan pada data yang ada atau distribusi prior yang tidak mengandung informasi tentang parameter, salah satu pendekatan dari non-informatif prior adalah metode Jeffreys’s.

2.11 Fungsi Likelihood

Fungsi likelihood banyak digunakan dalam menentukan estimasi, termasuk pada proses estimasi dengan metode Bayes. Fungsi likelihood adalah fungsi kepadatan bersama dari n variabel acak $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$ dan dinyatakan dalam bentuk $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$. Jika $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ ditetapkan, maka fungsi likelihood adalah fungsi dari parameter θ dan dinotasikan dengan $L(\theta)$. Jika $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots . \mathrm{X}_\mathrm{n}$ menyatakan suatu sampel acak dari $f(x; \theta)$, fungsi likelihood sebagai berikut [15]:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) \\ &= f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots . f(x_n; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) \end{aligned} \tag{2.23}$$

2.12 Distribusi Posterior

Dalam estimasi Bayes, setelah informasi sampel diambil dan prior telah ditentukan, distribusi posteriornya diperoleh dengan mengalikan prior dengan informasi sampel yang diperoleh dari likelihoodnya. Berdasarkan teorema Bayes, diberikan $f(\theta)$ sebagai distribusi prior, diperoleh definisi distribusi posterior sebagai berikut [16]:

$$f(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta) f(\theta)}{\int \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta) f(\theta)\, d\theta}$$

$$f(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n | \theta) f(\theta)}{\int f(x_1, \dots, x_n) | \theta) f(\theta) d\theta} \tag{2.24}$$

Bukti:

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari peubah acak X, maka fungsi kepadatan peluang bersama $X_1, X_2, \dots, X_n$ diberikan θ, yaitu:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = f(x_1 | \theta) f(x_2 | \theta) \dots f(x_n | \theta) \tag{2.25}$$

$$f(x_1, x_2, \dots x_n, \theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) f(\theta) \tag{2.26}$$

Jika θ merupakan variabel acak kontinu, maka fungsi kepadatan peluang marginal bersama dari $X_1, X_2, \dots, X_n$ yaitu:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) f(\theta)\, d\theta \qquad (2.27)$$

Jika θ merupakan variabel acak diskrit, maka fungsi kepadatan peluang marginal bersama dari $X_1, X_2, \dots, X_n$ yaitu:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\theta} f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$$

$$= \sum_{\theta} f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) f(\theta) \qquad (2.28)$$

Jika diberikan $X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots X_n = x_n$, fungsi kepadatan peluang dari θ adalah:

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots x_n, \theta)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) f(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) f(\theta) d\theta} \qquad (2.29)$$

Persamaan (2.29) merupakan bentuk lain dari aturan Bayes, dengan $f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan distribusi posterior dari θ dan $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ adalah fungsi likelihood dengan $f(\theta)$ sebagai distribusi prior dari θ. Seringkali aturan Bayes dituliskan sebagai berikut:

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) \propto f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) f(\theta) \qquad (2.30)$$

Estimasi parameter dapat diperoleh dari distribusi posterior sesuai persamaan (2.29). Jika $\hat{\theta}$ merupakan estimasi parameter dari θ, maka $\hat{\theta}$ dapat diperoleh dengan mencari ekspektasi dari distribusi posterior.

Jika θ merupakan variabel acak kontinu, maka nilai $\hat{\theta}$ didapat dari ekspektasi persamaan (2.29) yaitu [5]:

$$\hat{\theta} = E(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta|y) d\theta \tag{2.31}$$

Sedangkan, jika θ merupakan variabel acak diskrit, maka nilai $\hat{\theta}$ yaitu:

$$\hat{\theta} = E(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \theta f(\theta|y) \tag{2.32}$$

2.13 Uji *Mann*

Pengujian distribusi Weibull menggunakan uji *Mann*. Uji ini digunakan untuk mengetahui kesesuaian data waktu ketahanan hidup dari pasien penderita diabetes melitus mengikuti distribusi Weibull. Uji kecocokan distribusi Weibull dikembangkan oleh Mann, Schafer, dan Singpurwalla [18].

Hipotesis:

H_0 : $T = f(t)$ untuk data waktu ketahanan hidup berdistribusi Weibull

H_1 : $T \neq f(t)$ untuk data waktu ketahanan hidup tidak berdistribusi Weibull

Statistik Uji:

$$M = \frac{k_1 \sum_{i=k_1+1}^{r-1} \left[\frac{\ln t_{i+1} - \ln t_i}{M_i} \right]}{k_2 \sum_{i=1}^{k_1} \left[\frac{\ln t_{i+1} - \ln t_i}{M_i} \right]} \tag{2.33}$$

$$M_i = Z_{i+1} - Z_1$$

$$Z_i = \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{i - 0{,}5}{n + 0{,}25} \right) \right]$$

$$k_1 = \left\lfloor \frac{f}{2} \right\rfloor ; k_2 = \left\lfloor \frac{f-1}{2} \right\rfloor$$

$$v_1 = 2k_1 \; ; \; v_2 = 2k_2$$

dengan,

M_i : nilai pendekatan *Mann* untuk data ke$-i$
t_i : waktu ketahanan hidup ke$-i$
f : banyaknya data

Kriteria Pengujian:
Jika $M < F_{\alpha, v_1, v_2}$(nilai $\alpha = 0{,}05$), maka H_0 diterima yang berarti data waktu ketahanan hidup berdistribusi Weibull.

2.14 Metode Kuadrat Terkecil (*Least Square Method)*

Metode Kuadrat Terkecil (*Least Square Method)* merupakan salah satu metode untuk mendapatkan nilai-nilai parameter dalam model regresi.

Model regresi sederhana didefinisikan sebagai [5]:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i \tag{2.34}$$

dengan,
$i = 1,2, . . , m$
Y_i : Pengamatan ke$-i$ variabel dependen

β_0 : Intersep
β_1 : Parameter regresi
X_i : Pengamatan ke$-i$ variabel independent
u_i : Galat/error ke$-i$

Jumlah kuadrat galat *(Sum of Squares Error)* dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat didefinisikan sebagai berikut:

$$SSE \quad = \sum_{i=1}^{m} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

dengan $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ merupakan estimasi model regresi.

2.15 *Markov Chain Monte Carlo*

Sebuah barisan $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabel acak merupakan *Markov Chain* distribusi kondisional X_{n+1} bergantung banyak pada X_n. Secara umum dapat dikatakan bahwa kejadian saat ini hanya bergantung pada satu kejadian sebelumnya. Sedangkan *Monte Carlo* digunakan untuk menemukan solusi dari permasalahan matematis yang sulit dipecahkan.

Markov Chain Monte Carlo (MCMC) adalah sebuah metode untuk membangkitkan peubah-peubah acak yang didasarkan pada rantai markov. Teknik simulasi ini banyak digunakan dalam menyelesaikan masalah akibat tidak dapat disimulasi secara langsung. Pada Tugas Akhir ini menerapkan algoritma *Gibbs Sampling* dengan bantuan *Software* WinBUGS. Berikut ini merupakan ilustrasi algoritma *Gibbs Sampling* [19].
Misalkan $(x = x_1, x_2, \dots, x_n)$

1. Menentukan nilai awal $x^{(0)}$
2. Untuk $t = 1,2, \dots, T$ ulangi langkah-langkah berikut:
   a. Menentukan $x = x^{(t-1)}$

b. Untuk $t = 1$ perbarui x_j dari $x_j \sim f\left(x_j \middle| x_j\right)$. Proses lengkapnya sebagai berikut:

Membangkitkan $x_1^{(t)}$ dari $f\left(x_1 \middle| x_2^{(t-1)}, x_3^{(t-1)}, \dots, x_n^{(t-1)}\right)$

Membangkitkan $x_2^{(t)}$ dari $f(x_2 | x_1^{(t)}, x_3^{(t-1)}, \dots, x_n^{(t-1)})$

Membangkitkan $x_3^{(t)}$ dari $f\left(x_3 \middle| x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_n^{(t-1)}\right)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Membangkitkan $x_n^{(t)}$ dari $f\left(x_n \middle| x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_{n-1}^{(t)}\right)$

c. Membentuk $x^{(t)}$ dan menyimpan sebagai himpunan nilai yang dibangkitkan.

BAB III
METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dijelaskan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam Tugas Akhir. Metode penelitian terdiri atas beberapa tahap, antara lain sebagai berikut:

1. Studi Literatur dan Perumusan Masalah

Studi literatur mengenai teori – teori yang relevan dengan analisis ketahanan hidup. Oleh karena itu, dibutuhkan teori pendukung yang terangkum dalam bab tinjauan pustaka untuk menyelesaikan masalah yang telah ditetapkan pada penelitian Tugas Akhir ini. Tinjauan pustaka ini merupakan referensi untuk membantu menyelesaikan masalah yang diteliti.

Setelah melakukan studi literatur langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi masalah. Masalah yang diteliti dalam Tugas Akhir ini adalah bagaimana mendapatkan model ketahanan hidup pada pasien penderita diabetes melitus dengan menggunakan metode Bayesian.

2. Pengumpulan Data

Setelah dilakukan studi literatur terkait metode yang akan digunakan untuk menjawab rumusan masalah, langkah selanjutnya yaitu melakukan pengumpulan data penderita diabetes melitus di Rumah Sakit. Data yang telah diperoleh selanjutkan akan digunakan sebagai simulasi model untuk mendapatkan ketahanan hidup pasien tersebut.

3. Uji Kecocokan Data

Data ketahanan hidup yang digunakan berdistribusi Weibull dua parameter. Untuk mengetahui data ketahanan hidup berdistribusi Weibull, digunakan uji *Mann*.

4. Estimasi Parameter $\hat{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}}$

Pada tahap ini ditetapkan distribusi prior dan fungsi likelihood yang digunakan. Dengan menggunakan aturan Bayesian, distribusi prior dan fungsi likelihood kemudian digabungkan untuk memperoleh distribusi posterior. Setelah diperoleh distribusi posterior, langkah selanjutnya yaitu melakukan estimasi parameter $\hat{p}_i$ sebelum diperoleh fungsi ketahanan hidup.

5. Pembentukan $\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{t})$ dan $\hat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{X})$

Langkah pertama yang dilakukan yaitu dengan melakukan estimasi parameter η dan γ dari distribusi Weibull. Estimasi dilakukan dengan menggunakan metode *Least Square* dari fungsi kepadatan kumulatif distribusi Weibull dan diberikan persamaan umum $\hat{h}(t, X)$ sebagai estimasi model *Cox Proportional Hazard* dari distribusi Weibull.

6. Simulasi

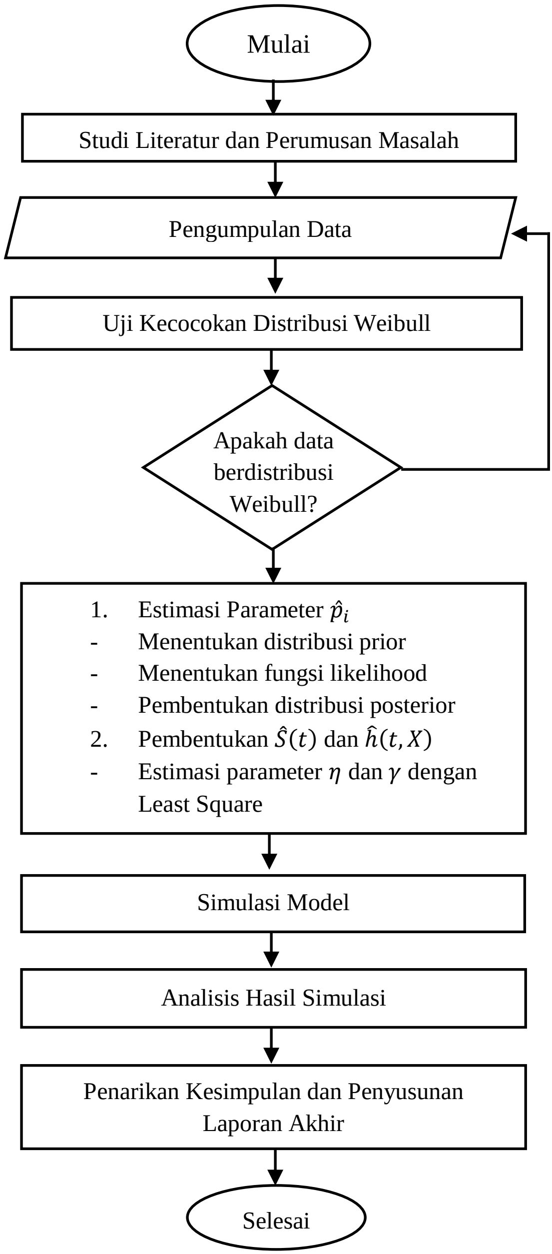
Persamaan $\hat{S}(t)$ dan $\hat{h}(t, X)$ diterapkan pada data pasien penderita diabetes melitus yang menjalani perawatan di Rumah Sakit XYZ. $\hat{S}(t)$ diperoleh dengan mensubstitusikan estimasi η dan γ kedalam persamaan $\hat{S}(t)$. Sedangkan $\hat{h}(t, X)$ dengan menambahkan faktor resiko dapat diperoleh dengan batuan *software* WinBUGS.

7. Analisis Hasil Simulasi

Setelah dilakukan simulasi, langkah selanjutnya yaitu melakukan analisis serta interpretasi dari hasil simulasi.

