



TUGAS AKHIR - SM141501

**KONTROL OPTIMAL MODEL PENYAKIT
TUBERKULOSIS MENGGUNAKAN PRINSIP
MINIMUM PONTRYAGIN UNTUK
MEMINIMALKAN JUMLAH INDIVIDU YANG
TERINFEKSI**

**Feri Winata
NRP 06111440000006**

**Dosen Pembimbing
Dr.Dra. Mardlijah, M.T
Dr. Drs. Hariyanto, M.Si**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018**



FINAL PROJECT - SM141501

**OPTIMAL CONTROL OF THE TUBERCULOSIS DISEASE
MODEL USING THE MINIMUM PRINCIPLE OF PONTRYGIN
TO MINIMIZE THE NUMBER OF INDIVIDUAL INFECTED**

**Feri Winata
NRP 06111440000006**

**Supervisor
Dr.Dra. Mardlijah, M.T
Dr. Drs. Hariyanto, M.Si**

**DEPARTMEN OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics, Computation, and Data Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2018**

LEMBAR PENGESAHAN

**KONTROL OPTIMAL MODEL PENYAKIT
TUBERKULOSIS MENGGUNAKAN PRINSIP
MINIMUM PONTRYAGIN UNTUK MEMINIMALKAN
JUMLAH INDIVIDU YANG TERINFEKSI**

***OPTIMAL CONTROL OF THE TUBERCULOSIS
DISEASE MODEL USING THE MINIMUM PRINCIPLE
OF PONTRYAGIN TO MINIMIZE THE NUMBER OF
INDIVIDUALS INFECTED***

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

FERI WINATA

NRP. 06111440000006

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,

Dr. Drs. Hariyanto, M.Si.

NIP. 19530414 198203 1 002

Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

NIP. 19670114 199102 2 001

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika
FMKSD ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT

NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 06 Agustus 2018

**KONTROL OPTIMAL MODEL PENYAKIT
TUBERKULOSIS MENGGUNAKAN PRINSIP
MINIMUM PONTRYAGIN UNTUK
MEMINIMALKAN JUMLAH INDIVIDU YANG
TERINFEKSI**

Nama : Feri Winata
NRP : 0611144000006
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : Dr. Dra. Mardlijah, M.T
Dr. Drs. Hariyanto, M.Si

ABSTRAK

Dalam laporan WHO tahun 2013 diperkirakan terdapat 8.6 juta kasus tuberkulosis pada tahun 2012 dimana 1.1 juta orang (13%) diantaranya adalah pasien dengan HIV positif. Sekitar 75% dari pasien tersebut berada di wilayah Afrika. Pada tahun 2012 diperkirakan terdapat 450.000 orang yang menderita TB MDR dan 170.000 diantaranya meninggal dunia. Tuberkulosis adalah penyakit infeksius, yang menyerang penyakit parenkim paru disebabkan oleh bakteri *Mycobakterium tuberkulosis*. Pendekatan kontrol tuberkulosis dengan pengobatan kemoprofilaksis kurang efektif menggunakan vaksin. Kemoprofilaksis adalah pemberian obat untuk mencegah penularan suatu penyakit infeksi. Model matematika mengambil peranan penting dalam kontrol sistem dinamik pengendalian wabah penyakit termasuk malaria, virus SARS, dan tuberkulosis, oleh karena itu penelitian ini bermaksud untuk menyelidiki kestabilan, keterkontrolan, dari titik setimbang pada model, serta digunakan kendali untuk meminimalkan individu yang terinfeksi penyakit tuberkulosis yang menggunakan prinsip minimum pontryagin. Dengan Kontrol u_1 yang merepresentasikan tingkat pemberian vaksin pada individu yang rentan, u_2 yang merepresentasikan tingkat perawatan

sampai sembuh , u_3 merepresentasikan tingkat perawatan pada tahap aktif. Berdasarkan hasil simulasi, individu yang terinfeksi TB aktif dan dirawat mengalami penurunan dengan kontrol optimal $u_1 = 0.5666$, $u_2 = 0.6444$, u_3 hampir mendekati angka nol.

Kata Kunci : Tuberkulosis, Model Matematika Penyakit Tuberkulosis, Prinsip Minimum Pontryagin

OPTIMAL CONTROL OF THE TUBERCULOSIS DISEASE MODEL USING THE MINIMUM PRINCIPLE OF PONTRYAGIN TO MINIMIZE THE NUMBER OF INDIVIDUALS INFECTED

Name of Student : Feri Winata
NRP : 0611144000006
Department : Mathematics
Supervisor : Dr. Dra. Mardlijah, M.T
Dr. Drs. Hariyanto, M.Si

ABSTRACT

In the WHO report of 2013 it is estimated that there are 8.6 million cases of tuberculosis in 2012 where 1.1 million people (13%) of them are HIV positive patients. About 75% of these patients are in the African region. In 2012 there are an estimated 450,000 people who suffer from MDR TB and 170,000 of them die. Tuberculosis is an infectious disease, which attacks pulmonary parenchymal disease caused by the bacterium *Mycobacterium tuberculosis*. The control approach of tuberculosis with chemoprophylaxis treatment is less effective using vaccines. Chemoprophylaxis is the provision of drugs to prevent transmission of infectious diseases. The mathematical model plays an important role in the control of the dynamic control system of disease outbreaks including malaria, SARS virus, and tuberculosis, therefore this study intends to investigate the stability, control of the equilibrium point on the model, and use control to minimize the infected individuals tuberculosis using the minimum principle of pontryagin. With u_1 controls represents the rate of vaccine delivery in susceptible. u_2 represents successfully treatment rate. u_3 represent treatment rate active TB conBased on the simulation results, individuals infected with active and treated TB experience decreased with optimal Control $u_1 = 0.5666$, $u_2 = 0.6444$, u_3 almost close to zero.

Keyword : Tuberculosis, Mathematics Model of Tuberculosis Disease, Minimum Principle of Pontryagin

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum wr. wb.

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas limpahan rahmat dan karuniaNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan laporan tugas akhir dengan judul **“Kontrol Optimal Model Penyakit Tuberkulosis menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin untuk Meminimalkan Jumlah Individu Yang Terinfeksi”** ini dengan baik dan lancar tanpa halangan yang berarti.

Penelitian ini dapat berjalan dengan baik berkat bantuan dan dukungan secara moral maupun material dari banyak pihak. Atas segala bantuan dan dukungan tersebut, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Orang tua penulis beserta seluruh keluarga besar yang selalu memberikan doa, motivasi, dukungan, dan semangat kepada penulis.
2. Bapak Dr Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Ketua Departemen Matematika ITS.
3. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T dan Bapak Dr. Drs. Hariyanto, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan dan saran selama pelaksanaan penelitian tugas akhir berjalan.
4. Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc, Bapak Drs. Kamiran, M.Si, serta Ibu Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan, kritik dan saran yang membangun demi kebaikan tugas akhir ini.
5. Teman-teman Matematika 2014 yang telah mendukung dan menghibur selama penelitian tugas akhir berlangsung.
6. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan tugas akhir yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis sangat mengharapkan kritikan dan masukan sebagai pembelajaran bagi penulis untuk menjadi lebih baik. Semoga laporan ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak, khususnya bagi mahasiswa Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Akhir kata, penulis menyampaikan terima kasih atas segala kesempatan yang telah diberikan.

Wassalamualikum wr. wb.

Surabaya, Juni 2018

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
TITLE PAGE	iii
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	x
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Penyakit Tuberkulosis	6
2.3 Model Penyakit Tuberkulosis	7
2.4 Titik Keseimbangan dan Kestabilan	8
2.5 Keterkontrolan	12
2.6 Kontrol Optimal	13
2.7 Prinsip Minimum Pontryagin	13
2.8 Metode <i>Forward Backward Sweep</i>	15

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tahapan Penelitian	17
3.2 Diagram Alir Penelitian	19

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisa Model Penyakit Tuberkulosis	21
4.1.1 Menentukkkan Titik Setimbang	23
4.1.2 Analisa Kestabilan	26
4.1.3 Analisis Keterkontrolan	33
4.2 Formulasi Masalah Kontrol Optimal	41
4.3 Penyelesaian dengan Prinsip Minimum Pontryagin...	43
4.4 Solusi Numerik	48
4.2 Analisis dan Simulasi	56

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan	69
5.2 Saran	69

DAFTAR PUSTAKA	71
-----------------------------	----

LAMPIRAN	73
-----------------------	----

BIODATA PENULIS	85
------------------------------	----

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1 Parameter	23

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian.....	19
Gambar 4.1 Grafik Jumlah Individu Rentan	56
Gambar 4.2 Grafik Jumlah individu yang divaksin.....	57
Gambar 4.3 Grafik Jumlah Individu Terinfeksi TB Tahap Latent.....	58
Gambar 4.4 Grafik Jumlah Individu Terinfeksi TB Tahap Aktif.....	59
Gambar 4.5 Grafik Jumlah Individu Terinfeksi TB tahap perawatan.....	60
Gambar 4.6 Grafik kontrol optimal u_1, u_2, u_3	61
Gambar 4.7 Grafik Jumlah Individu Rentan	62
Gambar 4.8 Grafik Jumlah individu yang divaksin.....	63
Gambar 4.9 Grafik Jumlah Individu Terinfeksi TB Tahap Latent.....	64
Gambar 4.10 Grafik Jumlah Individu Terinfeksi TB Tahap Aktif.....	65
Gambar 4.11 Grafik Jumlah Individu Terinfeksi TB tahap perawatan.....	66
Gambar 4.12 Grafik kontrol optimal u_1, u_2, u_3	67

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran A Hasil Matrik Jacobian.....	65
Lampiran B Hasil Matrik Jacobian dengan E^*	67
Lampiran C Hasil Matriks M_c	68
Lampiran D Source Code Matlab	69

DAFTAR SIMBOL

- $S(t)$:Jumlah populasi yang rentan
 $V(t)$:Jumlah populasi yang divaksin
 $L(t)$:Jumlah individu yang terinfeksi Tuberkulosis pada tahap laten
 $I(t)$:Jumlah individu yang terinfeksi tuberkulosis pada tahap aktif
 $T(t)$:Jumlah individu yang terinfeksi tuberkulosis pada tahap perawatan
 Λ :Tingkat rekrutmen konstan dari individu yang rentan
 p :Tingkat dimana individu yang rentan dipindahkan ke proses vaksinasi
 μ :Tingkat kematian alami
 α :Koefisien tingkat kematian akibat penyakit pada individu dalam pada tahap aktif
 ρ :Tingkat individu yang berhasil ditangani dari tuberculosi dan kembali ke tahap laten
 γ :Tingkat pengobatan dikelas infeksi
 δ :Tingkat di mana individu meninggalkan tahap laten menjadi menular
 $\beta S(I + \rho_1 T)$:Tingkat individu rentan mendapatkan infeksi dari individu TB aktif
 β :Koefisien transmisi penyakit
 ρ_1 :Pengurangan infeksi antara individu dengan TB aktif yang dirawat
 l :Fraksi dari invidu rentan yang mendapatkan infeksi tuberkulosis yang masuk kelas TB laten
 ρ_2 :Pengurangan risiko infeksi terhadap individu yang telah divaksin.

BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini dibahas latar belakang penulisan Tugas Akhir. Di dalamnya mencakup indentifikasi rumusan permasalahan dan diberikan batasan-batasan untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Dalam laporan WHO tahun 2013 diperkirakan terdapat 8.6 juta kasus tuberkulosis pada tahun 2012 dimana 1.1 juta orang (13%) diantaranya adalah pasien dengan HIV positif. Sekitar 75% dari pasien tersebut berada di wilayah Afrika. Pada tahun 2012 diperkirakan terdapat 450.000 orang yang menderita TB MDR dan 170.000 diantaranya meninggal dunia. Pada tahun 2012 proporsi kasus TB anak di antara seluruh kasus TB secara global mencapai 6% atau 530.00 pasien TB anak pertahun, atau sekitar 8% dari total kematian yang disebabkan TB. Proporsi pasien TB paru mengalami peningkatan signifikan dari tahun 1999 sampai dengan tahun 2003 dari 7% menjadi 13% di Indonesia. Indikator proporsi pasien TB menurun dari tahun 2003 sampai tahun 2014 dan kembali meningkat pada tahun 2015 sebanyak 14% [1].

Tuberkulosis adalah penyakit infeksius, yang menyerang penyakit parenkim paru disebabkan oleh bakteri *Mycobakterium tuberkulosis*. Tuberkulosis merupakan tonjolan kecil dan keras yang berasal dari tuberkel yang terbentuk pada saat sistem kekebalan membangun tembok mengililingi bakteri dalam paru. Tuberkulosis bersifat menahun dan ditandai oleh pembentukan granuloma dan menimbulkan nekrosis jaringan. Terdapat beberapa klasifikasi Tuberkulosis paru menurut Depkes (2007) yaitu, tuberkolusis paru dan tuberkulosis ekstra paru. Tuberkulosis paru adalah tuberkulosis yang menyerang jaringan parenkim paru. Tuberkulosis ekstraparu adalah tuberkulosis yang

menyerang organ tubuh lain selain paru, misalnya selaput otak, selaput jantung, kelenjar lymfe, tulang, persendian, kulit, usus ginjal, saluran kencing, dan lain lain [2].

Penyakit tuberkulosis dapat menyebar melalui batuk atau bersin. Penderita menyebarkan kuman ke udara dalam bentuk droplet (percikan dahak). Droplet mengandung kuman yang dapat bertahan di udara pada suhu kamar selama beberapa jam. Peningkatan kasus tuberkulosis disebabkan oleh beberapa faktor yaitu meningkatnya penyebaran HIV, kurangnya program kesehatan masyarakat, munculnya strain resisten obat bakteri tuberkulosis dan infeksi ulang eksogen, dimana individu yang terinfeksi secara laten memperoleh infeksi baru dari individu menular lainnya[2].

Pendekatan kontrol tuberkulosis dengan pengobatan kemoprofilaksis kurang efektif menggunakan vaksin. Kemoprofilaksis adalah pemberian obat untuk mencegah penularan suatu penyakit infeksi. Model matematika mengambil peranan penting dalam kontrol sistem dinamik pengendalian wabah penyakit termasuk malaria, virus SARS, dan tuberkulosis. Dalam tugas akhir ini penulis akan membahas “ Kontrol Optimal Model Penyakit Tuberkulosis menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin untuk Meminimalkan Jumlah Individu yang Terinfeksi Penyakit Tuberkulosis “. Penelitian ini bermaksud untuk menyelidiki kestabilan, keterkontrolan dari titik setimbang pada model, serta digunakan kendali untuk meminimalkan individu yang terinfeksi penyakit tuberkulosis yang menggunakan prinsip minimum pontryagin.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, didapatkan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat kestabilan dan keterkontrolan, dari model matematika penyebaran penyakit Tuberkulosis?
2. Bagaimana hasil simulasi kontrol optimal untuk meminimalkan individu yang terinfeksi penyakit

Tuberkulosis menggunakan prinsip minimum pontryagin?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini dibatasi sebagai berikut:

1. Model yang digunakan menggunakan model dari Liu and Zhang.
2. Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin untuk mencari kontrol optimalnya.
3. Simulasi menggunakan matlab.

1.4 Tujuan

Tujuan Tugas Akhir ini adalah:

1. Mengetahui sifat kestabilan, keterkontrolan dari model matematika penyakit Tuberkulosis.
2. Mengetahui hasil simulasi kontrol optimal untuk meminimalkan individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis menggunakan prinsip minimum pontryagin.

1.5 Manfaat

Manfaat dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Sebagai dasar pengembangan penelitian terkait dibidang kesehatan terutama untuk kendali optimal dari penyebaran penyakit TBC.
2. memberikan metode alternatif untuk menyelesaikan kendali optimal dari penyebaran penyakit TBC.

1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir

Sistematika penulisan dalam laporan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan Tugas Akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan laporan Tugas Akhir.

2. BAB II : DASAR TEORI

Bab ini dibahas tentang Penelitian Terdahulu, Penyakit Tuberkulosis, Model Penyakit Tuberkulosis, Titik Keseimbangan dan Kestabilan, Keterkontrolan, Kontrol

Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, Runge-Kutta orde 4.

3. **BAB III : METODOLOGI**

Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

4. **BAB IV : ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Pada bab ini akan ditentukan kontrol optimal model penyakit tuberkulosis. Namun sebelum menentukan kontrol optimalnya, terlebih dahulu dilakukan analisa sistem terhadap model tersebut, yang meliputi mencari titik kestimbangan, analisis kestabilan, keterkontrolan. Selanjutnya dicari penyelesaian kontrol optimalnya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin yang diselesaikan secara numerik, serta hasilnya akan disimulasikan dengan menggunakan software MATLAB.

5. **BAB V : PENUTUP**

Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini dibahas tentang Penelitian Terdahulu, Penyakit Tuberkulosis, Model Penyakit Tuberkulosis, Titik Kesetimbangan dan Kestabilan, Keterkontrolan, Kontrol Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, dan Metode *Forward Backward Sweep* Runge Kutta Orde 4.

2.1 Penelitian Terdahulu

Dalam Tugas Akhir ini penulis merujuk pada beberapa penelitian-penelitian sebelumnya yang sesuai dengan topik yang diambil. Berdasarkan hasil penelitian [4] dengan judul “ *Global stability for a tuberculosis model* ” dengan menganalisis model penyakit tuberkulosis ditunjukkan bahwa R_0 menunjukkan sifat dinamika transmisi penyakit tuberkulosis, jika $R_0 \leq 1$ hanya ada titik setimbang bebas penyakit yang stabil secara asimtotik secara global dan jika $R_0 > 1$ maka terdapat titik setimbang penyakit endemic.

Dalam penelitian yang dilakukan [7] judul “ *Optimal control of transmission dynamics of tuberculosis*” menunjukkan bahwa pengendalian tuberkulosis diformulasikan dan dipecahkan sebagai masalah kontrol optimal yang menunjukkan bagaimana istilah kontrol pada kemopropilaksis harus di perkenalkan pada populasi untuk mengurangi jumlah individu dengan tuberkulosis aktif. Feedback kontrol mampu mengurangi jumlah individu dengan tuberkulosis aktif.

Dalam penelitian yang [8] dengan judul “ *Optimal intervention strategy for prevention tuberculosis using a smoking-tuberculosis model* ” menunjukkan bahwa model transmisi rokok-tuberkulosis yang dinamis di Korea Selatan dan menyelidiki pengaruh strategi pengendalian, mengenai jumlah kejadian tuberkulosis dengan menggunakan teori kontrol optimal.

