

26 752 / H / 06



TESIS

RANCANGAN DAN ANALISIS PERCOBAAN FAKTORIAL FRAKSIONAL SPLIT-PLOT DENGAN DUA LEVEL

Oleh :

NIKEN ARIESTANTI
NRP. 1304 201 016

RTSE
519.535 4
Ari
r-1
2006



PERPUSTAKAAN ITS	
Tgl. Terima	6-9-06
Terima Dari	H
No. Agenda Prp.	776531

**PROGRAM STUDI MAGISTER
JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2006**

**RANCANGAN DAN ANALISIS PERCOBAAN FAKTORIAL
FRAKSIONAL SPLIT-PLOT DENGAN DUA LEVEL**

TESIS

**Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)**

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

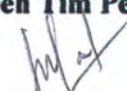
NIKEN ARIESTANTI

NRP. 1304 201 016

Tanggal Ujian : 31 Juli 2006

Periode Wisuda : September 2006

Disetujui Oleh Tim Penguji Tesis :


1. Prof. Dra. Susanti Linuwih, M.Stats., Ph.D. (Pembimbing I)
NIP. 130 368 808


2. Dr. Drs. Purnadi, M.Sc. (Pembimbing II)
NIP. 131 652 051


3. Prof. Drs. Nur Iriawan, M.Ikom, Ph.D. (Penguji)
NIP. 131 782 011


4. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, MS. (Penguji)
NIP. 131 843 382


5. Dr. Drs. Sonny Sunarvo, M.Si. (Penguji)
NIP. 131 843 380


6. Ir. Mutiah Salamah, M.Kes (Penguji)
NIP. 131 283 368

Direktur Program Pascasarjana


Prof. Ir. Happy Ratna S., M.Sc., Ph.D.

NIP. 130 541 829





ABSTRAK

RANCANGAN DAN ANALISIS PERCOBAAN FAKTORIAL FRAKSIONAL SPLIT-PLOT DENGAN DUA LEVEL

Oleh : Niken Ariestanti
Dosen Pembimbing : 1. Prof. Dra. Susanti Linuwih, M.Stats., Ph.D.
2. Dr. Drs. Purhadi, M.Sc.

ABSTRAK

Pelaksanaan suatu percobaan dengan pengacakan secara penuh, kadangkala menjadi tidak efisien. Rancangan faktorial fraksional yang memiliki batasan dalam pengacakan, dikatakan memiliki struktur split-plot dan disebut dengan rancangan faktorial fraksional split-plot. Berdasarkan kriteria varian prediksi variabel respon, dapat diperoleh rancangan yang memiliki kontras-kontras ortogonal pada matriks rancangan. Dengan demikian estimasi parameter model rancangan dapat dilakukan dengan lebih mudah. Kriteria lain yang biasa digunakan untuk memperoleh rancangan optimal adalah resolusi maksimum dan aberasi minimum. Berdasarkan kriteria ini akan diperoleh rancangan yang dapat memberikan informasi lebih banyak mengenai efek faktor secara individu beserta efek-efek interaksi tingkat rendah. Penelitian ini bertujuan untuk membuat rancangan faktorial fraksional split-plot dengan dua level berdasarkan kriteria aberasi minimum dan varian prediksi variabel respon minimum; memperoleh penduga parameter model rancangan beserta struktur tabel *ANOVA*; menerapkan rancangan dan analisa pada kasus untuk mencari faktor-faktor yang mempengaruhi nilai korelasi antara citra yang dihasilkan oleh sistem pengenalan pola dengan citra yang diharapkan. Dari penelitian didapatkan bahwa untuk membuat rancangan dari suatu percobaan faktorial fraksional split-plot yang optimal, berdasarkan kriteria varian prediksi variabel respon minimum, dan aberasi minimum, maka haruslah dipilih *generator* sedemikian hingga rancangan memiliki resolusi minimum III. Penduga parameter model rancangan dicari dengan menggunakan metode *maximum likelihood*, dimana penduga efek utama faktor adalah $\hat{\theta}_a = \bar{y}_a - \bar{y}$; penduga efek interaksi dua faktor adalah $(\hat{\theta}\phi)_{ab} = \bar{y}_{ab} - \bar{y}_a - \bar{y}_b + \bar{y}$; penduga efek interaksi tiga faktor adalah $(\hat{\theta}\phi\omega)_{abc} = \bar{y}_{abc} - \bar{y}_{ab} - \bar{y}_{bc} - \bar{y}_{ac} + \bar{y}_a + \bar{y}_b + \bar{y}_c - \bar{y}$; dst. Tabel *ANOVA* yang dihasilkan terbagi menjadi pengujian untuk faktor-faktor WP dan pengujian untuk faktor-faktor SP, dimana untuk pengujian faktor WP digunakan statistik uji $F_{\text{kontras WP}} = \frac{MS(\text{kontras WP})}{MSE_{WP}}$, sedangkan untuk pengujian faktor SP statistik ujinya adalah $F_{\text{kontras SP}} = \frac{MS(\text{kontras SP})}{MSE_{SP}}$. Faktor-faktor yang berpengaruh adalah *ambient light intensity*, *illumination level*, dan *corner orientation*.

Kata kunci: Rancangan faktorial fraksional split-plot, Varian prediksi variabel respon, Resolusi, Aberasi

DESIGN AND ANALYSIS OF FRACTIONAL FACTORIAL SPLIT-PLOT EXPERIMENT WITH TWO LEVELS

By : Niken Ariestanti
Under the Supervision : 1. Prof. Dra. Susanti L., M.Stats., Ph.D.
2. Dr. Drs. Purhadi, M.Sc.

ABSTRACT

Sometimes it is inefficient to run the experiment in completely randomized order. Fractional factorial design have restriction on randomization, it is said to have split-plot structure and it is called fractional factorial split-plot design. We can arrange the design to have orthogonal contrasts in design matrix to simplified the estimation of design parameters, using minimum variance of predicted response criteria. Another criteria that could be used are maximum resolution and minimum aberration. Using these criteria, ones can get more information about factors individual effects and their low level interactions effects. The goals of this research are to find the way of building fractional factorial split-plot design base on criteria minimum variance of predicted response and minimum aberration; to estimate parameters of design model and to build ANOVA table; to illustrate the design and analysis on case to find factors that have significant effects on measure of correlation between an image provided by the pattern recognition system and the expected image. In this research we conclude that to build optimal designs of fractional factorial split-plot experiment base on minimum variance of predicted response and minimum aberration criteria, ones should choose generator that make the design having resolution greater than or same as III. Using maximum likelihood method we can get the estimators of model parameters which are $\hat{\theta}_a = \bar{y}_a - \bar{y}$ for estimator of main effect; $(\hat{\theta}\phi)_{ab} = \bar{y}_{ab} - \bar{y}_a - \bar{y}_b + \bar{y}$ for estimator of two factors interaction effect; $(\hat{\theta}\phi\omega)_{abc} = \bar{y}_{abc} - \bar{y}_{ab} - \bar{y}_{bc} - \bar{y}_{ac} + \bar{y}_a + \bar{y}_b + \bar{y}_c - \bar{y}$ for estimator of three factors interaction effect, etc. ANOVA table consist of WP design analysis and SP design analysis. Test statistic use to test WP kontras is $F_{\text{kontras WP}} = \frac{MS(\text{kontras WP})}{MSE_{WP}}$ and Test statistic use to test SP kontras is $F_{\text{kontras SP}} = \frac{MS(\text{kontras SP})}{MSE_{SP}}$. Factors that have significant effects are ambient light intensity, illumination level, and corner orientation.

Key Words: Fractional factorial split-plot design, Variance of predicted response, Resolution, Aberration



KATA PENGANTAR

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas segala berkah dan anugerah-Nya, sehingga penulis diberikan kekuatan dan kemudahan untuk menyelesaikan tesis dengan judul : **“Rancangan dan Analisis Percobaan Faktorial Fraksional Split-Plot dengan Dua Level”**. Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar Magister Sains (M.Si) pada program Studi Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Terselesainya tesis ini, tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak, untuk itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

1. Ibu Prof. Dra. Susanti Linuwih, M.Stats., Ph.D., selaku pembimbing pertama atas arahan, perhatian dan pengertiannya selama pengerjaan dan penyelesaian tesis ini.
2. Bapak Dr. Drs. Puhadi, M.Sc., selaku pembimbing kedua atas arahan, perhatian dan kesabarannya sehingga tesis ini dapat diselesaikan dengan hasil seoptimal mungkin.
3. Bapak Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, MS, selaku Koordinator Program Studi Magister Statistika atas arahan, kesabaran, dan motivasi yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan masa studinya tepat waktu.
4. Segenap Dosen dan Karyawan di Jurusan Statistika atas dukungannya.
5. Kedua orang tua, eyang, dan adik-adikku tercinta atas kasih sayang dan doa yang tak pernah terputus.
6. Suamiku Hendra dan anakku yang manis Anisa atas segala yang kalian berikan.

DAFTAR ISI

	Halaman
LEMBAR PENGESAHAN	i
ABSTRAK	ii
ABSTRACT	iii
KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI	vi
DAFTAR TABEL	viii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR LAMPIRAN	x
BAB I. PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	4
1.3. Tujuan Penelitian	5
1.4. Manfaat Penelitian	5
1.5. Batasan Masalah	6
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1. Rancangan Faktorial 2^k dan Rancangan Faktorial Fraksional 2^{k-p}	7
2.2. Rancangan Split-Plot	11
2.3. Rancangan Faktorial Fraksional Split-Plot $2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)}$	15
2.5. Rancangan Varian Prediksi Variabel Respon Minimum	19
BAB III. METODOLOGI PENELITIAN	22
3.1. Bahan dan Alat	22
3.2. Metode Penelitian	22

BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN	27
4.1. Rancangan Percobaan Faktorial Fraksional Split-Plot dengan Dua Level	27
4.2. Penduga Parameter Model untuk Rancangan FFSP	49
4.3. Faktor-faktor yang Mempengaruhi Proses Pengenalan Optik yang digunakan untuk Mengetahui Posisi Wafer di bawah Laser Perbaikan	67
BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN	86
5.1. Kesimpulan	86
5.2. Saran	87
DAFTAR PUSTAKA	88
LAMPIRAN	90

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
2.1	Rancangan Faktorial 2^3	7
2.2	Efek yang diestimasi padarancangan faktorial 2^k	8
2.3	Pengacakan Rancangan Faktorial 3×4	12
2.4	Pengacakan Rancangan Split-plot	12
2.5	Tabel <i>ANOVA</i> Rancangan Split-plot	14
4.1	Rancangan FFSP $2^{(2/+4)-(0+2)}$	32
4.2	Rancangan FFSP yang dapat dibuat dari Rancangan FF 2^{k-p}	37
4.3	<i>Defining Relation</i> dan Resolusi dari berbagai rancangan FFSP 2.3.0.1	39
4.4	<i>Defining Relation</i> dan Resolusi dari berbagai rancangan FFSP 2.4.0.2	40
4.5	Rancangan MA FFSP 2.4.0.2 serta Alias untuk Efek Utama dan Efek Interaksi Dua Faktor	43
4.6	Tabel Rancangan MA FFSP nonisomorfis	44
4.7	Rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$	49
4.8	Rancangan Faktorial dengan Dua Faktor WP	58
4.9	Tabel <i>ANOVA</i> Rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$	64
4.10.	Tabel <i>ANOVA</i> Studi Kasus Lewis dkk (1997) dalam Bingham dan Sitter (2003)	70



DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
4.1	Diagram Alur untuk mendapatkan k_1 , k_2 , p_1 , dan p_2 dari k dan p	35
4.2	<i>Probability Plot of Error</i> WP	72
4.3	<i>Autocorrelation Function of Error</i> WP	73
4.4	Uji kesamaan varian <i>Error</i> WP	74
4.5	<i>Probability Plot of Error</i> SP pada blok (b-,d-)	75
4.6	<i>Probability Plot of Error</i> SP pada blok (b-,d+)	76
4.7	<i>Probability Plot of Error</i> SP pada blok (b+,d-)	76
4.8	<i>Probability Plot of Error</i> SP pada blok (b+,d+)	77
4.9	<i>Autocorrelation Function of Error</i> SP pada blok (b-,d-)	78
4.10	<i>Autocorrelation Function of Error</i> SP pada blok (b-,d+)	78
4.11	<i>Autocorrelation Function of Error</i> SP pada blok (b+,d-)	79
4.12	<i>Autocorrelation Function of Error</i> SP pada blok (b+,d+)	79
4.13	Uji kesamaan varian <i>Error</i> SP pada blok (b-,d-)	80
4.14	Uji kesamaan varian <i>Error</i> SP pada blok (b-,d+)	81
4.15	Uji kesamaan varian <i>Error</i> SP pada blok (b+,d-)	81
4.16	Uji kesamaan varian <i>Error</i> SP pada blok (b+,d+)	82
4.17	Uji kesamaan varian <i>Error</i> WP dan <i>Error</i> SP pada blok (b-,d-)	83
4.18	Uji kesamaan varian <i>Error</i> WP dan <i>Error</i> SP pada blok (b-,d+)	83
4.19	Uji kesamaan varian <i>Error</i> WP dan <i>Error</i> SP pada blok (b+,d-)	84
4.20	Uji kesamaan varian <i>Error</i> WP dan <i>Error</i> SP pada blok (b+,d+)	84
4.21	Interaksi antara faktor-faktor B, D, dan P	85



BAB I
PENDAHULUAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Semakin ketatnya persaingan, mengakibatkan industri berlomba untuk meningkatkan kualitas produknya. Agar diperoleh keuntungan yang optimal, maka peningkatan kualitas produk diupayakan untuk dilaksanakan dengan menggunakan biaya produksi seminimal mungkin. Salah satu cara yang ditempuh adalah dengan melakukan pengawasan dan pengendalian pada saat proses produksi berjalan atau dikenal dengan istilah *online process control*. Diharapkan melalui pengawasan dan pengendalian tersebut, proses produksi menjadi stabil (mampu beroperasi dengan variabilitas yang kecil disekitar target atau dimensi karakteristik kualitas produk (Montgomery, 2001b)). Pada akhirnya proses yang stabil akan menghasilkan jumlah produk cacat sekecil mungkin. Cara lain yang pada saat ini mulai banyak ditempuh adalah mengkombinasikan pengawasan dan pengendalian proses (pada saat proses produksi berlangsung) dengan pengendalian proses sebelum produksi berjalan, yaitu ketika produk dan proses dirancang (*offline process control*). Tujuan dari pelaksanaan *offline process control* adalah untuk merancang kualitas ke dalam produk dengan cara menetapkan *setting* terbaik dari parameter-parameter produk dan proses. Melalui rancangan percobaan tujuan tersebut dapat dicapai (Mitra, 1993).

Pada tahap awal dalam pelaksanaan *offline process control*, dilakukan percobaan pendahuluan dengan melibatkan semua variabel proses (faktor) yang diduga dapat mempengaruhi karakteristik kualitas produk. Tujuan dari percobaan

pendahuluan adalah untuk mengidentifikasi faktor-faktor (sekaligus interaksi antar faktor) yang benar-benar mempengaruhi karakteristik kualitas produk, serta menentukan efek perlakuan terhadap karakteristik kualitas. Diharapkan dari percobaan pendahuluan ini akan diperoleh informasi awal, mengenai faktor-faktor apa saja yang akan digunakan dalam percobaan lanjutan, untuk menentukan *setting* terbaik dari *level-level* faktor, agar dicapai karakteristik kualitas produk yang optimal. Karena pada percobaan pendahuluan terjadi proses penyaringan dari banyak faktor menjadi beberapa faktor saja, maka percobaan pendahuluan juga dikenal dengan istilah percobaan penyaringan (*screening*).

Pada percobaan penyaringan, jumlah faktor yang dilibatkan biasanya sangat banyak, sehingga perlu dibuat suatu bentuk rancangan yang dapat memberikan informasi sebanyak-banyaknya, dengan jumlah *run* yang kecil. Rancangan yang biasanya digunakan adalah rancangan faktorial 2^k . Rancangan ini mempunyai jumlah *run* yang sedikit untuk melakukan percobaan faktorial dengan k faktor secara lengkap (Montgomery, 2001a). Akan tetapi jika dengan menggunakan rancangan faktorial 2^k , jumlah *run* juga masih terlalu banyak, maka dapat digunakan sebagian dari rancangan faktorial 2^k , yang disebut rancangan faktorial fraksional 2^{k-p} . Berbagai bentuk modifikasi dari rancangan faktorial fraksional 2^{k-p} dikembangkan agar dicapai jumlah *run* yang lebih kecil, sehingga percobaan penyaringan dapat dilaksanakan dengan lebih ekonomis (Kleijnen, 1975).

