



TESIS - SM 142501

KENDALI OPTIMAL SISTEM PERAWATAN PRODUK DENGAN
MEMPERHATIKAN KERUSAKAN PRODUK, PAJAK EMISI,
INVESTASI *R&D* PADA TEKNOLOGI POLUSI DAN TINGKAT
DISKON

TRI MARYONO RUSADI
NRP 06111450010020

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Dra. Mardijah, MT

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018



TESIS - SM 142501

**KENDALI OPTIMAL SISTEM PERAWATAN PRODUK DENGAN
MEMPERHATIKAN KERUSAKAN PRODUK, PAJAK EMISI,
INVESTASI *R&D* PADA TEKNOLOGI POLUSI DAN TINGKAT
DISKON**

TRI MARYONO RUSADI
NRP 06111450010020

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Dra. Mardlijah, MT

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018



THESIS - SM 142501

**OPTIMAL CONTROL OF PRODUCTION-MAINTENANCE SYSTEM
WITH DETERIORATING ITEMS, EMISSION TAX, POLLUTION
TECHNOLOGY R&D INVESTMENT AND DISCOUNT RATE**

TRI MARYONO RUSADI
NRP 06111450010020

SUPERVISOR
Dr. Dra. Mardlijah, MT

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTATION AND SCIENCE DATA
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2018

LEMBAR PENGESAHAN TESIS

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar

Magister Sains (M.Si.)

di

Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh

TRI MARYONO RUSADI

NRP. 06111450010020

Tanggal Ujian : 1 Agustus 2018

Periode Wisuda : September 2018

Disetujui Oleh :



Dr. Dra. Mardlijah, M.T.
NIP. 19670114 199102 2 001

(Pembimbing)



Prof. Dr. Erna Aprilliani, M.Si.
NIP. 19660414 199102 2 001

(Penguji)



Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.
NIP. 19730930 199702 1 001

(Penguji)



Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.
NIP. 19611115 198703 1 003

(Penguji)



Dekan FMKSD,

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.

NIP. 196506051989031002

KENDALI OPTIMAL SISTEM PERAWATAN PRODUK DENGAN MEMPERHATIKAN KERUSAKAN PRODUK, PAJAK EMISI, INVESTASI R&D PADA TEKNOLOGI POLUSI DAN TINGKAT DISKON

Nama Mahasiswa : Tri Maryono Rusadi
NRP : 06111450010020
Pembimbing : Dr. Dra. Mardijah, MT

ABSTRAK

Pengendalian persediaan adalah pengendalian biaya keseluruhan yang terkait persediaan dengan mempertimbangkan persediaan sekecil mungkin tanpa menimbulkan masalah. Pada perkembangannya, pengendalian dan pemeliharaan persediaan produk yang memburuk telah menarik banyak perhatian dalam bidang analisis inventori karena kebanyakan produk akan memburuk dari waktu ke waktu. Pada penelitian ini, permasalahan inventori berupa perawatan produk dengan memperhatikan banyaknya kerusakan produk dan tingkat diskon, tetap menjadi bahasan utama seperti penelitian-penelitian sebelumnya, selain itu faktor pajak emisi dan investasi R&D pada teknologi yang usang diperhatikan sehingga fungsi dari biaya total akan berubah pula. Digunakan Prinsip Maksimum Pontryagin untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal dan diperoleh syarat batas dari variabel kontrol sehingga banyaknya inventori, proporsi produk baik, teknologi usang, produk yang terjadwal, produk yang diberi perawatan dan investasi pengembangan teknologi mendekati atau menuju yang ditargetkan. Dari hasil tersebut berpengaruh terhadap biaya total dimana biaya total semakin minimum ketika keseluruhan mendekati atau menuju yang ditargetkan.

Kata kunci: Kontrol Optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin, Sistem Perawatan Produk, Pajak Emisi, Investasi R&D Polusi.

OPTIMAL CONTROL OF PRODUCTION-MAINTENANCE SYSTEM WITH DETERIORATING ITEMS, EMISSION TAX, POLLUTION TECHNOLOGY R&D INVESTMENT AND DISCOUNT RATE

Name : Tri Maryono Rusadi
Student Identity Number : 06111450010020
Supervisor : Dr. Dra. Mardlijah, MT

ABSTRACT

Inventory control is the overall inventory-related cost control taking into account the smallest possible inventory without causing any problems. In its development, the control and maintenance of production inventories of deteriorating items has attracted much attention in the field of inventory analysis as most production goods will deteriorate over time. In this thesis, inventory problems in the form of production-maintenance system with deteriorating items and discount rate, remain the main discussion such as previous studies, besides the emission tax factor and pollution R & D investment on obsolete technology rate are considered so the function of total costs will be change. Pontryagin's Maximum Principle was used to solve the optimal control problem and obtain the boundary conditions of the control variable so that the inventory level, proportion of good unit rate, the environment obsolescence rate of technology, the schedule production rate, the preventive maintenance rate and the pollution R&D investment are approaching or towards the goal rate. From these results affect the total cost where the total cost is increasingly minimum when the whole approaches or towards the goal rate

Keywords: Optimal Control, Pontryagin Maximum Principle, Production Maintenance System, Emission Tax, Pollution R & D Investment.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim,

Alhamdulillahirobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul **“Kendali Optimal Sistem Perawatan Produk Dengan Memperhatikan Kerusakan Produk, Pajak Emisi, Investasi R&D Pada Teknologi Polusi dan Tingkat Diskon”** sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 Magister Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data (FMKSD), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan Tesis ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Ibu Khabibah, Bapak Sunardi, beserta kakak Ahmad Mukhlis sa'idi dan Hidayat Robbi dan juga istri tercinta Siska Aprilia Hardiyanti yang selalu memberikan dukungan, do'a dan motivasi agar penulis dapat menyelesaikan Tesis ini
2. Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc selaku Dekan Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data (FMKSD), Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
4. Dr. Imam Mukhlash, S.Si.,M.T. selaku Kepala Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
5. Dr. Mahmud Yunus, M.Si. selaku Kepala Program Studi Pascasarjana Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
6. Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si,M.T. selaku Dosen Wali yang telah memberikan motivasi, arahan, dan bimbingannya.
7. Dr. Dra. Mardlijah, MT. selaku dosen pembimbing, yang telah memberikan pengalaman yang berharga serta meluangkan waktu di tengah

kesibukannya untuk berdiskusi dan memberi arahan dalam penyusunan tesis ini.

8. Prof. Dr. Erna Aprilliani, M.Si., Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si., dan Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan juga motivasi bagi penulis sehingga Tesis ini dapat terselesaikan.
9. Seluruh Dosen Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, terimakasih atas seluruh ilmu, nasihat, dan bimbingannya, serta seluruh Staff Administrasi, terima kasih atas segala bantuannya.
10. Teman-teman Pascasarjana Matematika ITS angkatan 2014, yang telah menemani, membantu, mendoakan, dan memberikan semangat kepada penulis, serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Semoga Allah SWT selalu memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tesis ini, Amin.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan kedepannya. Semoga Tesis ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya ilmu matematika dan terapannya, Amin.

Surabaya,
Agustus 2018

Penulis

DAFTAR ISI

No.	Halaman
1. HALAMAN JUDUL.....	i
2. LEMBAR PENGESAHAN	v
3. ABSTRAK	vii
4. ABSTRACT	ix
5. KATA PENGANTAR	xi
5. DAFTAR ISI.....	xiii
6. DAFTAR GAMBAR	xvii
7. DAFTAR TABEL.....	xxi
8. DAFTAR SIMBOL.....	xxiii
BAB 1 PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Rumusan Masalah.....	2
1.3. Batasan Penulisan	2
1.4. Tujuan Masalah.....	3
1.5. Manfaat	3
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	
2.1. Penelitian Terdahulu	5
2.2. Model Sistem Perawatan Produksi	5
2.3. Sistem Perawatan Produk Dengan Memperhatikan Kerusakan Produk, Pajak Emisi, Investasi R&D Pada teknologi Polusi dan Tingkat Diskon	7

	Halaman
2.4. Bentuk Sistem Persediaan	10
2.4.1. Sistem sederhana	10
2.4.2. Sistem berjenjang (<i>Multi Echelon Inventory System</i>).	11
2.5. Biaya-Biaya Inventori	11
2.5.1. Biaya Pembelian (<i>Purchasing Cost</i>)	11
2.5.2. Biaya Pengadaan (<i>Procurement Cost</i>)	11
2.5.3. Biaya Penyimpanan (<i> Holding Cost</i>)	12
2.5.4. Biaya Kekurangan Bahan (<i>Stockout Cost</i>)	12
2.5.5. Biaya sistematis	12
2.6. Pajak untuk Mengatasi Eksternalitas Negatif	12
2.7. Research And Development (R & D)	13
2.8. Titik Keseimbangan	13
2.9. Linierisasi	14
2.10. Kestabilan Lokal	15
2.11. Keterkontrolan.....	16
2.12. Kontrol Optimal	16
2.13. Prinsip Maksimum Pontryagin	17
2.14. Metode Runge Kutta	19
 BAB 3 METODA PENELITIAN	
3.1. Rancangan Penelitian	21
3.1.1. Memahami Konsep dan Studi Literatur	21
3.1.2. Analisa Sistem Dinamik	21

	Halaman
3.1.3. Mengembangkan Model pada Masalah Kontrol Optimal	21
3.1.4. Menentukan Formulasi Masalah Kontrol Optimal	21
3.1.5. Menyelesaikan Permasalahan Kontrol Optimal	22
3.1.6. Pembuatan Program Simulasi	22
3.1.7. Analisis nalisa Hasil Simulasi	22
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN	
4.1. Model Sistem Perawatan Produk Dengan Memperhatikan Kerusakan Produk, Pajak Emisi, Investasi R&D Pada teknologi Polusi dan Tingkat Diskon	23
4.1.1. Laju Banyaknya Inventori (Persediaan Barang)	23
4.1.2. Laju Proporsi Produk Baik.....	24
4.1.3. Laju Banyaknya Teknologi Usang.....	24
4.2. Analisa Model Sistem Perawatan Produk Dengan Memperhatikan Kerusakan Produk, Pajak Emisi, Investasi R & D Pada teknologi Polusi dan Tingkat Diskon	25
4.2.1. Penentuan Titik Keseimbangan	26
4.2.2. Linierisasi.....	26
4.2.3. Analisa Kestabilan	27
4.2.4. Analisa Kestabilan Sistem Perawatan Produk Secara Numerik	28
4.3. Uji Keterkontrolan	29
4.4. Fungsi Objektif Sistem Perawatan Produk dan Pajak Emisi	30

	Halaman
4.5. Kontrol Optimal Menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin	31
4.6. Penyelesaian Numerik	34
4.7. Simulasi Numerik	38
4.7.1. Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang Konstan (Kasus I)	38
4.7.2. Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang Musiman (Kasus II)	42
4.7.3. Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang Menurun (Kasus III)	47
4.7.4. Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang Meningkat (Kasus IV)	52
4.7.5. Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang Tidak Pasti (Kasus V)	57
 BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN	
5.1. Kesimpulan	63
5.2. Saran	64
 DAFTAR PUSTAKA	65
 LAMPIRAN	67
 BIODATA PENULIS	73

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1. Sistem Persediaan Input–Output	10
Gambar 2.2. Sistem Persediaan Berjenjang	11
Gambar 4.1. Diagram Kompartemen untuk Laju Banyaknya Inventori	23
Gambar 4.2. Diagram Kompartemen untuk Laju Proporsi Produk Baik	24
Gambar 4.3 Diagram Kompartemen untuk Laju Teknologi Usang	24
Gambar 4.4. Fungsi Tingkat Inventori	28
Gambar 4.5. Fungsi Laju Proporsi Produk Baik	29
Gambar 4.6. Fungsi Laju Teknologi Usang	29
Gambar 4.7. Laju Tingkat Inventori dikontrol dan tak dikontrol	39
Gambar 4.8. Banyaknya Produk yang Terjadwal	39
Gambar 4.9. Laju Proporsi Produk Baik dikontrol dan tak dikontrol	40
Gambar 4.10. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan.....	40
Gambar 4.11. Laju Tingkat Teknologi Usang dikontrol dan tak dikontrol	41
Gambar 4.12. Investasi Pengembangan Teknologi.....	41
Gambar 4.13. Biaya Produksi Total dikontrol dan tak dikontrol.....	42
Gambar 4.14. Fungsi Permintaan dan Produk Usang terhadap Waktu	43
Gambar 4.15. Laju Tingkat Inventori dikontrol dan tak dikontrol	44
Gambar 4.16. Banyaknya Produk yang Terjadwal	44
Gambar 4.17. Laju Proporsi Produk Baik dikontrol dan tak dikontrol	45
Gambar 4.18. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan.....	45
Gambar 4.19. Laju Tingkat Teknologi Usang dikontrol dan tak dikontrol	46

	Halaman
Gambar 4.20. Investasi Pengembangan Teknologi	46
Gambar 4.21. Biaya Produksi Total dikontrol dan tak dikontrol	47
Gambar 4.22. Fungsi Permintaan dan Produk Usang terhadap Waktu	48
Gambar 4.23. Laju Tingkat Inventori dikontrol dan tak dikontrol.....	48
Gambar 4.24. Banyaknya Produk yang Terjadwal	49
Gambar 4.25. Laju Proporsi Produk Baik dikontrol dan tak dikontrol	49
Gambar 4.26. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan	50
Gambar 4.27. Laju Tingkat Teknologi Usang dikontrol dan tak dikontrol.....	50
Gambar 4.28. Investasi Pengembangan Teknologi	51
Gambar 4.29. Biaya Produksi Total dikontrol dan tak dikontrol	51
Gambar 4.30. Fungsi Permintaan dan Produk Usang terhadap Waktu	53
Gambar 4.31. Laju Tingkat Inventori dikontrol dan tak dikontrol.....	53
Gambar 4.32. Banyaknya Produk yang Terjadwal	53
Gambar 4.33. Laju Proporsi Produk Baik dikontrol dan tak dikontrol	54
Gambar 4.34. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan	54
Gambar 4.35. Laju Tingkat Teknologi Usang dikontrol dan tak dikontrol.....	55
Gambar 4.36. Investasi Pengembangan Teknologi	55
Gambar 4.37. Biaya Produksi Total dikontrol dan tak dikontrol	56
Gambar 4.38. Fungsi Permintaan terhadap Waktu	57
Gambar 4.39. Fungsi Produk Usang terhadap Waktu	58
Gambar 4.40. Laju Tingkat Inventori dikontrol dan tak dikontrol.....	58

	Halaman
Gambar 4.41. Banyaknya Produk yang Terjadwal	58
Gambar 4.42. Laju Proporsi Produk Baik dikontrol dan tak dikontrol	59
Gambar 4.43. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan.....	59
Gambar 4.44. Laju Tingkat Teknologi Usang dikontrol dan tak dikontrol	60
Gambar 4.45. Investasi Pengembangan Teknologi.....	60
Gambar 4.46. Biaya Produksi Total dikontrol dan tak dikontrol.....	61

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Kriteria Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem <i>Autonomous</i>	
<i>Nonlinear</i>	16
Tabel 4.1 Parameter	28
Tabel 4.2 Parameter Kasus I	39
Tabel 4.3 Parameter Kasus II	43
Tabel 4.4 Parameter Kasus III	48
Tabel 4.5 Parameter Kasus IV	52
Tabel 4.6 Parameter Kasus V	57

DAFTAR SIMBOL

R_t	Arus kas bersih (<i>net cash flow</i>) pada waktu ke t
$I(t)$	Banyaknya inventori pada waktu t
\bar{I}	Banyaknya inventori yang diinginkan
$u(t)$	Banyaknya produk yang terjadwal pada waktu t
\bar{u}	Banyaknya produk terjadwal yang diinginkan
$\alpha(t)$	Banyaknya produk yang usang pada waktu t
$m(t)$	Banyaknya produk yang akan diberi perawatan pada waktu t
\bar{m}	Banyaknya produk yang akan diberi perawatan yang diinginkan
$S(t)$	Banyaknya permintaan pada waktu t
$h_{1,2}$	Biaya penyimpanan
c_1	Biaya inventori
c_2	Biaya perawatan produksi
θ	Proporsi produk yang rusak secara alami
$p(t)$	Proporsi produk yang baik pada waktu t
\bar{p}	Proporsi produk baik yang diinginkan
ρ	Tingkat diskon (konstan tak negatif)
h_3	Tarif pajak emisi
$b(t)$	Tingkat keusangan teknologi pada waktu t
\bar{b}	Tingkat keusangan teknologi yang diinginkan
c_3	Parameter positif yang diperkirakan dari pengetahuan awal usaha (kebijakan investasi)
$k(t)$	investasi pengembangan teknologi pada waktu t
η	Proporsi teknologi usang
Λ	Nilai eigen
$\Gamma(t)$	R&D Teknologi yang digunakan oleh perusahaan yang melibatkan biaya pada waktu t
$\Upsilon(t)$	Pajak langsung yang dibebankan pada perusahaan pada waktu t

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pengendalian persediaan merupakan bagian yang penting pada suatu perusahaan yang bergerak dalam bidang manufaktur. Mengendalikan persediaan dengan baik adalah menjaga keseimbangan setiap waktu dengan memiliki persediaan yang optimal untuk memaksimalkan keuntungan. Jumlah persediaan yang besar akan menimbulkan biaya yaitu biaya penyimpanan persediaan sehingga keuntungan perusahaan pun berkurang. Selain itu, barang juga dapat rusak jika tidak disimpan dengan baik.

Di lain pihak perusahaan manufaktur sering tidak memperhatikan dampak lingkungan berupa polusi yang ditimbulkan dari teknologi produksi yang sudah usang. Untuk mengurangi dampak kerusakan lingkungan yang ditimbulkan, beberapa negara telah menerapkan pajak emisi dengan batasan-batasan yang diperbolehkan dalam penggunaan teknologi yang kurang ramah lingkungan. Dimana pajak tersebut cukup berperan dalam pelestarian lingkungan namun bagi perusahaan menjadi biaya tambahan karena apabila polusi yang dihasilkan dapat dikurangi atau sesuai batasan yang diperbolehkan maka perusahaan tidak akan menanggung beban pajak emisi. Oleh sebab itu dalam suatu perusahaan diperlukan investasi R&D polusi dimana investasi difokuskan pada pengembangan teknologi polusi sehingga pajak emisi yang dibebankan dapat dikurangi.

Dalam tesis ini, mengikuti kerangka analisis Bukhari dan El-Gohary (2012) dengan mengembangkan model sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk, pajak emisi, investasi R&D pada teknologi polusi dan tingkat diskon. Model yang diusulkan, yaitu meminimumkan biaya total yang mencakup jumlah biaya penyimpanan banyaknya barang, biaya produksi yang dijadwalkan, pajak emisi dan biaya investasi R&D pada teknologi polusi. Solusi optimal diturunkan berdasarkan prinsip Maksimum Pontryagin. Sistem dimodelkan oleh sistem persamaan diferensial non linier dan solusinya

akan dibahas secara numerik dengan Runge-Kutta orde empat dan juga digunakan untuk menggambarkan kinerja sistem sebagai fungsi dari parameter sistem.

1.2 Rumusan Masalah :

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka permasalahan dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana mengembangkan model fungsi objektif atau fungsi tujuan dari sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk, pajak emisi, investasi R & D polusi dan tingkat diskon dalam bentuk masalah kontrol optimal.
2. Bagaimana menentukan banyaknya produk yang diberi perawatan, banyaknya produk yang terjadwal, pajak emisi dan investasi R & D polusi secara optimal dari model sistem perawatan produksi dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Bagaimana analisa hasil simulasi sistem perawatan produksi setelah dilakukan kontrol optimal.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini dibatasi ruang lingkup pembahasannya, antara lain:

1. Permintaan mempunyai batas maksimum.
2. Produk yang diproduksi adalah sejenis.
3. Tingkat kerusakan terjadi setelah produk masuk dalam inventori (gudang penyimpanan).
4. Banyaknya inventori awal $I(0) = I_0 > 0$, proporsi produk baik awal $p(0) = p_0 > 0$ dan banyaknya teknologi usang awal $b(0) = b_0 > 0$ bernilai positif.
5. Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah model perawatan produksi kontinu.
6. Gudang penyimpanan produk dianggap dapat menampung jumlah produk yang dipesan.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun hasil yang ingin dicapai pada penelitian ini adalah :

1. Mengembangkan model fungsi objektif atau fungsi tujuan dari sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk, pajak emisi, investasi R & D polusi dan tingkat diskon dalam bentuk masalah kontrol optimal.
2. Menentukan banyaknya produk yang diberi perawatan, banyaknya produk yang terjadwal dan pajak emisi secara optimal dari model sistem perawatan produksi dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Menganalisa hasil simulasi sistem perawatan produksi setelah dilakukan kontrol optimal.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini antara lain:

1. Memberikan informasi untuk penelitian selanjutnya tentang kontrol optimal sistem inventori khususnya pada perawatan produksi yang dikenai pajak emisi.
2. Memberikan informasi kepada perusahaan dalam melakukan perawatan produksi, pajak emisi yang harus dibayar dan investasi R & D polusi agar perusahaan tidak menanggung kerugian.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Penelitian Terdahulu

Beberapa penelitian yang terkait dengan penulisan dan penyelesaian rencana penelitian ini sebagai berikut.

1. Dragone dkk. (2010), membahas tentang kontrol optimal untuk pencemaran lingkungan dengan melakukan investasi R&D pada teknologi yang ramah lingkungan dengan menerapkan pajak emisi pada teknologi yang usang.
2. Bukhari dan Gohary (2012) membahas tentang kontrol optimal sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk.
3. Vylda Pavela (2015) membahas tentang kontrol optimal sistem inventori dengan memperhatikan kerusakan produk.
4. Siska Aprilia Hardiyanti (2016) membahas tentang kontrol optimal sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dan tingkat diskon.

2.2 Model Sistem Perawatan Produksi

Ditinjau sebuah perusahaan manufaktur yang memproduksi satu barang, menjual beberapa unit dan menyimpan unit lainnya. Dalam paper (Bukhari dan El-Gohary, 2012) telah memodelkan model kontrol optimal dari sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dimana penulis mengasumsikan bahwa kinerja proses dapat diukur dari segi proporsi unit barang akhir yang dihasilkan.