2.2 Penyakit Tuberkulosis

Tuberkulosis adalah penyakit infeksius, yang menyerang penyakit parenkim paru disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Tuberkulosis merupakan tonjolan kecil dan keras yang berasal dari tuberkel yang terbentuk pada saat sistem kekebalan membangun tembok mengelilingi bakteri dalam paru. Tuberkulosis bersifat menahun dan ditandai oleh pembentukan granuloma dan menimbulkan nekrosis jaringan. Terdapat beberapa klasifikasi Tuberkulosis paru yaitu, tuberkulosis paru dan tuberkulosis ekstra paru. Tuberkulosis paru adalah tuberkulosis yang menyerang jaringan parenkim paru. Tuberkulosis ekstraparu adalah tuberkulosis yang menyerang organ tubuh lain selain paru, misalnya selaput otak, selaput janutng, kelenjar lymfe, tulang, persendian, kulit, usus ginjal, saluran kencing, dan lain lain .

Penyakit tuberkulosis dapat menyebar melalui batuk atau bersin. Penderita menyebarkan kuman ke udara dalam bentuk droplet (percikan dahak). Droplet mengandung kuman yang dapat bertahan di udara pada suhu kamar selama beberapa jam. Manusia dapat terinfeksi jika droplet tersebut terhirup ke dalam saluran pernafasan dan menyebar ke sistem pernafasan, sistem peredaran darah, serta penyebaran langsung ke bagian-bagian tubuh lainnya. Seseorang terinfeksi tuberkulosis ditentukan oleh konsentrasi droplet dalam udara dan lamanya menghirup udara tersebut. Peningkatan kasus tuberkulosis disebabkan oleh beberapa faktor yaitu meningkatnya penyebaran HIV, kurangnya program kesehatan masyarakat, munculnya strain resisten obat bakteri tuberkulosis dan infeksi ulang eksogen, dimana individu yang terinfeksi secara laten memperoleh infeksi baru dari invidu menular lainnya [2].

2.3 Model Matematika Penyakit Tuberkulosis

Model matematika penyakit tuberkulosis berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Liu and Zhang [4] adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta S(I + \rho_1 T) - (\mu + p)S \quad (2.1)$$

$$\frac{dV}{dt} = pS - \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - \mu V \quad (2.2)$$

$$\frac{dL}{dt} = l\beta S(I + \rho_1 T) + \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - (\mu + \delta)L + \rho T \quad (2.3)$$

$$\frac{dI}{dt} = (1 - l)\beta S(I + \rho_1 T) + \delta L - (\mu + \alpha + \gamma)I \quad (2.4)$$

$$\frac{dT}{dt} = \gamma I - (\mu + \rho)T \quad (2.5)$$

$$N(t) = S(t) + V(t) + L(t) + I(t) + T(t) \quad (2.6)$$

Keterangan :

$S(t)$:Jumlah populasi yang rentan

$V(t)$:Jumlah populasi yang divaksin

$L(t)$:Jumlah individu yang terinfeksi Tuberkulosis pada tahap laten

$I(t)$:Jumlah individu yang terinfeksi tuberkulosis pada tahap aktif

$T(t)$:Jumlah individu yang terinfeksi tuberkulosis pada tahap perawatan

Λ :Tingkat rekrutmen konstan dari individu yang rentan

p :Tingkat dimana individu yang rentan dipindahkan ke proses vaksinasi

μ :Tingkat kematian alami

α :Koefisien tingkat kematian akibat penyakit pada individu dalam pada tahap aktif

ρ :Tingkat individu yang berhasil ditangani dari tuberkulosis dan kembali ke tahap laten

γ :Tingkat pengobatan dikelas infeksi

δ :Tingkat di mana individu meninggalkan tahap laten menjadi menular

$\beta S(I + \rho_1 T)$:Tingkat individu rentan mendapatkan infeksi dari individu TB aktif

β :Koefisien transmisi penyakit

ρ_1 :Pengurangan infeksi antara individu dengan TB aktif yang dirawat

l :Fraksi dari invidu rentan yang mendapatkan infeksi tuberkulosis yang masuk kelas TB laten

ρ_2 :Pengurangan risiko infeksi terhadap individu yang telah divaksin.

2.4 Titik Keseimbangan dan Kestabilan

Diberikan persamaan differensial tingkat satu $\dot{x}(t) = f(x(t))$ dengan $x \in R^n$. (2.7)

Definisi 2.1

Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik keseimbangan dari suatu sistem jika $f(\bar{x}) = 0$ [11].

Pada penelitian ini akan dibahas mengenai analisis model sistem penyakit penyakit tuberkulosis yang mempunyai sistem non linier, sehingga untuk melakukan analisis kestabilannya menggunakan cara analisis transformasi kestabilan lokal disertai titik setimbang dari sistem tersebut. Untuk melakukan analisis transformasi kestabilan lokal tersebut, maka digunakan deret Taylor untuk mencari hampiran solusi disekitar titik setimbang. Untuk menganalisis kestabilan lokal tersebut, digunakan Deret Taylor untuk mencari hampiran disekitar titik setimbang. Misal $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ adalah titik setimbang dari sistem (2.7). Deret Taylor dari f disekitar titik setimbangnya yaitu (2.8):

$$f_1(x) = \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} (x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} (x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1}$$

$$f_2(x) = \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots$$

$$+ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_2}$$

⋮

$$f_n(x) = \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots$$

$$+ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_n}$$

Pendekatan linear untuk sistem (2.8) adalah

$$f_1(x) = \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots$$

$$+ \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1}$$

$$f_2(x) = \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots$$

$$+ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_2}$$

$$f_n(x) = \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots$$

$$+ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_n}$$

Dengan $R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$ disebut sebagai bagian nonlinear yang dapat diabaikan karena nilai $R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$ mendekati nol. Sistem (2.9) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 - \bar{x}_1) \\ (x_2 - \bar{x}_2) \\ \vdots \\ (x_n - \bar{x}_n) \end{pmatrix}$$

Misalkan $y_1 = x_1 - \bar{x}_1, y_2 = x_2 - \bar{x}_2, \dots, y_n = x_n - \bar{x}_n$ maka diperoleh:

Dan dinyatakan dalam bentuk matriks, maka diperoleh

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

atau dapat ditulis menjadi $\dot{x} = J(f(\bar{x}))y$. Dengan $\dot{x} = J(f(\bar{x}))y$ merupakan matriks Jacobian dari fungsi f di titik kesetimbangan \bar{x} . Berikut merupakan definisi mengenai matriks Jacobian.

Definisi 2.2

Diberikan fungsi $f = f_1, f_2, \dots, f_n$ dengan $f_1 \in C^1(E), I = 1, 2, 3, \dots, n, E \subset R^n$ dan E himpunan terbuka [11]. Matriks

$$J(f(\bar{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Dinamakan matriks jacobian dari $f(\bar{x})$

Matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$ dapat digunakan untuk mengidentifikasi sifat kestabilan sistem non linear disekitar titik ekuilibrium \bar{x} asalkan titik kesetimbangan hiperbolik [3].

Definisi 2.3

Titik kestimbangan \bar{x} dikatakan hiperbolik jika semua nilai eigen matriks jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real tak nol [3].

Definisi 2.4 [11]

Suatu titik kesetimbangan \bar{x} pada sistem persamaan differensial $\dot{x} = f(x)$ dikatakan

- i. Stabil jika semua nilai eigen matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real negatif
- ii. Tidak stabil jika semua nilai eigen matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real positif

Pada permasalahan tertentu digunakan metode lain untuk menentukan tanda pada bagian real nilai eigen λ dikarenakan kestabilan titik setimbang tidak bisa diamati langsung. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat digunakan jika kestabilan titik setimbang diamati langsung. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz adalah suatu metode untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung. Jika diketahui suatu persamaan karakteristik dengan orde ke-n sebagai berikut:

$$q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Maka susun koefisien persamaan karakteristik tersebut menjadi

Tabel 2.2 Tabel Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^n & a_0 & a_2 & a_4 \\ \lambda^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 \\ \lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^0 & a_n & & \end{array}$$

$$\text{dengan } b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1},$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

Supaya akar-akar karakteristiknya bernilai negatif pada bagian realnya, maka nilai pada kolom pertama pada Tabel

2.2 harus mempunyai tanda yang sama dengan kata lain tidak ada perubahan tanda [6].

2.5 Keterkontrolan

Keterkontrolan sistem dapat digunakan untuk menstabilkan sistem. Selain itu, solusi permasalahan kontrol optimal mungkin tidak akan diperoleh jika sistem tidak terkontrol. Maka perlu dianalisis mengenai keterkontrolan sistem.

Teorema 2.1.

Jika terdapat persamaan matrik state sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Syarat perlu dan cukup suatu sistem dikatakan terkontrol adalah:

$$\text{Matriks } M_c = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

Mempunyai rank sama dengan n [11].

2.6 Kontrol Optimal

Pada prinsipnya, tujuan dari kendali optimal adalah menentukan sinyal atau kendali yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi konstrain, dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan (J) yang sesuai [5]. Secara umum formulasi yang diberikan pada permasalahan kendali terdiri dari:

1. Mendeskripsikan secara matematis suatu model artinya diperoleh metode matematika dari proses terjadinya pengendalian (secara umum dalam bentuk variable state).
2. Spesifikasi dari performance index.
3. Menentukan kondisi batas dan kendala yang harus dipenuhi.

Pada umumnya, masalah kendali optimal dalam bentuk ungkapan matematik dapat diformulasikan sebagai berikut, misalkan suatu sistem dinamik diberikan oleh persamaan:

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (2.9)$$

dengan kondisi batas $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$ dan $u(t)$ menyatakan pengendali keadaan pada waktu t . Dalam hal ini, masalah kendali optimal adalah mencari pengendali optimal $u^*(t)$ yang memenuhi persamaan keadaan (state) dengan syarat nilai J sebagai berikut

$$J(x) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.10)$$

Bentuk umum persamaan J diatas disebut fungsi tujuan bentuk Bolza dengan S adalah bentuk Mayer dan V adalah bentuk Lagrange. Dengan kondisi sistem yaitu waktu akhir tetap atau bebas dan keadaan (state) akhir seluruhnya atau sebagian bebas atau tetap.

2.7 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip minimum pontryagin merupakan salah satu cara dalam menyelesaikan masalah kendali optimal dengan kendala yang terbatas. Metode tersebut digunakan untuk memperoleh kendali terbaik pada sistem dinamik dari state awal hingga akhir yaitu dengan meminimumkan fungsi objektif. Dengan memperhatikan persamaan keadaan dan fungsi tujuan yang telah diberikan pada (2.7.1) dan (2.7.2), langkah dalam menyelesaikan masalah kendali optimal adalah sebagai berikut:

a. Langkah 1

Membentuk fungsi Hamiltonian (H) sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \\ &= V(x(t), u(t), \lambda(t), t) \\ &+ \lambda'(t)f(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

b. Langkah 2

Meminimumkan H terhadap $u(t)$ dengan cara:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u(t)} \right)_* = 0$$

Sehingga diperoleh kondisi stasioner $u^*(t)$.

c. Langkah 3

Dengan menggunakan hasil yang diperoleh dari langkah 2, akan didapatkan fungsi Langrangian yang optimal, H^* , yaitu $H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$

d. Langkah 4

Selesaikan $2n$ persamaan diferensial, dengan n adalah jumlah variabel state : $x^* = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_*$

Dan persamaan costate yaitu $\lambda^* = \left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right)_*$ dengan kondisi batas yang diberikan oleh keadaan awal dan transversality. Kondisi batas secara umum sebagai berikut:

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{t_f} \delta_{t_f} + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_* - \lambda^*\right]'_{t_f} \delta x_f = 0$$

e. Langkah 5

Substitusi hasil yang diperoleh dari langkah 4 ke dalam persamaan $u^*(t)$ pada langkah 3 untuk mendapatkan kendali optimal yang dicari.

Dalam menentukan kondisi transversality yang sesuai, terdapat macam-macam kondisi batas, yaitu [5]:

a. *Fixed-final time and fixed-final state system*

Waktu akhir dan state saat waktu akhir telah diketahui atau ditentukan.

$$x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$$

b. *Free-final time and fixed-final state system*

Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state saat waktu akhir telah ditentukan atau diketahui.

$$x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f, \left(H + \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{*t_f} = 0$$

c. *Fixed-final time and free-final state system*

Waktu akhir telah ditentukan atau diketahui sedangkan state saat waktu akhir belum diketahui atau tidak ditemukan.

$$x(t_0) = x_0, \lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{*t_f}$$

- d. *Free-final time and dependent free-final state system*
Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state saat akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan nilainya bergantung pada sesuatu

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_f) = \theta_f$$

$$\left(\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_* + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) - \lambda^*(t) \right]'_{*} \dot{\theta}(t) \right)_{t_f} = 0$$

- e. *Free-final time and independent free-final state system*

Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan nilainya tidak bergantung pada sesuatu.

$$x(t_0) = x_0$$

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_* = 0, \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) - \lambda^*(t) \right)_{*t_f} = 0$$

2.8 Metode *Forward Backward Sweep Runge Kutta* Orde 4

Persamaan diferensial biasa secara numerik dapat diselesaikan oleh beberapa metode salah satunya Forward backward sweep Runge Kutta orde 4. Metode Forward backward sweep Runge Kutta orde 4 mempunyai alur penyelesaian secara maju dan mundur. Hal ini dikarenakan dalam suatu sistem persamaan diferensial, terdapat nilai awal dan persamaan yang diketahui nilai akhirnya. Sehingga alur pengerjaannya adalah menyelesaikan persamaan yang diketahui nilai awalnya terlebih dahulu dengan alur maju,

kemudian menyelesaikan persamaan diferensial yang lain yang diketahui nilai akhirnya secara mundur. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial yang terdiri dari dua persamaan diferensial, dimana persamaan pertama diketahui nilai awal dan persamaan kedua diketahui nilai akhirnya, dan t bernilai $t_0 \leq t \leq t_f$ secara matematika dapat dituliskan sebagai berikut [11]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, t), & x(t) &= x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, t), & y(t) &= y_0 \end{aligned}$$

Dengan titik awal $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, maka penyelesaian integrasinya akan diperoleh:

$$x_{(n+1)} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

dengan

$$k_{1,x} = hf(t_n, x_n)$$

$$k_{2,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_{1,x}\right)$$

$$k_{3,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_{2,x}\right)$$

$$k_{4,x} = hf(t_n + h, x_n + hk_{3,x})$$

Dan

$$y_{(n+1)} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y})$$

dengan

$$k_{1,y} = hf(t_n, y_n)$$

$$k_{2,y} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{1,y}\right)$$

$$k_{3,y} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{2,y}\right)$$

$$k_{4,y} = hf(t_n + h, y_n + hk_{3,y})$$

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah dan data yang digunakan dalam penyelesaian masalah dalam Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

3.1 Tahapan Penelitian

- a) Identifikasi dan Analisis Model Matematika pada Penyakit Tuberkulosis.

Model yang digunakan merupakan model yang tak linier, agar dapat diselidiki sifat kestabilannya, maka model harus dilinearisasi menggunakan deret Taylor, jika model sudah dilinearisasi, maka sifat kestabilan dapat diamati dengan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian disekitar titik setimbang. Setelah diketahui sifat kestabilannya, maka masuk ke tahap analisis keterkontrolan. Proses keterkontrolan dapat diselidiki dengan membentuk matriks keterkontrolan yang dilihat dari jumlah rank dari matriks tersebut. Untuk proses keteramatan dapat diselidiki dengan membentuk matriks keteramatan dengan jumlah rank sama dengan n sesuai matriks tersebut.

- b) Penyelesaian Kontrol Optimal Model Matematika pada Penyakit Tuberkulosis.

Implementasi kontrol optimal adalah menentukan kontrol yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi kestrains, dengan tujuan memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan (J). Metode prinsip minimum Pontryagin digunakan untuk penyelesaian kontrol optimal model matematika penyakit tuberkulosis. Metode tersebut digunakan untuk memperoleh kendali terbaik pada sistem dinamik dari state awal hingga akhir yaitu dengan

meminimumkan fungsi objektif. Dengan memperhatikan persamaan keadaan dan fungsi tujuan. Langkah-langkah metode prinsip minimum pontryagin adalah sebagai berikut:

1. Mendeskripsikan secara matematis suatu model matematika.
2. Membentuk fungsi Hamiltonian
3. Menentukan persamaan state dan costate
4. Menentukan kondisi batas dan kendala yang harus dipenuhi.
5. Menentukan kontrol optimal
6. Simulasi menggunakan metode Forward Backward Sweep Runge Kutta Orde 4
7. Analisis hasil simulasi

c) Simulasi.

Persamaan diferensial biasa secara numerik dapat diselesaikan oleh beberapa metode salah satunya Forward backward sweep Runge Kutta orde 4. Metode Forward backward sweep Runge Kutta orde 4 mempunyai alur penyelesaian secara maju dan mundur yang menggunakan software MATLAB.

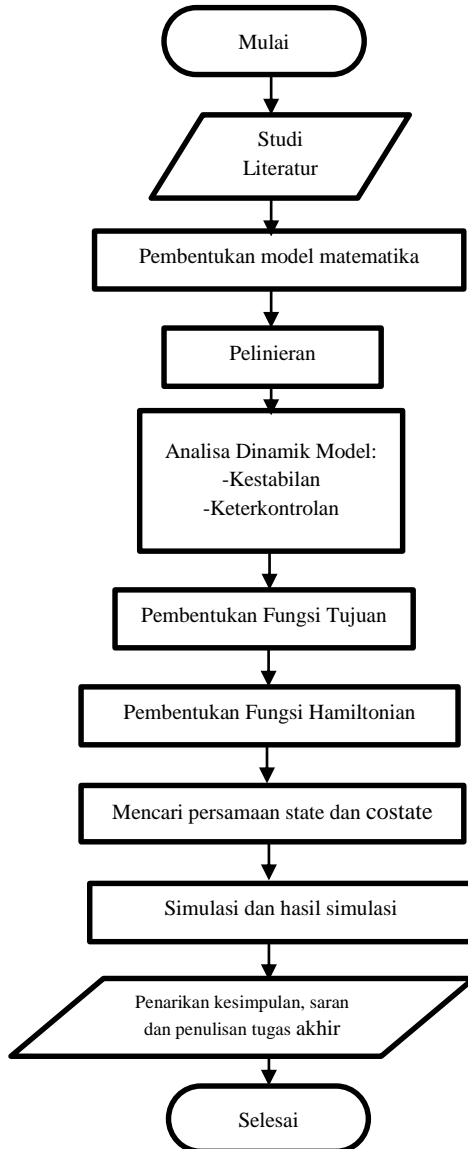
d) Analisis Hasil Simulasi.

Pada tahap dilakukan analisis terhadap hasil simulasi yang diberikan pada tahap sebelumnya yang menggunakan metode Forward backward sweep Runge Kutta orde 4.

e) Penarikan Kesimpulan, Saran dan Penulisan Tugas Akhir.