Secara umum dalam melakukan percobaan dengan menggunakan rancangan faktorial (termasuk rancangan faktorial fraksional 2^{k-p}), disyaratkan agar *run* percobaan diacak secara lengkap (*completely randomized*). Akan tetapi apabila pada suatu percobaan diperlukan biaya yang sangat mahal atau upaya yang sulit untuk

merubah nilai *level* dari satu atau beberapa faktor; atau karena adanya keterbatasan fisik dari proses atau sistem dimana percobaan akan dilakukan, maka percobaan dengan pengacakan lengkap tidak mungkin dilakukan. Pada kasus dimana sebagian faktor sulit untuk diubah nilai *level*-nya (disebut faktor *whole plot* / WP), sedang sebagian yang lain mudah diubah nilai *level*-nya (disebut faktor *sub plot* / SP), maka rancangan yang dapat digunakan adalah rancangan faktorial fraksional split-plot / FFSP (Bingham dan Sitter, 1999, 2001).

Pertanyaan yang biasanya timbul adalah rancangan apa yang harus dipilih dari sekian banyak rancangan FFSP yang dapat dibuat pada suatu kasus. Untuk memilih suatu rancangan FFSP, peneliti harus menyeimbangkan antara kebutuhan untuk memperoleh informasi sebanyak-banyaknya mengenai proses yang diamati dengan keinginan untuk menekan biaya percobaan (Bingham dan Sitter, 2001). Untuk itu dibutuhkan suatu rancangan FFSP yang optimal. Salah satu kriteria untuk memilih suatu rancangan yang optimal, adalah rancangan dengan resolusi tertinggi. Apabila pada suatu kasus dapat dibentuk beberapa rancangan dengan resolusi optimal, maka tidak dapat langsung disimpulkan bahwa rancangan-rancangan tersebut sama baiknya. Beberapa rancangan dengan resolusi yang sama, belum tentu memiliki *word length patterns* / WLP yang sama. Sehingga rancangan yang optimal dapat dipilih dengan memperhatikan WLP-nya. Fries dan Hunter (1980), memberikan suatu ukuran sebagai pelengkap dalam pemilihan rancangan faktorial fraksional 2^{k-p} optimal selain resolusi, yaitu aberasi minimum / MA (didasarkan atas perhitungan WLP dari suatu rancangan). Kriteria ini oleh Huang, Chen, dan Voelkel (1998) serta Bingham dan Sitter (1999) dan Bingham, Schoen, dan Sitter (2004), dikembangkan untuk mendapatkan rancangan MA FFSP.

Kriteria lain yang dapat digunakan untuk membuat rancangan FFSP adalah varian prediksi variabel respon minimum. Dengan menggunakan kriteria ini maka akan diperoleh rancangan FFSP yang mampu menduga parameter-parameter model yang akan digunakan untuk memprediksi nilai variabel respon pada daerah percobaan yang telah ditentukan dengan varian minimum (Khuri dan Cornell, 1996).

Pada penelitian ini akan dibahas mengenai metode untuk merancang FFSP berdasarkan kriteria varian prediksi variabel respon minimum dan aberasi minimum. Selain itu akan dilakukan pendugaan terhadap parameter-parameter model untuk rancangan FFSP, serta penyusunan tabel *ANOVA* berdasarkan hasil pendugaan parameter. Penerapan rancangan pada kasus di industri semikonduktor, juga akan dilakukan untuk menunjukkan proses penentuan rancangan faktorial fraksional split-plot dan analisa data hasil percobaan.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan rancangan faktorial fraksional split-plot dengan dua *level* berdasarkan kriteria varian prediksi variabel respon minimum dan aberasi minimum ?
2. Bagaimana bentuk penduga dari model rancangan faktorial fraksional split-plot dengan dua *level*, serta bagaimana struktur tabel *ANOVA* dari model rancangan tersebut ?
3. Faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi nilai korelasi antara citra yang dihasilkan oleh sistem pengenalan pola dengan citra yang diharapkan, pada

percobaan di industri semikonduktor, untuk mempelajari kemampuan sistem dalam mengenali posisi wafer yang diletakkan di bawah laser perbaikan ?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka ditetapkan tujuan dari penelitian sebagai berikut :

1. Mendapatkan rancangan faktorial fraksional split-plot dengan dua *level* berdasarkan kriteria varian prediksi variabel respon minimum dan aberasi minimum.
2. Mendapatkan penduga dari model rancangan faktorial fraksional split-plot dengan dua *level* serta mendapatkan struktur tabel ANOVA dari model rancangan tersebut.
3. Mendapatkan faktor-faktor yang mempengaruhi nilai korelasi antara citra yang dihasilkan oleh sistem pengenalan pola dengan citra yang diharapkan pada percobaan di industri semikonduktor, untuk mempelajari kemampuan sistem dalam mengenali posisi wafer yang diletakkan di bawah laser perbaikan.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah :

1. Bagi mahasiswa Statistika, dapat mengembangkan wawasan khususnya yang berkaitan dengan rancangan percobaan faktorial fraksional split-plot dengan dua *level*, beserta analisa data dari hasil observasi dengan menggunakan tabel *ANOVA*.



BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Rancangan Faktorial 2^k dan Rancangan Faktorial Fraksional 2^{k-p}

Box dan Hunter (1961) menyatakan bahwa rancangan faktorial 2^k membutuhkan semua kombinasi dua *level* dari masing-masing k faktor. Jika suatu faktor adalah variabel kontinu, maka dua *level* adalah *level* rendah dan *level* tinggi dari variabel tersebut. Jika suatu faktor adalah variabel kualitatif, maka dua *level* berhubungan dengan dua tipe atau kategori dari variabel. *Level* “rendah” biasa dilambangkan dengan “-“ atau “-1”, sedangkan *level* “tinggi” dilambangkan dengan “+” atau “1”. Misal diberikan rancangan faktorial 2^3 , maka matriks rancangan **D** beserta matriks variabel independen **X** adalah sebagai berikut :

Tabel 2.1. Rancangan Faktorial 2^3

Perlakuan	Matriks Rancangan			Matriks Variabel Independen							Respon	
	D			X								
	A	B	C	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	y
(1)	-	-	-	+	-	-	-	+	+	+	-	y_1
a	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	y_2
b	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	y_3
ab	+	+	-	+	+	+	-	+	-	-	-	y_4
c	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	y_5
ac	+	-	+	+	+	-	+	-	+	-	-	y_6
bc	-	+	+	+	-	+	+	-	-	+	-	y_7
abc	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	y_8

Kolom-kolom pada matriks variabel independen disebut dengan kontras.

Dengan asumsi bahwa antar pengamatan independen dan memiliki varian yang identik, maka rancangan faktorial 2^k dapat memberikan hasil estimasi dengan varian minimum independen dari *grand mean* dan sebanyak $2^k - 1$ efek sebagai berikut :

Tabel 2.2. Efek yang diestimasi pada rancangan faktorial 2^k

Efek yang diestimasi	Banyaknya
Efek utama	k
Efek interaksi dua faktor	$\frac{k(k-1)}{2}$
Efek interaksi tiga faktor	$\frac{k(k-1)(k-2)}{2 \cdot 3}$
⋮	⋮
Efek interaksi h faktor	$\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-h-1)}{h!}$
Efek interaksi k faktor	1
Total	$2^k - 1$

Secara umum penduga efek-efek di atas diperoleh dari (Montgomery, 2001a):

$$\bar{y}_+ - \bar{y}_- \tag{2.1}$$

dimana tanda “+” dan “-“ mengacu pada tanda serupa dalam kontras yang bersesuaian. Sebagai contoh penduga efek faktor A dengan menggunakan rancangan pada Tabel 2.1 adalah :

$$\hat{A} = \frac{(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)}{4} - \frac{(y_1 + y_3 + y_5 + y_7)}{4}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.1) akan diperoleh 2^k hasil estimasi dari 2^k run dan apabila k sangat besar maka akan ada banyak sekali efek yang harus diduga. Pada kondisi yang sesungguhnya efek interaksi tingkat tinggi seringkali diabaikan (tidak dicari penduganya). Hal ini dapat terjadi karena jika dilakukan percobaan dengan rancangan faktorial 2^k , maka diharapkan respon yang dihasilkan semirip mungkin.

Jika diinginkan untuk tidak mengestimasi efek interaksi tingkat tinggi, maka *run* percobaan dapat dikurangi atau dengan kata lain percobaan dilakukan sebagian saja. Rancangan percobaan yang demikian disebut rancangan faktorial fraksional 2^{k-p} , dimana k adalah banyaknya faktor, dan p adalah elemen fraksional. Suatu rancangan faktorial fraksional 2^k dengan jumlah *run* sebanyak 2^{k-p} , disebut $1/2^p$ fraction dari rancangan 2^k (Montgomery, 2001a).

Rancangan faktorial fraksional 2^{k-p} , membutuhkan p generator yang saling independen. *Defining relation* dari suatu rancangan terdiri atas p buah generator dan $2^p - p - 1$ interaksi. Pemilihan p generator dari rancangan faktorial fraksional 2^{k-p} , dilakukan sedemikian hingga diperoleh kemungkinan terbaik dari hubungan *alias* (perlu diperhatikan agar efek yang dianggap penting tidak saling ber-*alias*). Kriteria yang digunakan adalah memilih generator sedemikian hingga rancangan 2^{k-p} memiliki kemungkinan resolusi tertinggi (Montgomery, 2001a). Resolusi dari rancangan faktorial fraksional dengan dua level adalah panjang *word* terpendek pada *defining relation* (Fries dan Hunter, 1980). Rancangan dengan resolusi tertinggi merupakan rancangan yang optimal jika dipandang dari segi banyaknya informasi mengenai efek utama dan efek interaksi tingkat rendah yang dapat diperoleh.

Rancangan faktorial fraksional dengan resolusi lebih tinggi, secara umum dikatakan lebih baik dibandingkan dengan rancangan resolusi lebih rendah, sebab rancangan dengan resolusi yang tinggi dapat memberikan informasi yang lebih banyak, mengenai efek utama dan efek interaksi tingkat rendah. Akan tetapi rancangan dengan resolusi yang sama belum tentu memiliki *word length pattern* yang sama, akibatnya kedua rancangan tidak sama performansinya. *Word length patterns* (WLP) dari suatu rancangan D didefinisikan sebagai

$W(D) = \{A_1(D), A_2(D), \dots, A_k(D)\}$, dimana $A_i(D)$ adalah banyaknya *word* pada *defining relation* rancangan D , yang hurufnya ada sebanyak i (Huang dkk, 1998).

Misalkan akan dibuat rancangan faktorial fraksional 2^{5-2} dengan generator $D = AB$ dan $E = AC$. *Defining relation* dari rancangan tersebut adalah :

$$I = ABD = ACE = BCDE$$

Panjang *word* terpendek pada *defining relation* adalah 3 huruf, sehingga dapat dikatakan bahwa rancangan ini memiliki resolusi III. WLP dari rancangan ini ditentukan dengan cara menghitung banyaknya *word* dengan panjang tiga dan banyaknya *word* dengan panjang empat yaitu sebanyak 2 dan 1 *word*. Dengan demikian WLP dari rancangan tersebut adalah $W(D) = \{0, 0, 2, 1, 0\}$.

Pada suatu kasus dimana dapat dibentuk beberapa rancangan faktorial fraksional 2^{k-p} dengan resolusi optimal yang sama, untuk menentukan rancangan yang terbaik dapat digunakan kriteria aberasi minimum (MA) yang didasarkan atas WLP rancangan; diperkenalkan oleh Fries dan Hunter (1980). Rancangan MA adalah rancangan yang meminimumkan banyaknya *word* dengan panjang minimum pada *defining relation*. Jika dua rancangan akan dibandingkan dengan menggunakan kriteria resolusi, maka dari masing-masing rancangan dihitung panjang *word* dari *word* terpendek yang ada pada *defining relation*. Apabila kedua rancangan memiliki panjang *word* yang sama maka kedua rancangan dikatakan *equivalent*. Akan tetapi jika digunakan kriteria aberasi sebagai pembanding, pemeriksaan panjang *word* akan dilanjutkan dengan memperhatikan *word* terpendek berikutnya pada masing-masing *defining relation* sampai salah satu rancangan dapat dirankingkan lebih tinggi dari rancangan lainnya.

Percobaan yang dilaksanakan dengan menggunakan rancangan split-plot dijalankan dengan cara untuk setiap replikasi mula-mula dilakukan pengacakan terhadap WP *treatment*, kemudian dilakukan pengacakan terhadap SP *treatment* di dalam WP *treatment*. Jika dibandingkan hasil pengacakan pada Tabel 2.2 dan Tabel 2.3, maka dapat disimpulkan bahwa apabila terdapat satu atau lebih faktor yang “sulit” diubah nilai levelnya, maka dengan menggunakan rancangan split-plot akan diperoleh rancangan yang lebih efisien, karena faktor-faktor yang “sulit” tersebut, tidak perlu terlalu sering diubah nilai levelnya pada setiap *run* percobaan. Dalam kasus ini walaupun jumlah *run* percobaan tetap 36 akan tetapi pelaksanaan percobaan menjadi lebih efisien karena tidak diperlukan lagi 36 plot tanah, melainkan cukup dengan menggunakan $3 \times 3 = 9$ plot tanah saja.

Model dari rancangan split-plot untuk kasus di atas, adalah sebagai berikut :

$$y_{ijk} = \mu + \theta_i + \delta_{ij} + \gamma_k + (\theta\gamma)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad (2.2)$$

dimana $i = j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4$

Model (2.2) memiliki batasan $\sum_{i=1}^3 \theta_i = \sum_{k=1}^4 \gamma_k = \sum_{i=1}^3 (\theta\gamma)_{ik} = \sum_{k=1}^4 (\theta\gamma)_{ik} = 0$. Asumsi yang digunakan adalah δ dan ε merupakan variabel-variabel random yang saling bebas sedemikian hingga untuk semua i, j, k berlaku :

$$\delta_{ij} \sim N(0, \sigma_{WP}^2) \text{ dan } \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_{SP}^2)$$

Berdasarkan cara pengacakan *run* percobaan di atas, dapat diketahui bahwa rancangan split-plot menggabungkan dua rancangan yaitu rancangan untuk WP dan rancangan untuk SP. Rancangan WP adalah rancangan acak lengkap sedangkan rancangan SP adalah rancangan blok acak lengkap dengan WP *treatment* sebagai blok. Karena itulah faktor WP dan faktor SP akan dianalisis dengan cara yang

berbeda. Sebagaimana telah diketahui dalam rancangan blok acak lengkap, variasi data antar blok lebih besar dibandingkan dengan variasi data dalam suatu blok. Dalam rancangan split plot hal tersebut juga berlaku dan karena WP adalah blok maka $\sigma_{WP}^2 > \sigma_{SP}^2$. Untuk analisa data digunakan tabel ANOVA (Neter, Kunter, Nachtsheim, dan Wasserman, 1996) yang juga merupakan penggabungan dari dua macam analisa yang berbeda untuk rancangan acak lengkap dan rancangan blok acak lengkap, sebagai berikut :

Tabel 2.5. Tabel ANOVA rancangan split-plot

<i>Source of variation</i>	<i>df</i>	<i>Sum of Square</i>
A	$3 - 1 = 2$	$4 \cdot 3 \sum_{i=1}^3 (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$
Error WP	$3(3-1) = 6$	$4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2$
B	$4 - 1 = 3$	$3 \cdot 3 \sum_{k=1}^4 (\bar{y}_{.k.} - \bar{y}_{...})^2$
A × B	$(3-1)(4-1) = 6$	$3 \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^4 (\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.k.} + \bar{y}_{...})^2$
Error SP	$3(3-1)(4-1) = 18$	$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i.k} + \bar{y}_{.j.})^2$
Total	$3 \cdot 4 \cdot 3 - 1 = 35$	$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 (y_{ijk} - \bar{y})^2$

Secara umum dalam pembahasan mengenai rancangan FFSP prinsip-prinsip (pemilihan generator, model dari rancangan, serta analisis data) yang telah dijelaskan mengenai rancangan faktorial dan split-plot akan digunakan secara bersama-sama.



2.3. Rancangan Faktorial Fraksional Split-Plot $2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)}$

Pada saat melaksanakan percobaan faktorial fraksional dengan banyak faktor, terkadang tidak dimungkinkan untuk melakukan pengacakan lengkap pada urutan *run* percobaan. Ini merupakan situasi dimana rancangan faktorial fraksional split-plot (FFSP) dapat digunakan. Rancangan FFSP secara umum mengkombinasikan dua rancangan yang terpisah, satu untuk faktor-faktor *whole plot* (WP) dan satu untuk faktor-faktor *sub plot* (SP). Faktor WP adalah faktor yang apabila akan diubah nilai levelnya dari satu level ke level yang lain membutuhkan tenaga yang besar atau biaya yang mahal, sehingga diharapkan dalam merancang percobaan level dari faktor WP tidak terlalu sering berubah. Faktor SP adalah faktor yang “mudah” diubah nilai levelnya.

