TESIS - SM 142501

DIMENSI METRIK DAN DIMENSI PARTISI GRAF CYCLE BOOKS

JAYA SANTOSO
NRP 0611 1650 010 004

DOSEN PEMBIMBING:
Dr. Darmaji, S.Si, MT.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018

THESIS - SM 142501

THE METRIC DIMENSION AND PARTITION DIMENSION OF CYCLE BOOKS GRAPH

JAYA SANTOSO
NRP 0611 1650 010 004

SUPERVISOR:
Dr. Darmaji, S.Si, MT.

MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTING AND DATA SCIENCE
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2018

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:
JAYA SANTOSO
NRP. 0611 1650 010 004

Tanggal Ujian : 03 Agustus 2018
Periode Wisuda : September 2018

Disetujui oleh:

Dr. Darmaji, S.Si, MT.
NIP 19691015 199412 1 001 (Pembimbing)

Dr. Imam Mukhlash, S.Si., MT.
NIP 19700831 199403 1 003 (Penguji)

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.
NIP 19830517 200812 1 003 (Penguji)

Dr. Chairul Imron, MI.Komp.
NIP 19611115 198703 1 003 (Penguji)

Dekan FMKSD,

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

DIMENSI METRIK DAN DIMENSI PARTISI GRAF CYCLE BOOKS

Nama Mahasiswa	:	Jaya Santoso
NRP	:	0611 1650 010 004
Pembimbing	:	Dr. Darmaji, S.Si, MT.

Abstrak

Misalkan G adalah sebuah graf terhubung dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Jarak antara dua simpul u dan v, $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara simpul u dan v. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\} \subseteq V(G)$ dan $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah $r(v \mid W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), ..., d(v,w_k))$. Himpunan W disebut himpunan pembeda dari $V(G)$ jika $r(u|W) \neq r(v|W)$ untuk sebarang dua simpul berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi metrik dari suatu graf G, disimbolkan $dim(G)$, adalah bilangan bulat terkecil k sedemikian hingga G mempunyai sebuah himpunan pembeda dengan k anggota. Misalkan $v \in V(G)$ dan $S \subseteq V(G)$, jarak antara v dan S adalah $d(v,S) = min\{d(v,x)|x \in S\}$. Untuk sebuah partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ dari $V(G)$, representasi v terhadap Π adalah $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), ..., d(v,S_k))$. Partisi Π disebut partisi pembeda dari G jika semua representasi dari setiap simpul $v \in V(G)$ berbeda. Dimensi partisi $pd(G)$ adalah bilangan bulat terkecil k sedemikian hingga G mempunyai sebuah partisi pembeda dengan k anggota. Pada penelitian ini, kami mendapatkan dimensi metrik dan dimensi partisi graf Cycle Books $B_{C_r,m}$. Graf Cycle Books $B_{C_r,m}$ merupakan graf yang terdiri dari m salinan (copies) Cycle C_r dengan common path P_2 .

Kata-kunci: *Himpunan pembeda, Dimensi metrik, Partisi pembeda, Dimensi partisi, Graf cycle books*

THE METRIC DIMENSION AND PARTITION DIMENSION OF CYCLE BOOKS GRAPH

Name	:	Jaya Santoso
NRP	:	0611 1650 010 004
Supervisor	:	Dr. Darmaji, S.Si, MT.

Abstract

Let G be a connected graph with vertex set $V(G)$. The distance between two vertices u and v, $d(u, v)$ is the shortest path length between the vertices u and v. For the ordered set $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\} \subseteq V(G)$ and $v \in V(G)$, a representation of v with respect to W is $r(v \mid W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), ..., d(v, w_k))$. The set W is called resolving set of $V(G)$ if $r(u|W) \neq r(v|W)$ for any two different vertices $u, v \in V(G)$. The metric dimension of a graph G, $dim(G)$, is the smallest integer k such that G has a resolving set with k members. Let $v \in V(G)$ and $S \subseteq V(G)$, the distance between v and S is $d(v, S) = min\{d(v, x)|x \in S\}$. For an ordered partition $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ of $V(G)$, the representation of v with respect to Π is $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k))$. The partition Π is called a resolving partition of G if all representations of vertices are distinct. The partition dimension $pd(G)$ is the smallest integer k such that G has a resolving partition with k members. In this research, we show that the metric dimension and partition dimension of Cycle Books $B_{C_r,m}$, where Graf Cycle Books $B_{C_r,m}$ is a graph consisting of m copies Cycle C_r with the common path P_2.

Key-words: *Resolving set, Resolving partition, Metric dimension, Partition dimension,Graph cycle books*

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul :

" **Dimensi Metrik dan Dimensi Metrik Graf Cycle Book**"

dengan baik. Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data (FMKSD), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Bapak Dr. Darmaji, S.Si.,M.T. selaku dosen pembimbing atas segala bantuan, bimbingan, arahan dan motivasinya dalam mengerjakan Tesis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

2. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T., Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si, dan Dr. Chairul Imron, MI.Komp. selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tesis ini.

3. Bapak Prof. M. Isa Irawan,M.T. selaku dosen wali yang telah membimbing dan motivasi selama menempuh pendidikan magister.

4. Ketua Program Studi Pascasarjana Matematika ITS yang telah memberi bimbingan selama menempuh pendidikan magister.

5. Ketua Jurusan Matematika ITS yang telah memberi bimbingan selama menempuh pendidikan magister.

6. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika ITS yang telah mendidik penulis baik di dalam maupun di luar perkuliahan serta Bapak dan Ibu staf Tata Usaha Jurusan Matematika ITS.

7. Kedua orang tua Bapak G. Pandiangan, Ibu R.Simbolon serta keluarga besar tercinta terima kasih atas perhatian doa dan segala dukungannya selama penulis menempuh studi di ITS.

8. Keluarga besar Pascasarjana Matematika ITS khususnya angkatan 2016, yang telah menemani, membantu, mendoakan, dan memberikan semangat kepada penulis, serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa dalam Tesis ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan untuk kesempurnaan Tesis ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru khususnya dalam bidang teori graf.

Surabaya, Agustus 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

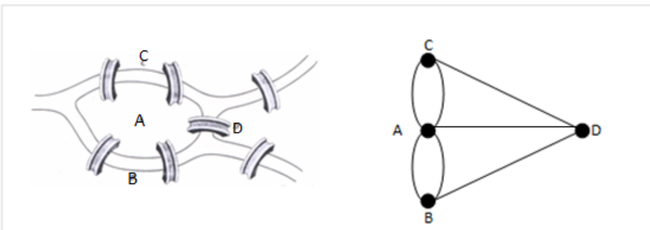
BAB 1
PENDAHULUAN

Pada bab ini akan diberikan ulasan mengenai hal-hal yang melatarbelakangi penelitian, rumusan masalah yang dibahas, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian.

1.1 Latar Belakang

Salah satu cabang matematika yang menarik untuk diteliti adalah matematika diskrit dengan fokus kajian pada Teori Graf. Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan simpul (*vertex*) tidak kosong, sedangkan E adalah himpunan sisi (*edge*), boleh kosong, yang menghubungkan sepasang simpul.

Teori graf pertama kali dikenal pada saat seorang matematikawan Swiss, bernama Leonhard Euler berhasil menyelesaikan permasalahan Jembatan Konigsberg pada tahun 1736. Pada saat itu terdapat empat kota yang dihubungkan oleh tujuh jembatan diatas sungai Pregel, Jerman. Masalahannya adalah bagaimana menyeberangi semua jembatan itu masing-masing tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Euler memodelkannya ke dalam bentuk graf dengan merepresentasikan kota (daratan) sebagai simpul (*vertex*) dan jembatan sebagai sisi (*edge*). Hasil dari penelitiannya tersebut adalah seseorang tidak mungkin berjalan melalui ketujuh jembatan itu masing-masing tepat satu kali dan kembali ke kota semula. Masalah Jembatan Konigsberg dan representasi pada graf disajikan pada Gambar 1.1 berikut.



Gambar 1.1: Representasi Jembatan Konigsberg dalam Bentuk Graf

Salah satu topik kajian dalam teori graf adalah dimensi metrik dan dimensi partisi. Diberikan suatu himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$ dari simpul-simpul graf terhubung G dan simpul v di $V(G)$, representasi dari simpul v terhadap W adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), d(v, w_3), ..., d(v, w_k))$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara simpul u dan simpul v. Jika untuk setiap dua simpul berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut himpunan pembeda (*resolving set*) dari $V(G)$. Himpunan pembeda W dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum. Kardinalitas dari himpunan pembeda minimum tersebut dinamakan dimensi metrik dari graf G dan dinotasikan $dim(G)$.

Misalkan G suatu graf, dengan $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak antara v dan S, dinotasikan $d(v,S)$, adalah $d(v,S) = min\{d(v,x)|x \in S\}$, $d(v,x)$ adalah jarak antara v dan x. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$, representasi dari simpul v terhadap Π adalah $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), ..., d(v,S_k))$. Jika untuk setiap dua simpul berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$, maka Π disebut partisi pembeda dari $V(G)$. Partisi pembeda Π dengan kardinalitas minimum disebut partisi pembeda minimum dari G dan kardinalitas partisi pembeda minimum dari G disebut dimensi partisi yang dinotasikan dengan $pd(G)$.

Chartrand dkk (2000) menunjukkan bahwa $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lintasan (P_n), dan $dim(G) = n-1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap (K_n). Selain itu Chartrand dkk menunjukkan $dim(G) = n-2$ dengan $n \geq 4$, jika dan hanya jika $G = K_{r,s}, (r,s \geq 1)$, $G = K_r + \overline{K_s}, (r \geq 1, s \geq 2)$, atau $G = K_r + (K_1 \cup K_s), (r,s \geq 1)$.

Dimensi partisi untuk beberapa kelas graf tertentu telah dikaji oleh banyak peneliti, misalnya Chartrand dkk (2000) telah menunjukkan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika G adalah graf linasan P_n, $pd(G) = n$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap K_n dan $pd(G) = n-1$ dengan $n \geq 4$, jika dan hanya jika $G = K_{r,s}, (r,s \geq 1)$, $G = K_r + \overline{K_s}, (r \geq 1, s \geq 2)$, atau $G = K_r + (K_1 \cup K_s), (r,s \geq 1)$, Grigorious dkk (2014) menunjukkan dimensi partisi dari kelas graf circulant, Amrullah dkk (2015) menunjukkan dimensi partisi pada subdivisi graf lengkap, Haryeni dkk (2015) menentukan dimensi partisi dari beberapa kelas graf tak terhubung yang homogen dan Yero dkk (2011) menunjukkan dimensi partisi dari graf hasil perkalian kartesian.

Salah satu contoh aplikasi dimensi metrik adalah navigasi robot (Khuller dkk, 1996). Sebuah robot bergerak dari satu titik lokasi ke lokasi lainnya pada bidang. Setiap titik lokasi pada bidang gerak robot harus memberikan kode yang berbeda, dimana titik lokasi dipandang sebagai *vertex* dan lintasan robot dipandang sebagai *edge*. Agar robot dapat bergerak secara efisien, maka robot harus cepat menerjemahkan kode titik-titik lokasi yang dilaluinya. Untuk itu, titik lokasi harus mempunyai komponen seminimal mungkin, yang pada sebuah graf disebut sebagai dimensi metrik.

Graf Buku dinotasikan dengan B_m adalah graf yang diperoleh dari hasil kali kartesian graf bintang dengan graf lintasan P_2 dinotasikan $S_{m+1} \times P_2$ dengan m menyatakan banyak simpul dalam graf bintang. Modifikasi dari graf buku adalah graf buku bertumpuk. Graf buku bertumpuk dinotasikan $B_{m,n}$ merupakan graf yang diperoleh dari hasil kali kartesian graf bintang dengan graf lintasan $S_{m+1} \times P_n$ dengan m menyatakan banyak simpul dalam graf bintang dan n menyatakan banyak simpul dalam graf lintasan. Generalisasi dari graf buku adalah graf *Cycle Book*. Graf *Cycle Book* dinotasikan $B_{C_r,m}$ merupakan graf yang terdiri dari m salinan (copies) Cycle C_r dengan common path P_2, dengan r menyatakan banyak simpul dalam graf *cycle*.

Graf buku telah dikaji oleh beberapa peneliti, misalnya Ayhan dkk. (2010)

telah membahas tentang bilangan pendominasi (*domination numbers*) dari graf buku B_m, Prasetyo (2013) telah membahas dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf buku bertumpuk $B_{3,3}$, dan Santoso (2016) telah membahas pelabelan total sisi ajaib pada graf *5-cycle books*.

Graf *cycle books* merupakan graf yang menarik untuk dijadikan bahan penelitian, karena graf *cycle books* merupakan perumuman dari graf buku yang telah banyak dikaji oleh peneliti sebelumnya. Graf buku yang diteliti oleh beberapa peneliti sebelumnya adalah graf buku yang merupakan *cycle* empat C_4 dengan m *copy*. Permasalahannya adalah bagaimana jika graf buku yang dibangun oleh sebarang *cycle*. Sehingga dalam tesis ini, diteliti dimensi metrik dan dimensi partisi graf *cycle books*, dimana graf *cycle books* merupakan graf buku yang dibentuk dari graf *cycle* C_r untuk $r \geq 3$.

Berdasarkan ulasan penelitian yang telah dilakukan, belum ada peneliti yang melakukan penelitian tentang dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf *Cycle Book*. Oleh karena itu, pada tesis ini dilakukan penelitian tentang dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf *Cycle Book*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah:

1. Berapakah dimensi metrik graf *Cycle Book*?
2. Berapakah dimensi partisi graf *Cycle Book*?
3. Apakah ada hubungan yang mengaitkan antara dimensi metrik dan partisi graf *Cycle Book*?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini diberikan batasan masalah sebagai berikut.
Graf yang menjadi objek penelitian adalah graf *Cycle Book* $B_{C_r,m}$, untuk $r \geq 3$, $m \geq 2$; $r, m \in Z^+$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui dimensi metrik graf *Cycle Book*.
2. Mengetahui dimensi partisi graf *Cycle Book*.
3. Mengetahui hubungan antara dimensi metrik dan dimensi partisi graf *Cycle Book*.

1.5 Manfaat Penelitian

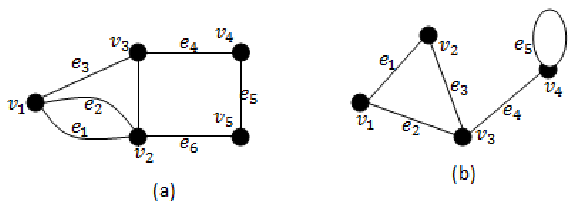
Manfaat dari penelitian ini adalah untuk kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf.

BAB 2
KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Dalam bab ini dibahas kajian pustaka dan dasar teori yang berkaitan dengan topik penelitian tesis ini.

2.1 Terminologi Dasar Graf

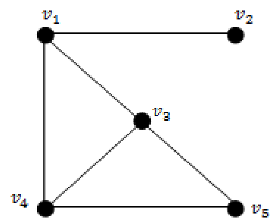
Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan simpul (*vertex*) tidak kosong, sedangkan E adalah himpunan sisi (*edge*), boleh kosong, yang menghubungkan sepasang simpul. Misalkan u dan v adalah simpul-simpul pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan simpul u dan v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dilambangkan dengan e. Dalam sebuah graf dimungkinkan adanya lebih dari satu sisi yang dikaitkan dengan sepasang simpul. Sisi seperti ini disebut sisi rangkap (*multiple edges*). Dalam sebuah graf, suatu sisi yang menghubungkan pasangan simpul yang sama, yaitu (v_i, v_i) disebut *loop*. Sebuah graf yang tidak memiliki *loop* dan tidak memiliki sisi rangkap disebut graf sederhana (*simple graph*). Jika sebuah simpul v_i merupakan simpul ujung dari suatu sisi e_j, maka dikatakan insiden (*incidency*) dengan sisi e_j. Dua buah simpul disebut bertetangga atau ajasen (*adjacent*) jika kedua simpul tersebut dihubungkan oleh suatu sisi yang sama. Pada Gambar 2.1 (a) simpul e_1 dan e_2 merupakan sisi rangkap, simpul v_4 insiden terhadap sisi e_4, simpul v_3 dan v_4 merupakan saling ajasen. Pada Gambar 2.1(b) sisi e_5 adalah *loop* karena e_5 menghubungkan simpul yang sama yaitu v_4.



Gambar 2.1: Graf Terhubung dengan (a) Sisi Rangkap, (b) *loop*

Sebuah graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua simpul yang berbeda di graf G terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Jarak antara simpul u dan v didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari simpul u ke v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$, sedangkan jarak terjauh dari sebarang dua simpul $V(G)$ disebut diameter dari graf G dan dinotasikan dengan $diam(G)$. Gambar 2.2 memberikan gambaran graf terhubung, dengan jarak antara simpul ke simpul lainnya adalah $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 1$, $d(v_1, v_4) = 1$, $d(v_1, v_5) = 2$, $d(v_2, v_3) = 2$,

$d(v_2, v_4) = 2$, $d(v_2, v_5) = 3$, $d(v_3, v_4) = 1$, $d(v_3, v_5) = 1$, $d(v_4, v_5) = 1$ dan diameter graf G, $diam(G) = 3$, yaitu jarak antara simpul v_2 ke simpul v_5.



Gambar 2.2: Graf Terhubung

2.2 Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi

2.2.1 Dimensi Metrik

Misalkan u dan v adalah simpul-simpul dari graf terhubung G. Jarak antara simpul u dan v didefinisikan sebagai lintasan terpendek dari simpul u ke v di G dan dinotasikan $d(u, v)$. Jika diberikan suatu himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$ dari simpul-simpul dalam graf terhubung G dan simpul $v \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap W adalah $r(v \mid W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), ..., d(v, w_k))$. Jika untuk setiap dua simpul berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut himpunan pembeda (*resolving set*) dari $V(G)$. Himpunan pembeda W dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum. Kardinalitas dari himpunan pembeda minimum tersebut dinamakan dimensi metrik dari graf G, yang dinotasikan $dim(G)$.

Permana dan Darmaji(2012) memberikan 2.1 untuk menentukan setiap anggota himpunan berbeda memiliki representasi yang berbeda.

Lemma 2.1. *[Permana dan Darmaji (2012)] Untuk setiap simpul u anggota himpunan pembeda W pasti memiliki representasi yang berbeda terhadap W.*

Chartrand dkk (2000) memberikan Teorema 2.1 untuk menentukan dimensi metrik pada graf *well-known* yaitu graf lintasan *(Path)* P_n, graf lengkap K_n, graf lingkaran *(cycle)* C_n dan graf pohon T.

Teorema 2.1. *[Chartrand, Salehi dan Zhang (2000)] Misalkan G adalah sebuah graf terhubung dengan orde $n \geq 2$*

i. $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$

ii. $dim(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$

iii. Untuk $n \geq 3$, $dim(C_n) = 2$

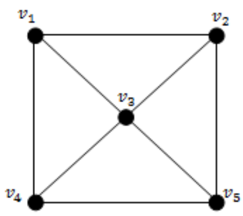
iv. Untuk $n \geq 4$, $dim(G) = n - 2$ jika dan hanya jika $G = K_{r,s}, (r, s \geq 1), G = K_r + \overline{K_s}, (r \geq 1, s \geq 2)$, atau $G = K_r + (K_1 \bigcup K_s), (r, s \geq 1)$

v. *Jika T adalah graf pohon yang bukan lintasan maka $dim(T) = \partial(T) - ex(T)$, dimana $\partial(T)$ menyatakan jumlah derajat terminal dari simpul utama T, dan $ex(T)$ menyatakan jumlah simpul utama bagian luar T.*

Misalkan G adalah graf yang diberikan pada Gambar 2.3 Ambil $W_1 = \{v_1, v_3\}$, maka representasi setiap simpul $v \in G$ terhadap W_1 adalah

$$r(v_1|W_1) = (0, 1)$$
$$r(v_2|W_1) = (1, 1)$$
$$r(v_3|W_1) = (1, 0)$$
$$r(v_4|W_1) = (1, 1)$$
$$r(v_5|W_1) = (2, 1)$$

Karena $r(v_2|W_1) = r(v_4|W_1) = (1, 1)$ maka W_1 bukan himpunan pembeda dari G.



Gambar 2.3: Graf terhubung G

Misalkan ambil $W_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, maka representasi setiap simpul $v \in G$ terhadap W_2 adalah

$$r(v_1|W_2) = (0, 1, 1)$$
$$r(v_2|W_2) = (1, 0, 1)$$
$$r(v_3|W_2) = (1, 1, 0)$$
$$r(v_4|W_2) = (1, 2, 1)$$
$$r(v_5|W_2) = (2, 1, 1)$$

Jadi W_2 adalah himpunan pembeda dari G sebab $r(v|W_2)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Akan tetapi W_2 bukan merupakan himpunan pembeda dari G dengan kardinalitas minimum, karena kita dapat menunjukkan himpunan pembeda dari G dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W_2.

Misalkan $W_3 = \{v_1, v_2\}$, maka representasi setiap simpul $v \in G$ terhadap W_3 yakni:

$$r(v_1|W_3) = (0, 1)$$
$$r(v_2|W_3) = (1, 0)$$

$r(v_3|W_3) = (1, 1)$

$r(v_4|W_3) = (1, 2)$

$r(v_5|W_3) = (2, 1)$

Jadi W_3 adalah himpunan pembeda dari G sebab $r(v|W_3)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Karena kita tidak dapat menemukan himpunan pembeda dari G dengan kardinalitas yang lebih minimum dari W_3 maka W_3 merupakan himpunan pembeda dari G dengan kardinalitas minimum yaitu 2. Jadi dimensi metrik dari G adalah $dim(G) = 2$.