Setelah dilakukan analisis dan pembahasan maka dapat ditarik suatu kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

3.2 Diagram Alir Penelitian



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

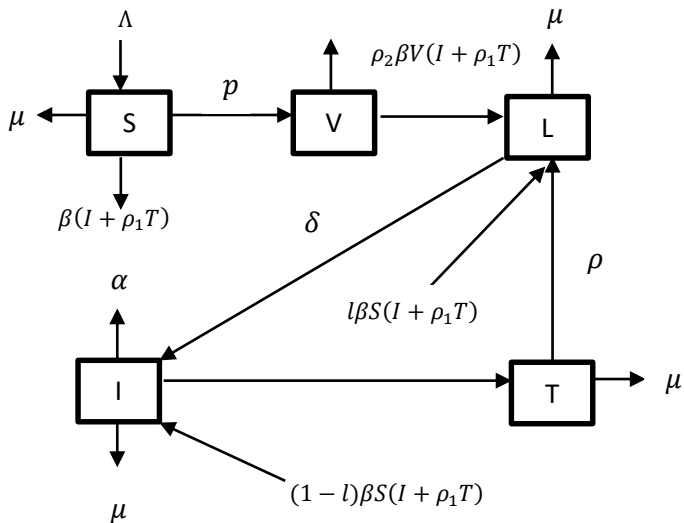
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan ditentukan kontrol optimal model penyakit tuberkulosis. Namun sebelum menentukan kontrol optimalnya, terlebih dahulu dilakukan analisa sistem terhadap model tersebut, yang meliputi mencari titik kestimbangan, analisis kestabilan, keterkontrolan. Selanjutnya dicari penyelesaian kontrol optimalnya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin yang diselesaikan secara numerik, serta hasilnya akan disimulasikan dengan menggunakan software MATLAB.

4.1 Analisa Model Matematika Penyakit Tuberkulosis

Model penyakit tuberkulosis berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Liu and Zhang [4] sebagai berikut:

Diagram *kompartment* pada model matematika penyakit Tuberkulosis.



Model matematika penyakit Tuberkulosis.

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta S(I + \rho_1 T) - (\mu + p)S \quad (4.1)$$

$$\frac{dV}{dt} = pS - \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - \mu V \quad (4.2)$$

$$\frac{dL}{dt} = l\beta S(I + \rho_1 T) + \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - (\mu + \delta)L + \rho T \quad (4.3)$$

$$\frac{dI}{dt} = (1 - l)\beta S(I + \rho_1 T) + \delta L - (\mu + \alpha + \gamma)I \quad (4.4)$$

$$\frac{dT}{dt} = \gamma I - (\mu + \rho)T \quad (4.5)$$

$$N(t) = S(t) + V(t) + L(t) + I(t) + T(t) \quad (4.6)$$

Keterangan :

$S(t)$:Jumlah populasi yang rentan

$V(t)$:Jumlah populasi yang divaksin

$L(t)$:Jumlah individu yang terinfeksi Tuberkulosis pada tahap laten

$I(t)$:Jumlah individu yang terinfeksi tuberkulosis pada tahap aktif

$T(t)$:Jumlah individu yang terinfeksi tuberkulosis pada tahap perawatan

Λ :Tingkat rekrutmen konstan dari individu yang rentan

p :Tingkat dimana individu yang rentan dipindahkan ke proses vaksinasi

μ :Tingkat kematian alami

α :Koefisien tingkat kematian akibat penyakit pada individu dalam pada tahap aktif

ρ :Tingkat individu yang berhasil ditangani dari tuberculosi dan kembali ke tahap laten

γ :Tingkat pengobatan dikelas infeksi

δ :Tingkat di mana individu meninggalkan tahap laten menjadi menular

$\beta S(I + \rho_1 T)$:Tingkat individu rentan mendapatkan infeksi dari individu TB aktif

β :Koefisien transmisi penyakit

ρ_1 :Pengurangan infeksi antara individu dengan TB aktif yang dirawat

l :Fraksi dari invidu rentan yang mendapatkan infeksi tuberkulosis yang masuk kelas TB laten

ρ_2 :Pengurangan risiko infeksi terhadap individu yang telah divaksin.

Berikut adalah parameter yang digunakan berdasarkan [10],

Tabel 4.1 Parameter[10]

Parameter	Value	Satuan
Λ	1428	$person\ year^{-1}$
β	0.003	$person^{-1}\ year^{-1}$
ρ_1	0.25	none
μ	$\frac{1}{70}$	$year^{-1}$
ρ_2	0.3	none
l	0.9	none
δ	0.00368	$year^{-1}$
α	0.17	$year^{-1}$
$u_1\max$	1	none
$u_2\max$	1	$year^{-1}$
$u_3\max$	1	none

4.1.1 Menentukan Titik Setimbang

Menentukan titik setimbang pada model penyakit tuberkulosis dapat diperoleh pada saat persamaan (4.1) – (4.6) bernilai nol.

$$0 = \Lambda - \beta S(I + \rho_1 T) - (\mu + p)S \quad (4.7)$$

$$0 = pS - \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - \mu V \quad (4.8)$$

$$0 = l\beta S(I + \rho_1 T) + \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - (\mu + \delta)L + \rho T \quad (4.9)$$

$$0 = (1 - l)\beta S(I + \rho_1 T) + \delta L - (\mu + \alpha + \gamma)I \quad (4.10)$$

$$0 = \gamma I - (\mu + \rho)T \quad (4.11)$$

Berdasarkan persamaan (4.7)-(4.11) didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit dengan $\bar{E}_0 = (\bar{S}_0, \bar{V}_0, \bar{L}_0, \bar{I}_0, \bar{T}_0)$ terjadi pada saat $\bar{L}_0 = 0, \bar{I}_0 = 0, \bar{T}_0 = 0$. Sehingga $\bar{S}_0 = \frac{\Lambda}{\mu + p}$, $\bar{V}_0 = \frac{pS}{\mu}$. Serta berdasarkan persamaan (4.7)-(4.11) titik kesetimbangan endemic $E^* = (S^*, V^*, L^*, I^*, T^*)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

Dengan menggunakan persamaan (4.11) maka didapatkan: $T^* = \frac{\gamma I}{(\mu + \rho)}$, kemudian selanjutnya di dapatkan T^* , kemudian T^* di substitusi ke persamaan (4.7), kemudian didapatkan S^* sebagai berikut:

$$S^* = \frac{\Lambda}{\beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu + p}$$

Selanjutnya di dapatkan S^* , kemudian S^* di substitusi ke persamaan (4.8), kemudian didapatkan V^* sebagai berikut:

$$V^* = \frac{p \frac{\Lambda}{\beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu + p}}{\rho_2 \beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu}$$

Selanjutnya di dapatkan V^* , kemudian V^* di substitusi ke persamaan (4.9), kemudian didapatkan L^* sebagai berikut:

$$L^* = \frac{l\beta \frac{\Lambda}{\beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu + p} \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right)}{\mu + \delta} + \frac{p \frac{\Lambda}{\beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu + p} \rho_2 \beta \frac{\Lambda}{\rho_2 \beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu} \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \rho \frac{\gamma I}{(\mu + \rho)}}{\mu + \delta}$$

Selanjutnya di dapatkan L^* , kemudian L^* di substitusi ke persamaan (4.10), kemudian didapatkan I^* sebagai berikut:

$$I^* = \frac{(1-l) \frac{\Lambda}{\beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu + p} \rho_1 \frac{\gamma I}{(\mu + \rho)}}{(\mu + \alpha + \gamma) - (1-l) \frac{\Lambda}{\beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu + p}} + \frac{\delta \frac{l\beta \frac{\Lambda}{\beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu + p} \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right)}{\mu + \delta}}{(\mu + \alpha + \gamma) - (1-l) \frac{\Lambda}{\beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu + p}} + \frac{\delta \frac{p \frac{\Lambda}{\beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu + p} \rho_2 \beta \frac{\Lambda}{\rho_2 \beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu} \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \rho \frac{\gamma I}{(\mu + \rho)}}{\mu + \delta}}{(\mu + \alpha + \gamma) - (1-l) \frac{\Lambda}{\beta \left(I + \frac{\rho_1 \gamma I}{(\mu + \rho)} \right) + \mu + p}}$$

4.1.2 Analisa Kestabilan

Setelah diperoleh titik setimbang dari sistem dinamik model penyakit tuberkulosis, langkah selanjutnya menganalisis kestabilan dari sistem. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui kestabilan sistem. Sistem dinamik model penyakit tuberkulosis merupakan model sistem tak linier sehingga dibutuhkan pelinieran disekitar titik setimbang tersebut.

Untuk menganalisis kestabilan pada sistem model penyakit tuberkulosis, dilakukan pendekatan terhadap deret Taylor seperti persamaan (2.8) sebagai berikut:

$$f_1(S, V, L, I, T) = \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} (S - \bar{S}) + \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} (V - \bar{V}) \\ + \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} (L - \bar{L}) + \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} (I - \bar{I}) \\ + \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} (T - \bar{T})$$

$$f_2(S, V, L, I, T) = \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} (S - \bar{S}) + \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} (V - \bar{V}) \\ + \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} (L - \bar{L}) + \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} (I - \bar{I}) \\ + \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} (T - \bar{T})$$

$$f_3(S, V, L, I, T) = \frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} (S - \bar{S}) + \frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} (V - \bar{V}) \\ + \frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} (L - \bar{L}) + \frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} (I - \bar{I}) \\ + \frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} (T - \bar{T})$$

$$f_4(S, V, L, I, T) = \frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} (S - \bar{S}) + \frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} (V - \bar{V}) \\ + \frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} (L - \bar{L}) + \frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} (I - \bar{I}) \\ + \frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} (T - \bar{T})$$

$$f_5(S, V, L, I, T) = \frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} (S - \bar{S}) + \frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} (V - \bar{V}) \\ + \frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} (L - \bar{L}) + \frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} (I - \bar{I}) \\ + \frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} (T - \bar{T})$$

Selanjutnya didefinisikan persamaan (4.12), seperti persamaan berikut:

$$\hat{S} = S - \bar{S}$$

$$\hat{V} = V - \bar{V}$$

$$\hat{L} = L - \bar{L}$$

$$\hat{I} = I - \bar{I}$$

$$\hat{T} = T - \bar{T}$$

Dengan memisalkan

$$\dot{S} = f_1(S, V, L, I, T)$$

$$\dot{V} = f_2(S, V, L, I, T)$$

$$\dot{L} = f_3(S, V, L, I, T)$$

$$\dot{I} = f_4(S, V, L, I, T)$$

$$\dot{T} = f_5(S, V, L, I, T)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (4.12) pada persamaan $f_1(S, V, L, I, T)$, $f_2(S, V, L, I, T)$, $f_3(S, V, L, I, T)$, $f_4(S, V, L, I, T)$,

$f_5(S, V, L, I, T)$, maka didapatkan:

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= f_1(S, V, L, I, T) \\
 &= \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} (\hat{S}) \\
 &+ \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} (\hat{V}) \\
 &+ \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} (\hat{L}) \\
 &+ \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} (\hat{I}) \\
 &+ \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} (\hat{T})
 \end{aligned}$$

Selanjutnya didapatkan $\dot{V} = f_2(S, V, L, I, T)$

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= f_2(S, V, L, I, T) \\
 &= \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} (\hat{S}) \\
 &+ \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} (\hat{V}) \\
 &+ \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} (\hat{L}) \\
 &+ \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} (\hat{I}) \\
 &+ \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} (\hat{T})
 \end{aligned}$$

Selanjutnya didapatkan $\dot{L} = f_3(S, V, L, I, T)$

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= f_3(S, V, L, I, T) \\
&= \frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} (\hat{S}) \\
&\quad + \frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} (\hat{V}) \\
&\quad + \frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} (\hat{L}) \\
&\quad + \frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} (\hat{I}) \\
&\quad + \frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} (\hat{T})
\end{aligned}$$

Selanjutnya didapatkan $\dot{I} = f_4(S, V, L, I, T)$

$$\begin{aligned}
\dot{I} &= f_4(S, V, L, I, T) \\
&= \frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} (\hat{S}) \\
&\quad + \frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} (\hat{V}) \\
&\quad + \frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} (\hat{L}) \\
&\quad + \frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} (\hat{I}) \\
&\quad + \frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} (\hat{T})
\end{aligned}$$

Selanjutnya didapatkan $\dot{T} = f_4(S, V, L, I, T)$

$$\begin{aligned}
\dot{T} &= f_1(S, V, L, I, T) \\
&= \frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} (\hat{S}) \\
&\quad + \frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} (\hat{V}) \\
&\quad + \frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} (\hat{L}) \\
&\quad + \frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} (\hat{I}) \\
&\quad + \frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} (\hat{T})
\end{aligned}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk matrik jacobian maka diperoleh,

$$\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{V} \\ \dot{L} \\ \dot{I} \\ \dot{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial V} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial L} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial I} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial T} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial V} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial L} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial I} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial T} \\ \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial V} & \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial L} & \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial I} & \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial T} \\ \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial V} & \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial L} & \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial I} & \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial T} \\ \frac{\partial f_5(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_5(\bar{x})}{\partial V} & \frac{\partial f_5(\bar{x})}{\partial L} & \frac{\partial f_5(\bar{x})}{\partial I} & \frac{\partial f_5(\bar{x})}{\partial T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{S} \\ \hat{V} \\ \hat{L} \\ \hat{I} \\ \hat{T} \end{pmatrix}$$

Dengan mensubstitusi titik setimbang ke matrik Jacobian kemudian dari hasil tersebut diperoleh

$$\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{V} \\ \dot{L} \\ \dot{I} \\ \dot{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & 0 & c_6 & c_7 \\ c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{13} & 0 & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ 0 & 0 & 0 & c_{17} & c_{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{S} \\ \hat{V} \\ \hat{L} \\ \hat{I} \\ \hat{T} \end{pmatrix}$$

Hasil c_1, \dots, c_{18} terdapat pada lampiran A.

Langkah pertama menentukan kestabilan titik setimbang endemik adalah mengevaluasi titik setimbang $E^* = (S^*, V^*, L^*, I^*, T^*)$ pada matrik jacobian sehingga diperoleh

$$J_{E^*} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & 0 & d_6 & d_7 \\ d_8 & d_9 & d_{10} & d_{11} & d_{12} \\ d_{13} & 0 & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ 0 & 0 & 0 & d_{17} & d_{18} \end{pmatrix}$$

d_1, \dots, d_{18} terdapat pada lampiran B.

Berdasarkan matrik J_{E^*} dapat dibentuk persamaan karakteristik dengan menggunakan $\det(\lambda I - J_{E^*}) = 0$, yaitu

$$\begin{aligned} & \lambda^5 + \lambda^4(-d_5 - d_{15} - d_{18}) \\ & + \lambda^3(d_1d_5 + d_1d_{10} + d_5d_{10} + d_5d_{15} + d_5d_{18} \\ & + d_{10}d_{15} + d_{10}d_{18} - d_{10} + d_1d_{15} + d_1d_{18} - d_1 \\ & + d_{15}d_{18} - d_{17}d_{16} + d_{14}d_{11}) \\ & + \lambda^2(-d_1d_5d_{10} - d_1d_5d_{15} - d_1d_5d_{18} \\ & - d_1d_{10}d_{15} - d_1d_{10}d_{18} - d_5d_{10}d_{15} - d_5d_{10}d_{18} \\ & - d_5d_{15}d_{18} + d_5d_{17}d_{16} - d_{10}d_{15}d_{18} \\ & + d_{10}d_{17}d_{16} - d_1d_{15}d_{18} + d_1d_{17}d_{16} + d_2 \\ & + d_{13}d_{18} - d_3d_4d_9 - d_3d_{13}d_{17} + d_{14}d_1d_{11} \\ & + d_{14}d_{11}d_5 + d_{14}d_1d_{18} - d_{14}d_{12}d_{17} \\ & + d_9d_4d_6) \\ & + \lambda(d_3d_4d_9d_{10} + d_3d_4d_9d_{15} - d_3d_8d_{14}d_{17} \\ & + d_3d_{13}d_5d_{17} + d_3d_{13}d_{10}d_{17} + d_2d_8d_{14} \\ & - d_2d_5d_{13}d_{18} - d_2d_{13}d_{10}d_{18} + d_1d_5d_{10} \\ & + d_{18}d_1d_5d_{10} + d_1d_5d_{15}d_{18} - d_1d_5d_{17} \\ & + d_1d_{10}d_{15}d_{18} - d_1d_{10}d_{17}d_{16} + d_5d_{10}d_{15}d_{18} \\ & - d_5d_{10}d_{17}d_{16} - d_5d_1d_{11}d_{14} - d_1d_{11}d_{18}d_{14} \\ & + d_1d_{12}d_{17}d_{14} - d_5d_4d_{11}d_{18} + d_5d_{12}d_{17} \\ & + d_1d_9d_{14}d_6 + d_9d_{14} - d_9d_{14}d_{17}d_7) \\ & - d_1d_5d_{10}d_{15}d_{18} + d_1d_5d_{10}d_{17}d_{16} \\ & - d_3d_4d_9d_{10}d_{15} + d_3d_4d_9d_{14}d_{11} \\ & + d_3d_8d_5d_{14}d_{17} - d_2d_5d_8d_{14}d_{18} \\ & + c_2c_4c_5c_{14}c_{18} + c_5c_{10}c_{13}c_{18}c_2 + c_5c_1c_{11}c_{14}c_{18} \\ & = 0 \end{aligned}$$

Misalkan $D_0\lambda^5 + D_1\lambda^4 + D_2\lambda^3 + D_3\lambda^2 + D_4\lambda + D_5 = 0$

$$D_0 = 1$$

$$D_1 = -d_5 - d_{15} - d_{18}$$

$$D_2 = (d_1d_5 + d_1d_{10} + d_5d_{10} + d_5d_{15} + d_5d_{18} + d_{10}d_{15} \\ + d_{10}d_{18} - d_{10} + d_1d_{15} + d_1d_{18} - d_1 + d_{15}d_{18} \\ - d_{17}d_{16} + d_{14}d_{11})$$

$$D_3 = -d_1d_5d_{10} - d_1d_5d_{15} - d_1d_5d_{18} - d_1d_{10}d_{15} - d_1d_{10}d_{18} \\ - d_5d_{10}d_{15} - d_5d_{10}d_{18} - d_5d_{15}d_{18} + d_5d_{17}d_{16} \\ - d_{10}d_{15}d_{18} + d_{10}d_{17}d_{16} - d_1d_{15}d_{18} \\ + d_1d_{17}d_{16} + d_2 + d_{13}d_{18} - d_3d_4d_9 \\ - d_3d_{13}d_{17} + d_{14}d_1d_{11} + d_{14}d_{11}d_5 \\ + d_{14}d_1d_{18} - d_{14}d_{12}d_{17} + d_9d_4d_6$$

$$D_4 = (d_3d_4d_9d_{10} + d_3d_4d_9d_{15} - d_3d_8d_{14}d_{17} + d_3d_{13}d_5d_{17} \\ + d_3d_{13}d_{10}d_{17} + d_2d_8d_{14} - d_2d_5d_{13}d_{18} \\ - d_2d_{13}d_{10}d_{18} + d_1d_5d_{10} + d_{18}d_1d_5d_{10} \\ + d_1d_5d_{15}d_{18} - d_1d_5d_{17} + d_1d_{10}d_{15}d_{18} \\ - d_1d_{10}d_{17}d_{16} + d_5d_{10}d_{15}d_{18} - d_5d_{10}d_{17}d_{16} \\ - d_5d_1d_{11}d_{14} - d_1d_{11}d_{18}d_{14} + d_1d_{12}d_{17}d_{14} \\ - d_5d_4d_{11}d_{18} + d_5d_{12}d_{17} + d_1d_9d_{14}d_6 \\ + d_9d_{14} - d_9d_{14}d_{17}d_7)$$

$$D_5 = -d_1d_5d_{10}d_{15}d_{18} + d_1d_5d_{10}d_{17}d_{16} - d_3d_4d_9d_{10}d_{15} \\ + d_3d_4d_9d_{14}d_{11} + d_3d_8d_5d_{14}d_{17} \\ - d_2d_5d_8d_{14}d_{18} + c_2c_4c_5c_{14}c_{18} \\ + c_5c_{10}c_{13}c_{18}c_2 + c_5c_1c_{11}c_{14}c_{18}$$