Model persamaan diferensial yang menggambarkan laju inventori $I(t)$ sebagai berikut (Bukhari dan El-Gohary, 2012):

$$\frac{dI(t)}{dt} = p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t)$$

$$\text{dan } I(t) \geq 0, S(t) \geq 0, u(t) \geq 0, 0 \leq p(t) \leq 1$$

dengan : $I(t)$: Banyaknya inventori pada waktu t
 $p(t)$: Proporsi produk baik pada waktu t
 $u(t)$: Banyaknya produk yang terjadwal pada waktu t
 $S(t)$: Banyaknya permintaan pada waktu t
 θ : Proporsi produk yang rusak

Model persamaan diferensial yang menggambarkan laju proporsi produk baik $p(t)$ sebagai berikut (Bukhari dan El-Gohary, 2012):

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)}{dt} &= [1 - p(t)]m(t) - \alpha(t)p(t) \\ \frac{dp(t)}{dt} &= -[\alpha(t) + m(t)]p(t) + m(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{dan } 0 \leq m(t) \leq M(t), 0 \leq p(t) \leq 1, \alpha(t) \geq 0$$

dengan : $p(t)$: Proporsi produk baik pada waktu t
 $m(t)$: Banyaknya produk yang akan diberi perawatan pada waktu t
 $\alpha(t)$: Banyaknya produk yang usang pada waktu t

Siska Aprilia Hardiyanti (2016) pada papernya telah menganalisa pengaruh pemberian tingkat diskon pada sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk untuk sistem waktu yang kontinu digunakan faktor pemotongan sebesar $e^{-\rho t}$, sedangkan untuk sistem waktu diskrit digunakan faktor pemotongan

$\frac{1}{(1 + \rho)^t}$ pendekatan ini diperoleh dari,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^t \approx e^{\frac{t}{n}}, \text{ untuk } n \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty, \text{ dengan } \rho = \frac{1}{n}$$

Sehingga *Net Present Value* (NPV) dapat diformulasikan sebagai berikut,

$$NPV = e^{-\rho t} R_t, \text{ untuk sistem waktu kontinu, atau}$$

$$NPV = \frac{R_t}{(1 + \rho)^t}, \text{ untuk sistem waktu diskrit}$$

Net Present Value (NPV) adalah nilai sekarang dari sejumlah uang yang akan diterima dimasa yang akan datang dan dikonversikan kemasa sekarang

dengan menggunakan tingkat suku bunga (*discount rate*). *Net Present Value* (NPV) merupakan metode untuk menganalisis *Discounted Cash Flow* (DCF) dan merupakan metode standar untuk menaksir kondisi finansial dari proyek jangka panjang (Indayani, 2010)

Pada paper Hardiyanti (2016) yang telah mengembangkan paper Bukhari dan Gohary (2012), yaitu dengan memberikan faktor diskon pada fungsi obyektif sebelumnya. Sehingga fungsi objektifnya sebagai berikut :

$$J = \min_{u(t) \geq 0, m(t) \geq 0} \frac{1}{2} \int_0^T e^{-\rho t} \left[h_1 (I(t) - \bar{I})^2 + h_2 (p(t) - \bar{p})^2 + c_1 (u(t) - \bar{u})^2 + c_2 (m(t) - \bar{m})^2 \right] dt \quad (2.2)$$

dimana $t \in [0, T], h_i, c_i > 0, i = 1, 2$

dengan : h_i : Biaya penyimpanan

c_1 : Biaya inventori

c_2 : Biaya perawatan produksi

\bar{I} : Banyaknya inventori yang diinginkan (target)

\bar{p} : Proporsi produk baik yang diinginkan (target)

\bar{u} : Banyaknya produk terjadwal yang diinginkan (target)

\bar{m} : Banyaknya produk yang akan diberi perawatan yang diinginkan (target)

ρ : Tingkat diskon

2.3 Sistem Perawatan Produk Dengan Memperhatikan Kerusakan Produk, Pajak Emisi, Investasi R&D Pada Teknologi Polusi dan Tingkat Diskon

Untuk menciptakan insentif bagi perusahaan manufaktur berinvestasi dalam Litbang agar teknologi produksinya lebih ramah lingkungan, pemerintah memberlakukan pajak Pigouvian langsung. Biasanya, pajak Pigouvian dikenakan pada jumlah total eksternalitas negatif yang dihasilkan. Kami mengusulkan sebuah rancangan kebijakan pajak polusi alternatif, dimana perusahaan dikenai pajak langsung sama dengan,

$$Y(t) = h_3 (b(t) - \bar{b})^2 \quad (2.3)$$

dimana h_3 adalah tarif pajak yang diberlakukan oleh pemerintah pada perusahaan. Dengan demikian, kebijakan ini sangat dekat dengan adopsi standar kualitas, seperti penggunaan filter yang menangkap CO_2 , untuk mengurangi jumlah polutan yang dipancarkan oleh mobil per mil. $b(t)$ dipandang sebagai tingkat keusangan teknologi yang digunakan untuk mengukur tingkat kerusakan eksternal yang disebabkan oleh penggunaan teknologi yang semakin lama semakin mencemari seiring berjalannya waktu. Penafsiran ekonomi dari $(b(t) - \bar{b})^2$ adalah bahwa perusahaan ingin memperbaiki tingkat keusangan teknologi usang $b(t)$ mendekati tingkat tujuan \bar{b} . Koefisien $b(t)$ merupakan variabel *state*. Model persamaan diferensial yang menggambarkan laju teknologi usang $b(t)$ sebagai berikut:

$$\frac{db(t)}{dt} = -k(t) + \eta b(t) \quad (2.4)$$

dengan $b(0) = b_0, b(T) = b_T$, dimana $b_0 > b_T, \eta > 0$, dan $k(t) \geq 0$, yang merupakan investasi langsung dalam pengembangan teknologi mengurangi polusi yang dilakukan oleh perusahaan.

Mengacu pada paper yang ditulis Dragone dkk. (2010), R&D pada teknologi yang digunakan oleh perusahaan melibatkan biaya langsung diukur dengan

$$\Gamma(t) = c_3 (k(t))^2 \quad (2.5)$$

dimana c_3 adalah parameter positif yang diperkirakan dari pengetahuan sebelumnya tentang bisnis.

Dengan notasi yang sama seperti pada bagian sebelumnya, dan menggabungkan sistem (2.1) dan Persamaan (2.4), kita dapat memperoleh model persamaan diferensial berikut yang menggambarkan banyaknya inventori $I(t)$, proporsi produk baik $p(t)$ dan banyaknya teknologi usang $b(t)$ terhadap perubahan waktu:

$$\frac{dI(t)}{dt} = p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{dp(t)}{dt} &= -[\alpha(t) + m(t)]p(t) + m(t) \\ \frac{db(t)}{dt} &= -k(t) + \eta b(t)\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\text{dan } I(t) \geq 0, S(t) \geq 0, b(t) \geq 0, u(t) \geq 0, k(t) \geq 0, 0 \leq m(t) \leq M(t), \\ 0 \leq p(t) \leq 1, \alpha(t) \geq 0\end{aligned}$$

Dari persamaan (2.2), (2.3) dan (2.5) dapat diformulasikan permasalahan kontrol optimal yang terdiri dari tiga variabel *state* yaitu banyaknya inventori $I(t)$, proporsi produk baik $p(t)$ dan banyaknya teknologi usang $b(t)$ serta tiga variabel kontrol yaitu banyaknya produk yang terjadwal $u(t)$, banyaknya produk yang akan diberi perawatan $m(t)$ dan investasi pengembangan teknologi $k(t)$. Permasalahan dalam penelitian ini adalah untuk meminimumkan fungsi objektif atau fungsi tujuan (*Performance Index*) dan dipengaruhi oleh *discounting*. Fungsi objektif yang digunakan dalam penelitian sebagai berikut:

$$J = \min_{u(t) \geq 0, m(t) \geq 0, k(t)} \frac{1}{2} \int_0^T e^{-\rho t} \left[\begin{aligned} &h_1 (I(t) - \bar{I})^2 + h_2 (p(t) - \bar{p})^2 + h_3 (b(t) - \bar{b})^2 + \\ &c_1 (u(t) - \bar{u})^2 + c_2 (m(t) - \bar{m})^2 + c_3 (k(t))^2 \end{aligned} \right] dt \quad (2.6)$$

dimana $t \in [0, T], h_i, c_i > 0, i = 1, 2$

dengan : h_i : Biaya penyimpanan

h_3 : Tarif pajak emisi

c_1 : Biaya inventori

c_2 : Biaya perawatan produk

c_3 : Biaya pengembangan teknologi

\bar{I} : Banyaknya inventori yang diinginkan (target)

\bar{p} : Proporsi produk baik yang diinginkan (target)

\bar{b} : Banyaknya teknologi usang yang diinginkan (target)

\bar{u} : Banyaknya produk terjadwal yang diinginkan (target)

\bar{m} : Banyaknya produk yang akan diberi perawatan yang diinginkan (target)

ρ : Tingkat diskon

$k(t)$: Investasi pengembangan teknologi pada waktu t

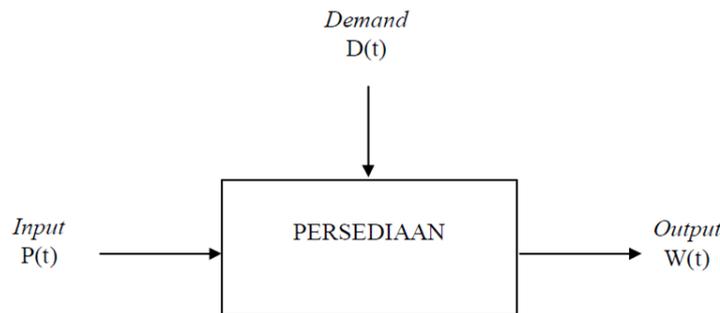
Fungsi objektif (2.6) adalah menghitung besarnya biaya produksi total. Biaya produksi total terdiri dari biaya penyimpanan, biaya inventori, biaya perawatan produksi, besarnya pajak dan investasi pengembangan teknologi. Nilai $\frac{1}{2}$ menunjukkan bahwa bobot yang menyatakan tingkat kepentingan dari biaya-biaya yang bersangkutan adalah sama. Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan dengan Prinsip Maksimum Pontryagin (Bounkhel & Tadj, 2005).

2.4 Bentuk Sistem Persediaan

Secara umum, suatu sistem persediaan menjadi terbagi atas :

2.4.1 Sistem sederhana.

Sistem sederhana yaitu sistem persediaan yang berdasarkan atas input dan output.

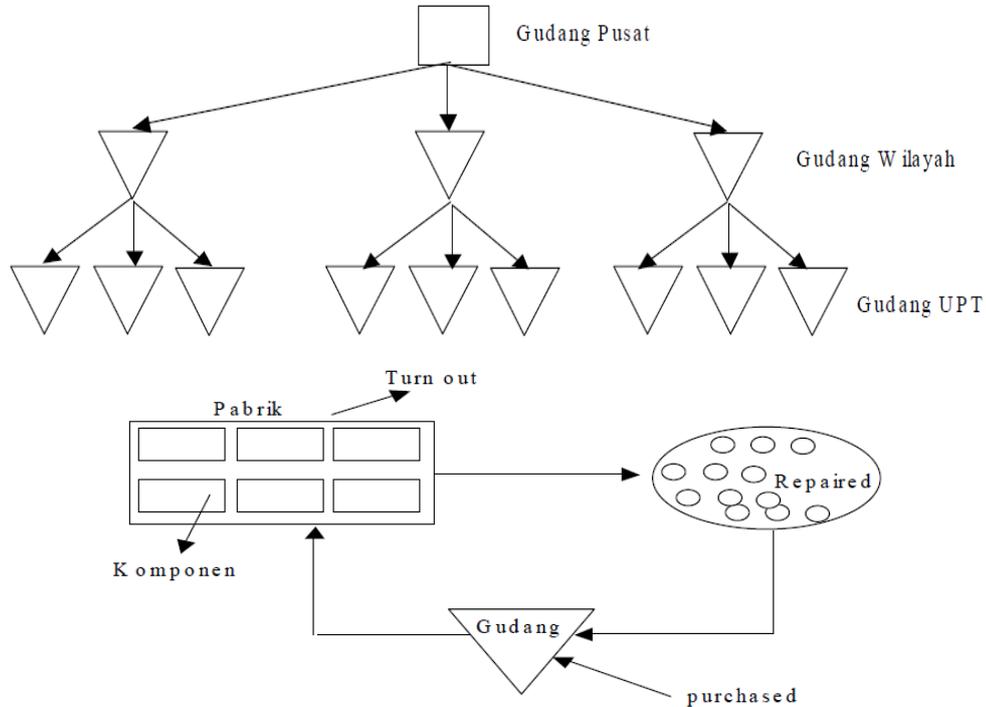


Gambar 2.1. Sistem Persediaan *Input–Output*

Gambar 2.4 menunjukkan sistem persediaan yang dipengaruhi oleh proses input dan proses output. $P(t)$ adalah rata-rata material atau bahan yang masuk kedalam sistem persediaan pada saat t . Sedangkan $W(t)$ adalah rata – rata suatu material atau bahan keluar dari system persediaan. Output ($W(t)$) dipengaruhi oleh permintaan atau kebutuhan terhadap material atau bahan, dengan rata-rata $D(t)$, yang berasal dari luar perusahaan dan berada diluar kendali perusahaan.

2.4.2 Sistem berjenjang (*Multi Echelon Inventory System*).

Sistem berjenjang yaitu sistem persediaan yang memiliki beberapa fasilitas persediaan yang saling berkaitan.



Gambar 2.2. Sistem Persediaan Berjenjang

2.5 Biaya-Biaya Inventori

Tujuan dari pengendalian persediaan adalah memiliki persediaan dalam jumlah yang tepat, pada waktu yang tepat dan dengan biaya yang rendah. Karena itu, kebanyakan model-model persediaan menjadikan biaya sebagai parameter dalam mengambil keputusan. Biaya dalam sistem inventori secara umum dapat diklasifikasikan sebagai berikut :

2.5.1 Biaya Pembelian (*Purchasing Cost*)

Biaya pembelian (*purchase cost*) dari suatu item adalah harga pembelian setiap unit item jika item tersebut berasal dari sumber-sumber eksternal, atau biaya produksi perunit bila item tersebut berasal dari internal perusahaan atau diproduksi sendiri oleh perusahaan.

2.5.2 Biaya Pengadaan (*Procurement Cost*)

Biaya pengadaan dibedakan atas 2 jenis sesuai asal – usul barang , yaitu biaya pemesanan (*ordering cost*) bila barang yang diperlukan diperoleh dari pihak luar

(*supplier*) dan biaya pembuatan (*setup cost*) bila barang diperoleh dengan memproduksi sendiri.

2.5.3 Biaya Penyimpanan (*Holding Cost*)

Biaya penyimpanan (*holding cost*) merupakan biaya yang timbul akibat disimpannya suatu item. Biaya penyimpanan terdiri atas biaya-biaya yang bervariasi secara langsung dengan kuantitas persediaan. Biaya penyimpanan per periode akan semakin besar apabila kuantitas bahan yang dipesan semakin banyak, atau rata rata persediaan semakin tinggi.

2.5.4 Biaya Kekurangan Bahan (*Stockout Cost*)

Biaya kekurangan bahan (*stockout cost*) adalah biaya yang timbul bilamana persediaan tidak mencukupi permintaan produk atau kebutuhan bahan. Biaya-biaya yang termasuk dalam biaya kekurangan persediaan antara lain kehilangan penjualan, kehilangan langganan, biaya pemesanan khusus, terganggunya proses produksi, tambahan pengeluaran kegiatan manajerial, dan sebagainya.

2.5.5 Biaya sistematis

Biaya ini meliputi biaya perancangan dan perencanaan sistem persediaan serta ongkos – ongkos untuk mengadakan peralatan serta melatih tenaga yang digunakan untuk mengoperasikan sistem. Biaya sistemik ini dapat dianggap sebagai biaya investasi bagi pengadaan suatu sistem pengadaan.

2.6 Pajak untuk Mengatasi Eksternalitas Negatif

Masalah eksternalitas dapat diatasi dengan menginternalisasi biaya eksternalitas ke dalam biaya produksi perusahaan sehingga diperlukan intervensi pemerintah melalui penerapan pajak. Pemerintah dapat memecahkan alokasi sumber yang lebih efisien dengan mengenakan pajak kepada pihak penyebab polusi dimana pajak tersebut merupakan pajak per unit.

Pajak yang khusus diterapkan untuk mengoreksi dampak dari eksternalitas negatif disebut dengan Pajak Pigovian (*Pigovian Tax*), sesuai dengan nama penggagas pertamanya yaitu Arthur Pigou (1877-1959).

2.7 *Research And Development (R & D)*

Menurut Sujadi (2003:164) Penelitian dan Pengembangan atau *Research and Development (R&D)* adalah suatu proses atau langkah - langkah untuk mengembangkan suatu produk baru, atau menyempurnakan produk yang telah ada, yang dapat dipertanggungjawabkan. Produk tersebut tidak selalu berbentuk benda atau perangkat keras (*hardware*), seperti buku, modul, alat bantu pembelajaran di kelas atau di laboratorium, tetapi bisa juga perangkat lunak (*software*), seperti program komputer untuk pengolahan data, pembelajaran di kelas, perpustakaan atau laboratorium, ataupun model - model pendidikan, pembelajaran, pelatihan, bimbingan, evaluasi, manajemen, dll.

Ciri - Ciri *Research And Development*

Borg and Gall, 1983 menjelaskan ciri utama R&D, yaitu :

1. Melakukan penelitian awal untuk mencari temuan-temuan penelitian terkait dengan produk yang akan dikembangkan.
2. Mengembangkan produk berdasarkan temuan penelitian tersebut.
3. Melakukan uji lapangan dalam situasi senyatanya dimana produk tersebut nantinya digunakan.
4. Melakukan revisi untuk memperbaiki kelemahan-kelemahan yang ditemukan dalam tahap-tahap uji lapangan.

Bagian *Research & Development (R&D)* di suatu perusahaan bertanggung jawab untuk segala aktivitas riset dan pengembangan di perusahaan tersebut. Bagian R&D juga bertanggung jawab untuk memastikan kualitas performansi dalam perusahaan sesuai dengan standar yang telah ditetapkan perusahaan.

2.8 Titik Kesetimbangan

Misal diberikan suatu sistem persamaan tak linier

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= f(I, p, b) \\ \frac{dp}{dt} &= g(I, p, b) \\ \frac{db}{dt} &= h(I, p, b)\end{aligned}\tag{2.7}$$

Titik (I^*, p^*, b^*) yang memenuhi $f(I^*, p^*, b^*) = 0$, $g(I^*, p^*, b^*) = 0$, dan $h(I^*, p^*, b^*) = 0$ disebut titik kritis sistem (2.7). Titik kritis (I^*, p^*, b^*) merupakan solusi sistem (2.7) yang bernilai konstan sebab di titik (I^*, p^*, b^*) , nilai $\frac{dI^*}{dt} = 0$, $\frac{dp^*}{dt} = 0$, dan $\frac{db^*}{dt} = 0$ sehingga titik kritis disebut juga disebut titik tetap atau titik kesetimbangan (Boyce & DiPrima, 2009).

2.9 Linierisasi

Linierisasi merupakan proses melinierkan suatu sistem persamaan tak linier. Pendekatan linier dilakukan disekitar titik setimbang. Misalkan titik setimbang (I^*, p^*, b^*) , sehingga ekspansi deret Taylor dari sistem (2.7) adalah sebagai berikut:(Subiono,2013)

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= f(I^*, p^*, b^*) + (I - I^*) \frac{\partial f}{\partial I} + (p - p^*) \frac{\partial f}{\partial p} + (b - b^*) \frac{\partial f}{\partial b} + \\ &\quad (u - u^*) \frac{\partial f}{\partial u} + (m - m^*) \frac{\partial f}{\partial m} + (k - k^*) \frac{\partial f}{\partial k} + \Theta_f \\ \frac{dp}{dt} &= g(I^*, p^*, b^*) + (I - I^*) \frac{\partial g}{\partial I} + (p - p^*) \frac{\partial g}{\partial p} + (b - b^*) \frac{\partial g}{\partial b} + \\ &\quad (u - u^*) \frac{\partial g}{\partial u} + (m - m^*) \frac{\partial g}{\partial m} + (k - k^*) \frac{\partial g}{\partial k} + \Theta_g \\ \frac{db}{dt} &= h(I^*, p^*, b^*) + (I - I^*) \frac{\partial h}{\partial I} + (p - p^*) \frac{\partial h}{\partial p} + (b - b^*) \frac{\partial h}{\partial b} + \\ &\quad (u - u^*) \frac{\partial h}{\partial u} + (m - m^*) \frac{\partial h}{\partial m} + (k - k^*) \frac{\partial h}{\partial k} + \Theta_h\end{aligned}$$

dengan : $\Theta_f, \Theta_g, \Theta_h$ suku-suku *nonlinear* yang selanjutnya.

$$f(I^*, p^*, b^*) = g(I^*, p^*, b^*) = h(I^*, p^*, b^*) = 0$$

didefinisikan:

$$\begin{aligned}I - I^* &= a_1 \Rightarrow \dot{I} = \dot{a}_1 \\ p - p^* &= a_2 \Rightarrow \dot{p} = \dot{a}_2 \\ b - b^* &= a_3 \Rightarrow \dot{b} = \dot{a}_3 \\ u - u^* &= v_1 \Rightarrow \dot{u} = \dot{v}_1 \\ m - m^* &= v_2 \Rightarrow \dot{m} = \dot{v}_2 \\ k - k^* &= v_3 \Rightarrow \dot{k} = \dot{v}_3\end{aligned}$$

Sehingga ekspansi deret Taylor diatas menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= a_1 \frac{\partial f}{\partial I} + a_2 \frac{\partial f}{\partial p} + a_3 \frac{\partial f}{\partial b} + v_1 \frac{\partial f}{\partial u} + v_2 \frac{\partial f}{\partial m} + v_3 \frac{\partial f}{\partial k} \\ \frac{d}{dt} &= a_1 \frac{\partial g}{\partial I} + a_2 \frac{\partial g}{\partial p} + a_3 \frac{\partial g}{\partial b} + v_1 \frac{\partial g}{\partial u} + v_2 \frac{\partial g}{\partial m} + v_3 \frac{\partial g}{\partial k} \\ \frac{db}{dt} &= a_1 \frac{\partial h}{\partial I} + a_2 \frac{\partial h}{\partial p} + a_3 \frac{\partial h}{\partial b} + v_1 \frac{\partial h}{\partial u} + v_2 \frac{\partial h}{\partial m} + v_3 \frac{\partial h}{\partial k}\end{aligned}$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial b} \\ \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial p} & \frac{\partial g}{\partial b} \\ \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial p} & \frac{\partial h}{\partial b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial m} & \frac{\partial f}{\partial k} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial m} & \frac{\partial g}{\partial k} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial m} & \frac{\partial h}{\partial k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Sehingga bentuk pelinearannya sebagai berikut :

$$\dot{a}(t) = Aa(t) + Bv(t)$$

dengan : $\dot{a}(t) = [\dot{a}_1(t) \quad \dot{a}_2(t) \quad \dot{a}_3(t)]^T$; $a(t) = [a_1(t) \quad a_2(t) \quad a_3(t)]^T$;

$v(t) = [v_1(t) \quad v_2(t) \quad v_3(t)]^T$;

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial b} \\ \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial p} & \frac{\partial g}{\partial b} \\ \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial p} & \frac{\partial h}{\partial b} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial m} & \frac{\partial f}{\partial k} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial m} & \frac{\partial g}{\partial k} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial m} & \frac{\partial h}{\partial k} \end{bmatrix} ;$$

2.10 Kestabilan Lokal

Misalkan akar-akar persamaan karakteristik sistem (2.7) adalah $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, maka $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ disebut nilai *eigen*. Nilai *eigen* tersebut digunakan untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.6). Untuk memperoleh nilai eigen digunakan rumus $\det(A - \Lambda I) = 0$. Kestabilan dari titik kesetimbangan sistem *autonomous* (berkaitan dengan vektor keadaan) *nonlinear* yang dilinearkan

dapat ditentukan berdasarkan analisa kestabilan dari sistem *autonomous linear*, seperti yang ditampilkan pada Tabel 2.1 (Boyce dan DiPrima, 2009).