2.2.2 Dimensi Partisi

Diberikan suatu graf terhubung G dan $u, v \in V(G)$. Jarak antara u dan v disimbolkan dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari simpul u dan v. Dengan kata lain $d(v, v) = 0$ dan $d(u, v) = \infty$ jika tidak ada lintasan dari u ke v (Anderson dan Badawi, 2008).

Misalkan G suatu graf, dengan $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak antara v dan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$ adalah $d(v, S) = min\{d(v, x)|x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak antara v dan x. Diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$, representasi dari simpul v terhadap Π adalah $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k))$. Jika untuk setiap dua simpul berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$, maka Π disebut partisi pembeda dari $V(G)$. Partisi pembeda Π dengan kardinalitas minimum adalah partisi pembeda minimum dari G disebut dimensi partisi yang dinotasikan dengan $pd(G)$.

Beberapa lemma dan teorema yang mendasari dalam menentukan dimensi partisi pada beberapa graf sebagai berikut.

Lemma 2.2. *[Chartrand, Salehi dan Zhang (2000)] Misalkan G suatu graf terhubung tak trivial. Misalkan Π suatu partisi pembeda dari G dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka u dan v berada dalam kelas partisi yang berbeda di Π.*

Teorema 2.2. *[Chartrand, Salehi dan Zhang (2000)] Misalkan G suatu graf terhubung tak trivial, maka $pd(G) \leq dim(G) + 1$.*

Teorema 2.3. *[Chartrand, Salehi dan Zhang (2000)] Misalkan G adalah graf terhubung dengan orde $n \geq 2$,*

i. $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$

ii. $pd(G) = n$ jika dan hanya jika $G = K_n$

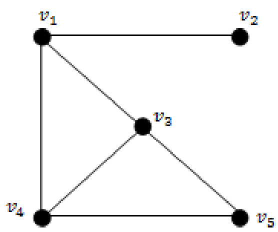
iii. untuk $n \geq 4$, $pd(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_{r,s}, (r, s \geq 1)$, $G = K_r + \overline{K_s}, (r \geq 1, s \geq 2)$, atau $G = K_r + (K_1 \cup K_s), (r, s \geq 1)$.

Graf G adalah graf terhubung yang diberikan pada Gambar 2.4. Misalkan ambil suatu partisi pembeda terurut dari $V(G)$, yaitu Misalkan $\Pi_1 = \{S_1, S_2\}$

dimana $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $S_2 = \{v_4, v_5\}$.
Maka representasi setiap simpul $v \in G$ terhadap Π_1 yakni:

$$r(v_1|\Pi_1) = (0,1)$$
$$r(v_2|\Pi_1) = (0,2)$$
$$r(v_3|\Pi_1) = (0,1)$$
$$r(v_4|\Pi_1) = (1,0)$$
$$r(v_5|\Pi_1) = (1,0)$$

Karena $r(v_1|\Pi_1) = r(v_3|\Pi_1) = (0,1)$ dan $r(v_4|\Pi_1) = r(v_5|\Pi_1) = (1,0)$ maka Π_1 bukan partisi pembeda dari G.



Gambar 2.4: Graf G

Misalkan ambil $\Pi_2 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, dengan $S_1 = \{v_1\}, S_2 = \{v_2\}, S_3 = \{v_3\}, S_4 = \{v_4\}$ dan $S_5 = \{v_5\}$, maka representasi setiap simpul $v \in G$ terhadap Π_2 yakni:

$$r(v_1|\Pi_2) = (0,1,1,1,2)$$
$$r(v_2|\Pi_2) = (1,0,2,2,3)$$
$$r(v_3|\Pi_2) = (1,2,0,1,1)$$
$$r(v_4|\Pi_2) = (1,2,1,0,1)$$
$$r(v_5|\Pi_2) = (2,3,1,1,0)$$

Jadi Π_2 adalah partisi pembeda dari G sebab $r(v|\Pi_2)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Akan tetapi Π_2 bukan merupakan partisi pembeda yang minimum, karena kita dapat menunjukkan partisi pembeda yang lebih kecil dari Π_2.

Misalkan $\Pi_3 = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_2\}, S_2 = \{v_3\}$, dan $S_3 = \{v_4, v_5\}$. Maka representasi setiap simpul $v \in G$ terhadap Π_3 yakni:

$$r(v_1|\Pi_3) = (0,1,1)$$
$$r(v_2|\Pi_3) = (0,2,2)$$
$$r(v_3|\Pi_3) = (1,0,1)$$

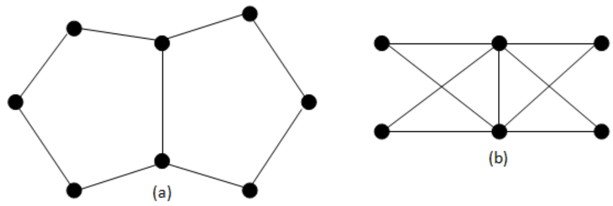
$r(v_4|\Pi_3) = (1, 1, 0)$

$r(v_5|\Pi_3) = (2, 1, 0)$

Jadi Π_3 adalah partisi pembeda dari G sebab $r(v|\Pi_3)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Maka, dapat kita katakan bahwa Π_3 adalah partisi pembeda dari G dengan kardinalitas minimum yaitu 3. Jadi dimensi partisi dari G atau $pd(G) = 3$.

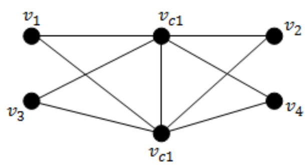
2.3 Graf Cycle Book

Dimensi partisi dan dimensi metrik telah banyak diteliti pada berbagai graf. Dalam penelitian ini, akan dicari dimensi partisi dan dimensi metrik pada graf *cycle book* dinotasikan $B_{C_r,m}$.



Gambar 2.5: Graf (a) $B_{C_5,2}$, dan (b) $B_{C_3,4}$

Graf pada Gambar 2.5.(a) merupakan graf *cycle book* $B_{C_5,2}$, dimana terdapat 2 salinan (*copies*) *cycle* C_5 dengan *common path* P_2, dan Graf pada Gambar 2.5(b) merupakan graf *cycle book* $B_{C_3,4}$, dimana terdapat 4 salinan (*copies*) cycle C_3 dengan *common path* P_2.



Gambar 2.6: $B_{C_3,4}$

Graf yang diberikan pada Gambar 2.6 adalah $B_{C_3,4}$. Ambil $W = \{v_{c1}, v_1, v_2, v_3\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}|W) = (0, 1, 1, 1)$

$r(v_{c2}|W) = (1, 1, 1, 1)$

$r(v_1|W) = (1, 0, 2, 2)$

$r(v_2|W) = (1, 2, 0, 2)$

$r(v_3|W) = (1, 2, 2, 0)$

$r(v_4|W) = (1, 2, 2, 2)$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_3,4}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_3,4})$. Karena tidak dapat ditemukan himpunan pembeda dari $B_{C_3,4}$ dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W, maka W merupakan himpunan pembeda dari $B_{C_3,4}$ dengan kardinalitas minimum yaitu 4. Jadi deimensi metrik dari $B_{C_3,4}$ adalah $dim(B_{C_3,4})$=4.

Dimensi partisi pada graf *cycle books* $B_{C_3,4}$ pada gambar 2.6 dipeoleh dengan menentukan partisi pembeda $B_{C_3,4}$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dengan $S_1 = \{v_{c1}, v_1\}, S_2 = \{v_2, v_{c2}\}$, $S_3 = \{v_3\}$ dan $S_4 = \{v_4\}$. Maka representasi setiap simpul $v \in B_{C_3,4}$ terhadap Π adalah

$r(v_{c1}|\Pi) = (0, 1, 1, 1)$

$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, 1, 1)$

$r(v_1|\Pi) = (0, 1, 2, 2)$

$r(v_2|\Pi) = (1, 0, 2, 2)$

$r(v_3|\Pi) = (1, 1, 0, 2)$

$r(v_4|\Pi) = (1, 1, 2, 0)$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_3,4}$ dengan kardinalitas 4, sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_3,4})$. Jadi $pd(B_{C_3,4}) \leq 4$.

Selanjutnya untuk menentukan batas bawah dimensi partisi pada $B_{C_3,4}$ dapat diperoleh dengan menggunakan Lemma 2.1. Menurut Lemma 2.1 simpul-simpul pada *common path* graf $B_{C_3,4}$ yaitu v_{c1} dan v_{c2} harus berada pada kelas partisi yang berbeda, dan simpul lainnya yaitu v_1, v_2, v_3 dan v_4 harus berada pada kelas partisi yang berbeda juga. Oleh karena itu, dengan meletakkan simpul v_{c1} dan satu simpul lainnya (misalkan v_1) dalam satu kelas partisi katakan S_1, dan meletakkan simpul v_{c2} dan satu simpul lainnya (misalkan v_2) dalam satu kelas partisi katakan S_2. Kemudian simpul lainnya yaitu v_3 dan v_4 masing-masing diletakkan dalam kelas partisi yang berbeda S_3 dan S_4. Maka diperoleh konstruksi partisi pembeda minimum dengan kardinalitas 4 atau dengan kata lain $pd(B_{C_3,4}) \geq 4$. Karena $pd(B_{C_3,4}) \leq 4$ dan $pd(B_{C_3,4}) \geq 4$, maka $pd(B_{C_3,4}) = 4$.

BAB 3
METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diruraikan tahapan penelitian yang digunakan untuk mencapai tujuan penelitian.

3.1 Tahapan Penelitian

Tahapan yang dilakukan dalam penelitian adalah:

1. Studi literatur
   Pada tahap ini dilakukan pemahaman konsep dan studi literatur dari buku, jurnal dan penelitian mengenai dimensi partisi dan dimensi metrik pada graf.

2. Mengkonstruksi *graf cycle book* $B_{C_r,m}$
   Pada tahap ini, dikonstruksi graf yang akan diteliti, yaitu graf *cycle books* $B_{C_r,m}$.

3. Mendapatkan dimensi metrik dan dimensi partisi
   Pada tahap ini, akan didapatkan dimensi partisi dan dimensi metrik pada graf yang telah dikonstruksi, yaitu:

   (a) Melabeli simpul sedemikian sehingga simpulnya berbeda.
   (b) Menentukan himpunan pembeda graf *cycle book*.
   (c) Menentukan batas atas dan batas bawah dimensi metrik melalui himpunan pembeda. Setelah itu ditentukan dimensi metrik dari batas atas dan batas bawah yang telah diperoleh.
   (d) Menentukan partisi pembeda graf *cycle book*.
   (e) Menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi melalui partisi pembeda. Setelah itu ditentukan dimensi partisi dari batas atas dan batas bawah yang telah diperoleh.

4. Analisis

   (a) Membuktikan dimensi metrik graf *cycle book*.
   (b) Membuktikan dimensi partisi graf *cycle book*.
   (c) Menentukan hubungan antara dimensi metrik dan dimensi partisi graf *cycle book*.
   (d) Mengevaluasi terhadap analisa yang dikerjakan, sehingga dapat diperoleh suatu simpulan.

5. Diseminasi hasil penelitian
   Tahap diseminasi hasil penelitian meliputi presentasi pada seminar internasional yaitu International Conference on Mathematics: Pure, Applied and Computation 2017, Surabaya dan publikasi *paper* dalam Journal of Physics: Conf. Series 974(2018)012070, doi:10.1088/1742-6596/974/1/012070.

6. Penyusunan laporan
   Laporan penelitian ditulis dalam sebuah tesis dengan sistematika penulisan yang telah ditentukan, yang meliputi: Bab 1. Pendahuluan, Bab 2. Kajian Pustaka dan Dasar Teori, Bab 3. Metode Penelitian, Bab 4. Hasil dan Pembahasan, Bab 5. Simpulan dan Saran.

BAB 4
HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang dimensi metrik dan dimensi partisi graf cycle books $B_{C_r,m}$ secara umum.

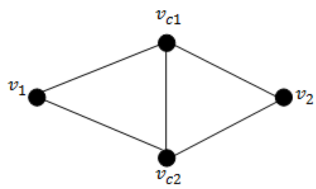
4.1 Dimensi Metrik Graf Cycle Books

Pada sub bab ini akan ditunjukkan dimensi metrik pada graf cycle books $B_{C_3,m}$, $B_{C_4,m}$, $B_{C_5,m}$ dan kemudian akan ditunjukkan bentuk umum dimensi metrik pada graf cycle books $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 3$, $m \geq 2$; $r, m \in Z^+$.

4.1.1 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_3,m}$

Graf cycle books $B_{C_3,m}$ merupakan graf yang terdiri dari m salinan (copies) Cycle C_3 dengan common path P_2. Pada bagian ini akan ditunjukkan dimensi metrik graf cycle books $B_{C_3,m}$ untuk beberapa m dan kemudian akan ditunjukkan bentuk umum dimensi metrik pada graf cycle books $B_{C_3,m}$ untuk sebarang $m \geq 2$.

4.1.1.1 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_3,m}$ dengan $m = 2$



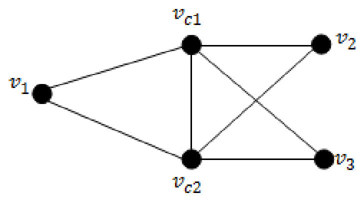
Gambar 4.1: Graf $B_{C_3,2}$

Untuk menentukan dimensi metrik pada graf $B_{C_3,2}$ pada Gambar 4.1, ambil $W = \{v_{c1}, v_1\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}|W) = (0, 1)$ $\quad r(v_1|W) = (1, 0)$
$r(v_{c2}|W) = (1, 1)$ $\quad r(v_2|W) = (1, 2)$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_3,2}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_3,2})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_3,2}$ adalah $dim(G) \leq 2$. Batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_3,2}$ dapat merujuk pada Teorema 2.1(i) menyatakan bahwa $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika graf G adalah graf lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa dimensi metrik graf $B_{C_3,2}$ adalah $dim(G) \geq 2$. Jadi diperoleh dimensi metrik graf $B_{C_3,2}$ adalah $dim(B_{C_3,2})$=2.

4.1.1.2 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_{3,m}}$ dengan $m = 3$



Gambar 4.2: Graf $B_{C_{3,3}}$

Dimensi metrik graf $B_{C_{3,3}}$ pada gambar Gambar 4.2, dapat ditunjukkan dengan mengambil $W = \{v_{c1}, v_1, v_2\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}|W) = (0,1,1)$ $r(v_1|W) = (1,0,2)$ $r(v_3|W) = (1,2,2)$

$r(v_{c2}|W) = (1,1,1)$ $r(v_2|W) = (1,2,0)$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_{3,3}}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_{3,3}})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_{3,3}}$ adalah $dim(G) \leq 3$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_{3,3}}$, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas lebih kecil dari W, $|W_1| = 2 < |W|$. Untuk himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas 2, $|W_1| = 2$ akan dibagi menjadi tiga kasus yaitu untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$, $W_1 = \{v_{c1}, v_1\}$, dan $W = \{v_1, v_2\}$.

Kasus 1. Untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$

Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{c1}|W_1) = (0,1)$ $r(v_1|W_1) = (1,1)$ $r(v_3|W_1) = (1,1)$

$r(v_{c2}|W_1) = (1,0)$ $r(v_2|W_1) = (1,1)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,3}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_1|W_1) = r(v_2|W_1) = r(v_3|W_1) = (1,1)$.

Kasus 2. Untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_1\}$

Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{c1}|W_1) = (0,1)$ $r(v_1|W_1) = (1,0)$ $r(v_3|W_1) = (1,2)$

$r(v_{c2}|W_1) = (1,1)$ $r(v_2|W_1) = (1,2)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,3}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_2|W_1) = r(v_3|W_1) = (1,1)$.

Kasus 3. Untuk $W_1 = \{v_1, v_2\}$

Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 adalah

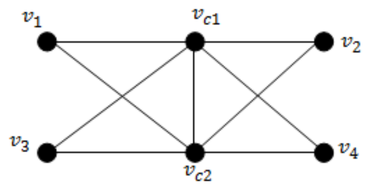
$r(v_{c1}|W_1) = (1,1)$ $r(v_1|W_1) = (0,2)$ $r(v_3|W_1) = (2,2)$

$r(v_{c2}|W_1) = (1,1)$ $r(v_2|W_1) = (2,0)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,3}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{c_1}|W_1) = r(v_{c_2}|W_1) = (1,1)$.

Dari ketiga kasus di atas, W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,3}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 sehingga diperoleh batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_{3,3}}$ adalah $dim(G) \geq 3$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_{3,3}}$ adalah $dim(B_{C_{3,3}})$=3.

4.1.1.3 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_{3,m}}$ dengan $m = 4$



Gambar 4.3: Graf $B_{C_{3,4}}$

Dimensi metrik graf $B_{C_{3,4}}$ pada gambar di atas, dapat ditunjukkan dengan mengambil $W = \{v_{c1}, v_1, v_2, v_3\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}|W) = (0,1,1,1) \quad r(v_1|W) = (1,0,2,2) \quad r(v_3|W) = (1,2,2,0)$
$r(v_{c2}|W) = (1,1,1,1) \quad r(v_2|W) = (1,2,0,2) \quad r(v_4|W) = (1,2,2,2)$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_{3,4}}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_{3,4}})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_{3,4}}$ adalah $dim(G) \leq 4$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_{3,4}}$, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas lebih kecil dari W, $|W_1| = 3 < |W|$. Untuk himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas 3, $|W_1| = 3$ akan dibagi menjadi tiga kasus yaitu untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}, v_1\}$, $W_1 = \{v_{c1}, v_1, v_2\}$, dan $W = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Kasus 1. Untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}, v_1\}$
Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 adalah
$r(v_{c1}|W_1) = (0,1,1) \quad r(v_1|W_1) = (1,1,0) \quad r(v_3|W_1) = (1,1,2)$
$r(v_{c2}|W_1) = (1,0,1) \quad r(v_2|W_1) = (1,1,2) \quad r(v_4|W_1) = (1,1,2)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,4}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_2|W_1) = r(v_3|W_1) = r(v_4|W_1) = (1,1,2)$.

Kasus 2. Untuk $W_1 = \{v_{c1}, v_1, v_2\}$
Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 adalah
$r(v_{c1}|W_1) = (0,1,1) \quad r(v_1|W_1) = (1,0,1) \quad r(v_3|W_1) = (1,2,2)$
$r(v_{c2}|W_1) = (1,1,1) \quad r(v_2|W_1) = (1,2,0) \quad r(v_4|W_1) = (1,2,2)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,4}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_3|W_1) = r(v_4|W_1) = (1,2,2)$.

Kasus 3. Untuk $W = \{v_1, v_2, v_3\}$
Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 adalah
$r(v_{c1}|W_1) = (1,1,1) \quad r(v_1|W_1) = (0,2,2) \quad r(v_3|W_1) = (2,2,0)$
$r(v_{c2}|W_1) = (1,1,1) \quad r(v_2|W_1) = (2,0,2) \quad r(v_4|W_1) = (2,2,2)$

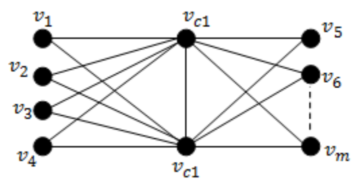
Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,4}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{c_1}|W_1) = r(v_{c_2}|W_1) = (1, 1, 1)$.

Dari ketiga kasus di atas, W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,4}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 sehingga diperoleh batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_{3,4}}$ adalah $dim(G) \geq 4$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_{3,4}}$ adalah $dim(B_{C_{3,4}})$=4.

4.1.1.4 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_{3,m}}$

Pada sub bab ini akan ditunjukkan dimensi metrik graf cycle books $B_{C_{3,m}}$ untuk $m \geq 2$. Dimensi metrik graf cycle books $B_{C_{3,m}}$ dituangkan dalam proposisi berikut.

Proposisi 4.1.1. *Jika G adalah graf cycle books $B_{C_{3,m}}$ untuk $m \geq 2$ maka $dim(G) = m$.*



Gambar 4.4: Graf $B_{C_{3,m}}$

Bukti:

Graf cycle books $B_{C_{3,m}}$ memiliki simpul $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_m\} \cup \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$. Batas atas dimensi metrik diperoleh dengan mengkonstruksi himpunan pembeda graf cycle books $B_{C_{3,m}}$. Misalkan $W = \{v_{c_1}, v_1, v_2, v_3, ..., v_{m-1}\}$ adalah himpunan pembeda graf cycle books $B_{C_{3,m}}$. Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-1})$$

$$r(v_{c2}|W) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m})$$

$$r(v_i|W) = (1, \underbrace{2, ..., 2}_{i-1}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{m-i-1}); 1 \leq i \leq m-1$$

$$r(v_i|W) = (1, \underbrace{2, ..., 2}_{m-1}); i = m$$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_{3,m}}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_{3,m}})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_{3,m}}$ adalah $dim(G) \leq m$. Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_{3,m}}$, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas lebih kecil dari W, $|W_1| = m - 1 < |W|$. Untuk himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas $|W_1| = m - 1$ akan dibagi menjadi tiga kasus yaitu untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}, v_1, v_2, ..., v_{m-3}\}$, $W_1 = \{v_{c1}, v_1, v_2, ..., v_{m-2}\}$, dan $W = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_{m-1}\}$.