Titik setimbang endemik model matematika penyakit Tuberkulosis akan bersifat stabil asimtotis jika akar-akar karakteristiknya bernilai negatif pada bagian realnya, maka nilai pada kolom pertama berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz harus bernilai positif.

$$\begin{array}{l|l} \lambda^5 & D_0 \quad D_2 \quad D_4 \\ \lambda^4 & D_1 \quad D_3 \quad D_5 \\ \lambda^3 & b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \lambda^2 & c_1 \quad c_2 \quad c_3 \\ \lambda^1 & d_1 \quad d_2 \quad d_3 \end{array}$$

$b_1 = \frac{D_1 D_2 - D_0 D_3}{D_1}$, b_1 akan bernilai positif jika dan hanya jika $D_1 D_2 > D_0 D_3$

Kemudian $b_2 = \frac{D_1 D_4 - D_0 D_5}{D_1}$ dengan diketahui b_2 maka

$c_1 = \frac{b_1 D_3 - D_1 b_2}{b_1} = D_3 - D_1 \frac{D_1 D_4 - D_0 D_5}{D_1 D_2 - D_0 D_3}$, c_1 akan bernilai positif jika dan hanya jika $b_1 D_3 > D_1 b_2$

$c_2 = \frac{b_1 D_5}{b_1} = D_5$, dengan diketahui c_2 maka

$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$, d_1 akan bernilai positif jika dan hanya jika $c_1 b_2 > b_1 c_2$.

4.1.3 Analisis Keterkontrolan

Untuk melakukan analisis keterkontrolan pada model penyakit tuberkulosis akan dibentuk matriks \bar{B} dengan langkah sebagai berikut:

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial u_1} \end{pmatrix}$$

Dengan $\bar{x} = (\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})$, kemudian dilakukan pemisalan matrik B sehingga diperoleh matrik B sebagai berikut:

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_5 & b_6 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Berdasarkan Teorema 2.1 dan matrik Jacobian \bar{A} maka dapat disusun matrik keterkontrolan (M_c) sebagai berikut:

$$M_c = (\bar{B} | \bar{A}\bar{B} | \bar{A}^2\bar{B} | \bar{A}^3\bar{B} | \bar{A}^4\bar{B})$$

Untuk matrik $\bar{A}\bar{B}$ diperoleh,

$$\bar{A}\bar{B} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & 0 & c_6 & c_7 \\ c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{13} & 0 & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ 0 & 0 & 0 & c_{17} & c_{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1b_1 & c_3b_5 & c_2b_4 + c_3b_6 \\ c_4b_1 + c_5b_2 & c_7b_5 & c_6b_4 + c_7b_6 \\ c_8b_1 + c_9b_2 & c_{10}b_3 + c_{12}b_5 & c_{11}b_4 + c_{12}b_6 \\ c_{13}b_1 & c_{14}b_3 + c_{16}b_5 & c_{15}b_4 + c_{16}b_6 \\ 0 & c_{18}b_5 & c_{17}b_4 + c_{18}b_6 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Dengan memisalkan nilai dari matrik \overline{AB} sehingga diperoleh:

$$d_1 = c_1b_1$$

$$d_2 = c_3b_5$$

$$d_3 = c_2b_4 + c_3b_6$$

$$d_4 = c_4b_1 + c_5b_2$$

$$d_5 = c_7b_5$$

$$d_6 = c_6b_4 + c_7b_6$$

$$d_7 = c_8b_1 + c_9b_2$$

$$d_8 = c_{10}b_3 + c_{12}b_5$$

$$d_9 = c_{11}b_4 + c_{12}b_6$$

$$d_{10} = c_{13}b_1$$

$$d_{11} = c_{14}b_3 + c_{16}b_5$$

$$d_{12} = c_{15}b_4 + c_{16}b_6$$

$$d_{13} = c_{18}b_5$$

$$d_{14} = c_{17}b_4 + c_{18}b_6$$

Sehingga matrik \overline{AB} menjadi

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \\ d_7 & d_8 & d_9 \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{13} & d_{14} \end{pmatrix}$$

Untuk matrik $\overline{A^2B}$ diperoleh

$$\overline{A^2B} = [\overline{A}][\overline{AB}]$$

$$\overline{A^2B} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & 0 & c_6 & c_7 \\ c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{13} & 0 & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ 0 & 0 & 0 & c_{17} & c_{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \\ d_7 & d_8 & d_9 \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{13} & d_{14} \end{pmatrix}$$

$$\overline{A^2B} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_4 & e_5 & e_6 \\ e_7 & e_8 & e_9 \\ e_{10} & e_{11} & e_{12} \\ e_{13} & e_{14} & e_{15} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Dengan $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}$ adalah sebagai berikut:

$$e_1 = c_1d_1 + c_2d_{10}$$

$$e_2 = c_1d_2 + c_2d_{11} + c_3d_{13}$$

$$e_3 = c_1d_3 + c_2d_{12} + c_3d_{14}$$

$$e_4 = c_4d_1 + c_5d_4 + c_6d_{10}$$

$$e_5 = c_4d_2 + c_5d_5 + c_6d_{11} + c_7d_{13}$$

$$e_6 = c_4 d_3 + c_5 d_6 + c_6 d_{12} + c_7 d_{14}$$

$$e_7 = c_8 d_1 + c_9 d_4 + c_{10} d_7 + c_{11} d_{10}$$

$$e_8 = c_8 d_2 + c_9 d_5 + c_{10} d_8 + c_{11} d_{11} + c_{12} d_{13}$$

$$e_9 = c_8 d_3 + c_9 d_6 + c_{10} d_9 + c_{11} d_{12} + c_{12} d_{14}$$

$$e_{10} = c_{13} d_1 + c_{14} d_7 + c_{15} d_{10}$$

$$e_{11} = c_{13} d_2 + c_{14} d_8 + c_{15} d_{11} + c_{16} d_{13}$$

$$e_{12} = c_{13} d_3 + c_{14} d_9 + c_{15} d_{12} + c_{16} d_{14}$$

$$e_{13} = c_{17} d_{10}$$

$$e_{14} = c_{17} d_{11} + c_{18} d_{13}$$

$$e_{15} = c_{17} d_{12} + c_{18} d_{14}$$

Sehingga matriks $\overline{A^2B}$ diperoleh sebagai berikut

$$\overline{A^2B} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_4 & e_5 & e_6 \\ e_7 & e_8 & e_9 \\ e_{10} & e_{11} & e_{12} \\ e_{13} & e_{14} & e_{15} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya untuk matrik $\overline{A^3B}$ diperoleh

$$\overline{A^3B} = [\bar{A}][\overline{A^2B}]$$

$$\overline{A^3B} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & 0 & c_6 & c_7 \\ c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{13} & 0 & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ 0 & 0 & 0 & c_{17} & c_{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_4 & e_5 & e_6 \\ e_7 & e_8 & e_9 \\ e_{10} & e_{11} & e_{12} \\ e_{13} & e_{14} & e_{15} \end{pmatrix}$$

$$\overline{A^3B} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 & f_9 \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ f_{13} & f_{14} & f_{15} \end{pmatrix}$$

Dengan $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}$ adalah sebagai berikut:

$$f_1 = c_1e_1 + c_2e_{10} + c_3e_{13}$$

$$f_2 = c_1e_2 + c_2e_{11} + c_3c_{14}$$

$$f_3 = c_1e_3 + c_2e_{12} + c_3e_{15}$$

$$f_4 = c_4e_1 + c_5e_4 + c_6e_{10} + c_7c_{13}$$

$$f_5 = c_4e_2 + c_5e_5 + c_6e_{11} + c_7e_{14}$$

$$f_6 = c_4e_3 + c_5e_6 + c_6e_{12} + c_7e_{15}$$

$$f_7 = c_8e_1 + c_9e_4 + c_{10}e_7 + c_{11}e_{10} + c_{12}e_{13}$$

$$f_8 = c_8e_2 + c_9e_5 + c_{10}e_8 + c_{11}e_{11} + c_{12}e_{14}$$

$$f_9 = c_8e_3 + c_9e_6 + c_{10}e_9 + c_{11}e_{12} + c_{12}e_{15}$$

$$f_{10} = c_{13}e_1 + c_{14}e_7 + c_{15}e_{10} + c_{16}e_{13}$$

$$f_{11} = c_{13}e_2 + c_{14}e_8 + c_{15}e_{11} + c_{16}e_{14}$$

$$f_{12} = c_{13}e_3 + c_{14}e_9 + c_{15}e_{12} + c_{16}e_{15}$$

$$f_{13} = c_{17}e_{10} + c_{18}e_{13}$$

$$f_{14} = c_{17}e_{11} + c_{18}e_{14}$$

$$f_{15} = c_{17}e_{12} + c_{18}e_{15}$$

Sehingga matrik $\overline{A^3B}$ menjadi

$$\overline{A^3B} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 & f_9 \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ f_{13} & f_{14} & f_{15} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Selanjutnya matrik $\overline{A^4B}$ diperoleh

$$\overline{A^4B} = [\overline{A}][\overline{A^3B}]$$

$$\overline{A^4B} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & 0 & c_6 & c_7 \\ c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{13} & 0 & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ 0 & 0 & 0 & c_{17} & c_{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 & f_9 \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ f_{13} & f_{14} & f_{15} \end{pmatrix}$$

$$\overline{A^4B} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_4 & g_5 & g_6 \\ g_7 & g_8 & g_9 \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{13} & g_{14} & g_{15} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Dengan

$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}$

adalah sebagai berikut:

$$g_1 = c_1f_1 + c_2f_{10} + c_3c_{13}$$

$$g_2 = c_1f_2 + c_2f_{11} + c_3f_{14}$$

$$g_3 = c_1f_3 + c_2f_{12} + c_3f_{15}$$

$$g_4 = c_4f_1 + c_5f_4 + c_6f_{10} + c_7f_{13}$$

$$g_5 = c_4f_2 + c_5f_5 + c_6f_8 + c_7f_{14}$$

$$g_6 = c_4f_3 + c_5f_6 + c_6f_{12} + c_7f_{15}$$

$$g_7 = c_8f_1 + c_9f_4 + c_{10}f_7 + c_{11}f_{10} + c_{12}f_{13}$$

$$g_8 = c_8f_2 + c_9f_5 + c_{10}f_8 + c_{11}f_{11} + c_{12}f_{14}$$

$$g_9 = c_8f_3 + c_9f_6 + c_{10}f_9 + c_{11}f_{12} + c_{12}f_{15}$$

$$g_{10} = c_{13}f_1 + c_{14}f_7 + c_{15}f_{10} + c_{16}f_{13}$$

$$g_{11} = c_{13}f_2 + c_{14}f_8 + c_{15}f_{11} + c_{16}f_{14}$$

$$g_{12} = c_{13}f_3 + c_{14}f_9 + c_{15}f_{12} + c_{16}f_{15}$$

$$g_{13} = c_{17}f_{10} + c_{18}f_{13}$$

$$g_{14} = c_{17}f_{11} + c_{18}f_{14}$$

$$g_{15} = c_{17}f_{12} + c_{18}f_{15}$$

$$\text{Sehingga matrik } \overline{A^4 B} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_4 & g_5 & g_6 \\ g_7 & g_8 & g_9 \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{13} & g_{14} & g_{15} \end{pmatrix}$$

Dari hasil perhitungan diatas, maka persamaan (4.13) sampai (4.17) dapat disusun menjadi matrik keterkontrolan M_c , seperti berikut :

$$M_c = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & e_1 & e_2 & e_3 & f_1 & f_2 & f_3 & g_1 & g_2 & g_3 \\ b_2 & 0 & 0 & d_4 & d_5 & d_6 & e_4 & e_5 & e_6 & f_4 & f_5 & f_6 & g_4 & g_5 & g_6 \\ 0 & b_3 & 0 & d_7 & d_8 & d_9 & e_7 & e_8 & e_9 & f_7 & f_8 & f_9 & g_7 & g_8 & g_9 \\ 0 & 0 & b_4 & d_{10} & d_{11} & d_{12} & e_{10} & e_{11} & e_{12} & f_{10} & f_{11} & f_{12} & g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ 0 & b_5 & b_6 & 0 & d_{13} & d_{14} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & g_{13} & g_{14} & g_{15} \end{bmatrix}$$

Dengan nilai b_1, b_2, \dots, g_{15} terdapat di lampiran C. Dari matrik diatas dapat disimpulkan bahwa model penyakit tuberkulosis bersifat terkontrol karena $\text{rank}(M_c) = 5$.

4.2 Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Pada tugas akhir bertujuan untuk menyelesaikan kontrol optimal untuk meminimalkan individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis menggunakan kontrol $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$. $u_1(t)$ merupakan mekanisme kontrol yang dimasukkan dalam model (4.1)-(4.6) dengan menggantikan tingkat vaksinasi konstan p . $u_2(t)$ merupakan mekanisme kontrol yang dimasukkan dalam model (4.1)-(4.6) dengan menggantikan tingkat perawatan individu sampai ke tahap latent. $u_3(t)$ merupakan mekanisme kontrol yang dimasukkan dalam model (4.1)-(4.6) dengan menggantikan tingkat perawatan individu aktif TB.

Sehingga model penyakit tuberculosis (4.1) – (4.6) menjadi :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta S(I + \rho_1 T) - (\mu + u_1(t))S$$

$$\frac{dV}{dt} = u_1(t)S - \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - \mu V$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = l\beta S(I + \rho_1 T) + \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - (\mu + \delta)L \\ + u_2(t)T \end{aligned}$$

$$\frac{dI}{dt} = (1 - l)\beta S(I + \rho_1 T) + \delta L - (\mu + \alpha + u_3(t))I$$

$$\frac{dT}{dt} = u_3(t)I - (\mu + u_2(t))T$$

Dengan $0 \leq u_1 \leq 1$, $0 \leq u_2 \leq 1$, $0 \leq u_3 \leq 1$

Fungsi tujuan untuk model diatas diberikan sebagai berikut:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} (A_1 L + A_2 I + A_3 T + A_4 u_1^2 + A_5 u_2^2 + A_6 u_3^2) dt$$

Total biaya terdiri dari biaya penyakit itu sendiri dan biaya yang dipicu oleh proses vaksinasi dan usaha penanganan. $\int_{t_0}^{t_f} A_1 L dt$ adalah faktor biaya yang sebanding dengan jumlah individu yang terinfeksi TB pada tahap laten. $\int_{t_0}^{t_f} A_2 I dt$ adalah faktor biaya yang sebanding dengan jumlah individu yang terinfeksi TB pada tahap aktif. $\int_{t_0}^{t_f} A_3 T dt$ adalah faktor biaya yang sebanding dengan jumlah individu yang terinfeksi TB dengan perawatan. $\int_{t_0}^{t_f} A_4 u_1^2 dt$ adalah faktor biaya yang melibatkan proses vaksinasi. $\int_{t_0}^{t_f} A_5 u_2^2 dt$

adalah Faktor biaya yang digunakan untuk meningkatkan rasio kesuksesan penanganan. $\int_{t_0}^{tf} A_6 u_3^2 dt$ adalah faktor biaya untuk pemberian penanganan.

4.3 Penyelesaian dengan Prinsip Minimum Pontryagin

Masalah kontrol optimal pada model penyakit tuberkulosis dapat diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Membentuk fungsi Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t)$$

$$\begin{aligned} &= A_1 L + A_2 I + A_3 T + A_4 u_1^2 + A_5 u_2^2 + A_6 u_3^2 + \lambda_1 (\Lambda - \beta S(I + \rho_1 T) - (\mu + u_1)S) + \lambda_2 (u_1 S - \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - \mu V) \\ &+ \lambda_3 (l\beta S(I + \rho_1 T) + \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - (\mu + \delta)L + u_2 T) + \lambda_4 ((1 - l)\beta S(I + \rho_1 T) + \delta L - (\mu + \alpha + u_3)I) \\ &+ \lambda_5 (u_3 I - (\mu + u_2)T) \end{aligned}$$

2. Meminimalkan H terhadap $u(t)$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

- Kontrol u_1

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$$

$$2A_4 u_1 - \lambda_1 S + \lambda_2 S = 0$$

Sehingga didapat kontrol optimal u_1 yaitu:

$$u_1^* = \frac{\lambda_1 S - \lambda_2 S}{2A_4}$$

- Kontrol u_2

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$$

$$2A_5u_2 + \lambda_3T - \lambda_5T = 0$$

Sehingga didapat kontrol optimal u_2 yaitu:

$$u_2^* = \frac{\lambda_3T + \lambda_5T}{2A_5}$$

- Kontrol u_3

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$$

$$2A_6u_3 - \lambda_4I + \lambda_5I = 0$$

Sehingga didapat kontrol optimal u_1 yaitu:

$$u_3^* = \frac{\lambda_4I - \lambda_5I}{2A_6}$$

Karena nilai kontrol terbatas, dimana $0 \leq u_1 \leq 1$, $0 \leq u_2 \leq 1$, $0 \leq u_3 \leq 1$, maka:

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_1S - \lambda_2S}{2A_4} \right\}, 1 \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_3T + \lambda_5T}{2A_5} \right\}, 1 \right\}$$

$$u_3^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_4I - \lambda_5I}{2A_6} \right\}, 1 \right\}$$

Selanjutnya di tunjukkan bahwa H mempunyai nilai minimum di $u(t)$ dengan dilakukan uji turunan kedua.

$$\frac{\partial H^2}{\partial u_1^2} = 2A_4 > 0$$

$$\frac{\partial H^2}{\partial u_2^2} = 2A_5 > 0$$

$$\frac{\partial H^2}{\partial u_3^2} = 2A_6 > 0$$

Karena turunan kedua H terhadap semua kontrol bernilai positif, maka uji turunan kedua terpenuhi. Sehingga H mempunyai nilai minimum di $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$.