8. Penarikan Kesimpulan dan Penyusunan Laporan Tugas Akhir

Tahap akhir dalam Tugas Akhir ini adalah penulisan laporan Tugas Akhir dan penarikan kesimpulan terhadap pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya serta pemberian saran sebagai masukan untuk penelitian lebih lanjut.



Gambar 3.1 Diagram Alir Pengerjaan Tugas Akhir

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas mengenai penentuan distribusi prior dan fungsi likelihood, pembuktian distribusi Beta sebagai prior konjugat dari distribusi Binomial, pembentukan distribusi posterior menggunakan metode Bayesian. Setelah diperoleh posterior, estimasi parameter dilakukan untuk mencari peluang kegagalan, fungsi ketahanan hidup diperoleh dengan metode *least square* dari distribusi Weibull dan simulasi pada data pasien diabetes melitus.

4.1 Penentuan Distribusi Prior dan Fungsi Likelihood

Parameter p_i merupakan peluang kegagalan, n_i adalah jumlah individu yang diamati pada waktu t_i, dan $r_i(r_i = 0,1,\dots,n_i)$ merupakan jumlah sampel yang mengalami kegagalan pada waktu t_i. Diberikan himpunan data pengamatan (n_i, r_i, t_i), $(r_i = 0,1,2,\dots n_i, i = 1,2,\dots m)$, dengan $s_i = \sum_{j=i}^{m} n_j$ merupakan jumlah individu yang diamati pada saat $j = i$ sampai dengan m, $e_i = \sum_{j=1}^{i} r_j$ merupakan jumlah sampel yang mengalami kegagalan pada saat $j = 1$ sampai dengan i.

Misalkan peubah acak r_i mengikuti distribusi Binomial dengan parameter p_i untuk $i = 1,2,\dots,m$ menghasilkan fungsi likelihood sebagai berikut [7]:

$$
\begin{aligned}
L(r_i|p_i) &= \prod_{i=1}^{m} f(r_i|p_i) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \binom{n_i}{r_i} p_i^{r_i}(1-p_i)^{m-r_i}
\end{aligned}
$$

$$= \binom{s_i}{e_i} p_i^{\sum_{i=1}^{m} r_i} (1 - p_i)^{\sum_{j=i}^{m} n_j - \sum_{i=1}^{m} r_i}$$

$$= \binom{s_i}{e_i} p_i^{e_i} (1 - p_i)^{s_i - e_i} \tag{4.1}$$

Distribusi prior yang digunakan yaitu distribusi Beta bagi parameter p_i dengan a dan b merupakan parameter distribusi Beta, dengan fungsi kepadatan peluang diberikan sebagai berikut [7]:

$$\pi(p_i|a,b) = \frac{p_i^{a-1}(1-p_i)^{b-1}}{B(a,b)} \tag{4.2}$$

4.2 Distribusi Beta sebagai Prior Konjugat dari Distribusi Binomial

Pemilihan distribusi prior merupakan hal yang penting dalam metode Bayesian karena prior akan mempengaruhi pembentukan distribusi posterior. Selanjutnya, suatu prior dikatakan sebagai prior yang bersifat konjugat untuk keluarga dari distribusi apabila distribusi prior dan posterior berasal dari keluarga yang sama artinya bentuk dari distribusi posterior mempunyai bentuk distribusi yang sama sebagai besaran prior.

Dalam hal ini diasumsikan bahwa parameter binomial individu $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ mengikuti distribusi Beta yang bersifat konjugat untuk $i = 1,2, \dots, m$ yang saling bebas dengan a dan b. Untuk mendukung pernyataan bahwa sebaran Beta merupakan sebaran prior yang bersifat konjugat bagi parameter Binomial serta berasal dari keluarga yang sama, dapat ditunjukkan dengan menggunakan persamaan (2.22).

Jika $p_i \sim B(a,b)$, maka p_i disebut keluarga eksponensial k parameter bila fungsi kepadatan peluang persamaan (4.2) memenuhi persamaan (2.24). Ubah persamaan (4.2) kebentuk exponensial menjadi:

$$
\begin{aligned}
\pi(p_i|a,b) &= \frac{p_i^{a-1}(1-p_i)^{b-1}}{B(a,b)} \\
&= \frac{1}{B(a,b)} \exp\,(\log p_i^{(a-1)}) \exp(\log(1-p_i)^{(b-1)}) \\
&= \frac{1}{B(a,b)} \exp((a-1)\log p_i) \exp((b-1)\log(1-p_i
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Dari persamaan (4.3), diperoleh bentuk yang memenuhi:

$h(p_i) = 1$ $\qquad$ $t_1(p_i) = \log p_i$

$c(a,b) = B(a,b)$ $\qquad$ $w_2(a,b) = b - 1$

$w_1(a,b) = a - 1$ $\qquad$ $w_2(p_i) = \log(1-p_i)$

Dari persamaan likelihood tersebut, ditunjukkan bahwa likelihood berasal dari keluarga eksponensial. Ubah persamaan (4.1) menjadi persamaan eksponensial, menjadi:

$$
\begin{aligned}
f(r_i|p_i) &= \binom{s_i}{e_i} p_i^{e_i}(1-p_i)^{s_i-e_i} \\
&= \binom{s_i}{e_i} p_i^{e_i} \frac{(1-p_i)^{s_i}}{(1-p_i)^{e_i}} \\
&= \binom{s_i}{e_i} \left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)^{e_i} (1-p_i)^{s_i} \\
&= \binom{s_i}{e_i} (1-p_i)^{s_i} \exp\left(log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)^{e_i}\right) \\
&= \binom{s_i}{e_i} (1-p_i)^{s_i} \exp\left(e_i \log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Dari persamaan (4.4), diperoleh bentuk yang memenuhi:

$$h(r_i) = \binom{s_i}{e_i} = \begin{pmatrix} \sum_{j=i}^{m} n_j \\ \sum_{j=1}^{i} r_j \end{pmatrix}$$

$$c(p_i) = (1 - p_i)^n$$

$$w_i(p_i) = \log\left(\frac{p_i}{1 - p_i}\right)$$

$$t_i(r_i) = e_i = \sum_{j=1}^{i} r_j$$

Berdasarkan persamaan (4.3) dan (4.4) terlihat bahwa memenuhi bentuk persamaan (2.22) sebagai bagian dari keluarga eksponensial. Oleh karena itu, terbukti bahwa Beta memiliki kesamaan bentuk fungsional dengan likelihood dari distribusi Binomial sehingga distribusi Beta dapat digunakan sebagai prior konjugat untuk Binomial.

4.3 Pemilihan Parameter Distribusi Prior

Diberikan distribusi prior dari p_i sebagai prior konjugat dari distribusi Binomial yaitu $B(a, b)$ dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$\pi(p_i|a, b) = \frac{p_i^{a-1}(1 - p_i)^{b-1}}{B(a, b)}$$

Parameter a dan b diasumsikan mempunyai suatu nilai tertentu, akan tetapi pada umumnya para peneliti tidak mempunyai keyakinan dalam menentukan nilai parameter priornya. Salah satu cara untuk menentukan parameter a dan b yaitu berdasarkan gambar fungsi kepadatan peluang $B(a,b)$ yang sesuai.

Pada Tugas Akhir ini, pemilihan nilai parameter prior a dan b menjamin bahwa $\pi(p_i|a,b)$ sebagai fungsi menurun (*decreasing)* dari p_i [7]. Agar diperoleh $\pi(p_i|a,b)$ sebagai fungsi menurun, turunan(*derivative)* pertama haruslah bernilai negatif [20]. sedemikian hingga $\frac{d\pi(p_i|a,b)}{dp_i} < 0$ merupakan fungsi menurun dari p_i.

1. Langkah pertama

   Mendapatkan turunan pertama dari $\pi(p_i|a,b)$.

$$\frac{d\,\pi(p_i|a,b)}{dp_i} = \frac{d}{dp_i}\left[\frac{p_i^{a-1}(1-p_i)^{b-1}}{B(a,b)}\right]$$

Misalkan :

$$u = p_i^{a-1} \qquad\qquad v = (1-p_i)^{b-1}$$

$$du = (a-1)p_i^{a-2}\,dp_i \qquad\qquad dv = -(b-1)(1-p_i)^{b-2}$$

$$\frac{d\pi(p_i|a,b)}{dp_i} = \frac{du}{dp_i}\,v + u\,\frac{dv}{dp_i}$$

$$= \frac{(a-1)p_i^{a-2}(1-p_i)^{b-1} - p_i^{a-1}(b-1)(1-p_i)^{b-2}}{B(a,b)}$$

$$= \frac{p_i^{a-1}(1-p_i)^{b-1}\left[(a-1)p_i^{-1} - (b-1)(1-p_i)^{-1}\right]}{B(a,b)}$$

$$= p_i^{a-1}(1-p_i)^{b-1}\left[\frac{(a-1)}{p_i} - \frac{(b-1)}{(1-p_i)}\right]\frac{1}{B(a,b)}$$

$$= \frac{p_i^{a-1}(1-p_i)^{b-1}}{B(a,b)}\left[\frac{(a-1)(1-p_i)-(b-1)p_i}{p_i(1-p_i)}\right]$$

$$= \frac{p_i^{a-2}(1-p_i)^{b-2}[(a-1)(1-p_i)-(b-1)p_i]}{B(a,b)}$$

Diperoleh turunan pertama dari $\pi(p_i|a,b)$ pada persamaan (4.5).

$$\frac{d\pi(p_i|a,b)}{dp_i} = \frac{p_i^{a-2}(1-p_i)^{b-2}[(a-1)(1-p_i)-(b-1)p_i]}{B(a,b)} \tag{4.5}$$

2. Langkah kedua

   Persamaan (4.5) disama dengankan dengan nol.

$$\frac{p_i^{a-2}(1-p_i)^{b-2}[(a-1)(1-p_i)-(b-1)p_i]}{B(a,b)} = 0$$

   Diketahui bahwa p_i merupakan peluang kegagalan mempunyai nilai diantara 0 dan 1 atau $0 < p_i < 1$, sehingga ketika $a > 0,\ b > 0$, didapatkan $0 < a < 1, b > 1$ agar diperoleh $\pi(p_i|a,b)$ sebagai fungsi menurun.

3. Langkah ketiga

   menggambarkan pemilihan parameter a dan b yang sesuai. Ditunjukkan gambar grafik fungsi kepadatan peluang dengan a dan b dari ($\frac{1}{2}, 1, 2, \frac{5}{2}$). Gambar dapat dilihat pada Lampiran B.

4.4 Pembentukan Distribusi Posterior

Distribusi posterior diperoleh dengan mengalikan distribusi prior dengan likelihoodnya. Distribusi yang digunakan yaitu distribusi Beta sebagai prior konjugat dari distribusi Binomial. Jika fungsi distribusi prior dan likelihood telah diberikan pada persamaan (4.1) dan (4.2), dengan menggunakan teorema Bayesian pada persamaan (2.24), diberikan $h(p_i|r_i)$ sebagai fungsi distribusi posterior dari p_i.

$$h(p_i|r_i) = \frac{\pi(p_i|a,b)L(r_i|p_i)}{\int_0^1 \pi(p_i|a,b)L(r_i|p_i)dp_i} \tag{4.6}$$

Fungsi kepadatan $h(p_i|r_i)$ dan $\pi(p_i|a,b)$ berturut-turut merupakan distribusi posterior dan distribusi prior, sedangkan $L(r_i|p_i)$ merupakan fungsi likelihood. Substitusi persamaan (4.1) dan (4.2) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\pi(p_i|a,b)L(r_i|p_i) = \frac{1}{B(a,b)} p_i^{a-1}(1-p_i)^{b-1} \binom{s_i}{e_i} p_i^{e_i}(1-p_i)^{s_i-e_i} \tag{4.7}$$

dengan,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{4.8}$$

$$\binom{s_i}{e_i} = \frac{s_i!}{(s_i-e_i)!\,e_i!} \tag{4.9}$$

Karena $\Gamma(a) = (a-1)!$, sehingga persamaan (4.9) menjadi:

$$\binom{s_i}{e_i} = \frac{\Gamma(s_i+1)}{\Gamma(s_i-e_i+1)\Gamma(e_i+1)} \tag{4.10}$$

Substitusi persamaan (4.8) dan (4.10) ke persamaan (4.7).

$$\begin{aligned}\pi(p_i|a,b)L(r_i|p_i) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p_i^{a-1}(1-p_i)^{b-1} \\ &\quad \frac{\Gamma(s_i+1)}{\Gamma(s_i-e_i+1)\Gamma(e_i+1)} p_i^{e_i}(1-p_i)^{s_i-e_i} \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(s_i+1)}{\Gamma(s_i-e_i+1)\Gamma(e_i+1)} \\ &\quad p_i^{a+e_i-1}(1-p_i)^{b+s_i-e_i-1}\end{aligned}$$

(4.11)

Selanjutnya mencari $\int_0^1 \pi(p_i|a,b)L(r_i|p_i)dp_i$ dengan menggunakan persamaan (4.11) sebagai berikut:

$$\int_0^1 \pi(p_i|a,b)L(r_i|p_i)dp_i = \int_0^1 \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p_i^{a-1}(1-p_i)^{b-1}$$

$$\frac{\Gamma(s_i+1)}{\Gamma(s_i-e_i+1)\Gamma(e_i+1)} p_i^{e_i}(1-p_i)^{s_i-e_i}\, dp_i$$

$$= \int_0^1 \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(s_i+1)}{\Gamma(s_i-e_i+1)\Gamma(e_i+1)} p_i^{a+e_i-1}(1-p_i)^{b+s_i-e_i-1}\, dp_i$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(s_i+1)}{\Gamma(s_i-e_i+1)\Gamma(e_i+1)}\ B(a+e_i, b+s_i-e_i)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{B(a+e_i, b+s_i-e_i)} p_i^{a+e_i-1}(1-p_i)^{b+s_i-e_i-1}\, dp_i$$

(4.12)

Perhatikan

$$\int_0^1 \frac{1}{B(a+e_i, b+s_i-e_i)} p_i^{a+e_i-1}(1-p_i)^{b+s_i-e_i-1}\, dp_i$$

Merupakan fungsi kepadatan beta dengan $B(a+e_i, b+s_i-e_i)$. Fungsi kepadatan peluang akan memenuhi $\int_0^1 f(x)\ dx = 1$ sehingga:

$$\int_0^1 \frac{1}{B(a+e_i, b+s_i-e_i)} p_i^{a+e_i-1}(1-p_i)^{b+s_i-e_i-1}\, dp_i = 1$$

Persamaan (4.12) menjadi:

$$\int_0^1 \pi(p_i|a,b)L(r_i|p_i)dp_i = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(s_i+1)}{\Gamma(s_i-e_i+1)\Gamma(e_i+1)}$$
$$B(a+e_i, b+s_i-e_i)$$

(4.13)

Substitusi persamaan (4.12) dn (4.13) ke persamaan (4.6) sehingga diperoleh persamaan:

$$h(p_i|r_i) = \frac{p_i^{a+e_i-1}(1-p_i)^{b+s_i-e_i-1}}{B(a+e_i, b+s_i-e_i)} \tag{4.13}$$

Berdasarkan persamaan (4.13), didapatkan distribusi posterior $h(p_i|r_i)$ berdistribusi $B(a+e_i, b+s_i-e_i)$.