Tabel 2.1 Kriteria Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem *Autonomous Nonlinear*

Nilai Eigen	Kriteria	Kestabilan	Bentuk
$\Lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R}$	$\Lambda_{1,2,3} > 0$	Tak stabil	Simpul
	$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 > 0$	Tak stabil	Simpul
	$\Lambda_{1,2,3} < 0$	Stabil asimtotik	Simpul
	$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 < 0$	Stabil asimtotik	Simpul
	Minimal satu $\Lambda > 0$	Tak stabil	Pelana
$\Lambda_{1,2,3} = a \pm bi \in \mathbb{C}$	$a > 0$	Tak stabil	Pelana
	$a < 0$	Stabil asimtotik	Spiral
	$a = 0$	Tidak dapat ditentukan	Elips/lingkaran

2.11 Keterkontrolan

Diberikan sistem linear varian-waktu yang disajikan oleh persamaan:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Syarat keterkontrolan (*controllability*) keadaan secara sempurna sebagai berikut: Keadaan sistem yang dinyatakan oleh persamaan (2.8) terkontrol sempurna jika dan hanya jika vektor $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ bebas linier, atau matriks $[B | AB | \dots | A^{n-1}B]$ mempunyai "rank" n .

2.12 Kontrol Optimal

Permasalahan utama dari kontrol optimal yaitu untuk mencari nilai kontrol yang akan diberikan ke dalam model atau sistem dan memenuhi kendala. Pada waktu yang sama, sehingga dapat ditentukan nilai yang optimal berdasarkan fungsi objektif. Pada umumnya fungsi objektif pada masalah kontrol optimal dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^T V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.9)$$

dengan sistem dinyatakan oleh persamaan berikut,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.10)$$

serta kondisi batas : $x(0) = x_0$

$$x(t_f) = x_f$$

Kontrol $u^*(t)$ merupakan nilai kontrol optimal, jika disubstitusikan ke dalam system (2.9) akan diperoleh state yang optimal $x^*(t)$ dan pada saat yang sama mengoptimalkan fungsi objektif (2.9) yang kemudian dinotasikan dengan $J(u^*(t))$ atau J^* . State optimal $x^*(t)$ dibatasi oleh kondisi batas, yaitu kondisi awal (x_0) dan kondisi akhir (x_f) (Naidu, 2002).

2.13 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan untuk memperoleh kontrol terbaik pada sistem dinamik dari state awal hingga state akhir, yaitu dengan memaksimalkan atau meminimumkan indeks performansi dengan kontrol $u(t)$ terbatas pada ($u(t) \in U$). Langkah-langkah menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut. Diberikan persamaan state (2.10) dimana \dot{x} merupakan vektor yang merepresentasikan sistem, fungsi objektif (2.9), dan kondisi batas awal ($x(0) = x_0$) dan kondisi akhir ($x(t_f) = x_f$). Maka langkah – langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut (Naidu, 2002).

1. membentuk fungsi Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = e^{-\rho t} V(x(t), u(t), t) + \lambda' f(x(t), u(t), t) \quad (2.11)$$

2. membentuk fungsi *current-value* Hamiltonian

Karena terdapat faktor diskon $e^{-\rho t}$ maka digunakan fungsi Hamiltonian baru yaitu fungsi *current-value* Hamiltonian. Misalkan $q(t)$ menyatakan *current-value* Hamiltonian fungsi *adjoin*, dapat didefinisikan $q(t) = \lambda(t)e^{\rho t}$, berimplikasi

dengan $\lambda(t) = q(t)e^{-\rho t}$. Fungsi Hamiltonian dari *current-value* Hamiltonian dapat dituliskan sebagai berikut

$$H_c = He^{\rho t} \quad (2.12)$$

sehingga didapat fungsi Hamiltonian yang baru adalah

$$H_c(x(t), u(t), q(t), t) = V(x(t), u(t), t) + q(t)' f(x(t), u(t), t) \quad (2.13)$$

3. meminimumkan H_c terhadap semua vektor kontrol $u(t)$

$$\frac{\partial H_c(x(t), u(t), q(t), t)}{\partial u(t)} = 0 \quad (2.14)$$

$$\text{dan diperoleh : } u^*(t) = h(x^*(t), q^*(t), t) \quad (2.15)$$

4. menggunakan hasil dari langkah 3 yaitu dengan mensubstitusikannya ke dalam langkah 2 dan menentukan H_c^* yang optimal.

$$H_c^*(x^*(t), h(x^*(t), q^*(t), t), q^*(t), t) = H_c^*(x^*(t), q^*(t), t) \quad (2.16)$$

5. Mendapatkan *State* dan *Costate*

Setelah mendapatkan kondisi optimal fungsi Hamiltonian dari persamaan (2.16), didapat persamaan *state* sebagai berikut:

$$\dot{x}^*(t) = + \left(\frac{\partial H(x(t), u(t), q(t), t)}{\partial q(t)} \right)_* \quad (2.17)$$

Berdasarkan $H_c = He^{\rho t}$ maka *costate* dari *current-value* Hamiltonian adalah

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial x(t)} \right)_* = - \left(\frac{\partial H_c(x(t), u(t), q(t), t)}{\partial x(t)} \right)_* e^{-\rho t} \quad (2.18)$$

sedangkan dari $\lambda(t) = q(t)e^{-\rho t}$, didapat turunannya

$$\dot{\lambda}(t) = -\rho e^{-\rho t} q(t) + e^{-\rho t} \dot{q}(t) \quad (2.19)$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (2.19) ke persamaan (2.18) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
-\rho e^{-\rho t} q(t) + e^{-\rho t} \dot{q}(t) &= - \left(\frac{\partial H_c(x(t), u(t), q(t), t)}{\partial x(t)} \right)_* e^{-\rho t} \\
\dot{q}^*(t) &= - \left(\frac{\partial H_c(x(t), u(t), q(t), t)}{\partial x(t)} \right)_* + \rho q(t)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir $\lambda(T) = 0$ atau $q(T)e^{-\rho T} = 0$

6. untuk memperoleh kontrol optimal, solusi $x^*(t)$, $q^*(t)$ dari langkah 5 disubstitusikan ke dalam ekspresi kontrol optimal $u^*(t)$ pada langkah 3.

2.14 Metode Runge Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan metode numerik yang memiliki keakuratan mencapai keakuratan dari suatu pendekatan Taylor tanpa memerlukan turunan-turunan tingkat tinggi. Pada usulan penelitian ini metode Runge Kutta yang digunakan adalah metode *forward backward sweep* Runge Kutta orde empat karena sistem persamaan diferensial pada usulan penelitian diketahui kondisi awal untuk *state* dan kondisi akhir untuk *adjoin*. Langkah pengerjaannya adalah menyelesaikan persamaan *state* dengan kondisi awal $x_1 = x(t_0) = a$ diselesaikan secara *forward*, kemudian menyelesaikan persamaan *adjoin* dengan kondisi akhir $q_{N+1} = q(t_f) = 0$ yang diselesaikan secara *backward*.

➤ *Forward Sweep* pada Persamaan *state*

$$x_{N+1}(t) \approx x_N(t) + \frac{h}{6} (k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

Dengan

$$k_{1,x} = f(t_N, x_N, u_N)$$

$$k_{2,x} = f\left(t_N + \frac{h}{2}, x_N + \frac{h}{2} k_{1,x}, \frac{1}{2}(u_N + u_{N+1})\right)$$

$$k_{3,x} = f\left(t_N + \frac{h}{2}, x_N + \frac{h}{2} k_{2,x}, \frac{1}{2}(u_N + u_{N+1})\right)$$

$$k_{4,x} = f\left(t_N + h, x_N + h k_{3,x}, u_{N+1}\right)$$

➤ *Backward Sweep* pada Persamaan *Costate*

$$q_{N-1}(t) \approx q_N(t) - \frac{h}{6}(k_{1,q} + 2k_{2,q} + 2k_{3,q} + k_{4,q})$$

Dengan

$$k_{1,q} = g(t_N, q_N, x_N, u_N)$$

$$k_{2,q} = g\left(t_N - \frac{h}{2}, q_N - \frac{h}{2}k_{1,q}, \frac{1}{2}(x_N + x_{N-1}), \frac{1}{2}(u_N + u_{N-1})\right)$$

$$k_{3,q} = g\left(t_N - \frac{h}{2}, q_N - \frac{h}{2}k_{2,q}, \frac{1}{2}(x_N + x_{N-1}), \frac{1}{2}(u_N + u_{N-1})\right)$$

$$k_{4,q} = g\left(t_N - \frac{h}{2}, q_N - hk_{3,q}, x_{N-1}, u_{N-1}\right)$$

Hasil yang diperoleh dari metode *forward backward sweep Runge Kutta* orde empat kemudian disimulasikan berupa grafik simulasi dengan kondisi sistem yang dikontrol dan tanpa dikontrol.

BAB 3

METODA PENELITIAN

3.1 Rancangan Penelitian

Untuk merealisasikan tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini, langkah-langkah yang akan dilakukan adalah sebagai berikut:

3.1.1 Memahami Konsep dan Studi Literatur

Untuk menganalisa masalah kontrol optimal pada model sistem inventori khususnya pada sistem perawatan produk, pajak emisi, titik kesetimbangan, linierisasi, dan kestabilan, kontrol optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin, metode Runge Kutta dan hal lain yang berkaitan dengan penelitian ini.

3.1.2 Analisa Sistem Dinamik

Pada tahap ini dilakukan analisa dinamik model sistem perawatan produk yaitu mencari titik kesetimbangan, linierisasi, kestabilan titik kesetimbangan model, dan analisa kestabilan sistem secara numerik. Analisa dinamik dilakukan untuk mengetahui perilaku dari sistem pada persekitaran titik kesetimbangan.

3.1.3 Mengembangkan Model pada Masalah Kontrol Optimal

Pada tahap ini dilakukan pengembangan model fungsi objektif sistem perawatan produksi dengan memperhatikan banyaknya kerusakan produk dan tingkat diskon. Fungsi objektif atau fungsi tujuan dikembangkan dengan menambahkan biaya pajak emisi dan biaya investasi R&D polusi serta dengan penambahan fungsi kendala berupa fungsi tingkat teknologi usang.

3.1.4 Menentukan Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Pada tahap ini, ditentukan formulasi masalah kontrol optimal yang meliputi sistem perawatan produk, fungsi objektif, serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi.

3.1.5 Menyelesaikan Permasalahan Kontrol Optimal

Pada tahap ini, dilakukan penyelesaian kontrol optimal. Metode yang digunakan dalam penyelesaian kontrol optimal ini adalah Prinsip Maksimum Pontryagin.

3.1.6 Pembuatan Program Simulasi

Pada tahap ini, dicari solusi dari permasalahan kontrol optimal yaitu meminimumkan biaya produksi total. Dengan menggunakan persamaan sistem, fungsi objektif, serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi, maka dibuat simulasi dengan memasukkan fungsi permintaan dan fungsi banyaknya produk yang usang yang berbeda sehingga diperoleh hasil berupa grafik fungsi permintaan, fungsi banyaknya produk yang usang, fungsi tingkat inventori, fungsi proporsi produk baik, fungsi banyaknya produk yang terjadwal, fungsi banyaknya produk yang diberi perawatan, fungsi banyaknya teknologi yang usang, fungsi investasi pengembangan teknologi dan fungsi biaya total dengan menggunakan algoritma metode Runge Kutta orde 4.

3.1.7 Analisa Hasil Simulasi

Analisa dan pembahasan terhadap hasil yang diperoleh dari hasil simulasi yang berupa grafik fungsi permintaan, fungsi banyaknya produk yang usang, fungsi tingkat inventori, fungsi proporsi produk baik, fungsi banyaknya produk yang terjadwal, fungsi banyaknya produk yang diberi perawatan, fungsi banyaknya teknologi yang usang, fungsi investasi pengembangan teknologi dan fungsi biaya total. Dengan mengubah parameter dari fungsi permintaan, fungsi banyaknya produk yang usang dan fungsi teknologi usang pada program simulasi, yang kemudian dianalisa bagaimana perubahan grafik yang diperoleh. Pemilihan parameter fungsi permintaan dan fungsi banyaknya produk yang usang dipilih dari paper Bukhari dan Gohary (2012), sedangkan parameter fungsi teknologi usang dipilih secara *trial and error*.

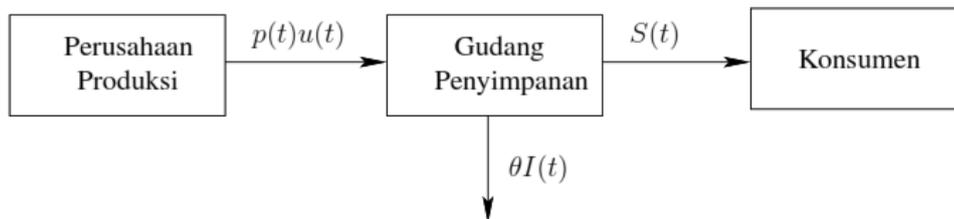
BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Sistem Perawatan Produk Dengan Memperhatikan Kerusakan Produk, Pajak Emisi, Investasi R&D Pada Teknologi Polusi dan Tingkat Diskon

4.1.1 Laju Banyaknya Inventori (Persediaan Barang)

Model laju banyaknya inventori dapat diilustrasikan berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen untuk Laju Banyaknya Inventori Sistem perawatan produk untuk laju banyaknya inventori sebagai berikut:

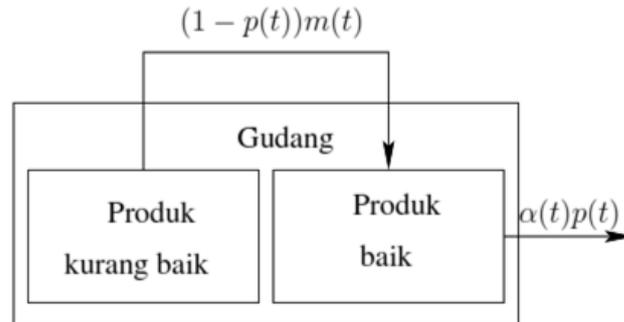
$$\dot{I}(t) = p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t) \quad (4.1)$$

- dengan :
- $I(t)$: Banyaknya inventori pada waktu t
 - $p(t)$: Proporsi produk baik pada waktu t
 - $u(t)$: Banyaknya produk yang terjadwal pada waktu t
 - $S(t)$: Banyaknya permintaan pada waktu t
 - θ : Proporsi produk yang rusak

Laju banyaknya inventori dipengaruhi oleh proporsi produk baik, produk yang terjadwal, banyaknya inventori, proporsi produk yang rusak, dan permintaan. Jika proporsi produk baik dan produk yang terjadwal tinggi maka laju banyaknya inventori juga meningkat dan sebaliknya. Jika proporsi produk yang rusak meningkat maka laju banyaknya inventori menurun dan sebaliknya. Serta jika permintaan konsumen meningkat maka laju banyaknya inventori menurun pula dan sebaliknya.

4.1.2 Laju Proporsi Produk Baik

Model laju proporsi produk baik dapat diilustrasikan berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Diagram Kompartemen untuk Laju Proporsi Produk Baik

Sistem perawatan produk untuk laju proporsi produk baik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= (1 - p(t))m(t) - \alpha(t)p(t) \\ \dot{p}(t) &= -[\alpha(t) + m(t)]p(t) + m(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

dengan : $p(t)$: Proporsi produk baik pada waktu t

$m(t)$: Banyaknya produk yang akan diberi perawatan pada waktu t

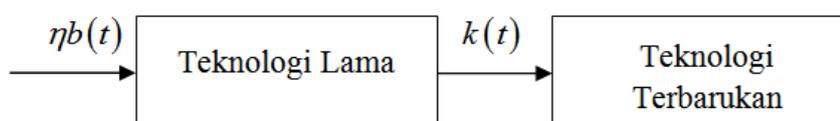
$\alpha(t)$: Banyaknya produk yang usang pada waktu t

$(1 - p(t))$: Proporsi produk yang kurang baik pada waktu t

Laju proporsi produk baik dipengaruhi oleh banyaknya produk yang usang (kadaluarsa), banyaknya produk yang diberi perawatan, proporsi produk baik, dan proporsi produk yang kurang baik. Jika banyaknya produk yang diberi perawatan dari produk yang kurang baik meningkat maka laju proporsi produk baik juga meningkat dan sebaliknya. Jika banyaknya produk baik yang usang (kadaluarsa) meningkat maka laju banyaknya inventori menurun dan sebaliknya.

4.1.3 Laju Banyaknya Teknologi Usang

Model laju teknologi usang dapat diilustrasikan berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Diagram Kompartemen untuk Laju Teknologi Usang

Sistem perawatan produk untuk laju banyaknya teknologi usang sebagai berikut:

$$\dot{b}(t) = -k(t) + \eta b(t) \quad (4.3)$$

dengan : $b(t)$: banyaknya teknologi usang pada waktu t

$k(t)$: investasi pengembangan teknologi pada waktu t

η : proporsi teknologi usang

Laju banyaknya teknologi usang dipengaruhi oleh banyaknya teknologi usang, proporsi teknologi usang, dan investasi pengembangan teknologi. Jika semakin besar investasi pengembangan teknologi diberikan maka laju banyaknya teknologi usang menurun dan sebaliknya. Jika proporsi teknologi usang meningkat maka laju banyaknya teknologi usang meningkat dan sebaliknya.

Batasan dari Persamaan (4.1), (4.2) dan (4.3) sebagai berikut:

$$I(t) \geq 0, S(t) \geq 0, b(t) \geq 0, u(t) \geq 0, k(t) \geq 0, 0 \leq m(t) \leq M(t), 0 \leq p(t) \leq 1, \alpha(t) \geq 0$$

Kendala variabel menjelaskan bahwa tingkat inventori, banyaknya permintaan, banyaknya teknologi usang, banyaknya investasi pengembangan teknologi, banyaknya produk yang usang (kadaluarsa), banyaknya produk yang terjadwal dan investasi pengembangan teknologi bernilai positif atau lebih dari atau sama dengan nol. Sedangkan banyaknya produk yang diberi perawatan dan proporsi produk baik dibatasi yaitu untuk banyaknya produk yang diberi perawatan bernilai antara nol sampai M dan proporsi produk baik bernilai antara nol sampai 1.

4.2 Analisa Model Sistem Perawatan Produk Dengan Memperhatikan Kerusakan Produk, Pajak Emisi, Investasi R & D Pada Teknologi Polusi dan Tingkat Diskon

Penyelesaian titik kesetimbangan, linierisasi, dan kestabilan digunakan untuk menentukan kestabilan dari sistem perawatan produk. Sedangkan analisa kestabilan dilakukan secara numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde 4.

4.2.1 Penentuan Titik Keseimbangan

Titik Keseimbangan $P_a^o(I^o, p^o, b^o)$ pada sistem Persamaan (4.1), (4.2) dan (4.3) dapat diperoleh jika memenuhi

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{db(t)}{dt} = 0 \quad (4.6)$$

Dari Persamaan (4.4), (4.5) dan (4.6) maka diperoleh,

$$I^o(t) = \frac{p(t)u(t) - S(t)}{\theta}$$

$$p^o(t) = \frac{m(t)}{\alpha(t) + m(t)}$$

$$b^o(t) = \frac{k(t)}{\eta}$$

Setelah dilakukan substitusi $p(t)$ ke hasil $I(t)$ maka diperoleh titik keseimbangan sebagai berikut.

$$P_a^o(I^o, p^o, b^o) = \left(\frac{1}{\theta} \left(\frac{u(t)m(t)}{[\alpha(t) + m(t)]} - S(t) \right), \frac{m(t)}{\alpha(t) + m(t)}, \frac{k(t)}{\eta} \right)$$

Titik keseimbangan $P_a^o(I^o, p^o, b^o)$ menjelaskan bahwa sistem perawatan produk akan stabil pada titik tersebut.

4.2.2 Linierisasi

Pada penelitian ini, linierisasi digunakan untuk melinierkan sistem (*plant*) dimana sistem tersebut merupakan sistem persamaan tak linier.

Didefinisikan sistem persamaan tak linier (4.1), (4.2), (4.3) sebagai berikut :

$$\frac{dI}{dt} = f(I, p, b)$$

$$\frac{dp}{dt} = g(I, p, b)$$

$$\frac{db}{dt} = h(I, p, b)$$

Persamaan (4.1), (4.2), (4.3) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{I}(t) \\ \dot{p}(t) \\ \dot{b}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(t)}{\partial I(t)} & \frac{\partial f(t)}{\partial p(t)} & \frac{\partial f(t)}{\partial b(t)} \\ \frac{\partial g(t)}{\partial I(t)} & \frac{\partial g(t)}{\partial p(t)} & \frac{\partial g(t)}{\partial b(t)} \\ \frac{\partial h(t)}{\partial I(t)} & \frac{\partial h(t)}{\partial p(t)} & \frac{\partial h(t)}{\partial b(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(t) \\ p(t) \\ b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(t)}{\partial u(t)} & \frac{\partial f(t)}{\partial m(t)} & \frac{\partial f(t)}{\partial k(t)} \\ \frac{\partial g(t)}{\partial u(t)} & \frac{\partial g(t)}{\partial m(t)} & \frac{\partial g(t)}{\partial k(t)} \\ \frac{\partial h(t)}{\partial u(t)} & \frac{\partial h(t)}{\partial m(t)} & \frac{\partial h(t)}{\partial k(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ m(t) \\ k(t) \end{bmatrix}$$

diperoleh matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}(t) \\ \dot{p}(t) \\ \dot{b}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta & u(t) & 0 \\ 0 & -[\alpha(t)+m(t)] & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(t) \\ p(t) \\ b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1-p(t) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ m(t) \\ k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga bentuk pelinearannya sebagai berikut :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) + W$$

$$\text{dengan : } \dot{X}(t) = [\dot{I}(t) \quad \dot{p}(t) \quad \dot{b}(t)]^T; \quad X(t) = [I(t) \quad p(t) \quad b(t)]^T;$$

$$U(t) = [u(t) \quad m(t) \quad k(t)]^T; \quad W = [S(t) \quad 0 \quad 0]^T;$$

$$A = \begin{bmatrix} -\theta & u(t) & 0 \\ 0 & -[\alpha(t)+m(t)] & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1-p(t) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

4.2.3 Analisa Kestabilan

Akar-akar persamaan karakteristik dari matriks Jacobi (A) adalah $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. Nilai $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ digunakan untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem perawatan produk. Untuk memperoleh $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ atau nilai eigen digunakan rumus $\det|A - \Lambda I| = 0$ atau $\det|\Lambda I - A| = 0$. Penyelesaian untuk menentukan nilai eigen dengan menggunakan rumus $\det|\Lambda I - A| = 0$ sebagai berikut:

$$\det|\Lambda I - A| = \begin{vmatrix} \Lambda + \theta & -u(t) & 0 \\ 0 & \Lambda + [\alpha(t) + m(t)] & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda - \eta \end{vmatrix} = 0$$

$$(\Lambda + \theta)(\Lambda + [\alpha(t) + m(t)])(\Lambda - \eta) = 0$$

$$\Lambda_1 = -\theta ; \quad \Lambda_2 = -[\alpha(t) + m(t)] ; \quad \Lambda_3 = \eta$$

dari ketiga nilai eigen yang diperoleh, dua diantara nilai eigen bernilai negatif dan salah satunya bernilai positif yang berarti bahwa tidak stabil plana (Boyce, 2009).