3. Menentukan H^* yang optimal

Dengan cara mensubstitusikan u_1^*, u_2^*, u_3^* ke dalam bentuk Hamiltonian.

$$\begin{aligned}
 H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = & A_1L + A_2I + A_3T + \\
 & A_4 \left(\frac{\lambda_1 S - \lambda_2 S}{2A_4} \right)^2 + A_5 \left(\frac{\lambda_3 T + \lambda_5 T}{2A_5} \right)^2 + A_6 u_3^2 + \lambda_1 \left(\Lambda - \right. \\
 & \left. \beta S(I + \rho_1 T) - \left(\mu + \left(\frac{\lambda_1 S - \lambda_2 S}{2A_4} \right) \right) S \right) + \lambda_2 \left(\left(\frac{\lambda_1 S - \lambda_2 S}{2A_4} \right) S - \right. \\
 & \left. \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - \mu V \right) + \lambda_3 \left(l \beta S(I + \rho_1 T) + \rho_2 \beta V(I + \right. \\
 & \left. \rho_1 T) - (\mu + \delta)L + \left(\frac{\lambda_3 T + \lambda_5 T}{2A_5} \right) T \right) + \lambda_4 \left((1 - l) \beta S(I + \right. \\
 & \left. \rho_1 T) + \delta L - \left(\mu + \alpha + \left(\frac{\lambda_4 I - \lambda_5 I}{2A_6} \right) \right) I \right) + \lambda_5 \left(\left(\frac{\lambda_4 I - \lambda_5 I}{2A_6} \right) I - \right. \\
 & \left. \left(\mu + \left(\frac{\lambda_3 T + \lambda_5 T}{2A_5} \right) \right) T \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) &= A_1L + A_2I + A_3T + A_4 \left(\frac{\lambda_1^2 S^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 S^2}{4A_4^2} \right) \\
&+ A_5 \left(\frac{\lambda_5^2 T^2 - 2\lambda_5 \lambda_3 T^2 + \lambda_3^2 T^2}{4A_5^2} \right) \\
&+ A_6 \left(\frac{\lambda_4^2 I^2 - 2\lambda_5 \lambda_4 I^2 + \lambda_5^2 I^2}{4A_6^2} \right) \\
&+ \lambda_1 \left(\Lambda - \beta S(I + \rho_1 T) \right. \\
&\quad \left. - \left(\mu S + \left(\frac{\lambda_1 S^2 - \lambda_2 S^2}{2A_4} \right) \right) \right) \\
&+ \lambda_2 \left(\left(\frac{\lambda_1 S^2 - \lambda_2 S^2}{2A_4} \right) - \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - \mu V \right) \\
&+ \lambda_3 \left(l\beta S(I + \rho_1 T) + \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) \right. \\
&\quad \left. - (\mu + \delta)L + \left(\frac{\lambda_3 T^2 + \lambda_5 T^2}{2A_5} \right) \right) \\
&+ \lambda_4 \left((1 - l)\beta S(I + \rho_1 T) + \delta L \right. \\
&\quad \left. - \left(\mu + \alpha + \left(\frac{\lambda_4 I^2 - \lambda_5 I^2}{2A_6} \right) \right) \right) \\
&+ \lambda_5 \left(\left(\frac{\lambda_4 I^2 - \lambda_5 I^2}{2A_6} \right) - \left(\mu + \left(\frac{\lambda_3 T^2 + \lambda_5 T^2}{2A_5} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

4. Menyelesaikan persamaan state dan costate

Penyelesaian persamaan state dan costate untuk memperoleh persamaan sistem yang optimal diberikan sebagai berikut :

a. Persamaan state

$$\begin{aligned}
 \dot{S}(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \right)_* \\
 &= (\Lambda - \beta S(I + \rho_1 T) - (\mu + u_1)S) \\
 \dot{V}(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} \right)_* \\
 &= (u_1 S - \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - \mu V) \\
 \dot{L}(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} \right)_* \\
 &= (l\beta S(I + \rho_1 T) + \rho_2 \beta V(I + \rho_1 T) - (\mu + \delta)L + u_2 T) \\
 \dot{I}(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} \right)_* \\
 &= \left((1-l)\beta S(I + \rho_1 T) + \delta L - \left(\mu + \alpha + \left(\frac{\lambda_4 I - \lambda_5 I}{2A_6} \right) \right) I \right) \\
 \dot{T}(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_5} \right)_* \\
 &= \left(\left(\frac{\lambda_4 I - \lambda_5 I}{2A_6} \right) I - \left(\mu + \left(\frac{\lambda_3 T + \lambda_5 T}{2A_5} \right) \right) T \right)
 \end{aligned}$$

b. Persamaan costate

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_1 &= - \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_* \\
 &= -(-\lambda_1 \beta (I + \rho_1 T) - \lambda_1 (\mu + u_1) + \lambda_2 u_1 \\
 &\quad + \lambda_3 l \beta (I + \rho_1 T) \\
 &\quad + \lambda_4 (1-l) \beta (I + \rho_1 T))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_2 &= -\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_* \\
&= -(-\lambda_2\rho_2\beta(I + \rho_1T) - \lambda_2\mu + \rho_2\beta(I + \rho_1T)\lambda_3) \\
\dot{\lambda}_3 &= -\left(\frac{\partial H}{\partial L}\right)_* \\
&= -(A_1 - \lambda_3(\mu + \delta) + \lambda_4\delta) \\
\dot{\lambda}_4 &= -\left(\frac{\partial H}{\partial I}\right)_* \\
&= -(A_2 - \lambda_1\beta S - \lambda_2\rho_2\beta V + \lambda_3l\beta S + \lambda_3\rho_2\beta V - \lambda_4l\beta S + \lambda_4\beta S - (\mu + \alpha + u_3)\lambda_4 + \lambda_5u_3) \\
\dot{\lambda}_5 &= -\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_* \\
&= -(A_3 - \lambda_1\beta S\rho_1 - \lambda_2\rho_2\beta V\rho_1 + \lambda_3l\beta S\rho_1 + \lambda_3\beta V\rho_1\rho_2 + \lambda_3u_2 - l\lambda_4\beta S\rho_1 - \lambda_5(\mu + u_2) + \lambda_4\beta S\rho_1)
\end{aligned}$$

4.4 Solusi Numerik

Dalam Tugas Akhir ini persamaan state dan persamaan costate akan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 menggunakan software MATLAB. metode Runge-Kutta banyak digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial karena galat yang dihasilkan kecil. Metode ini mempunyai suatu galat pemotongan h, dimana h adalah waktu.

Persamaan state diselesaikan menggunakan metode forward sweep karena pada state diketahui nilai awal sedangkan untuk persamaan costate diselesaikan menggunakan backward sweep karena nilai akhir costate diketahui. Sehingga metode yang digunakan adalah forward-

backward sweep dengan solusi numerik yang digunakan Runge-Kutta orde empat.

Langkah 1:

Interval waktu $t = [0, t_f]$ dibagi sebanyak n subinterval. Sehingga persamaan state dan costate dapat ditulis sebagai berikut:

- State

$$\dot{S}(t) = (S_1, \dots, S_{1_{n+1}})$$

$$\dot{V}(t) = (V_1, \dots, V_{1_{n+1}})$$

$$\dot{L}(t) = (L_1, \dots, L_{1_{n+1}})$$

$$\dot{I}(t) = (I_1, \dots, I_{1_{n+1}})$$

$$\dot{T}(t) = (T_1, \dots, T_{1_{n+1}})$$

- Costate

$$\dot{\lambda}_1 = (\lambda_1, \dots, \lambda_{1_{n+1}})$$

$$\dot{\lambda}_2 = (\lambda_2, \dots, \lambda_{2_{n+1}})$$

$$\dot{\lambda}_3 = (\lambda_3, \dots, \lambda_{3_{n+1}})$$

$$\dot{\lambda}_4 = (\lambda_4, \dots, \lambda_{4_{n+1}})$$

$$\dot{\lambda}_5 = (\lambda_5, \dots, \lambda_{5_{n+1}})$$

Dengan $h = \frac{t_f - t_0}{n}$

Langkah 2 :

Memberikan inisialisasi nilai awal $u_1, u_2, u_3, S, V, L, I, T, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ dalam bentuk vektor nol sebanyak n .

Langkah 3 :

Menggunakan nilai awal

$$u_1(0) = u_{1_0}, u_2(0) = u_{2_0}, u_3(0) = u_{3_0}, S_1(0) = S_{1_0}, V_1(0) = V_{1_0}, L_1(0) = L_{1_0}, I_1(0) = I_{1_0}, T_1(0) = T_{1_0}.$$

Langkah 4 :

Menghitung nilai

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_1 S - \lambda_2 S}{2A_4} \right\}, 1 \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_3 T + \lambda_5 T}{2A_5} \right\}, 1 \right\}$$

$$u_3^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_4 I - \lambda_5 I}{2A_6} \right\}, 1 \right\}$$

Langkah 5:

Menyelesaikan persamaan state secara forward sweep dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat sebagai berikut:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{6} (k_{1,S} + 2k_{2,S} + 2k_{3,S} + k_{4,S})$$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{6} (k_{1,V} + 2k_{2,V} + 2k_{3,V} + k_{4,V})$$

$$L_{n+1} = L_n + \frac{1}{6} (k_{1,L} + 2k_{2,L} + 2k_{3,L} + k_{4,L})$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{6} (k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I})$$

$$T_{n+1} = T_n + \frac{1}{6} (k_{1,T} + 2k_{2,T} + 2k_{3,T} + k_{4,T})$$

dengan,

$$k_{1,S} = hf(S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1_n}, U_{2_n}, U_{3_n})$$

$$k_{1,V} = hf(S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1_n}, U_{2_n}, U_{3_n})$$

$$k_{1,L} = hf(S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})$$

$$k_{1,I} = hf(S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})$$

$$k_{1,T} = hf(S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})$$

$$k_{2,S} = hf\left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}, V_n + \frac{k_{1,V}}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, L_n + \frac{k_{1,L}}{2}, T_n + \frac{k_{1,T}}{2}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}\right)$$

$$k_{2,V} = hf\left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}, V_n + \frac{k_{1,V}}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, L_n + \frac{k_{1,L}}{2}, T_n + \frac{k_{1,T}}{2}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}\right)$$

$$k_{2,L} = hf\left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}, V_n + \frac{k_{1,V}}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, L_n + \frac{k_{1,L}}{2}, T_n + \frac{k_{1,T}}{2}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}\right)$$

$$k_{2,I} = hf\left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}, V_n + \frac{k_{1,V}}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, L_n + \frac{k_{1,L}}{2}, T_n + \frac{k_{1,T}}{2}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}\right)$$

$$k_{2,T} = hf\left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}, V_n + \frac{k_{1,V}}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, L_n + \frac{k_{1,L}}{2}, T_n + \frac{k_{1,T}}{2}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}\right)$$

$$k_{3,S} = hf\left(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}, V_n + \frac{k_{2,V}}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, L_n + \frac{k_{2,L}}{2}, T_n + \frac{k_{2,T}}{2}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}\right)$$

$$k_{3,V} = hf\left(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}, V_n + \frac{k_{2,V}}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, L_n + \frac{k_{2,L}}{2}, T_n + \frac{k_{2,T}}{2}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n}\right)$$

$$k_{3,L} = hf \left(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}, V_n + \frac{k_{2,V}}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, L_n + \frac{k_{2,L}}{2}, T_n + \frac{k_{2,T}}{2}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n} \right)$$

$$k_{3,I} = hf \left(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}, V_n + \frac{k_{2,V}}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, L_n + \frac{k_{2,L}}{2}, T_n + \frac{k_{2,T}}{2}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n} \right)$$

$$k_{3,T} = hf \left(S_n + \frac{k_{2,S}}{2}, V_n + \frac{k_{2,V}}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, L_n + \frac{k_{2,L}}{2}, T_n + \frac{k_{2,T}}{2}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n} \right)$$

$$k_{4,S} = hf \left(S_n + k_{3,S}, V_n + k_{3,V}, L_n + k_{3,L}, I_n + k_{3,I}, T_n + k_{3,T}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n} \right)$$

$$k_{4,V} = hf \left(S_n + k_{3,S}, V_n + k_{3,V}, L_n + k_{3,L}, I_n + k_{3,I}, T_n + k_{3,T}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n} \right)$$

$$k_{4,L} = hf \left(S_n + k_{3,S}, V_n + k_{3,V}, L_n + k_{3,L}, I_n + k_{3,I}, T_n + k_{3,T}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n} \right)$$

$$k_{4,I} = hf \left(S_n + k_{3,S}, V_n + k_{3,V}, L_n + k_{3,L}, I_n + k_{3,I}, T_n + k_{3,T}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n} \right)$$

$$k_{4,T} = hf \left(S_n + k_{3,S}, V_n + k_{3,V}, L_n + k_{3,L}, I_n + k_{3,I}, T_n + k_{3,T}, u_{1n}, u_{2n}, u_{3n} \right)$$

Langkah 6:

Menyelesaikan persamaan costate secara backwardsweep dengan menggunakan Runge-Kutta orde empat yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1n-1} &= \lambda_{1n} - \frac{1}{6}(k_{1,\lambda_1} + 2k_{2,\lambda_1} + 2k_{3,\lambda_1} + k_{4,\lambda_1}) \\
\lambda_{2n-1} &= \lambda_{2n} - \frac{1}{6}(k_{1,\lambda_2} + 2k_{2,\lambda_2} + 2k_{3,\lambda_2} + k_{4,\lambda_2}) \\
\lambda_{3n-1} &= \lambda_{3n} - \frac{1}{6}(k_{1,\lambda_3} + 2k_{2,\lambda_3} + 2k_{3,\lambda_3} + k_{4,\lambda_3}) \\
\lambda_{4n-1} &= \lambda_{4n} - \frac{1}{6}(k_{1,\lambda_4} + 2k_{2,\lambda_4} + 2k_{3,\lambda_4} + k_{4,\lambda_4}) \\
\lambda_{5n-1} &= \lambda_{5n} - \frac{1}{6}(k_{1,\lambda_5} + 2k_{2,\lambda_5} + 2k_{3,\lambda_5} + k_{4,\lambda_5})
\end{aligned}$$

Dengan,

$$\begin{aligned}
&k_{1,\lambda_1} \\
&= hf(\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \lambda_{3n}, \lambda_{4n}, \lambda_{5n}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&k_{1,\lambda_2} \\
&= hf(\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \lambda_{3n}, \lambda_{4n}, \lambda_{5n}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&k_{1,\lambda_3} \\
&= hf(\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \lambda_{3n}, \lambda_{4n}, \lambda_{5n}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&k_{1,\lambda_4} \\
&= hf(\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \lambda_{3n}, \lambda_{4n}, \lambda_{5n}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&k_{1,\lambda_5} \\
&= hf(\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \lambda_{3n}, \lambda_{4n}, \lambda_{5n}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&k_{2,\lambda_1} \\
&= hf\left(\lambda_{1n} - \frac{k_1\lambda_1}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_1\lambda_2}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_1\lambda_3}{2}, \lambda_{4n} - \frac{k_1\lambda_4}{2}, -\frac{k_1\lambda_5}{2}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_2, \lambda_2 \\
& = hf \left(\lambda_{1n} - \frac{k_1 \lambda_1}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_1 \lambda_2}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_1 \lambda_3}{2}, \lambda_{4n} \right. \\
& \quad \left. - \frac{k_1 \lambda_4}{2}, -\frac{k_1 \lambda_5}{2}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_2, \lambda_3 \\
& = hf \left(\lambda_{1n} - \frac{k_1 \lambda_1}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_1 \lambda_2}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_1 \lambda_3}{2}, \lambda_{4n} \right. \\
& \quad \left. - \frac{k_1 \lambda_4}{2}, -\frac{k_1 \lambda_5}{2}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_2, \lambda_4 \\
& = hf \left(\lambda_{1n} - \frac{k_1 \lambda_1}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_1 \lambda_2}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_1 \lambda_3}{2}, \lambda_{4n} \right. \\
& \quad \left. - \frac{k_1 \lambda_4}{2}, -\frac{k_1 \lambda_5}{2}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_2, \lambda_5 \\
& = hf \left(\lambda_{1n} - \frac{k_1 \lambda_1}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_1 \lambda_2}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_1 \lambda_3}{2}, \lambda_{4n} \right. \\
& \quad \left. - \frac{k_1 \lambda_4}{2}, -\frac{k_1 \lambda_5}{2}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_3, \lambda_1 \\
& = hf \left(\lambda_{1n} - \frac{k_2 \lambda_1}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_2 \lambda_2}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_2 \lambda_3}{2}, \lambda_{4n} \right. \\
& \quad \left. - \frac{k_2 \lambda_4}{2}, -\frac{k_2 \lambda_5}{2}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_3, \lambda_2 \\
& = hf \left(\lambda_{1n} - \frac{k_2 \lambda_1}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_2 \lambda_2}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_2 \lambda_3}{2}, \lambda_{4n} \right. \\
& \quad \left. - \frac{k_2 \lambda_4}{2}, -\frac{k_2 \lambda_5}{2}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_3, \lambda_3 \\
& = hf \left(\lambda_{1n} - \frac{k_2 \lambda_1}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_2 \lambda_2}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_2 \lambda_3}{2}, \lambda_{4n} \right. \\
& \quad \left. - \frac{k_2 \lambda_4}{2}, -\frac{k_2 \lambda_5}{2}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_3, \lambda_4 \\
& = hf \left(\lambda_{1n} - \frac{k_2 \lambda_1}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_2 \lambda_2}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_2 \lambda_3}{2}, \lambda_{4n} \right. \\
& \quad \left. - \frac{k_2 \lambda_4}{2}, -\frac{k_2 \lambda_5}{2}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_3, \lambda_5 \\
& = hf \left(\lambda_{1n} - \frac{k_2 \lambda_1}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_2 \lambda_2}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_2 \lambda_3}{2}, \lambda_{4n} \right. \\
& \quad \left. - \frac{k_2 \lambda_4}{2}, -\frac{k_2 \lambda_5}{2}, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4, \lambda_1 & = hf(\lambda_{1n} - k_3 \lambda_1, \lambda_{2n} - k_3 \lambda_2, \lambda_{3n} - k_3 \lambda_3, \lambda_{4n} \\
& \quad - k_3 \lambda_4, \lambda_{5n} \\
& \quad - k_3 \lambda_5, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4, \lambda_2 & = hf(\lambda_{1n} - k_3 \lambda_1, \lambda_{2n} - k_3 \lambda_2, \lambda_{3n} - k_3 \lambda_3, \lambda_{4n} \\
& \quad - k_3 \lambda_4, \lambda_{5n} \\
& \quad - k_3 \lambda_5, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})
\end{aligned}$$