Kasus 1. Untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}, v_1, v_2, ..., v_{m-3}\}$
Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 adalah

$$r(v_{c1}|W_1) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2})$$

$$r(v_{c2}|W_1) = (1, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-3})$$

$$r(v_i|W_1) = (1, \underbrace{2, ..., 2}_{i-1}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{m-i-2}); 1 \leq i \leq m-3$$

$$r(v_i|W_1) = (1, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{m-3}); m-2 \leq i \leq m$$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,m}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_i|W_1) = (1, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{m-3}); m-2 \leq i \leq m$.

Kasus 2. Untuk $W_1 = \{v_{c1}, v_1, v_2, ..., v_{m-2}\}$
Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 adalah

$$r(v_{c1}|W_1) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2})$$

$$r(v_{c2}|W_1) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-1})$$

$$r(v_i|W_1) = (1, \underbrace{2, ..., 2}_{i-1}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{m-i-2}); 1 \leq i \leq m-2$$

$$r(v_i|W_1) = (1, \underbrace{2, ..., 2}_{m-2}); m-1 \leq i \leq m$$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,m}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_i|W_1) = (1, \underbrace{2, ..., 2}_{m-2}); m-1 \leq i \leq m$.

Kasus 3. Untuk $W_1 = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_{m-1}\}$.
Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 adalah

$$r(v_{c1}|W_1) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-1})$$

$$r(v_{c2}|W_1) = (\underbrace{1, ..., 1}_{m-1})$$

$$r(v_i|W_1) = (\underbrace{2,...,2}_{i-1}, 0, \underbrace{2,...,2}_{m-i-1}); 1 \leq i \leq m-1$$

$$r(v_i|W_1) = (\underbrace{2,...,2}_{m-1}); i = m$$

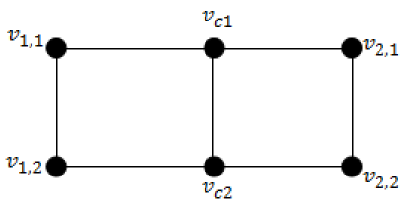
Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,m}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{c_1}|W_1) = r(v_{c_2}|W_1) = (\underbrace{1,...,1}_{m-1})$.

Dari ketiga kasus di atas, W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_{3,m}}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 sehingga diperoleh batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_{3,m}}$ adalah $dim(G) \geq m$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_{3,m}}$ adalah $dim(B_{C_{3,m}})$=m.

4.1.2 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_{4,m}}$

Graf cycle books $B_{C_{4,m}}$ merupakan graf yang terdiri dari m salinan (copies) Cycle C_4 dengan common path P_2. Pada bagian ini akan ditunjukkan dimensi metrik graf cycle books $B_{C_{4,m}}$ untuk beberapa m dan kemudian akan ditunjukkan bentuk umum dimensi metrik graf cycle books $B_{C_{4,m}}$ untuk sebarang $m \geq 2$.

4.1.2.1 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_{4,m}}$ dengan $m = 2$



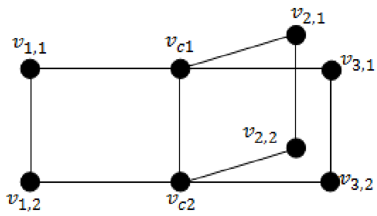
Gambar 4.5: Graf $B_{C_{4,2}}$

Dimensi metrik graf $B_{C_{4,2}}$ pada gambar di atas dapat ditunjukkan dengan mengabil $W = \{v_{1,1}, v_{2,1}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}|W) = (1,1)$ $\quad r(v_{1,1}|W) = (0,2)$ $\quad r(v_{2,1}|W) = (2,0)$
$r(v_{c2}|W) = (2,2)$ $\quad r(v_{1,2}|W) = (1,3)$ $\quad r(v_{2,2}|W) = (3,1)$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_{4,2}}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_{4,2}})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_{4,2}}$ adalah $dim(G) \leq 2$. Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_{4,2}}$ dapat merujuk pada Teorema 2.1(i) yang menyatakan bahwa $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika graf G adalah graf lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa dimensi metrik graf $B_{C_{4,2}}$ adalah $dim(G) \geq 2$. Jadi diperoleh dimensi metrik graf $B_{C_{4,2}}$ adalah $dim(B_{C_{4,2}}) = 2$.

4.1.2.2 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$ dengan $m = 3$



Gambar 4.6: Graf $B_{C_4,3}$

Untuk menentukan dimensi metrik pada graf $B_{C_4,3}$ pada gambar di atas, ambil $W = \{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}|W) = (1,1,1)$ $r(v_{1,2}|W) = (1,3,3)$ $r(v_{3,1}|W) = (2,2,0)$
$r(v_{c2}|W) = (2,2,2)$ $r(v_{2,1}|W) = (2,0,2)$ $r(v_{3,2}|W) = (3,3,1)$
$r(v_{1,1}|W) = (0,2,2)$ $r(v_{2,2}|W) = (3,1,3)$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_4,3}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,3})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_4,3}$ adalah $dim(G) \leq 3$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_4,3}$, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas lebih kecil dari W, $|W_1| = 2 < |W|$. Untuk himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas 2, $|W_1| = 2$ akan dibagi menjadi empat kasus yaitu untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$, $W_1 = \{v_{c1}, v_{1,1}\}$, $W_1 = \{v_{c1}, v_{1,2}\}$ dan $W_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}\}$.

Kasus 1. Untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$

Representasi setiap simpul $v - W_1 \in V(G)$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{1,1}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{2,1}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (1,2)$
$r(v_{1,2}|W_1) = (2,1)$ $r(v_{2,2}|W_1) = (2,1)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (2,1)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_4,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{1,1}|W_1) = r(v_{2,1}|W_1) = r(v_{3,1}|W_1) = (1,2)$ dan $r(v_{1,2}|W_1) = r(v_{2,2}|W_1) = r(v_{3,2}|W_1) = (2,1)$.

Kasus 2. Untuk $W_1 = \{v_{c1}, v_{1,1}\}$

Representasi setiap simpul $v - W_1 \in V(G)$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{c_2}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{2,1}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (1,2)$
$r(v_{1,2}|W_1) = (2,1)$ $r(v_{2,2}|W_1) = (2,3)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (2,3)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_4,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{c,2}|W_1) = r(v_{2,1}|W_1) = r(v_{3,1}|W_1) = (1,2)$ dan $r(v_{2,2}|W_1) = r(v_{3,2}|W_1) = (2,3)$.

Kasus 3. Untuk $W_1 = \{v_{c1}, v_{1,2}\}$

Representasi setiap simpul $v - W_1 \in V(G)$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{c_2}|W_1) = (1,1)$ $r(v_{2,1}|W_1) = (1,3)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (1,3)$
$r(v_{1,1}|W_1) = (1,1)$ $r(v_{2,2}|W_1) = (2,2)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (2,2)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_4,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{c_2}|W_1) = r(v_{1,1}|W_1) = (1,1)$, $r(v_{2,1}|W_1) = r(v_{3,1}|W_1) = (1,3)$ dan $r(v_{2,2}|W_1) = r(v_{3,2}|W_1) = (2,2)$.

Kasus 4. Untuk $W_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}\}$

Representasi setiap simpul $v - W_1 \in V(G)$ terhadap W_1 adalah

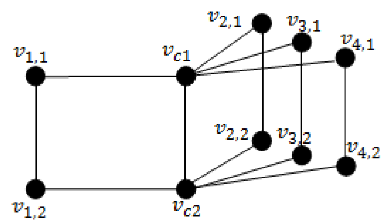
$r(v_{c_1}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{2,1}|W_1) = (2,3)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (2,3)$

$r(v_{c_2}|W_1) = (2,1)$ $r(v_{2,2}|W_1) = (3,2)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (3,2)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_4,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{2,1}|W_1) = r(v_{3,1}|W_1) = (2,3)$ dan $r(v_{2,2}|W_1) = r(v_{3,2}|W_1) = (3,2)$.

Dari keempat kasus di atas, W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_4,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 sehingga diperoleh batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_4,3}$ adalah $dim(G) \geq 3$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_4,3}$ adalah $dim(B_{C_4,3}) = 3$.

4.1.2.3 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$ dengan $m = 4$



Gambar 4.7: Graf $B_{C_4,4}$

Dimensi metrik graf $B_{C_4,4}$ pada gambar di atas, dapat ditunjukkan dengan mengambil $W = \{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}, v_{4,1}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}|W) = (1,1,1,1)$ $r(v_{2,1}|W) = (2,0,2,2)$ $r(v_{4,1}|W) = (2,2,2,0)$

$r(v_{c2}|W) = (2,2,2,2)$ $r(v_{2,2}|W) = (3,1,3,3)$ $r(v_{4,2}|W) = (3,3,3,1)$

$r(v_{1,1}|W) = (0,2,2,2)$ $r(v_{3,1}|W) = (2,2,0,2)$

$r(v_{1,2}|W) = (1,3,3,3)$ $r(v_{3,2}|W) = (3,3,1,3)$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_4,4}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,4})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_4,4}$ adalah $dim(G) \leq 4$.

Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_4,4}$, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W, $|W_1| = 3 < |W|$. Untuk himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas 3, $|W_1| = 3$ akan dibagi menjadi empat kasus yaitu untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}, v_{1,1}\}$, $W_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}\}$, $W_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}$, dan $W_1 = \{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}\}$

Kasus 1. Untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}, v_{1,1}\}$

Representasi setiap simpul $v - W_1 \in V(G)$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{1,2}|W_1) = (2,1,1)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (1,2,2)$ $r(v_{4,2}|W_1) = (2,1,3)$

$r(v_{2,1}|W_1) = (1,2,2)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (2,1,3)$

$r(v_{2,2}|W_1) = (2,1,3)$ $r(v_{4,1}|W_1) = (1,2,2)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_4,4}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{2,1}|W_1) = r(v_{3,1}|W_1) = r(v_{4,1}|W_1) = (1,2,2)$ dan $r(v_{2,2}|W_1) = r(v_{3,2}|W_1) = r(v_{4,2}|W_1) = (2,1,3)$.

Kasus 2. Untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}\}$
Representasi setiap simpul $v - W_1 \in V(G)$ terhadap W_1 adalah
$r(v_{c_2}|W_1) = (1,2,2)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (1,2,2)$ $r(v_{4,2}|W_1) = (2,3,2)$
$r(v_{1,2}|W_1) = (2,1,1)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (2,3,2)$
$r(v_{2,2}|W_1) = (2,3,1)$ $r(v_{4,1}|W_1) = (1,2,2)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_4,4}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{c_2}|W_1) = r(v_{3,1}|W_1) = r(v_{4,1}|W_1) = (1,2,2)$ dan $r(v_{3,2}|W_1) = r(v_{4,2}|W_1) = (2,3,2)$.

Kasus 3. Untuk $W_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}$
Representasi setiap simpul $v - W_1 \in V(G)$ terhadap W_1 adalah
$r(v_{c_1}|W_1) = (1,2,1)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (2,2,3)$ $r(v_{4,2}|W_1) = (3,3,2)$
$r(v_{c_2}|W_1) = (2,1,2)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (3,3,2)$
$r(v_{2,2}|W_1) = (3,1,2)$ $r(v_{4,1}|W_1) = (2,2,3)$

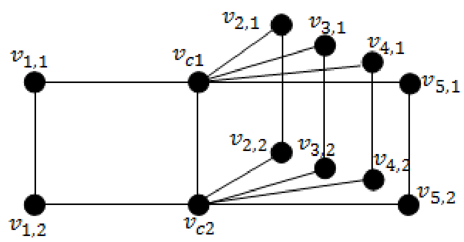
Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_4,4}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{3,1}|W_1) = r(v_{4,1}|W_1) = (2,2,3)$, dan $r(v_{3,2}|W_1) = r(v_{4,2}|W_1) = (3,3,2)$.

Kasus 4. Untuk $W_1 = \{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}\}$
Representasi setiap simpul $v - W_1 \in V(G)$ terhadap W_1 adalah
$r(v_{c_1}|W_1) = (1,1,1)$ $r(v_{2,2}|W_1) = (3,1,3)$ $r(v_{4,2}|W_1) = (3,3,3)$
$r(v_{c_2}|W_1) = (2,2,2)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (3,3,1)$
$r(v_{1,2}|W_1) = (1,3,3)$ $r(v_{4,1}|W_1) = (2,2,2)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_4,4}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{c,2}|W_1) = r(v_{4,1}|W_1) = (2,2,2)$.

Dari keempat kasus di atas, W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_4,4}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap W_1 sehingga diperoleh batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_4,4}$ adalah $dim(G) \geq 4$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_4,4}$ adalah $dim(B_{C_4,4}) = 4$.

4.1.2.4 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$ dengan $m = 5$



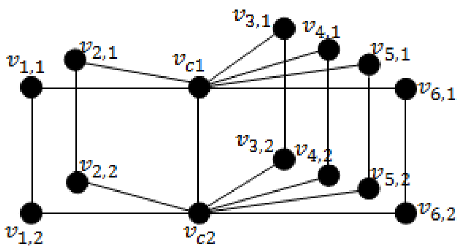
Gambar 4.8: Graf $B_{C_4,5}$

Dimensi metrik graf $B_{C_4,5}$ pada gambar di atas, dapat ditunjukkan dengan mengambil $W = \{v_{1,1}, v_{3,1}, v_{2,2}, v_{4,2}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}|W) = (1,1,2,2)$ $r(v_{2,2}|W) = (3,3,0,2)$ $r(v_{5,1}|W) = (2,2,3,3)$
$r(v_{c2}|W) = (2,2,1,1)$ $r(v_{3,1}|W) = (2,0,3,3)$ $r(v_{5,2}|W) = (3,3,2,2)$
$r(v_{1,1}|W) = (0,2,3,3)$ $r(v_{3,2}|W) = (3,1,2,2)$
$r(v_{1,2}|W) = (1,3,2,2)$ $r(v_{4,1}|W) = (2,2,3,1)$
$r(v_{2,1}|W) = (2,2,1,3)$ $r(v_{4,2}|W) = (3,3,2,0)$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_4,5}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,5})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_4,5}$ adalah $dim(G) \leq 4$. Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_4,5}$, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W dinotasikan $|W_1| < |W|$, maka terdapat representasi yang sama simpul $v - W_1 \in V(G)$ yang tidak bertetangga dengan simpul $W_1 - \{v_{c1}, v_{c2}\}$ terhadap W_1 yaitu $r(v_i|W_1) = r(v_j|W_1)$, $j = 1,2$; $i = 1,2,3,4,5$, sehingga dimensi metrik graf $B_{C_4,5}$ adalah $dim(G) \geq 4$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_4,5}$ adalah $dim(B_{C_4,5}) = 4$.

4.1.2.5 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$ dengan $m = 6$



Gambar 4.9: Graf $B_{C_4,6}$

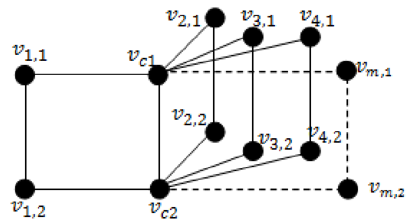
Dimensi metrik graf $B_{C_4,6}$ pada gambar di atas, dapat ditunjukkan dengan mengambil $W = \{v_{1,1}, v_{3,1}, v_{5,1}, v_{2,2}, v_{4,2}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}|W) = (1,1,1,2,2)$ $r(v_{2,2}|W) = (3,3,3,0,2)$ $r(v_{5,1}|W) = (2,2,0,3,3)$
$r(v_{c2}|W) = (2,2,2,1,1)$ $r(v_{3,1}|W) = (2,0,2,3,3)$ $r(v_{5,2}|W) = (3,3,1,2,2)$
$r(v_{1,1}|W) = (0,2,2,3,3)$ $r(v_{3,2}|W) = (3,1,3,2,2)$ $r(v_{6,1}|W) = (2,2,2,3,3)$
$r(v_{1,2}|W) = (1,3,3,2,2)$ $r(v_{4,1}|W) = (2,2,2,3,1)$ $r(v_{6,2}|W) = (3,3,3,2,2)$
$r(v_{2,1}|W) = (2,2,2,1,3)$ $r(v_{4,2}|W) = (3,3,3,2,0)$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_4,6}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,6})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_4,6}$ adalah $dim(G) \leq 5$. Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_4,6}$, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W dinotasikan $|W_1| < |W|$, maka terdapat representasi yang sama simpul $v - W_1 \in V(G)$ yang tidak bertetangga dengan simpul $W_1 - \{v_{c1}, v_{c2}\}$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{i,j}|W_1)$, $j = 1,2$, $i = 1,2,3,4,5,6$, sehingga dimensi metrik graf $B_{C_4,6}$ adalah $dim(G) \geq 5$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_4,6}$ adalah $dim(B_{C_4,6}) = 5$.

4.1.2.6 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$

Pada sub bab ini akan ditunjukkan dimensi metrik graf cycle books $B_{C_4,m}$ untuk $m \geq 2$. Dimensi metrik graf cycle books $B_{C_4,m}$ dituangkan dalam proposisi berikut.



Gambar 4.10: Graf $B_{C_4,m}$

Proposisi 4.1.2. *Jika G adalah graf cycle books $B_{C_4,m}$ untuk $m \geq 2$ maka*

$$dim(G) = \begin{cases} m, & jika\ m = 2,3,4 \\ m-1, & jika\ m \geq 5 \end{cases}$$

Bukti:

Graf cycle books $B_{C_4,m}$ memiliki simpul $V(G) = \{v_{i,j},\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2\} \cup \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$. Jadi, akan ditunjukkan dimensi partisi graf $B_{C_4,m}$ adalah m untuk $m = \{2,3,4\}$, dan $m-1$ untuk $m \geq 5$. Untuk membuktikan proposisi ini, akan dibagi menjadi tiga kasus yaitu untuk $m = \{2,3,4\}$, m adalah gasal dan untuk m adalah genap seperti berikut.

Kasus 1. Untuk $m = \{2,3,4\}$, akan dibuktikan $dim(G) = m$. Untuk menentukan batas atas dimensi metriknya pilih $W = \{v_{i,1},\ 1 \leq i \leq m\}$. Representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = (\underbrace{1,...,1}_{m})$$

$$r(v_{c2}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{m})$$

$$r(v_{i,1}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{i-1}, 0, \underbrace{2,...,2}_{m-i}); 1 \leq i \leq m$$

$$r(v_{i,2}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{i-1}, 1, \underbrace{3,...,3}_{m-i}); 1 \leq i \leq m$$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_4,m}, m = 2,3,4$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap simpul graf $(B_{C_4,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_4,m}$ adalah $dim(G) \leq m$. Untuk menentukan batas bawah, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W, $|W_1| = m-1 < |W|$. Tanpa mengurangi keumuman, untuk himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas $m-1$, $|W_1| = m-1$ dibagi menjadi beberapa kasus dan telah dibuktikan sebelumnya pada bagian 4.1.2.1 sampai 4.1.2.3 bahwa W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_4,m}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $\{v - W_1\} \in V(G)$ terhadap W_1. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_4,m}$ adalah $dim(G) \geq m$.

Jadi dimensi metrik graf $B_{C_4,m}$ untuk $m = \{2, 3, 4\}$ adalah $dim(B_{C_4,m}) = m$.

Dalam kasus ini, karena ada kekhususan pada representasi setiap simpul dalam $V(B_{C_4,m})$, maka untuk $m \geq 5$ dapat dipisah menjadi dua kasus yaitu untuk m gasal dan untuk m genap.

Kasus 2. Untuk m gasal dan $m \geq 5$, akan dibuktikan $dim(G) = m - 1$.
Batas atas dimensi metrik untuk kasus ini ditentukan dengan memilih $W = \{\{v_{i,1};\ 1 \leq i \leq m-1; i\ gasal\} \cup \{v_{i,2};\ 1 \leq i \leq m-1;\ i\ genap\}\}$. Representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = (\underbrace{1, ..., 1}_{\frac{m-1}{2}}, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{m-1}{2}})$$

$$r(v_{c2}|W) = (\underbrace{2, ..., 2}_{\frac{m-1}{2}}, \underbrace{1, ..., 1}_{\frac{m-1}{2}})$$

$$r(v_{i,1}|W) = (\underbrace{2, ..., 2}_{\frac{i-1}{2}}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{m-1}{2}-1-(\frac{i-1}{2})}, \underbrace{3, ..., 3}_{\frac{m-1}{2}}); 1 \leq i \leq m-1; gasal$$

$$r(v_{i,1}|W) = (\underbrace{2, ..., 2}_{\frac{m-1}{2}}, \underbrace{3, ..., 3}_{\frac{i-2}{2}}, 1, \underbrace{3, ..., 3}_{\frac{m-1}{2}-1-(\frac{i-2}{2})}); 1 \leq i \leq m-1; genap$$

$$r(v_{i,2}|W) = (\underbrace{3, ..., 3}_{\frac{i-1}{2}}, 1, \underbrace{3, ..., 3}_{\frac{m-1}{2}-1-(\frac{i-1}{2})}, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{m-1}{2}}); 1 \leq i \leq m-1; gasal$$

$$r(v_{i,2}|W) = (\underbrace{3, ..., 3}_{\frac{m-1}{2}}, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{i-2}{2}}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{m-1}{2}-1-(\frac{i-2}{2})}); 1 \leq i \leq m-1; genap$$

$$r(v_{m,1}|W) = (\underbrace{2, ..., 2}_{\frac{m-1}{2}}, \underbrace{3, ..., 3}_{\frac{m-1}{2}})$$

$$r(v_{m,2}|W) = (\underbrace{3, ..., 3}_{\frac{m-1}{2}}, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{m-1}{2}})$$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_4,m}, m = \{5, 7, 9, 11, ...\}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap simpul $V(B_{C_4,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_4,m}$ adalah $dim(G) \leq m - 1$. Untuk menentukan batas bawah, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W, $|W_1| = m - 2 < |W|$, maka dipastikan terdapat representasi yang sama simpul $V(G)$ yang tidak bertetangga dengan simpul $W1$, sehingga dimensi metrik graf $B_{C_4,m}$ adalah $dim(G) \geq m-1$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_4,m}$ untuk $m = \{5, 7, 9, 11, ...\}$ adalah $dim(B_{C_4,m}) = m - 1$.