Matriks rancangan dari FFSP akan tampak sama dengan FF (faktorial fraksional), perbedaannya terletak pada struktur pengacakan dari rancangan (Bingham dan Sitter, 1999). Suatu rancangan FFSP dua *level* adalah rancangan split-plot, dimana faktor-faktor WP dirancang sebagai FF dengan p_1 elemen fraksional dan faktor-faktor SP dirancang sebagai FF dengan p_2 elemen fraksional. FFSP dua *level* dilambangkan dengan $2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)}$ (Huang dkk, 1998). Matriks kombinasi rancangan adalah 2^{k-p} rancangan FF, dimana $k = k_1 + k_2$ dan $p = p_1 + p_2$. Definisi dari $2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)}$ memiliki implikasi bahwa rancangan WP harus diatur sebagai FF $2^{k_1-p_1}$, akan tetapi rancangan SP tidak harus berupa FF $2^{k_2-p_2}$, melainkan rancangan SP harus memiliki p_2 *generator* fraksional yang dipilih dari interaksi antara beberapa faktor WP dan SP (Bingham dan Sitter, 1999).

Huang dkk (1998) menyatakan bahwa selama ini belum ada kriteria keoptimalan yang digunakan untuk membuat rancangan FFSP. Hanya saja telah lama diketahui bahwa dalam membuat rancangan, rancangan FFSP yang lebih baik akan diperoleh jika digunakan semua faktor SP dan beberapa faktor WP dalam menentukan *generator* (Kempthorne, 1952). Huang dkk (1998) menurunkan algoritma yang digunakan untuk menyusun tabel rancangan-rancangan MA FFSP yaitu dengan cara mendekomposisi rancangan MA FF menjadi rancangan MA FFSP. Metode yang digunakan membutuhkan spesifikasi dari *generator-generator* fraksional untuk MA FF. *Generator-generator* tersebut dikombinasikan untuk membentuk matriks pembangkit, yang kemudian akan didekomposisikan menjadi *generator-generator* dari rancangan FFSP. Bingham dan Sitter (1999) menyatakan bahwa kelemahan dari algoritma yang disusun oleh Huang dkk (1998) adalah tabel yang disusun tidak lengkap dan tidak semua rancangan MA FF dapat didekomposisikan menjadi rancangan FFSP untuk sembarang k_1, k_2, p_1 , dan p_2 .

Sama halnya dengan rancangan FF, kriteria MA mengacu pada WLP dari rancangan. Bingham dkk (2004) memberikan definisi WLP sebagai $W(D) = \{A_3(D), \dots, A_{k_1+k_2}(D)\}$, karena dianggap bahwa *word* dengan panjang 1 atau 2 mengacu pada rancangan yang tidak diinginkan. Misalkan terdapat rancangan FFSP $2^{(5+3)-(1+1)}$ dengan *defining relation* $I = ABCDE = ABPQR = CDEPQR$, maka rancangan tersebut memiliki $W(D) = \{0, 0, 2, 1, 0, 0\}$.

Kriteria MA untuk FF (Fries dan Hunter, 1980), oleh Huang dkk (1998) serta Bingham dan Sitter (1999), dan Bingham dkk (2004), dikembangkan untuk

mendapatkan desain MA FFSP dua *level*, dimana secara konsep dapat diringkaskan sebagai berikut:

Definisi 2.1 :

Seandainya D_1 dan D_2 adalah rancangan FFSP $2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)}$. Jika $A_i(D_1) = A_i(D_2)$ untuk $i = 3, \dots, r - 1$ dan $A_r(D_1) < A_r(D_2)$, dikatakan D_1 memiliki aberasi yang lebih kecil dibandingkan D_2 . Suatu rancangan dikatakan MA jika tidak ada rancangan lain yang memiliki aberasi lebih kecil darinya.

Bingham dan Sitter (1999) mengembangkan prosedur untuk mendapatkan tabel rancangan MA FFSP dua *level* yang *nonisomorphic*. Prosedur yang dihasilkan adalah merupakan penggabungan dari *search table approach* (Franklin dan Bailey, 1977 dan Franklin, 1985) dalam Bingham dan Sitter (1999), serta *sequential approach* (Chen dkk, 1993) dalam Bingham dan Sitter (1999), dengan modifikasi pada kasus FFSP. Tabel yang dihasilkan melengkapi tabel MA FFSP dari Huang dkk (1998).

Agar tabel yang dibuat tidak memuat daftar rancangan MA FFSP yang terlalu panjang, maka harus dipastikan bahwa rancangan-rancangan yang dimasukkan ke dalam tabel adalah rancangan-rancangan yang *nonisomorphic*. Misalkan terdapat dua rancangan FFSP $2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)}$, D_1 dan D_2 . Dua rancangan dikatakan sebagai *isomorphic* jika bisa diperoleh rancangan D_1 dari D_2 dengan cara memberikan label ulang pada faktor-faktor D_2 . Chen dkk (1993) dalam Bingham dan Sitter (1999) telah menunjukkan bahwa rancangan-rancangan *isomorphic* pada dasarnya merupakan rancangan yang sama, sehingga cukuplah apabila dalam tabel macam-macam rancangan FFSP, dimuat salah satu dari rancangan-rancangan *isomorphic* tersebut.

Model dari rancangan FFSP juga merupakan gabungan dari model untuk dua rancangan WP dan SP sebagai berikut (Bingham dan Sitter, 2001) :

$$y = f(\text{efek WP}) + g(\text{efek SP}) + \delta + \varepsilon \quad (2.3)$$

dimana $f(\cdot)$ dan $g(\cdot)$ adalah fungsi dari parameter-parameter rancangan untuk WP dan SP. Untuk rancangan fraksional parameter rancangan yang termuat dalam model adalah parameter untuk efek utama dan interaksi tingkat rendah. δ dan ε adalah *error* dari WP dan SP, merupakan variabel-variabel random yang saling bebas sedemikian hingga $\delta \sim N(0, \sigma_{WP}^2)$ dan $\varepsilon \sim N(0, \sigma_{SP}^2)$.

Model linier dari model (2.3) adalah (Letsinger, Myers, dan Lentner, 1996) :

$$y = X\beta + \delta + \varepsilon \quad (2.4)$$

dimana y adalah vektor nilai variabel respon, β adalah vektor koefisien model linier, X adalah matriks variabel independen, serta δ dan ε adalah vektor *error* WP dan SP.

Model (2.4) memiliki asumsi $\delta + \varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$, dimana

$$\mathbf{V} = \sigma_{WP}^2 \mathbf{J}_{2^{(k_1+k_2)-(n_1+n_2)}, M \times 2^{(k_1+k_2)-(n_1+n_2)}, M} + \sigma_{SP}^2 \mathbf{I}_{2^{(k_1+k_2)-(n_1+n_2)}, M \times 2^{(k_1+k_2)-(n_1+n_2)}, M};$$

\mathbf{J} adalah suatu matrik blok diagonal dengan elemen diagonal adalah matriks; $\mathbf{J}^*_{2^{(k_1-n_1)}, M \times 2^{(k_1-n_1)}, M}$; M adalah

banyaknya replikasi; dan $\mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix}$. Matriks identitas dalam \mathbf{J}^* berdimen-

si $M \times M$.

Struktur tabel ANOVA dari model rancangan faktorial fraksional split-plot ditentukan dengan memperhatikan :

1. Karena rancangan WP dijalankan sebagai rancangan acak lengkap, maka analisis varian sederhana dapat dilakukan terhadap rata-rata plot. Rancangan dengan replikasi M akan memiliki derajat bebas *error* WP $(M-1)2^{k_1-n_1}$. Rancangan SP

dipandang sebagai rancangan blok acak, dengan plot sebagai blok. Efek-efek yang diuji meliputi efek utama SP dan semua interaksi yang melibatkan faktor-faktor SP. Rancangan dengan replikasi M akan memiliki derajat bebas *error* SP $(M-1) \left[2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)} - 2^{k_1-p_1} \right]$ (Bingham dan Sitter, 2001).

2. Untuk menentukan statistik uji F , Bisgaard (2000) membuat beberapa aturan yang secara umum diringkas oleh Bingham dan Sitter (2001) sebagai berikut :
 - a. Efek utama dan interaksi yang hanya melibatkan faktor WP, dibandingkan dengan *error* WP.
 - b. Efek utama atau efek interaksi dari faktor SP yang ber-*alias* dengan efek utama faktor WP atau interaksi yang hanya melibatkan faktor WP, dibandingkan dengan *error* WP.
 - c. Efek utama faktor SP atau efek interaksi yang melibatkan paling tidak satu faktor SP, yang tidak ber-*alias* dengan efek utama faktor WP atau efek interaksi yang hanya melibatkan faktor WP, dibandingkan dengan *error* SP.

2.4. Rancangan Varian Prediksi Variabel Respon Minimum

Diberikan model dari rancangan orde pertama, dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (2.5)$$

dimana Y adalah vektor berukuran $n \times 1$ dari nilai pengamatan variabel respon,

$\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)^T$ adalah vektor berukuran $(k+1) \times 1$ dari parameter model yang

tidak diketahui, dan $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T$ adalah vektor berukuran $n \times 1$ dari *error*.

$X = [1, D]$, dimana 1 adalah vektor 1 berukuran $n \times 1$ dan D merupakan matriks

rancangan berukuran $n \times k$. Apabila model melibatkan interaksi antar faktor, maka kolom matriks \mathbf{D} akan bertambah, sehingga matriks \mathbf{D} berisi matriks rancangan dan interaksi antar faktor yang diasumsikan masuk ke dalam model. Model (2.5) memiliki asumsi $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$.

Misalkan $\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$ melambangkan penduga variabel respon pada titik $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ dalam wilayah percobaan R , dan \mathbf{b} adalah vektor penduga parameter model. Maka $\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$ dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = [1, \mathbf{x}^T] \mathbf{b} \quad (2.6)$$

Varian dari taksiran respon pada titik $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ dinyatakan sebagai :

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})] = [1, \mathbf{x}^T] [\text{Var}(\mathbf{b})] [1, \mathbf{x}^T]^T \quad (2.7)$$

Karena $\text{Var}(\mathbf{b}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \sigma^2$ dan $\mathbf{1}^T \mathbf{D} = \mathbf{0}^T$, maka persamaan (2.7) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})] &= [1, \mathbf{x}^T] \text{diag}\left[\frac{1}{n}, (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}\right] [1, \mathbf{x}^T]^T \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \mathbf{x}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{x} \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) menunjukkan hubungan antara varian taksiran respon dengan matriks rancangan. Rancangan yang memenuhi kriteria varian prediksi nilai variabel respon adalah rancangan yang meminimumkan $\mathbf{x}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{x}$ dalam daerah R . Agar dapat memenuhi kriteria tersebut, perlu diingat bahwa $0 \leq \mathbf{x}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{x} \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}\|$. $\|\cdot\|$ adalah norm Euclidean yang didefinisikan

sebagai $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{1/2}$ dan $\|(\mathbf{D}^T\mathbf{D})^{-1}\| = \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (d^{ij})^2 \right]^{1/2}$; dimana d^{ij} adalah elemen ke- ij dari $(\mathbf{D}^T\mathbf{D})^{-1}$. Berdasarkan keterangan di atas dapat disimpulkan bahwa untuk meminimumkan $\mathbf{x}^T (\mathbf{D}^T\mathbf{D})^{-1} \mathbf{x}$ untuk semua $\mathbf{x} \in R$, haruslah dipilih matriks rancangan \mathbf{D} sedemikian hingga $\|(\mathbf{D}^T\mathbf{D})^{-1}\|$ sekecil mungkin (Khuri dan Cornell, 1996).



BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Bahan dan Alat

Bahan dan alat yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Jurnal dan buku referensi yang terkait dengan permasalahan di atas.
2. Seperangkat komputer serta software Minitab 14 dan Microsoft Office Excel 2003.
3. Data dari studi kasus di industri semikonduktor oleh Lewis, Hutchens, dan Smith (1997) dalam Bingham dan Sitter (2003).

3.2. Metode Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian, maka disusun langkah-langkah penelitian sebagai berikut :

1. Mendapatkan rancangan faktorial fraksional split-plot dengan dua *level* berdasarkan kriteria aberasi minimum dan varian prediksi variabel respon minimum.
 - a. Mencari hubungan antara kriteria aberasi minimum dan varian prediksi variabel respon minimum.
 - b. Menyusun algoritma untuk menentukan k_1 , k_2 , p_1 , dan p_2 rancangan FFSP dari k dan p rancangan FF.

- c. Menyusun algoritma untuk mendapatkan *generator* dari rancangan yang terbentuk pada langkah b, yang memenuhi kriteria aberasi minimum dan varian prediksi variabel respon minimum.
 - d. Mendapatkan rancangan MA FFSP *nonisomorphic* dari beberapa rancangan MA FFSP yang diperoleh dari langkah c.
 - e. Menyusun tabel rancangan MA FFSP *nonisomorphic*.
 - f. Melakukan evaluasi terhadap *generator* yang diperoleh untuk mendapatkan beberapa karakteristik *generator* rancangan FFSP.
2. Mendapatkan estimator dari model rancangan faktorial fraksional split-plot dengan dua *level* serta mendapatkan struktur tabel *ANOVA* dari model rancangan tersebut.
 - a. Diberikan model rancangan faktorial split-plot sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 y_{abpqrm} = & \mu + \theta_a + \phi_b + (\theta\phi)_{ab} + \delta_{abm} + \omega_p + \gamma_q + \tau_r + (\omega\gamma)_{pq} + (\omega\tau)_{pr} + (\gamma\tau)_{qr} + \\
 & (\theta\omega)_{ap} + (\theta\gamma)_{aq} + (\theta\tau)_{ar} + (\phi\omega)_{bp} + (\phi\gamma)_{bq} + (\phi\tau)_{br} + \varepsilon_{abpqrm} \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

dimana $a = b = p = q = r = 1, 2$ dan $m = 1, 2, \dots, M$. Asumsi dari model

(3.1) adalah $\delta_{abm} \sim IIDN(0, \sigma_{WP}^2)$ dan $\varepsilon_{abpqrm} \sim IIDN(0, \sigma_{SP}^2)$, dimana

δ_{abm} dan ε_{abpqrm} saling bebas. Batasan dari model (3.1) adalah :

$$\sum_{a=1}^2 \theta_a = \sum_{b=1}^2 \phi_b = \sum_{p=1}^2 \omega_p = \sum_{q=1}^2 \gamma_q = \sum_{r=1}^2 \tau_r = 0$$

$$\sum_{a=1}^2 (\theta\phi)_{ab} = \sum_{a=1}^2 (\theta\omega)_{ap} = \sum_{a=1}^2 (\theta\gamma)_{aq} = \sum_{a=1}^2 (\theta\tau)_{ar} = 0$$

$$\sum_{b=1}^2 (\theta\phi)_{ab} = \sum_{b=1}^2 (\phi\omega)_{bp} = \sum_{b=1}^2 (\phi\gamma)_{bq} = \sum_{b=1}^2 (\phi\tau)_{br} = 0$$

$$\sum_{p=1}^2 (\theta\omega)_{ap} = \sum_{p=1}^2 (\phi\omega)_{bp} = \sum_{p=1}^2 (\omega\gamma)_{pq} = \sum_{p=1}^2 (\omega\tau)_{pr} = 0$$

$$\sum_{q=1}^2 (\theta\gamma)_{aq} = \sum_{q=1}^2 (\phi\gamma)_{bq} = \sum_{q=1}^2 (\omega\gamma)_{pq} = \sum_{q=1}^2 (\gamma\tau)_{qr} = 0$$

$$\sum_{r=1}^2 (\theta\tau)_{ar} = \sum_{r=1}^2 (\phi\tau)_{br} = \sum_{r=1}^2 (\omega\tau)_{pr} = \sum_{r=1}^2 (\gamma\tau)_{qr} = 0$$

- b. Mendapatkan penduga parameter model dengan metode MLE.
- (i) Membangun fungsi *likelihood* dari variabel respon.
 - (ii) Memaksimumkan fungsi *likelihood*, dengan cara mencari turunan pertama dan kedua terhadap parameter model.
 - (iii) Memeriksa sifat tidak bias dari penduga yang diperoleh dari (ii).
- c. Menyusun hipotesa dan tabel *ANOVA* untuk rancangan FFSP, berdasarkan penduga parameter model pada (b) serta aturan untuk membuat tabel *ANOVA* untuk rancangan FFSP.
- (i) Melakukan dekomposisi model untuk mendapatkan penduga *error* WP dan SP; penduga varian *error* WP dan SP; *Sum of Square* dari kontras dan *error*.
 - (ii) Memeriksa sifat tidak bias dari penduga *error* dan penduga varian *error* (masing-masing untuk WP dan SP).
 - (iii) Menentukan derajat bebas dari kontras dan *error*.
 - (iv) Mencari varian kontras dan *error*.
 - (v) Menyusun hipotesa dan tabel *ANOVA*.
3. Mendapatkan faktor-faktor yang mempengaruhi nilai korelasi antara citra yang dihasilkan oleh sistem pengenalan pola dengan citra yang diharapkan pada percobaan di industri semikonduktor, untuk mempelajari kemampuan subsistem

dalam mengenali posisi wafer yang diletakkan di bawah laser perbaikan. Percobaan dilakukan pada subsistem *robotic wafer handling* dari sistem *automated memory repair*. Salah satu proses yang dijalankan dalam subsistem tersebut adalah proses pengenalan optik yang digunakan untuk mengetahui posisi wafer di bawah laser perbaikan. Percobaan ini bertujuan terutama untuk mengamati efek dari faktor-faktor yang berkaitan dengan pemakaian oleh *customer*. Variabel respon pada percobaan adalah nilai korelasi antara citra yang dihasilkan oleh sistem pengenalan pola dengan citra yang diharapkan. Percobaan melibatkan sebelas faktor, masing-masing dengan dua level, yaitu :

A = *training box size* (ukuran kotak latihan)

B = *corner orientation* (orientasi sudut)

C = *binary threshold* (awalan biner)

D = *illumination level* (tingkat pencahayaan)

E = *illumination angle* (sudut pencahayaan)

F = *illumination uniformity* (keseragaman pencahayaan)

G = *teach scene angle* (sudut tempat pengajaran)

H = *train condition* (kondisi latihan)

P = *ambient light intensity* (batas intensitas pencahayaan)

Q = *initial wafer displacement* (permulaan pemindahan *wafer*)

R = *initial wafer orientation* (orientasi awal *wafer*)

Faktor A sampai dengan H adalah faktor-faktor yang berkaitan langsung dengan proses pengenalan optik (terkait dengan subsistem/alat). Faktor P sampai dengan R adalah faktor-faktor yang berkaitan dengan pemakaian oleh *customer*. Karena penekanan dalam percobaan adalah untuk mengamati efek faktor-faktor yang

berkaitan dengan pemakaian oleh *customer*, maka faktor-faktor P sampai dengan R dikelompokkan sebagai faktor-faktor SP, sedangkan faktor-faktor A sampai dengan H dikelompokkan sebagai faktor-faktor WP.