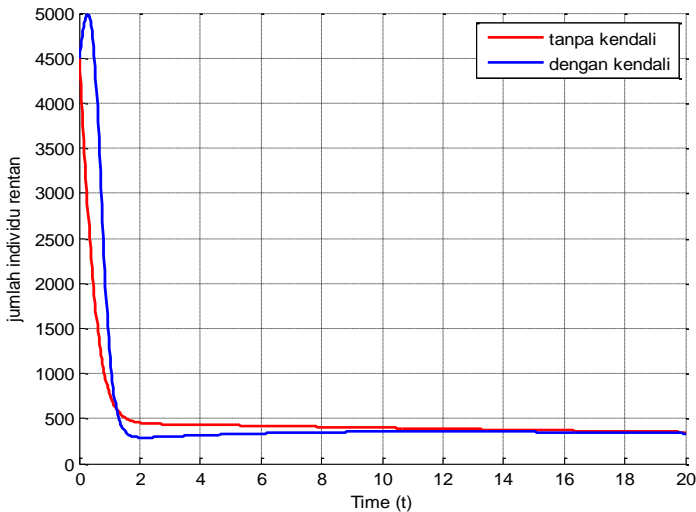
$$\begin{aligned}
k_4, \lambda_3 & = hf(\lambda_{1n} - k_3 \lambda_1, \lambda_{2n} - k_3 \lambda_2, \lambda_{3n} - k_3 \lambda_3, \lambda_{4n} \\
& \quad - k_3 \lambda_4, \lambda_{5n} \\
& \quad - k_3 \lambda_5, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4, \lambda_4 & = hf(\lambda_{1n} - k_3 \lambda_1, \lambda_{2n} - k_3 \lambda_2, \lambda_{3n} - k_3 \lambda_3, \lambda_{4n} \\
& \quad - k_3 \lambda_4, \lambda_{5n} \\
& \quad - k_3 \lambda_5, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})
\end{aligned}$$

$$k_4, \lambda_5 = hf(\lambda_{1n} - k_3\lambda_1, \lambda_{2n} - k_3\lambda_2, \lambda_{3n} - k_3\lambda_3, \lambda_{4n} - k_3\lambda_4, \lambda_{5n} - k_3\lambda_5, S_n, V_n, L_n, I_n, T_n, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})$$

4.5 Analisis dan Hasil Simulasi

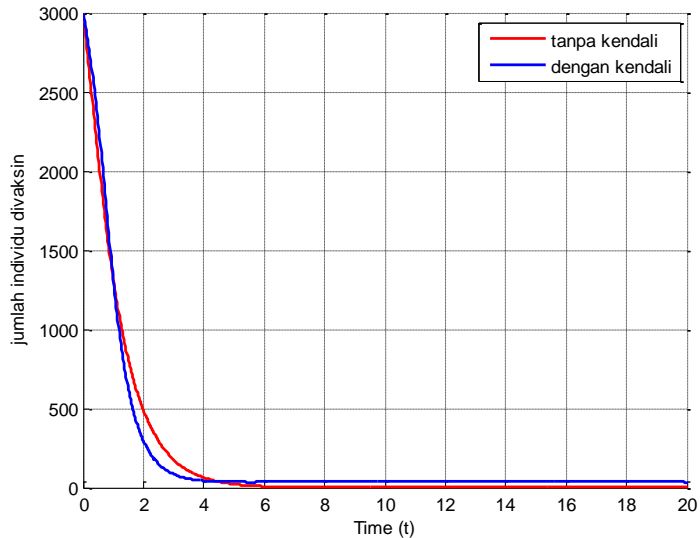
Berdasarkan analisis dan hasil simulasi menggunakan software MATLAB dengan menggunakan bobot konstan $A_1 = 20, A_2 = 100, A_3 = 200, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 150$, serta menggunakan Tabel Parameter 4.1. Didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar 4.1 Grafik jumlah individu rentan

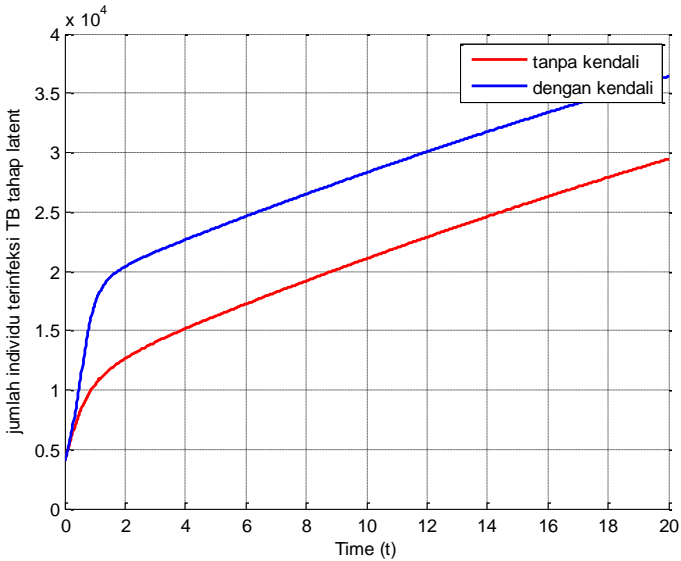
Gambar 4.1 menunjukkan bahwa garis berwarna biru adalah jumlah individu rentan dengan optimal kontrol sedangkan garis merah adalah jumlah individu rentan tanpa kontrol. Pada saat tahun ke dua, jumlah individu rentan mengalami penurunan terbesar dengan menggunakan kontrol

optimal. Dengan bobot konstan $A_1 = 20, A_2 = 100, A_3 = 200, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 150$.



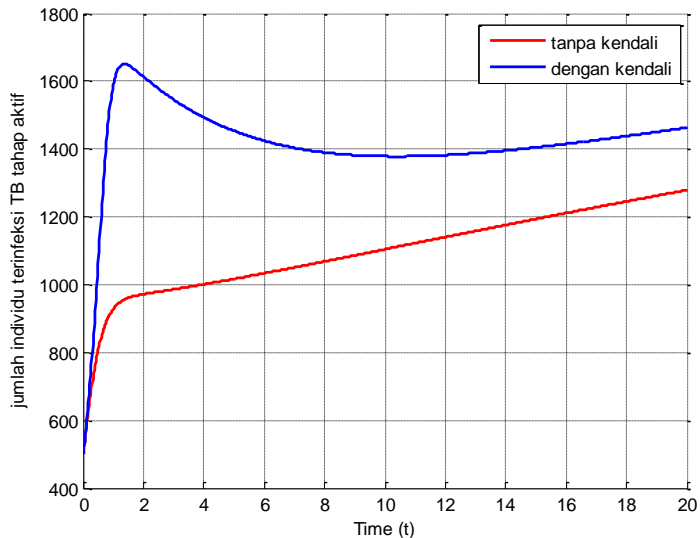
Gambar 4. 2 grafik jumlah individu divaksin

Gambar 4.2 menunjukkan bahwa garis berwarna biru adalah jumlah individu yang divaksin dengan kontrol optimal dan garis berwarna merah adalah jumlah individu yang divaksin tanpa kontrol optimal. Jumlah individu yang tervaksin naik pada saat memasuki tahun ke 5 dibawah pengaruh kontrol optimal. Dengan bobot konstan $A_1 = 20, A_2 = 100, A_3 = 200, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 150$.



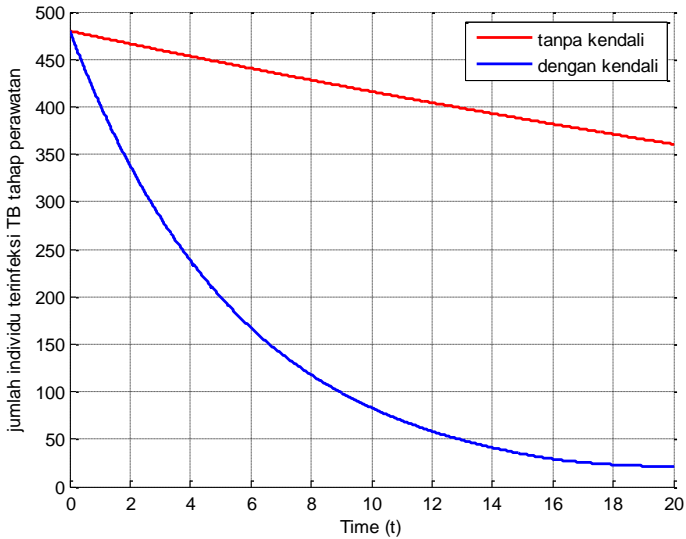
Gambar 4. 3 grafik jumlah individu terinfeksi TB tahap latent

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa garis berwarna biru adalah jumlah individu yang terinfeksi tahap latent dengan kontrol optimal dan garis berwarna merah adalah jumlah individu yang terinfeksi tanpa kontrol optimal. Jumlah individu yang terinfeksi tahap laten mengalami peningkatan dengan pengaruh kontrol optimal karena pada saat individu yang aktif menderita TB setelah melalui proses perawatan belum tentu langsung sembuh tetapi terdapat kemungkinan menjadi individu latent. Dengan bobot konstan $A_1 = 20, A_2 = 100, A_3 = 200, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 150$.



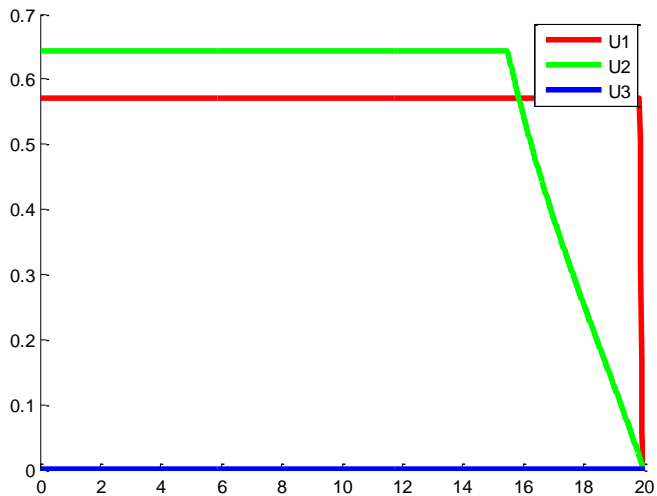
Gambar 4. 4 grafik jumlah individu terinfeksi TB tahap aktif

Gambar 4.4 menunjukkan bahwa garis berwarna biru adalah jumlah individu yang terinfeksi TB aktif dengan kontrol optimal dan garis berwarna merah adalah jumlah individu yang terinfeksi TB aktif tanpa kontrol optimal. Jumlah individu yang terinfeksi tahap TB aktif mengalami peningkatan dengan pengaruh kontrol optimal. Tetapi pada saat memasuki tahun ke 10 mengalami penurunan dengan pengaruh kontrol optimal. Dengan bobot konstan $A_1 = 20, A_2 = 100, A_3 = 200, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 150$.



Gambar 4. 5 grafik jumlah individu terinfeksi TB tahap perawatan

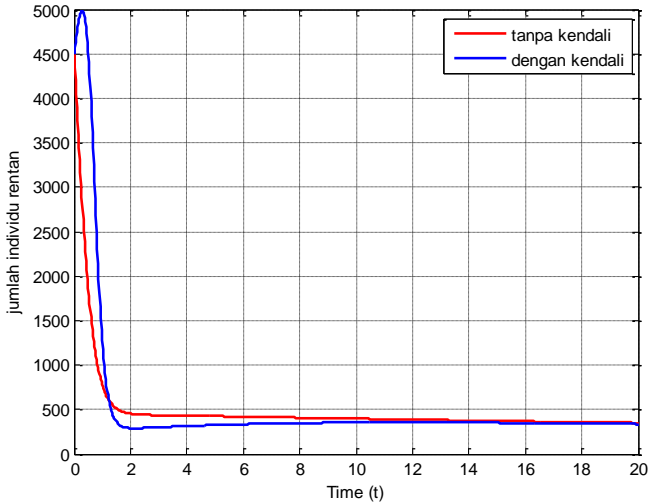
Gambar 4.5 menunjukkan bahwa garis berwarna biru adalah jumlah individu yang terinfeksi tahap perawatan dengan kontrol optimal dan garis berwarna merah adalah jumlah individu yang terinfeksi tahap perawatan tanpa kontrol optimal. Jumlah individu yang terinfeksi tahap TB aktif mengalami penurunan dengan pengaruh kontrol optimal. Dengan bobot konstan $A_1 = 20, A_2 = 100, A_3 = 200, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 150$.



Gambar 4. 6 grafik kontrol optimal u_1, u_2, u_3

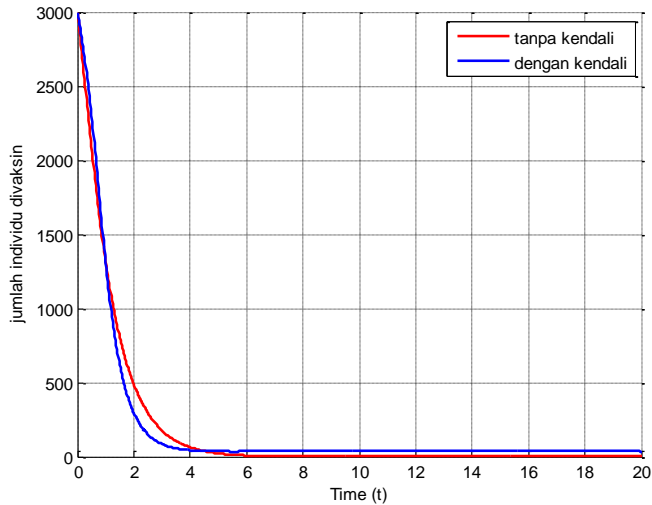
Gambar 4.6 menunjukkan bahwa garis merah menunjukkan u_1 yang optimal dengan nilai 0.5666. Garis hijau menunjukkan u_2 yang optimal dengan nilai 0.6444. Sedangkan garis biru menunjukkan u_3 dengan nilai hampir mendekati titik nol tetapi masih ada nilainya. Dengan u_1 yang merepresentasikan tingkat pemberian vaksin pada individu yang rentan, u_2 yang merepresentasikan tingkat perawatan sampai sembuh, u_3 merepresentasikan tingkat perawatan pada tahap aktif. Dengan nilai J sebagai fungsi tujuan sebesar 14464373,9768536.

Dengan menggunakan bobot konstan $A_1 = 25, A_2 = 100, A_3 = 400, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 600$, serta menggunakan Tabel Parameter 4.1. Didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:



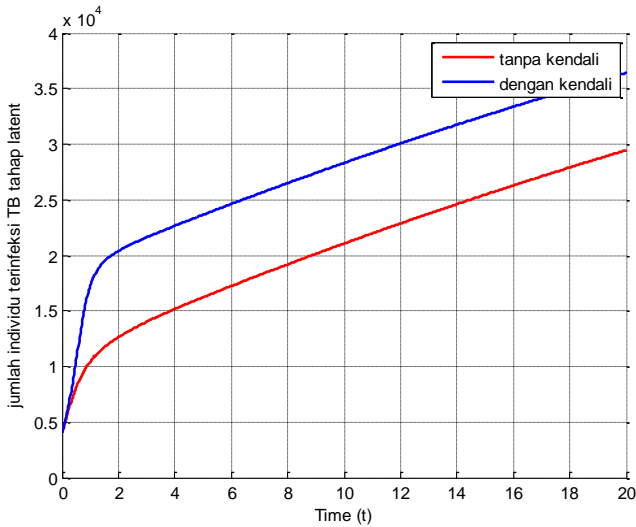
Gambar 4. 7 grafik jumlah individu rentan

Gambar 4.7 menunjukkan bahwa garis berwarna biru adalah jumlah individu rentan dengan optimal kontrol sedangkan garis merah adalah jumlah individu rentan tanpa kontrol. Pada saat tahun ke 2, jumlah individu rentan mengalami penurunan terbesar dengan menggunakan kontrol optimal. Sedangkan pada saat memasuki tahun ke 3 jumlah individu rentan mengalami sedikit kenaikan. Dengan menggunakan bobot konstan $A_1 = 25, A_2 = 100, A_3 = 400, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 600$.



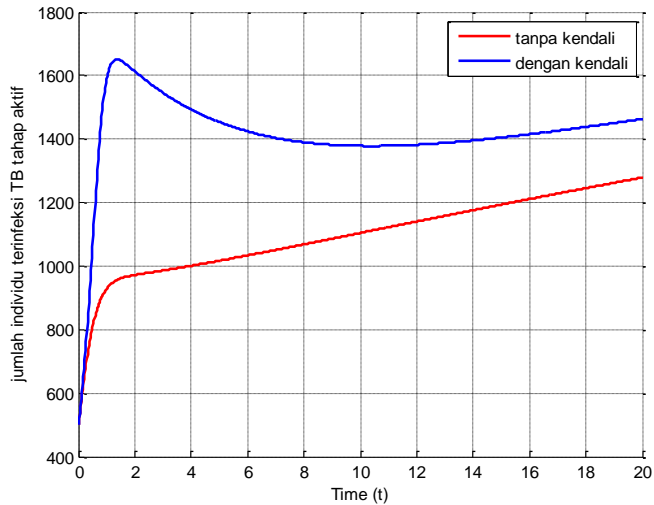
Gambar 4. 8 grafik jumlah individu divaksin

Gambar 4.8 menunjukkan bahwa garis berwarna biru adalah jumlah individu yang divaksin dengan kontrol optimal dan garis berwarna merah adalah jumlah individu yang divaksin tanpa kontrol optimal. Jumlah individu yang tervaksin naik pada saat memasuki tahun ke 6 dibawah pengaruh kontrol optimal. Dengan menggunakan bobot konstan $A_1 = 25, A_2 = 100, A_3 = 400, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 600$.



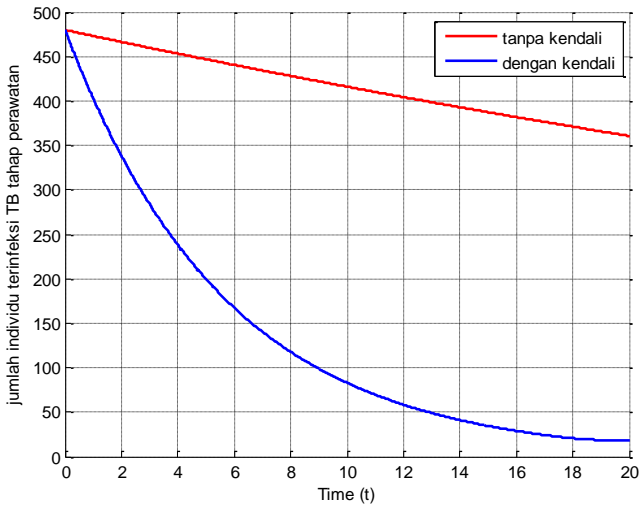
Gambar 4. 9 grafik jumlah individu terinfeksi TB tahap latent

Gambar 4.9 menunjukkan bahwa garis berwarna biru adalah jumlah individu yang terinfeksi tahap latent dengan kontrol optimal dan garis berwarna merah adalah jumlah individu yang terinfeksi tanpa kontrol optimal. Dengan menggunakan bobot konstan $A_1 = 25, A_2 = 100, A_3 = 400, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 600$.