4.2.4 Analisa Kestabilan Sistem Perawatan Produk Secara Numerik

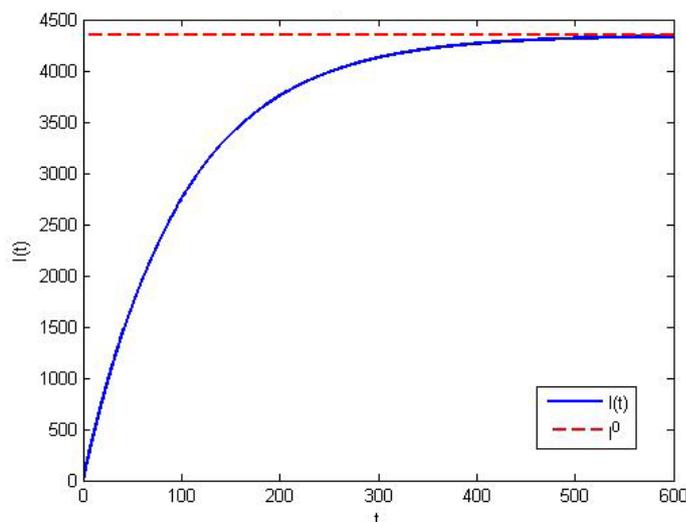
Analisa sistem secara numerik dilakukan untuk mengetahui kestabilan sistem. Dengan memisalkan $u(t)$, $m(t)$ dan $k(t)$ berupa fungsi konstan, berikut nilai-nilai parameter yang digunakan untuk simulasi :

Tabel 4.1 Parameter

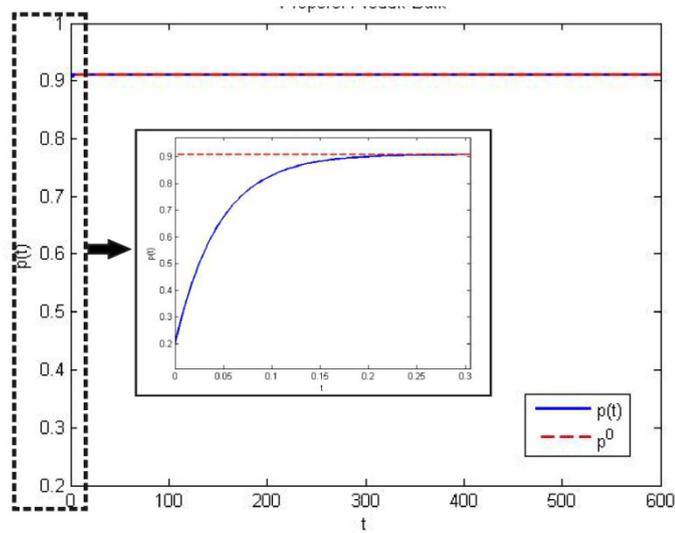
Parameter	$u(t)$	$m(t)$	$k(t)$	θ	$S(t)$	$\alpha(t)$	η
Nilai	50	20	0	0,01	2	2	0,01

Sehingga diperoleh $P_a^o(I^o, p^o, b^o) = \left(\frac{95600}{22}, \frac{20}{22}, 0 \right)$

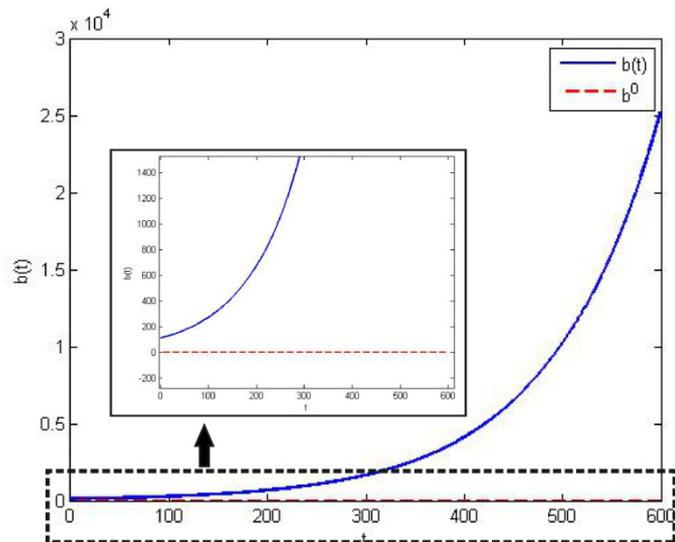
Pada analisa kestabilan secara numerik dipilih nilai awal $I_0 = 5$, $p_0 = 0,2$, $b_0 = 110$.



Gambar 4.4: Fungsi Tingkat Inventori



Gambar 4.5: Fungsi Laju Proporsi Produk Baik



Gambar 4.6: Fungsi Laju Teknologi Usang

Dari Gambar 4.4 dan 4.5 dapat terlihat bahwa grafik laju tingkat inventori dan proporsi produk baik menuju ke suatu titik tertentu atau stabil, sedangkan untuk Gambar 4.6 terlihat bahwa grafik laju teknologi usang tidak menuju titik tertentu atau tidak stabil.

4.3 Uji Keterkontrolan (*Controllability*)

Dari hasil linierisasi maka diperoleh matriks A dan B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -\theta & u(t) & 0 \\ 0 & -[\alpha(t) + m(t)] & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}_{(I^o, p^o, b^o)}$$

$$B = \begin{bmatrix} p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1-p(t) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(I^o, p^o, b^o)}$$

Dengan memisalkan $u(t)$, $m(t)$ dan $k(t)$ berupa fungsi konstan yaitu $u(t) = 50$, $m(t) = 20$ dan $k(t) = 0$ dan parameter $\theta = 0,01$, $S(t) = 2$, $\alpha(t) = 2$, $\eta = 0,01$, sehingga diperoleh matriks A dan B sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} -0,01 & 50 & 0 \\ 0 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{10}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Syarat perlu dan cukup sistem terkontrol adalah matriks $M_c = [B | AB | \dots | A^{n-1}B]$ mempunyai rank sama dengan n . Sehingga diperoleh matriks M_c sebagai berikut.

$$M_c = \begin{bmatrix} 0,9091 & 0 & 0 & -0,0091 & 4,5455 & 0 & 0,0001 & -100,0455 & 0 \\ 0 & 0,0909 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,01 & 0 & 0 & -0,0001 \end{bmatrix}$$

Karena matriks M_c mempunyai rank sama dengan 3 maka sistem terkontrol.

4.4 Fungsi Objektif Sistem Perawatan Produk dan Pajak Emisi

Kontrol optimal pada model sistem perawatan produk dengan kerusakan produk, pajak emisi dan tingkat diskon adalah meminimumkan biaya produksi total. Biaya produksi total terjadi jika banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya teknologi usang, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan menyimpang dari yang diinginkan (target) serta investasi pengembangan teknologi meningkat.

$$J = \min_{u(t) \geq 0, m(t) \geq 0, k(t)} \frac{1}{2} \int_0^T e^{-\rho t} \left[\begin{array}{l} h_1 (I(t) - \bar{I})^2 + h_2 (p(t) - \bar{p})^2 + h_3 (b(t) - \bar{b})^2 + \\ c_1 (u(t) - \bar{u})^2 + c_2 (m(t) - \bar{m})^2 + c_3 (k(t))^2 \end{array} \right] dt \quad (4.7)$$

dimana $t \in [0, T], h_i, c_i > 0, i = 1, 2, 3$

Dengan : h_i : Biaya penyimpanan

h_3 : Tarif pajak

c_1 : Biaya inventori

c_2 : Biaya perawatan produk

c_3 : Biaya pengembangan teknologi

\bar{I} : Banyaknya inventori yang diinginkan (target)

\bar{p} : Proporsi produk baik yang diinginkan (target)

\bar{b} : Banyaknya teknologi usang yang diinginkan (target)

\bar{u} : Banyaknya produk terjadwal yang diinginkan (target)

\bar{m} : Banyaknya produk yang akan diberi perawatan yang diinginkan (target)

ρ : Tingkat diskon

$k(t)$: Investasi pengembangan teknologi pada waktu t

4.5 Kontrol Optimal Menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin

Digunakan Prinsip Maksimum Pontryagin untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal pada sistem persamaan (4.1), (4.2), (4.3) dan fungsi Objektif (4.7). Langkah-langkah penyelesaian dengan prinsip Maksimum Pontryagin sebagai berikut,

Langkah 1: Membentuk Fungsi Hamiltonian dari sistem persamaan (4.1), (4.2), (4.3) dan fungsi Objektif (4.7)

$$H = \frac{1}{2} e^{-\rho t} \left[\begin{array}{l} h_1 (I(t) - \bar{I})^2 + h_2 (p(t) - \bar{p})^2 + h_3 (b(t) - \bar{b})^2 + c_1 (u(t) - \bar{u})^2 + \\ c_2 (m(t) - \bar{m})^2 + c_3 (k(t))^2 \end{array} \right] + \\ \lambda_1 (p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t)) + \lambda_2 (-[\alpha(t) + m(t)]p(t) + m(t)) +$$

$$\lambda_3(-k(t) + \eta b(t)) \quad (4.8)$$

Langkah 2: Membentuk fungsi *current-value* Hamiltonian

Misalkan $q(t)$ menyatakan *current-value* Hamiltonian fungsi *adjoin*, dapat didefinisikan $q(t) = \lambda(t)e^{\rho t}$, berimplikasi dengan $\lambda(t) = q(t)e^{-\rho t}$. Fungsi Hamiltonian dari *current-value* Hamiltonian dapat dituliskan sebagai berikut

$$H_c = He^{\rho t} \quad (4.9)$$

Sehingga didapat fungsi Hamiltonian yang baru adalah

$$H_c = \frac{1}{2} \left[h_1(I(t) - \bar{I})^2 + h_2(p(t) - \bar{p})^2 + h_3(b(t) - \bar{b})^2 + c_1(u(t) - \bar{u})^2 + \right. \\ \left. c_2(m(t) - \bar{m})^2 + c_3(k(t))^2 \right] + \\ q_1(t)(p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t)) + q_2(t)(-[\alpha(t) + m(t)]p(t) + m(t)) + \\ q_3(t)(-k(t) + \eta b(t)) \quad (4.10)$$

Langkah 3: Meminimumkan H_c terhadap semua vektor kontrol $u(t)$, $m(t)$, $k(t)$

- meminimumkan H_c terhadap vektor kontrol $u(t)$.

$$\frac{\partial H_c}{\partial u} = 0$$

$$c_1(u(t) - \bar{u}) + q_1(t)p(t) = 0$$

$$u^*(t) = \bar{u} - \frac{q_1(t)p(t)}{c_1}, u(t) \in [0, u_{\max}], t \in [0, T]$$

- meminimumkan H_c terhadap vektor kontrol $m(t)$.

$$\frac{\partial H_c}{\partial m} = 0$$

$$c_2(m(t) - \bar{m}) + (1 - p(t))q_2(t) = 0$$

$$m^*(t) = \bar{m} - \frac{q_2(t)(1 - p(t))}{c_2}, m(t) \in [0, M], t \in [0, T]$$

- meminimumkan H_c terhadap vektor kontrol $k(t)$.

$$\frac{\partial H_c}{\partial k} = 0$$

$$c_3k(t) - q_3(t) = 0$$

$$k^*(t) = \frac{q_3(t)}{c_3}, k(t) \in [0, k_{\max}], t \in [0, T]$$

maka diperoleh $u^*(t)$, $m^*(t)$, $k^*(t)$ optimal dengan kondisi akhir $q_i(T)e^{-\rho T} = 0$, ($i = 1,2,3$) karena $e^{-\rho T} > 0$ maka $q_i(T) = 0$ didapat $u(T) = \bar{u}, m(T) = \bar{m}, k(T) = 0$

Sehingga persamaan $u(t)$, $m(t)$, $k(t)$ diperoleh batasan sebagai berikut.

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \bar{u} - \frac{q_1(t)p(t)}{c_1} < 0 \\ \bar{u} - \frac{q_1(t)p(t)}{c_1} & , \quad 0 \leq \bar{u} - \frac{q_1(t)p(t)}{c_1} \leq u_{\max} \\ u_{\max} & , \quad \bar{u} - \frac{q_1(t)p(t)}{c_1} > u_{\max} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$m^*(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \bar{m} - \frac{q_2(t)(1-p(t))}{c_2} < 0 \\ \bar{m} - \frac{q_2(t)(1-p(t))}{c_2} & , \quad 0 \leq \bar{m} - \frac{q_2(t)(1-p(t))}{c_2} \leq M \\ M & , \quad \bar{m} - \frac{q_2(t)(1-p(t))}{c_2} > M \end{cases} \quad (4.12)$$

$$k^*(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \frac{q_3(t)}{c_3} < 0 \\ \frac{q_3(t)}{c_3} & , \quad 0 \leq \frac{q_3(t)}{c_3} \leq k_{\max} \\ k_{\max} & , \quad \frac{q_3(t)}{c_3} > k_{\max} \end{cases} \quad (4.13)$$

Langkah 4: menggunakan hasil dari langkah 3 yaitu dengan mensubstitusikannya ke dalam langkah 2 dan menentukan H_c^* yang optimal

$$H_c^* = \frac{1}{2} \left[h_1(I(t) - \bar{I})^2 + h_2(p(t) - \bar{p})^2 + h_3(b(t) - \bar{b})^2 + c_1(u^*(t) - \bar{u})^2 + \right. \\ \left. c_2(m^*(t) - \bar{m})^2 + c_3(k^*(t))^2 \right] + \\ q_1(t)(p(t)u^*(t) - \theta I(t) - S(t)) + q_2(t)(-\alpha(t) + m^*(t))p(t) + m^*(t) + \\ q_3(t)(-k^*(t) + \eta b(t)) \quad (4.14)$$

Langkah 5: Mendapatkan *State* dan *Costate*

- Persamaan *State*:

$$\dot{I}^*(t) = p(t)u^*(t) - \theta I(t) - S(t) \quad (4.15)$$

$$\dot{p}^*(t) = -[\alpha(t) + m^*(t)]p(t) + m^*(t) \quad (4.16)$$

$$\dot{b}^*(t) = -k^*(t) + \eta b(t) \quad (4.17)$$

- Persamaan *Costate*:

$$\dot{q}_1^*(t) = -h_1(I(t) - \bar{I}) + q_1(t)(\theta + \rho) \quad (4.18)$$

$$\dot{q}_2^*(t) = -h_2(p(t) - \bar{p}) - q_1(t)u^*(t) + q_2(t)[\alpha(t) + m^*(t) + \rho] \quad (4.19)$$

$$\dot{q}_3^*(t) = -h_3(b(t) - \bar{b}) + q_3(t)(\rho - \eta) \quad (4.20)$$

dengan kondisi awal I_0, p_0, b_0 dan kondisi akhir $q_i(T) = 0$, selanjutnya menyelesaikan hasil tersebut dengan pendekatan numerik.

4.6 Penyelesaian Numerik

- *Forward Sweep* pada Persamaan *State*

Hasil diskritisasi dengan menggunakan *forward sweep* Runge Kutta orde empat sebagai berikut.

$$I_{N+1} = I_N + \frac{h}{6}(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I})$$

$$p_{N+1} = p_N + \frac{h}{6}(k_{1,p} + 2k_{2,p} + 2k_{3,p} + k_{4,p})$$

$$b_{N+1} = b_N + \frac{h}{6}(k_{1,b} + 2k_{2,b} + 2k_{3,b} + k_{4,b})$$

Dengan

$$k_{1,I} = f(t_N, I_N, p_N, S_N, \alpha_N, u_N, m_N, k_N)$$

$$k_{1,I} = p_N u_N - \theta I_N - S_N$$

$$k_{1,p} = g(t_N, I_N, p_N, S_N, \alpha_N, u_N, m_N, k_N)$$

$$k_{1,p} = -[\alpha_N + m_N]p_N + m_N$$

$$k_{1,b} = h(t_N, I_N, p_N, S_N, \alpha_N, u_N, m_N, k_N)$$

$$k_{1,b} = -k_N + \eta b_N$$

$$\begin{aligned}
k_{2,I} &= f \left(t_N + \frac{h}{2}, I_N + \frac{h}{2} k_{1,I}, p_N + \frac{h}{2} k_{1,p}, b_N + \frac{h}{2} k_{1,b}, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(u_N + u_{N+1}, m_N + m_{N+1}, k_N + k_{N+1}, S_N + S_{N+1}, \alpha_N + \alpha_{N+1}) \right) \\
k_{2,I} &= \left(p_N + \frac{h}{2} k_{1,p} \right) \frac{1}{2}(u_N + u_{N+1}) - \theta \left(I_N + \frac{h}{2} k_{1,I} \right) - \frac{1}{2}(S_N + S_{N+1}) \\
k_{2,p} &= g \left(t_N + \frac{h}{2}, I_N + \frac{h}{2} k_{1,I}, p_N + \frac{h}{2} k_{1,p}, b_N + \frac{h}{2} k_{1,b}, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(u_N + u_{N+1}, m_N + m_{N+1}, k_N + k_{N+1}, S_N + S_{N+1}, \alpha_N + \alpha_{N+1}) \right) \\
k_{2,p} &= - \left[\frac{1}{2}(\alpha_N + \alpha_{N+1}) + \frac{1}{2}(m_N + m_{N+1}) \right] \left(p_N + \frac{h}{2} k_{1,p} \right) + \frac{1}{2}(m_N + m_{N+1}) \\
k_{2,b} &= h \left(t_N + \frac{h}{2}, I_N + \frac{h}{2} k_{1,I}, p_N + \frac{h}{2} k_{1,p}, b_N + \frac{h}{2} k_{1,b}, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(u_N + u_{N+1}, m_N + m_{N+1}, k_N + k_{N+1}, S_N + S_{N+1}, \alpha_N + \alpha_{N+1}) \right) \\
k_{2,b} &= -\frac{1}{2}(k_N + k_{N+1}) + \eta \left(b_N + \frac{h}{2} k_{1,b} \right) \\
k_{3,I} &= f \left(t_N + \frac{h}{2}, I_N + \frac{h}{2} k_{2,I}, p_N + \frac{h}{2} k_{2,p}, b_N + \frac{h}{2} k_{2,b}, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(u_N + u_{N+1}, m_N + m_{N+1}, k_N + k_{N+1}, S_N + S_{N+1}, \alpha_N + \alpha_{N+1}) \right) \\
k_{3,I} &= \left(p_N + \frac{h}{2} k_{2,p} \right) \frac{1}{2}(u_N + u_{N+1}) - \theta \left(I_N + \frac{h}{2} k_{2,I} \right) - \frac{1}{2}(S_N + S_{N+1}) \\
k_{3,p} &= g \left(t_N + \frac{h}{2}, I_N + \frac{h}{2} k_{2,I}, p_N + \frac{h}{2} k_{2,p}, b_N + \frac{h}{2} k_{2,b}, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(u_N + u_{N+1}, m_N + m_{N+1}, k_N + k_{N+1}, S_N + S_{N+1}, \alpha_N + \alpha_{N+1}) \right) \\
k_{3,p} &= - \left[\frac{1}{2}(\alpha_N + \alpha_{N+1}) + \frac{1}{2}(m_N + m_{N+1}) \right] \left(p_N + \frac{h}{2} k_{2,p} \right) + \frac{1}{2}(m_N + m_{N+1}) \\
k_{3,b} &= h \left(t_N + \frac{h}{2}, I_N + \frac{h}{2} k_{2,I}, p_N + \frac{h}{2} k_{2,p}, b_N + \frac{h}{2} k_{2,b}, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(u_N + u_{N+1}, m_N + m_{N+1}, k_N + k_{N+1}, S_N + S_{N+1}, \alpha_N + \alpha_{N+1}) \right) \\
k_{3,b} &= -\frac{1}{2}(k_N + k_{N+1}) + \eta \left(b_N + \frac{h}{2} k_{2,b} \right)
\end{aligned}$$

$$k_{4,I} = f\left(t_N + \frac{h}{2}, I_N + hk_{3,I}, p_N + hk_{3,p}, b_N + hk_{3,b}, u_{N+1}, m_{N+1}, k_{N+1}, S_{N+1}, \alpha_{N+1}\right)$$

$$k_{4,I} = (p_N + hk)u_{N+1} - \theta(I_N + hk_{3,I}) - S_{N+1}$$

$$k_{4,p} = g\left(t_N + \frac{h}{2}, I_N + hk_{3,I}, p_N + hk_{3,p}, b_N + hk_{3,b}, u_{N+1}, m_{N+1}, k_{N+1}, S_{N+1}, \alpha_{N+1}\right)$$

$$k_{4,p} = -[\alpha_{N+1} + m_{N+1}](p_N + hk_{3,p}) + m_{N+1}$$

$$k_{4,b} = h\left(t_N + \frac{h}{2}, I_N + hk_{3,I}, p_N + hk_{3,p}, b_N + hk_{3,b}, u_{N+1}, m_{N+1}, k_{N+1}, S_{N+1}, \alpha_{N+1}\right)$$

$$k_{4,b} = -k_{N+1} + \eta(b_N + hk_{3,b})$$

- *Backward Sweep* pada Persamaan *Costate*

Hasil diskritisasi dengan menggunakan *backward sweep* Runge Kutta orde empat sebagai berikut.

$$q_{1,N-1} = q_{1,N} - \frac{h}{6}(k_{1,q_1} + 2k_{2,q_1} + 2k_{3,q_1} + k_{4,q_1})$$

$$q_{2,N-1} = q_{2,N} - \frac{h}{6}(k_{1,q_2} + 2k_{2,q_2} + 2k_{3,q_2} + k_{4,q_2})$$

$$q_{3,N-1} = q_{3,N} - \frac{h}{6}(k_{1,q_3} + 2k_{2,q_3} + 2k_{3,q_3} + k_{4,q_3})$$