Kasus 3. Untuk m genap dan $m \geq 5$, akan dibuktikan $dim(G) = m - 1$.
Batas atas dimensi metrik untuk kasus ini ditentukan dengan memilih $W =$

$\{\{v_{i,1};\ 1 \le i \le m-1; i\ gasal\} \cup \{v_{i,2};\ 1 \le i \le m-1; i\ genap\}\}$. Representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = (\underbrace{1,...,1}_{\frac{m}{2}}, \underbrace{2,...,2}_{\frac{m}{2}-1})$$

$$r(v_{c2}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{\frac{m}{2}}, \underbrace{1,...,1}_{\frac{m}{2}-1})$$

$$r(v_{i,1}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{\frac{i-1}{2}}, 0, \underbrace{2,...,2}_{\frac{m}{2}-1-(\frac{i-1}{2})}, \underbrace{3,...,3}_{\frac{m}{2}-1}); 1 \le i \le m-1; gasal$$

$$r(v_{i,1}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{\frac{m}{2}}, \underbrace{3,...,3}_{\frac{i-2}{2}}, 1, \underbrace{3,...,3}_{\frac{m}{2}-2-(\frac{i-2}{2})}); 1 \le i \le m-1; genap$$

$$r(v_{i,2}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{\frac{i-1}{2}}, 1, \underbrace{3,...,3}_{\frac{m}{2}-1-(\frac{i-1}{2})}, \underbrace{2,...,2}_{\frac{m}{2}-1}); 1 \le i \le m-1; gasal$$

$$r(v_{i,2}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{\frac{m}{2}}, \underbrace{2,...,2}_{\frac{i-2}{2}}, 0, \underbrace{2,...,2}_{\frac{m}{2}-2-(\frac{i-2}{2})}); 1 \le i \le m-1; genap$$

$$r(v_{m,1}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{\frac{m}{2}}, \underbrace{3,...,3}_{\frac{m}{2}-1})$$

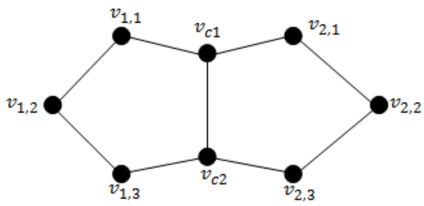
$$r(v_{m,2}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{\frac{m}{2}}, \underbrace{2,...,2}_{\frac{m}{2}-1})$$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_4,m},\ m = \{6, 8, 10, 12, ...\}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap simpul $V(B_{C_4,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_4,m}$ adalah $dim(G) \le m-1$. Untuk menentukan batas bawah, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W, $|W_1| = m-2 < |W|$, maka dipastikan terdapat representasi yang sama simpul $V(G)$ yang tidak bertetangga dengan simpul $W1$, sehingga dimensi metrik graf $B_{C_4,m}$ adalah $dim(G) \ge m-1$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_4,m}$ untuk $m = \{6, 8, 10, 12, ...\}$ adalah $dim(B_{C_4,m}) = m-1$. Berdasarkan uraian dari Kasus 1 sampai Kasus 3, maka Proposisi 4.1.2. terbukti.

4.1.3 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$

Pada bagian ini akan ditunjukkan dimensi metrik graf cycle books $B_{C_5,m}$ untuk beberapa m dan kemudian akan ditunjukkan bentuk umum dimensi metrik graf cycle books $B_{C_5,m}$ untuk sebarang $m \ge 2$.

4.1.3.1 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$ dengan $m = 2$



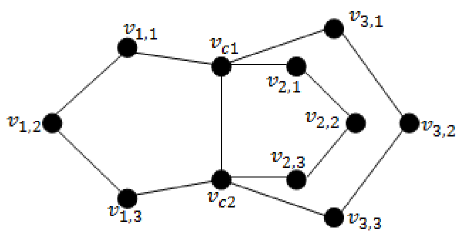
Gambar 4.11: Graf $B_{C_5,2}$

Dimensi metrik graf $B_{C_5,2}$ pada gambar di atas, dapat ditunjukkan dengan mengambil $W = \{v_{1,1}, v_{2,1}\}$, maka representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}|W) = (1,1)$ $r(v_{1,2}|W) = (1,3)$ $r(v_{2,2}|W) = (3,1)$
$r(v_{c2}|W) = (2,2)$ $r(v_{1,3}|W) = (2,3)$ $r(v_{2,3}|W) = (3,2)$
$r(v_{1,1}|W) = (0,2)$ $r(v_{2,1}|W) = (2,0)$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_5,2}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap simpul $V(B_{C_5,2})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_5,2}$ adalah $dim(G) \leq 2$. Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_5,2}$ dapat merujuk pada Teorema 2.1(i) yang menyatakan bahwa $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika graf G adalah graf lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa dimensi metrik graf $B_{C_5,2}$ adalah $dim(G) \geq 2$. Jadi diperoleh dimensi metrik graf $B_{C_5,2}$ adalah $dim(B_{C_5,2}) = 2$.

4.1.3.2 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$ dengan $m = 3$



Gambar 4.12: Graf $B_{C_5,3}$

Untuk menentukan dimensi metrik pada graf $B_{C_5,3}$ pada gambar di atas, ambil $W = \{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}\}$, maka representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}|W) = (1,1,1)$ $r(v_{1,3}|W) = (2,3,3)$ $r(v_{3,1}|W) = (2,2,0)$
$r(v_{c2}|W) = (2,2,2)$ $r(v_{2,1}|W) = (2,0,2)$ $r(v_{3,2}|W) = (3,3,1)$
$r(v_{1,1}|W) = (0,2,2)$ $r(v_{2,2}|W) = (3,1,3)$ $r(v_{3,3}|W) = (3,3,2)$
$r(v_{1,2}|W) = (1,3,3)$ $r(v_{2,3}|W) = (3,2,3)$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_5,3}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap simpul $V(B_{C_5,3})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_5,3}$ adalah $dim(G) \leq 3$. Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_5,3}$, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas lebih kecil dari W, $|W_1| = 2 < |W|$. Untuk himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas 2, $|W_1| = 2$ akan dibagi menjadi enam kasus yaitu untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$, $W_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}\}$, $W_1 = \{v_{c_1}, v_{1,2}\}$, $W_1 = \{v_{c1}, v_{1,3}\}$, $W_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}\}$ dan $W_1 = \{v_{1,1}, v_{2,1}\}$

Kasus 1. Untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$

Representasi setiap simpul $V(G) - W_1$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{1,1}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{2,1}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (1,2)$
$r(v_{1,2}|W_1) = (2,2)$ $r(v_{2,2}|W_1) = (2,2)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (2,2)$
$r(v_{1,3}|W_1) = (2,1)$ $r(v_{2,3}|W_1) = (2,1)$ $r(v_{3,3}|W_1) = (2,1)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_5,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{1,1}|W_1) = r(v_{2,1}|W_1) = r(v_{3,1}|W_1) = (1,2)$, $r(v_{1,2}|W_1) = r(v_{2,2}|W_1) = r(v_{3,2}|W_1) = (2,2)$, dan $r(v_{1,3}|W_1) = r(v_{2,3}|W_1) = r(v_{3,3}|W_1) = (2,1)$.

Kasus 2. Untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}\}$

Representasi setiap simpul $V(G) - W_1$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{c_2}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{2,1}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (1,2)$
$r(v_{1,2}|W_1) = (2,1)$ $r(v_{2,2}|W_1) = (2,3)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (2,3)$
$r(v_{1,3}|W_1) = (2,2)$ $r(v_{2,3}|W_1) = (2,3)$ $r(v_{3,3}|W_1) = (2,3)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_5,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{c_2}|W_1) = r(v_{2,1}|W_1) = r(v_{3,1}|W_1) = (1,2)$, dan $r(v_{2,2}|W_1) = r(v_{2,3}|W_1) = r(v_{3,2}|W_1) = r(v_{3,3}|W_1) = (2,3)$.

Kasus 3. Untuk $W_1 = \{v_{c_1}, v_{1,2}\}$

Representasi setiap simpul $V(G) - W_1$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{c_2}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{2,1}|W_1) = (1,3)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (1,3)$
$r(v_{1,1}|W_1) = (1,1)$ $r(v_{2,2}|W_1) = (2,4)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (2,4)$
$r(v_{1,3}|W_1) = (2,1)$ $r(v_{2,3}|W_1) = (2,3)$ $r(v_{3,3}|W_1) = (2,3)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_5,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{2,1}|W_1) = r(v_{3,1}|W_1) = (1,3)$, $r(v_{2,2}|W_1) = r(v_{3,2}|W_1) = (2,4)$, dan $r(v_{2,3}|W_1) = r(v_{3,3}|W_1) = (2,3)$.

Kasus 4. Untuk $W_1 = \{v_{c1}, v_{1,3}\}$

Representasi setiap simpul $V(G) - W_1$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{c_2}|W_1) = (1,1)$ $r(v_{2,1}|W_1) = (1,3)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (1,3)$
$r(v_{1,1}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{2,2}|W_1) = (2,3)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (2,3)$
$r(v_{1,2}|W_1) = (2,1)$ $r(v_{2,3}|W_1) = (2,2)$ $r(v_{3,3}|W_1) = (2,2)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_5,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{2,1}|W_1) = r(v_{3,1}|W_1) = (1,3)$, $r(v_{2,2}|W_1) = r(v_{3,2}|W_1) = (2,3)$, dan $r(v_{2,3}|W_1) = r(v_{3,3}|W_1) = (2,2)$.

Kasus 5. Untuk $W_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}\}$

Representasi setiap simpul $V(G) - W_1$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{c_1}|W_1) = (1,2)$ $r(v_{2,1}|W_1) = (2,3)$ $r(v_{3,1}|W_1) = (2,3)$
$r(v_{c_2}|W_1) = (2,2)$ $r(v_{2,2}|W_1) = (3,4)$ $r(v_{3,2}|W_1) = (3,4)$
$r(v_{1,3}|W_1) = (2,1)$ $r(v_{2,3}|W_1) = (3,3)$ $r(v_{3,3}|W_1) = (3,3)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_5,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{2,1}|W_1) = r(v_{3,1}|W_1) = (2,3)$, $r(v_{2,2}|W_1) = r(v_{3,2}|W_1) = (3,4)$, dan $r(v_{2,3}|W_1) = r(v_{3,3}|W_1) = (3,3)$.

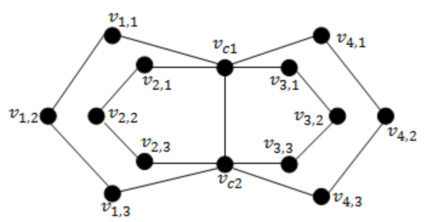
Kasus 6. Untuk $W_1 = \{v_{1,1}, v_{2,1}\}$
Representasi setiap simpul $V(G) - W_1$ terhadap W_1 adalah

$r(v_{c_1}\|W_1) = (1,1)$	$r(v_{1,3}\|W_1) = (2,3)$	$r(v_{3,1}\|W_1) = (2,2)$
$r(v_{c_2}\|W_1) = (2,2)$	$r(v_{2,2}\|W_1) = (3,1)$	$r(v_{3,2}\|W_1) = (3,3)$
$r(v_{1,2}\|W_1) = (1,3)$	$r(v_{2,3}\|W_1) = (3,2)$	$r(v_{3,3}\|W_1) = (3,3)$

Jadi W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_5,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $V(G)$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{c_2}|W_1) = r(v_{3,3}|W_1) = (2,2)$ dan $r(v_{3,2}|W_1) = r(v_{3,3}|W_1) = (3,3)$.

Dari keenam kasus di atas, W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_5,3}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $V(G)$ terhadap W_1 sehingga diperoleh batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_5,3}$ adalah $dim(G) \geq 3$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_5,3}$ adalah $dim(B_{C_5,3}) = 3$.

4.1.3.3 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$ dengan $m = 4$



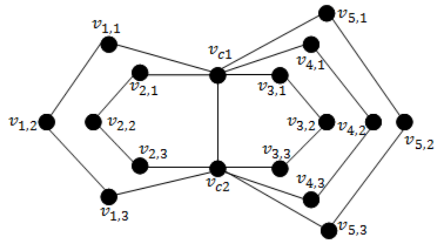
Gambar 4.13: Graf $B_{C_5,4}$

Dimensi metrik graf $B_{C_5,4}$ pada gambar di atas, dapat ditunjukkan dengan mengambil $W = \{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,2}\}$, maka representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}\|W) = (1,1,2)$	$r(v_{2,1}\|W) = (2,0,3)$	$r(v_{3,3}\|W) = (3,3,1)$
$r(v_{c2}\|W) = (2,2,2)$	$r(v_{2,2}\|W) = (3,1,4)$	$r(v_{4,1}\|W) = (2,2,3)$
$r(v_{1,1}\|W) = (0,2,3)$	$r(v_{2,3}\|W) = (3,2,3)$	$r(v_{4,2}\|W) = (3,3,4)$
$r(v_{1,2}\|W) = (1,3,4)$	$r(v_{3,1}\|W) = (2,2,1)$	$r(v_{4,3}\|W) = (3,3,3)$
$r(v_{1,3}\|W) = (2,3,3)$	$r(v_{3,2}\|W) = (3,3,0)$	

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_5,4}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $V(B_{C_5,4})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_5,4}$ adalah $dim(G) \leq 3$. Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_5,4}$, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W yaitu $|W_1| < |W|$, maka terdapat representasi yang sama simpul $V(G) - W_1$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{i,j}|W_1)$ $i = 1,2,3,4$ $j = 1,2,3$, sehingga dimensi metrik graf $B_{C_5,4}$ adalah $dim(G) \geq 3$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_5,4}$ adalah $dim(B_{C_5,4}) = 3$.

4.1.3.4 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$ dengan $m = 5$



Gambar 4.14: Graf $B_{C_5,5}$

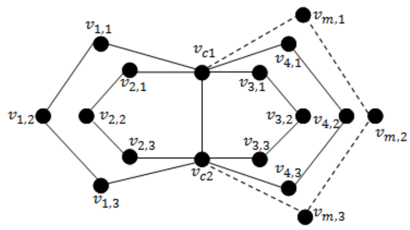
Dimensi metrik graf $B_{C_5,5}$ pada gambar di atas, dapat ditunjukkan dengan mengambil $W = \{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}, v_{4,2}\}$, maka representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap W adalah

$r(v_{c1}\|W) = (1, 1, 1, 2)$	$r(v_{2,2}\|W) = (3, 1, 3, 4)$	$r(v_{4,2}\|W) = (3, 3, 3, 0)$
$r(v_{c2}\|W) = (2, 2, 2, 2)$	$r(v_{2,3}\|W) = (3, 2, 3, 3)$	$r(v_{4,3}\|W) = (3, 3, 3, 1)$
$r(v_{1,1}\|W) = (0, 2, 2, 3)$	$r(v_{3,1}\|W) = (2, 2, 0, 3)$	$r(v_{5,1}\|W) = (2, 2, 2, 3)$
$r(v_{1,2}\|W) = (1, 3, 3, 4)$	$r(v_{3,2}\|W) = (3, 3, 1, 4)$	$r(v_{5,2}\|W) = (3, 3, 3, 4)$
$r(v_{1,3}\|W) = (2, 3, 3, 3)$	$r(v_{3,3}\|W) = (3, 3, 2, 3)$	$r(v_{5,3}\|W) = (3, 3, 3, 3)$
$r(v_{2,1}\|W) = (2, 0, 2, 3)$	$r(v_{4,1}\|W) = (2, 2, 2, 1)$	

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_5,5}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $V(B_{C_5,5})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_5,5}$ adalah $dim(G) \leq 4$. Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_5,5}$, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W, $|W_1| = 2 < |W|$, maka terdapat representasi yang sama simpul $V(G) - W_1$ terhadap W_1 yaitu $r(v_{i,j}|W_1)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ $j = 1, 2, 3$, sehingga dimensi metrik graf $B_{C_5,5}$ adalah $dim(G) \geq 4$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_5,5}$ adalah $dim(B_{C_5,5}) = 4$.

4.1.3.5 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$

Pada sub bab ini akan ditunjukkan dimensi metrik graf cycle books $B_{C_5,m}$ untuk $m \geq 2$. Dimensi metrik graf cycle books $B_{C_5,m}$ dituangkan dalam proposisi berikut.



Gambar 4.15: Graf $B_{C_5,m}$

Proposisi 4.1.3. *Jika G adalah graf cycle books $B_{C_5,m}$ untuk $m \geq 2$ maka*

$$dim(G) = \begin{cases} m, & \text{if } m = 2, 3 \\ m - 1, & \text{if } m \geq 4 \end{cases}$$

Bukti:
Graf cycle books $B_{C_5,m}$ memiliki simpul $V(G) = \{v_{i,j},\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2\} \cup \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$. Untuk membuktikan proposisi ini, akan dibagi menjadi dua kasus yaitu untuk $m = \{2,3\}$ dan untuk $m \geq 4$ seperti berikut.
Kasus 1. Untuk $m = 2,3$, akan dibuktikan $dim(G) = m$. Untuk menentukan batas atas dimensi metriknya pilih $W = \{v_{i,1},\ 1 \leq i \leq m\}$. Representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = (\underbrace{1,...,1}_{m})$$

$$r(v_{c2}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{m})$$

$$r(v_{i,1}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{i-1},0,\underbrace{2,...,2}_{m-i});1 \leq i \leq m$$

$$r(v_{i,2}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{i-1},1,\underbrace{3,...,3}_{m-i});1 \leq i \leq m$$

$$r(v_{i,3}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{i-1},2,\underbrace{3,...,3}_{m-i});1 \leq i \leq m$$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_5,m}, m = \{2,3\}$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $V(B_{C_5,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_5,m}$ adalah $dim(G) \leq m$. Untuk menentukan batas bawah, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W, $|W_1| = m-1 < |W|$. Untuk himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas $m-1$, $|W_1| = m-1$ akan dibagi menjadi beberapa kasus dan telah dibuktikan sebelumnya pada bagian 4.1.3.1 sampai 4.1.3.2 bahwa W_1 bukan himpunan pembeda dari $B_{C_5,m}$ sebab terdapat representasi yang sama simpul $V(G) - W_1$ terhadap W_1. Sehingga dimensi metrik graf $B_{C_5,m}$ adalah $dim(G) \geq m$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_5,m}$ untuk $m = 2,3$ adalah $dim(B_{C_5,m}) = m$.

Kasus 2. Untuk $m \geq 4$, akan dibuktikan $dim(G) = m-1$.
Batas atas dimensi metrik untuk kasus ini ditentukan dengan memilih $W = \{\{v_{i,1}, v_{m-1,2};\ 1 \leq i \leq m-2\}\}$. Representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = (\underbrace{1,...,1}_{m-2},2)$$

$$r(v_{c2}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{m-1})$$

$$r(v_{i,1}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{i-1},0,\underbrace{2,...,2}_{m-i-2},3);1 \leq i \leq m-2$$

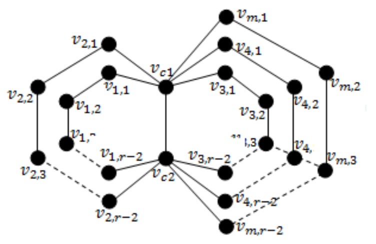
$$r(v_{i,2}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{i-1},1,\underbrace{3,...,3}_{m-i-2},4);1 \leq i \leq m-2$$

$$r(v_{i,3}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{i-1}, 2, \underbrace{3,...,3}_{m-i-1}); 1 \leq i \leq m-2$$
$$r(v_{m-1,1}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{m-2}, 1)$$
$$r(v_{m-1,2}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{m-2}, 0)$$
$$r(v_{m-1,3}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{m-2}, 1)$$
$$r(v_{m,1}|W) = (\underbrace{2,...,2}_{m-2}, 3)$$
$$r(v_{m,2}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{m-2}, 4)$$
$$r(v_{m,3}|W) = (\underbrace{3,...,3}_{m-1})$$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_5,m}, m \geq 4$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $V(B_{C_5,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_5,m}$ adalah $dim(G) \leq m-1$. Untuk menentukan batas bawah, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W yaitu $|W_1| = m-2 < |W|$, maka terdapat representasi yang sama simpul $V(G) - W_1$ terhadap W_1 yaitu simpul yang terletak di salinan ke-i, dimana i adalah salinan yang tidak memuat W_1, sehingga dimensi metrik graf $B_{C_5,m}$ adalah $dim(G) \geq m-1$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_5,m}$ untuk $m \geq 3$ adalah $dim(B_{C_5,m}) = m-1$. Dari Kasus 1 dan Kasus 2 terbukti bahwa $dim(B_{C_5,m}) = m$ untuk $m = 2, 3$ dan $dim(B_{C_5,m}) = m-1$ untuk $m \geq 4$. Jadi Proposisi 4.1.3. terbukti.