4.5 Estimasi Parameter Berdasarkan Distribusi Posterior

Distribusi posterior yang diperoleh berdasarkan pada persamaan (4.13) merupakan distribusi $B(a+e_i, b+s_i-e_i)$ atau dapat dinyatakan $(p_i|r_i)\sim B(a+e_i, b+s_i-e_i)$. Selanjutnya dilakukan estimasi parameter berdasarkan distribusi posterior dengan $\hat{p}_i$ merupakan estimasi Bayesian dari p_i.

Berdasarkan persamaan (2.31) dapat diperoleh estimasi Bayesian dari p_i yaitu $\hat{p}_i$ dengan menghitung ekspektasi distribusi posterior pada persamaan (4.13). Estimasi nilai $\hat{p}_i$ yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\widehat{p_i}(a,b) &= \int_0^1 p_i h(p_i|r_i)dp_i \\ &= \frac{\int_0^1 p_i^{(a+e_i+1)-1}(1-p_i)^{(b+s_i-e_i)-1}\,dp_i}{B(a+e_i, b+s_i-e_i)}\end{aligned}$$

$\int_0^1 p_i^{(a+e_i+1)-1}(1-p_i)^{(b+s_i-e_i)-1}\,dp_i$ merupakan bentuk lain dari $B(a+e_i+1,\ b+s_i-e_i)$, sehingga persamaan $\hat{p}_i(a,b)$ menjadi:

$$\widehat{p_i}(a,b) = \frac{B(a+e_i+1,\ b+s_i-e_i)}{B(a+e_i,\ \ b+s_i-e_i)} \tag{4.14}$$

Dengan menggunakan sifat beta pada persamaan (2.19), diperoleh perhitungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} B(a+e_i+1, b+s_i-e_i) &= \frac{\Gamma(a+e_i+1)\Gamma(b+s_i-e_i)}{\Gamma(a+b+s_i+1)} \\ &= \frac{(a+e_i)}{(a+b+s_i)} \frac{\Gamma(a+e_i)\Gamma(b+s_i-e_i)}{\Gamma(a+b+s_i)} \\ &= \frac{(a+e_i)}{(a+b+s_i)} B(a+e_i,\ \ b+s_i-e_i) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Substitusi persamaan (4.15) ke persamaan (4.14), diperoleh:

$$\widehat{p_i}(a,b) = \frac{a+e_i}{a+b+s_i} \tag{4.16}$$

Diperoleh estimator $\hat{p}_i$ merupakan peluang kegagalan ke$-i$ dengan menggunakan prior$B(a,b)$ dan likelihood distribusi Binomial dengan menggunakan metode Bayesian.

4.6 Uji *Mann*

Uji distribusi waktu ketahanan hidup menggunakan uji *Mann* untuk mengetahui data waktu ketahanan hidup terdistribusi Weibull. Dengan menggunakan $\alpha = 5\%$, digunakan hipotesis sebagai berikut:

Hipotesis:

H_0: $T = f(t)$ untuk data waktu ketahanan hidup berdistribusi Weibull

$H_1 : T \neq f(t)$ untuk data waktu ketahanan hidup tidak berdistribusi Weibull

Statistik Uji:
Berdasarkan lampiran D dengan menggunakan persamaan (2.33) diperoleh:

$$M = \frac{k_1 \sum_{i=k_1+1}^{r-1} \left[\frac{\ln t_{i+1} - \ln t_i}{M_i} \right]}{k_2 \sum_{i=1}^{k_1} \left[\frac{\ln t_{i+1} - \ln t_i}{M_i} \right]}$$

$$= \frac{205(1{,}44 + 0{,}71 + \ldots + 0{,}009 + 0)}{204(0 + 0 + 1{,}2 + \cdots + 1{,}4 + 0)} = 0{,}5127$$

$$k_1 = \left\lfloor \frac{f}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{410}{2} \right\rfloor = 205$$

$$k_2 = \left\lfloor \frac{f-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{410-1}{2} \right\rfloor = 204$$

Kriteria pengujian:

Terima H_0 jika $M < F_{tabel}$. Jika diketahui bahwa $F_{Tabel} = F_{0,05,v_1,v_2} = 1{,}17688$, maka M kurang dari F_{tabel} sehingga H_0 diterima dan data t_i terdistribusi Weibull.

4.7 Estimasi Parameter η dan γ

Telah diketahui bahwa data ketahanan hidup pasien penderita diabetes melitus mengikuti distribusi Weibull. Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Weibull yaitu:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma} \right]$$

Berdasarkan hubungan fungsi distribusi kumulatif dengan fungsi ketahanan hidup sesuai persamaan (2.4) sehingga diperoleh fungsi ketahanan hidup sebagai berikut:

$$S(t) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right\}$$

Fungsi ketahanan hidup dapat diperoleh dengan mengetahui nilai-nilai parameter dalam model ketahanan hidup distribusi Weibull. Metode kuadrat terkecil (*Least Square Method)* digunakan untuk mengetahui estimasi dari parameter γ dan η.

Diberikan fungsi kepadatan kumulatif dari distribusi Weibull sesuai dengan persamaan (2.11).

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right]$$

$$1 - F(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right]$$

$$\frac{1}{1 - F(t)} = \exp\left[\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right] \tag{4.17}$$

Pada penelitian Han [7], p_i didefinisikan sebagai peluang kegagalan $F(t)$. Substitusi $F(t)$ menjadi p_i, kemudian transformasi $F(t)$ ke dalam bentuk logaritma natural.

$$\ln\left(\frac{1}{1 - p_i}\right) = \left[\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\gamma}\right]$$

Kedua ruas diubah kedalam bentuk logaritma natural.

$$\begin{aligned} \ln\ln\left(\frac{1}{1 - p_i}\right) &= \gamma \ln\left(\frac{t}{\eta}\right) \\ &= \gamma\,(\ln t - \ln \eta) \\ &= \gamma \ln t - \gamma \ln \eta \qquad (4.18) \end{aligned}$$

Persamaan (4.18) akan dibawa kebentuk model regresi sesuai persamaan (2.34), sehingga diperoleh pemisalan sebagai berikut:

$Y_i \quad = \ln \ln \left(\frac{1}{1-p_i}\right)$
$\beta_0 \quad = -\gamma \ln \eta$
$\beta_1 \quad = \gamma$
$X_i \quad = \ln t$

Metode *Least Square* bertujuan untuk mendapatkan estimasi parameter (β_0, β_1) yang dinotasikan $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ dengan asumsi $E(u) = 0$. Penduga untuk model regresi yaitu:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

dengan pemisalan:
$\hat{\beta}_0 \quad = -\hat{\gamma} \ln \hat{\eta}$ (4.19)
$\hat{\beta}_1 \quad = \hat{\gamma}$ (4.20)

Jumlah kuadrat galat *(Sum of Squares Error)* dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} SSE &= \sum_{i=1}^{m} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(Y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i\right)\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} (Y_i^2 + \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i\right)^2 - 2\, Y_i(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\, Y_i^2 + \hat{\beta}_0^2 + \hat{\beta}_1^2 X_i^2 + 2\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1 X_i - 2\hat{\beta}_0 Y_i - 2\hat{\beta}_1 X_i Y_i) \end{aligned}$$

(4.21)

Turunan pertama dari persamaan (4.21) terhadap $\hat{\beta}_0$ ditunjukkan sebagai berikut:

$$\frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_0} = \sum_{i=0}^{m} 2\hat{\beta}_0 + 2\hat{\beta}_1 X_i - 2Y_i) \qquad (4.22)$$

Turunan pertama dari persamaan (4.21) terhadap $\hat{\beta}_1$ yang ditunjukkan sebagai berikut:

$$\frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_1} = \sum_{i=1}^{m} (2\hat{\beta}_1 X_i^2 + 2\hat{\beta}_0 X_i - 2X_i Y_i) \qquad (4.23)$$

Untuk mendapatkan nilai minimum, persamaan (4.22) dan (4.23) disama dengankan nol sehingga $\frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0$ dan $\frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_1} = 0$, diperoleh:

$\frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0$, diperoleh:

$$m\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{m} X_i = \sum_{i=1}^{m} Y_i \qquad (4.24)$$

$\frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_1} = 0$, diperoleh:

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{m} X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{m} X_i^2 = \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i \qquad (4.25)$$

Untuk mendapatkan $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$, digunakan aturan *Cramer* sehingga persamaan (4.24) dan (4.25) terlebih dahulu dibawa kebentuk perkalian matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} X_i \\ \sum_{i=1}^{m} X_i & \sum_{i=1}^{m} X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} Y_i \\ \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan bentuk perkalian matriks dari persamaan (4.24) dan (4.25), selanjutnya digunakan aturan *Cramer* untuk menentukan $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$.

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{m} Y_i & \sum_{i=1}^{m} X_i \\ \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i & \sum_{i=1}^{m} X_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} X_i \\ \sum_{i=1}^{m} X_i & \sum_{i=1}^{m} X_i^2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} Y_i \sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \sum_{i=1}^{m} X_i \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i}{m \sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2} \tag{4.26}$$

Untuk metentukan $\hat{\beta}_1$ dengan menggunakan aturan *Cramer*.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\begin{vmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} Y_i \\ \sum_{i=1}^{m} X_i & \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} X_i \\ \sum_{i=1}^{m} X_i & \sum_{i=1}^{m} X_i^2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{m \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{m} X_i \sum_{i=1}^{m} Y_i}{m \sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2} \tag{4.27}$$

Syarat berlakunya aturan *Cramer* yaitu apabila penyebut tidak sama dengan nol. Untuk menjamin bahwa penyebut bernilai tidak sama dengan nol dapat diketahui dari nilai determinan tidak sama dengan nol. Dengan menggunakan persamaan (4.26) dan (4.27) dapat dibuktikan nilai penyebut tidak sama dengan nol dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} X_i \\ \sum_{i=1}^{m} X_i & \sum_{i=1}^{m} X_i^2 \end{vmatrix} = m\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2$$

$$= m\left(\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2\right)$$

$$= \ m\left(\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - m\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{m}\right)^2\right)$$

$$= m\left(\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - m\bar{X}\right)$$

$$= m\,Var(X)$$

$$= m\sigma^2$$

Diketahui bahwa σ^2 sebagai varian dari X bernilai positif dan tidak sama dengan nol sehingga terbukti bahwa nilai penyebut dari persamaan (4.26) dan (4.27) bernilai tidak sama dengan nol sehingga aturan *Cramer* dapat digunakan.

Setelah diperoleh $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$, selanjutkan dikembalikan pada pemisalan awal sesuai dengan persamaan (4.19) dan (4.20) agar diperoleh $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\eta}$.