Rancangan percobaan yang digunakan adalah rancangan FFSP $2^{(8+3)-(4+1)}$ dengan *generator* E = ABD, F = ABC, G = BCD, H = ACD, dan R = PQ. *Defining relation* dari rancangan adalah :

I = ABDE = ABCF = BCDG = ACDH = PQR = CDEF = ACEG = BCEH =
ABDEPQR = ADFG = BDFH = ABCFPQR = ABGH = BCDGPQR =
ACDHPQR = BEFG = AEFH = CDEFPQR = DEGH = ACEGPQR =
BCEHPQR = CFGH = ADFGPQR = BDFHPQR = ABGHPQR = ABCDEFGH
= BEFGPQR = AEFHPQR = DEGHPQR = CFGHPQR = ABCDEFGHPQR

Rancangan di atas memiliki resolusi III dengan WLP {1, 14, 0, 0, 14, 1, 0, 0, 1}.

Percobaan dilaksanakan tanpa replikasi. Struktur data beserta nilai variabel respon berdasarkan hasil percobaan Lewis dkk (1997) dalam Bingham dan Sitter (2003) dapat dilihat pada Lampiran 4. Selanjutnya berdasarkan data yang tersedia dilakukan :

- a. Membuat rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$ dengan cara mengasumsikan bahwa faktor-faktor yang tidak signifikan dalam rancangan WP diabaikan, sehingga diperoleh data replikasi.
- b. Menganalisis data hasil percobaan dengan tabel *ANOVA* untuk rancangan WP dan SP
- c. Menguji asumsi *error* WP dan SP.
- d. Membuat kesimpulan.



BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Rancangan Percobaan Faktorial Fraksional Split-Plot dengan Dua *Level*

Ada beberapa hal yang perlu diperhatikan untuk membuat rancangan faktorial fraksional split-plot dengan dua *level*, dilambangkan dengan rancangan FFSP $2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)}$, dari suatu percobaan yaitu pengelompokkan faktor-faktor menjadi faktor *whole plot* dan faktor *sub plot*; penempatan fraksi rancangan; dan pemilihan *generator*. Penjelasan yang akan diuraikan di bawah ini mengacu pada ketiga hal tersebut.

4.1.1. Pengelompokkan Faktor-faktor Menjadi Faktor *Whole Plot* dan Faktor *Sub Plot*.

Pelaksanaan suatu percobaan dengan menggunakan rancangan FFSP, harus memperhatikan keinginan untuk memperoleh informasi sebanyak-banyaknya dengan biaya seminimal mungkin. Sebagaimana telah diketahui bahwa faktor-faktor dalam rancangan ini dikelompokkan menjadi dua bagian yang disebut dengan faktor-faktor *whole plot* (WP) dan faktor-faktor *sub plot* (SP). Keinginan untuk melaksanakan percobaan dengan biaya kecil dapat dilakukan karena untuk faktor-faktor WP tidak perlu dilakukan pengacakan pada setiap *run*, sehingga untuk faktor-faktor yang sulit diubah nilai *level*nya atau membutuhkan biaya besar untuk melakukan perubahan nilai *level*, faktor tersebut dapat dipertimbangkan untuk dikelompokkan sebagai

faktor WP. Secara umum semakin banyak faktor dikelompokkan sebagai faktor WP, maka biaya percobaan dapat lebih ditekan.

Informasi sebanyak-banyaknya mengenai pengaruh faktor-faktor secara individu maupun interaksinya dapat dipenuhi dengan cara memilih rancangan yang memiliki resolusi tinggi dan aberasi minimum, serta memperhatikan bahwa faktor-faktor maupun interaksi yang dianggap penting tidak saling beralias. Selain itu karena variasi data dalam suatu *sub plot* lebih kecil dibandingkan variasi data antar *sub plot* dalam sebuah *whole plot*, serta derajat bebas *error* dari rancangan SP lebih besar dibandingkan derajat bebas *error* dari rancangan WP, maka akan terjadi perbedaan kemampuan untuk mendeteksi efek-efek yang signifikan, dimana *power* untuk mendeteksi efek-efek SP yang signifikan lebih besar. Dengan demikian akan lebih mudah untuk memperoleh informasi mengenai pengaruh faktor-faktor beserta interaksinya dari faktor-faktor yang dikelompokkan dalam faktor SP. Sehingga jika dengan mempertimbangkan biaya percobaan, beberapa faktor dimasukkan sebagai faktor WP, maka harus disadari bahwa kemampuan untuk mendeteksi signifikansi dari efek utama faktor-faktor tersebut beserta interaksinya akan berkurang.

4.1.2. Penempatan Fraksi Rancangan

Keputusan untuk memilih dimana fraksi dilakukan harus mempertimbangkan resolusi dan WLP dari rancangan yang dihasilkan, serta kemampuan rancangan tersebut mendeteksi sebanyak mungkin signifikansi dari efek utama dan interaksi dua faktor. Misalkan akan dibuat rancangan dengan tujuh faktor dan 16 *run* percobaan, dimana $k_1 = 3$ dan $k_2 = 4$, maka rancangan MA FFSP (k_1, k_2, p_1, p_2) yang dapat dibuat adalah 3.4.0.3 dan 3.4.1.2, yaitu :

$$D_1 : I = ABPQ = ACPR = BCPS = BCQR = ACQS = ABRS = PQRS$$

$$W(D_1) = \{0, 7\}$$

$$D_2 : I = ABC = APR = BPQS = BCPR = ACPQS = ABRQS = CQRS$$

$$W(D_2) = \{2, 3, 2\}$$

Kedua rancangan sama-sama melibatkan 3 faktor WP dan 4 faktor SP. Perbedaan terletak pada penempatan fraksi rancangan. Pada rancangan D_1 ketiga fraksi ditempatkan pada faktor SP, sedangkan pada rancangan D_2 ada satu fraksi pada faktor WP dan dua pada faktor SP. Dari kedua rancangan dapat dilihat bahwa rancangan D_1 memiliki resolusi yang lebih tinggi dibanding D_2 . Ini berarti bahwa rancangan D_1 mampu memberikan informasi yang lebih banyak mengenai efek utama dan efek interaksi tingkat rendah. Jadi dapat dilihat bahwa penentuan dimana fraksi akan ditempatkan dapat mempengaruhi resolusi rancangan yang dihasilkan.

Misalkan akan dibuat rancangan dengan delapan faktor dan 16 *run* percobaan, dimana $k_1 = 3$ dan $k_2 = 5$, maka rancangan MA FFSP (k_1, k_2, p_1, p_2) yang dapat dibuat adalah 3.5.0.4 dan 3.5.1.3, yaitu :

$$D_1 : I = APQ = BPR = CPS = ABCPT = ABQR = ACQS = BCQT = BCRS =$$

$$ACRT = ABST = ABCPQRS = CPQRT = BPQST = APRST = QRST$$

$$W(D_1) = \{3, 7, 4, 0, 1\}$$

Interaksi dua faktor SP yang beralias dengan efek utama WP dan interaksi yang melibatkan faktor WP saja :

$$PQ = A \quad PR = B \quad PS = C \quad PT = ABC \quad QR = AB \quad QS = AC \quad QT = BC$$

$$RS = BC \quad RT = AC \quad ST = AB$$

$$D_2 : I = ABC = APR = AQS = BPQT = BCPR = BCQS = ACPQT = PQRS = \\ ABRQT = ABPST = ABCPQRS = CQRT = CPTS = BRST = ACRST \\ W(D_2) = \{3, 7, 4, 0, 1\}$$

Interaksi dua faktor SP yang beralias dengan efek utama WP dan interaksi yang melibatkan faktor WP saja :

$$PR = A = BC \quad QS = A = BC$$

Kedua rancangan di atas memiliki WLP yang sama dan seringkali disimpulkan sebagai rancangan yang sama baiknya. Akan tetapi apabila dijabarkan lebih lanjut, ternyata keduanya berbeda dalam hal pengujian efek interaksi dua faktor SP. Interaksi dua faktor SP pada rancangan D_1 semua beralias dengan efek utama WP dan interaksi antar faktor WP saja, akibatnya semua interaksi tersebut akan diuji dengan menggunakan *error* WP sebagai pembanding. Sedangkan untuk rancangan D_2 hanya dua interaksi dua faktor SP saja yang beralias dengan efek utama WP dan interaksi antar faktor WP saja. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa rancangan D_2 memiliki kekuatan lebih untuk melakukan pengujian interaksi dua faktor dari faktor-faktor SP, karena hanya ada dua interaksi saja yang beralias dengan faktor-faktor WP beserta interaksinya, akibatnya sebagian besar interaksi dua faktor SP akan diuji dengan menggunakan *error* SP.

4.1.3. Pemilihan *Generator*

Bingham dan Sitter (1999) menjelaskan bahwa rancangan faktorial fraksional split-plot (FFSP) didapatkan dengan cara mengkombinasikan dua rancangan faktorial fraksional (FF) yang berbeda, dimana rancangan pertama disebut dengan rancangan *whole plot* sedangkan rancangan kedua disebut rancangan *sub plot*. Oleh karenanya

dalam pembahasan mengenai rancangan FFSP akan banyak mengacu pada rancangan FF. Untuk membuat rancangan fraksional dari rancangan faktorial, hal yang harus diperhatikan adalah pemilihan *generator*. *Generator* berfungsi dalam menentukan struktur alias serta menentukan apakah rancangan fraksional yang dibuat merupakan rancangan yang ortogonal atau tidak. *Generator* harus dipilih sedemikian hingga efek-efek utama maupun interaksi yang ingin diperhatikan, tidak saling beralias. Selain itu *generator* harus dipilih sedemikian hingga kontras-kontras dari rancangan saling bebas, agar mempermudah proses inferensi dari parameter-parameter model ANOVA, serta memiliki varian prediksi variabel respon minimum. Selanjutnya dari *defining relation* yang terbentuk berdasarkan *generator*, dapat diketahui resolusi dan WLP dari rancangan. Dengan kata lain pemilihan *generator* adalah hal yang perlu diperhatikan untuk mendapatkan rancangan optimal berdasarkan kriteria aberasi dan varian prediksi variabel respon.

Seperti telah dijelaskan sebelumnya bahwa yang dimaksud dengan rancangan MA dengan resolusi R_{max} adalah rancangan yang meminimumkan banyaknya *word* dengan panjang R_{max} . Dengan kata lain kriteria MA terkait erat dengan kriteria resolusi (MA merupakan perluasan konsep resolusi). Pada rancangan dengan resolusi R , efek utama akan *confounded* dengan efek interaksi $R-1$ faktor, efek interaksi dua faktor akan *confounded* dengan efek interaksi $R-2$ faktor, dan seterusnya. Apabila suatu rancangan memiliki resolusi II, maka hal ini berarti bahwa efek-efek utama akan saling beralias. Akibatnya faktor-faktor dari rancangan tidak saling bebas (kontras-kontras rancangan tidak saling ortogonal). Apabila suatu rancangan memiliki resolusi III, maka hal ini berarti bahwa efek utama akan beralias dengan efek interaksi dua faktor. Faktor-faktor pada rancangan tersebut saling bebas,

sehingga akan memudahkan peneliti untuk melakukan pendugaan terhadap parameter model yang dihasilkan oleh rancangan. Rancangan-rancangan dengan resolusi yang lebih tinggi memungkinkan efek utama beralias dengan efek interaksi tingkat lebih tinggi, sehingga dalam memilih *generator* diupayakan agar rancangan yang dibuat memiliki resolusi minimal III. Berdasarkan Definisi 2.1 dinyatakan bahwa $i = 3, 4, \dots, r - 1$. Indeks i mulai dari 3 juga melambangkan bahwa resolusi minimal yang dibutuhkan agar rancangan memenuhi kriteria aberasi minimum adalah III.

Pemilihan rancangan optimal berdasarkan kriteria aberasi minimum, haruslah memperhatikan resolusi dari rancangan. Apabila dari beberapa rancangan yang dibuat memiliki resolusi yang berbeda, maka rancangan dengan resolusi tertinggi ($\geq III$) yang akan dipilih sebagai rancangan optimal. Akan tetapi apabila dari beberapa rancangan yang dibuat semua memiliki resolusi yang sama, maka rancangan yang memiliki banyaknya *word* dengan panjang R_{max} minimum akan terpilih sebagai rancangan optimal.

Misalkan akan dibuat rancangan MA FFSP $2^{(2+4)-(0+2)}$. Beberapa rancangan yang dapat dibuat adalah :

Tabel 4.1. Rancangan FFSP $2^{(2+4)-(0+2)}$

No.	Defining Relation			Resolusi	WLP
1	ABPQR	BPS	AQRS	III	1,1,1,0
2	ABPQR	BQS	APRS	III	1,1,1,0
3	ABPQR	PQS	ABRS	III	1,1,1,0
4	ABPR	ABQS	PQRS	IV	0,3,0,0
5	ABPR	APQS	BQRS	IV	0,3,0,0
6	ABPR	BPQS	AQRS	IV	0,3,0,0

Rancangan nomor 4, 5, dan 6 adalah rancangan dengan resolusi tertinggi. Selain itu ketiga rancangan tersebut memiliki WLP yang sama. Oleh karenanya ketiga rancangan itu dinyatakan sebagai rancangan MA FFSP.

Pada tinjauan pustaka subbab 2.4, telah dijelaskan bahwa untuk mendapatkan rancangan yang meminimumkan varian prediksi variabel respon, haruslah dipilih suatu rancangan sedemikian hingga $\|(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}\|$ sekecil mungkin. Isi dari matriks rancangan \mathbf{D} bergantung pada *generator* yang dipilih untuk mendapatkan rancangan. Berdasarkan penjelasan mengenai rancangan MA pada paragraf di atas, telah diketahui bahwa agar rancangan memenuhi kriteria MA *generator* yang dipilih haruslah menyebabkan faktor-faktor pada rancangan saling bebas atau dengan kata lain kolom-kolom pada matriks rancangan \mathbf{D} saling ortogonal. Berikut akan ditunjukkan bahwa agar kriteria varian prediksi variabel respon minimum juga dapat dipenuhi, suatu rancangan haruslah merupakan rancangan yang ortogonal (Khuri dan Cornell, 1996).