4.1.4 Dimensi Metrik Graf Cycle Books $B_{C_r,m}$

Pada sub bab ini akan ditunjukkan dimensi metrik graf cycle books $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 5$ $m \geq 2$. Dimensi metrik graf cycle books $B_{C_r,m}$ dituangkan dalam teorema berikut.



Gambar 4.16: Graf $B_{C_r,m}$

Teorema 4.1. *Jika G adalah graf cycle books $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 5$ maka*

$$dim(G) = \begin{cases} m, & jika\ r\ gasal\ dan\ m = 2,3 \\ & jika\ r\ genap\ dan\ m \geq 2 \\ m-1, & jika\ r\ gasal\ dan\ m \geq 4 \end{cases}$$

Bukti:
Untuk membuktikan Teorema ini, akan dibagi menjadi tiga kasus yaitu untuk $r \geq 5,\ r\ gasal, dan\ m = 2,3$; untuk $r \geq 5,\ r\ gasal, dan\ m \geq 4$; untuk $r \geq 5, r\ genap.$

Kasus 1. Untuk r gasal dan $m = 2,3$ akan dibuktikan $dim(G) = m$. Batas atas dimensi metrik dapat diperoleh dengan mengkonstruksi himpunan pembeda. Misalkan $W = \{v_{i,j},\ 1 \leq i \leq m,\ j = \frac{r-3}{2}\}$, representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = \left(\underbrace{\frac{1}{2}(r-3), \frac{1}{2}(r-3), ..., \frac{1}{2}(r-3)}_{m}\right)$$

$$r(v_{c2}|W) = \left(\underbrace{\frac{1}{2}(r-3)+1, \frac{1}{2}(r-3)+1, ..., \frac{1}{2}(r-3)+1}_{m}\right)$$

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-1}{2}+(j-1), ..., \frac{r-1}{2}+(j-1)}_{i-1}, \tfrac{r-1}{2}-(j+1), \right.$$
$$\left.\underbrace{\frac{r-1}{2}+(j-1), ..., \frac{r-1}{2}+(j-1)}_{m-i}\right);\ dengan\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \tfrac{r-1}{2}-1.$$

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-1}{2}+(j-1), ..., \frac{r-1}{2}+(j-1)}_{i-1}, 1, \right.$$
$$\left.\underbrace{\frac{r-1}{2}+(j-1), ..., \frac{r-1}{2}+(j-1)}_{m-i}\right);\ dengan\ 1 \leq i \leq m, j = \tfrac{r-1}{2}.$$

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-1}{2}+r-(j+1), ..., \frac{r-1}{2}+r-(j+1)}_{i-1}, (j+1)-\tfrac{r-1}{2}, \right.$$
$$\left.\underbrace{\frac{r-1}{2}+r-(j+1), ..., \frac{r-1}{2}+r-(j+1)}_{m-i}\right);\ dengan\ 1 \leq i \leq m, \tfrac{r-1}{2}+1 \leq j \leq r-2.$$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 5$ r gasal, dan $m = 2,3$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $V(B_{C_r,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_r,m}$ adalah $dim(G) \leq m$. Untuk menentukan batas bawah, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W yaitu $|W_1| < |W|$, maka sedikitnya terdapat dua simpul dalam $V(G) - W_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap W_1 yaitu $r(v_{i,j}|W_1),\ j = 1, 2, 3, ..., r-2\ i = 1, 2, 3, ..., m$, sehingga dimensi metrik graf $B_{C_r,m}$ adalah $dim(G) \geq m$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_r,m}$ untuk r *gasal* ≥ 5 dan $m = \{2, 3\}$ adalah $dim(B_{C_r,m}) = m$.

Kasus 2. Untuk r gasal dan $m \geq 4$, akan dibuktikan $dim(G) = m - 1$. Batas atas dimensi metrik dapat diperoleh dengan mengkonstruksi himpunan pembeda. Misalkan $W = \{v_{i,j},\ 1 \leq i \leq m-2,\ j = \frac{r-3}{2},\ v_{i,j},\ i = m-1,\ j = \frac{r-3}{2} + 1\}$, representasi setiap simpul $\{v_{c1}, v_{c2}\} \in V(G)$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = \left(\underbrace{\frac{1}{2}(r-3), ..., \frac{1}{2}(r-3)}_{m-2}, \frac{1}{2}(r-3)+1 \right)$$

$$r(v_{c2}|W) = \left(\underbrace{\frac{1}{2}(r-3)+1, ..., \frac{1}{2}(r-3)+1}_{m-1} \right)$$

Representasi setiap simpul $v_{i,j} \in V(G)$ dengan $1 \leq i \leq m-2$
terhadap W sebagai berikut:

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-1}{2} + (j-1), ..., \frac{r-1}{2} + (j-1)}_{i-1}, \tfrac{r-1}{2} - (j+1), \right.$$
$$\left. \underbrace{\frac{r-1}{2} + (j-1), ..., \frac{r-1}{2} + (j-1)}_{m-i-2}, \tfrac{r-1}{2} + j \right);\ dengan\ 1 \leq j \leq \tfrac{r-1}{2} - 1.$$

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-1}{2} + (j-1), ..., \frac{r-1}{2} + (j-1)}_{i-1}, 1, \right.$$
$$\left. \underbrace{\frac{r-1}{2} + (j-1), ..., \frac{r-1}{2} + (j-1)}_{m-i-2}, \tfrac{r-1}{2} + j \right); dengan\ j = \tfrac{r-1}{2}$$

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-1}{2} + r - (j+1), ..., \frac{r-1}{2} + r - (j+1)}_{i-1}, (j+1) - \tfrac{r-1}{2}, \right.$$
$$\left. \underbrace{\frac{r-1}{2} + r - (j+1), ..., \frac{r-1}{2} + r - (j+1)}_{m-i-1} \right); dengan\ \tfrac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-2$$

Representasi setiap simpul $v_{i,j} \in V(G)$ dengan $i = m-1$ terhadap W sebagai berikut:

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-1}{2} + r - (j+1), ..., \frac{r-1}{2} + r - (j+1)}_{m-2}, j - \tfrac{r-1}{2} \right);$$

dengan $\frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-2$

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-1}{2} + r - (j+1), ..., \frac{r-1}{2} + r - (j+1)}_{m-2}, j - \tfrac{r-1}{2} \right);$$

dengan $\frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-2$

Representasi setiap simpul $v_{i,j} \in V(G)$ dengan $i = m$ terhadap W sebagai berikut:

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-1}{2} + (j-1), ..., \frac{r-1}{2} + (j-1)}_{m-2}, \tfrac{r-1}{2} + j \right);$$

dengan $1 \leq j \leq \frac{r-1}{2}$

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-1}{2} + r - (j+1), ..., \frac{r-1}{2} + r - (j+1),}_{m-1} \right);$$

dengan $\frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-2$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_r,m}, m \geq 4$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_r,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_r,m}$ adalah $dim(G) \leq m-1$. Untuk menentukan batas bawah, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W yaitu $|W_1| = m < |W|$, maka sedikitnya terdapat dua simpul dalam $V(G) - W_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap W_1 yaitu $r(v_{i,j}|W_1),\ j = 1,2,3,...,r-2\ i = 1,2,3,...,m$, sehingga dimensi metrik graf $B_{C_r,m}$ adalah $dim(G) \geq m-1$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 5$ gasal, $m \geq 4$ adalah $dim(B_{C_r,m}) = m-1$.

Kasus 3. Untuk r genap dan $m \geq 2$ akan dibuktikan $dim(G) = m$.
Batas atas dimensi metrik dapat diperoleh dengan mengkonstruksi himpunan pembeda. Misalkan $W = \{v_{i,j},\ 1 \leq i \leq m,\ j = \frac{r-2}{2}\}$, representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-2}{2}, ..., \frac{r-2}{2}}_{m} \right)$$

$$r(v_{c2}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-2}{2}+1, ..., \frac{r-2}{2}+1}_{m} \right)$$

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-2}{2}+j, ..., \frac{r-2}{2}+j}_{i-1}, \tfrac{r-2}{2}-j, \right.$$

$$\left. \underbrace{\frac{r-2}{2}+j, ..., \frac{r-2}{2}+j}_{m-i} \right) ; dengan\ 1 \leq j \leq \tfrac{r-2}{2}$$

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{r-2}{2}+r-j, ..., \frac{r-2}{2}+r-j}_{i-1}, j-\tfrac{r-2}{2}, \right.$$

$$\left. \underbrace{\frac{r-2}{2}+r-j, ..., \frac{r-2}{2}+r-j}_{m-i} \right) ; dengan\ \tfrac{r-2}{2}+1 \leq j \leq r-2$$

Jadi W adalah himpunan pembeda dari $B_{C_r,m}, m \geq 2$ sebab $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_r,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi metrik graf $B_{C_r,m}$ adalah $dim(G) \leq m$. Untuk menentukan batas bawah, misalkan diambil himpunan pembeda W_1 dengan kardinalitas yang lebih kecil dari W yaitu $|W_1| < |W|$, maka sedikitnya terdapat dua simpul dalam $V(G) - W_1$ yang mempunyai representasi sama terhadap W_1 yaitu $r(v_{i,j}|W_1)$, $r(v_{c1}|W_1) = r(v_{i,j}|W_1)$, atau $r(v_{c2}|W_1) = r(v_{i,j}|W_1)$ $i = 1, 2, 3, ..., m$ $j = 1, 2, 3, ..., r-2$, sehingga dimensi metrik graf $B_{C_r,m}$ adalah $dim(G) \geq m$. Jadi dimensi metrik graf $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 5$ genap dan $m \geq 2$ adalah $dim(B_{C_r,m}) = m$. Jadi Teorema 4.1 terbukti.

4.2 Dimensi Partisi Graf Cycle Books

Pada sub bab ini ditunjukkan dimensi partisi pada graf cycle books $B_{C_3,m}$, $B_{C_4,m}$, $B_{C_5,m}$, dan kemudian akan ditunjukkan bentuk umum dimensi partisi pada graf cycle books $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 3$, $m \geq 2$; $r, m \in Z^+$.

4.2.1 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_3,m}$

Graf cycle books $B_{C_3,m}$ merupakan graf yang terdiri dari m salinan (copies) Cycle C_3 dengan *common path* P_2. Pada bagian ini akan ditunjukkan dimensi partisi graf cycle books $B_{C_3,m}$ untuk beberapa m dan kemudian akan ditunjukkan bentuk umum dimensi partisi pada graf cycle books $B_{C_3,m}$ untuk sebarang $m \geq 2$.

4.2.1.1 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_3,m}$ dengan $m = 2$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_3,2}$ pada Gambar 4.1, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_{c_1}, v_1\}, S_2 = \{v_{c_2}\}$, dan $S_3 = \{v_2\}$ maka representasi setiap simpul $V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c1}|\Pi) = (0,1,1)$ $r(v_1|\Pi) = (0,1,2)$
$r(v_{c2}|\Pi) = (1,0,1)$ $r(v_2|\Pi) = (1,1,0)$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_{3,2}}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $V(B_{C_{3,2}})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_{3,2}}$ adalah $pd(G) \leq 3$. Batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_{3,2}}$ dapat merujuk pada Teorema 2.3(i) menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G adalah graf lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa dimensi partisi graf $B_{C_{3,2}}$ adalah $pd(G) \geq 3$. Jadi diperoleh dimensi partisi graf $B_{C_{3,2}}$ adalah $pd(B_{C_{3,2}})$=3.

4.2.1.2 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_{3,m}}$ dengan $m = 3$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_{3,3}}$ pada Gambar 4.2, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_{c_1}, v_1\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_2\}$, dan $S_3 = \{v_3\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c1}|\Pi) = (0,1,1)$ $r(v_1|\Pi) = (0,1,2)$ $r(v_3|\Pi) = (1,1,0)$
$r(v_{c2}|\Pi) = (1,0,1)$ $r(v_2|\Pi) = (1,0,2)$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_{3,3}}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_{3,3}})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_{3,3}}$ adalah $pd(G) \leq 3$. Batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_{3,3}}$ dapat merujuk pada Teorema 2.3(i) menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G adalah graf lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa dimensi partisi graf $B_{C_{3,3}}$ adalah $pd(G) \geq 3$. Jadi diperoleh dimensi partisi graf $B_{C_{3,3}}$ adalah $pd(B_{C_{3,3}})$=3.

4.2.1.3 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_{3,m}}$ dengan $m = 4$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_{3,4}}$ pada Gambar 4.3, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_1\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_2\}$, $S_3 = \{v_3\}$ dan $S_4 = v_4$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c1}|\Pi) = (0,1,1,1)$ $r(v_1|\Pi) = (0,1,2,2)$ $r(v_3|\Pi) = (1,1,0,2)$
$r(v_{c2}|\Pi) = (1,0,1,1)$ $r(v_2|\Pi) = (1,0,2,2)$ $r(v_4|\Pi) = (1,1,2,0)$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_{3,4}}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_{3,4}})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_{3,4}}$ adalah $pd(G) \leq 4$. Batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_{3,4}}$ dapat merujuk pada Lemma 2.2. Berdasarkan Lemma 2.2 simpul v_{c_1} dan v_{c_2} harus berada pada kelas partisi yang berbeda, dan simpul v_1,v_2,v_3, dan v_4 harus berada pada kelas partisi yang berbeda juga. Oleh karena itu, dengan meletakkan simpul v_{c_1} dan v_1 dalam satu kelas partisi (misalkan S_1), dan meletakkan simpul v_{c_2} dan v_2 dalam satu kelas partisi (misalkan S_2), kemudian simpul lainnya v_3,v_4, masing-masing dalam kelas partisi yang berbeda (misalkan S_3,S_4), maka diperoleh konstruksi partisi pembeda minimum dengan kardinalitas 4 atau dengan kata lain dimensi partisi graf $B_{C_{3,4}}$ adalah $pd(G) \geq 4$. Jadi diperoleh dimensi partisi graf $B_{C_{3,4}}$ adalah $pd(B_{C_{3,4}})$=4.

4.2.1.4 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_{3,m}}$ dengan $m = 5$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_{3,5}}$ pada **??**, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_1\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_2\}$, $S_3 = \{v_3\}$, $S_4 = \{v_4\}$ dan $S_5 = \{v_5\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c1}|\Pi) = (0,1,1,1,1) \quad r(v_2|\Pi) = (1,0,2,2,2) \quad r(v_5|\Pi) = (1,1,2,2,0)$
$r(v_{c2}|\Pi) = (1,0,1,1,1) \quad r(v_3|\Pi) = (1,1,0,2,2)$
$r(v_1|\Pi) = (0,1,2,2,2) \quad r(v_4|\Pi) = (1,1,2,0,2)$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_3,5}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_3,5})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_3,5}$ adalah $pd(G) \leq 5$. Batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_3,5}$ dapat merujuk pada Lemma 2.2. Berdasarkan Lemma 2.2 simpul v_{c_1} dan v_{c_2} harus berada pada kelas partisi yang berbeda, dan simpul v_1, v_2,v_3, v_4 dan v_5 harus berada pada kelas partisi yang berbeda juga. Oleh karena itu, dengan meletakkan simpul v_{c_1} dan v_1 dalam satu kelas partisi (misalkan S_1), dan meletakkan simpul v_{c_2} dan v_2 dalam satu kelas partisi (misalkan S_2), kemudian simpul lainnya v_3,v_4 dan v_5, masing-masing dalam kelas partisi yang berbeda (misalkan S_3,S_4,S_5), maka diperoleh konstruksi partisi pembeda minimum dengan kardinalitas 5 atau dengan kata lain dimensi partisi graf $B_{C_3,5}$ adalah $pd(G) \geq 5$. Jadi diperoleh dimensi partisi graf $B_{C_3,5}$ adalah $pd(B_{C_3,4})$=5.

4.2.1.5 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_3,m}$

Pada sub bab ini akan ditunjukkan dimensi partisi graf cycle books $B_{C_3,m}$ untuk $m \geq 2$. Dimensi metrik graf cycle books $B_{C_3,m}$ dituangkan dalam proposisi berikut.

Proposisi 4.2.1. *Jika G adalah graf cycle books $B_{C_3,m}$ untuk $m \geq 2$ maka*

$$pd(G) = \begin{cases} 3, & \textit{jika } m = 2,3 \\ m, & \textit{jika } m \geq 3 \end{cases}$$

Bukti:

Graf cycle books $B_{C_3,m}$ memiliki simpul $V(G) = \{v_i,\ i = 1,2,...,m\} \cup \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$. Untuk membuktikan proposisi ini, akan dibagi menjadi dua kasus yaitu untuk $m = \{2,3\}$ dan untuk $m \geq 4$.

Kasus 1. Untuk $m = \{2,3\}$, dibuktikan $dim(G) = 3$. Untuk kasus $m = \{2,3\}$ telah dibuktikan pada bagian sebelumnya sebelumnya dan diperoleh dimensi partisinya adalah 3. Berikut ini akan dibuktikan untuk $m \geq 4$.

Kasus 2. Untuk $m \geq 4$, akan dibuktikan $dim(G) = m$. Untuk menentukan batas atas dimensi partisinya pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_1\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_2\}$ dan $S_j = \{v_j \mid 3 \leq j \leq m\}$. Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-1})$$

$$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{m-2})$$

$$r(v_1|\Pi) = (0, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{m-2})$$

$$r(v_2|\Pi) = (1, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{m-2})$$

$r(v_3|\Pi) = (1, 1, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{m-3})$

$r(v_i|\Pi) = (1, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{i-3}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{m-i}); 4 \leq i \leq m$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_3,m}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_3,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_3,m}$ adalah $pd(G) \leq m$. Untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf $B_{C_3,m}$ dapat merujuk pada Lemma 2.2. Berdasarkan Lemma 2.2 simpul v_{c_1} dan v_{c_2} harus berada pada kelas partisi yang berbeda, dan simpul v_i; $1 \leq i \leq m$, harus berada pada kelas partisi yang berbeda juga. Oleh karena itu, dengan meletakkan simpul v_{c_1} dan v_1 dalam satu kelas partisi (kataan S_1), dan meletakkan simpul v_{c_2} dan v_2 dalam satu kelas partisi (misalkan S_2), kemudian simpul lainnya v_i; $3 \leq i \leq m$, masing-masing dalam kelas partisi yang berbeda (misalkan S_i; $3 \leq i \leq m$), maka diperoleh konstruksi partisi pembeda minimum dengan kardinalitas m atau dengan kata lain dimensi partisi graf $B_{C_3,m}$ adalah $pd(G) \geq m$. Jadi diperoleh dimensi partisi graf $B_{C_3,m}$ adalah $pd(B_{C_3,m})$=m.

4.2.2 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$

Graf cycle books $B_{C_4,m}$ merupakan graf yang terdiri dari m salinan (copies) Cycle C_4 dengan common path P_2. Pada bagian ini ditunjukkan dimensi partisi graf cycle books $B_{C_4,m}$ untuk beberapa m dan kemudian ditunjukkan bentuk umum dimensi patisi pada graf cycle books $B_{C_4,m}$ untuk sebarang $m \geq 2$.

4.2.2.1 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$ dengan $m = 2$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_4,2}$ pada Gambar 4.5, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,2}\}$, dan $S_3 = \{v_{2,2}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c1}|\Pi) = (0, 1, 2)$ $\quad r(v_{1,1}|\Pi) = (0, 1, 3)$ $\quad r(v_{2,1}|\Pi) = (0, 2, 1)$
$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, 1)$ $\quad r(v_{1,2}|\Pi) = (1, 0, 2)$ $\quad r(v_{2,2}|\Pi) = (1, 1, 0)$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_4,2}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,2})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_4,2}$ adalah $pd(G) \leq 3$. Batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_4,2}$ dapat merujuk pada Teorema 2.3(i) menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G adalah graf lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa dimensi partisi graf $B_{C_4,2}$ adalah $pd(G) \geq 3$. Jadi diperoleh dimensi partisi graf $B_{C_4,2}$ adalah $pd(B_{C_4,2})$=3.

4.2.2.2 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$ dengan $m = 3$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_4,3}$ pada Gambar 4.6, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,2}\}$, dan $S_3 = \{v_{2,2}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c1}|\Pi) = (0, 1, 1)$ $\quad r(v_{1,2}|\Pi) = (1, 0, 2)$ $\quad r(v_{3,1}|\Pi) = (1, 2, 0)$
$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, 1)$ $\quad r(v_{2,1}|\Pi) = (0, 2, 1)$ $\quad r(v_{3,2}|\Pi) = (2, 1, 0)$
$r(v_{1,1}|\Pi) = (0, 1, 2)$ $\quad r(v_{2,2}|\Pi) = (1, 1, 0)$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_4,3}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,3})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf

$B_{C_4,3}$ adalah $pd(G) \leq 3$. Batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_4,3}$ dapat merujuk pada Teorema 2.3(i) menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G adalah graf lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa dimensi partisi graf $B_{C_4,3}$ adalah $pd(G) \geq 3$. Jadi diperoleh dimensi partisi graf $B_{C_4,3}$ adalah $pd(B_{C_4,3})$=3.