Diperoleh persamaan $\hat{\gamma}$ sebagai berikut:

$\hat{\gamma} = \hat{\beta}_1$

$$\hat{\gamma} = \frac{m\sum_{i=1}^{m} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{m} X_i \sum_{i=1}^{m} Y_i}{m\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2} \tag{4.28}$$

Persamaan $\hat{\eta}$ diperoleh berdasarkan persamaan (4.20) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_0 &= -\hat{\gamma}\ln\hat{\eta} \\
\ln\hat{\eta} &= -\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\gamma}} \\
\hat{\eta} &= \exp\left(-\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\gamma}}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{m} Y_i \sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \sum_{i=1}^{m} X_i \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i}{m\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2}}{\dfrac{m\sum_{i=1}^{m} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{m} X_i \sum_{i=1}^{m} Y_i}{m\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2}}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{m} Y_i \sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \sum_{i=1}^{m} X_i \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i}{m\sum_{i=1}^{m} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{m} X_i \sum_{i=1}^{m} Y_i}\right) \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

Substitusi $Y_i = \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right)$ dan $X_i = \ln t_i$ sesuai dengan pemisalan awal pada persamaan (4.25) dan (4.26) sehingga persamaan $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\eta}$ menjadi:

$$\hat{\gamma} = \frac{m\sum_{i=1}^{m} \ln t_i \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right) - \sum_{i=1}^{m} \ln t_i \sum_{i=1}^{m} \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right)}{m\sum_{i=1}^{m} (\ln t_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} \ln t_i\right)^2} \tag{4.30}$$

$$\hat{\eta} = \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{m} \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right) \sum_{i=1}^{m} (\ln t_i)^2 - \sum_{i=1}^{m} \ln t_i \sum_{i=1}^{m} \ln t_i \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right)}{m\sum_{i=1}^{m} \ln t_i \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right) - \sum_{i=1}^{m} \ln t_i \sum_{i=1}^{m} \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right)}\right) \tag{4.31}$$

Diberikan fungsi ketahanan hidup dari distribusi Weibull yaitu $S(t)$ dengan $\hat{S}(t)$ sebagai estimasi fungsi ketahanan hidup sebagai berikut:

$$\hat{S}(t) = \exp\left\{-\left(\frac{\mathrm{t}}{\hat{\eta}}\right)^{\hat{\gamma}}\right\}$$

Dengan mensubstitusi persamaan $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\eta}$ ke persamaan $\hat{S}(t)$ dapat diperoleh model ketahanan hidup pada waktu$-t$.

4.9 Simulasi

Setelah diperoleh model ketahanan hidup, langkah selanjutnya adalah penerapan model pada kasus pasien penderita diabetes melitus.

4.9.1 Deskripsi Data

Data yang digunakan pada Tugas Akhir ini merupakan data pasien penderita diabetes melitus yang menjalani perawatan di Rumah Sakit XYZ. Data pasien penderita diabetes melitus tersebut dalam kurun waktu Januari 2016 - Desember 2017. Dalam rentan waktu tersebut, terdapat 410 pasien penderita diabetes melitus yang menjalani perawatan rutin sekaligus pasien diabetes melitus yang menjalani rawat inap dan sebanyak 23 pasien diabetes melitus dengan status meninggal. Untuk melakukan analisis ketahanan hidup, hal penting yang dibutuhkan dalam pengolahan data yaitu waktu ketahanan hidup.

Waktu ketahanan hidup yang dimaksudkan dalam Tugas Akhir ini merupakan waktu selama pasien penderita diabetes melitus menjalani perawatan di Rumah Sakit XYZ dengan *start point* pada bulan Januari 2016 dan *end point* pada bulan Desember 2017. Waktu ketahanan hidup didapatkan dengan mengurangkan tanggal keluar dan tanggal masuk pasien di Rumah Sakit XYZ. Misalkan pada data tersebut terdapat pasien yang melakukan perawatan lebih dari satu kali, tanggal masuk paling awal dan tanggal keluar paling akhir yang akan digunakan sebagai waktu ketahanan hidup serta status pasien terakhir yang akan dicantumkan. Diperoleh waktu ketahanan hidup dalam satuan hari.

Pasien penderita diabetes melitus dengan status masih hidup/ bertahan, pulang paksa, pindah ruang, dan obat jalan dikategorikan sebagai data tersensor, sedangkan data pasien penderita diabetes melitus yang dinyatakan meninggal dikategorikan sebagai data tidak tersensor. Data pasien penderita diabetes melitus dapat dilihat pada Lampiran C.

Berikut ini merupakan ringkasan data pasien penderita diabetes melitus di Rumah Sakit XYZ.

1. Karakteristik Pasien Penderita Diabetes Melitus Berdasarkan Waktu Ketahanan Hidup dan Status Pasien

   Jumlah pasien penderita Diabetes Melitus yang menjalani perawatan di Rumah Sakit XYZ dalam kurun waktu Januari 2016 - Desember 2018 adalah 410 pasien. Dari 410 pasien, terdapat 387 pasien yang bertahan hidup dan 23 pasien yang meninggal. Pasien diabetes melitus yang meninggal memiliki rata-rata waktu 171 hari dengan waktu terpendek yaitu 3 hari dan waktu terpanjang 639 hari. Sedangkan rata-rata waktu ketahanan hidup pasien diabetes melitus yang hidup yaitu 238 hari dengan waktu terpendek 2 hari dan paling lama 694 hari. Pasien yang masih bertahan hidup paling banyak memiliki waktu ketahanan hidup yaitu 10 hari dan untuk pasien yang telah meninggal memiliki waktu ketahanan hidup paling banyak 7 hari.

2. Karakteristik Pasien Penderita Diabetes Melitus Berdasarkan Usia

   Karakteristik pasien penderita diabetes melitus berdasarkan usia pada Rumah Sakit XYZ pada kurun waktu Januari 2016-Desember

2017 dengan pasien terbanyak pada usia diatas 45 tahun dengan pasien termuda yang menjalani perawatan berusia 29 tahun serta 88 tahun sebagai usia pasien tertua. Rata-rata usia pasien penderita diabetes melitus yaitu sekitar 56 tahun.

Tabel 4.1 Usia Pasien

Rentang Usia	**Frekuensi**	**Persentase**
29-38 tahun	19	4,63%
39-48 tahun	63	15,37%
49-58 tahun	155	37,80%
69-78 tahun	122	29,76%
69-78 tahun	47	11,46%
79-88 tahun	4	0,98%
Jumlah	410	100%

3. Karakteristik Pasien Penderita Diabetes Melitus Berdasarkan Jenis Kelamin

Dari 410 data pasien penderita Diabetes Melitus yang menjalani perawatan di Rumah Sakit XYZ, terdapat 152 pasien berjenis kelamin laki-laki dan 258 pasien dengan jenis kelamin perempuan. Diperoleh data terbanyak pasien rawat inap berjenis kelamin perempuan. Persentase 37,07% dan 62,93% masing-masing untuk jenis kelamin laki-laki dan perempuan.

Tabel 4.2 Jenis Kelamin Pasien

Jenis Kelamin	**Frekuensi**	**Persentase**
Laki-laki	152	37,07%
Perempuan	258	62,93%
Jumlah	410	100%

4. Karakteristik Pasien Penderita Diabetes Melitus Berdasarkan Tekanan Darah

   Terdapat 167 pasien yang mempunyai tekanan darah normal serta 243 pasien yang masuk ke dalam kategori hipertensi dari total 410 pasien Diabetes Melitus di Rumah Sakit XYZ.

Tabel 4.3 Tekanan Darah Pasien

Keterangan	**Frekuensi**	**Persentase**
Normal	167	40,73%
Hipertensi	243	59,27%
Jumlah	410	100%

5. Karakteristik Pasien Penderita Diabetes Melitus Berdasarkan Penyakit Penyerta

   Karakteristik pasien penderita diabetes melitus berdasarkan penyakit penyerta digolongkan menjadi 3 kelompok. Pasien yang tidak memiliki penyakit penyerta berjumlah 19 pasien atau 4,6%, pasien dengan 1 penyakit penyerta sebanyak 217 pasien atau 53,0%, serta pasien dengan lebih dari 1 penyakit penyerta yang diderita sebanyak 174 atau 42,2%. Terlihat dari Tabel 4.4, pasien paling banyak mempunyai 1 penyakit penyerta.

Tabel 4.4 Penyakit Penyerta Pasien

Keterangan	**Frekuensi**	**Persentase**
Tidak ada	19	4,6%
1 penyakit	217	53,0%
$>$ 1 penyakit	174	42,4%
Jumlah	410	100%

4.9.2 Fungsi Ketahanan Hidup $\hat{S}(t)$

Sebelum menerapkan fungsi ketahanan hidup pada data pasien penderita diabetes melitus, terlebih dahulu dilakukan pengelompokan data berdasarkan lamanya perawatan. Data yang diperoleh mempunyai waktu ketahanan hidup yang berbeda-beda sehingga membutuhkan pengelompokan untuk memudahkan perhitungan. Dalam penelitian Han, dilakukan pengelompokan data sebanyak m berdasarkan waktu pengamatan dilambangkan t_i dengan $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ [7]. Dalam Tugas Akhir ini, data akan dikelompokkan menjadi 7 kelompok berdasarkan lama perawatan dengan ketentuan:

1. Kelompok 1 dengan lama perawatan 0-100 hari
2. Kelompok 2 dengan lama perawatan 101-200 hari
3. Kelompok 3 dengan lama perawatan 201-300 hari
4. Kelompok 4 dengan lama perawatan 301-400 hari
5. Kelompok 5 dengan lama perawatan 401-500 hari
6. Kelompok 6 dengan lama perawatan 501-600 hari
7. Kelompok 7 dengan lama perawatan 601-700 hari

Setelah data dikelompokkan berdasarkan lamanya perawatan, selanjutnya pada masing-masing kelompok akan diperoleh banyak pasien yang diamati dan banyak pasien yang mengalami kegagalan yaitu meninggal. Dari data tersebut, dapat diperoleh jumlah pasien yang diamati dan pasien yang meninggal pada waktu$-t_i$. Data banyaknya pasien yang dirawat serta banyaknya pasien yang meninggal berdasarkan lama perawatan disajikan pada Tabel 4.5.

Langkah selanjutnya yaitu penerapan fungsi ketahanan hidup pada data pasien diabetes melitus berdasarkan Tabel 4.5 dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut ini:

1. Langkah Pertama

Menghitung peluang kegagalan menggunakan persamaan (4.16) yaitu:

$$\hat{p}_i = \frac{a + e_i}{a + b + s_i}$$

Tabel 4.5 Data Banyaknya Pasien Diabetes Melitus

Kelompok ke$-\boldsymbol{i}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Waktu (t_i)	100	200	300	400	500	600	700
Banyak Pasien (n_i)	121	89	66	45	34	29	26
Banyak Pasien Meninggal (r_i)	9	6	3	2	1	1	1
Jumlah Pasien $(s_i = \sum_{j=i}^{m} n_j)$	410	289	200	134	89	55	26
Jumlah Pasien Meninggal $(e_i = \sum_{j=1}^{i} r_i)$	9	15	18	20	21	22	23

Pemilihan parameter a dan b yaitu $0 < a < 1, b > 1$. Dalam penelitian Han [7], parameter a dan b yang digunakan berturut-turut yaitu 0,5 dan 2,5. Berdasarkan penelitian tersebut, pada Tugas Akhir ini akan digunakan parameter $a = 0{,}5$ dan $b = 2{,}5$ untuk simulasi data pasien penderita diabetes melitus. Setelah nilai a dan b dipilih, selanjutnya dilakukan perhitungan peluang kegagalan dari masing-masing kelompok.

a. Untuk $i = 1$,

$$\hat{p}_1 = \frac{a + e_1}{a + b + s_1} = \frac{0{,}5 + 9}{0{,}5 + 2{,}5 + 410} = 0{,}023$$

Diperoleh peluang kegagalan pada $i = 1$ dengan waktu $t_1 = 100$ yaitu 0,023.

b. Untuk $i = 2$,

$$\hat{p}_2 = \frac{a + e_2}{a + b + s_2} = \frac{0,5 + 15}{0,5 + 2,5 + 289} = 0,05308$$

Diperoleh peluang kegagalan pada $i = 2$ dengan waktu $t_2 = 200$ yaitu 0,05308.

c. Untuk $i = 3$,

$$\hat{p}_3 = \frac{a + e_3}{a + b + s_3} = \frac{0,5 + 18}{0,5 + 2,5 + 200} = 0,09113$$

Diperoleh peluang kegagalan pada $i = 3$ dengan waktu $t_3 = 300$ yaitu 0,09113.

d. Untuk $i = 4$,

$$\hat{p}_4 = \frac{a + e_4}{a + b + s_4} = \frac{0,5 + 20}{0,5 + 2,5 + 134} = 0,14964$$

Diperoleh peluang kegagalan pada $i = 4$ dengan waktu $t_4 = 400$ yaitu 0,14964.

e. Untuk $i = 5$,

$$\hat{p}_5 = \frac{a + e_5}{a + b + s_5} = \frac{0,5 + 21}{0,5 + 2,5 + 89} = 0,2337$$

Diperoleh peluang kegagalan pada $i = 5$ dengan waktu $t_5 = 500$ yaitu 0,2337.

f. Untuk $i = 6$,

$$\hat{p}_6 = \frac{a + e_6}{a + b + s_6} = \frac{0,5 + 22}{0,5 + 2,5 + 55} = 0,38793$$

Diperoleh peluang kegagalan pada $i = 6$ dengan waktu $t_6 = 600$ yaitu 0,38793.

g. Untuk $i = 7$,

$$\hat{p}_7 = \frac{a + e_7}{a + b + s_7} = \frac{0,5 + 23}{0,5 + 2,5 + 26} = 0,81034$$

Diperoleh peluang kegagalan pada $i = 7$ dengan waktu $t_6 = 700$ yaitu 0,81034.