Diberikan matriks rancangan $\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_k]$ dimana \mathbf{d}_i adalah kolom ke- i dari matriks \mathbf{D} ; $i = 1, 2, \dots, k$

$$d_{ii} = \mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_i ; \text{ adalah elemen diagonal matriks } \mathbf{D}^T \mathbf{D}$$

$$d^{ii} = d_{ii}^{-1}; \text{ adalah elemen diagonal matriks } (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}$$

$$\mathbf{D}_{(-i)} \text{ adalah matriks } \mathbf{D} \text{ tanpa kolom ke-} i$$

$$\mathbf{E}_i \text{ adalah matriks berukuran } k \times k \text{ sedemikian hingga } \mathbf{D} \mathbf{E}_i = [\mathbf{d}_i, \mathbf{D}_{(-i)}]$$

$$\mathbf{E}_i = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T [\mathbf{d}_i, \mathbf{D}_{(-i)}]$$

$$\begin{aligned}
d^{ii} = d_{ii}^{-1} &= \frac{\text{Kofaktor } d_{ii}}{\text{Determinan } d_{ii}} = \frac{\left| \mathbf{D}_{(-i)}^T \mathbf{D}_{(-i)} \right|}{\left| \mathbf{D}^T \mathbf{D} \right|} = \frac{\left| \mathbf{D}_{(-i)}^T \mathbf{D}_{(-i)} \right|}{\left| \mathbf{E}_i^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{E}_i \right|} \\
&= \frac{\left| \mathbf{D}_{(-i)}^T \mathbf{D}_{(-i)} \right|}{\left| \mathbf{D}_{(-i)}^T \mathbf{D}_{(-i)} \right| \times \left[\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_i - \mathbf{d}_i^T \mathbf{D}_{(-i)} \left(\mathbf{D}_{(-i)}^T \mathbf{D}_{(-i)} \right)^{-1} \mathbf{D}_{(-i)}^T \mathbf{d}_i \right]} \\
&= \frac{1}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_i - \mathbf{d}_i^T \mathbf{D}_{(-i)} \left(\mathbf{D}_{(-i)}^T \mathbf{D}_{(-i)} \right)^{-1} \mathbf{D}_{(-i)}^T \mathbf{d}_i} \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.1) berlaku jika $d_{ij} = \mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_j = 0$ untuk $i \neq j$. Misalkan dalam daerah R terdapat batasan nilai x_i :

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_i &\leq c_i^2 \\
d_{ii} &\leq c_i^2 \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Pertidaksamaan (4.2) memiliki arti bahwa penyebaran rancangan pada arah sumbu koordinat ke- i dibatasi oleh c_i^2 . Dengan memasukkan pertidaksamaan (4.2) ke persamaan (4.1) diperoleh :

$$d^{ii} \geq \frac{1}{c_i^2} \tag{4.3}$$

$\text{Var}(b_i) = \sigma^2 d^{ii}$, maka $\text{Var}(b_i)$ paling tidak sama dengan σ^2/c_i^2 . d^{ii} akan memiliki nilai minimum yaitu $1/c_i^2$ apabila rancangan memenuhi kondisi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_j &= 0; \quad i \neq j \\
\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_i &= c_i^2 \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Rancangan yang memenuhi kondisi (4.4) menyebabkan kolom-kolom matriks \mathbf{D} saling ortogonal. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pemilihan *generator* yang menyebabkan faktor-faktor rancangan saling bebas akan menyebabkan



rancangan memiliki varian prediksi variabel respon minimum dan resolusi tinggi ($\geq III$).

Selanjutnya akan diuraikan bagaimana memperoleh rancangan FFSP $2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)}$ dari rancangan FF 2^{k-p} . Untuk mempermudah penulisan, selanjutnya rancangan FFSP akan dituliskan dalam bentuk $k_1 \cdot k_2 \cdot p_1 \cdot p_2$. Dalam penelitian ini rancangan-rancangan yang akan dibahas adalah rancangan yang melibatkan 5 sampai dengan 10 faktor serta memiliki 16 *run* percobaan. Rancangan faktorial yang memiliki 16 *run* adalah rancangan faktorial 2^4 . Untuk mendapatkan rancangan FFSP, digunakan diagram alur pada Gambar 4.1. Pada saat penyusunan diagram alur untuk mendapatkan rancangan FFSP dari rancangan FF diperoleh kesimpulan bahwa ada batasan tambahan yang diperlukan untuk mendapatkan k_1, k_2, p_1 dan p_2 dari k dan p . Jika pada tinjauan pustaka batasannya hanya :

$$1. k_1 + k_2 = k$$

$$2. p_1 + p_2 = p$$

Maka pada kasus $n=16$ dan $k=5,6,7,8,9,10$, agar didapatkan rancangan yang ortogonal diperlukan batasan tambahan yaitu :

$$1. \begin{matrix} k_1 = 1, 2, \dots, k^* \\ k^* = \begin{cases} k-3; k=10 \\ k-2; k \text{ lainnya} \end{cases} \end{matrix} \quad 2. p_1 = \begin{cases} 0, \text{ maka } k_2 - p_2 \geq 1 \\ 1, \text{ maka } k_2 - p_2 \geq 1 \text{ dan } k_1 - p_1 \geq 2 \\ \geq 2, \text{ maka } k_2 - p_2 \geq 1 \text{ dan } k_1 - p_1 \geq 3 \end{cases}$$

Rancangan FFSP yang dapat dibentuk dapat dilihat pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Rancangan FFSP yang dapat dibuat dari rancangan FF 2^{k-p}

Rancangan FF 2^{k-p}	k	p	k_1	k_2	p_1	p_2	$k_1 \cdot k_2 \cdot p_1 \cdot p_2$
2^{5-1}	5	1	1	4	0	1	1.4.0.1
			2	3	0	1	2.3.0.1
			3	2	0	1	3.2.0.1
2^{6-2}	6	2	1	5	0	2	1.5.0.2
			2	4	0	2	2.4.0.2
			3	3	0	2	3.3.0.2
			3	3	1	1	3.3.1.1
2^{7-3}	7	3	4	2	1	1	4.2.1.1
			1	6	0	3	1.6.0.3
			2	5	0	3	2.5.0.3
			3	4	0	3	3.4.0.3
			3	4	1	2	3.4.1.2
2^{8-4}	8	4	4	3	1	2	4.3.1.2
			4	3	1	2	4.3.1.2
			5	2	2	1	5.2.2.1
			1	7	0	4	1.7.0.4
			2	6	0	4	2.6.0.4
			3	5	0	4	3.5.0.4
2^{9-5}	9	5	3	5	1	3	3.5.1.3
			4	4	1	3	4.4.1.3
			5	3	2	2	5.3.2.2
			6	2	3	1	6.2.3.1
			1	8	0	5	1.8.0.5
			2	7	0	5	2.7.0.5
			3	6	0	5	3.6.0.5
2^{10-6}	10	6	3	6	1	4	3.6.1.4
			4	5	1	4	4.5.1.4
			5	4	2	3	5.4.2.3
			6	3	3	2	6.3.3.2
			7	2	4	1	7.2.4.1
			1	9	0	6	1.9.0.6
			2	8	0	6	2.8.0.6
			3	7	0	6	3.7.0.6
2^{10-6}	10	6	3	7	1	5	3.7.1.5
			4	6	1	5	4.5.1.5
			5	5	2	4	5.5.2.4
			6	4	3	3	6.4.3.3
2^{10-6}	10	6	7	3	4	2	7.3.4.2
			7	3	4	2	7.3.4.2

Setelah rancangan FFSP diperoleh, selanjutnya akan dicari *generator* untuk masing-masing rancangan sedemikian hingga rancangan-rancangan tersebut memenuhi kriteria resolusi tinggi, aberasi minimum, dan varian prediksi variabel respon minimum. Pada penelitian ini disusun algoritma untuk mendapatkan *generator* yang dimaksud. Diperoleh algoritma sebagai berikut :

1. Cari semua kombinasi huruf dari huruf-huruf selain *generator*, mulai kombinasi dengan semua huruf sampai dengan kombinasi yang melibatkan dua huruf saja.
2. Gunakan kombinasi yang melibatkan faktor-faktor WP saja untuk membentuk *generator* dari rancangan WP. Gunakan kombinasi lainnya untuk membentuk *generator* rancangan SP.
3. Pasangkan *generator-generator* yang telah diperoleh dari langkah 2, untuk memperoleh rancangan FFSP.
4. Cari *defining relation* dari rancangan pada langkah 3.
5. Hitung resolusi dari rancangan.
6. Hitung WLP dari rancangan-rancangan dengan resolusi tertinggi.
7. Hilangkan rancangan-rancangan yang isomorfis dari rancangan-rancangan MA FFSP, dengan langkah-langkah pengujian keisomorfisan dua rancangan sebagai berikut :
 - a. Untuk setiap rancangan (dari dua rancangan yang dibandingkan) urutkan *word* pada *defining relation* dari yang terpendek sampai yang terpanjang, dengan susunan huruf pada *word* dimulai dari faktor WP kemudian faktor SP.
 - b. Cek apakah huruf-huruf pada *word* yang bersesuaian dari kedua rancangan dapat dipertukarkan. Aturan pertukaran adalah huruf untuk faktor WP hanya

dapat dipertukarkan dengan faktor WP saja, demikian pula untuk faktor SP hanya dapat dipertukarkan dengan faktor SP saja.

Sebagai contoh misalkan akan dicari *generator* untuk rancangan MA FFSP

2.3.0.1. Berdasarkan algoritma di atas, *generator* rancangan MA FFSP yang nonisomorfis dicari sebagai berikut :

1. Faktor WP : A dan B; Faktor SP bebas : P dan Q; Faktor SP tak bebas : R

Kombinasi : ABPQ, ABP, ABQ, APQ, BPQ, AB, AP, AQ, BP, BQ, PQ.

2. *Generator* yang dapat dibuat adalah :

$R = ABPQ; R = ABP; R = ABQ; \dots; R = PQ.$

Karena *generator* yang dicari merupakan *generator* rancangan SP, maka kombinasi AB tidak digunakan.

3. *Defining relation* dari rancangan beserta resolusinya adalah :

Tabel 4.3. *Defining relation* dan resolusi dari berbagai rancangan FFSP 2.3.0.1

No.	<i>Defining Relation</i>	Resolusi	No.	<i>Defining Relation</i>	Resolusi
1	ABPQR	V	6	APR	III
2	ABPR	IV	7	AQR	III
3	ABQR	IV	8	BPR	III
4	APQR	IV	9	BQR	III
5	BPQR	IV	10	PQR	III

4. WLP rancangan dengan resolusi tertinggi

Hanya ada satu rancangan yang memiliki resolusi tertinggi yaitu rancangan no.1,

dengan WLP $\{0,0,1\}$ dan $\left\|(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}\right\| = \sqrt{5 \times 0,0625^2} = 0,14.$

5. Uji keisomorfisan rancangan tidak perlu dilakukan, karena hanya ada satu rancangan saja yang memenuhi kriteria resolusi tinggi dan aberasi minimum.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa untuk memperoleh rancangan MA FFSP dari rancangan 2.3.0.1 dapat digunakan $R = ABPQ$ sebagai *generator*.

Misalkan akan dicari *generator* untuk rancangan MA FFSP 2.4.0.2. Berdasarkan algoritma di atas, *generator* rancangan MA FFSP nonisomorfis dicari sebagai berikut :

1. Faktor WP : A dan B; Faktor SP bebas : P dan Q; Faktor SP tak bebas : R dan S;
Kombinasi : ABPQ, ABP, ABQ, APQ, BPQ, AB, AP, AQ, BP, BQ, PQ.
2. *Generator* yang dapat dibuat adalah :
 $R = ABPQ$ dan $S = ABP$; $R = ABPQ$ dan $S = ABQ$; $R = ABPQ$ dan $S = APQ$;
 $R = ABPQ$ dan $S = BPQ$; ..., $R = BQ$ dan $S = PQ$.
Karena semua *generator* merupakan *generator* rancangan SP, maka kombinasi AB tidak digunakan.
3. *Defining relation* dari pasangan generator pada langkah 2 beserta resolusi rancangan adalah :

Tabel 4.4. *Defining relation* dan resolusi dari berbagai rancangan FFSP 2.4.0.2^{*)}

No.	<i>Defining Relation</i>			Resolusi	No.	<i>Defining Relation</i>			Resolusi
1	ABPQR	ABPS	QRS	III	23	ABQR	BQS	ARS	III
2	ABPQR	ABQS	PRS	III	24	ABQR	PQS	$A \cup PRS$	III
3	ABPQR	APQS	BRS	III	25	APQR	BPQS	ABRS	IV
4	ABPQR	BPQS	ARS	III	26	APQR	APS	QRS	III
5	ABPQR	APS	BQRS	III	27	APQR	AQS	PRS	III
6	ABPQR	AQS	BPRS	III	28	APQR	BPS	ABQRS	III
7	ABPQR	BPS	AQRS	III	29	APQR	BQS	ABPRS	III
8	ABPQR	BQS	APRS	III	30	APQR	PQS	ARS	III
9	ABPQR	PQS	ABRS	III	31	BPQR	APS	ABQRS	III
10	ABPR	ABQS	PQRS	IV	32	BPQR	AQS	ABPRS	III
11	ABPR	APQS	BQRS	IV	33	BPQR	BPS	QRS	III
12	ABPR	BPQS	AQRS	IV	34	BPQR	BQS	PRS	III
13	ABPR	APS	BRS	III	35	BPQR	PQS	BRS	III
14	ABPR	AQS	BPQRS	III	36	APR	AQS	PQRS	III
15	ABPR	BPS	ARS	III	37	APR	BPS	ABRS	III
16	ABPR	BQS	APQRS	III	38	APR	BQS	ABPQRS	III
17	ABPR	PQS	ABQRS	III	39	APR	PQS	AQRS	III
18	ABQR	APQS	BPRS	IV	40	AQR	BPS	ABPQRS	III

Tabel 4.4. (lanjutan)

No.	Defining Relation			Resolusi	No.	Defining Relation			Resolusi
19	ABQR	BPQS	APRS	IV	41	AQR	BQS	ABRS	III
20	ABQR	APS	BPQRS	III	42	AQR	PQS	APRS	III
21	ABQR	AQS	BRS	III	43	BPR	BQS	PQRS	III
22	ABQR	BPS	APQRS	III	44	BPR	PQS	BQRS	III
					45	BQR	PQS	BPRS	III

*) Kotak yang diarsir adalah rancangan dengan resolusi tertinggi

4. WLP rancangan dengan resolusi tertinggi

Keenam rancangan pada kotak yang diarsir merupakan rancangan MA FFSP karena memiliki WLP yang sama yaitu $\{0,3,0,0\}$; selain itu semua rancangan memiliki nilai $\|(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}\| = \sqrt{6 \times 0,0625^2} = 0,153$.

5. Mencari rancangan isomorfis dari rancangan-rancangan dengan resolusi tertinggi

$$D_1 : ABPR = ABQS = PQRS$$

$$D_4 : ABQR = APQS = BPRS$$

$$D_2 : ABPR = APQS = BQRS$$

$$D_5 : ABQR = BPQS = APRS$$

$$D_3 : ABPR = BPQS = AQRS$$

$$D_6 : APQR = BPQS = ABRS$$

Keisomorfisan rancangan diperiksa, sebagai berikut :

Misalkan akan dibandingkan rancangan D_2 dan D_3

a. *Defining relation* dari kedua rancangan adalah :

$$D_2 : ABPR = APQS = BQRS$$

$$D_3 : ABPR = BPQS = AQRS$$

b. Setelah *word* diurutkan akan menjadi :

$$D_2 : ABPR = APQS = BQRS$$

$$D_3 : ABPR = AQRS = BPQS$$

c. Hasil pengecekan adalah :

- *word* pertama pada kedua rancangan memiliki huruf-huruf yang persis sama.
- *word* kedua berbeda pada huruf P dan R. Jika ditentukan aturan pertukaran adalah $P = R$, maka hal ini juga akan berlaku untuk *word* pertama dan ketiga pada kedua *defining relation*. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa rancangan D_2 dan D_3 adalah rancangan yang isomorfis.

Misalkan akan dibandingkan rancangan D_1 dan D_2

a. *Defining relation* kedua rancangan adalah :

$$D_1 : ABPR = ABQS = PQRS$$

$$D_2 : ABPR = APQS = BQRS$$

b. *Word* tidak perlu diurutkan lagi, karena sudah terurut dengan sendirinya :

$$D_1 : ABPR = ABQS = PQRS$$

$$D_2 : ABPR = APQS = BQRS$$

c. Hasil pengecekan adalah :

- *word* pertama pada kedua rancangan memiliki huruf-huruf yang persis sama.
- *word* kedua dan ketiga berbeda pada huruf B dan P. Dalam hal ini tidak dapat dilakukan pertukaran karena huruf B mewakili faktor WP sedangkan huruf P mewakili faktor SP. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa kedua rancangan adalah rancangan-rancangan yang nonisomorfis.