4.2.2.3 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$ dengan $m = 4$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_4,4}$ pada Gambar 4.7, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,2}, v_{4,2}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{3,1}, v_{4,1}\}$ dan $S_4 = \{v_{3,2}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c1}|\Pi) = (0, 1, 1, 2)$ $\quad r(v_{2,1}|\Pi) = (0, 2, 1, 3)$ $\quad r(v_{3,2}|\Pi) = (2, 1, 1, 0)$
$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, 1, 1)$ $\quad r(v_{2,2}|\Pi) = (1, 1, 0, 2)$ $\quad r(v_{4,1}|\Pi) = (1, 1, 0, 3)$
$r(v_{1,1}|\Pi) = (0, 1, 2, 3)$ $\quad r(v_{3,1}|\Pi) = (1, 2, 0, 1)$ $\quad r(v_{4,2}|\Pi) = (2, 0, 1, 2)$
$r(v_{1,2}|\Pi) = (1, 0, 2, 2)$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_4,4}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,4})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_4,4}$ adalah $pd(G) \leq 4$. Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_4,4}$, ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari 4, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,2}, v_{4,2}\}$, dan $S_3 = \{v_{2,2}, v_{3,1}, v_{4,1}, v_{3,2}\}$, maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{2,2}|\Pi) = r(v_{4,1}|\Pi) = (1, 1, 0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq 4$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_4,4}$ adalah $pd(B_{C_4,4})$=4.

4.2.2.4 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$ dengan $m = 5$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_4,5}$ pada Gambar 4.8, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,2}, v_{5,2}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{4,1}, v_{5,1}\}$ dan $S_4 = \{v_{3,2}, v_{4,2}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c1}|\Pi) = (0, 1, 1, 2)$ $\quad r(v_{2,1}|\Pi) = (0, 2, 1, 3)$ $\quad r(v_{4,1}|\Pi) = (1, 2, 0, 1)$
$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, 1, 1)$ $\quad r(v_{2,2}|\Pi) = (1, 1, 0, 2)$ $\quad r(v_{4,2}|\Pi) = (2, 1, 1, 0)$
$r(v_{1,1}|\Pi) = (0, 1, 2, 3)$ $\quad r(v_{3,1}|\Pi) = (0, 2, 2, 1)$ $\quad r(v_{5,1}|\Pi) = (1, 1, 0, 3)$
$r(v_{1,2}|\Pi) = (1, 0, 2, 2)$ $\quad r(v_{3,2}|\Pi) = (1, 1, 2, 0)$ $\quad r(v_{5,2}|\Pi) = (2, 0, 1, 2)$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_4,5}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,5})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_4,5}$ adalah $pd(G) \leq 4$. Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_4,5}$, ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari 4, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,2}, v_{5,2}\}$, dan $S_3 = \{v_{2,2}, v_{3,2}, v_{4,1}, v_{4,2}, v_{5,1}\}$, maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{2,2}|\Pi) = r(v_{5,1}|\Pi) = (1, 1, 0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq 4$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_4,5}$ adalah $pd(B_{C_4,5})$=4.

4.2.2.5 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$ dengan $m = 6$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_4,6}$ pada Gambar 4.9, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,2}, v_{6,2}\}$,

$S_3 = \{v_{2,2}, v_{4,1}, v_{5,1}, v_{6,1}\}$, $S_4 = \{v_{3,2}, v_{4,2}\}$ dan $S_5 = \{v_{5,2}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$
\begin{array}{lll}
r(v_{c1}|\Pi) = (0,1,1,2,2) & r(v_{2,2}|\Pi) = (1,1,0,2,2) & r(v_{5,1}|\Pi) = (1,2,0,3,1) \\
r(v_{c2}|\Pi) = (1,0,1,1,1) & r(v_{3,1}|\Pi) = (0,2,2,1,3) & r(v_{5,2}|\Pi) = (2,1,1,2,0) \\
r(v_{1,1}|\Pi) = (0,1,2,3,3) & r(v_{3,2}|\Pi) = (1,1,2,0,2) & r(v_{6,1}|\Pi) = (1,1,0,3,3) \\
r(v_{1,2}|\Pi) = (1,0,2,2,2) & r(v_{4,1}|\Pi) = (1,2,0,1,3) & r(v_{6,2}|\Pi) = (2,0,1,2,2) \\
r(v_{2,1}|\Pi) = (0,2,1,3,3) & r(v_{4,2}|\Pi) = (2,1,1,0,2) &
\end{array}
$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_4,6}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,6})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_4,6}$ adalah $pd(G) \leq 5$. Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_4,6}$, ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari 5, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,2}, v_{6,2}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{4,1}, v_{5,1}, v_{6,1}\}$, dan $S_4 = \{v_{3,2}, v_{4,2}, v_{5,2}\}$ maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{4,2}|\Pi) = r(v_{5,2}|\Pi) = (2,1,1,0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq 5$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_4,6}$ adalah $pd(B_{C_4,6})$=5.

4.2.2.6 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$ dengan $m = 7$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_4,7}$, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}, v_{4,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,2}, v_{7,2}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{5,1}, v_{6,1}, v_{7,1}\}$, $S_4 = \{v_{3,2}, v_{5,2}\}$ dan $S_5 = \{v_{4,1}, v_{6,2}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$
\begin{array}{lll}
r(v_{c1}|\Pi) = (0,1,1,2,2) & r(v_{3,1}|\Pi) = (0,2,2,1,3) & r(v_{6,1}|\Pi) = (1,2,0,3,1) \\
r(v_{c2}|\Pi) = (1,0,1,1,1) & r(v_{3,2}|\Pi) = (1,1,2,0,2) & r(v_{6,2}|\Pi) = (2,1,1,2,0) \\
r(v_{1,1}|\Pi) = (0,1,2,3,3) & r(v_{4,1}|\Pi) = (0,2,2,3,1) & r(v_{7,1}|\Pi) = (1,1,0,3,3) \\
r(v_{1,2}|\Pi) = (1,0,2,2,2) & r(v_{4,2}|\Pi) = (1,1,2,2,0) & r(v_{7,2}|\Pi) = (2,0,1,2,2) \\
r(v_{2,1}|\Pi) = (0,2,1,3,3) & r(v_{5,1}|\Pi) = (1,2,0,1,3) & \\
r(v_{2,2}|\Pi) = (1,1,0,2,2) & r(v_{5,2}|\Pi) = (2,1,1,0,2) &
\end{array}
$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_4,7}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,7})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_4,7}$ adalah $pd(G) \leq 5$. Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_4,7}$, ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari 5, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}, v_{4,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,2}, v_{7,2}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{5,1}, v_{6,1}, v_{7,1}\}$, $S_4 = \{v_{3,2}, v_{4,1}, v_{5,2}, v_{6,2}\}$ maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{3,2}|\Pi) = r(v_{4,2}|\Pi) = (1,1,2,0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq 5$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_4,7}$ adalah $pd(B_{C_4,7})$=5.

4.2.2.7 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_4,m}$

Pada sub bab ini akan ditunjukkan dimensi partisi graf cycle books $B_{C_4,m}$ untuk $m \geq 2$. Dimensi metrik graf cycle books $B_{C_4,m}$ dituangkan dalam proposisi berikut.

Proposisi 4.2.2. *Jika G adalah graf cycle books $B_{C_4,m}$ untuk $m \geq 2$ maka*

$$
pd(G) = \begin{cases} 3, & \textit{jika } m = 2 \\ m, & \textit{jika } m = 3,4 \\ & \textit{jika } m = 2k+4 \\ 3+k, & \textit{jika } m = 2k+3;\ k = 1,2,3,4,... \end{cases}
$$

Bukti:

Graf cycle books $B_{C_4,m}$ memiliki simpul $V(G) = \{v_{i,j},\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2\} \cup \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$. Untuk membuktikan proposisi ini, akan dibagi menjadi empat kasus yaitu untuk $m = 2$, $m = 3,4$, $m = 2k+3$ dan untuk $m = 2k+4$.

Kasus 1. Untuk $m = 2$, dibuktikan $pd(G) = 3$. Untuk $m = 2$ telah dibuktikan pada bagian sebelumnya dan diperoleh dimensi partisinya adalah 3.

Kasus 2. Untuk $m = \{3,4\}$, dibuktikan $pd(G) = m$. Untuk $m = \{3,4\}$ telah dibuktikan sebelumnya dan diperoleh dimensi partisinya adalah m.

Kasus 3. Untuk $m = 2k+3$, akan dibuktikan $pd(G) = 3+k$. Untuk menentukan batas atas dimensi partisinya pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{3+k}\}$ dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{i,1}; 1 \le i \le \frac{m+1}{2}\}$, $S_2 = \{v_{1,2}, v_{c_2}, v_{m,2}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{i,1}; \frac{m+1}{2}+1 \le i \le m\}$, $S_j = \{v_{j-1,2}, v_{\frac{m+1}{2}+(j-3),2}; 4 \le j \le 2+k\}$ dan $S_{k+3} = \{v_{\frac{m+1}{2},2}, v_{m-1,2}\}$. Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c_1}|\Pi) = (0,1,1,\underbrace{2,...,2}_{k})$$

$$r(v_{c_2}|\Pi) = (1,0,\underbrace{1,...,1}_{k+1})$$

$$r(v_{1,1}|\Pi) = (0,1,2,\underbrace{3,...,3}_{k})$$

$$r(v_{1,2}|\Pi) = (1,0,\underbrace{2,...,2}_{k+1})$$

$$r(v_{2,1}|\Pi) = (0,2,1,\underbrace{3,...,3}_{k})$$

$$r(v_{2,2}|\Pi) = (1,1,0,\underbrace{2,...,2}_{k})$$

$$r(v_{i,1}|\Pi) = (0,2,2,\underbrace{3,...,3}_{i-3},1,\underbrace{3,...,3}_{k-i+2});\ 3 \le i \le \frac{m+1}{2}$$

$$r(v_{i,1}|\Pi) = (1,2,0,\underbrace{3,...,3}_{i-(\frac{m+1}{2}+1)},1,\underbrace{3,...,3}_{k-i+\frac{m+1}{2}});\ \frac{m+1}{2}+1 \le i \le m-1$$

$$r(v_{i,2}|\Pi) = (1,1,\underbrace{2,...,2}_{i-2},0,\underbrace{2,...,2}_{k-(i-2)});\ 3 \le i \le \frac{m+1}{2}$$

$$r(v_{i,2}|\Pi) = (2,1,1,\underbrace{2,...,2}_{i-(\frac{m+1}{2}+1)},0,\underbrace{2,...,2}_{k-1-(i-(\frac{m+1}{2}+1))});\ \frac{m+1}{2}+1 \le i \le m-1$$

$$r(v_{m,1}|\Pi) = (1,1,0,\underbrace{3,...,3}_{k})$$

$$r(v_{m,2}|\Pi) = (2,0,1,\underbrace{2,...,2}_{k})$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_4,m}$ untuk $m = 2k+3$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_4,m}$ adalah $pd(G) \leq 3+k$. Untuk menentukan batas bawah, ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari $3+k$, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{m-1,2}|\Pi) = r(v_{m-2,2}|\Pi) = (2,1,1,\underbrace{2,...,2}_{k-1},0)$, sehingga Π tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq 3+k$. Diperoleh dimensi partisinya adalah $pd(B_{C_4,m}) = 3+k$.

Kasus 4. Untuk $m = 2k+4$, akan dibuktikan $pd(G) = 4+k$. Untuk menentukan batas atas dimensi partisinya pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{4+k}\}$ dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{i,1}; 1 \leq i \leq \frac{m}{2}\}$, $S_2 = \{v_{1,2}, v_{c_2}, v_{m,2}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{i,1}; \frac{m}{2}+1 \leq i \leq m\}$, $S_j = \{v_{j-1,2}, v_{\frac{m}{2}+(j-3),2}; 4 \leq j \leq 2+k\}$ dan $S_{k+3} = \{v_{m-1,2}\}$. Representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c_1}|\Pi) = (0,1,1,\underbrace{2,...,2}_{k})$$

$$r(v_{c_2}|\Pi) = (1,0,\underbrace{1,...,1}_{k+1})$$

$$r(v_{1,1}|\Pi) = (0,1,2,\underbrace{3,...,3}_{k})$$

$$r(v_{1,2}|\Pi) = (1,0,\underbrace{2,...,2}_{k+1})$$

$$r(v_{2,1}|\Pi) = (0,2,1,\underbrace{3,...,3}_{k})$$

$$r(v_{2,2}|\Pi) = (1,1,0,\underbrace{2,...,2}_{k})$$

$$r(v_{i,1}|\Pi) = (0,2,2,\underbrace{3,...,3}_{i-3},1,\underbrace{3,...,3}_{k-i+3});\ 3 \leq i \leq \frac{m}{2}$$

$$r(v_{i,1}|\Pi) = (1,2,0,\underbrace{3,...,3}_{i-(\frac{m}{2}+1)},1,\underbrace{3,...,3}_{k-i+(\frac{m}{2}+1)});\ \frac{m}{2}+1 \leq i \leq m-1$$

$$r(v_{i,2}|\Pi) = (1,1,\underbrace{2,...,2}_{i-2},0,\underbrace{2,...,2}_{k+1-(i-2)});\ 3 \leq i \leq \frac{m}{2}$$

$$r(v_{i,2}|\Pi) = (2,1,1,\underbrace{2,...,2}_{i-(\frac{m}{2}+1)},0,\underbrace{2,...,2}_{k-(i-(\frac{m}{2}+1))});\ \frac{m}{2}+1 \leq i \leq m-1$$

$$r(v_{m,1}|\Pi) = (1,1,0,\underbrace{3,...,3}_{k+1})$$

$r(v_{m,2}|\Pi) = (2, 0, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k+1})$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_4,m}$ untuk $m = 2k+4$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_4,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_4,m}$ adalah $pd(G) \leq 4+k$. Untuk menentukan batas bawah, ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari $4+k$, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{3+k}\}$ maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{m-1,2}|\Pi) = r(v_{m-2,2}|\Pi) = (2, 1, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k}, 0)$, sehingga Π tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq 4+k$. Diperoleh dimensi partisinya adalah $pd(B_{C_4,m}) = 4+k$. Jadi Proposisi 4.2.2. terbukti.

4.2.3 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$

Pada bagian ini akan ditunjukkan dimensi partisi graf cycle books $B_{C_5,m}$ untuk beberapa m dan kemudian akan ditunjukkan bentuk umum dimensi patisi pada graf cycle books $B_{C_5,m}$ untuk sebarang $m \geq 2$.

4.2.3.1 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$ dengan $m = 2$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_5,2}$ pada Gambar 4.11, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}\}$, dan $S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c_1}|\Pi) = (0, 1, 2)$ $\quad r(v_{1,2}|\Pi) = (0, 1, 3)$ $\quad r(v_{2,2}|\Pi) = (1, 2, 0)$
$r(v_{c_2}|\Pi) = (1, 0, 1)$ $\quad r(v_{1,3}|\Pi) = (1, 0, 2)$ $\quad r(v_{2,3}|\Pi) = (2, 1, 0)$
$r(v_{1,1}|\Pi) = (1, 2, 3)$ $\quad r(v_{2,1}|\Pi) = (0, 2, 1)$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_5,2}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_5,2})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_5,2}$ adalah $pd(G) \leq 3$.Batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_5,2}$ dapat merujuk pada Teorema 2.3(i) menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G adalah graf lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa dimensi partisi graf $B_{C_5,2}$ adalah $pd(G) \geq 3$. Jadi diperoleh dimensi partisi graf $B_{C_5,2}$ adalah $pd(B_{C_5,2})$=3.

4.2.3.2 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$ dengan $m = 3$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_5,3}$ pada Gambar 4.12, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}, v_{3,2}, v_{3,3}\}$, dan $S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c_1}|\Pi) = (0, 1, 1)$ $\quad r(v_{1,3}|\Pi) = (1, 2, 0)$ $\quad r(v_{3,1}|\Pi) = (1, 1, 0)$
$r(v_{c_2}|\Pi) = (1, 0, 1)$ $\quad r(v_{2,1}|\Pi) = (0, 2, 1)$ $\quad r(v_{3,2}|\Pi) = (2, 0, 1)$
$r(v_{1,1}|\Pi) = (0, 2, 2)$ $\quad r(v_{2,2}|\Pi) = (1, 2, 0)$ $\quad r(v_{3,2}|\Pi) = (2, 0, 2)$
$r(v_{1,2}|\Pi) = (0, 1, 3)$ $\quad r(v_{2,3}|\Pi) = (2, 1, 0)$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_5,3}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_5,3})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_5,3}$ adalah $pd(G) \leq 3$. Batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_5,3}$ dapat merujuk pada Teorema 2.3(i) menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G adalah graf lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa dimensi partisi graf

$B_{C_5,3}$ adalah $pd(G) \geq 3$. Jadi diperoleh dimensi partisi graf $B_{C_5,3}$ adalah $pd(B_{C_5,3})$=3.

4.2.3.3 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$ dengan $m = 4$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_5,4}$ pada Gambar 4.13, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}, v_{4,2}, v_{4,3}\}$,$S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{4,1}\}$, dan $S_4 = \{v_{3,3}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$\begin{array}{lll}
r(v_{c_1}|\Pi) = (0,1,1,2) & r(v_{2,1}|\Pi) = (0,2,1,3) & r(v_{3,3}|\Pi) = (2,1,1,0) \\
r(v_{c_2}|\Pi) = (1,0,1,1) & r(v_{2,2}|\Pi) = (1,2,0,3) & r(v_{4,1}|\Pi) = (1,1,0,3) \\
r(v_{1,1}|\Pi) = (0,2,2,3) & r(v_{2,3}|\Pi) = (2,1,0,2) & r(v_{4,2}|\Pi) = (2,0,1,3) \\
r(v_{1,2}|\Pi) = (0,1,3,3) & r(v_{3,1}|\Pi) = (1,2,0,2) & r(v_{4,3}|\Pi) = (2,0,2,2) \\
r(v_{1,3}|\Pi) = (1,0,2,2) & r(v_{3,2}|\Pi) = (2,2,0,1) &
\end{array}$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_5,4}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_5,4})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_5,4}$ adalah $pd(G) \leq 4$. Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_5,4}$, ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari 4, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_3\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}, v_{4,2}, v_{4,3}\}$,dan $S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{4,1}\}$, maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{2,3}|\Pi) = r(v_{3,3}|\Pi) = (2,1,0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq 4$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_5,4}$ adalah $pd(B_{C_5,4})$=4.

4.2.3.4 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$ dengan $m = 5$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_5,5}$ pada Gambar 4.14, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}, v_{5,2}, v_{5,3}\}$,$S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{4,1}\}$, dan $S_4 = \{v_{3,3}, v_{4,2}, v_{4,3}, v_{5,1}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$\begin{array}{lll}
r(v_{c_1}|\Pi) = (0,1,1,1) & r(v_{2,2}|\Pi) = (1,2,0,3) & r(v_{4,2}|\Pi) = (2,2,1,0) \\
r(v_{c_2}|\Pi) = (1,0,1,1) & r(v_{2,3}|\Pi) = (2,1,0,2) & r(v_{4,3}|\Pi) = (2,1,2,0) \\
r(v_{1,1}|\Pi) = (0,2,2,2) & r(v_{3,1}|\Pi) = (1,2,0,2) & r(v_{5,1}|\Pi) = (1,1,2,0) \\
r(v_{1,2}|\Pi) = (0,1,3,3) & r(v_{3,2}|\Pi) = (2,2,0,1) & r(v_{5,2}|\Pi) = (2,0,3,1) \\
r(v_{1,3}|\Pi) = (1,0,2,2) & r(v_{3,3}|\Pi) = (2,1,1,0) & r(v_{5,3}|\Pi) = (2,0,2,2) \\
r(v_{2,1}|\Pi) = (0,2,1,2) & r(v_{4,1}|\Pi) = (1,2,0,1) &
\end{array}$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_5,5}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_5,5})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_5,5}$ adalah $pd(G) \leq 4$. Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_5,5}$, ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari 4, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}, v_{5,2}, v_{5,3}\}$,dan $S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{4,1}, v_{4,2}, v_{4,3}, v_{5,1}\}$, maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{2,3}|\Pi) = r(v_{3,3}|\Pi) = (2,1,0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq 4$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_5,5}$ adalah $pd(B_{C_5,5})$=4.