2. Langkah kedua

   Pada masing-masing kelompok, dapat diperoleh perhitungan dari $X_i = \ln t_i$ dan $Y_i = \ln \ln \left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right)$ sehingga diperoleh $\sum_{i=1}^{7} X_i$, $\sum_{i=1}^{7} Y_i$, $\sum_{i=1}^{7} {X_i}^2$, dan $\sum_{i=1}^{7} X_i Y_i$.

   a. Untuk $i = 1$

      $X_1 = lnt_1 = \ln 100 = 4,60517$

      $Y_1 = \ln \ln \left(\frac{1}{1-\hat{p}_1}\right) = \ln \ln \left(\frac{1}{1-0,023}\right) = -3,76054$

      $X_1^2 = 21,2076$

      $X_1 Y_1 = (4,60517)(-3,76054) = -17,3179$

   b. Untuk $i = 2$

      $X_2 = \ln t_2 = \ln 200 = 5,298317$

      $Y_2 = \ln \ln \left(\frac{1}{1-\hat{p}_2}\right) = \ln \ln \left(\frac{1}{1-0,05308}\right) = -2,90877$

      $X_2^2 = 28,0722$

      $X_2 Y_2 = (5,298317)(-2,90877) = -15,4116$

   c. Untuk $i = 3$

      $X_3 = \ln t_3 = \ln 300 = 5,703782$

      $Y_3 = \ln \ln \left(\frac{1}{1-\hat{p}_3}\right) = \ln \ln \left(\frac{1}{1-0,09113}\right) = -\,2,34804$

      $X_3^2 = 32,5331$

      $X_3 Y_3 = (5,703782)(-2,34804) = -13,3927$

d. Untuk $i = 4$

$X_4 = \ln t_4 = \ln 400 = 5{,}991465$

$Y_4 = \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_4}\right) = \ln\ln\left(\frac{1}{1-0{,}14964}\right) = -1{,}81961$

$X_4^2 = 35{,}8976$

$X_4Y_4 = (5{,}991465)(-1{,}81961) = -10{,}9021$

e. Untuk $i = 5$

$X_5 = \ln t_5 = \ln 500 = 6{,}214608$

$Y_5 = \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_5}\right) = \ln\ln\left(\frac{1}{1-0{,}2337}\right) = -0{,}3236$

$X_5^2 = 38{,}6214$

$X_5Y_5 = (6{,}214608)(-0{,}3236) = -8{,}22564$

f. Untuk $i = 6$

$X_6 = \ln t_6 = \ln 600 = 6{,}39693$

$Y_6 = \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_6}\right) = \ln\ln\left(\frac{1}{1-0{,}38793}\right) = -0{,}71149$

$X_6^2 = 40{,}9207$

$X_6Y_6 = (6{,}39693)(-0{,}71149) = -4{,}55138$

g. Untuk $i = 7$

$X_7 = \ln t_7 = \ln 700 = 6{,}55108$

$Y_7 = \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_7}\right) = \ln\ln\left(\frac{1}{1-0{,}81034}\right) = 0{,}50835$

$X_7^2 = 42{,}9167$

$X_6Y_6 = (6{,}39693)(0{,}50835) = 3{,}33025$

Setelah dilakukan perhitungan pada masing-masing kelompok, akan diperoleh nilai dari $\sum_{i=1}^{7} X_i$, $\sum_{i=1}^{7} Y_i$, $\sum_{i=1}^{7} {X_i}^2$, dan $\sum_{i=1}^{7} X_iY_i$. Hasil perhitungan disajikan dalam bentuk Tabel 4.6.

3. Langkah ketiga

Langkah selanjutnya yaitu menghitung parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\eta}$. Berdasarkan Tabel 4.6 Diperoleh nilai dari:

$\sum_{i=1}^{7} X_i = 40{,}7613$ $\quad\quad$ $\sum_{i=1}^{7} X_i^2 = 240{,}169$

$\sum_{i=1}^{7} Y_i = -12{,}3637$ $\quad\quad$ $\sum_{i=1}^{7} X_i Y_i = -66{,}4711$

Tabel 4.6 Hasil Perhitungan X_i, Y_i, X_i^2, dan $X_i Y_i$

i	t_i	$\hat{p}_i$	X_i	Y_i	X_i^2	$X_i Y_i$
1	100	0,023002	4,60517	-3,7605	21,2075	-17,3179
2	200	0,053082	5,29831	-2,9087	28,0721	-15,4116
3	300	0,091133	5,70378	-2,3480	32,5331	-13,3927
4	400	0,149635	5,99146	-1,8196	35,8976	-10,9021
5	500	0,233696	6,21460	-1,323	38,6213	-8,22564
6	600	0,387931	6,39693	-0,7114	40,9207	-4,55138
7	700	0,810345	6,55108	0,5083	42,9166	3,33025
Jumlah			40,7613	-12,363	240,169	-66,4711

Nilai $\hat{\gamma}$ dapat diperoleh menggunakan persamaan (4.28) yaitu:

$$\hat{\gamma} = \frac{m\sum_{i=1}^{m} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{m} X_i \sum_{i=1}^{m} Y_i}{m\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{m} X_i)^2}$$

Substitusikan persamaan $\sum_{i=1}^{7} X_i$, $\sum_{i=1}^{7} Y_i$, $\sum_{i=1}^{7} {X_i}^2$, dan $\sum_{i=1}^{7} X_i Y_i$ ke persamaan (4.28).

$$\hat{\gamma} = \frac{7(-66{,}4711) - (40{,}7613)(-12{,}3637)}{7(240{,}169) - (40{,}7613)^2} = 1{,}96291115$$

Setelah nilai $\hat{\gamma}$ diperoleh, parameter $\hat{\eta}$ dapat diperoleh menggunakan persamaan (4.29) yaitu:

$$\hat{\eta} = \exp\left(-\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} Y_i \sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \sum_{i=1}^{m} X_i \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i}{m \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{m} X_i \sum_{i=1}^{m} Y_i}\right)\right)$$

Substitusikan persamaan $\sum_{i=1}^{7} X_i$, $\sum_{i=1}^{7} Y_i$, $\sum_{i=1}^{7} {X_i}^2$, dan $\sum_{i=1}^{7} X_i Y_i$ ke persamaan (4.29) Sehingga diperoleh nilai dari $\hat{\eta}$.

$$\hat{\eta} = \exp\left(-\left(\frac{(-12{,}3637)(240{,}169) - (40{,}7613)(-66{,}4711)}{7(-66{,}4711) - (40{,}7613)(-12{,}3637)}\right)\right)$$
$$= 831{,}189415$$

Diperoleh nilai parameter untuk $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\eta}$ berturut-turut yaitu 1,9629 dan 831,1894.

4. Langkah keempat

   Setelah diperoleh nilai dari parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\eta}$, langkah selanjutnya yaitu membawa kebentuk fungsi ketahanan hidup untuk mengetahui ketahanan hidup pasien penderita diabetes melitus yaitu:

   $$\hat{S}(t) = \exp\left\{-\left(\frac{\mathrm{t}}{\hat{\eta}}\right)^{\hat{\gamma}}\right\}$$

   $\hat{S}(t)$ sebagai estimasi fungsi ketahanan hidup. Substitusikan nilai dari $\hat{\gamma} = 1{,}9629$ dan $\hat{\eta} = 831{,}1894$ ke persamaan $\hat{S}(t)$ sehingga diperoleh fungsi ketahanan hidup pasien diabetes melitus di Rumah Sakit XYZ yaitu:

   $$\hat{S}(t) = \exp\left\{-\left(\frac{\mathrm{t}}{831{,}1894}\right)^{1{,}9629}\right\}$$

Fungsi ketahanan hidup merupakan peluang dari suatu individu untuk bertahan setelah waktu yang ditetapkan. Peluang ketahanan hidup tersebut dapat diperoleh dari fungsi ketahanan hidup $\hat{S}(t)$. Jika waktu ketahanan hidup suatu individu diketahui, maka fungsi ketahanan hidup suatu individu dapat diketahui dengan mensubstitusi waktu t ke persamaan $\hat{S}(t)$.

Substitusikan waktu $t = 100, 200, 300, 400, 500, 600,$ dan 700 dapat diperoleh fungsi ketahanan hidup sebagai berikut:

$$\hat{S}(100) = \exp\left\{-\left(\frac{100}{831{,}1894}\right)^{1{,}9629}\right\} = 0{,}9844$$

$$\hat{S}(200) = \exp\left\{-\left(\frac{200}{831{,}1894}\right)^{1{,}9629}\right\} = 0{,}9407$$

$$\hat{S}(300) = \exp\left\{-\left(\frac{300}{831{,}1894}\right)^{1{,}9629}\right\} = 0{,}8734$$

$$\hat{S}(400) = \exp\left\{-\left(\frac{400}{831{,}1894}\right)^{1{,}9629}\right\} = 0{,}7882$$

$$\hat{S}(500) = \exp\left\{-\left(\frac{500}{831{,}1894}\right)^{1{,}9629}\right\} = 0{,}6916$$

$$\hat{S}(600) = \exp\left\{-\left(\frac{600}{831{,}1894}\right)^{1{,}9629}\right\} = 0{,}5901$$

$$\hat{S}(700) = \exp\left\{-\left(\frac{700}{831{,}1894}\right)^{1{,}9629}\right\} = 0{,}4897$$

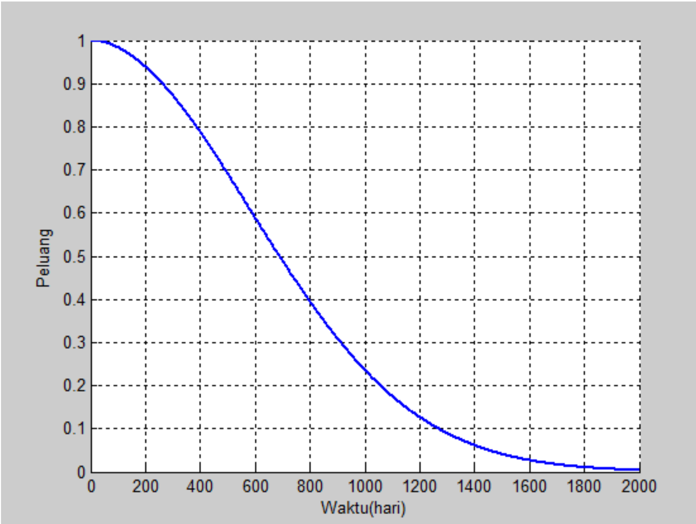
Hasil estimasi fungsi ketahanan hidup dapat dilihat pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Hasil Perhitungan $\hat{S}(t)$

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i	100	200	300	400	500	600	700
$\hat{S}(t)$	0,9844	0,9407	0,8734	0,7882	0,6916	0,5901	0,4897

Tabel 4.7 dapat dibentuk kedalam grafik fungsi ketahanan hidup dengan sumbu x menyatakan waktu dalam satuan hari, dan sumbu y menyatakan peluang ketahanan hidup sebagai fungsi

ketahanan hidup dari distribusi Weibull. Grafik fungsi ketahanan hidup penderita diabetes melitus dapat dilihat pada Grafik 4.1.



Gambar 4. 1 Grafik Fungsi Ketahanan Hidup Penderita Diabetes Melitus

Terlihat dari Gambar 4.1, pada hari ke-2000 fungsi ketahanan hidup pasien penderita diabetes melitus menuju nol. Fungsi ketahanan hidup terus mengalami penurunan hingga menuju nol, hal ini menunjukkan bahwa jika diberikan waktu pengamatan yang bertambah menuju tak hingga, diperoleh peluang ketahanan hidup menuju nol sesuai dengan teori fungsi ketahanan hidup $S(t)$ [1].

4.9.3 Pembentukan Model *Cox Proportional Hazard*

Bentuk umum model *Cox Proportional Hazard* telah diberikan pada persamaan (2.17). Pada Tugas Akhir ini, faktor resiko yang diamati dan diduga berpengaruh terhadap ketahanan hidup pasien diabetes melitus yaitu faktor jenis kelamin, usia, tekanan darah, serta riwayat mempunyai penyakit penyerta. Berdasarkan faktor tersebut, diperoleh model *Cox Proportional Hazard* pada Tugas Akhir ini adalah:

$$h(t, X) = h_0(t) \exp(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4) \qquad (4.30)$$

dengan,

X_1 : Variabel jenis kelamin,
($X_1 = 0$ untuk jenis kelamin pasien laki-laki,
$X_1 = 1$ untuk jenis kelamin pasien perempuan).

X_2 : Variabel usia pasien (dalam tahun).

X_3 : Variabel tekanan darah
($X_3 = 0$ untuk pasien yang mempunyai tekanan darah normal,
$X_3 = 1$ untuk pasien yang mempunyai tekanan darah tidak normal).

X_4 : Variabel penyakit penyerta
($X_4 = 0$ untuk pasien yang tidak mempunyai penyakit penyerta,
$X_4 = 1$ untuk pasien yang memiliki 1 penyakit penyerta, $X_4 = 2$ untuk pasien yang memiliki lebih dari 1 penyakit penyerta).

Estimasi parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dan α_4 menggunakan metode Bayesian dengan algoritma *Gibbs Sampling* yang telah tersedia pada *software* WinBUGS. Metode *gibbs sampling* merupakan salah satu algoritma untuk membangkitkan rantai Markov atau MCMC *(Monte Carlo Marcov Chain)* hingga diperoleh deret rantai yang konvergen.