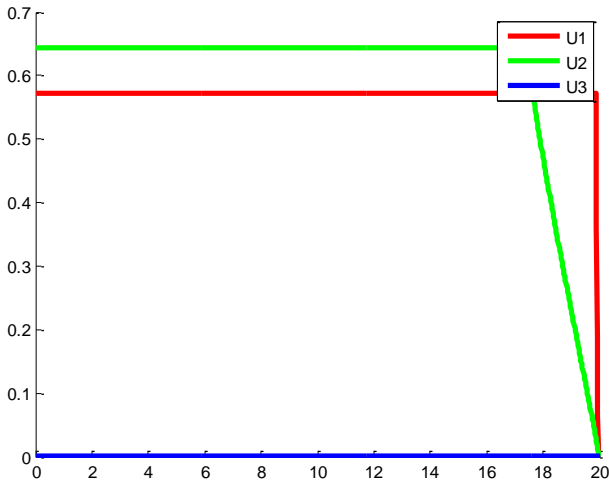
Gambar 4. 10 grafik jumlah individu terinfeksi TB tahap aktif

Gambar 4.10 menunjukkan bahwa garis berwarna biru adalah jumlah individu yang terinfeksi TB aktif dengan kontrol optimal dan garis berwarna merah adalah jumlah individu yang terinfeksi TB aktif tanpa kontrol optimal. Dengan menggunakan bobot konstan $A_1 = 25, A_2 = 100, A_3 = 400, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 600$.



Gambar 4. 11 grafik jumlah individu terinfeksi TB tahap perawatan

Gambar 4.11 menunjukkan bahwa garis berwarna biru adalah jumlah individu yang terinfeksi tahap perawatan dengan kontrol optimal dan garis berwarna merah adalah jumlah individu yang terinfeksi tahap perawatan tanpa kontrol optimal. Jumlah individu yang terinfeksi tahap TB aktif mengalami penurunan dengan pengaruh kontrol optimal. Dengan menggunakan bobot konstan $A_1 = 25, A_2 = 100, A_3 = 400, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 600$.



Gambar 4. 12 grafik jumlah individu terinfeksi TB tahap perawatan

Gambar 4.12 menunjukkan bahwa garis merah menunjukkan u_1 yang optimal dengan nilai 0,5714. Garis hijau menunjukkan u_2 yang optimal dengan nilai 0,6428. Sedangkan garis biru menunjukkan u_3 dengan nilai $7,6293e-07$. Dengan u_1 yang merepresentasikan tingkat pemberian vaksin pada individu yang rentan, u_2 yang merepresentasikan tingkat perawatan sampai sembuh, u_3 merepresentasikan tingkat perawatan pada tahap aktif. Dengan nilai J sebagai fungsi tujuan sebesar 17758688,7569412.

BAB V

PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan serta saran yang diberikan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Sistem model penyakit tuberkulosis bersifat stabil dan terkontrol sehingga dapat diterapkan kendali optimal dalam sistem tersebut.
2. Kendali optimal untuk meminimalkan jumlah individu terinfeksi, menggunakan prinsip minimum ponrtyagin berupa u_1 yang merepresentasikan tingkat pemberian vaksin pada individu yang rentan, u_2 yang merepresentasikan tingkat perawatan sampai sembuh, u_3 merepresentasikan tingkat perawatan pada tahap aktif.
3. Berdasarkan hasil simulasi, individu yang terinfeksi TB aktif dan dirawat mengalami penurunan dengan kontrol optimal $u_1 = 0.5666$, $u_2 = 0.6444$, u_3 hampir mendekati angka nol dengan bobot konstan $A_1 = 20, A_2 = 100, A_3 = 200, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 150$ dengan nilai J sebagai fungsi tujuan sebesar 14464373,9768536. Dan juga pada saat u_1 yang optimal dengan nilai 0,5714, u_2 yang optimal dengan nilai 0,6428, u_3 dengan nilai 7,6293e-07 yang mempunyai bobot konstan $A_1 = 25, A_2 = 100, A_3 = 400, A_4 = 100, A_5 = 8000, A_6 = 600$. nilai J sebagai fungsi tujuan sebesar 17758688,7569412.

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya adalah menggunakan metode lain dengan penyelesaian kendali optimalnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Pusat Data dan Informasi Kementrian Kesehatan RI. 2016. “ **Tuberkulosis Temukan Obati Sampai Sembuh** “. <http://www.depkes.go.id>.
- [2] Wahyuningsih, E. 2014. “**Tuberkulosis paru (TB) adalah penyakit infeksius, yang terutama menyerang penyakit parenkim paru**”. <http://eprints.undip.ac.id/44615/3/2>.
- [3] Subiono. 2013. *Sistem Linier dan Kendali Optimal*. Versi 2.2.1. Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA. ITS.
- [4] J.L Liu, T.L. Zhang. 2011. “**Global stability for a tuberculosis model**”. *Math. Comput. Model.* 836-845.
- [5] Naidu, S. D. 2002. “**Optimal Control System**”. USA : CRC Press LLC.
- [6] Ogata, K. 2004. “**System Dynamics Fourt Edition**”. University of Minnesota. United States of America.
- [7] Bowong, S. 2010. “**Optimal control of the transmission dynamics of tuberkulosis**”. Department of Mathematics and Computer Science, University of Doula.
- [8] Choi, S. Jung, E. Lee, S.M. 2015. “**Optimal intervention strategy for Prevention tuberkulosis**”.

- using a smoking-tuberculosis model**". Department of mathematic, Konkuk University. Republic of Korea.
- [9] Gao, D. Huang, N. 2017. ” **A note on global stability for a tuberculosis model**". Department of Mathematics, Sichuan University, Sichuan 6160064. PR China.
- [10] Gao, D. Huang, N. 2017. “**Optimal Control analysis of a tuberkulosis model**". Department of Mathematics, Sichuan University, Sichuan 610064. PR China.
- [11] Perko, Lawrence. 2001. “**Differential Equations and Dynamical Systems**". USA : Department of Mathematics Nothern Arizona University.
- [12] Lenhart, S. Workman, J.T. 2007. “**Optimal Control Applied to Biological Models**". New York : Taylor & Francis Group.

LAMPIRAN

LAMPIRAN A:

$$\frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} = -\beta I - \beta \rho_1 T - (\mu + u_1) = c_1$$

$$\frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} = 0$$

$$\frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} = 0$$

$$\frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} = -\beta S = c_2$$

$$\frac{\partial f_1(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} = -\beta S \rho_1 = c_3$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} = u_1 = c_4$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} = -\rho_2 \beta I - \rho_2 \beta \rho_1 T = c_5$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} = 0$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} = -\rho_2 \beta V = c_6$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} = -\rho_1 \rho_2 \beta V = c_7$$

$$\frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} = l\beta = c_8$$

$$\frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} = \rho_2 \beta I + \rho_2 \beta \rho_1 T = c_9$$

$$\frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} = -(\mu + \delta) = c_{10}$$

$$\frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} = l\beta S + \rho_2\beta V = c_{11}$$

$$\frac{\partial f_3(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} = l\beta S\rho_1 + \rho_2\beta V + u_2 = c_{12}$$

$$\frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} = (1 - l)\beta(I + \rho_1 T) = c_{13}$$

$$\frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} = 0$$

$$\frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} = \delta = c_{14}$$

$$\frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} = (1 - l)\beta S - (\mu + \alpha + u_3) = c_{15}$$

$$\frac{\partial f_4(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} = (1 - l)\beta S\rho_1 = c_{16}$$

$$\frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial S} = 0$$

$$\frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial V} = 0$$

$$\frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial L} = 0$$

$$\frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial I} = u_3 = c_{17}$$

$$\frac{\partial f_5(\bar{S}, \bar{V}, \bar{L}, \bar{I}, \bar{T})}{\partial T} = (1 - l)\beta S\rho_1 = c_{18}$$

Lampiran B

$$d_1 = -\beta I^* - \beta \rho_1 T^* - (\mu + u_1)$$

$$d_2 = -\beta S^*$$

$$d_3 = -\beta S^* \rho_1$$

$$d_4 = u_1$$

$$d_5 = -\rho_2 \beta I^* - \rho_2 \beta \rho_1 T^*$$

$$d_6 = -\rho_2 \beta V^*$$

$$d_7 = -\rho_1 \rho_2 \beta V^*$$

$$d_8 = l\beta$$

$$d_9 = \rho_2 \beta I^* + \rho_2 \beta \rho_1 T^*$$

$$d_{10} = -(\mu + \delta)$$

$$d_{11} = l\beta S^* + \rho_2 \beta V^*$$

$$d_{12} = l\beta S^* \rho_1 + \rho_2 \beta V^* + u_2$$

$$d_{13} = (1 - l)\beta(I^* + \rho_1 T^*)$$

$$d_{14} = \delta$$

$$d_{15} = (1 - l)\beta S^* - (\mu + \alpha + u_3)$$

$$d_{16} = (1 - l)\beta S^* \rho_1$$

$$d_{17} = u_3 =$$

$$d_{18} = (1 - l)\beta S^* \rho_1$$

LAMPIRAN C:

Nilai b_1, b_2, \dots, g_{15} sebagai berikut:

$$b_1 = -1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = -1, b_5 = -1, b_6 = 1$$

$$d_1 = 1,0177, d_2 = 0,0008, d_3 = 0,0023, d_4 = -1,0011,$$

$$d_5 = 0,002, d_6 = -0,0011, d_7 = -0,0014,$$

$$d_8 = -1,0184, d_9 = 0,9971, d_{10} = -0,0004,$$

$$d_{11} = 0,0036, d_{12} = 0,0008, d_{13} = 1,0140, d_{14} = -0,0004$$

$$e_1 = -1,0358, e_2 = -0,0015, e_3 = -0,0043,$$

$$e_4 = 1,0189, e_5 = 0,005, e_6 = 0,0038, e_7 = 0,0014,$$

$$e_8 = 1,0327, e_9 = -2,0288, e_{10} = 0,0008,$$

$$e_{11} = -0,0079, e_{12} = -1,3977, e_{13} = -1,0246,$$

$$e_{14} = 3,2260, e_{15} = 0,0012$$

$$f_1 = 1,0542, f_2 = 0,0024, f_3 = 0,0062, f_4 = -1,0370,$$

$$f_5 = -0,0013, f_6 = -0,0063, f_7 = -0,0018,$$

$$f_8 = -1,0436, f_9 = 3,2591, f_{10} = -0,0014,$$

$$f_{11} = 0,0131, f_{12} = 1,6473, f_{13} = 0,0012,$$

$$f_{14} = 1,0310, f_{15} = -4,6688$$

$$g_1 = -1,0729, g_2 = -0,0032, g_3 = -0,007,$$

$$g_4 = 1,0554, g_5 = 0,0021, g_6 = 0,0087, g_7 = 0,0027,$$

$$g_8 = 1,0502, g_9 = -4,7238, g_{10} = 0,0020,$$

$$g_{11} = -0,0193, g_{12} = -1,9382, g_{13} = -0,0026,$$

$$g_{14} = -1,0323, g_{15} = 6,3815$$

LAMPIRAN D : Source Code

for i=1:n

$$a1=h*(\text{Lambda}-\text{beta}*S(i)*(I(i)+\text{rho}1*T(i)-(\text{miu}+U10)*S(i)));$$

$$b1=h*(U10*S(i)-\text{rho}2*\text{beta}*V(i)*(I(i)+\text{rho}1*T(i))-\text{miu}*V(i));$$

$$c1=h*(l*\text{beta}*S(i)*(I(i)+\text{rho}1*T(i))+\text{rho}2*\text{beta}*V(i)*(I(i)+\text{rho}1*T(i))-$$

$$(\text{miu}+\text{delta})*L(i)+U10*T(i));$$

$$d1=h*(((1-l)*\text{beta}*S(i)*(I(i)+\text{rho}1*T(i)))+\text{delta}*L(i)-$$

$$(\text{miu}+\text{alpa}+U30)*I(i));$$

$$e1=h*(U30*I(i)-(\text{miu}+U20)*T(i));$$

$$a2=h*(\text{Lambda}-\text{beta}*(S(i)+h*a1*0.5)*((I(i)+h*a1*0.5)+\text{rho}1*(T(i)+h*a1*0.5)-$$

$$(\text{miu}+U10)*(S(i)+h*a1*0.5)));$$

$$b2=h*(U10*(S(i)+h*b1*0.5)-\text{rho}2*\text{beta}*(V(i)+h*b1*0.5)*((I(i)+h*b1*0.5)+\text{rho}1*(T(i)+h*b1*0.5))-$$

$$\text{miu}*(V(i)+h*b1*0.5));$$

$$c2=h*(l*\text{beta}*(S(i)+h*c1*0.5)*((I(i)+h*c1*0.5)+\text{rho}1*(T(i)+h*c1*0.5))+r$$

$$ho2*\text{beta}*(V(i)+h*c1*0.5)*((I(i)+h*c1*0.5)+\text{rho}1*(T(i)+h*c1*0.5))-$$

$$(\text{miu}+\text{delta})*(L(i)+h*c1*0.5)+U10*(T(i)+h*c1*0.5));$$

$$d2=h*(((1-l)*\text{beta}*(S(i)+h*d1*0.5)*((I(i)+h*d1*0.5)+\text{rho}1*(T(i)+h*d1*0.5)))+\text{delta}*($$

$$L(i)+h*d1*0.5)-(\text{miu}+\text{alpa}+U30)*(I(i)+h*d1*0.5));$$

$$e2=h*(U30*(I(i)+h*e1*0.5)-(\text{miu}+U20)*(T(i)+h*e1*0.5));$$

$$a3=h*(\text{Lambda}-\text{beta}*(S(i)+h*a2*0.5)*((I(i)+h*a2*0.5)+\text{rho}1*(T(i)+h*a2*0.5)-$$

$$(\text{miu}+U10)*(S(i)+h*a2*0.5)));$$

$$b3=h*(U10*(S(i)+h*b2*0.5)-\text{rho}2*\text{beta}*(V(i)+h*b2*0.5)*((I(i)+h*b2*0.5)+\text{rho}1*(T(i)+h*b2*0.5))-$$

$$\text{miu}*(V(i)+h*b2*0.5));$$

$$\begin{aligned}
c3 &= h * (1 * \text{beta} * (S(i) + h * c2 * 0.5) * ((I(i) + h * c2 * 0.5) + \text{rho}1 * (T(i) + h * c2 * 0.5)) + r \\
&\text{ho}2 * \text{beta} * (V(i) + h * c2 * 0.5) * ((I(i) + h * c2 * 0.5) + \text{rho}1 * (T(i) + h * c2 * 0.5)) - \\
&(\text{miu} + \text{delta}) * (L(i) + h * c2 * 0.5) + U10 * (T(i) + h * c2 * 0.5)); \\
d3 &= h * (((1 - \\
&l) * \text{beta} * (S(i) + h * d2 * 0.5) * ((I(i) + h * d2 * 0.5) + \text{rho}1 * (T(i) + h * d2 * 0.5))) + \text{delta} * (\\
&L(i) + h * d2 * 0.5) - (\text{miu} + \text{alpha} + U30) * (I(i) + h * d2 * 0.5)); \\
e3 &= h * (U30 * (I(i) + h * e2 * 0.5) - (\text{miu} + U20) * (T(i) + h * e2 * 0.5));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a4 &= h * (\text{Lambda} - \text{beta} * (S(i) + h * a3) * ((I(i) + h * a3) + \text{rho}1 * (T(i) + h * a3) - \\
&(\text{miu} + U10) * (S(i) + h * a3))); \\
b4 &= h * (U10 * (S(i) + h * b3) - \\
&\text{rho}2 * \text{beta} * (V(i) + h * b3) * ((I(i) + h * b3) + \text{rho}1 * (T(i) + h * b3)) - \\
&\text{miu} * (V(i) + h * b3)); \\
c4 &= h * (1 * \text{beta} * (S(i) + h * c3) * ((I(i) + h * c3) + \text{rho}1 * (T(i) + h * c3)) + \text{rho}2 * \text{beta} * (V(\\
&i) + h * c3) * ((I(i) + h * c3) + \text{rho}1 * (T(i) + h * c3)) - \\
&(\text{miu} + \text{delta}) * (L(i) + h * c3) + U10 * (T(i) + h * c3)); \\
d4 &= h * (((1 - \\
&l) * \text{beta} * (S(i) + h * d3) * ((I(i) + h * d3) + \text{rho}1 * (T(i) + h * d3))) + \text{delta} * (L(i) + h * d3) - \\
&(\text{miu} + \text{alpha} + U30) * (I(i) + h * d3)); \\
e4 &= h * (U30 * (I(i) + h * e3) - (\text{miu} + U20) * (T(i) + h * e3));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= (a1 + 2 * a2 + 2 * a3 + a4) / 6; \\
b &= (b1 + 2 * b2 + 2 * b3 + b4) / 6; \\
c &= (c1 + 2 * c2 + 2 * c3 + c4) / 6; \\
d &= (d1 + 2 * d2 + 2 * d3 + d4) / 6; \\
e &= (e1 + 2 * e2 + 2 * e3 + e4) / 6;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(i+1) &= S(i) + a; \\
V(i+1) &= V(i) + b; \\
L(i+1) &= L(i) + c; \\
I(i+1) &= I(i) + d; \\
T(i+1) &= T(i) + e;
\end{aligned}$$