4.2.3.5 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$ dengan $m = 6$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_5,6}$, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}, v_{5,3}, v_{6,2}, v_{6,3}\}$,$S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{4,1}\}$, dan $S_4 =$

$\{v_{3,3}, v_{4,2}, v_{4,3}, v_{5,1}, v_{5,2}, v_{6,1}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c_1}\|\Pi) = (0,1,1,1)$	$r(v_{2,3}\|\Pi) = (2,1,0,2)$	$r(v_{5,1}\|\Pi) = (1,2,2,0)$
$r(v_{c_2}\|\Pi) = (1,0,1,1)$	$r(v_{3,1}\|\Pi) = (1,2,0,2)$	$r(v_{5,2}\|\Pi) = (2,1,3,0)$
$r(v_{1,1}\|\Pi) = (0,2,2,2)$	$r(v_{3,2}\|\Pi) = (2,2,0,1)$	$r(v_{5,3}\|\Pi) = (2,0,2,1)$
$r(v_{1,2}\|\Pi) = (0,1,3,3)$	$r(v_{3,3}\|\Pi) = (2,1,1,0)$	$r(v_{6,1}\|\Pi) = (1,1,2,0)$
$r(v_{1,3}\|\Pi) = (1,0,2,2)$	$r(v_{4,1}\|\Pi) = (1,2,0,1)$	$r(v_{6,2}\|\Pi) = (2,0,3,1)$
$r(v_{2,1}\|\Pi) = (0,2,1,2)$	$r(v_{4,2}\|\Pi) = (2,2,1,0)$	$r(v_{6,3}\|\Pi) = (2,0,2,2)$
$r(v_{2,2}\|\Pi) = (1,2,0,3)$	$r(v_{4,3}\|\Pi) = (2,1,2,0)$	

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_5,6}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_5,6})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_5,6}$ adalah $pd(G) \leq 4$. Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_5,6}$, ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari 4, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}, v_{5,3}, v_{6,2}, v_{6,3}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{4,1}, v_{4,2}, v_{4,3}, v_{5,1}, v_{5,2}, v_{6,1}\}$, maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{2,3}|\Pi) = r(v_{3,3}|\Pi) = (2,1,0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq 4$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_5,6}$ adalah $pd(B_{C_5,5})$=4.

4.2.3.6 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$ dengan $m = 7$

Untuk menentukan dimensi partisi pada graf $B_{C_5,7}$, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}, v_{6,3}, v_{7,2}, v_{7,3}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{4,1}\}$, $S_4 = \{v_{3,3}, v_{4,2}, v_{4,3}, v_{5,1}, v_{5,2}, v_{6,1}\}$, $S_5 = \{v_{5,3}, v_{6,2}, v_{7,1}\}$ maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$r(v_{c_1}\|\Pi) = (0,1,1,1,1)$	$r(v_{3,1}\|\Pi) = (1,2,0,3,3)$	$r(v_{5,3}\|\Pi) = (2,1,2,1,0)$
$r(v_{c_2}\|\Pi) = (1,0,1,1,1)$	$r(v_{3,2}\|\Pi) = (2,2,0,1,3)$	$r(v_{6,1}\|\Pi) = (1,2,2,0,1)$
$r(v_{1,1}\|\Pi) = (0,2,2,2,2)$	$r(v_{3,3}\|\Pi) = (2,1,1,0,2)$	$r(v_{6,2}\|\Pi) = (2,1,3,1,0)$
$r(v_{1,2}\|\Pi) = (0,1,3,3,3)$	$r(v_{4,1}\|\Pi) = (1,2,0,1,2)$	$r(v_{6,3}\|\Pi) = (2,0,2,2,1)$
$r(v_{1,3}\|\Pi) = (1,0,2,2,2)$	$r(v_{4,2}\|\Pi) = (2,2,1,0,3)$	$r(v_{7,1}\|\Pi) = (1,1,2,2,0)$
$r(v_{2,1}\|\Pi) = (0,2,1,2,2)$	$r(v_{4,3}\|\Pi) = (2,1,2,0,2)$	$r(v_{7,2}\|\Pi) = (2,0,3,3,1)$
$r(v_{2,2}\|\Pi) = (1,2,0,3,3)$	$r(v_{5,1}\|\Pi) = (1,2,2,0,2)$	$r(v_{7,3}\|\Pi) = (2,0,2,2,2)$
$r(v_{2,3}\|\Pi) = (2,1,0,3,3)$	$r(v_{5,2}\|\Pi) = (2,2,3,0,1)$	

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_5,7}$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_5,7})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_5,7}$ adalah $pd(G) \leq 5$. Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_5,7}$, ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari 5, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}, S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}, v_{5,3}, v_{6,2}, v_{6,3}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}, v_{4,1}, v_{4,2}, v_{4,3}, v_{5,1}, v_{5,2}, v_{6,1}\}$, maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{2,3}|\Pi) = r(v_{3,3}|\Pi) = (2,1,0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq 4$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_5,6}$ adalah $pd(B_{C_5,5})$=4.

4.2.3.7 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_5,m}$

Pada sub bab ini akan ditunjukkan dimensi partisi graf cycle books $B_{C_5,m}$ untuk $m \geq 2$. Dimensi metrik graf cycle books $B_{C_4,m}$ dituangkan dalam proposisi berikut.

Proposisi 4.2.3. *Jika G adalah graf cycle books $B_{C_5,m}$ untuk $m \geq 2$ maka*

$$pd(G) = \begin{cases} 3, & \textit{jika } m = 2,3 \\ 4, & \textit{jika } m = 4,5 \\ 3+k, & \textit{jika } m = 2k+3;\ k = 2,3,4,... \\ & m = 2k+4;\ k = 1,2,3,4,... \end{cases}$$

Bukti:

Graf cycle books $B_{C_5,m}$ memiliki simpul $V(G) = \{v_{i,j},\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,3\} \cup \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$. Untuk membuktikan proposisi ini, akan dibagi menjadi empat kasus yaitu untuk $m = \{2,3\}$, m adalah gasal $m = 2k+3;\ k = 1,2,3,4,...$ dan untuk m adalah genap $m = 2k+4;\ k = 1,2,3,4,...$ seperti berikut.

Kasus 1. Untuk $m = 2,3$.

Untuk $m = \{2,3\}$ telah dibuktikan pada bagiansebelumnya dan diperoleh dimensi partisinya adalah 3.

Kasus 2. Untuk $m = 4,5$.

Untuk $m = \{4,5\}$ telah dibuktikan pada bagiansebelumnya dan diperoleh dimensi partisinya adalah 4.

Kasus 3. Untuk m genap $m = 2k+4;\ k = 1,2,3,4,...$, akan dibuktikan $pd(G) = 3+k$.

Untuk menentukan batas atas dimensi partisi pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{3+k}\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}, v_{m-1,3}, v_{m,2}, v_{m,3}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{4,1}\}$, $S_4 = \{v_{3,r-2}, v_{4,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{5,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{6,1}\}$, $S_5 = \{v_{5,r-2}, v_{6,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{7,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{8,1}\}$, $S_6 = \{v_{7,r-2}, v_{8,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{9,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{10,1}\}$ ... $S_{3+k} = \{v_{m-3,r-2}, v_{m-2,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{m-1,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{m,1}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+2})$$

$$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+1})$$

$$r(v_{1,1}|\Pi) = (0, \underbrace{2, ..., 2}_{k+2})$$

$$r(v_{1,2}|\Pi) = (0, 1, \underbrace{3, ..., 3}_{k+1})$$

$$r(v_{1,3}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{k+1})$$

$$r(v_{2,1}|\Pi) = (0, 2, 1\underbrace{2, ..., 2}_{k})$$

$$r(v_{2,2}|\Pi) = (1, 2, 0, \underbrace{3, ..., 3}_{k})$$

$r(v_{2,3}|\Pi) = (2, 1, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{k})$

$r(v_{i,1}|\Pi) = (1, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{i-1}{2}}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{1+k-\frac{i-1}{2}});\ 3 \leq i \leq m-1\ i = gasal$

$r(v_{i,1}|\Pi) = (1, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{i-2}{2}}, 0, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k-\frac{i-1}{2}});\ 4 \leq i \leq m-2\ i = genap$

$r(v_{i,2}|\Pi) = (2, 2, \underbrace{3, ..., 3}_{\frac{i-3}{2}}, 0, 1, \underbrace{3, ..., 3}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ 3 \leq i \leq m-3\ i = gasal$

$r(v_{i,2}|\Pi) = (2, 2, \underbrace{3, ..., 3}_{\frac{i-4}{2}}, 1, 0, \underbrace{3, ..., 3}_{k-1-\frac{i-4}{2}});\ 4 \leq i \leq m-2\ i = genap$

$r(v_{i,3}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{i-3}{2}}, 1, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ 3 \leq i \leq m-3\ i = gasal$

$r(v_{i,3}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{i-2}{2}}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{k-\frac{i-2}{2}});\ 4 \leq i \leq m-2\ i = genap$

$r(v_{m-1,2}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{3, ..., 3}_{k}, 0)$

$r(v_{m-1,3}|\Pi) = (2, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{k}, 1)$

$r(v_{m,1}|\Pi) = (1, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k}, 0)$

$r(v_{m,2}|\Pi) = (2, 0, \underbrace{3, ..., 3}_{k}, 1)$

$r(v_{m,3}|\Pi) = (2, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{k+1})$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_{5},m}$ m genap dan $m \geq 5$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_{5},m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_{5},m}$ adalah $pd(G) \leq k+3$. Untuk menentukan batas bawah ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari $3+k$, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{m-2,3}|\Pi) = r(v_{m-3,3}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k}, 0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq k+3$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_{5},m}$ untuk m genap dan $m \geq 5$ adalah $pd(B_{C_{5},m}) = 3+k$.

Kasus 4. Untuk m gasal $m = 2k+4$; $k = 1, 2, 3, 4, ...$, akan dibuktikan $pd(G) = 3+k$.

Untuk menentukan batas atas dimensi partisi pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{3+k}\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,3}, v_{m-1,3}, v_{m,2}, v_{m,3}\}$, $S_3 = \{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{4,1}\}$, $S_4 = \{v_{3,r-2}, v_{4,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{5,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{6,1}\}$,

$S_5 = \{v_{5,r-2}, v_{6,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{7,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{8,1}\}$, $S_6 = \{v_{7,r-2}, v_{8,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{9,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{10,1}\}$, ..., $S_{2+k} = \{v_{m-4,r-2}, v_{m-3,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{m-2,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{m-1,1}\}$ $S_{3+k} = \{v_{m-2,r-2}, v_{m-1,j}\ 2 \leq j \leq r-3, v_{m,1}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+2})$$

$$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+1})$$

$$r(v_{1,1}|\Pi) = (0, \underbrace{2, ..., 2}_{k+2})$$

$$r(v_{1,2}|\Pi) = (0, 1, \underbrace{3, ..., 3}_{k+1})$$

$$r(v_{1,3}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{k+1})$$

$$r(v_{2,1}|\Pi) = (0, 2, 1\, \underbrace{2, ..., 2}_{k})$$

$$r(v_{2,2}|\Pi) = (1, 2, 0, \underbrace{3, ..., 3}_{k})$$

$$r(v_{2,3}|\Pi) = (2, 1, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{k})$$

$$r(v_{i,1}|\Pi) = (1, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{i-1}{2}}, 0,\ \underbrace{2, ..., 2}_{1+k-\frac{i-1}{2}});\ 3 \leq i \leq m-2\ i = gasal$$

$$r(v_{i,1}|\Pi) = (1, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{i-2}{2}}, 0, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k-\frac{i-1}{2}});\ 4 \leq i \leq m-1\ i = genap$$

$$r(v_{i,2}|\Pi) = (2, 2, \underbrace{3, ..., 3}_{\frac{i-3}{2}}, 0, 1,\ \underbrace{3, ..., 3}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ 3 \leq i \leq m-2\ i = gasal$$

$$r(v_{i,2}|\Pi) = (2, 2, \underbrace{3, ..., 3}_{\frac{i-4}{2}}, 1, 0,\ \underbrace{3, ..., 3}_{k-1-\frac{i-4}{2}});\ 4 \leq i \leq m-3\ i = genap$$

$$r(v_{i,3}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{i-3}{2}}, 1, 0,\ \underbrace{2, ..., 2}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ 3 \leq i \leq m-2\ i = gasal$$

$$r(v_{i,3}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{\frac{i-2}{2}}, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{k-\frac{i-2}{2}});\ 4 \leq i \leq m-3\ i = genap$$

$$r(v_{m-1,2}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{3, ..., 3}_{k-1}, 1, 0)$$

$$r(v_{m-1,3}|\Pi) = (2, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{k}, 1)$$

$$r(v_{m,1}|\Pi) = (1, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k}, 0)$$

$$r(v_{m,2}|\Pi) = (2, 0, \underbrace{3, ..., 3}_{k}, 1)$$

$$r(v_{m,3}|\Pi) = (2, 0, \underbrace{2, ..., 2}_{k+1})$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_5,m}$ m gasal dan $m > 5$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_5,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_5,m}$ adalah $pd(G) \leq k + 3$. Untuk menentukan batas bawah ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari $3 + k$, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{m-2,3}|\Pi) = r(v_{m-3,3}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k}, 0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq k + 3$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_5,m}$ untuk m genap dan $m \geq 5$ adalah $pd(B_{C_5,m}) = 3 + k$. Jadi Proposisi 4.2.3. terbukti.

4.2.4 Dimensi Partisi Graf Cycle Books $B_{C_r,m}$

Pada sub bab ini akan ditunjukkan dimensi partisi graf cycle books $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 3$ dan $m \geq 2$. Dimensi partisi graf cycle books $B_{C_r,m}$ dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 4.2. *Jika G adalah graf cycle books $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 6$, $m \geq 2$ maka*

$$pd(G) = \begin{cases} 3, & \text{jika } r \geq 6 \text{ dan } m = 2, 3 \\ m, & \text{jika } r \geq 6 \text{ dan } m = 4 \\ 3 + k, & \text{jika } r \text{ gasal dan } m = 2k + 3 \\ & \text{jika } r \text{ genap dan } m = 2k + 3 \\ & \text{jika } r \text{ gasal dan } m = 2k + 4 \\ & \text{jika } r \text{ genap dan } m = 2k + 4 \quad k=1,2,3,4,... \end{cases}$$

Bukti:

Graf cycle books $B_{C_r,m}$ memiliki simpul $V(G) = \{v_{i,j},\ i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, 3, 4, ..., r - 2\} \cup \{v_{c_1}, v_{c_2}\}$. Untuk membuktikan teorema ini, akan dibagi menjadi enam kasus yaitu untuk $r \geq 6$ dan $m = 2, 3$, untuk $r \geq 6$ dan $m = 4$, untuk $r \geq 6$, r *gasal*, m *gasal*; untuk $r \geq 6$, r *gasal*, m *genap*; untuk $r \geq 6, r$ *genap*, m *gasal* dan untuk $r \geq 6, r$ *genap*, m *genap*.

Kasus 1. Untuk $r \geq 6$ dan $m = 2, 3$, akan dibuktikan $pd(G) = 3$. Karena ada kekhususan representasi dan pengambilan partisi pada beberapa simpul, maka untuk kasus ini akan dibuktikan dengan beberapa tahapan seperti berikut.

Pertama akan dibuktikan untuk $m = 2$. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana

$S_1 = \{v_{c_1}, v_{i,j}, v_{2,1};\ 1 \leq j \leq r-3\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,j}; j = r-2\}$, $S_3 = \{v_{2,j}\ 2 \leq j \leq r-2\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c1}|\Pi) = (0, 1, 2)$$

$$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, 1)$$

representasi setiap simpul untuk r gasal adalah

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j+1, j+2)\,;\ 1 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, r-j-2, r-j)\,;\ \frac{r-1}{2} \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (1, 0, r-j)\,;\ j = r-2$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (0, j+1, j)\,;\ j = 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j+1, 0)\,;\ 2 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j, 0)\,;\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0)\,;\ \frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-2$$

representasi setiap simpul untuk r genap adalah

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j+1, j+2)\,;\ 1 \leq j \leq \frac{r}{2} - 2$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j, j+2)\,;\ j = \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, r-j-2, r-j)\,;\ \frac{r}{2} \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (1, 0, r-j)\,;\ j = r-2$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (0, j+1, j)\,;\ j = 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j+1, 0)\,;\ 2 \leq j \leq \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j-1, 0)\,;\ j = \frac{r}{2}$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0)\,;\ \frac{r}{2} + 1 \leq j \leq r-2$$

.

Kedua, akan dibuktikan untuk $m = 3$. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana
$S_1 = \{v_{c_1}, v_{i,j}, v_{2,1};\ 1 \leq j \leq r-3\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,j}; j = r-2, v_{3,j}; 2 \leq j \leq r-2\}$, $S_3 = \{v_{2,j}\ 2 \leq j \leq r-2\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c1}|\Pi) = (0, 1, 1)$$

$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, 1)$

representasi setiap simpul untuk r gasal adalah

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j+1, j+1)\,;\ 1 \le j \le \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, r-j-2, r-j)\,;\ \frac{r-1}{2} \le j \le r-3$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (1, 0, r-j)\,;\ j = r-2$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (0, j+1, j)\,;\ j = 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j+1, 0)\,;\ 2 \le j \le \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j, 0)\,;\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0)\,;\ \frac{r-1}{2} + 1 \le j \le r-2$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (j, j, 0)\,;\ j = 1$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (j, 0, j-1)\,;\ 2 \le j \le \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (r-j, 0, r-j)\,;\ \frac{r-1}{2} + 1 \le j \le r-2$$

representasi setiap simpul untuk r genap adalah

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j+1, j+2)\,;\ 1 \le j \le \frac{r}{2} - 2$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j, j+1)\,;\ j = \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, r-j-2, r-j)\,;\ \frac{r}{2} \le j \le r-3$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (1, 0, r-j)\,;\ j = r-2$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (0, j+1, j)\,;\ j = 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j+1, 0)\,;\ 2 \le j \le \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j-1, 0)\,;\ j = \frac{r}{2}$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0)\,;\ \frac{r}{2} + 1 \le j \le r-2$$

.

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (j, j, 0)\,;\ j = 1$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (j, 0, j-1)\,;\ 2 \le j \le \frac{r}{2}$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (r-j, 0, r-j)\,;\ \frac{r}{2}+1 \leq j \leq r-2$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 6$ dan $m = 2, 3$, sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_r,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_r,m}$ adalah $pd(G) \leq 3$.Batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_r,m}$ dapat merujuk pada Teorema 2.3(i) menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika graf G adalah graf lintasan P_n, maka dapat dipastikan bahwa dimensi partisi graf $B_{C_r,m}$ adalah $pd(G) \geq 3$. Jadi diperoleh dimensi partisi graf $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 6$ dan $m = 2, 3$, adalah $pd(G)$=3.

Kasus 2. Untuk $r \geq 6$ dan $m = 4$, akan dibuktikan $pd(G) = m$.
Untuk menentukan batas atas dimensi partisi pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,j}, v_{2,1};\ 1 \leq j \leq r-3\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,r-2}, v_{4,j};\ 2 \leq j \leq r-2\}$, $S_3 = \{v_{2,j}\}; 2 \leq j \leq r-2, v_{3,j};\ 1 \leq j \leq r-3, v_{4,1}\}$, $S_4 = \{v_{3,r-2}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c1}|\Pi) = (0, 1, 1, 2)$$

$$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, 1, 1)$$

representasi setiap simpul untuk r gasal adalah

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j+1, j+1, j+2)\,;\ 1 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, r-j-2, r-j, r-j)\,;\ \frac{r-1}{2} \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (1, 0, r-j, r-j)\,;\ j = r-2$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (0, j+1, j, j+2)\,;\ j = 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j+1, 0, j+2)\,;\ 2 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j, 0, j+1)\,;\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0, r-j)\,;\ \frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-2$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (j, j+1, 0, j+2)\,;\ 1 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 2$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (j, j+1, 0, j+1)\,;\ j = \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (j, j, 0, j-1)\,;\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0, r-j-2)\,;\ \frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, r-j-1, 0)\,;\ j = r-2$$

$$r(v_{4,j}|\Pi) = (j, j, 0, j+2)\,;\ j = 1$$

$$r(v_{4,j}|\Pi) = (j, 0, j-1, j+2)\,;\ 2 \le j \le \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{4,j}|\Pi) = (j, 0, j-1, j+1)\,;\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{4,j}|\Pi) = (r-j, 0, r-j, r-j)\,;\ \frac{r-1}{2} + 1 \le j \le r-2$$

representasi setiap simpul untuk r genap adalah

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j+1, j+1, j+2)\,;\ 1 \le j \le \frac{r}{2} - 2$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j, j+1, j+2)\,;\ j = \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, r-j-2, r-j, r-j)\,;\ \frac{r}{2} \le j \le r-3$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (1, 0, r-j, r-j)\,;\ j = r-2$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (0, j+1, j, j+2)\,;\ j = 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j+1, 0, j+2)\,;\ 2 \le j \le \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j-1, 0, j+1)\,;\ j = \frac{r}{2}$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0, r-j)\,;\ \frac{r}{2} + 1 \le j \le r-2$$

.

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (j, j+1, 0, j+2)\,;\ 1 \le j \le \frac{r}{2} - 2$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (j, j+1, 0, j)\,;\ j = \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0, r-j-2)\,;\ \frac{r}{2} \le j \le r-3$$

$$r(v_{3,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, r-j-1, 0)\,;\ j = r-2$$

$$r(v_{4,j}|\Pi) = (j, j, 0, j+2)\,;\ j = 1$$

$$r(v_{4,j}|\Pi) = (j, 0, j-1, j+2)\,;\ 2 \le j \le \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{4,j}|\Pi) = (j, 0, j-1, j)\,;\ j = \frac{r}{2}$$

$$r(v_{4,j}|\Pi) = (r-j, 0, r-j, r-j)\,;\ \frac{r}{2} + 1 \le j \le r-2$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_r,m}$ untuk $m = 4$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_r,4})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_r,4}$ adalah $pd(G) \le 4$. Untuk menentukan batas bawah dimensi partisi graf $B_{C_r,4}$, ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari 4, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,j}, v_{2,1};\ 1 \le j \le r-3\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,r-2}, v_{4,j};\ 2 \le j \le r-2\}$, $S_3 = \{v_{2,j}\}; 2 \le j \le r-2, v_{3,j};\ 1 \le j \le$

$r-2, v_{4,1}\}$, maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{2,r-2}|\Pi) = r(v_{3,r-2}|\Pi) = (2,1,0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq 4$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 6$ dan $m = 4$ adalah $pd(B_{C_r,4})$=4.