Langkah pertama yang dilakukan untuk mengestimasi α_1, α_2, α_3 dan α_4 menggunakan *software* WinBUGS yaitu membentuk algoritma model dengan mengasumsikan bahwa fungsi likelihood mengikuti waktu ketahanan hidup yang berdistribusi Weibull dengan $t_i \sim Weibull(\gamma, \mu_i)$ dan $\mu_i = \exp(\alpha X)$. Distribusi prior yang digunakan merupakan distribusi normal dengan $\alpha \sim Normal(0, 0.0001)$. Setelah algoritma model terbentuk, selanjutnya data dimasukkan kedalam algoritma data dan dilakukan inisialisasi awal parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4.

Pengolahan data dimulai dari spesifikasi model yang meliputi pengecekan terhadap *syntax* model, *loading* data, *compiling* model, inisialisasi model, serta menentukan banyaknya iterasi untuk membangkitkan rantai Markov. Pada Tugas Akhir ini, *updating* data dilakukan iterasi sebanyak 2000 kemudian dilakukan *burn in* sampai dengan 10.000. Hasil estimasi parameter serta karakteristik dari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4 untuk masing-masing variabel jenis kelamin, usia, tekanan darah, dan penyakit penyerta dengan menggunakan *software* WinBUGS ditunjukkan pada Tabel 4.8.

Tabel 4.8 Estimasi Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dan α_4

Parameter	**Mean**	**Standar Deviasi**	**MC Error**	**Interval Kepercayaan**	
				2,5%	**97,5%**
α_1	$-0{,}5236$	0,1	$4{,}037x10^{-4}$	$-0{,}6995$	$-0{,}348$
α_2	$-0{,}1514$	0,003323	$1{,}804x10^{-5}$	$-0{,}1579$	$-0{,}145$
α_3	$-0{,}6649$	0,09121	$3{,}843x10^{-4}$	$-0{,}8446$	$-0{,}4873$
α_4	$-2{,}577$	0,1296	$7{,}176x10^{-4}$	$-2{,}577$	$-2{,}327$

Mean pada Tabel 4.8 merupakan rata-rata dari nilai bangkitan distribusi posterior. Berdasarkan teorema Bayesian, nilai estimasi parameter merupakan nilai ekspektasi dari distribusi posterior, artinya nilai estimasi parameter dapat diperoleh dengan mendapatkan nilai rata-rata atau mean dari distribusi posterior [15].

Langkah selanjutnya yaitu memastikan bahwa nilai bangkitan dari distribusi posterior bersifat signifikan dan konvergen. Estimasi parameter dikatakan signifikan jika berada dalam interval kepercayaan serta tidak terdapat nol dalam interval kepercayaan [21]. Terlihat interval kepercayaan pada Tabel 4.4 bahwa estimasi parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4 bersifat signifikan.

Untuk mengetahui distribusi posterior yang telah dibangkitkan memenuhi sifat konvergen dapat dilihat pada *trace plot, history plot*, dan *density* yang telah disajikan pada Lampiran F. Pada gambar *trace plot*, keempatnya menunjukkan sudah tidak terdapat pola yang terbentuk, baik itu *trend* naik maupun *trend* turun pada *trace plot.* Selain melihat pada *trace plot*, konvergensi model juga dapat dilihat dari *history plot.* Jika hasil *history plot* tampak rapat dan mampu merespon parameter yang diestimasi maka model telah konvergen pada nilai mean. Untuk lebih memastikan bahwa model telah konvergen, dapat dilihat dari *density* tiap parameter. Gambar *density* pada Lampiran F untuk parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4 telah halus sehingga model dapat dikatakan telah konvergen.

Interpretasi model *Cox Proportional Hazard*

Menggunakan persamaan (4.30) dan hasil estimasi parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dan α_4 menggunakan *software* WinBUGS pada Tabel 4.8, diperoleh model *Cox Proportional Hazard* sebagai berikut:

$$\hat{h}(t,X) = h_0(t)\exp(-0{,}5236X_1 - 0{,}1514\,X_2 - 0{,}6649X_3 - 2{,}577X_4)$$

Dari empat parameter yang diestimasi pada Tabel 4.4, menunjukkan bahwa empat variabel yaitu jenis kelamin, usia, tekanan darah, dan penyakit penyerta memenuhi kriteria signifikan artinya empat variabel tersebut berpengaruh terhadap ketahanan hidup pasien penderita diabetes melitus.

Pada variabel jenis kelamin (X_1) dengan nilai $\alpha_1 = -0{,}5223$ dengan $\exp(\alpha_1) = 0{,}593$ menunjukkan bahwa jenis kelamin laki-laki memiliki resiko mengidap penyakit diabetes melitus sebesar 0,593 kali lebih kecil dibandingkan dengan jenis kelamin perempuan.

Pada variabel usia (X_2) dengan $\alpha_2 = -0{,}1514$ mempunyai nilai $\exp(\alpha_2) = 0{,}8595$ yang berarti resiko mengalami kegagalan pasien diabetes melitus ketika usia pasien satu tahun lebih muda sebesar 0,8595 kali lebih kecil dari pasien yang berusia satu tahun lebih tua. Hal ini berarti semakin bertambah usia, resiko mengidap diabetes melitus dan mengalami kegagalan semakin tinggi.

Variabel tekanan darah (X_3) dengan $\alpha_3 = -0{,}6649$ dan $\exp(\alpha_3) = 0{,}5143$ menunjukkan bahwa pasien dengan tekanan darah tinggi/hipertensi mempunyai peluang lebih tinggi sebesar 0,5143 kali dari pasien dengan tekanan darah normal. Dengan kata lain, pasien dengan tekanan darah normal yang tidak mempunyai riwayat hipertensi mempunyai peluang ketahanan hidup lebih besar dari pada pasien dengan riwayat hipertensi.

Sedangkan untuk variabel penyakit penyerta (X_4) dengan $\alpha_4 = -2{,}577$ dan $\exp(\alpha_4) = 0{,}076$ artinya pasien dengan riwayat tidak mempunyai penyakit penyerta mempunyai peluang $0{,}076$ lebih kecil dari pasien yang mempunyai penyakit penyerta.

Setelah diperoleh estimasi parameter α_1, α_2, α_3 dan α_4, substitusikan $\hat{\gamma} = 1{,}9629$ dan $\hat{\eta} = 831{,}1894$ ke persamaan (2.32) sehingga diperoleh model C*ox Proportional Hazard* dengan *hazard* dasar berdistribusi Weibull sebagai berikut:

$$\hat{h}(t, X) = \left(\frac{1{,}9629}{831{,}1894}\right)\left(\frac{t}{831{,}1894}\right)^{0{,}9629} \exp(-0{,}5236X_1 - 0{,}1514\, X_2 - 0{,}6649X_3 - 2{,}577X_4$$

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari hasil analisis data pada Tugas Akhir ini dan saran yang bisa digunakan untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, kesimpulan yang diperoleh dalam penelitian Tugas Akhir ini yaitu:

1. Model estimasi ketahanan hidup distribusi Weibull diperoleh dengan estimasi parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\eta}$ dengan metode *least square* secara umum yaitu:

   $$\hat{\gamma} = \frac{m\sum_{i=1}^{m}\ln t_i \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right) - \sum_{i=1}^{m}\ln t_i \sum_{i=1}^{m}\ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right)}{m\sum_{i=1}^{m}(\ln t_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{m}\ln t_i\right)^2}$$

   $$\hat{\eta} = \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{m}\ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right)\ \sum_{i=1}^{m}(\ln t_i)^2 - \sum_{i=1}^{m}\ln t_i \sum_{i=1}^{m}\ln t_i \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right)}{m\sum_{i=1}^{m} ln\, t_i \ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right) - \sum_{i=1}^{m} ln\, t_i \sum_{i=1}^{m}\ln\ln\left(\frac{1}{1-\hat{p}_i}\right)}\right)$$

   Peluang kegagalan dari $\hat{p}_i$ diperoleh menggunakan metode Bayesian dengan distribusi Beta sebagai prior konjugat dari distribusi Binomial. Model peluang kegagalan $\hat{p}_i$ secara umum diberikan:

   $$\hat{p}_i = \frac{a + e_i}{a + b + s_i}$$

2. Berdasarkan data pasien penderita diabetes melitus yang menjalani perawatan di Rumah Sakit XYZ, diperoleh data ketahanan hidup berdistribusi Weibull dengan estimasi parameter distribusi Weibull yaitu $\hat{\gamma} = 1{,}9629$ dan $\hat{\eta} = 831{,}1894$ sehingga estimasi fungsi ketahanan hidup pasien penderita diabetes melitus di Rumah Sakit XYZ adalah,

   $$\hat{S}(t) = \exp\left\{-\left(\frac{\mathrm{t}}{831{,}1894}\right)^{1{,}9629}\right\}$$

Dari hasil perhitungan dapat diketahui bahwa semakin lama seorang pasien mengidap penyakit diabetes melitus maka peluang hidup pasien semakin kecil.

Model C*ox Proportional Hazard* dengan *hazard* dasar berdistribusi Weibull sebagai berikut:

$$\hat{h}(t,X) = \left(\frac{1{,}9629}{831{,}1894}\right)\left(\frac{t}{831{,}1894}\right)^{0{,}9629} \exp(-0{,}5236X_1 - 0{,}1514\,X_2 - 0{,}6649X_3 - 2{,}577X_4$$

a. Variabel jenis kelamin (X_1) dengan nilai $\alpha_1 = -0{,}5223$ dengan $\exp(\alpha_1) = 0{,}593$ menunjukkan bahwa jenis kelamin laki-laki memiliki resiko mengidap penyakit diabetes melitus sebesar 0,593 kali lebih kecil dibandingkan dengan jenis kelamin perempuan.
b. Variabel usia (X_2) dengan $\alpha_2 = -0{,}1514$ mempunyai nilai $\exp(\alpha_2) = 0{,}8595$ yang berarti resiko mengalami kegagalan pasien diabetes melitus ketika usia pasien satu tahun lebih muda sebesar 0,8595 kali lebih kecil dari pasien yang berusia satu tahun lebih tua. Hal ini berarti semakin bertambah usia, resiko mengidap diabetes melitus dan mengalami kegagalan semakin tinggi.
c. Variabel tekanan darah (X_3) dengan $\alpha_3 = -0{,}6649$ dan $\exp(\alpha_3) = 0{,}5143$ menunjukkan bahwa pasien dengan tekanan darah tinggi/hipertensi mempunyai peluang lebih tinggi sebesar 0,5143 kali dari pasien dengan tekanan darah normal. Dengan kata lain, pasien dengan tekanan darah normal yang tidak mempunyai riwayat hipertensi mempunyai peluang ketahanan hidup lebih besar dari pada pasien dengan riwayat hipertensi.
d. Variabel penyakit penyerta (X_4) dengan $\alpha_4 = -2{,}577$ dan $\exp(\alpha_4) = 0{,}076$ artinya pasien dengan riwayat tidak mempunyai penyakit penyerta mempunyai peluang

0,076 lebih kecil dari pasien yang mempunyai penyakit penyerta.

5.2 Saran

Adapun beberapa saran untuk penelitian selanjutnya:

1. Mengembangkan penelitian terkait estimasi peluang kegagalan menggunakan metode Bayesian dengan menggunakan distribusi prior *non-conjugat*, prior *non-informative*, atau prior *informative*.
2. Pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat mendapatkan model estimasi ketahanan hidup terhadap distribusi peluang lain dengan menggunakan metode Bayesian.
3. Metode Bayesian dapat dikembangkan menjadi metode Bayesian berhirarki yang selanjutnya dapat dibandingkan dan diketahui hasil estimasi yang lebih baik.
4. Penerapan model estimasi ketahanan hidup dapat dikembangkan dengan menerapkan pada kasus-kasus lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Klein, M dan Kleinbaum, D.G. 2005. *Survival Analysis: A Self Learning Text, Second Edition.* New York: Springer

[2] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. 2014. "Pusat Data dan Informasi : Situasi dan Analisis Diabetes." [Online]. Available: http://depkes.go.id. [Accessed 19 Februari 2018].

[3] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. 2009. "Tahun 2030 Prevalensi Diabetes Melitus di Indonesia Mencapai 21,3 Juta Orang." Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. 08 November 2009. [Online]. Available: http://www.depkes.go.id. [Accessed 19 Februari 2018].

[4] Kompas.com. 2017. "Miris, Indonesia Peringkat 7 Pasien Diabetes Terbanyak di Dunia." Kompas, 11 November 2017. [Online]. Available: http://www.sains.kompas.com. [Accessed 19 Februari 2018].