Hasil pengecekan keseluruhan terhadap keenam rancangan di atas adalah rancangan D_2 sampai D_6 merupakan rancangan-rancangan yang isomorfis,

sedangkan rancangan D_1 merupakan rancangan yang nonisomorfis jika dibandingkan dengan lima rancangan lainnya. Dengan demikian pada dasarnya kelima rancangan tersebut adalah rancangan yang sama. Sehingga dalam hal ini diperoleh dua pilihan rancangan MA FFSP nonisomorfis untuk 2.4.0.2 yaitu :

Tabel 4.5. Rancangan MA FFSP 2.4.0.2 serta alias untuk efek utama dan efek interaksi dua faktor

D_1 : ABPR = ABQS = PQRS	D_2 : ABPR = APQS = BQRS
A = BPR = BQS = APQRS	A = BPR = PQS = ABQRS
B = APR = AQS = BPQRS	B = APR = ABPQS = QRS
P = ABR = ABPQS = QRS	P = ABR = AQS = BPQRS
Q = ABPQR = ABS = PRS	Q = ABPQR = APS = BRS
R = ABP = ABQRS = PQS	R = ABP = APQRS = BQS
S = ABPRS = ABQ = PQR	S = ABPRS = APQ = BQR
AB = PR = QS = ABPQRS	AB = PR = BPQS = AQRS
AP = BR = BPQS = AQRS	AP = BR = QS = ABPQRS
AQ = BPQR = BS = APRS	AQ = BPQR = PS = ABRS
AR = BP = BQRS = APQS	AR = BP = PQRS = ABQS
AS = BPRS = BQ = APQR	AS = BPRS = PQ = ABQR
PQ = ABQR = ABPS = RS	BQ = APQR = ABPS = RS
PS = ABRS = ABPQ = QR	BS = APRS = ABPQ = QR
Kontras yang diuji dengan error WP : A, B, AB	Kontras yang diuji dengan error WP : A, B, AB
Kontras yang diuji dengan error SP : P, Q, R, S, AP, AQ, AR, AS, PQ, PS	Kontras yang diuji dengan error SP : P, Q, R, S, AP, AQ, AR, AS, BQ, BS

Kedua rancangan memiliki performansi yang sama baiknya dalam hal kemampuan untuk menjelaskan efek utama dan efek interaksi dua faktor. Pada kedua rancangan efek utama beralias dengan efek interaksi tingkat tinggi yang seringkali diabaikan. Hal ini berarti kedua rancangan memiliki kemampuan yang baik untuk menjelaskan pengaruh setiap faktor secara individu terhadap variabel respon. Efek interaksi dua faktor pada kedua rancangan, saling beralias. Pada rancangan D_1 efek interaksi dua faktor antara faktor WP dengan faktor SP saling beralias, efek interaksi dua faktor antara faktor-faktor SP saling beralias. Pada rancangan D_2 efek interaksi dua faktor antara faktor WP dengan faktor SP saling beralias dengan efek interaksi

dua faktor antara faktor-faktor SP. Untuk memilih diantara kedua rancangan mana yang harus digunakan, sangat bergantung pada keinginan untuk memahami kondisi sistem dimana percobaan akan dilakukan. Misalkan pada kasus dimana faktor-faktor WP adalah faktor-faktor yang berkaitan dengan kondisi lingkungan kerja seperti suhu ruangan, tingkat kebisingan, intensitas cahaya, dan lainnya, dimungkinkan bahwa percobaan yang akan dilakukan tidak hanya bertujuan untuk mempelajari pengaruh faktor-faktor WP dan SP secara individu, melainkan juga ingin mempelajari interaksi antara faktor-faktor lingkungan (WP) dengan faktor-faktor yang langsung berkaitan dengan *setting* mesin (SP). Pada kasus ini disarankan untuk menggunakan rancangan D_2 karena terdapat interaksi dua faktor antara faktor WP dan SP yang tidak saling beralias. Pada kondisi lain dimana tidak ada penekanan pada satu atau beberapa faktor maka kedua rancangan dapat digunakan.

Berdasarkan algoritma di atas, disusun tabel rancangan MA FFSP nonisomorfis dan memiliki varian prediksi variabel respon minimum, sebagai berikut :

Tabel 4.6. Tabel rancangan MA FFSP nonisomorfis

Rancangan	WP generator	SP generator	R	WLP	$\ (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}\ $
1.4.0.1		S = APQR	V	0,0,1	0,14
2.3.0.1		R = ABPQ	V	0,0,1	0,14
3.2.0.1		Q = ABCP	V	0,0,1	0,14
1.5.0.2		S = APQ T = APR	IV	0,3,0,0	0,153
2.4.0.2		R = ABP S = ABQ	IV	0,3,0,0	0,153
2.4.0.2		R = ABP S = APQ	IV	0,3,0,0	0,153
3.3.0.2		Q = ABP R = ACP	IV	0,3,0,0	0,153
3.3.1.1	C = AB	R = APQ	III	1,1,1,0	0,153
4.2.1.1	D = ABC	Q = ABP	IV	0,3,0,0	0,153
1.6.0.3		S = APQ T = APR U = AQR	IV	0,7,0,0,0	0,165

Tabel 4.6. (lanjutan)

Rancangan	WP generator	SP generator	R	WLP	$\ (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}\ $
2.5.0.3		R = ABP S = ABQ T = APQ	IV	0,7,0,0,0	0,165
3.4.0.3		Q = ABP R = ACP S = BCP	IV	0,7,0,0,0	0,165
3.4.1.2	C = AB	R = ABP S = BPQ	III	2,3,2,0,0	0,165
4.3.1.2	D = ABC	Q = ABP R = ACP	IV	0,7,0,0,0	0,165
5.2.2.1	D = AB E = AC	Q = ABCP	III	2,3,2,0,0	0,165
1.7.0.4		S = APQ T = APR U = AQR V = PQR	IV	0,14,0,0,0,1	0,177
2.6.0.4		R = ABP S = ABQ T = APQ U = BPQ	IV	0,14,0,0,0,1	0,177
3.5.0.4		Q = ABP R = ACP S = BCP T = AP	III	3,7,4,0,1,0	0,177
3.5.1.3	C = AB	R = ABP S = ABQ T = APQ	III	3,7,4,0,1,0	0,177
4.4.1.3	D = ABC	Q = ABP R = ACP S = BCP	IV	0,14,0,0,0,1	0,177
5.3.2.2	D = AB E = AC	Q = ABCP R = BCP	III	3,7,4,0,1,0	0,177
6.2.3.1	D = AB E = AC F = BC	Q = ABCP	III	4,6,4,0,0,1	0,177
1.8.0.5		S = APQR T = APQ U = APR V = AQR W = PQR	III	4,14,8,0,4,1,0	0,188
1.8.0.5		S = APQR T = APQ U = AR V = PR W = QR	III	4,14,8,0,4,1,0	0,188

Tabel 4.6. (lanjutan)

Rancangan	WP generator	SP generator	R	WLP	$\ (D^T D)^{-1}\ $
2.7.0.5		R = ABP S = ABQ T = APQ U = BPQ V = AP	III	4,14,8,0,4,1,0	0,188
3.6.0.5		Q = ABCP R = ABP S = ACP T = BP U = CP	III	6,9,9,6,0,0,1	0,188
3.6.1.4	C = AB	R = ABP S = ABQ T = APQ U = BPQ	III	4,14,8,0,4,1,0	0,188
4.5.1.4	D = ABC	Q = AP R = BP S = CP T = ABCP	III	4,14,8,0,4,1,0	0,188
5.4.2.3	D = AC E = BC	Q = ABCP R = ABP S = CP	III	4,14,8,0,4,1,0	0,188
6.3.3.2	D = ABC E = AB F = AC	Q = ABCP R = BCP	III	6,10,8,4,2,1,0	0,188
7.2.4.1	D = ABC E = AB F = AC G = BC	Q = AP	III	8,10,4,4,4,1,0	0,188
1.9.0.6		S = APQR T = APQ U = APR V = AQR W = PQR X = AP	III	8,18,16,8,8,5	0,198
1.9.0.6		S = APQR T = APQ U = APR V = AQR W = PQR X = PR	III	8,18,16,8,8,5	0,198

Tabel 4.6. (lanjutan)

Rancangan	WP generator	SP generator	R	WLP	$\ (D^T D)^{-1}\ $
2.8.0.6		R = ABPQ S = ABQ T = AP U = AQ V = BP W = PQ	III	8,18,16,8,8,5	0,198
2.8.0.6		R = ABP S = ABQ T = APQ U = BPQ V = AP W = BQ	III	8,18,16,8,8,5	0,198
2.8.0.6		R = ABP S = ABQ T = APQ U = BPQ V = AQ W = PQ	III	8,18,16,8,8,5	0,198
3.7.0.6		Q = ABP R = ACP S = BCP T = AP U = BP V = CP	III	9,16,15,12,7,3,1	0,198
3.7.1.5	C = AB	R = ABCPQ S = ABQ T = BPQ U = AP V = AQ	III	8,18,16,8,8,5	0,198
4.6.1.5	D = ABC	Q = ABCP R = ABP S = ACP T = BCP U = AP	III	8,18,16,8,8,5	0,198
5.5.2.4	D = AB E = AC	Q = ABCP R = ABP S = ACP T = BCP	III	8,18,16,8,8,5	0,198
6.4.3.3	D = ABC E = AC F = BC	Q = ABCP R = ACP S = BCP	III	8,18,16,8,8,5	0,198
7.3.4.2	D = ABC E = AB F = AC G = BC	Q = ABP R = ACP	III	10,16,12,12,1,0,3	0,198

Dari tabel yang terbentuk dapat disimpulkan beberapa karakteristik dari *generator* rancangan FFSP yaitu :

1. Jika rancangan hanya membutuhkan satu *generator*, maka fraksi ditempatkan pada rancangan SP dengan interaksi semua faktor WP dan SP yang bebas digunakan sebagai *generator*.
2. Jika rancangan membutuhkan lebih dari satu *generator* dan jika rancangan WP hanya membutuhkan satu *generator* maka interaksi semua faktor WP yang bebas digunakan sebagai *generator*.
3. Jika rancangan membutuhkan lebih dari satu *generator* dan jika rancangan WP serta SP memiliki lebih dari satu faktor bebas, maka dalam membentuk suatu *generator* tidak perlu menggunakan semua faktor WP dan SP yang bebas untuk dikombinasikan.
4. *Generator* untuk rancangan SP harus mengandung minimal satu faktor SP yang bebas. Tidak mungkin membentuk *generator* rancangan SP hanya dari faktor-faktor WP saja, karena hal ini sama dengan menempatkan fraksi pada rancangan WP.

4.2. Penduga Parameter Model Untuk Rancangan FFSP

Misal dilakukan suatu percobaan dengan menggunakan rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$, dimana rancangan tersebut melibatkan 2 faktor WP dan 3 faktor SP. Untuk membuat rancangan fraksional dari rancangan faktorial split-plot dengan 2 faktor WP yaitu A, B dan 3 faktor SP yaitu P, Q, R, dipilih *defining relation* $I = ABPQR$ atau *generator* $R = ABPQ$, karena merupakan rancangan dengan resolusi tertinggi (resolusi V) yang dapat dibuat dari rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$, serta merupakan rancangan dengan aberasi minimum ($W = \{0, 0, 1\}$). Bentuk rancangannya adalah sebagai berikut :

Tabel 4.7. Rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$

Perlakuan	Efek Faktorial					
	I	A	B	P	Q	R = ABPQ
r	1	-1	-1	-1	-1	1
a	1	1	-1	-1	-1	-1
b	1	-1	1	-1	-1	-1
abr	1	1	1	-1	-1	1
p	1	-1	-1	1	-1	-1
apr	1	1	-1	1	-1	1
bpr	1	-1	1	1	-1	1
abp	1	1	1	1	-1	-1
q	1	-1	-1	-1	1	-1
aqr	1	1	-1	-1	1	1
bqr	1	-1	1	-1	1	1
abq	1	1	1	-1	1	-1
pqr	1	-1	-1	1	1	1
apq	1	1	-1	1	1	-1
bpq	1	-1	1	1	1	-1
abpqr	1	1	1	1	1	1

Struktur alias dari rancangan di atas adalah :

I = ABPQR
A = BPQR
B = APQR
P = ABQR

Q = ABPR
R = ABPQ
AB = PQR
AP = BQR

AQ = BPR
AR = BPQ
BP = AQR
BQ = APR

BR = APQ
PQ = ABR
PR = ABQ
QR = ABP

Berdasarkan uraian di atas maka dapat dibuat model dari rancangan, dengan memperhatikan bahwa faktor-faktor dalam percobaan adalah faktor tetap, efek dari faktor utama lebih penting dibandingkan dengan efek dari interaksi antar faktor dan efek dari interaksi antar faktor tingkat rendah lebih penting dari efek interaksi antar faktor tingkat tinggi. Model dari rancangan adalah sebagai berikut :

$$y_{abpqrm} = \mu + \theta_a + \phi_b + (\theta\phi)_{ab} + \delta_{abm} + \omega_p + \gamma_q + \tau_r + (\omega\gamma)_{pq} + (\omega\tau)_{pr} + (\gamma\tau)_{qr} + (\theta\omega)_{ap} + (\theta\gamma)_{aq} + (\theta\tau)_{ar} + (\phi\omega)_{bp} + (\phi\gamma)_{bq} + (\phi\tau)_{br} + \varepsilon_{abpqrm} \quad (4.5)$$

dimana $a = b = p = q = r = 1, 2$ dan $m = 1, 2, \dots, M$. Asumsi dari model (4.5) adalah $\delta_{abm} \sim IIDN(0, \sigma_{WP}^2)$ dan $\varepsilon_{abpqrm} \sim IIDN(0, \sigma_{SP}^2)$, δ_{abm} dan ε_{abpqrm} saling bebas.

Batasan dari model (4.5) adalah :

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^2 \theta_a &= \sum_{b=1}^2 \phi_b = \sum_{p=1}^2 \omega_p = \sum_{q=1}^2 \gamma_q = \sum_{r=1}^2 \tau_r = 0 \\ \sum_{a=1}^2 (\theta\phi)_{ab} &= \sum_{a=1}^2 (\theta\omega)_{ap} = \sum_{a=1}^2 (\theta\gamma)_{aq} = \sum_{a=1}^2 (\theta\tau)_{ar} = 0 \\ \sum_{b=1}^2 (\theta\phi)_{ab} &= \sum_{b=1}^2 (\phi\omega)_{bp} = \sum_{b=1}^2 (\phi\gamma)_{bq} = \sum_{b=1}^2 (\phi\tau)_{br} = 0 \\ \sum_{p=1}^2 (\theta\omega)_{ap} &= \sum_{p=1}^2 (\phi\omega)_{bp} = \sum_{p=1}^2 (\omega\gamma)_{pq} = \sum_{p=1}^2 (\omega\tau)_{pr} = 0 \\ \sum_{q=1}^2 (\theta\gamma)_{aq} &= \sum_{q=1}^2 (\phi\gamma)_{bq} = \sum_{q=1}^2 (\omega\gamma)_{pq} = \sum_{q=1}^2 (\gamma\tau)_{qr} = 0 \\ \sum_{r=1}^2 (\theta\tau)_{ar} &= \sum_{r=1}^2 (\phi\tau)_{br} = \sum_{r=1}^2 (\omega\tau)_{pr} = \sum_{r=1}^2 (\gamma\tau)_{qr} = 0 \end{aligned}$$

Model linier dari model (4.5) adalah sebagai berikut :

$$y = X\beta + \delta + \varepsilon \quad (4.6)$$

dimana apabila untuk setiap perlakuan dilakukan pengulangan sebanyak M kali, maka :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{2^{(2+3)-(0+0)}, M \times 1} &= [y_{111121}, y_{111122}, \dots, y_{11112M}, y_{112111}, \dots, y_{11211M}, y_{111211}, \dots, y_{11121M}, \\
 & y_{112221}, \dots, y_{11222M}, y_{121111}, \dots, y_{12111M}, y_{122121}, \dots, y_{12212M}, \\
 & y_{121221}, \dots, y_{12122M}, y_{122211}, \dots, y_{12221M}, y_{211111}, \dots, y_{21111M}, \\
 & y_{212121}, \dots, y_{21212M}, y_{211221}, \dots, y_{21122M}, y_{212211}, \dots, y_{21221M}, \\
 & y_{221121}, \dots, y_{22112M}, y_{222111}, \dots, y_{22211M}, y_{221211}, \dots, y_{22121M}, y_{222221}, \dots, y_{22222M}]^T \\
 \boldsymbol{\beta}_{51 \times 1} &= [\mu, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, (\theta\phi)_{11}, \dots, (\theta\phi)_{22}, \omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \tau_1, \dots, (\phi\tau)_{11}, \dots, (\phi\tau)_{22}]^T \\
 \boldsymbol{\delta}_{2^{(2+3)-(0+0)}, M \times 1} &= [\delta_{111}, \delta_{112}, \dots, \delta_{11M}, \delta_{111}, \dots, \delta_{11M}, \delta_{111}, \dots, \delta_{11M}, \delta_{111}, \dots, \delta_{11M}, \\
 & \delta_{121}, \delta_{122}, \dots, \delta_{12M}, \delta_{121}, \dots, \delta_{12M}, \delta_{121}, \dots, \delta_{12M}, \delta_{121}, \dots, \delta_{12M}, \\
 & \delta_{211}, \delta_{212}, \dots, \delta_{21M}, \delta_{211}, \dots, \delta_{21M}, \delta_{211}, \dots, \delta_{21M}, \delta_{211}, \dots, \delta_{21M}, \\
 & \delta_{221}, \delta_{222}, \dots, \delta_{22M}, \delta_{221}, \dots, \delta_{22M}, \delta_{221}, \dots, \delta_{22M}, \delta_{221}, \dots, \delta_{22M}]^T \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{2^{(2+3)-(0+0)}, M \times 1} &= [\varepsilon_{111121}, \varepsilon_{111122}, \dots, \varepsilon_{11112M}, \varepsilon_{112111}, \dots, \varepsilon_{11211M}, \varepsilon_{111211}, \dots, \varepsilon_{11121M}, \\
 & \varepsilon_{112221}, \dots, \varepsilon_{11222M}, \varepsilon_{121111}, \dots, \varepsilon_{12111M}, \varepsilon_{122121}, \dots, \varepsilon_{12212M}, \\
 & \varepsilon_{121221}, \dots, \varepsilon_{12122M}, \varepsilon_{122211}, \dots, \varepsilon_{12221M}, \varepsilon_{211111}, \dots, \varepsilon_{21111M}, \\
 & \varepsilon_{212121}, \dots, \varepsilon_{21212M}, \varepsilon_{211221}, \dots, \varepsilon_{21122M}, \varepsilon_{212211}, \dots, \varepsilon_{21221M}, \\
 & \varepsilon_{221121}, \dots, \varepsilon_{22112M}, \varepsilon_{222111}, \dots, \varepsilon_{22211M}, \varepsilon_{221211}, \dots, \varepsilon_{22121M}, \varepsilon_{222221}, \dots, \varepsilon_{22222M}]^T
 \end{aligned}$$