Dengan

$$k_{1,q_1} = f(t_N, q_{1,N}, q_{2,N}, q_{3,N}, I_N, p_N, b_N, S_N, \alpha_N, u_N, m_N, k_N)$$

$$k_{1,q_1} = -h_1(I_N - \bar{I}) + q_{1,N}(\theta + \rho)$$

$$k_{1,q_2} = g(t_N, q_{1,N}, q_{2,N}, q_{3,N}, I_N, p_N, b_N, S_N, \alpha_N, u_N, m_N, k_N)$$

$$k_{1,q_2} = -h_2(p_N - \bar{p}) - q_{1,N}u_N + q_{2,N}[\alpha_N + m_N + \rho]$$

$$k_{1,q_3} = h(t_N, q_{1,N}, q_{2,N}, q_{3,N}, I_N, p_N, b_N, S_N, \alpha_N, u_N, m_N, k_N)$$

$$k_{1,q_3} = -h_3(b_N - \bar{b}) + q_{3,N}(\rho - \eta)$$

$$\begin{aligned}
k_{2,q_1} &= f \left(t_N - \frac{h}{2}, q_{1,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_1}, q_{2,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_2}, q_{3,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_3}, \frac{1}{2}(I_N + I_{N-1}, p_N + p_{N-1}, b_N + b_{N-1}), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(S_N + S_{N-1}, \alpha_N + \alpha_{N-1}, u_N + u_{N-1}, m_N + m_{N-1}, k_N + k_{N-1}) \right) \\
k_{2,q_1} &= -h_1 \left((I_N + I_{N-1}) - \bar{I} \right) + \left(q_{1,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_1} \right) (\theta + \rho) \\
k_{2,q_2} &= g \left(t_N - \frac{h}{2}, q_{1,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_1}, q_{2,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_2}, q_{3,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_3}, \frac{1}{2}(I_N + I_{N-1}, p_N + p_{N-1}, b_N + b_{N-1}), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(S_N + S_{N-1}, \alpha_N + \alpha_{N-1}, u_N + u_{N-1}, m_N + m_{N-1}, k_N + k_{N-1}) \right) \\
k_{2,q_2} &= -h_2 \left((p_N + p_{N-1}) - \bar{p} \right) - \left(q_{1,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_1} \right) (u_N + u_{N-1}) \\
&\quad + \left(q_{2,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_2} \right) [(\alpha_N + \alpha_{N-1}) + (m_N + m_{N-1}) + \rho] \\
k_{2,q_3} &= h \left(t_N - \frac{h}{2}, q_{1,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_1}, q_{2,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_2}, q_{3,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_3}, \frac{1}{2}(I_N + I_{N-1}, p_N + p_{N-1}, b_N + b_{N-1}), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(S_N + S_{N-1}, \alpha_N + \alpha_{N-1}, u_N + u_{N-1}, m_N + m_{N-1}, k_N + k_{N-1}) \right) \\
k_{2,q_3} &= -h_3 \left((b_N + b_{N-1}) - \bar{b} \right) + \left(q_{3,N} - \frac{h}{2}k_{1,q_3} \right) (\rho - \eta) \\
k_{3,q_1} &= f \left(t_N - \frac{h}{2}, q_{1,N} - \frac{h}{2}k_{2,q_1}, q_{2,N} - \frac{h}{2}k_{2,q_2}, q_{3,N} - \frac{h}{2}k_{2,q_3}, \frac{1}{2}(I_N + I_{N-1}, p_N + p_{N-1}, b_N + b_{N-1}), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(S_N + S_{N-1}, \alpha_N + \alpha_{N-1}, u_N + u_{N-1}, m_N + m_{N-1}, k_N + k_{N-1}) \right) \\
k_{3,q_1} &= -h_1 \left((I_N + I_{N-1}) - \bar{I} \right) + \left(q_{1,N} - \frac{h}{2}k_{2,q_1} \right) (\theta + \rho) \\
k_{3,q_2} &= g \left(t_N - \frac{h}{2}, q_{1,N} - \frac{h}{2}k_{2,q_1}, q_{2,N} - \frac{h}{2}k_{2,q_2}, q_{3,N} - \frac{h}{2}k_{2,q_3}, \frac{1}{2}(I_N + I_{N-1}, p_N + p_{N-1}, b_N + b_{N-1}), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(S_N + S_{N-1}, \alpha_N + \alpha_{N-1}, u_N + u_{N-1}, m_N + m_{N-1}, k_N + k_{N-1}) \right) \\
k_{3,q_2} &= -h_2 \left((p_N + p_{N-1}) - \bar{p} \right) - \left(q_{1,N} - \frac{h}{2}k_{2,q_1} \right) (u_N + u_{N-1}) \\
&\quad + \left(q_{2,N} - \frac{h}{2}k_{2,q_2} \right) [(\alpha_N + \alpha_{N-1}) + (m_N + m_{N-1}) + \rho]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,q_3} &= h \left(t_N - \frac{h}{2}, q_{1,N} - \frac{h}{2} k_{2,q_1}, q_{2,N} - \frac{h}{2} k_{2,q_2}, q_{3,N} - \frac{h}{2} k_{2,q_3}, \frac{1}{2} (I_N + I_{N-1}, p_N + p_{N-1}, b_N + b_{N-1}), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} (S_N + S_{N-1}, \alpha_N + \alpha_{N-1}, u_N + u_{N-1}, m_N + m_{N-1}, k_N + k_{N-1}) \right) \\
k_{3,q_3} &= -h_3 \left((b_N + b_{N-1}) - \bar{b} \right) + \left(q_{3,N} - \frac{h}{2} k_{2,q_3} \right) (\rho - \eta) \\
k_{4,q_1} &= f \left(t_N - \frac{h}{2}, q_{1,N} - h k_{3,q_1}, q_{2,N} - h k_{3,q_2}, q_{3,N} - h k_{3,q_3}, I_{N-1}, p_{N-1}, b_{N-1}, \right. \\
&\quad \left. S_{N-1}, \alpha_{N-1}, u_{N-1}, m_{N-1}, k_{N-1} \right) \\
k_{4,q_1} &= -h_1 (I_{N-1} - \bar{I}) + (q_{1,N} - h k_{3,q_1}) (\theta + \rho) \\
k_{4,q_2} &= g \left(t_N - \frac{h}{2}, q_{1,N} - h k_{3,q_1}, q_{2,N} - h k_{3,q_2}, q_{3,N} - h k_{3,q_3}, I_{N-1}, p_{N-1}, b_{N-1}, \right. \\
&\quad \left. S_{N-1}, \alpha_{N-1}, u_{N-1}, m_{N-1}, k_{N-1} \right) \\
k_{4,q_2} &= -h_2 (p_{N-1} - \bar{p}) - (q_{1,N} - h k_{3,q_1}) u_{N-1} + (q_{2,N} - h k_{3,q_2}) [\alpha_{N-1} + m_{N-1} + \rho] \\
k_{4,q_3} &= h \left(t_N - \frac{h}{2}, q_{1,N} - h k_{3,q_1}, q_{2,N} - h k_{3,q_2}, q_{3,N} - h k_{3,q_3}, I_{N-1}, p_{N-1}, b_{N-1}, \right. \\
&\quad \left. S_{N-1}, \alpha_{N-1}, u_{N-1}, m_{N-1}, k_{N-1} \right) \\
k_{4,q_3} &= -h_3 (b_{N-1} - \bar{b}) + (q_{3,N} - h k_{3,q_3}) (\rho - \eta)
\end{aligned}$$

4.7 Simulasi Numerik

Dengan menerapkan syarat batas (4.7) dan menggunakan *forward backward sweep method* Runge Kutta orde empat maka didapatkan solusi optimal yang nilainya bergantung pada bentuk fungsi permintaan konsumen, banyaknya produk usang dan banyaknya teknologi usang. Berikut diberikan beberapa kasus yang dapat menggambarkan pengaruh sensitivitas dari fungsi obyektif.

Berikut keterangan simbol pada grafik simulasi :

Laju inventori yang dikontrol $I_c(t)$, laju inventori tak dikontrol $I(t)$, laju proporsi produk baik yang dikontrol $p_c(t)$, laju proporsi produk baik yang tak dikontrol $p(t)$, laju banyaknya teknologi usang yang dikontrol $b_c(t)$ dan laju banyaknya teknologi usang yang tak dikontrol $b(t)$.

4.7.1 Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang Konstan (Kasus I)

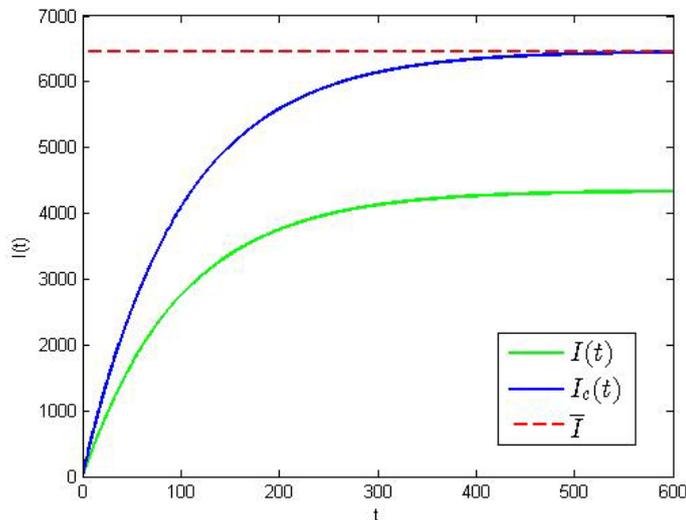
Misalkan pada kasus I suatu perusahaan manufaktur berencana melakukan produksinya selama 600 satuan waktu dengan tingkat diskon $\rho = 0,01$ dan

banyaknya inventori saat awal periode produksi $I_0 = 5$, proporsi produk baik sebesar $p_0 = 0,2$ dan banyaknya teknologi usang $b_0 = 110$. Biaya produksi total yang ditanggung perusahaan akan meningkat apabila nilai dari banyaknya inventori, proporsi produk baik dan banyaknya teknologi usang jauh dari yang ditargetkan. Berikut parameter yang digunakan untuk simulasi Kasus I :

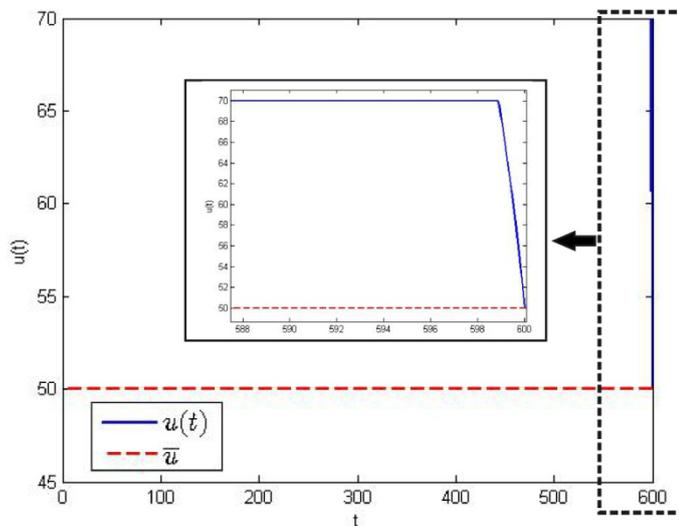
Tabel 4.2 Parameter Kasus I

Parameter	\bar{u}	\bar{m}	h_1	h_2	h_3	c_1	c_2	c_3	θ	\bar{I}	\bar{p}	\bar{b}	η
Nilai	50	20	50	60	30	60	30	20	0,01	6466	0,9524	15	0,01

Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang yang terjadi pada perusahaan berupa fungsi konstan yaitu $S(t) = 2$, $\alpha(t) = 2$

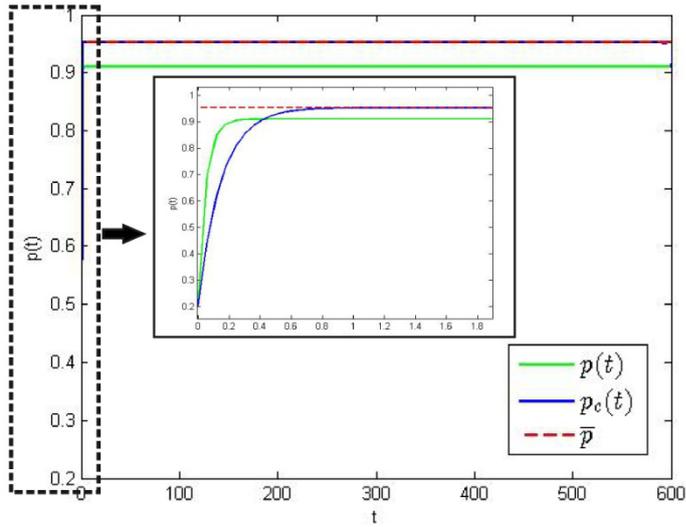


Gambar 4.7: Laju Tingkat Inventori dikontrol dan tak dikontrol

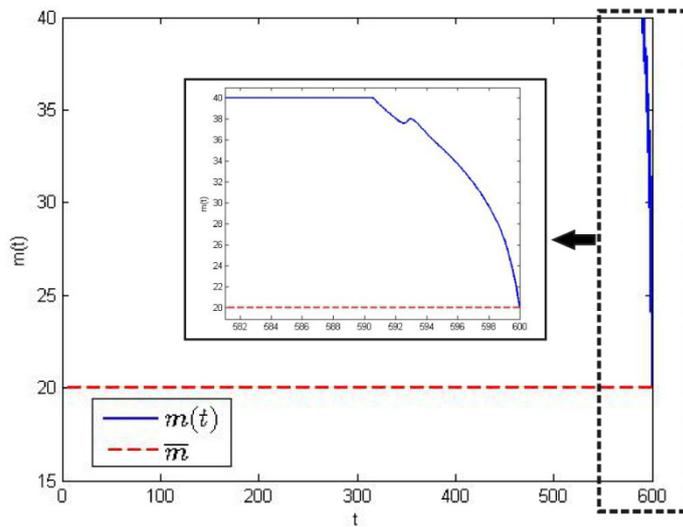


Gambar 4.8: Banyaknya Produk yang Terjadwal

Gambar 4.7 menunjukkan tingkat inventori yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju ke tingkat inventori yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk yang tak dikontrol belum bisa memenuhi target pada waktu yang ditetapkan. Hal ini disebabkan adanya kontrol pada produk yang terjadwal (Gambar 4.8) dengan menekan pada batas maksimum kemudian turun menuju \bar{u} di akhir ketika inventori yang ditargetkan terpenuhi.



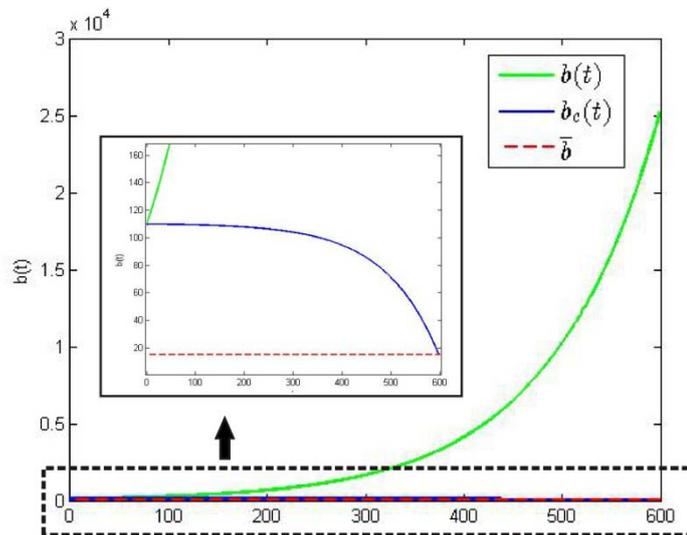
Gambar 4.9: Laju Proporsi Produk Baik dikontrol dan tak dikontrol



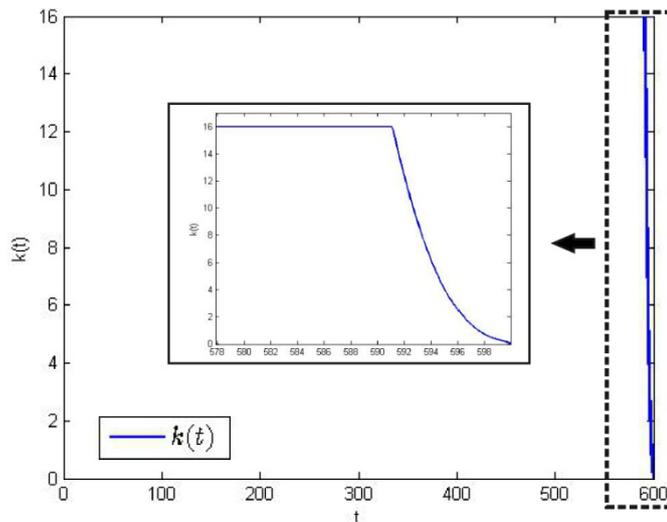
Gambar 4.10: Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Gambar 4.9 menunjukkan proporsi produk baik yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju proporsi produk baik yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk yang tak dikontrol belum bisa memenuhi target pada waktu yang ditetapkan. Hal ini disebabkan adanya kontrol pada banyaknya produk

yang diberi perawatan (Gambar 4.10) dengan menekan pada batas maksimum kemudian turun menuju \bar{m} di akhir sebagai akibat dari proporsi produk baik yang harus dipenuhi sampai inventori yang ditargetkan terpenuhi.



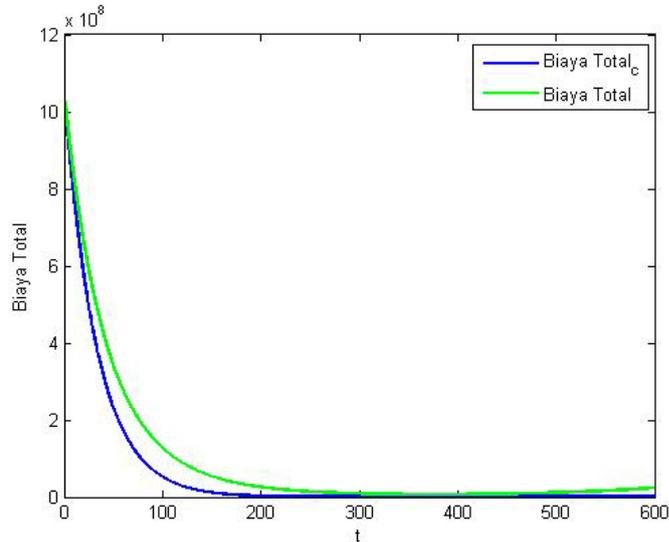
Gambar 4.11: Laju Tingkat Teknologi Usang dikontrol dan tak dikontrol



Gambar 4.12: Investasi Pengembangan Teknologi

Gambar 4.11 menunjukkan banyaknya teknologi usang yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju banyaknya teknologi usang yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk banyaknya teknologi usang yang tak dikontrol terlihat semakin meningkat. Hal ini disebabkan adanya kontrol pada investasi pengembangan teknologi (Gambar 4.12) dengan menekan pada batas maksimum

kemudian turun menuju nol di akhir ketika banyaknya teknologi usang yang ditargetkan terpenuhi.



Gambar 4.13: Biaya Produksi Total dikontrol dan tak dikontrol

Pada Gambar 4.13 menunjukkan biaya total yang diberikan kontrol dan tak diberikan kontrol. Pada selang waktu 600 grafik menunjukkan hasil minimum diperoleh ketika dilakukan kontrol yaitu sebesar 58,82 sedangkan untuk yang tak dikontrol sebesar $2,395 \times 10^7$.

Gambar 4.7 sampai 4.12 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya teknologi usang, banyaknya produk yang terjadwal, banyaknya produk yang diberi perawatan dan investasi pengembangan teknologi menuju yang ditargetkan. Hal tersebut, mengakibatkan biaya produksi total menjadi minimum. Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.13 menunjukkan bahwa pada selang waktu 600 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus I dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang digunakan fungsi konstan diperoleh biaya produksi total yang minimum.

4.7.2 Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang Musiman (Kasus II)

Misalkan pada kasus II suatu perusahaan manufaktur berencana melakukan produksinya selama 600 satuan waktu dengan tingkat diskon $\rho = 0,01$ dan banyaknya inventori saat awal periode produksi $I_0 = 5$, proporsi produk baik

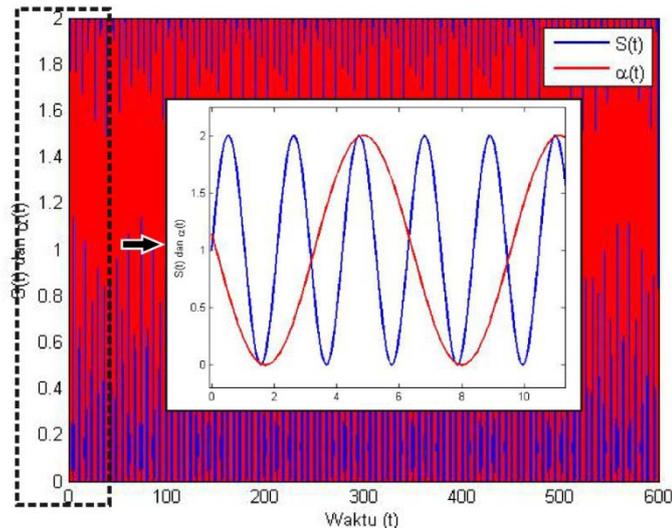
sebesar $p_0 = 0,2$ dan banyaknya teknologi usang $b_0 = 110$. Biaya produksi total yang ditanggung perusahaan akan meningkat apabila nilai dari banyaknya inventori, proporsi produk baik dan banyaknya teknologi usang jauh dari yang ditargetkan. Berikut parameter yang digunakan untuk simulasi Kasus II :

Tabel 4.3 Parameter Kasus II

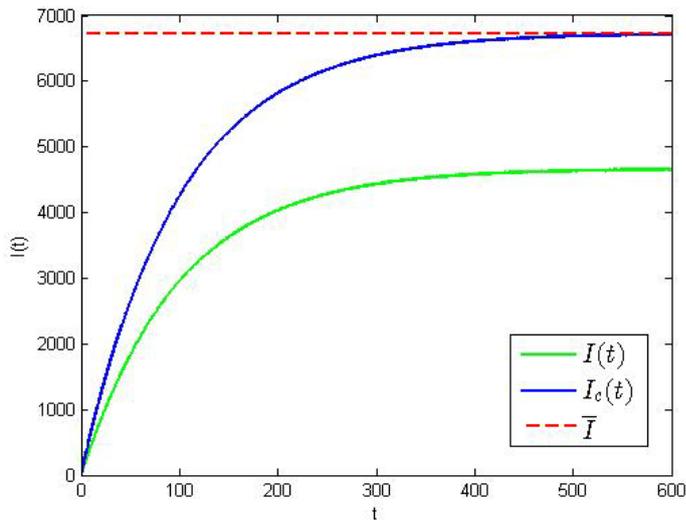
Parameter	\bar{u}	\bar{m}	h_1	h_2	h_3	c_1	c_2	c_3	θ	\bar{I}	\bar{p}	\bar{b}	η
Nilai	50	20	50	60	30	60	30	20	0,01	6729	0,9750	15	0,01

Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang yang terjadi pada perusahaan berupa fungsi $S(t) = 1 + \sin(3t)$, $\alpha(t) = 1 + \sin(3+t)$.