[5] Walpole, R.E dan Myer, R.H. 2000. *Pengantar Statistika*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama

[6] Nahi, E N. 1969. *Estimation Theory and Applications*. New York: John Wiley & Sons

[7] Han, M. 2007. "E-Bayesian of Failure Probability and Its Application." *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 45. pp. 1272-1279

[8] Candra, A. S. 2011. "Inferensia Statistik Distribusi Binomial dengan Metode Bayes Menggunakan Prior Konjugat." Semarang, Universitas Diponegoro

[9] Jiang, P. 2015. "Weibull Failure Probability Estimation Based on Zero-Failure Data." *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, p. 8 pages

[10] Sanusi, W., Alimuddin., dan Sukmawati. 2017. "Metode Regresi Cox dan Aplikasinya dalam Menganalisis Ketahanan Hidup Pasien Penderita Diabetes Mellitus di Rumah Sakit Bhayangkara Makassar," Makassar: Universitas Negeri Makassar

[11] Cox, O. 1984. *Analysis of Survival Data*. London: Chapman and Hall

[12] Irawan, D. 2010. "Prevalensi dan Faktor Risiko Kejadian Diabetes Melitus Tipe 2 di Daerah Urban Indonesia (Analisa Data Sekunder Riskesdas 2007)." Universitas Indonesia

[13] Young, B.A. 2008. "Diabetes Complications Severity Index and Risk of Mortality, Hospitalization, and Healtcare Utilization." pp. 15-23

[14] Corwin, E. 2000. *Buku Saku Patofisiologi*. Jakarta: EG

[15] Bain, L.J., dan Engelhardt, Max. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. California: Duxbury Press

[16] Sahoo, P. 2013. *Probability and Mathematical Statistics*. USA: Department of Mathematics University of Louisville

[17] Box, dan Tiao. 1973. *Bayesian Inference In Statistical Analysis*. Philippines: Addision-Wesley Publishing Company Inc

[18] Ebeling, E.C. 1997. *An Introduction to Reliability And Maintainability Engineering*. New York: McGraw-Hill Education

[19] Ntzoufras, I. 2009. *Bayesian Modeling Using WinBugs*. Canada: John Wiley and Sons Inc

[20] Dosen-Dosen Jurusan Matematika ITS. 2012. *Kalkulus 1*. Surabaya: ITS Press

[21] Binbin, Y. 2010. "A Bayesian MCMC Approach to Survival Analysis with Doubly-Censored Data." *Computational Statistics and Data Analysis*, no. 54, pp. 1921-1929

LAMPIRAN A

Pembuktian pada Fungsi Beta

1. Diberikan hubungan antara fungsi Beta dan fungsi Gamma sebagai berikut:

   $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Dengan $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ adalah fungsi gamma.

Bukti :

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\ dx\right)\left(\int_0^\infty y^{\beta-1}\, e^{-y}\ dy\right)$$

Misal :

$x = u^2$ $\qquad\qquad$ $y = v^2$

$dx = 2u\, du$ $\qquad\qquad$ $dy = 2v\, dv$

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \left(\int_0^\infty u^{2(a-1)}\, e^{-u^2}\, 2u\ du\right)\left(\int_0^\infty v^{2(b-1)}\, e^{-v^2} 2v\, dv\right)$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty u^{2a-1}\, v^{2b-1}\, e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv$$

Misal :

$u = r\cos\theta$ $\qquad\qquad$ $v = r\sin\theta$

$du = -r\sin\theta\, d\theta$ $\qquad\qquad$ $dv = r\cos\theta\, d\theta$

$u^2 + v^2 = r^2$

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty (r\cos\theta)^{2a-1}\ (r\sin\theta)^{2b-1}\ e^{-r^2}\ r\, dr\, d\theta$$

LAMPIRAN A (lanjutan)

Pembuktian pada Fungsi Beta

$$= \left(\int_0^{\infty} (r^2)^{a+b-1}\, e^{-r^2}\, 2\, r\, dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2a-1}(\cos\theta)^{2b-1}\ \ d\theta\right)$$

Misal :

$p = r^2$ $\qquad dp = 2r\, dr$

$t = \sin^2\theta$ $\qquad dt = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$$d\theta = \frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}dt = \frac{1}{2\sqrt{t}\,\sqrt{1-t}}\, dt$$

Ubah batas :

$\theta = 0$ $\qquad$ maka $t = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ maka $t = 1$

$$= \left(\int_0^{\infty} t^{a+b-1}\, e^{-t}\, dt\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2\theta)^a}{\cos\theta}\frac{(\sin^2\theta)^b}{\sin\theta} d\theta\right)$$

$$= \Gamma(a+b)\left(2\int_0^{1} \frac{(1-t)^a}{\sqrt{1-t}}\frac{t^b}{\sqrt{t}}\frac{1}{2\sqrt{1-t}\sqrt{t}} dt\right)$$

$$= \Gamma(a+b)\int_0^{1} (1-t)^{a-1}\, t^{b-1} dt$$

$$= \Gamma(a+b)\, B(a,b)$$

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\, B(a,b)$$

Sehingga diperoleh:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

LAMPIRAN A (lanjutan)

Pembuktian pada Fungsi Beta

2. Mean dan varian dari fungsi beta sebagai berikut:

$$E(X) = \frac{a}{a+b}$$

$$Var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Bukti :

$$E(X) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x \left(x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-1}\, dx$$

$$= \frac{B(a+1,b)}{B\,(a,b)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)\,\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$= \frac{a\,\Gamma(a)\Gamma(b)\,\Gamma(a+b)}{(a+b)\,\Gamma(a+b)\,\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$= \frac{a}{a+b}$$

Sehingga diperoleh $E(X) = \frac{a}{a+b}$

$$E(X^2) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^2 \left(x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\right) dx$$

LAMPIRAN A (lanjutan)

Pembuktian pada Fungsi Beta

$$= \frac{B(a+2,b)}{B\ (a,b)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b)\ \Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+2)\ \Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$= \frac{a(a+1)\Gamma(a)\Gamma(b)\ \Gamma(a+b)}{(a+b+1)(a+b)\Gamma(a+b)\ \Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$= \frac{a\ (a+1)}{(a+b+1)(a+b)}$$

Varian dapat diperoleh dari:

$$Var\ (X) = E(X^2) - E(X)$$

$$= \frac{a\ (a+1)}{(a+b+1)(a+b)} - \frac{a}{a+b}$$

$$= \frac{a\ (a+1) - a(a+b+1)}{(a+b+1)(a+\beta)}$$

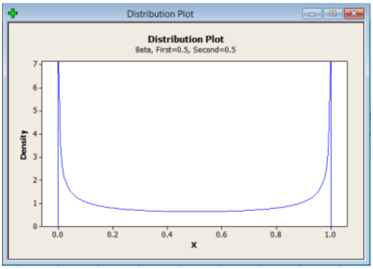
$$= \frac{a\ b}{(a+b+1)(a+b)}$$

Diperoleh persamaan:

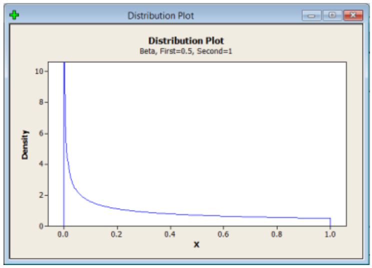
$$Var(X) = \frac{a\ b}{(a+b+1)(a+b)}$$

LAMPIRAN B

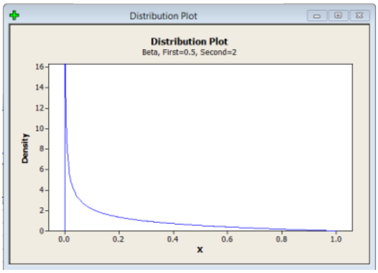
Fungsi Kepadatan Peluang $B(a, b)$



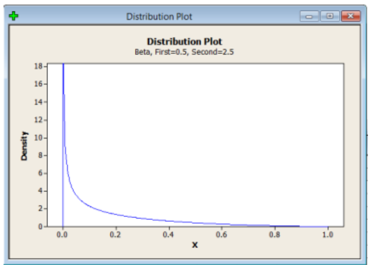
$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



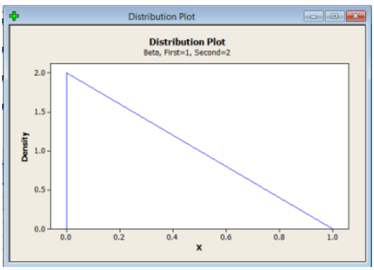
$B\left(\frac{1}{2}, 1\right)$



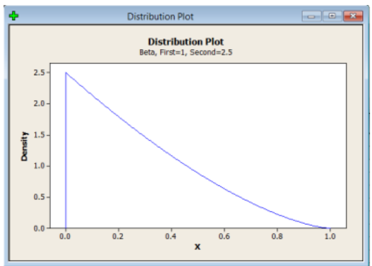
$B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$



$B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$



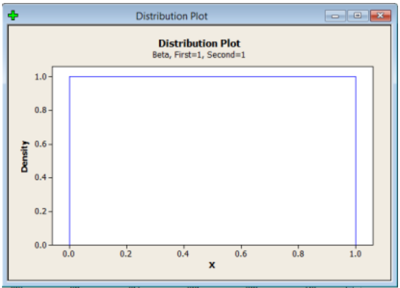
$B(1,2)$



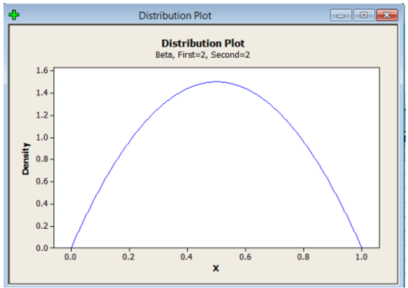
$B\left(1, \frac{5}{2}\right)$

LAMPIRAN B (lanjutan)

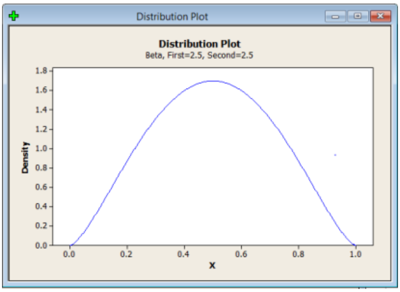
Grafik Fungsi Kepadatan Peluang $B(a, b)$



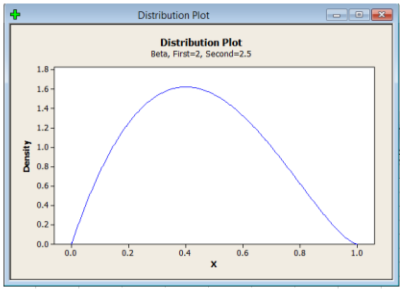
$B(1,1)$



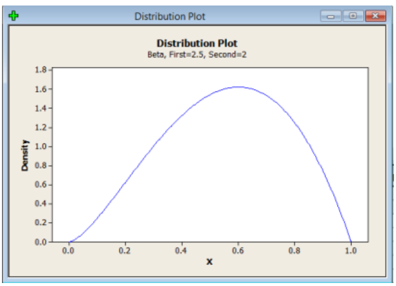
$B(2,2)$



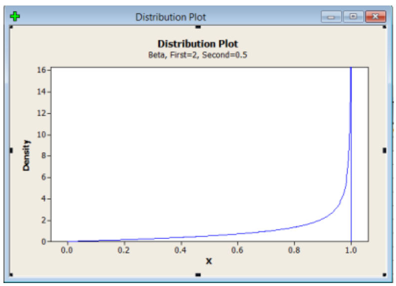
$B\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$



$B\left(2, \frac{5}{2}\right)$



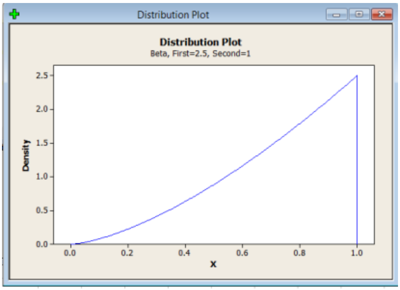
$B\left(\frac{5}{2}, 2\right)$



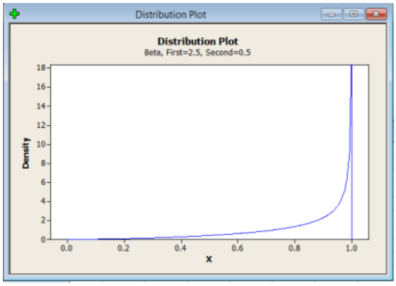
$B\left(2, \frac{1}{2}\right)$

LAMPIRAN B (lanjutan)

Grafik Fungsi Kepadatan Peluang $B(a, b)$



$B\left(\frac{5}{2}, 1\right)$



$B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

LAMPIRAN C

Data Pasien Penderita Diabetes Melitus Januari 2016 – Desember 2017

Pasien ke-	**Tanggal Masuk**	**Tanggal Keluar**	**Waktu *Ketahanan hidup***	**Usia**	**Jenis Kelamin**	**Status**	**Penyakit Penyerta**	**Tekanan Darah**
1	05/02/16	07/02/16	2	60	P	Obat Jalan	Tidak ada	Normal
2	14/05/16	16/05/16	2	68	L	Obat Jalan	Tidak ada	Hipertensi
3	20/05/16	22/05/16	2	49	L	Obat Jalan	1	Hipertensi
4	20/01/16	23/01/16	3	60	P	Obat Jalan	1	Normal
5	12/02/16	15/02/16	3	57	P	Meninggal	2	Hipertensi
6	10/06/16	14/06/16	3	54	P	Obat Jalan	1	Normal
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
409	05/02/16	29/12/17	693	52	P	Obat Jalan	1	Normal
410	01/02/16	26/12/17	694	64	L	Obat Jalan	2	Normal