Model (4.6) mengasumsikan $\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$, dengan \mathbf{V} adalah :

$$\mathbf{V} = \sigma_{WP}^2 \mathbf{J}_{2^{(2+3)-(0+0)}, M \times 2^{(2+3)-(0+0)}, M} + \sigma_{SP}^2 \mathbf{I}_{2^{(2+3)-(0+0)}, M \times 2^{(2+3)-(0+0)}, M}$$

Apabila dalam model (4.6) tidak digunakan batasan, maka akan dihasilkan matriks \mathbf{X} , yang bersesuaian dengan respon dan parameter model, tidak ber-rank penuh. Hal ini akan mengakibatkan hasil estimasi tidak tunggal. Dengan memasukkan batasan parameter model dari rancangan FFSP, maka parameter model dalam vektor β akan berkurang, sedangkan matriks \mathbf{X} akan ber-rank penuh, dan memiliki kolom yang lebih sedikit. Elemen dari vektor β akibat adanya pembatasan parameter, adalah :

$$\beta_{16 \times 1} = [\mu, \theta_1, \phi_1, (\theta\phi)_{11}, \omega_1, \gamma_1, \tau_1, (\omega\gamma)_{11}, (\omega\tau)_{11}, (\gamma\tau)_{11}, (\theta\omega)_{11}, \dots, (\phi\tau)_{11}]^T$$

Misalkan diberikan respon y_{111121} , dengan menggunakan persamaan (4.5), maka :

$$y_{111121} = \mu + \theta_1 + \phi_1 + (\theta\phi)_{11} + \delta_{11} + \omega_1 + \gamma_1 + \tau_1 + (\omega\gamma)_{11} + \dots + (\phi\tau)_{12} + \varepsilon_{111121}$$

Dengan memasukkan batasan dalam model, maka :

$$y_{111121} = \mu + \theta_1 + \phi_1 + (\theta\phi)_{11} + \delta_{11} + \omega_1 + \gamma_1 + (-\tau_1) + (\omega\gamma)_{11} + \dots + (-(\phi\tau)_{11}) + \varepsilon_{111121}$$

Berdasarkan persamaan di atas, maka elemen baris yang bersesuaian dengan respon y_{111121} , pada matriks \mathbf{X} , adalah :

$$\mathbf{x} = [1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1]$$

Dengan menggunakan cara yang sama untuk semua respon, maka akan diperoleh keseluruhan elemen matriks \mathbf{X} . Elemen dari matriks \mathbf{X} secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran 1.

Untuk mendapatkan penduga dari parameter-parameter model, digunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), karena dalam hal ini distribusi dari vektor \mathbf{y} diketahui. Berdasarkan model linier (4.6), diketahui bahwa asumsi dari model adalah $\delta + \varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$. Karena vektor \mathbf{y} merupakan kombinasi linier dari *error* maka vektor tersebut juga berdistribusi normal, dimana :

$$E(\mathbf{y}) = E(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + E(\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \text{ dan}$$

$$\text{Var}(\mathbf{y}) = \text{Var}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \text{Var}(\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{V} \text{ atau } \mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}).$$

Berdasarkan distribusi dari vektor \mathbf{y} , dibangun fungsi *Likelihood* sebagai berikut :

$$L(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}|\mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{2^{(2+3)}-(0+1)}{2} \cdot M} |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\right]$$

Untuk mendapatkan penduga dari parameter model, maka dicari turunan pertama fungsi *Likelihood* di atas. Agar lebih mudah, sebelum dicari turunan pertamanya terlebih dahulu fungsi *Likelihood* diubah ke dalam bentuk logaritma natural (ln), sebagai berikut :

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}|\mathbf{y}) = \frac{-2^{(2+3)}-(0+1) \cdot M}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\mathbf{V}| - \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

Secara matematis, memaksimumkan fungsi *Likelihood*, sama dengan memaksimumkan fungsi ln *Likelihood*, yaitu dengan cara mencari turunan pertamanya, sebagai berikut :

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}|\mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\left(-\frac{1}{2}\right) 2\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}$$

Untuk penduga parameter yang tidak bergantung pada matriks varian kovarian maka penduganya adalah :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \tag{4.7}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa penduga yang didapat adalah maksimum, yaitu dengan cara mencari turunan kedua dari fungsi ln *Likelihood*, sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V} | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\beta}^2} = -\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}$$

Jika $-\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ definit negatif maka dapat disimpulkan bahwa penduga yang diperoleh dari hasil turunan pertama fungsi \ln Likelihood adalah maksimum.

Penduga parameter model dari rancangan FFSP diperoleh dengan menguraikan penduga maksimum Likelihood pada persamaan (4.7). Karena matriks \mathbf{X} adalah matriks yang ortogonal, maka matriks $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ yang dihasilkan adalah matriks diagonal berukuran 16×16 dengan elemen diagonal adalah $2^{(2+3)-(0+1)} \cdot M = 16M$, sehingga

$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{16M} \mathbf{I}_{16}$. Elemen dari vektor $\mathbf{X}^T \mathbf{y}$, adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{y} = \left[\sum_{i=1}^{16M} y_i, \sum_{i=1}^{16M} X_{1i} y_i, \sum_{i=1}^{16M} X_{2i} y_i, \sum_{i=1}^{16M} X_{1i} X_{2i} y_i, \sum_{i=1}^{16M} X_{3i} y_i, \dots, \sum_{i=1}^{16M} X_{2i} X_{5i} y_i \right]^T$$

Dengan demikian elemen dari vektor $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{16M} \left[\sum_{i=1}^{16M} y_i, \sum_{i=1}^{16M} X_{1i} y_i, \sum_{i=1}^{16M} X_{2i} y_i, \sum_{i=1}^{16M} X_{1i} X_{2i} y_i, \sum_{i=1}^{16M} X_{3i} y_i, \dots, \sum_{i=1}^{16M} X_{2i} X_{5i} y_i \right]^T$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa :

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\mu} = \frac{1}{16M} \sum_{i=1}^{16M} y_i = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot M} \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M y_{abpqr} = \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\theta}_1 = \frac{1}{16M} \sum_{i=1}^{16M} X_{1i} y_i = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot M} (y_{1\dots} - y_{2\dots})$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot M} \left(\sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M y_{1b p q r} - \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M y_{2b p q r} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M y_{1b p q r} - \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M y_{2b p q r}}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot M} \right) = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{2}$$

$$= \frac{\bar{y}_{1\dots} - (2\bar{y}_{\dots} - \bar{y}_{1\dots})}{2} = \frac{2\bar{y}_{1\dots} - 2\bar{y}_{\dots}}{2} = \bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\theta}_2 = -\hat{\theta}_1 = -(\bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{\dots}) = \bar{y}_{\dots} - \bar{y}_{1\dots} = \bar{y}_{\dots} - (2\bar{y}_{\dots} - \bar{y}_{2\dots}) = \bar{y}_{2\dots} - \bar{y}_{\dots}$$

Dengan cara yang sama diperoleh :

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\phi}_1 = \bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\phi}_2 = \bar{y}_{2\dots} - \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\beta}_4 = \hat{\omega}_1 = \bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\omega}_2 = \bar{y}_{2\dots} - \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\beta}_5 = \hat{\gamma}_1 = \bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\gamma}_2 = \bar{y}_{2\dots} - \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\beta}_6 = \hat{\tau}_1 = \bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\tau}_2 = \bar{y}_{2\dots} - \bar{y}_{\dots}$$

Penaksir parameter interaksi antar dua faktor adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_3 &= (\hat{\theta\phi})_{11} = \frac{1}{16M} \sum_{i=1}^{16M} X_{1i} X_{2i} y_i = \frac{1}{2.2.2.2.M} (y_{11\dots} - y_{12\dots} - y_{21\dots} + y_{22\dots}) \\ &= \frac{1}{2.2} \left(\frac{y_{11\dots} - y_{12\dots} - y_{21\dots} + y_{22\dots}}{2.2.M} \right) = \frac{1}{4} (\bar{y}_{11\dots} - \bar{y}_{12\dots} - \bar{y}_{21\dots} + \bar{y}_{22\dots}) \\ &= \frac{\bar{y}_{11\dots} - \bar{y}_{12\dots} - \bar{y}_{21\dots} + (4\bar{y}_{\dots} - \bar{y}_{11\dots} - \bar{y}_{12\dots} - \bar{y}_{21\dots})}{4} = \frac{-2\bar{y}_{12\dots} - 2\bar{y}_{21\dots} + 4\bar{y}_{\dots}}{4} \\ &= \frac{-2(2\bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{1\dots}) - 2(2\bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{1\dots}) + 4\bar{y}_{\dots}}{4} = \bar{y}_{11\dots} - \bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{1\dots} + \bar{y}_{\dots} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\hat{\theta\phi})_{12} &= -(\hat{\theta\phi})_{11} = -(\bar{y}_{11\dots} - \bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{1\dots} + \bar{y}_{\dots}) \\ &= -\bar{y}_{11\dots} + \left(\frac{\bar{y}_{11\dots} + \bar{y}_{12\dots}}{2} \right) + \left(\frac{\bar{y}_{11\dots} + \bar{y}_{21\dots}}{2} \right) - \left(\frac{\bar{y}_{11\dots} + \bar{y}_{12\dots} + \bar{y}_{21\dots} + \bar{y}_{22\dots}}{4} \right) \\ &= \frac{-4\bar{y}_{11\dots} + 2\bar{y}_{11\dots} + 2\bar{y}_{12\dots} + 2\bar{y}_{11\dots} + 2\bar{y}_{21\dots} - \bar{y}_{11\dots} - \bar{y}_{12\dots} - \bar{y}_{21\dots} - \bar{y}_{22\dots}}{4} \\ &= \frac{\bar{y}_{12\dots} - \bar{y}_{11\dots} - \bar{y}_{22\dots} + \bar{y}_{21\dots}}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{y}_{12\dots} - \bar{y}_{11\dots} - \bar{y}_{22\dots} + (4\bar{y}_{\dots} - \bar{y}_{11\dots} - \bar{y}_{22\dots} - \bar{y}_{12\dots})}{4} = \frac{-2\bar{y}_{11\dots} - 2\bar{y}_{22\dots} + 4\bar{y}_{\dots}}{4}$$

$$= \frac{-2(2\bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{12\dots}) - 2(2\bar{y}_{2\dots} - \bar{y}_{12\dots}) + 4\bar{y}_{\dots}}{4} = \bar{y}_{12\dots} - \bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{2\dots} + \bar{y}_{\dots}$$

Dengan cara yang sama diperoleh :

$$(\widehat{\theta\phi})_{21} = -(\widehat{\theta\phi})_{11} = \bar{y}_{21\dots} - \bar{y}_{2\dots} - \bar{y}_{1\dots} + \bar{y}_{\dots}$$

$$(\widehat{\theta\phi})_{22} = (\widehat{\theta\phi})_{11} = \bar{y}_{22\dots} - \bar{y}_{2\dots} - \bar{y}_{2\dots} + \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\beta}_7 = (\widehat{\omega\gamma})_{11} = \bar{y}_{\dots 11} - \bar{y}_{\dots 1\dots} - \bar{y}_{\dots 1\dots} + \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\beta}_8 = (\widehat{\omega\tau})_{11} = \bar{y}_{\dots 11} - \bar{y}_{\dots 1\dots} - \bar{y}_{\dots 1\dots} + \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\beta}_9 = (\widehat{\gamma\tau})_{11} = \bar{y}_{\dots 11} - \bar{y}_{\dots 1\dots} - \bar{y}_{\dots 1\dots} + \bar{y}_{\dots}$$

$$\hat{\beta}_{10} = (\widehat{\theta\omega})_{11} = \bar{y}_{1\dots 11} - \bar{y}_{1\dots 1\dots} - \bar{y}_{1\dots 1\dots} + \bar{y}_{\dots}$$

dan seterusnya.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa penduga parameter model dari rancangan FFSP adalah penduga yang tidak bias untuk parameter yang diduga.

$$E(\hat{\mu}) = E(\bar{y}_{\dots}) = \frac{1}{16M} \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M E(y_{abpqr m})$$

$$= \frac{1}{16M} \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M (\mu + \theta_a + \phi_b + \dots + (\phi\tau)_{br})$$

$$= \frac{1}{16M} (16M\mu + 0 + \dots + 0) = \mu$$

$$E(\bar{y}_{1\dots}) = \frac{1}{8M} \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M E(y_{1bpqr m})$$

$$= \frac{1}{8M} \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M (\mu + \theta_1 + \dots + (\phi\tau)_{br})$$

$$= \frac{1}{8M} (8M\mu + 8M\theta_1 + 0 + \dots + 0) = \mu + \theta_1$$

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\bar{y}_{1\dots} - \bar{y}_{\dots}) = E(\bar{y}_{1\dots}) - E(\bar{y}_{\dots}) = \mu + \theta_1 - \mu = \theta_1$$

$$E(\bar{y}_{21\dots}) = \frac{1}{4M} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^M E(y_{21pqrm})$$

$$= \frac{1}{4M} (4M\mu + 4M\theta_2 + 4M\phi_1 + 4M(\theta\phi)_{21} + 0 + \dots + 0)$$

$$= \mu + \theta_2 + \phi_1 + (\theta\phi)_{21}$$

$$E\left(\left(\widehat{\theta\phi}\right)_{21}\right) = E(\bar{y}_{21\dots} - \bar{y}_{2\dots} - \bar{y}_{1\dots} + \bar{y}_{\dots})$$

$$= (\mu + \theta_2 + \phi_1 + (\theta\phi)_{21}) - (\mu + \theta_2) - (\mu + \phi_1) + \mu = (\theta\phi)_{21}$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa semua penduga parameter model dari rancangan FFSP adalah penduga tak bias untuk parameter yang diduga.

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa rancangan split-plot merupakan gabungan dari dua rancangan faktorial. Untuk menentukan penduga *error* faktor WP, maka pandang rancangan percobaan sebagai rancangan faktor-faktor WP. Misalkan untuk kasus di atas struktur data rancangan jika dipandang sebagai rancangan untuk faktor WP saja adalah sebagai berikut :

Tabel 4.8. Rancangan Faktorial dengan Dua Faktor WP

Faktor A	Faktor B	Replikasi (Blok)				Mean WP treatment
		1	2	...	M	
-	-	$\bar{y}_{11...1}$	$\bar{y}_{11...2}$...	$\bar{y}_{11...M}$	$\bar{y}_{11...}$
-	+	$\bar{y}_{12...1}$	$\bar{y}_{12...2}$...	$\bar{y}_{12...M}$	$\bar{y}_{12...}$
+	-	$\bar{y}_{21...1}$	$\bar{y}_{21...2}$...	$\bar{y}_{21...M}$	$\bar{y}_{21...}$
+	+	$\bar{y}_{22...1}$	$\bar{y}_{22...2}$...	$\bar{y}_{22...M}$	$\bar{y}_{22...}$
Mean Blok		$\bar{y}_{...1}$	$\bar{y}_{...2}$...	$\bar{y}_{...M}$	$\bar{y}_{...}$

Model dari rancangan pada Tabel 4.8 adalah :

$$\bar{y}_{ab...m} = \mu + \theta_a + \phi_b + (\theta\phi)_{ab} + \rho_m + \delta_{abm}^* \quad (4.8)$$

Apabila penduga untuk $\mu, \theta_a, \phi_b, (\theta\phi)_{ab}, \rho_m$ dimasukkan ke persamaan (4.8), maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned} \bar{y}_{ab...m} = & \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{a...} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{b...} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ab...} - \bar{y}_{a...} - \bar{y}_{b...} + \bar{y}_{...}) + \\ & (\bar{y}_{...m} - \bar{y}_{...}) + \delta_{abm}^* \end{aligned} \quad (4.9)$$

dengan demikian diperoleh $\hat{\delta}_{abm}^* = (\bar{y}_{ab...m} - \bar{y}_{ab...} - \bar{y}_{...m} + \bar{y}_{...})$.