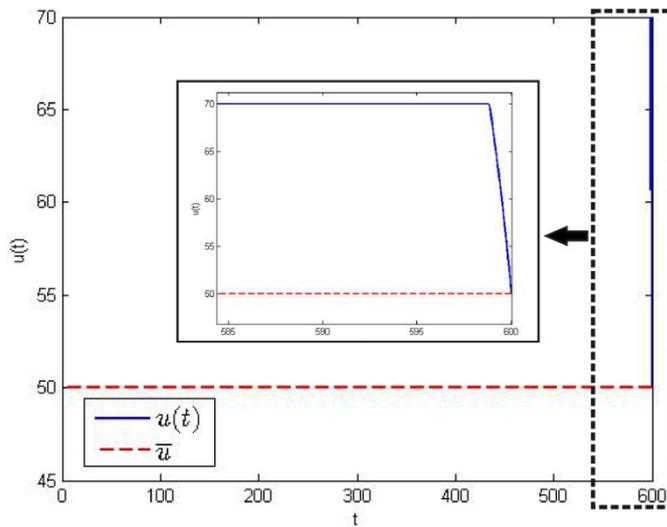
Gambar 4.14 menunjukkan grafik fungsi permintaan dan banyaknya produk usang berupa fungsi sinusoidal, terlihat dari perbesaran gambar bahwa fungsi permintaan dan fungsi produk usang berupa grafik naik turun.



Gambar 4.14: Fungsi Permintaan dan Produk Usang terhadap Waktu

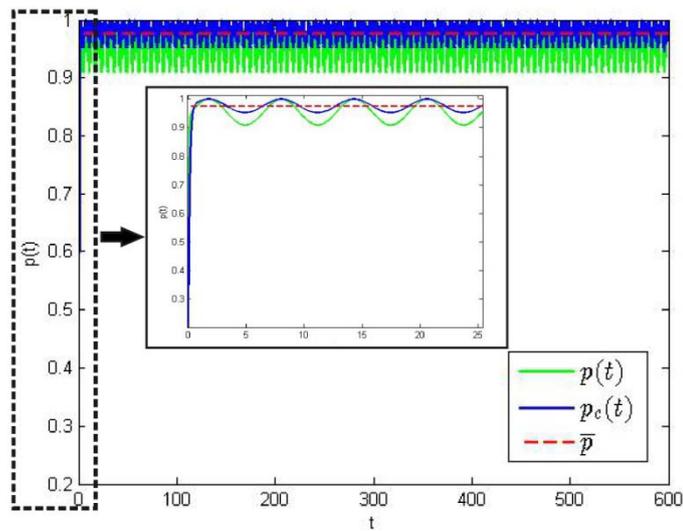


Gambar 4.15: Laju Tingkat Inventori dikontrol dan tak dikontrol

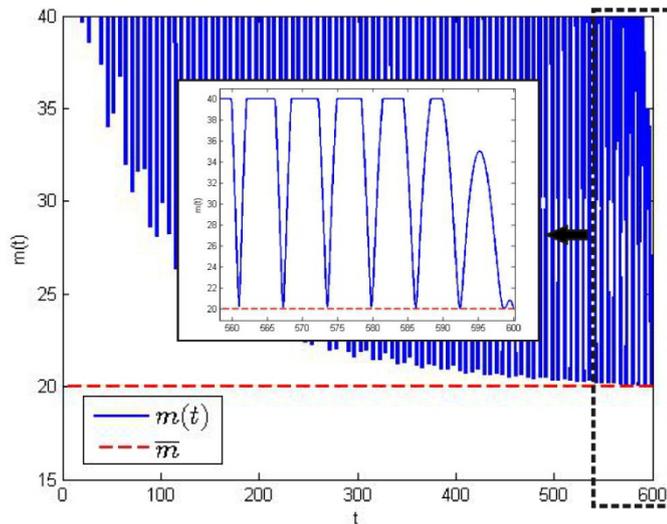


Gambar 4.16: Banyaknya Produk yang Terjadwal

Gambar 4.15 menunjukkan tingkat inventori yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju ke tingkat inventori yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk yang tak dikontrol belum bisa memenuhi target pada waktu yang ditetapkan. Hal ini disebabkan adanya kontrol pada produk yang terjadwal (Gambar 4.16) dengan menekan pada batas maksimum kemudian turun menuju \bar{u} di akhir ketika inventori yang ditargetkan terpenuhi.

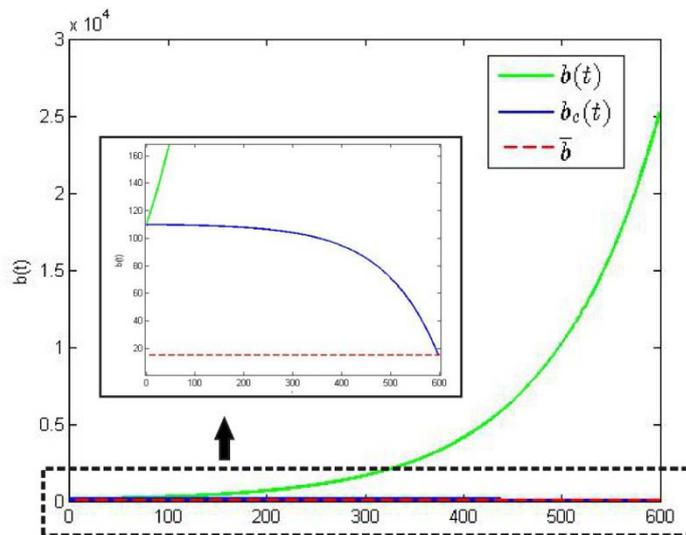


Gambar 4.17: Laju Proporsi Produk Baik dikontrol dan tak dikontrol

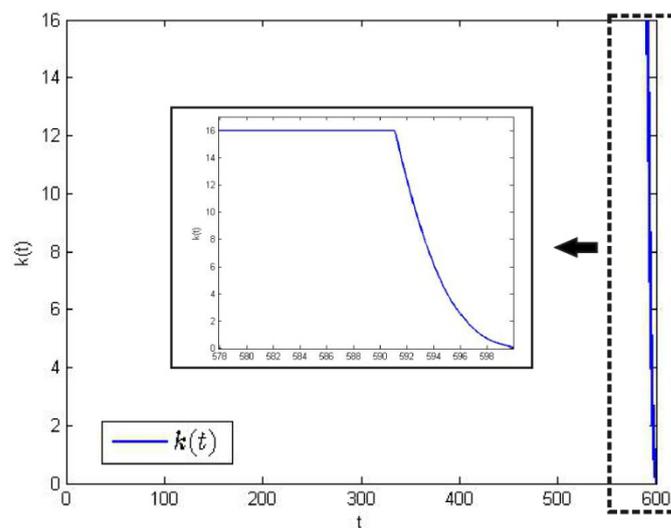


Gambar 4.18: Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Gambar 4.17 menunjukkan proporsi produk baik yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju proporsi produk baik yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk yang tak dikontrol belum bisa memenuhi target pada waktu yang ditetapkan yang berupa grafik naik-turun. Hal ini disebabkan adanya pengaruh dari permintaan dan banyaknya produk usang yang berupa fungsi $S(t) = 1 + \sin(3t)$ dan $\alpha(t) = 1 + \sin(3+t)$ sehingga berpengaruh pada banyaknya produk yang diberi perawatan (Gambar 4.18) dengan menekan pada batas maksimum berupa grafik naik turun dan menuju \bar{m} di akhir sebagai akibat dari proporsi produk baik yang harus dipenuhi sampai inventori yang ditargetkan terpenuhi.

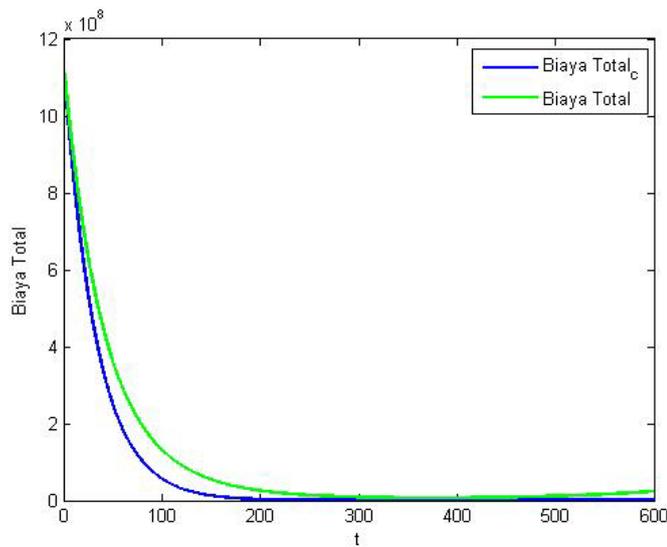


Gambar 4.19: Laju Tingkat Teknologi Usang dikontrol dan tak dikontrol



Gambar 4.20: Investasi Pengembangan Teknologi

Gambar 4.19 menunjukkan banyaknya teknologi usang yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju banyaknya teknologi usang yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk banyaknya teknologi usang yang tak dikontrol terlihat semakin meningkat. Hal ini disebabkan adanya kontrol pada investasi pengembangan teknologi (Gambar 4.20) dengan menekan pada batas maksimum kemudian turun menuju nol di akhir ketika banyaknya teknologi usang yang ditargetkan terpenuhi.



Gambar 4.21: Biaya Produksi Total dikontrol dan tak dikontrol

Pada Gambar 4.21 menunjukkan biaya total yang diberikan kontrol dan tak diberikan kontrol. Pada selang waktu 600 grafik menunjukkan hasil minimum diperoleh ketika dilakukan kontrol yaitu sebesar 49,25, sedangkan untuk yang tak dikontrol sebesar $2,394 \times 10^7$.

Gambar 4.15 sampai 4.20 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya teknologi usang, banyaknya produk yang terjadwal, banyaknya produk yang diberi perawatan dan investasi pengembangan teknologi menuju yang ditargetkan. Hal tersebut, mengakibatkan biaya produksi total menjadi minimum. Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.21 menunjukkan bahwa pada selang waktu 600 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus II dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang digunakan fungsi $S(t) = 1 + \sin(3t)$, $\alpha(t) = 1 + \sin(3+t)$ diperoleh biaya produksi total yang minimum.

4.7.3 Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang Menurun (Kasus III)

Misalkan pada kasus III suatu perusahaan manufaktur berencana melakukan produksinya selama 600 satuan waktu dengan tingkat diskon $\rho = 0,01$ dan banyaknya inventori saat awal periode produksi $I_0 = 5$, proporsi produk baik sebesar $p_0 = 0,2$ dan banyaknya teknologi usang $b_0 = 110$. Biaya produksi total

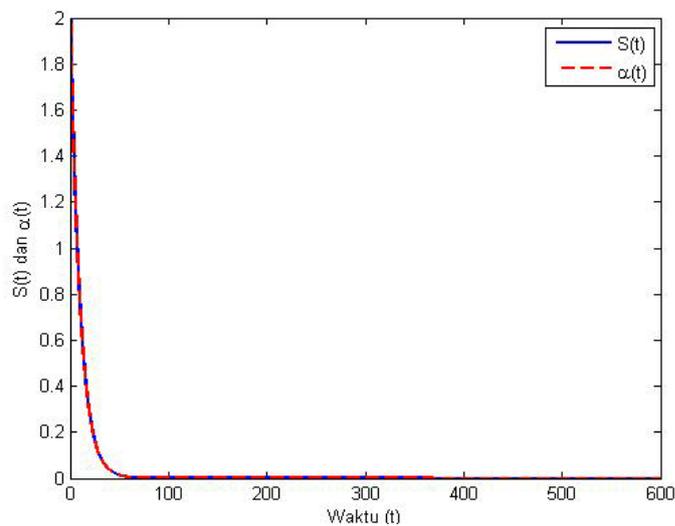
yang ditanggung perusahaan akan meningkat apabila nilai dari banyaknya inventori, proporsi produk baik dan banyaknya teknologi usang jauh dari yang ditargetkan. Berikut parameter yang digunakan untuk simulasi Kasus III :

Tabel 4.4 Parameter Kasus III

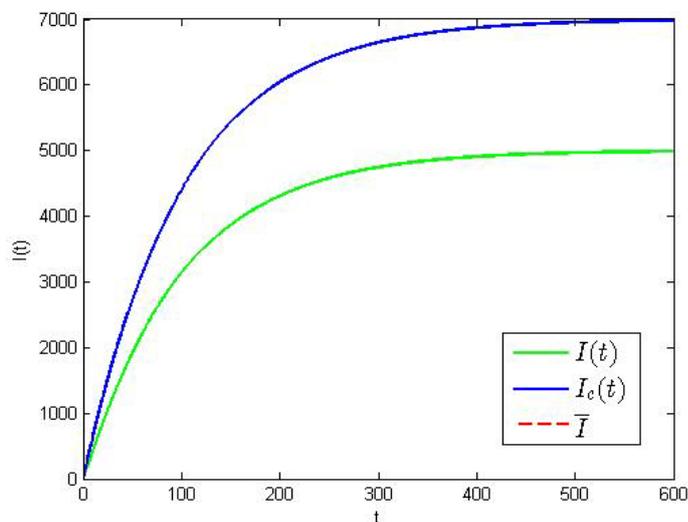
Parameter	\bar{u}	\bar{m}	h_1	h_2	h_3	c_1	c_2	c_3	θ	\bar{I}	\bar{p}	\bar{b}	η
Nilai	50	20	50	60	30	60	30	20	0,01	7000	1,0	15	0,01

Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang yang terjadi pada perusahaan berupa fungsi $S(t) = 2e^{(-t/10)}$, $\alpha(t) = 2e^{(-t/10)}$.

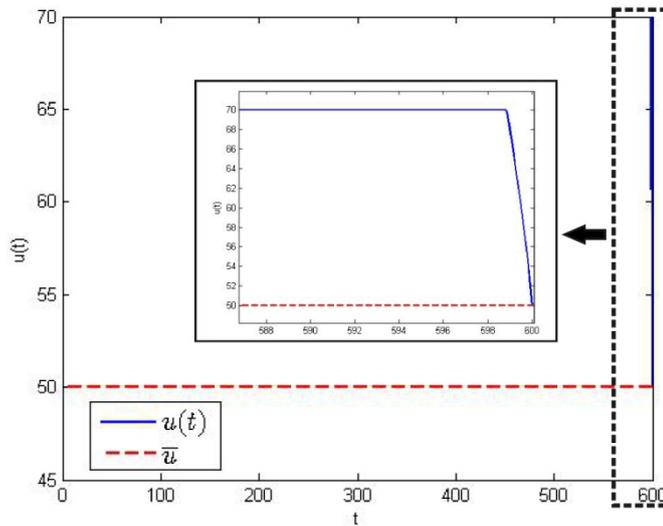
Gambar 4.22 menunjukkan grafik fungsi permintaan dan banyaknya produk usang berupa fungsi $2e^{(-t/10)}$, terlihat bahwa fungsi permintaan dan fungsi produk usang berupa grafik turun.



Gambar 4.22: Fungsi Permintaan dan Produk Usang terhadap Waktu

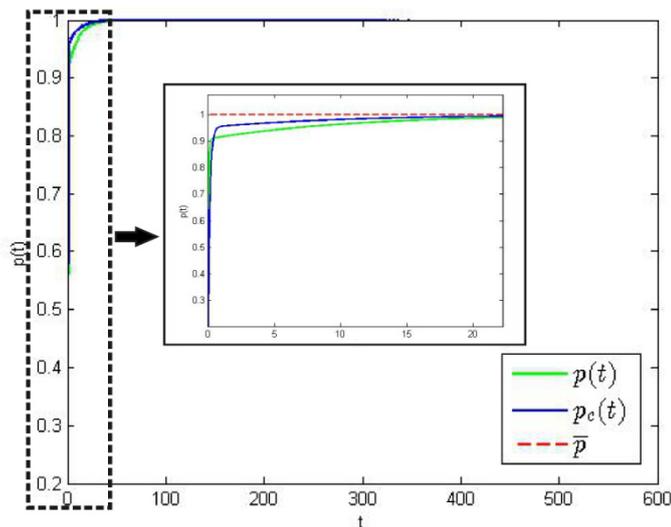


Gambar 4.23: Laju Tingkat Inventori dikontrol dan tak dikontrol

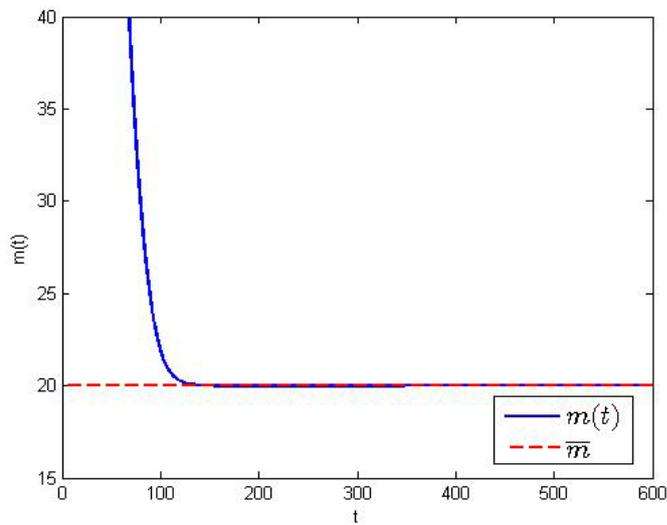


Gambar 4.24: Banyaknya Produk yang Terjadwal

Gambar 4.23 menunjukkan tingkat inventori yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju ke tingkat inventori yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk yang tak dikontrol belum bisa memenuhi target pada waktu yang ditetapkan. Hal ini disebabkan adanya kontrol pada produk yang terjadwal (Gambar 4.24) dengan menekan pada batas maksimum kemudian turun menuju \bar{u} di akhir ketika inventori yang ditargetkan terpenuhi.

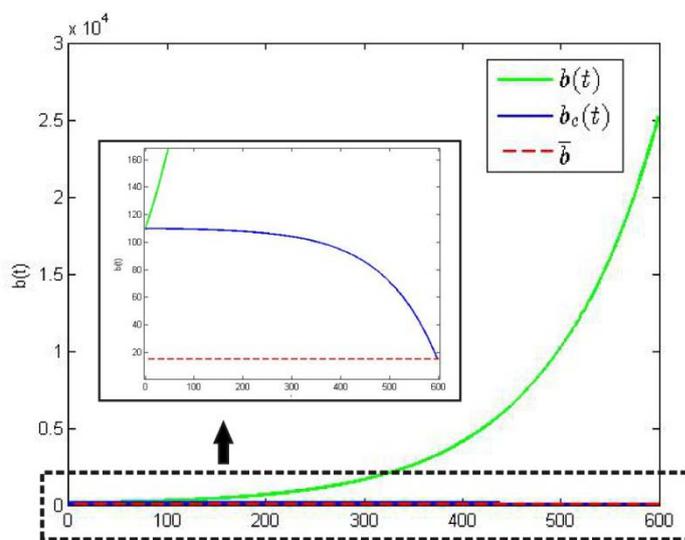


Gambar 4.25: Laju Proporsi Produk Baik dikontrol dan tak dikontrol

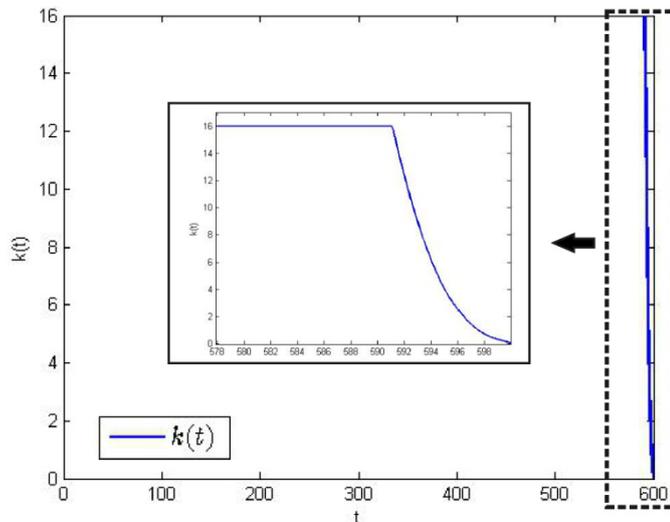


Gambar 4.26: Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Gambar 4.25 menunjukkan proporsi produk baik yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju proporsi produk baik yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk yang tak dikontrol menuju yang ditargetkan pula tapi dengan selisih waktu lebih lambat. Hal ini disebabkan adanya pengaruh dari permintaan dan banyaknya produk usang yang berupa fungsi $S(t) = 2e^{(-t/10)}$ dan $\alpha(t) = 2e^{(-t/10)}$ yang menurun sehingga berpengaruh pada banyaknya produk yang diberi perawatan (Gambar 4.26) dengan menekan pada batas maksimum kemudian menuju \bar{m} di selang waktu $t > 100$ sebagai akibat dari proporsi produk baik yang harus dipenuhi sampai inventori yang ditargetkan terpenuhi.

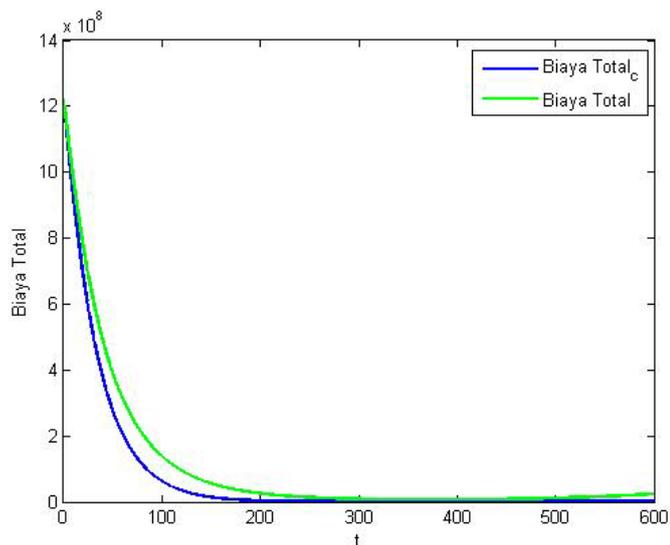


Gambar 4.27: Laju Tingkat Teknologi Usang dikontrol dan tak dikontrol



Gambar 4.28: Investasi Pengembangan Teknologi

Gambar 4.27 menunjukkan banyaknya teknologi usang yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju banyaknya teknologi usang yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk banyaknya teknologi usang yang tak dikontrol terlihat semakin meningkat. Hal ini disebabkan adanya kontrol pada investasi pengembangan teknologi (Gambar 4.28) dengan menekan pada batas maksimum kemudian turun menuju nol di akhir ketika banyaknya teknologi usang yang ditargetkan terpenuhi.



Gambar 4.29: Biaya Produksi Total dikontrol dan tak dikontrol

Pada Gambar 4.29 menunjukkan biaya total yang diberikan kontrol dan tak diberikan kontrol. Pada selang waktu 600 grafik menunjukkan hasil minimum

diperoleh ketika dilakukan kontrol yaitu sebesar 48,74 sedangkan untuk yang tak dikontrol sebesar $2,392 \times 10^7$.