Kasus 3. Untuk r gasal dan $m = 2k+3$, akan dibuktikan $pd(G) = 3+k$. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{3+k}\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{1,j}, v_{2,1};\ 1 \leq j \leq r-3\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,r-2}, v_{m-1,r-2}, v_{m,j};\ 2 \leq j \leq r-2\}$, $S_3 = \{v_{2,j}; 2 \leq j \leq r-2, v_{3,j};\ 1 \leq j \leq r-3, v_{4,1}\}$, $S_4 = \{v_{3,r-2}, v_{4,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{5,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{6,1}\}$, $S_5 = \{v_{5,r-2}, v_{6,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{7,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{8,1}\}$, $S_6 = \{v_{7,r-2}, v_{8,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{9,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{10,1}\}$ ... $S_{3+k} = \{v_{m-2,r-2}, v_{m-1,j}\ 2 \leq j \leq r-3, v_{m,1}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+2})$$

$$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+1})$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+2});\ 1 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j-1, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+1});\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ \frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ j = r-2$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (0, 2, 1, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k});\ j = 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j+1, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k});\ 2 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k});\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j-2, 0, \underbrace{j-1, ..., j-1}_{k});\ j = \frac{r-1}{2} + 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k});\ \frac{r-1}{2} + 2 \leq j \leq r-2$$

Representasi simpul untuk $3 \leq i \leq m-2;\ i$ *gasal* adalah

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-1}{2}}, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+1-\frac{i-1}{2}});\ 1 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-3}{2}}, 0, j-1, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-3}{2}}, 0, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ \frac{r-1}{2}+1 \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-3}{2}}, r-j-1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ j = r-2$$

Representasi simpul untuk $3 \leq i \leq m-2;\ i\ genap$ adalah

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-2}{2}}, 0, 1, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-\frac{i-2}{2}});\ j = 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-2}{2}}, j-1, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-\frac{i-2}{2}});\ 2 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-4}{2}}, j-1, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-1-\frac{i-4}{2}});\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-2}{2}}, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-\frac{i-2}{2}});\ \frac{r-1}{2}+1 \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-2}{2}}, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-\frac{i-2}{2}});\ j = r-2$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, 0, 1);\ j = 1$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, j-1, 0);\ 2 \leq j\frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (\frac{r-1}{2}, \frac{r-1}{2} - 1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-1}, j-1, 0);\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (r-j, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k}, 0);\frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (r-j, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k}, 1);\ j = r-2$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (j, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, 0);\ j = 1$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (j, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, j-1);\ 2 \leq j \leq \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (r-j, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ \frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-2$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_r,m}$ *r gasal* $m = 2k+3$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_r,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_r,m}$ adalah $pd(G) \leq k+3$. Untuk menentukan batas bawah ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari $3+k$, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{m-2,r-2}|\Pi) = r(v_{m-3,r-2}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k-1}, 0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq k+3$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_r,m}$ *r gasal* dan $m = 2k+3$ adalah $pd(B_{C_r,m}) = 3+k$.

Kasus 4. Untuk *r gasal* $m = 2k+4$, akan dibuktikan $pd(G) = 3+k$. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{3+k}\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{i,j}, v_{2,1};\ 1 \leq j \leq r-3\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,r-2}, v_{m-1,r-2}, v_{m,j};\ 2 \leq j \leq r-2\}$, $S_3 = \{v_{2,j}; 2 \leq j \leq r-2, v_{3,j};\ 1 \leq j \leq r-3, v_{4,1}\}$, $S_4 = \{v_{3,r-2}, v_{4,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{5,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{6,1}\}$, $S_5 = \{v_{5,r-2}, v_{6,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{7,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{8,1}\}$, $S_6 = \{v_{7,r-2}, v_{8,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{9,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{10,1}\}$ ... $S_{3+k} = \{v_{m-3,r-2}, v_{m-2,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{m-1,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{m,1}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+2})$$

$$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+1})$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+2});\ 1 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j-1, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+1});\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ \frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ j = r-2$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (0, 2, 1, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k});\ j = 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j+1, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k});\ 2 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k});\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j-2, 0, \underbrace{j-1, ..., j-1}_{k});\ j = \frac{r-1}{2} + 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k});\ \frac{r-1}{2} + 2 \leq j \leq r-2$$

Representasi simpul untuk $3 \leq i \leq m-2;\ i$ *gasal* adalah

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-1}{2}}, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+1-\frac{i-1}{2}});\ 1 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-3}{2}}, 0, j-1, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-3}{2}}, 0, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ \frac{r-1}{2}+1 \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-3}{2}}, r-j-1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ j = r-2$$

Representasi simpul untuk $3 \leq i \leq m-2;\ i$ *genap* adalah

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-2}{2}}, 0, 1, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-\frac{i-2}{2}});\ j = 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-2}{2}}, j-1, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-\frac{i-2}{2}});\ 2 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-4}{2}}, j-1, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-1-\frac{i-4}{2}});\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-2}{2}}, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-\frac{i-2}{2}});\ \frac{r-1}{2}+1 \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-2}{2}}, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-\frac{i-2}{2}});\ j = r-2$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+1}, 0);\ 1 \leq j \leq \frac{r-1}{2} - 1$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (\frac{r-1}{2}, \frac{r-1}{2} - 1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k}, 0);\ j = \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (r-j, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k}, 0);\ \frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (r-j, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k}, 1);\ j = r-2$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (j, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, 0);\ j = 1$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (j, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, j-1);\ 2 \leq j \leq \frac{r-1}{2}$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (r-j, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ \frac{r-1}{2} + 1 \leq j \leq r-2$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_r,m}$ *r genap* $m = 2k+4$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_r,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_r,m}$ adalah $pd(G) \leq k+3$. Untuk menentukan batas bawah ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari $3+k$, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{m-2,r-2}|\Pi) = r(v_{m-3,r-2}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k-1}, 0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq k+3$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_r,m}$ *r genap* dan $m = 2k+4$ adalah $pd(B_{C_r,m}) = 3+k$.

Kasus 5. Untuk *r genap* $m = 2k+3$, akan dibuktikan $pd(G) = 3+k$. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{3+k}\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{i,j}, v_{2,1};\ 1 \leq j \leq r-3\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,r-2}, v_{m-1,r-2}, v_{m,j};\ 2 \leq j \leq r-2\}$, $S_3 = \{v_{2,j}; 2 \leq j \leq r-2, v_{3,j};\ 1 \leq j \leq r-3, v_{4,1}\}$, $S_4 = \{v_{3,r-2}, v_{4,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{5,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{6,1}\}$, $S_5 = \{v_{5,r-2}, v_{6,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{7,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{8,1}\}$, $S_6 = \{v_{7,r-2}, v_{8,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{9,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{10,1}\}$ ..., $S_{3+k} = \{v_{m-2,r-2}, v_{m-1,j}\ 2 \leq j \leq r-3, v_{m,1}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+2})$$

$$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+1})$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+2});\ 1 \leq j \leq \frac{r}{2} - 2$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+1});\ j = \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ \frac{r}{2} \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ j = r-2$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (0, j+1, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k});\ j = 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j+1, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k});\ 2 \leq j \leq \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j-1, 0, \underbrace{j, ..., j}_{k});\ j = \frac{r}{2}$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k});\ \frac{r}{2} + 1 \leq j \leq r-2$$

Representasi simpul untuk $3 \leq i \leq m-1;\ i$ *gasal* adalah

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-1}{2}}, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+1-\frac{i-1}{2}});\ 1 \leq j \leq \frac{r}{2} - 2$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-1}{2}}, 0, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-\frac{i-1}{2}});\ j = \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-3}{2}}, 0, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ \frac{r}{2} \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-3}{2}}, r-j-1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ j = r-2$$

Representasi simpul untuk $3 \leq i \leq m-2;\ i$ *genap* adalah

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-2}{2}}, 0, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-\frac{i-2}{2}});\ j = 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-2}{2}}, j-1, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-\frac{i-2}{2}});\ 2 \leq j \leq \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, j-1, \underbrace{j, ..., j}_{\frac{i-4}{2}}, j-1, 0, \underbrace{j, ..., j}_{k-1-\frac{i-4}{2}});\ j = \frac{r}{2}$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-2}{2}}, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-\frac{i-2}{2}});\ \frac{r}{2}+1 \leq j \leq r-2$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-2}{2}}, 0, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-\frac{i-2}{2}});\ j = 1$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, j-1, 0);\ 2 \leq j \leq \frac{r}{2}-2$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (j, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-1}, j-1, 0);\ j = \frac{r}{2}-1$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (r-j, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k}, 0);\ \frac{r}{2} \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (r-j, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k}, 1);\ j = r-2$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (j, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, 0);\ j = 1$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (j, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, j-1);\ 2 \leq j \leq \frac{r}{2}-1$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (j, 0, \underbrace{j, ..., j}_{k}, j-1);\ j = \frac{r}{2}$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (r-j, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ \frac{r}{2}+1 \leq j \leq r-2$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_r,m}$ r *gasal* $m = 2k+3$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_r,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_r,m}$ adalah $pd(G) \leq k+3$. Untuk menentukan batas bawah ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari $3+k$, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{m-2,r-2}|\Pi) = r(v_{m-3,r-2}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k-1}, 0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq k+3$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_r,m}$ r *gasal* dan $m = 2k+3$ adalah $pd(B_{C_r,m}) = 3+k$.

Kasus 6. Untuk r *genap* $m = 2k+4$, akan dibuktikan $pd(G) = 3+k$. Untuk menentukan batas atas dimensi partisi pilih $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{3+k}\}$, dimana $S_1 = \{v_{c_1}, v_{i,j}, v_{2,1};\ 1 \leq j \leq r-3\}$, $S_2 = \{v_{c_2}, v_{1,r-2}, v_{m-1,r-2}, v_{m,j};\ 2 \leq j \leq r-2\}$, $S_3 = \{v_{2,j}; 2 \leq j \leq r-2, v_{3,j};\ 1 \leq j \leq r-3, v_{4,1}\}$, $S_4 = \{v_{3,r-2}, v_{4,j}\ 2 \leq j \leq r-2, v_{5,j}\ 1 \leq j \leq r-3, v_{6,1}\}$, $S_5 = \{v_{5,r-2}, v_{6,j}\ 2 \leq j \leq$

$r-2, v_{7,j}\ 1 \le j \le r-3, v_{8,1}\}$, $S_6 = \{v_{7,r-2}, v_{8,j}\ 2 \le j \le r-2, v_{9,j}\ 1 \le j \le r-3, v_{10,1}\}$ ... $S_{3+k} = \{v_{m-3,r-2}, v_{m-2,j}\ 2 \le j \le r-2, v_{m-1,j}\ 1 \le j \le r-3, v_{m,1}\}$, maka representasi setiap simpul $v \in V(G)$ terhadap Π adalah

$$r(v_{c1}|\Pi) = (0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+2})$$

$$r(v_{c2}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{k+1})$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+2});\ 1 \le j \le \frac{r}{2} - 2$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+1});\ j = \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (0, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ \frac{r}{2} \le j \le r-3$$

$$r(v_{1,j}|\Pi) = (1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ j = r-2$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (0, j+1, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k});\ j = 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j+1, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k});\ 2 \le j \le \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (j-1, j-1, 0, \underbrace{j, ..., j}_{k});\ j = \frac{r}{2}$$

$$r(v_{2,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k});\ \frac{r}{2} + 1 \le j \le r-2$$

Representasi simpul untuk $3 \le i \le m-2$; i *gasal* adalah

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-1}{2}}, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+1-\frac{i-1}{2}});\ 1 \le j \le \frac{r}{2} - 2$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-1}{2}}, 0, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-\frac{i-1}{2}});\ j = \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-3}{2}}, 0, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ \frac{r}{2} \le j \le r-3$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-3}{2}}, r-j-1, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-1-\frac{i-3}{2}});\ j = r-2$$

Representasi simpul untuk $3 \leq i \leq m-1$; *i genap* adalah

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-2}{2}}, 0, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-\frac{i-2}{2}});\ j = 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-2}{2}}, j-1, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k-\frac{i-2}{2}});\ 2 \leq j \leq \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (j, j-1, \underbrace{j, ..., j}_{\frac{i-4}{2}}, j-1, 0, \underbrace{j, ..., j}_{k-1-\frac{i-4}{2}});\ j = \frac{r}{2}$$

$$r(v_{i,j}|\Pi) = (r-j, r-j-1, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{\frac{i-2}{2}}, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k-\frac{i-2}{2}});\ \frac{r}{2}+1 \leq j \leq r-2$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{\frac{i-1}{2}}, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k+1-\frac{i-1}{2}});\ 1 \leq j\frac{r}{2} - 2$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (j, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, 0);\ j = \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (r-j, r-j-2, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k}, 0);\ \frac{r}{2} \leq j \leq r-3$$

$$r(v_{m-1,j}|\Pi) = (r-j, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k}, r-j-1);\ j = r-2$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (j, j, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, 0);\ j = 1$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (j, 0, \underbrace{j+1, ..., j+1}_{k}, j-1);\ 2 \leq j \leq \frac{r}{2} - 1$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (j, 0, \underbrace{j, ..., j}_{k}, j-1);\ j = \frac{r}{2}$$

$$r(v_{m,j}|\Pi) = (r-j, 0, \underbrace{r-j, ..., r-j}_{k+1});\ \frac{r}{2} + 1 \leq j \leq r-2$$

Jadi Π adalah partisi pembeda dari $B_{C_r,m}$ *r genap* $m = 2k+4$ sebab $r(v|\Pi)$ berbeda untuk setiap $v \in V(B_{C_r,m})$. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi graf $B_{C_r,m}$ adalah $pd(G) \leq k+3$. Untuk menentukan batas bawah ambil partisi pembeda Π dengan kardinalitas lebih kecil dari $3+k$, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ maka terdapat representasi yang sama simpul $v \in V(G)$ terhadap Π yaitu $r(v_{m-2,r-2}|\Pi) = r(v_{m-3,r-2}|\Pi) = (2, 1, \underbrace{2, ..., 2}_{k-1}, 0)$, sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{2+k}\}$ tidak partisi pembeda dari $V(G)$ maka $pd(G) \geq k+3$. Diperoleh dimensi partisi $B_{C_r,m}$ *r genap* dan $m = 2k+4$ adalah $pd(B_{C_r,m}) = 3+k$.

Dari Kasus 1 sampai dengan Kasus 6, maka Teorema 4.2. terbukti.

4.3 Hubungan Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi Graf Cycle Books

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada subbab 4.1 sampai 4.2, dapat disimpulkan hubungan antara dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf cycle books $B_{C_r,m}$. Secara umum, terdapat hubungan antara dimensi metrik dan dimensi partisi sebagaimana dapat ditunjukkan dengan mengambil Proposisi 4.1.1, Proposisi 4.1.2, Proposisi 4.2.1 ,Proposisi 4.2.2, Proposisi 4.2.3 Teorema 4.1 dan Teorema 4.2. Relasi Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi Graf Cycle Books untuk kasus khusus adalah sebagai berikut.

a. Untuk $r = 3$ dan $m = 3$ didapat $pd(B_{C_r,m}) = dim(B_{C_r,m})$.

b. Untuk $r = 3$ dan $m \geq 4$ didapat $pd(B_{C_r,m}) = dim(B_{C_r,m}) = m$.

c. Untuk $r \geq 5$,r gasal didapat $pd(B_{C_r,m}) = dim(B_{C_r,m}) + 1$, untuk $m = 2$; $pd(B_{C_r,m}) = dim(B_{C_r,m})$ untuk $m = 3, 5$; dan $pd(B_{C_r,m}) < dim(B_{C_r,m}) + 1$, untuk m selainnya.

d. Untuk $r \geq 5$,r genap didapat $pd(B_{C_r,m}) = dim(B_{C_r,m}) + 1$, untuk $m = 2$; $pd(B_{C_r,m}) = dim(B_{C_r,m})$ untuk $m = 3, 4$; dan $pd(B_{C_r,m}) < dim(B_{C_r,m}) + 1$, untuk m selainnya.

Secara umum untuk Graf cycle books terlihat bahwa nilai dimensi partisi lebih kecil dari nilai dimensi metrik. Sehingga didapat bahwa $pd(B_{C_r,m}) \leq dim(B_{C_r,m})$. Dalam Teorema 2.2 merujuk dari Chartrand, Salehi dan Zhang (2000) yang menyatakan bahwa terdapat hubungan antara dimensi metrik dan dimensi partisi graf terhubung G yaitu $pd(G) \leq dim(G) + 1$.

BAB 5
SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Dari hasil pembahasan dimensi metrik dan dimensi partisi graf cycle books $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 3$, $m \geq 2$; $r, m \in Z^+$, diperoleh simpulan sebagai berikut:
Dimensi metrik graf cycle books $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah

$$dim(B_{C_r,m}) = \begin{cases} m-1, & \text{jika } r = 4 \text{ dan } m \geq 5 \\ & \text{jika } r \geq 5 \text{ gasal dan } m \geq 4 \\ m, & \text{r,m selainnya} \end{cases}$$

Dimensi partisi graf cycle books $B_{C_r,m}$ untuk $r \geq 3$, $m \geq 2$ adalah

$$pd(G) = \begin{cases} 3, & \text{jika } r \geq 3 \text{ dan } m = 2 \\ m, & \text{jika } r = 3 \text{ dan } m \geq 3 \\ & \text{jika } r = 4 \text{ dan } m = 3, 4 \\ & \text{jika } r = 4 \text{ dan } m = 2k + 4 \\ 3 + k, & \text{jika } r \geq 4 \text{ dan } m = 2k + 3 \\ & \text{jika } r \geq 5 \text{ dan } m = 2k + 4, \quad k = 1, 2, 3, 4, ... \end{cases}$$

5.2 Saran

Graf cycle books merupakan graf yang menarik untuk menjadi kajian dalam teori graf, karena merupakan perumuman dari graf buku B_m yang telah diteliti oleh beberapa peneliti pada pelitian sebelumnya. Graf buku B_m merupakan graf yang terdiri dari m salinan cycle empat (C_4) dengan *common path* P_2. Sejauh ini penelitian pada Graf cycle books baru sebatas dimensi metrik dan dimensi partisi.

Dimensi metrik dan dimensi partisi adalah dua dari beberapa properti dari graf. Dalam penelitian ini telah ditentukan dimensi metrik dan dimensi partisi graf cycle books $B_{C_r,m}$.

Pada penelitian selanjutnya dapat diteliti masalah yang lain dari graf cycle books $B_{C_r,m}$ seperti dimensi metrik lokal, dimensi partisi lokal, bilangan dominasi pada graf cycle books $B_{C_r,m}$.

DAFTAR PUSTAKA

Amrullah, Baskoro, E.T., Simanjuntak, R. dan Uttunggadewa, S. (2015), The Partition Dimension of a Subdivision of a Complete Graph, *Procedia Computer Science*, 74, 53-59.

Anderson, D.F., Badawi, A., (2008), The Total Graph of Commutative Ring, *Journal of Algebra*, 320,2706-2719.

Ayhan, A.K., Omar, A.K., (2010), Determination and Testing the Domination Numbers of Tadpole Graph, Book Graph and Staced Book Graph Using Matlab, *College of Basic Education Researchers Journal*, 10(1),491-501.

Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P. (2000), The Partition Dimension of a Graph, *Aequationes Math*, 59, 45-54.

Grigorious, C., Stephen, S., Rajan, B., Miller, M. dan William, A. (2014), On the partition dimension of a class of circulant graphs, *Information Processing Letters*, 114, 7, 353-356.

Haryeni, D.O., dan Baskoro, E.T (2015), Partition Dimension of Some Classes of Homogenous Disconnected Graphs, *Procedia Computer Science*,74, 73-78.

Khuller, S., dan Rahavachari, A., (1996), *Resenfelt, Landmark in Graph, Discret. Appl. Math*,Vol.70, pp.217-229.

Permana, A.B., dan Darmaji (2012), Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu, *Jurnal Teknik Pomits*,Vol.1,No.1, 1-4.

Santoso, J., Simanihuruk, M., (2016), *Edge-Magic Total Labeling pada Graf 5-Cycle Books*, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Bengkulu.

Prasetyo, E., Susilowati, L., (2013), *Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi Graf Buku Bertumpuk* $B_{3,3}$, Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya.

Yero, I.G., Kuziak, D., dan Rodrguez-Velazquez, J.A. (2011), On the metric dimension of corona product graphs, *Computers and Mathematics with Applications*, 61(9),2793-2798.

BIODATA PENULIS

Penulis bernama Jaya Santoso Pandiangan, lahir di Samosir, 10 April 1993, merupakan anak ketiga dari empat bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di SMA NEGERI 1 Pangururan, Samosir, Sumatera Utara. Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi ke Jurusan Matematika Universitas Bengkulu (UNIB) pada tahun 2012-2016, dengan Tugas Akhir bidang Aljabar (Teori Graf). Kemudian penulis melanjutkan S2 Jurusan Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) pada tahun 2016 dengan Tesis pada bidang Aljabar Teori Graf dan lulus pada tahun 2018. Untuk kritik dan saran yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui e-mail: pandiangan529@gmail.com