end

$$\begin{aligned}
aa1 &= h * (\text{Lambda} - \text{beta} * S1(i) * (I1(i) + \text{rho}1 * T1(i)) - (\text{miu} + U1(i)) * S1(i)); \\
bb1 &= h * (U1(i) * S1(i) - \text{rho}2 * \text{beta} * V1(i) * (I1(i) + \text{rho}1 * T1(i)) - \text{miu} * V1(i)); \\
cc1 &= h * (1 * \text{beta} * S1(i) * (I1(i) + \text{rho}1 * T1(i)) + \text{rho}2 * \text{beta} * V1(i) * (I1(i) + \text{rho}1 * T1 \\
&(i)) - (\text{miu} + \text{delta}) * L1(i) + U2(i) * T1(i)); \\
dd1 &= h * (((1 - l) * \text{beta} * S1(i) * (I1(i) + \text{rho}1 * T1(i))) + \text{delta} * L1(i) - \\
&(\text{miu} + \text{alpha} + U3(i)) * I1(i)); \\
ee1 &= h * (U3(i) * I1(i) - (\text{miu} + U2(i)) * T1(i));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
aa2 &= h * (\text{Lambda} - \\
&\text{beta} * (S1(i) + 0.5 * h * aa1) * ((I1(i) + 0.5 * h * dd1) + \rho_1 * (T1(i) + 0.5 * h * ee1) - \\
&(\text{miu} + U1(i)) * (S1(i) + 0.5 * h * aa1))); \\
bb2 &= h * (U1(i) * (S1(i) + 0.5 * h * aa1) - \\
&\rho_2 * \text{beta} * (V1(i) + 0.5 * h * bb1) * ((I1(i) + 0.5 * h * dd1) + \rho_1 * (T1(i) + 0.5 * h * ee1) \\
&)) - \text{miu} * (V1(i) + 0.5 * h * bb1)); \\
cc2 &= h * (1 * \text{beta} * (S1(i) + 0.5 * h * aa1) * ((I1(i) + 0.5 * h * dd1) + \rho_1 * (T1(i) + 0.5 * h * \\
&ee1)) + \rho_2 * \text{beta} * (V1(i) + 0.5 * h * bb1) * ((I1(i) + 0.5 * h * dd1) + \rho_1 * (T1(i) + 0.5 \\
&* h * ee1)) - (\text{miu} + \delta) * (L1(i) + 0.5 * h * cc1) + U2(i) * (T1(i) + 0.5 * h * ee1)); \\
dd2 &= h * (((1 - \\
&l) * \text{beta} * (S1(i) + 0.5 * h * aa1) * ((I1(i) + 0.5 * h * dd1) + \rho_1 * (T1(i) + 0.5 * h * ee1))) + \\
&\delta * (L1(i) + 0.5 * h * cc1) - (\text{miu} + \alpha + U3(i)) * (I1(i) + 0.5 * h * dd1)); \\
ee2 &= h * (U3(i) * (I1(i) + 0.5 * h * dd1) - (\text{miu} + U2(i)) * (T1(i) + 0.5 * h * ee1));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
aa3 &= h * (\text{Lambda} - \\
&\text{beta} * (S1(i) + 0.5 * h * aa2) * ((I1(i) + 0.5 * h * dd2) + \rho_1 * (T1(i) + 0.5 * h * ee2) - \\
&(\text{miu} + U1(i)) * (S1(i) + 0.5 * h * aa2))); \\
bb3 &= h * (U1(i) * (S1(i) + 0.5 * h * aa2) - \\
&\rho_2 * \text{beta} * (V1(i) + 0.5 * h * bb2) * ((I1(i) + 0.5 * h * dd2) + \rho_1 * (T1(i) + 0.5 * h * ee2) \\
&)) - \text{miu} * (V1(i) + 0.5 * h * bb2)); \\
cc3 &= h * (1 * \text{beta} * (S1(i) + 0.5 * h * aa2) * ((I1(i) + 0.5 * h * dd2) + \rho_1 * (T1(i) + 0.5 * h * \\
&ee2)) + \rho_2 * \text{beta} * (V1(i) + 0.5 * h * bb2) * ((I1(i) + 0.5 * h * dd2) + \rho_1 * (T1(i) + 0.5 \\
&* h * ee2)) - (\text{miu} + \delta) * (L1(i) + 0.5 * h * cc2) + U2(i) * (T1(i) + 0.5 * h * ee2)); \\
dd3 &= h * (((1 - \\
&l) * \text{beta} * (S1(i) + 0.5 * h * aa2) * ((I1(i) + 0.5 * h * dd2) + \rho_1 * (T1(i) + 0.5 * h * ee2))) + \\
&\delta * (L1(i) + 0.5 * h * cc2) - (\text{miu} + \alpha + U3(i)) * (I1(i) + 0.5 * h * dd2)); \\
ee3 &= h * (U3(i) * (I1(i) + 0.5 * h * dd2) - (\text{miu} + U2(i)) * (T1(i) + 0.5 * h * ee2));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
aa4 &= h * (\text{Lambda} - \text{beta} * (S1(i) + h * aa3) * ((I1(i) + h * dd3) + \rho_1 * (T1(i) + h * ee3) - \\
&(\text{miu} + U1(i)) * (S1(i) + h * aa3))); \\
bb4 &= h * (U1(i) * (S1(i) + h * aa3) - \\
&\rho_2 * \text{beta} * (V1(i) + h * bb3) * ((I1(i) + h * dd3) + \rho_1 * (T1(i) + h * ee3)) - \\
&\text{miu} * (V1(i) + h * bb3)); \\
cc4 &= h * (1 * \text{beta} * (S1(i) + h * aa3) * ((I1(i) + h * dd3) + \rho_1 * (T1(i) + h * ee3)) + \rho_2 * \\
&\text{beta} * (V1(i) + h * bb3) * ((I1(i) + h * dd3) + \rho_1 * (T1(i) + h * ee3)) - \\
&(\text{miu} + \delta) * (L1(i) + h * cc3) + U2(i) * (T1(i) + h * ee3)); \\
dd4 &= h * (((1 - \\
&l) * \text{beta} * (S1(i) + h * aa3) * ((I1(i) + h * dd3) + \rho_1 * (T1(i) + h * ee3))) + \delta * (L1(i) \\
&+ h * cc3) - (\text{miu} + \alpha + U3(i)) * (I1(i) + h * dd3)); \\
ee4 &= h * (U3(i) * (I1(i) + h * dd3) - (\text{miu} + U2(i)) * (T1(i) + h * ee3));
\end{aligned}$$

$$aa = (aa1 + 2 * aa2 + 2 * aa3 + aa4) / 6;$$

```

bb=(bb1+2*bb2+2*bb3+bb4)/6;
cc=(cc1+2*cc2+2*cc3+cc4)/6;
dd=(dd1+2*dd2+2*dd3+dd4)/6;
ee=(ee1+2*ee2+2*ee3+ee4)/6;

```

```

S1(i+1)=S1(i)+aa;
V1(i+1)=V1(i)+bb;
L1(i+1)=L1(i)+cc;
I1(i+1)=I1(i)+dd;
T1(i+1)=T1(i)+ee;
end
%persamaan costate
for i=1:n
j=(n+1)-i;

```

```

n11 = h*(-(-(lambda1(j+1)*beta*(I1(j+1)+rho1*T1(j+1)))-
lambda1(j+1)*(miu+U1(i))+lambda2(j+1)*U1(i)+lambda3(j+1)*1*beta*(I1
(j+1)+rho1*T1(j+1))+lambda4(j+1)*(1-l)*beta*(I1(j+1)+rho1*T1(j+1))));
n21 = h*(-(lambda2(j+1)*beta*rho2*(I1(j+1)+rho1*T1(j+1)))-
lambda2(j+1)*miu+lambda3(j+1)*beta*rho2*(I1(j+1)+rho1*T1(j+1))));
n31 = h*(-(A1-lambda3(j+1)*(miu+delta)+lambda4(j+1)*delta));
n41 = h*(-(A2-lambda1(j+1)*beta*S1(j+1)-
lambda2(j+1)*beta*rho2*V1(j+1)+lambda3(j+1)*beta*S1(j+1)+lambda3
(j+1)*beta*rho2*V1(j+1)-
lambda4(j+1)*beta*S1(j+1)+lambda4(j+1)*beta*S1(j+1)-
(miou+alpa+U3(i))*lambda4(j+1)+lambda5(j+1)*U3(i)));
n51 = h*(-(A3-lambda1(j+1)*beta*rho1*S1(j+1)-
lambda2(j+1)*beta*rho2*V1(j+1)*rho1+lambda3(j+1)*beta*S1(j+1)*rh
o1+lambda3(j+1)*beta*rho1*V1(j+1)*rho2+lambda3(j+1)*U2(i)-
lambda4(j+1)*beta*rho1*S1(j+1)-
lambda5(j+1)*(miu+U2(i))+lambda4(j+1)*beta*rho1*S1(j+1))););

```

```

n12 = h*(-(-(lambda1(j+1)+0.5*h*n11)*beta*(I1(j+1)+rho1*T1(j+1)))-
(lambda1(j+1)+0.5*h*n11)*(miu+U1(i))+lambda2(j+1)+0.5*h*n21)*U1(i)
)+(lambda3(j+1)+0.5*h*n31)*1*beta*(I1(j+1)+rho1*T1(j+1))+lambda4(j
+1)+0.5*h*n41)*(1-l)*beta*(I1(j+1)+rho1*T1(j+1))));
n22 = h*(-(
(lambda2(j+1)+0.5*h*n21)*beta*rho2*(I1(j+1)+rho1*T1(j+1))-
(lambda2(j+1)+0.5*h*n21)*miu+(lambda3(j+1)+0.5*h*n31)*beta*rho2*(I
1(j+1)+rho1*T1(j+1))));
n32 = h*(-(A1-
(lambda3(j+1)+0.5*h*n31)*(miu+delta)+(lambda4(j+1)+0.5*h*n41)*delta
)););

```

$$\begin{aligned}
n42 = & h^*(-(A2-(\lambda_{j+1})+0.5*h*n11)*\beta*S1(j+1)- \\
& (\lambda_{2(j+1)}+0.5*h*n21)*\beta*\rho_2*V1(j+1)+(\lambda_{3(j+1)}+0.5*h*n3 \\
& 1)*\beta*1*S1(j+1)+(\lambda_{3(j+1)}+0.5*h*n31)*\beta*\rho_2*V1(j+1)- \\
& (\lambda_{4(j+1)}+0.5*h*n41)*\beta*1*S1(j+1)+(\lambda_{4(j+1)}+0.5*h*n41)*\beta \\
& \eta*S1(j+1)- \\
& (\mu+\alpha+U3(i))*(\lambda_{4(j+1)}+0.5*h*n41)+(\lambda_{5(j+1)}+0.5*h*n51) \\
& *U3(i));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n52 = & h^*(-(A3-(\lambda_{j+1})+0.5*h*n11)*\beta*\rho_1*S1(j+1)- \\
& (\lambda_{2(j+1)}+0.5*h*n21)*\beta*\rho_2*V1(j+1)*\rho_1+(\lambda_{3(j+1)}+0.5* \\
& h*n31)*\beta*1*S1(j+1)*\rho_1+(\lambda_{3(j+1)}+0.5*h*n31)*\beta*\rho_1*V1(j \\
& +1)*\rho_2+(\lambda_{3(j+1)}+0.5*h*n31)*U2(i)- \\
& (\lambda_{4(j+1)}+0.5*h*n41)*\beta*\rho_1*1*S1(j+1)- \\
& (\lambda_{5(j+1)}+0.5*h*n51)*(\mu+U2(i))+(\lambda_{4(j+1)}+0.5*h*n41)*\beta \\
& *\rho_1*S1(j+1));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n13 = & h^*(-((\lambda_{j+1})+0.5*h*n12)*\beta*(I1(j+1)+\rho_1*T1(j+1)))- \\
& (\lambda_{1(j+1)}+0.5*h*n12)*(\mu+U1(i))+(\lambda_{2(j+1)}+0.5*h*n22)*U1(i) \\
& +(\lambda_{3(j+1)}+0.5*h*n32)*1*\beta*(I1(j+1)+\rho_1*T1(j+1))+(\lambda_{4(j} \\
& +1)+0.5*h*n42)*(1-1)*\beta*(I1(j+1)+\rho_1*T1(j+1)));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n23 = & h^*(-(\\
& (\lambda_{2(j+1)}+0.5*h*n22)*\beta*\rho_2*(I1(j+1)+\rho_1*T1(j+1))- \\
& (\lambda_{2(j+1)}+0.5*h*n22)*\mu+(\lambda_{3(j+1)}+0.5*h*n32)*\beta*\rho_2*(I \\
& 1(j+1)+\rho_1*T1(j+1)));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n33 = & h^*(-(A1- \\
& (\lambda_{3(j+1)}+0.5*h*n32)*(\mu+\delta))+(\lambda_{4(j+1)}+0.5*h*n42)*\delta \\
&));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n43 = & h^*(-(A2-(\lambda_{j+1})+0.5*h*n12)*\beta*S1(j+1)- \\
& (\lambda_{2(j+1)}+0.5*h*n22)*\beta*\rho_2*V1(j+1)+(\lambda_{3(j+1)}+0.5*h*n3 \\
& 2)*\beta*1*S1(j+1)+(\lambda_{3(j+1)}+0.5*h*n32)*\beta*\rho_2*V1(j+1)- \\
& (\lambda_{4(j+1)}+0.5*h*n42)*\beta*1*S1(j+1)+(\lambda_{4(j+1)}+0.5*h*n42)*\beta \\
& \eta*S1(j+1)- \\
& (\mu+\alpha+U3(i))*(\lambda_{4(j+1)}+0.5*h*n42)+(\lambda_{5(j+1)}+0.5*h*n52) \\
& *U3(i));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n53 = & h^*(-(A3-(\lambda_{j+1})+0.5*h*n12)*\beta*\rho_1*S1(j+1)- \\
& (\lambda_{2(j+1)}+0.5*h*n22)*\beta*\rho_2*V1(j+1)*\rho_1+(\lambda_{3(j+1)}+0.5* \\
& h*n32)*\beta*1*S1(j+1)*\rho_1+(\lambda_{3(j+1)}+0.5*h*n32)*\beta*\rho_1*V1(j \\
& +1)*\rho_2+(\lambda_{3(j+1)}+0.5*h*n32)*U2(i)- \\
& (\lambda_{4(j+1)}+0.5*h*n42)*\beta*\rho_1*1*S1(j+1)- \\
& (\lambda_{5(j+1)}+0.5*h*n52)*(\mu+U2(i))+(\lambda_{4(j+1)}+0.5*h*n42)*\beta \\
& *\rho_1*S1(j+1));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n14 = & h^*(-((\lambda_{j+1})+h*n13)*\beta*(I1(j+1)+\rho_1*T1(j+1)))- \\
& (\lambda_{1(j+1)}+h*n13)*(\mu+U1(i))+(\lambda_{2(j+1)}+h*n23)*U1(i)+(\lambda_{b
\end{aligned}$$

```

da3(j+1)+h*n33)*1*beta*(I1(j+1)+rho1*T1(j+1))+(lambda4(j+1)+h*n43)*
(1-1)*beta*(I1(j+1)+rho1*T1(j+1)));
n24 = h*(-(lambda2(j+1)+h*n23)*beta*rho2*(I1(j+1)+rho1*T1(j+1))-
(lambda2(j+1)+h*n23)*miu+(lambda3(j+1)+h*n33)*beta*rho2*(I1(j+1)+r
ho1*T1(j+1)));
n34 = h*(-(A1-
(lambda3(j+1)+h*n33)*(miu+delta)+(lambda4(j+1)+h*n43)*delta));
n44 = h*(-(A2-(lambda1(j+1)+h*n13)*beta*S1(j+1)-
(lambda2(j+1)+h*n23)*beta*rho2*V1(j+1)+(lambda3(j+1)+h*n33)*beta*I
*S1(j+1)+(lambda3(j+1)+h*n33)*beta*rho2*V1(j+1)-
(lambda4(j+1)+h*n43)*beta*I*S1(j+1)+(lambda4(j+1)+h*n43)*beta*S1(j
+1)-
(miu+alpa+U3(i))*(lambda4(j+1)+h*n43)+(lambda5(j+1)+h*n53)*U3(i)));
n54 = h*(-(A3-(lambda1(j+1)+h*n13)*beta*rho1*S1(j+1)-
(lambda2(j+1)+h*n23)*beta*rho2*V1(j+1)*rho1+(lambda3(j+1)+h*n33)*
beta*I*S1(j+1)*rho1+(lambda3(j+1)+h*n33)*beta*rho1*V1(j+1)*rho2+(la
mbda3(j+1)+h*n33)*U2(i)-(lambda4(j+1)+h*n43)*beta*rho1*I*S1(j+1)-
(lambda5(j+1)+h*n53)*(miu+U2(i)+(lambda4(j+1)+h*n43)*beta*rho1*S
1(j+1)));
n1=(n11+2*n12+2*n13+n14)/6;
n2=(n21+2*n22+2*n23+n24)/6;
n3=(n31+2*n32+2*n33+n34)/6;
n4=(n41+2*n42+2*n43+n44)/6;
n5=(n51+2*n52+2*n53+n54)/6;

```

```

lambda1(j)=lambda1(j+1)-n1;
lambda2(j)=lambda2(j+1)-n2;
lambda3(j)=lambda3(j+1)-n3;
lambda4(j)=lambda4(j+1)-n4;
lambda5(j)=lambda5(j+1)-n5;
U1_dalem = (lambda1-lambda2).*S1/(2*A4);
U2_dalem = (lambda5-lambda3).*T1/(2*A5);
U3_dalem = (lambda4-lambda5).*I1/(2*A6);

```

```

U11 = min(max(0,U1_dalem),U1_max);
U21 = min(max(U2_dalem,0),U2_max);
U31 = min(max(U3_dalem,0),U3_max);

```

```

U1 = 0.5*(U11+oldU1);
U2 = 0.5*(U21+oldU2);
U3 = 0.5*(U31+oldU3);

```

```

err1=sum(abs(oldU1-U1));
err2=sum(abs(oldU2-U2));
err3=sum(abs(oldU3-U3));

err1;
err2;
err3;
Err(x,1) = err1;
Err(x,2) = err2;
Err(x,3) = err3;
x = x+1;
%
t=A1*L1(i)+A2*I1(i)+A3*T1(i)+A4*(U1.^2)+A5*(U2.^2)+A6*(U3.^2);
t=A1.*L1+A2.*I1+A3.*T1+A4*(U1.^2)+A5*(U2.^2)+A6*(U3.^2);
J=sum(t*h);
Err(x,4) = U1(i);
Err(x,5) = U2(i);
Err(x,6) = U3(i);

Err(x,7) = L1(i);
Err(x,8) = I1(i);
Err(x,9) = T1(i);
Err(x,10) = J;

```


BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Feri Winata dan dilahirkan di Jombang, 3 Desember 1995 dari pasangan Wiyadi dan Sulastri. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara. Penulis bertempat tinggal di Dsn. Rejosopinggir Ds. Rejosopinggir, Kec. Tembelang, Kab. Jombang. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Dharma Wanita 2 Rejosopinggir, SDN Rejosopinggir 1, SMPN 2 Tembelang, dan SMAN 2 Jombang. Setelah lulus dari SMA/MA, penulis melanjutkan studinya di S1 Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya tahun 2014. Selama perkuliahan penulis aktif mengikuti kegiatan organisasi di KM ITS, khususnya di Jurusan Matematika ITS. Penulis pernah menjadi Staff Ristek HIMATIKA ITS 2016/2017 Segala saran dan kritik yang membangun untuk Tugas Akhir ini serta bagi yang ingin berdiskusi lebih lanjut dengan penulis dapat menghubungi via email dengan alamat feriwinataits@gmail.com.