Gambar 4.23 sampai 4.28 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya teknologi usang, banyaknya produk yang terjadwal, banyaknya produk yang diberi perawatan dan investasi pengembangan teknologi menuju yang ditargetkan. Hal tersebut, mengakibatkan biaya produksi total menjadi minimum. Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.29 menunjukkan bahwa pada selang waktu 600 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus III dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang digunakan fungsi $S(t) = 2e^{(-t/10)}$, $\alpha(t) = 2e^{(-t/10)}$ diperoleh biaya produksi total yang minimum.

4.7.4 Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang Meningkat (Kasus IV)

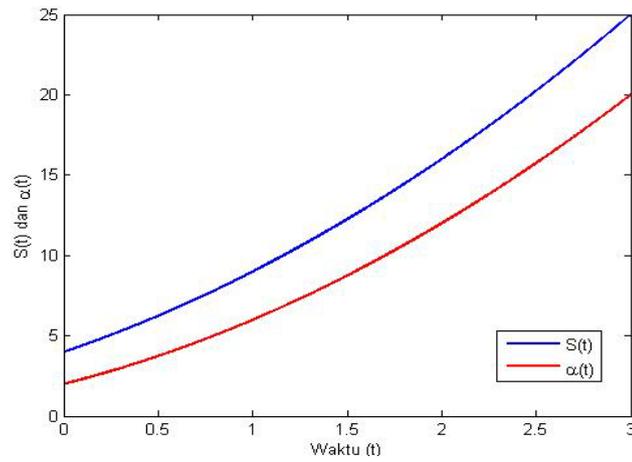
Misalkan pada kasus IV suatu perusahaan manufaktur berencana melakukan produksinya selama 3 satuan waktu dengan tingkat diskon $\rho = 0,01$ dan banyaknya inventori saat awal periode produksi $I_0 = 5$, proporsi produk baik sebesar $p_0 = 0,2$ dan banyaknya teknologi usang $b_0 = 110$. Biaya produksi total yang ditanggung perusahaan akan meningkat apabila nilai dari banyaknya inventori, proporsi produk baik dan banyaknya teknologi usang jauh dari yang ditargetkan. Berikut parameter yang digunakan untuk simulasi Kasus IV :

Tabel 4.5 Parameter Kasus IV

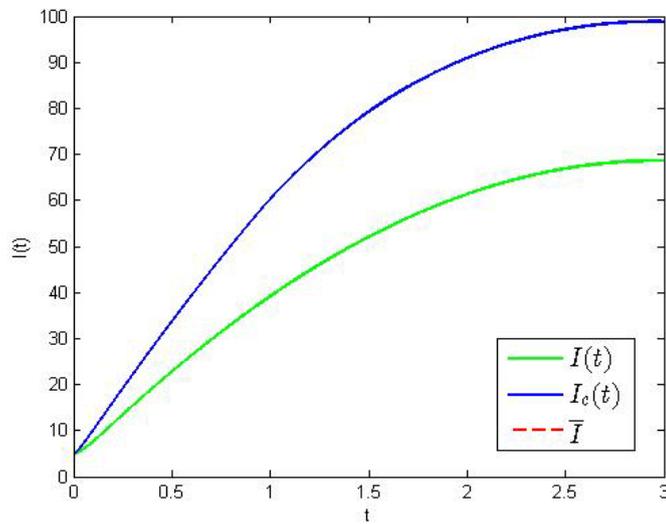
Parameter	\bar{u}	\bar{m}	h_1	h_2	h_3	c_1	c_2	c_3	θ	\bar{I}	\bar{p}	\bar{b}	η
Nilai	50	20	50	60	30	60	30	20	0,01	100	0,5	45	0,01

Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang yang terjadi pada perusahaan berupa fungsi $S(t) = t^2 + 4t + 4$, $\alpha(t) = t^2 + 3t + 2$.

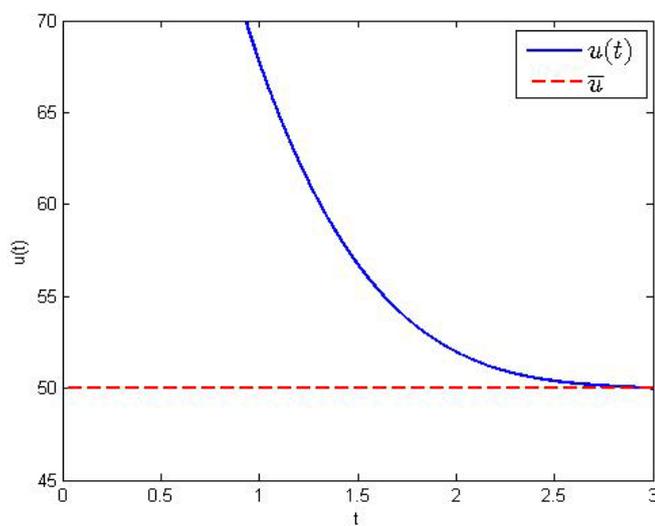
Gambar 4.30 menunjukkan grafik fungsi permintaan dan banyaknya produk usang berupa fungsi polinomial, terlihat bahwa fungsi permintaan dan fungsi produk usang berupa grafik naik.



Gambar 4.30: Fungsi Permintaan dan Produk Usang terhadap Waktu

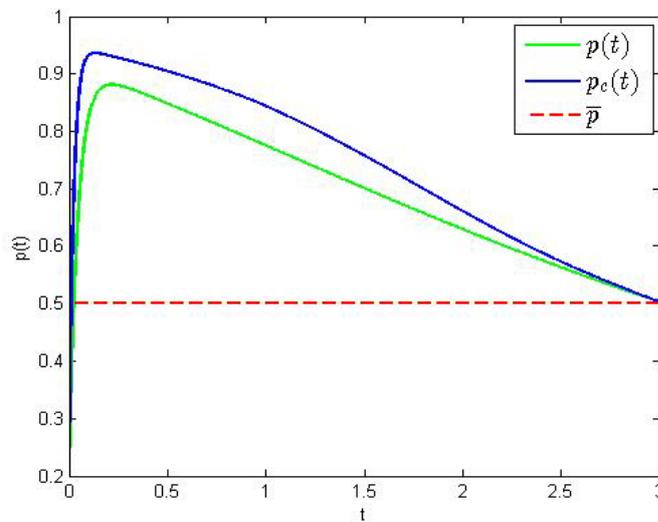


Gambar 4.31: Laju Tingkat Inventori dikontrol dan tak dikontrol

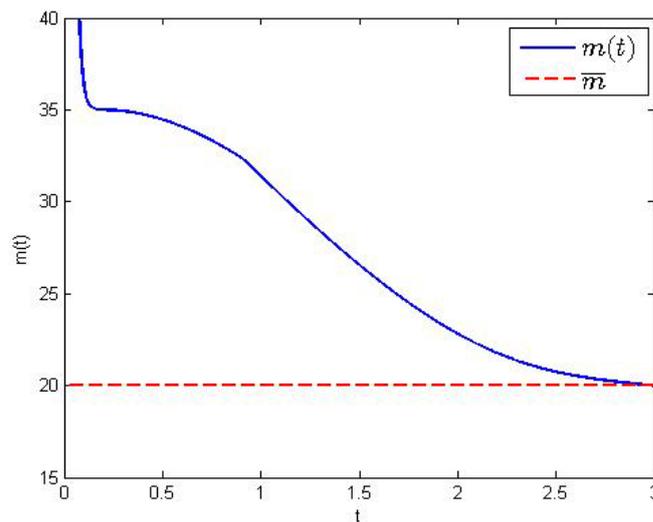


Gambar 4.32: Banyaknya Produk yang Terjadwal

Gambar 4.31 menunjukkan tingkat inventori yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju ke tingkat inventori yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk yang tak dikontrol belum bisa memenuhi target pada waktu yang ditetapkan. Hal ini disebabkan adanya kontrol pada produk yang terjadwal (Gambar 4.32) dengan menekan pada batas maksimum kemudian turun perlahan di selang waktu $t > 1$ menuju \bar{u} , yang sebagai akibat dari permintaan yang meningkat sampai inventori yang ditargetkan terpenuhi.



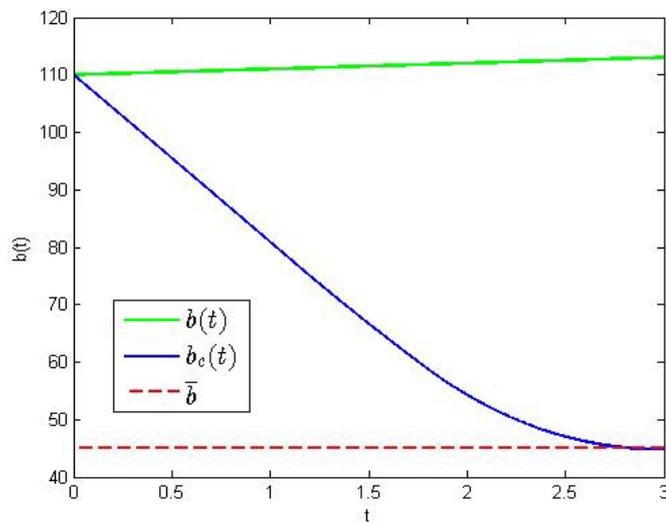
Gambar 4.33: Laju Proporsi Produk Baik dikontrol dan tak dikontrol



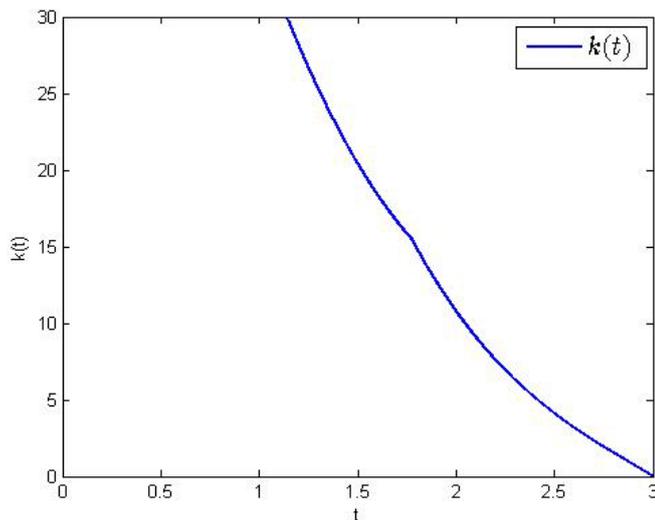
Gambar 4.34: Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Gambar 4.33 menunjukkan proporsi produk baik yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu meningkat di awal dan kemudian menuju proporsi produk baik yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sama halnya untuk yang tak dikontrol

menuju yang ditargetkan pula tapi dengan perbedaan besarnya proporsi. Hal ini disebabkan adanya pengaruh dari permintaan dan banyaknya produk usang yang berupa fungsi $S(t) = t^2 + 4t + 4$ dan $\alpha(t) = t^2 + 3t + 2$ yang meningkat sehingga berpengaruh pada banyaknya produk yang diberi perawatan (Gambar 4.34) dengan menekan turun menuju \bar{m} di selang waktu awal sebagai akibat dari proporsi produk baik yang yang meningkat di awal yang harus ditekan menuju proporsi yang ditargetkan sehingga inventori yang ditargetkan terpenuhi.



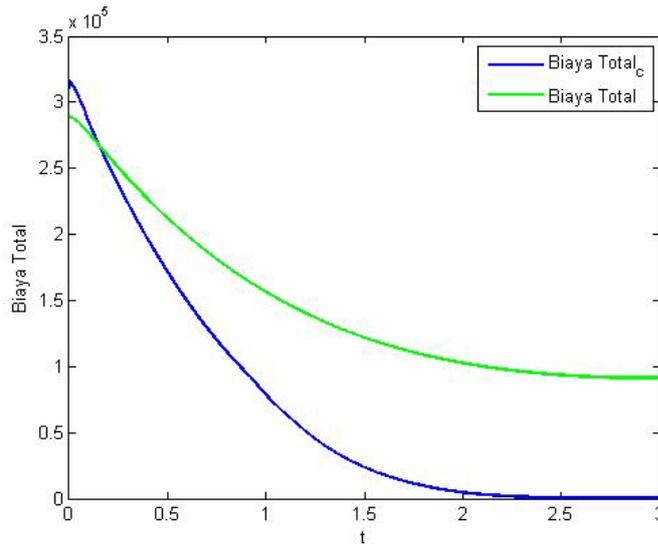
Gambar 4.35: Laju Tingkat Teknologi Usang dikontrol dan tak dikontrol



Gambar 4.36: Investasi Pengembangan Teknologi

Gambar 4.35 menunjukkan banyaknya teknologi usang yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju banyaknya teknologi usang yang ditargetkan untuk

yang dikontrol, sedangkan untuk banyaknya teknologi usang yang tak dikontrol belum bisa memenuhi target pada waktu yang ditetapkan. Hal ini disebabkan adanya kontrol pada investasi pengembangan teknologi (Gambar 4.36) dengan menekan pada batas maksimum kemudian turun perlahan di selang waktu $t > 1$ menuju nol ketika banyaknya teknologi usang menuju yang ditargetkan.



Gambar 4.37: Biaya Produksi Total dikontrol dan tak dikontrol

Pada Gambar 4.37 menunjukkan biaya total yang diberikan kontrol dan tak diberikan kontrol. Pada selang waktu 3 grafik menunjukkan hasil minimum diperoleh ketika dilakukan kontrol yaitu sebesar 34,28 sedangkan untuk yang tak dikontrol sebesar $9,14 \times 10^4$.

Gambar 4.31 sampai 4.36 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya teknologi usang, banyaknya produk yang terjadwal, banyaknya produk yang diberi perawatan dan investasi pengembangan teknologi menuju yang ditargetkan. Hal tersebut, mengakibatkan biaya produksi total menjadi minimum. Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.37 menunjukkan bahwa pada selang waktu 3 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus IV dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang digunakan fungsi $S(t) = t^2 + 4t + 4$ dan $\alpha(t) = t^2 + 3t + 2$, diperoleh biaya produksi total yang minimum.

4.7.5 Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang Tidak Pasti (Kasus V)

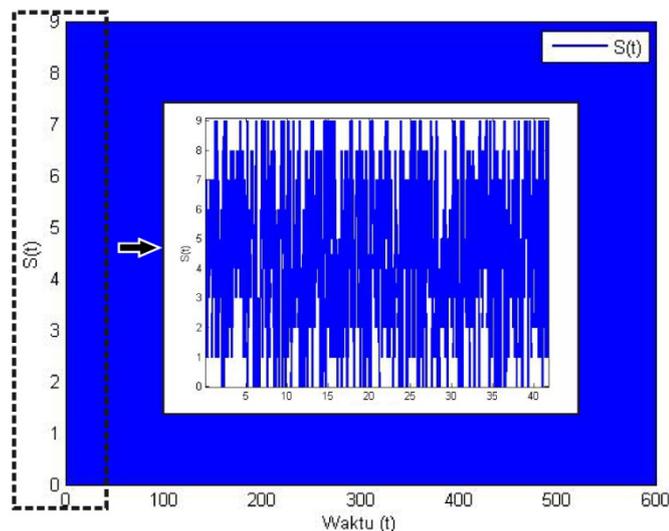
Misalkan pada kasus V suatu perusahaan manufaktur berencana melakukan produksinya selama 600 satuan waktu dengan tingkat diskon $\rho = 0,01$ dan banyaknya inventori saat awal periode produksi $I_0 = 5$, proporsi produk baik sebesar $p_0 = 0,2$ dan banyaknya teknologi usang $b_0 = 110$. Biaya produksi total yang ditanggung perusahaan akan meningkat apabila nilai dari banyaknya inventori, proporsi produk baik dan banyaknya teknologi usang jauh dari yang ditargetkan. Berikut parameter yang digunakan untuk simulasi Kasus V :

Tabel 4.6 Parameter Kasus V

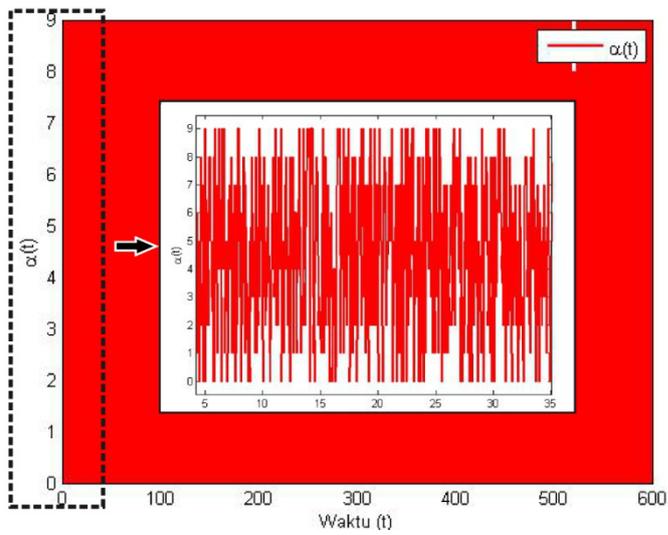
Parameter	\bar{u}	\bar{m}	h_1	h_2	h_3	c_1	c_2	c_3	θ	\bar{I}	\bar{p}	\bar{b}	η
Nilai	50	20	50	60	30	60	30	20	0,01	5870	0,88	15	0,01

Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang yang terjadi pada perusahaan berupa fungsi random $[0,9] \in \mathbb{Z}$.

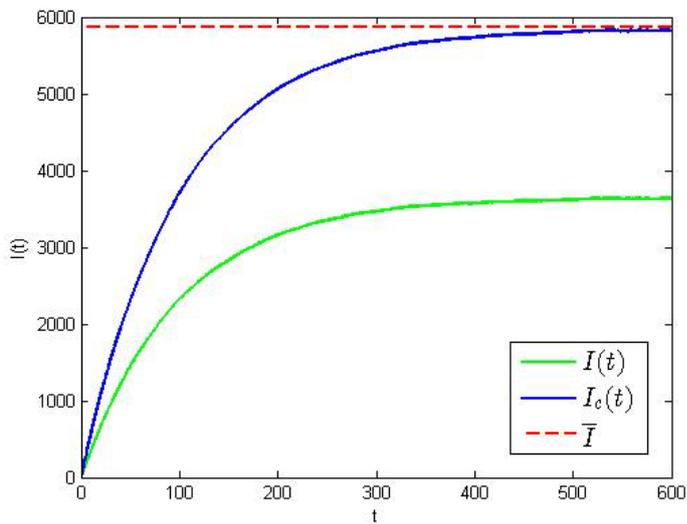
Gambar 4.38 dan Gambar 4.39 menunjukkan grafik fungsi permintaan dan banyaknya produk usang berupa fungsi random $[0,9] \in \mathbb{Z}$.



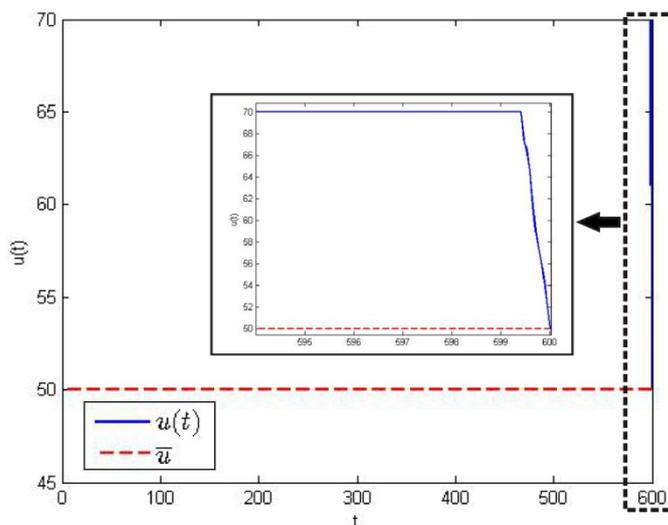
Gambar 4.38: Fungsi Permintaan terhadap Waktu



Gambar 4.39: Produk Usang terhadap Waktu

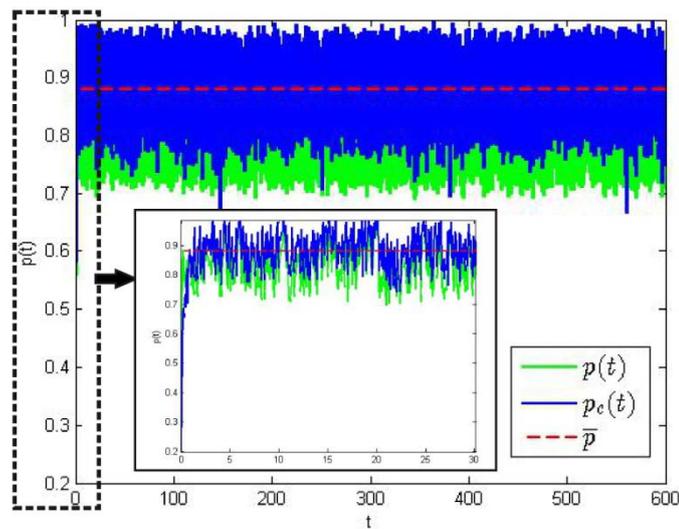


Gambar 4.40: Laju Tingkat Inventori dikontrol dan tak dikontrol

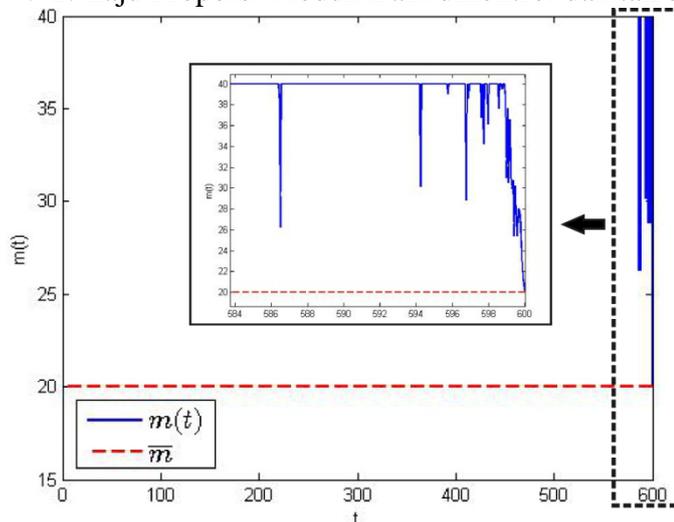


Gambar 4.41: Banyaknya Produk yang Terjadwal

Gambar 4.40 menunjukkan tingkat inventori yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju ke tingkat inventori yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk yang tak dikontrol belum bisa memenuhi target pada waktu yang ditetapkan. Hal ini disebabkan adanya kontrol pada produk yang terjadwal (Gambar 4.41) dengan menekan pada batas maksimum kemudian turun menuju \bar{u} di akhir ketika inventori yang ditargetkan terpenuhi.