LAMPIRAN D

Perhitungan untuk Uji *Mann* Data t_i

i	t_i	$\ln t_i$	$\ln\left(1-\frac{i-0,5}{f+0,25}\right)$	Z_i	M_i	$\frac{\ln t_{i+1}-\ln t_i}{M_i}$
1	2	0,693147	-0,001219512	-6,7093	1,099834	0
2	2	0,693147	-0,003663008	-5,60947	0,512049	0
3	2	0,693147	-0,006112488	-5,09742	0,337698	1,200671988
4	3	1,098612	-0,008567984	-4,75972	0,252543	0
5	3	1,098612	-0,011029524	-4,50718	0,201902	0
6	3	1,098612	-0,013497137	-4,30528	0,168288	0
7	3	1,098612	-0,015970855	-4,13699	0,144337	0
8	3	1,098612	-0,018450708	-3,99265	0,126402	2,275928459
9	4	1,386294	-0,020936725	-3,86625	0,112467	0
10	4	1,386294	-0,023428938	-3,75378	0,101328	0
11	4	1,386294	-0,025927378	-3,65246	0,092218	0
12	4	1,386294	-0,028432076	-3,56024	0,084631	2,636667892
13	5	1,609438	-0,030943063	-3,47561	0,078213	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
405	674	6,51323	-4,267566875	1,451044	0,043796	0,067653895
406	676	6,516193	-4,458622112	1,49484	0,051661	0,17105051
407	682	6,52503	-4,69501089	1,5465	0,06397	0,068612988
408	685	6,529419	-5,005165818	1,610471	0,086456	0,134300915
409	693	6,54103	-5,457150942	1,696927	0,144329	0,009990815
410	694	6,542472	-6,304448802	1,841256	0	0

LAMPIRAN E

Estimasi Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4 Menggunakan WinBUGS

1. Algoritma untuk Estimasi Parameter α_1

h. Pembentukan fungsi likelihood

```
model {
for (i in 1:n) {
 t[i] ~ dweib(1.96, mu[i])C(t.cen[i], )
log(mu[i]) <-  alpha1* x.jeniskelamin[i] +alpha2
* x.usia[i] +alpha3*x.tekanan[i];
}
```

i. Pemilihan Distribusi Prior

```
alpha1 ~ dnorm (0, 0.0001)
alpha2 ~ dnorm (0, 0.0001)
alpha3 ~ dnorm (0, 0.0001)
alpha4 ~ dnorm (0, 0.0001)
}
```

j. Data

```
list(n=410,
 t= c(390, 374, 154, 210, 10, 661, 305, 291, 310, 6,
 307, 140, 65, 192, 319, 342, 249, 682, 116, 345, 14,
 396, 285, 11, 307, 409, 28, 515, 164, 286, 122, 111,
 527, 228, NA, 5, 33, 3, 287, 200, 10, 119, 8, 140,
 299, 423, 555, 58, 361, 236, 218, 219, 93, 264, NA,
 ……………………………………………………………………………
 ……………………………………………………………………………
 ……………………………………………………………………………
 627, 471, 245, 31, 693, 13, 5, NA, 12, 261, 320, 330,
 289, 136, 396, 640, 243, 215,173, 5, 10, NA, 192, 375,
 518, 107, 102, 319, 84, 153, 196, 246, 312, 245, 149,
 143, 36, 674),
 t.cen= c(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 174, 0, 0, 0, 0, 0,0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 ……………………………………………………………………………
 ……………………………………………………………………………
 ……………………………………………………………………………
```

LAMPIRAN E (lanjutan)

Estimasi Parameter$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4 Menggunakan WinBUGS

```
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,0,
 0, 11,0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 104, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),


x.jeniskelamin=
   c(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1,
   0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0,
   1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1,
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
   1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1,
   1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0),

x.usia=
   c(47, 50, 72, 40, 46, 53, 60, 58, 49, 50, 45, 66,
   65, 65, 40, 58, 42, 61, 48, 56,71, 72, 61, 56, 44,
   33, 50, 58, 48, 60, 49, 42, 53, 58, 55, 55, 59, 58,
   85
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
   64, 68, 50, 54, 52, 70, 56, 60, 44, 44, 67, 69, 49,
   39, 38, 55,56,60, 60, 36, 49, 47, 39, 36,63, 59,
   69, 76, 59, 52, 72, 57, 76, 54, 47, 55, 69, 48),

x.tekanan=
   c(1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1,
   1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1,
   1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0,
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………
   1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0,
   1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1,
   1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1),
x.penyerta=
```

LAMPIRAN E (lanjutan)

Estimasi Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4 Menggunakan WinBUGS

```
c(2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 0, 2, 1, 2, 1, 2, 1,
1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1,
2, 1, 2, 0, 1, 0,1, 2, 0, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 1, 2,
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1,
2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 0, 1,
1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1,
1))
```

k. Inisialisasi

```
list(alpha1 =0.0, alpha2=0.0, alpha3=0.0,
alpha4=0.0)
```

LAMPIRAN F

Hasil Output $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4 Menggunakan WinBUGS

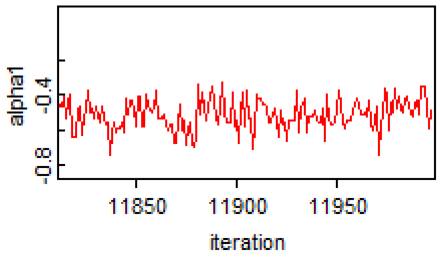
I. *Node Stat* sebagai Hasil *Output* Algoritma

Node statistics

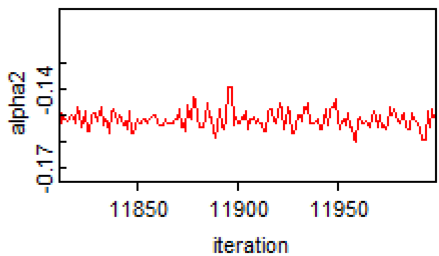
node	mean	sd	MC_error	val2.5pc	median	val97.5pc	start	sample
alpha1	-0.5236	0.1	4.037E-4	-0.6995	-0.5231	-0.348	1	100000
alpha2	-0.1514	0.003323	1.804E-5	-0.1579	-0.1514	-0.145	1	100000
alpha3	-0.6649	0.09121	3.843E-4	-0.8446	-0.6644	-0.4873	1	100000
alpha4	-2.577	0.1296	7.176E-4	-2.83	-2.577	-2.327	1	100000

II. *Trace Plot* sebagai Hasil *Output* Algoritma

(a) *Trace plot* dari estimasi parameter α_1



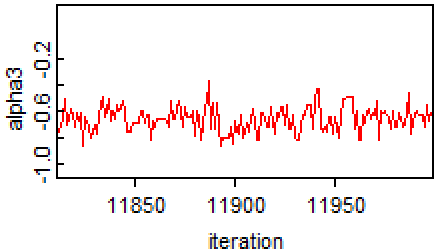
(b) *Trace plot* dari estimasi parameter α_2



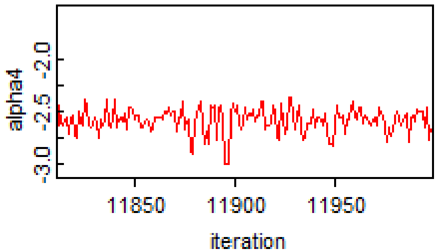
LAMPIRAN F (lanjutan)

Hasil Output $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4 Menggunakan WinBUGS

(c) *Trace plot* dari estimasi parameter α_3

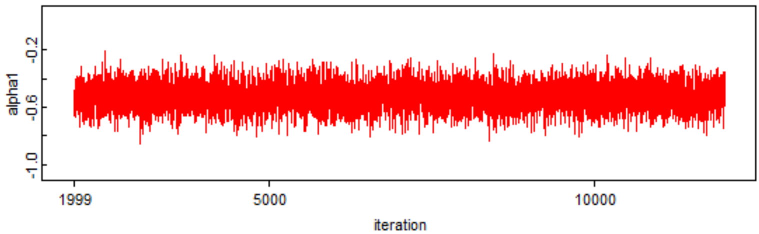


(d) *Trace plot* dari estimasi parameter α_4



III. *History Plot* sebagai Hasil *Output* Algoritma

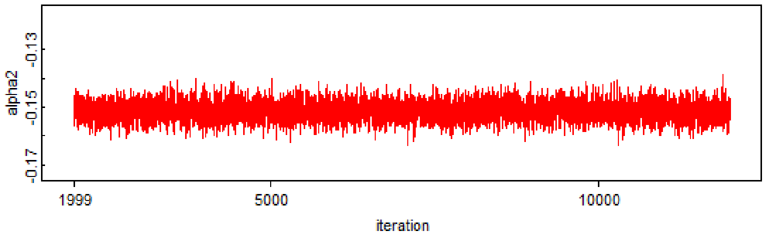
(a) *History plot* dari estimasi parameter α_1



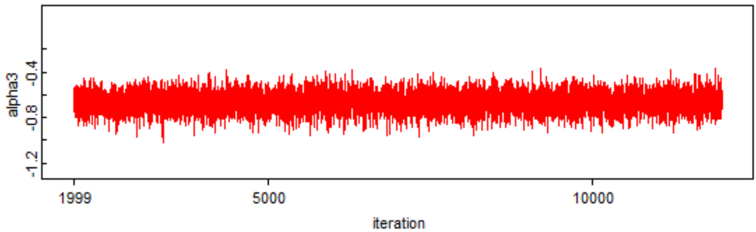
LAMPIRAN F (lanjutan)

Hasil Output $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4 Menggunakan WinBUGS

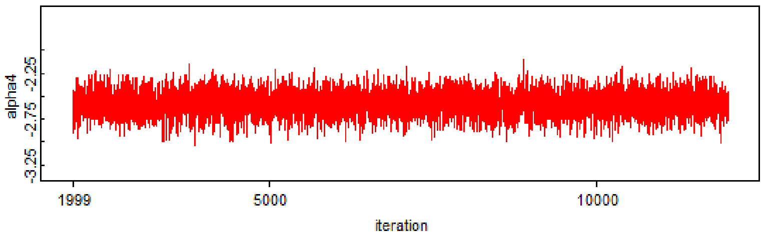
(b) *History plot* dari estimasi parameter α_2



(c) *History plot* dari estimasi parameter α_3



(d) *History plot* dari estimasi parameter α_4

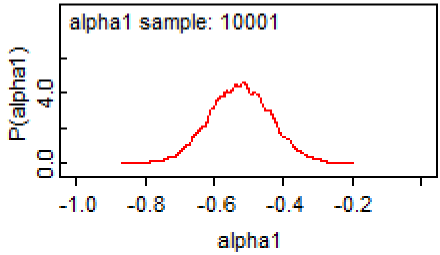


LAMPIRAN F (lanjutan)

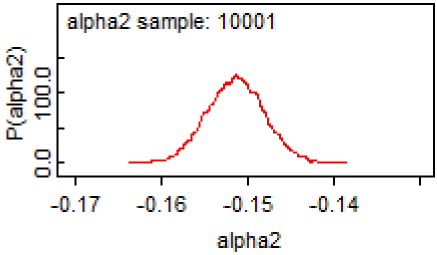
Hasil Output $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4 Menggunakan WinBUGS

IV. *Density Plot* sebagai Hasil *Output* Algoritma

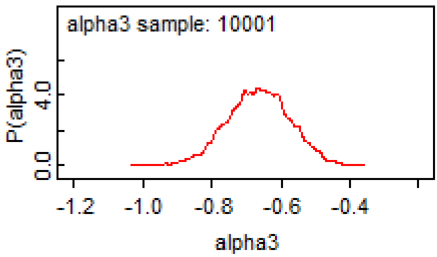
(a) *Density plot* dari estimasi parameter α_1



(b) *Density plot* dari estimasi parameter α_2



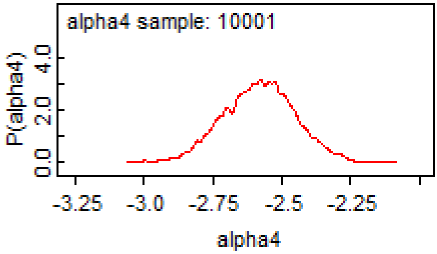
(c) *Density plot* dari estimasi parameter α_3



LAMPIRAN F (lanjutan)

Hasil Output $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, dan α_4 Menggunakan WinBUGS

(d) *Density plot* dari estimasi parameter α_4



LAMPIRAN G
BIODATA PENULIS

Penulis bernama Siti Umrokah, lahir di Mojokerto, 09 Mei 1996. Ia merupakan anak pertama dari Bapak Rasiman dan Ibu Sumiati. Mempunyai satu orang adik perempuan bernama Siti Nur Abidah. Jenjang pendidikan formal yang ditempuh oleh penulis dimulai dari TK Miftakhul Ulum (2001-2002), MI Miftakhul Ulum (2002-2008), MTs Negeri Mojokerto (2008-2011), MA Negeri Mojokerto (2011-2014). Setelah lulus dari MA Negeri Mojokerto melanjutkan studi ke jenjang S1 di Departemen Matematika ITS pada tahun 2014-sekarang melalui jalur SBMPTN tahun 2014, Departemen Matematika ITS. Penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di KM ITS yaitu HIMATIKA ITS sebagai staff Applied Science Department pada 2015-2016, LDJ Ibnu Muqlah Matematika ITS sebagai Bendahara Umum masa ibadah 2016-2017, UKM Cinta Rebana ITS sebagai Sekretaris Departemen Hubungan Luar (HUBLU) masa jabatan 2016-2017. Sampai sekarang, penulis masih aktif dalam organisasi ekstra kampus dan menjabat sebagai Kepala Departemen Kaderisasi PMII1011. Selain itu penulis juga pernah mengikuti serangkaian kepanitian, yaitu kepanitian Bimbingan Belajar Super Camp sebagai tim akademik, sebagai divisi acara pada OMITS 2017, dan kepanitian Festival Banjari ITS. Hal – hal yang perlu didiskusikan mengenai penelitian ini dapat didiskusikan melalui email penulis yaitu umrokah14@mhs.matematika.its.ac.id.