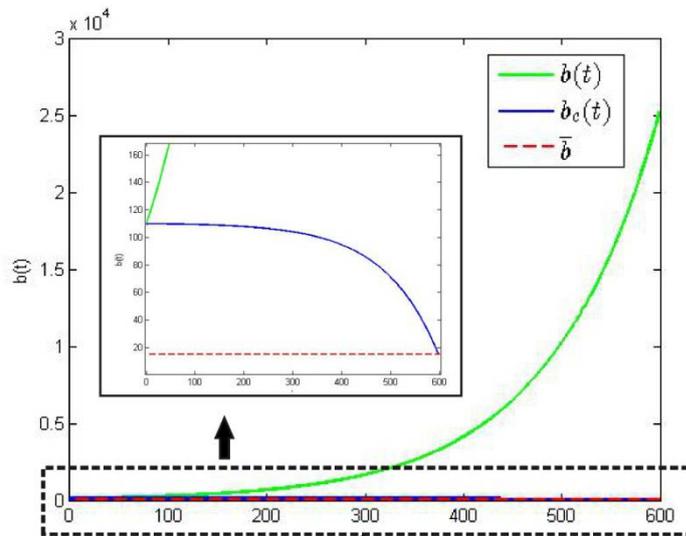
Gambar 4.42: Laju Proporsi Produk Baik dikontrol dan tak dikontrol



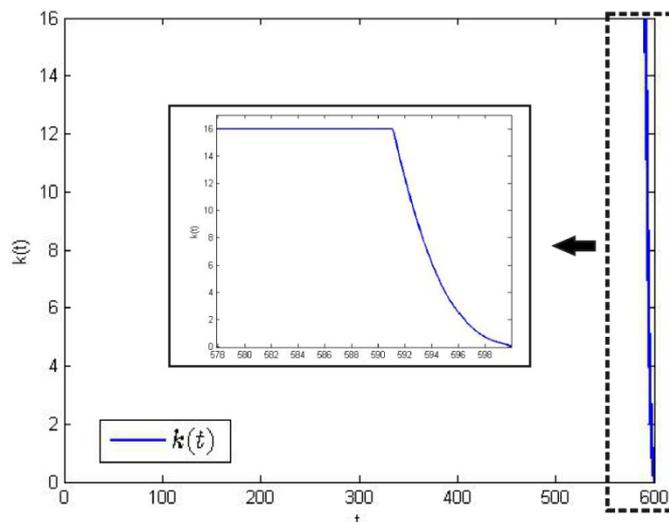
Gambar 4.43: Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Gambar 4.42 menunjukkan proporsi produk baik yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju persekitaran proporsi produk baik yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk yang tak dikontrol belum bisa memenuhi target pada waktu yang ditetapkan yang berupa grafik acak. Hal ini disebabkan adanya

pengaruh dari permintaan dan banyaknya produk usang yang berupa fungsi random $[0,9] \in \mathbb{Z}$, sehingga berpengaruh pada banyaknya produk yang diberi perawatan (Gambar 4.43) dengan menekan pada batas maksimum kemudian menurun berupa grafik acak menuju \bar{m} di akhir sebagai akibat dari proporsi produk baik yang harus dipenuhi sampai inventori yang ditargetkan terpenuhi.



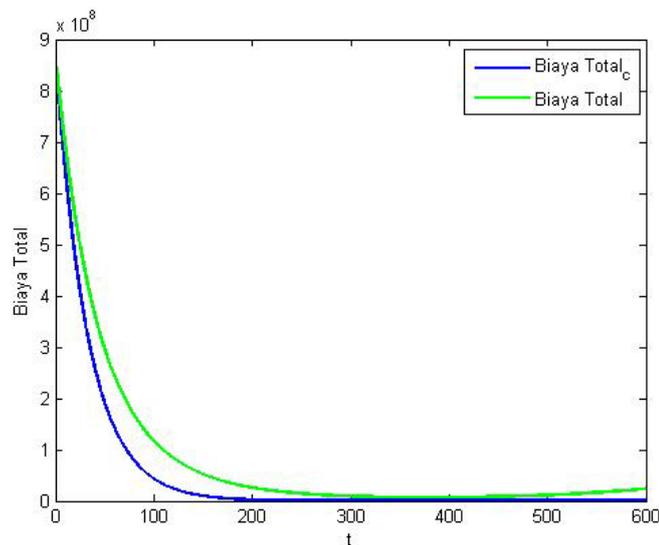
Gambar 4.44: Laju Tingkat Teknologi Usang dikontrol dan tak dikontrol



Gambar 4.45: Investasi Pengembangan Teknologi

Gambar 4.44 menunjukkan banyaknya teknologi usang yang dikontrol dan tak dikontrol yaitu menuju banyaknya teknologi usang yang ditargetkan untuk yang dikontrol, sedangkan untuk banyaknya teknologi usang yang tak dikontrol terlihat semakin meningkat. Hal ini disebabkan adanya kontrol pada investasi

pengembangan teknologi (Gambar 4.45) dengan menekan pada batas maksimum kemudian turun menuju nol di akhir ketika banyaknya teknologi usang yang ditargetkan terpenuhi.



Gambar 4.46: Biaya Produksi Total dikontrol dan tak dikontrol

Pada Gambar 4.46 menunjukkan biaya total yang diberikan kontrol dan tak diberikan kontrol. Pada selang waktu 600 grafik menunjukkan hasil minimum diperoleh ketika dilakukan kontrol yaitu sebesar 150,8 sedangkan untuk yang tak dikontrol sebesar $2,398 \times 10^7$.

Gambar 4.40 sampai 4.45 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya teknologi usang, banyaknya produk yang terjadwal, banyaknya produk yang diberi perawatan dan investasi pengembangan teknologi menuju yang ditargetkan. Hal tersebut, mengakibatkan biaya produksi total menjadi minimum. Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.46 menunjukkan bahwa pada selang waktu 600 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus V dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang digunakan fungsi $[0, 9] \in \mathbb{Z}$ diperoleh biaya produksi total yang minimum.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Hubungan antara banyaknya permintaan, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, banyaknya inventori, banyaknya produk yang diberi perawatan dan banyaknya produk usang saling berkaitan. Saat proporsi produk baik dan banyaknya produk yang terjadwal lebih besar daripada banyaknya permintaan konsumen dan produk rusak, maka proporsi produk baik dan produk yang terjadwal masuk ke dalam inventori sehingga inventori meningkat dan sebaliknya. Saat banyaknya produk yang diberi perawatan lebih besar dari pada produk usang, maka proporsi produk baik meningkat dan sebaliknya. Sedangkan hubungan antara banyaknya teknologi usang dan investasi pengembangan teknologi yaitu saat investasi pengembangan teknologi lebih besar daripada banyaknya teknologi usang, maka banyaknya teknologi usang semakin berkurang dan sebaliknya.
2. Hasil simulasi menunjukkan bahwa untuk semua kasus yang diberikan yaitu dengan kondisi permintaan konsumen dan banyaknya produk usang yang berbeda, grafik laju inventori menuju inventori yang ditargetkan ketika diberikan kontrol pada banyaknya produk yang terjadwal. Selain itu grafik proporsi produk baik juga menuju proporsi produk baik yang ditargetkan ketika banyaknya produk yang diberi perawatan diberikan kontrol. Begitu juga untuk grafik teknologi usang, grafik menuju banyaknya teknologi usang yang ditargetkan ketika investasi pengembangan teknologi diberikan kontrol.
3. Biaya total bernilai minimum ketika banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya teknologi usang, banyaknya produk yang terjadwal, banyaknya produk yang diberi perawatan dan investasi pengembangan

teknologi mencapai nilai yang optimal yaitu mendekati atau menuju yang ditargetkan.

5.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya, hal yang dapat dikembangkan dari tesis ini adalah model sistem perawatan produk dengan penggunaan data permintaan konsumen dan tingkat produk usang yang sesungguhnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Bounkhel, M. dan Tadj, L. (2005), "Optimal Control of Deteriorating Production Inventory System", *Statistics and Operations Research*, Vol. 7, hal. 30-45
- Boyce, W. E., DiPrima, R. C. (2009), *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 9th edition*, John Willey and Sons, Inc, United State of America
- Bukhari, F.A. dan El-Gohary, A. (2011), "Optimal Control of a Production-Maintenance System with Deteriorating Items", *Journal of King Saud University-Science*, Vol.24, hal. 351-357.
- Dragone, D., L. Lambertini, G. Leitmann, and A. Palestini. (2010), "A Stochastic Optimal Control Model of Pollution Abatement", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* 10: 117–124.
- Ginting, R. (2007), "Sistem Produksi", Yogyakarta, GRAHA ILMU.
- Hardiyanti, S.A., (2016), "Kontrol Optimal Sistem Perawatan Produksi dengan Memperhatikan Kerusakan Produk dan Tingkat Diskon", Tesis, FMIPA-ITS, Surabaya.
- Indayani, D. (2010), "Kendali Optimal pada Pengadaan Bahan Mentah dengan Kebijakan Pengadaan Tepat Waktu, Pergudangan, dan Penundaan", Jurusan Matematika, FMIPA-ITS
- Naidu, D. S. (2002), "Optimal Control Systems". CRC Press, New York.
- Pavela, V. (2015), "Kontrol Optimal Sistem Inventori dengan Memperhatikan Kerusakan Produk", Tesis, FMIPA-ITS, Surabaya.
- Subiono. (2013), "Sistem Linear dan Kontrol Optimal", Jurusan Matematika, FMIPA-ITS.

LAMPIRAN A. FORMAT PROGRAMMING MATLAB

```
function y =
sinSfix(alpha,theta,rho,eta,h1,h2,h3,c1,c2,c3,p_bar,i_bar,b_bar,u_
bar,m_bar,k_bar,umax,mmax,kmax,S)
clc;
clear all;

u_bar= 50;
m_bar= 20;
k_bar= 0;
umax = u_bar+20;
mmax = m_bar+20;
kmax = 30;

c1 = 60;
c2 = 30;
c3 = 20;
h1 = 50;
h2 = 60;
h3 = 30;

theta = 0.01;
eta = 0.01;

rho = 0.01;
c = 0.5;

P0 = 0.2;
I0 = 5;
B0 = 110 ;

p_bar = 0.975;
i_bar = 6729;
b_bar = 15;

test1 = -1;
test2 = -1;
test3 = -1;
test4 = -1;
test5 = -1;
test6 = -1;
test7 = -1;
test8 = -1;
test9 = -1;

N = 10000;
delta = 1/N;
t0 = 0;
tf = 600;
t=(linspace(t0,tf,N+1));
k=(tf-t0)/N;
k2=k/2;

S=(1+sin(3*t));
alpha=(1+sin(t+3));
```

```

J=zeros(1,N+1);
U=zeros(1,N+1);
M=zeros(1,N+1);
K=zeros(1,N+1);

P=zeros(1,N+1);
P(1)=P0;
I=zeros(1,N+1);
I(1)=I0;
B = zeros(1,N+1);
B(1) = B0;

P1=zeros(1,N+1);
P1(1)=P0;
I1=zeros(1,N+1);
I1(1)=I0;
B1=zeros(1,N+1);
B1(1)=B0;

q1 = zeros(1,N+1);
q2 = zeros(1,N+1);
q3 = zeros(1,N+1);
q1(N+1) = 0;
q2(N+1) = 0;
q3(N+1) = 0;

while (test1<0) && (test2<0) && (test3<0) && (test4<0) &&
(test5<0) && (test6<0) && (test7<0) && (test8<0) && (test9<0)

oldU = U;
oldM = M;
oldK = K;
oldP = P;
oldI = I;
oldB = B;
oldq1 = q1;
oldq2 = q2;
oldq3 = q3;

for i=1:N

k111 = P(i)*U(i)-theta*I(i)-(1+sin(3*t(i)));
k121 = -((1+sin(t(i)+3))+M(i))*P(i)+M(i);
k131 = -K(i)+eta*B(i);

k211 = (P(i)+k2*k121)*0.5*(U(i)+U(i+1))-theta*(I(i)+k2*k111)-...
(1+sin(3*(t(i)+k2)));
k221 = -((1+sin((t(i)+k2)+3))+0.5*(M(i)+M(i+1)))*(P(i)+k2*k121)...
+0.5*(M(i)+M(i+1)));
k231 = -0.5*(K(i)+K(i+1))+eta*(B(i)+k2*k131);

k311 = (P(i)+k2*k221)*0.5*(U(i)+U(i+1))-theta*(I(i)+k2*k211)-...
(1+sin(3*(t(i)+k2)));
k321 = -((1+sin((t(i)+k2)+3))+0.5*(M(i)+M(i+1)))*(P(i)+k2*k221)...
+0.5*(M(i)+M(i+1)));
k331 = -0.5*(K(i)+K(i+1))+eta*(B(i)+k2*k231);

```

```

k411 = (P(i)+k*k321)*U(i+1)-theta*(I(i)+k*k311)-...
      (1+sin(3*(t(i)+k)));
k421 = -(1+sin((t(i)+k)+3))+M(i+1))*(P(i)+k*k321)+M(i+1);
k431 = -K(i+1)+eta*(B(i)+k*k331);

I(i+1) = I(i)+(k/6)*(k111+2*k211+2*k311+k411);
P(i+1) = P(i)+(k/6)*(k121+2*k221+2*k321+k421);
B(i+1) = B(i)+(k/6)*(k131+2*k231+2*k331+k431);

U(i+1) = min(umax, max(0,(-(q1(i+1)*P(i+1)/c1)+u_bar)));
M(i+1) = min(mmax, max(0,(-(q2(i+1)*(1-P(i+1))/c2)+m_bar)));
K(i+1) = min(kmax, max(0,(q3(i+1)/c3)));

end

for i=1:N
    j=N+2-i;

k112 = (-h1*(I(j)-i_bar))+q1(j)*(theta+rho);
k122 = (-h2*(P(j)-p_bar))-q1(j)*U(j)+...
      q2(j)*((1+sin(t(j)+3))+rho+M(j));
k132 = (-h3*(B(j)-b_bar))+q3(j)*(rho-eta);

k212 = (-h1*(0.5*(I(j)+I(j-1))-i_bar))+q1(j)-k2*k112)*...
      (theta+rho);
k222 = (-h2*(0.5*(P(j)+P(j-1))-p_bar))-(q1(j)-k2*k112)*...
      0.5*(U(j)+U(j-1))+q2(j)-k2*k122)*((1+sin((t(i)-k2)+3))+rho+...
      0.5*(M(j)+M(j-1)));
k232 = (-h3*(0.5*(B(j)+B(j-1))-b_bar))+q3(j)-k2*k132)*(rho-eta);

k312 = (-h1*(0.5*(I(j)+I(j-1))-i_bar))+q1(j)-k2*k212)*...
      (theta+rho);
k322 = (-h2*(0.5*(P(j)+P(j-1))-p_bar))-(q1(j)-k2*k212)*...
      0.5*(U(j)+U(j-1))+q2(j)-k2*k222)*((1+sin((t(i)-k2)+3))+rho+...
      0.5*(M(j)+M(j-1)));
k332 = (-h3*(0.5*(B(j)+B(j-1))-b_bar))+q3(j)-k2*k232)*(rho-eta);

k412 = (-h1*(I(j-1)-i_bar))+q1(j)-k*k312)*(theta+rho);
k422 = (-h2*(P(j-1)-p_bar))-(q1(j)-k*k312)*U(j-1)+...
      +(q2(j)-k*k322)*((1+sin((t(i)-k)+3))+rho+M(j-1));
k432 = (-h3*(B(j-1)-b_bar))+q3(j)-k*k332)*(rho-eta);

q1(j-1) = q1(j)-(k/6)*(k112+2*k212+2*k312+k412);
q2(j-1) = q2(j)-(k/6)*(k122+2*k222+2*k322+k422);
q3(j-1) = q3(j)-(k/6)*(k132+2*k232+2*k332+k432);

U(j-1) = min(umax, max(0,(-(q1(j-1)*P(j-1)/c1)+u_bar)));
M(j-1) = min(mmax, max(0,(-(q2(j-1)*(1-P(j-1))/c2)+m_bar)));
K(j-1) = min(kmax, max(0,(q3(j-1)/c3)));

end
U = U*(1-c)+oldU*c;
M = M*(1-c)+oldM*c;

```

```

K = K*(1-c)+oldK*c;

temp1 = delta*sum(abs(U))-sum(abs(oldU-U));
temp2 = delta*sum(abs(M))-sum(abs(oldM-M));
temp3 = delta*sum(abs(K))-sum(abs(oldK-K));
temp4 = delta*sum(abs(I))-sum(abs(oldI-I));
temp5 = delta*sum(abs(P))-sum(abs(oldP-P));
temp6 = delta*sum(abs(B))-sum(abs(oldB-B));
temp7 = delta*sum(abs(q1))-sum(abs(oldq1-q1));
temp8 = delta*sum(abs(q2))-sum(abs(oldq2-q2));
temp9 = delta*sum(abs(q3))-sum(abs(oldq3-q3));

test1 = min(temp1, min(temp4, temp7));
test2 = min(temp1, min(temp5, temp8));
test3 = min(temp1, min(temp6, temp9));
test4 = min(temp2, min(temp4, temp7));
test5 = min(temp2, min(temp5, temp8));
test6 = min(temp2, min(temp6, temp9));
test7 = min(temp3, min(temp4, temp7));
test8 = min(temp3, min(temp5, temp8));
test9 = min(temp3, min(temp6, temp9));

end

for i=1:N

k11 = P1(i)*u_bar-theta*I1(i)-(1+sin(3*t(i)));
k12 = -((1+sin(t(i)+3))+m_bar)*P1(i)+m_bar;
k13 = -k_bar+eta*B1(i);

k21 = (P1(i)+k2*k12)*u_bar-theta*(I1(i)+k2*k11)- ...
(1+sin(3*(t(i)+k2)));
k22 = -((1+sin((t(i)+k2)+3))+m_bar)*(P1(i)+k2*k12)+m_bar;
k23 = -k_bar+eta*(B1(i)+k2*k13);

k31 = (P1(i)+k2*k22)*u_bar-theta*(I1(i)+k2*k21)- ...
(1+sin(3*(t(i)+k2)));
k32 = -((1+sin((t(i)+k2)+3))+m_bar)*(P1(i)+k2*k22)+m_bar;
k33 = -k_bar+eta*(B1(i)+k2*k23);

k41 = (P1(i)+k*k32)*u_bar-theta*(I1(i)+k*k31)-(1+sin(3*(t(i)+k)));
k42 = -((1+sin((t(i)+k)+3))+m_bar)*(P1(i)+k*k32)+m_bar;
k43 = -k_bar+eta*(B1(i)+k*k33);

I1(i+1) =I1(i)+(k/6)*(k11+2*k21+2*k31+k41);
P1(i+1) =P1(i)+(k/6)*(k12+2*k22+2*k32+k42);
B1(i+1) =B1(i)+(k/6)*(k13+2*k23+2*k33+k43);

end

for n = 1:N+1
J(n)= 0.5*exp(-rho*t(n))*(((h1*(I(n)-i_bar)^2)+(h2*(P(n)- ...
p_bar)^2)+(h3*(B(n)-b_bar)^2)+(c1*(U(n)-u_bar)^2)+(c2*(M(n)- ...
m_bar)^2)))+(c3*(K(n)^2)));
end
for n = 1:N+1

```

```

    J1(n)= 0.5*exp(-rho*t(n))*(((h1*(I1(n)-i_bar)^2)+(h2*(P1(n)- ...
p_bar)^2)+(h3*(B1(n)-b_bar)^2)));
    end

    y(1,:)=t;
    y(2,:)=I;
    y(3,:)=P;
    y(4,:)=B;
    y(5,:)=q1;
    y(6,:)=q2;
    y(7,:)=q3;
    y(8,:)=U;
    y(9,:)=M;
    y(10,:)=K;
    y(11,:)=I1;
    y(12,:)=P1;
    y(13,:)=B1;
    y(14,:)=J;
    y(15,:)=J1;

for i=1:N+1
    ibar(i)=i_bar;
    pbar(i)=p_bar;
    bbar(i)=b_bar;
    ubar(i)=u_bar;
    mbar(i)=m_bar;

end

%% PLOT GRAPHIC
figure(1)
plot(t,I1,'g',t,I,'b',t,ibar,'--r','LineWidth',2);
hold on
xlabel('t');
ylabel('I(t)');
h=legend('$$I(t)$$','$$I_c(t)$$','$$\overline{I}$$');
set(h,'Interpreter','latex','fontSize',15)

figure(2)
plot(t,P1,'g',t,P,'b',t,pbar,'--r','LineWidth',2);
hold on
xlabel('t');
ylabel('p(t)');
h=legend('$$p(t)$$','$$p_c(t)$$','$$\overline{p}$$');
set(h,'Interpreter','latex','fontSize',15)

figure(3)
plot(t,B1,'g',t,B,'b',t,bbar,'--r','LineWidth',2);
hold on
xlabel('t');
ylabel('b(t)');
h=legend('$$b(t)$$','$$b_c(t)$$','$$\overline{b}$$');
set(h,'Interpreter','latex','fontSize',15)

figure(4)
plot(t,U,'b',t,ubar,'--r','LineWidth',2);

```

```

hold on
xlabel('t');
ylabel('u(t)');
h=legend('$$u(t)$$','$$\overline{u}$$');
set(h,'Interpreter','latex','fontsize',15)

figure(5)
plot(t,M,'b',t,mbar,'--r','LineWidth',2);
hold on
xlabel('t');
ylabel('m(t)');
h=legend('$$m(t)$$','$$\overline{m}$$');
set(h,'Interpreter','latex','fontsize',15)

figure(6)
plot(t,K,'b','LineWidth',2);
hold on
xlabel('t');
ylabel('k(t)');
h=legend('$$k(t)$$');
set(h,'Interpreter','latex','fontsize',15)

figure(7)
plot(t,q1,'b',t,q2,'r',t,q3,'k','LineWidth',2);
hold on
grid on
title('Adjoint vs Times')
xlabel('t');
ylabel('Adjoint');
legend('q_1(t)','q_2(t)','q_3(t)');

figure(8)
plot(t,J,'b',t,J1,'g','LineWidth',2);
hold on
xlabel('t');
ylabel('Biaya Total');
legend('Biaya Total_c','Biaya Total');

figure(9)
plot(t,S,'b',t,alpha,'-r','LineWidth',2);
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('S(t) dan \alpha(t)');
legend('S(t)','\alpha(t)');

```



Penulis yang memiliki nama lengkap Tri Maryono Rusadi. Lahir di Gresik 3 Maret 1986. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Muslimat MINU Gumeno, SDN Gumeno, SMP Negeri 2 Manyar dan SMA Negeri 1 Gresik. Selanjutnya menempuh jenjang S1 di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya dan terakhir terdaftar sebagai Mahasiswa program Magister Matematika Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) dengan NRP. 06111450010020 pada tahun angkatan 2014. Penulis selama kuliah di Program Studi Magister Matematika FMKSD ITS mengambil bidang dan minat Pemodelan dan Simulasi Sistem. Untuk membentuk jejaring yang luas ataupun membutuhkan informasi yang berhubungan dengan Tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui rosadi2005@gmail.com.