Apabila dalam analisis data pengaruh blok/replikasi diabaikan maka sumber variasi yang disebabkan oleh blok/replikasi digabungkan dengan komponen *error*. Dengan demikian persamaan (4.8) sampai dengan (4.9) menjadi :

$$\bar{y}_{ab...m} = \mu + \theta_a + \phi_b + (\theta\phi)_{ab} + \delta_{abm} \quad (4.10)$$

dan diperoleh $\hat{\delta}_{abm} = (\bar{y}_{ab...m} - \bar{y}_{ab...})$. Ekspektasi dan varian dari $\hat{\delta}_{abm}$ dapat dilihat pada Lampiran 2.

Selanjutnya penduga *error* faktor SP, ditentukan dengan kembali memandang rancangan FFSP secara utuh. Apabila semua penduga parameter model dan *error* WP dimasukkan ke persamaan (4.5), maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned}
y_{abpqrm} = & \bar{y}_{.....} + (\bar{y}_{a.....} - \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{b.....} - \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{ab.....} - \bar{y}_{a.....} - \bar{y}_{b.....} + \bar{y}_{.....}) + \\
& (\bar{y}_{ab...m} - \bar{y}_{ab.....}) + (\bar{y}_{.p...} - \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{.q..} - \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{.r.} - \bar{y}_{.....}) + \\
& (\bar{y}_{.pq..} - \bar{y}_{.p...} - \bar{y}_{.q..} + \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{.p.r.} - \bar{y}_{.p...} - \bar{y}_{.r.} + \bar{y}_{.....}) + \\
& (\bar{y}_{.qr.} - \bar{y}_{.q..} - \bar{y}_{.r.} + \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{a.p...} - \bar{y}_{a.....} - \bar{y}_{.p...} + \bar{y}_{.....}) + \\
& (\bar{y}_{a.q..} - \bar{y}_{a.....} - \bar{y}_{.q..} + \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{a.r.} - \bar{y}_{a.....} - \bar{y}_{.r.} + \bar{y}_{.....}) + \\
& (\bar{y}_{bp...} - \bar{y}_{b.....} - \bar{y}_{.p...} + \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{b.q..} - \bar{y}_{b.....} - \bar{y}_{.q..} + \bar{y}_{.....}) + \\
& (\bar{y}_{b.r.} - \bar{y}_{b.....} - \bar{y}_{.r.} + \bar{y}_{.....}) + \varepsilon_{abpqrm}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Berdasarkan persamaan (4.11) diperoleh penduga *error* SP, sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{abpqrm} = & (y_{abpqrm} - \bar{y}_{ab...m} - \bar{y}_{a.p...} - \bar{y}_{a.q..} - \bar{y}_{a.r.} - \bar{y}_{bp...} - \bar{y}_{b.q..} - \bar{y}_{b.r.} - \bar{y}_{.pq..} - \bar{y}_{.p.r.} + \\
& -\bar{y}_{.qr.} + 3\bar{y}_{a.....} + 3\bar{y}_{b.....} + 3\bar{y}_{.p...} + 3\bar{y}_{.q..} + 3\bar{y}_{.r.} - 6\bar{y}_{.....})
\end{aligned}$$

Ekspektasi dan varian dari $\hat{\varepsilon}_{abpqrm}$ dapat dilihat pada Lampiran 2.

Setelah semua penduga diketahui, selanjutnya dilakukan dekomposisi model sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
y_{abpqrm} - \bar{y}_{.....} = & (\bar{y}_{a.....} - \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{b.....} - \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{ab.....} - \bar{y}_{a.....} - \bar{y}_{b.....} + \bar{y}_{.....}) + \\
& (\bar{y}_{ab...m} - \bar{y}_{ab.....}) + (\bar{y}_{.p...} - \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{.q..} - \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{.r.} - \bar{y}_{.....}) + \\
& (\bar{y}_{.pq..} - \bar{y}_{.p...} - \bar{y}_{.q..} + \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{.p.r.} - \bar{y}_{.p...} - \bar{y}_{.r.} + \bar{y}_{.....}) + \\
& (\bar{y}_{.qr.} - \bar{y}_{.q..} - \bar{y}_{.r.} + \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{a.p...} - \bar{y}_{a.....} - \bar{y}_{.p...} + \bar{y}_{.....}) + \\
& (\bar{y}_{a.q..} - \bar{y}_{a.....} - \bar{y}_{.q..} + \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{a.r.} - \bar{y}_{a.....} - \bar{y}_{.r.} + \bar{y}_{.....}) + \\
& (\bar{y}_{bp...} - \bar{y}_{b.....} - \bar{y}_{.p...} + \bar{y}_{.....}) + (\bar{y}_{b.q..} - \bar{y}_{b.....} - \bar{y}_{.q..} + \bar{y}_{.....}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{y}_{b..r} - \bar{y}_{b....} - \bar{y}_{...r} + \bar{y}_{.....}) + (y_{abpqrm} - \bar{y}_{ab...m} - \bar{y}_{a.p...} - \bar{y}_{a.q..} - \bar{y}_{a...r} + \\
& -\bar{y}_{bp...} - \bar{y}_{b.q..} - \bar{y}_{b..r} - \bar{y}_{..pq..} - \bar{y}_{.p.r.} - \bar{y}_{...qr.} + 3\bar{y}_{a....} + 3\bar{y}_{b....} + 3\bar{y}_{.p...} + \\
& 3\bar{y}_{...q..} + 3\bar{y}_{...r.} - 6\bar{y}_{.....}) \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Kedua ruas persamaan (4.12) dikuadratkan, kemudian dijumlahkan terhadap $a, b, p, q, r,$ dan $m,$ diperoleh *sum of square* sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M (y_{abpqrm} - \bar{y}_{.....})^2 &= \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M ((\bar{y}_{a....} - \bar{y}_{.....}) + \dots + \hat{\epsilon}_{abpqrm})^2 \\
\sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M (y_{abpqrm} - \bar{y}_{.....})^2 &= 8M \sum_{a=1}^2 (\bar{y}_{a....} - \bar{y}_{.....})^2 + 8M \sum_{b=1}^2 (\bar{y}_{b....} - \bar{y}_{.....})^2 + \\
4M \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 (\bar{y}_{ab...} - \bar{y}_{a....} - \bar{y}_{b....} + \bar{y}_{.....})^2 &+ 4 \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{m=1}^M (\bar{y}_{ab...m} - \bar{y}_{ab....})^2 + \\
8M \sum_{p=1}^2 (\bar{y}_{.p...} - \bar{y}_{.....})^2 + 8M \sum_{q=1}^2 (\bar{y}_{...q..} - \bar{y}_{.....})^2 &+ 8M \sum_{r=1}^2 (\bar{y}_{...r.} - \bar{y}_{.....})^2 + \\
4M \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (\bar{y}_{..pq..} - \bar{y}_{.p...} - \bar{y}_{...q..} + \bar{y}_{.....})^2 &+ 4M \sum_{p=1}^2 \sum_{r=1}^2 (\bar{y}_{.p.r.} - \bar{y}_{.p...} - \bar{y}_{...r.} + \bar{y}_{.....})^2 + \\
4M \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 (\bar{y}_{...qr.} - \bar{y}_{...q..} - \bar{y}_{...r.} + \bar{y}_{.....})^2 &+ 4M \sum_{a=1}^2 \sum_{p=1}^2 (\bar{y}_{a.p...} - \bar{y}_{a....} - \bar{y}_{.p...} + \bar{y}_{.....})^2 + \\
4M \sum_{a=1}^2 \sum_{q=1}^2 (\bar{y}_{a.q..} - \bar{y}_{a....} - \bar{y}_{...q..} + \bar{y}_{.....})^2 &+ 4M \sum_{a=1}^2 \sum_{r=1}^2 (\bar{y}_{a...r.} - \bar{y}_{a....} - \bar{y}_{...r.} + \bar{y}_{.....})^2 + \\
4M \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 (\bar{y}_{bp...} - \bar{y}_{b....} - \bar{y}_{.p...} + \bar{y}_{.....})^2 &+ 4M \sum_{b=1}^2 \sum_{q=1}^2 (\bar{y}_{b.q..} - \bar{y}_{b....} - \bar{y}_{...q..} + \bar{y}_{.....})^2 + \\
4M \sum_{b=1}^2 \sum_{r=1}^2 (\bar{y}_{b..r.} - \bar{y}_{b....} - \bar{y}_{...r.} + \bar{y}_{.....})^2 &+ SSE_{SP}, \quad (4.13)
\end{aligned}$$

atau

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSE_{WP} + SSP + SSQ + SSR + SSPQ + SSPR + SSQR +$$

$$SSAP + SSAQ + SSAR + SSBP + SSBQ + SSBR + SSE_{SP}, \quad (4.14)$$

dimana

$$SSE_{SP} = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M (y_{abpqr} - \bar{y}_{ab...m} - \bar{y}_{a.p...} - \bar{y}_{a..q..} - \bar{y}_{a...r.} - \bar{y}_{.bp...} - \bar{y}_{.b.q..} + \\ - \bar{y}_{.b..r.} - \bar{y}_{..pq..} - \bar{y}_{..p.r.} + -\bar{y}_{..qr.} + 3\bar{y}_{a....} + 3\bar{y}_{.b....} + 3\bar{y}_{..p...} + 3\bar{y}_{..q..} + 3\bar{y}_{...r.} - 6\bar{y}_{.....})^2$$

Derajat bebas dari setiap komponen persamaan (4.14) adalah :

$$(16M - 1) = (2-1) + (2-1) + (2-1)(2-1) + 2^{2-0}(M-1) + (2-1) + (2-1) + \\ (2-1) + (2-1)(2-1) + (2-1)(2-1) + (2-1)(2-1) + (2-1)(2-1) + (2-1)(2-1) + \\ (2-1)(2-1) + (2-1)(2-1) + (2-1)(2-1) + (2-1)(2-1) + \\ (2-1)(2-1) + (2^{(2+3)-(0+1)} - 2^{2-0})(M-1) \quad (4.17)$$

Berdasarkan persamaan (4.13) dapat diketahui penduga varian *error* WP dan *error*

SP adalah :

$$\hat{\sigma}_{WP}^2 = \frac{4 \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{m=1}^M (\bar{y}_{ab...m} - \bar{y}_{ab....})^2}{2^{2-0}(M-1)} \quad \text{dan} \quad \hat{\sigma}_{SP}^2 = \frac{\sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M (\hat{\epsilon}_{abpqr}^2)}{(2^{(2+3)-(0+1)} - 2^{2-0})(M-1)}$$

Ekspektasi dari $\hat{\sigma}_{WP}^2$ dan $\hat{\sigma}_{SP}^2$ dapat dilihat pada Lampiran 2.

Analisa data hasil percobaan dengan menggunakan rancangan FFSP dilakukan antara lain dengan menggunakan tabel *ANOVA* atau statistik uji *F*. Karena rancangan FFSP merupakan penggabungan dari dua buah rancangan faktorial fraksional, maka analisa data dalam tabel *ANOVA* terbagi menjadi dua bagian yaitu a) analisa untuk faktor-faktor dan interaksi antar faktor WP; b) analisa untuk faktor-faktor dan interaksi antar faktor SP serta interaksi antara faktor WP dengan faktor SP. Mengingat faktor-faktor yang digunakan dalam rancangan adalah faktor tetap, maka pembagi dari *Mean Square* (MS) efek faktor dan efek interaksi antar faktor pada



statistik uji F , adalah *Mean Square Error* (MSE). Permasalahannya adalah MSE dari

WP atau SP-kah yang akan menjadi pembagi dari MS :

1. efek faktor dan interaksi antar faktor WP
2. efek faktor dan interaksi antar faktor SP
3. efek interaksi antara faktor WP dan SP

Untuk mengetahui hal tersebut dicari ekspektasi *mean square* (EMS) dari masing-masing kontras. $E(MSA)$ dapat dicari sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 E(MSA) &= E\left(8M \sum_{a=1}^2 (\bar{y}_{a\dots\dots} - \bar{y}_{\dots\dots})^2\right) = 8M \sum_{a=1}^2 E(\bar{y}_{a\dots\dots} - \bar{y}_{\dots\dots})^2 \\
 &= 8M \sum_{a=1}^2 E\left(\mu + \theta_a + \bar{\delta}_{a\dots} + \bar{\varepsilon}_{a\dots\dots} - \mu - \bar{\delta}_{\dots} + \bar{\varepsilon}_{\dots\dots}\right)^2 \\
 &= 8M \sum_{a=1}^2 \left(\theta_a^2 + E(\bar{\delta}_{a\dots}^2) + E(\bar{\varepsilon}_{a\dots\dots}^2) + E(\bar{\delta}_{\dots}^2) + E(\bar{\varepsilon}_{\dots\dots}^2) - 2E(\bar{\delta}_{a\dots} \bar{\delta}_{\dots}) - 2E(\bar{\varepsilon}_{a\dots\dots} \bar{\varepsilon}_{\dots\dots})\right) \\
 &= 8M \sum_{a=1}^2 \left(\theta_a^2 + \frac{\sigma_{WP}^2}{2M} + \frac{\sigma_{SP}^2}{8M} + \frac{\sigma_{WP}^2}{4M} + \frac{\sigma_{SP}^2}{16M} - 2\frac{\sigma_{WP}^2}{4M} - 2\frac{\sigma_{SP}^2}{16M}\right) = 8M \sum_{a=1}^2 \theta_a^2 + 4\sigma_{WP}^2 + \sigma_{SP}^2,
 \end{aligned}$$

dengan cara yang sama diperoleh $E(MSB) = 8M \sum_{b=1}^2 \phi_b^2 + 4\sigma_{WP}^2 + \sigma_{SP}^2$, dan $E(MSAB)$

ditentukan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 E(MSAB) &= E\left(4M \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 (\bar{y}_{ab\dots} - \bar{y}_{a\dots} - \bar{y}_{b\dots} + \bar{y}_{\dots})^2\right) \\
 &= 4M \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 E\left((\theta\phi)_{ab} + \bar{\delta}_{ab} - \bar{\delta}_{a\dots} - \bar{\delta}_{b\dots} + \bar{\delta}_{\dots} + \bar{\varepsilon}_{ab\dots} - \bar{\varepsilon}_{a\dots} - \bar{\varepsilon}_{b\dots} + \bar{\varepsilon}_{\dots}\right)^2 \\
 &= 4M \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \left((\theta\phi)_{ab}^2 + E(\bar{\delta}_{ab}^2) + \dots + E(\bar{\varepsilon}_{ab\dots}^2) - 2E(\bar{\delta}_{ab} \bar{\delta}_{a\dots}) - \dots - 2E(\bar{\varepsilon}_{ab\dots} \bar{\varepsilon}_{\dots})\right) \\
 &= 4M \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \left((\theta\phi)_{ab}^2 + \frac{\sigma_{WP}^2}{M} + \dots + \frac{\sigma_{SP}^2}{16M} - 2\frac{\sigma_{WP}^2}{4M} - \dots - 2\frac{\sigma_{SP}^2}{16M}\right)
 \end{aligned}$$

$$E(MSAB) = 4M \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 (\theta\phi)_{ab}^2 + 4\sigma_{WP}^2 + \sigma_{SP}^2.$$

Berdasarkan penurunan $E(MSE_{WP})$ pada Lampiran 2, dimana

$$E(MSE_{WP}) = 4\sigma_{WP}^2 + \sigma_{SP}^2, \text{ maka untuk pengujian kontras pada rancangan WP}$$

digunakan MSE_{WP} sebagai pembagi dalam statistik uji F .

Untuk rancangan SP pembagi dalam statistik uji F ditentukan dengan cara yang sama, sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E(MSP) &= E\left(8M \sum_{p=1}^2 (\bar{y}_{..p...} - \bar{y}_{.....})^2\right) = 8M \sum_{p=1}^2 E(\bar{y}_{..p...} - \bar{y}_{.....})^2 \\ &= 8M \sum_{p=1}^2 E\left(\mu + \omega_p + \bar{\delta}_{...} + \bar{\varepsilon}_{..p...} - \mu - \bar{\delta}_{...} + \bar{\varepsilon}_{.....}\right)^2 \\ &= 8M \sum_{p=1}^2 \left(\omega_p^2 + E(\bar{\varepsilon}_{..p...}^2) + E(\bar{\varepsilon}_{.....}^2) - 2E(\bar{\varepsilon}_{..p...} \bar{\varepsilon}_{.....})\right) \\ &= 8M \sum_{p=1}^2 \left(\omega_p^2 + \frac{\sigma_{SP}^2}{8M} + \frac{\sigma_{SP}^2}{16M} - 2\frac{\sigma_{SP}^2}{16M}\right) = 8M \sum_{p=1}^2 \omega_p^2 + \sigma_{SP}^2 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dicari EMS dari interaksi antar faktor SP yaitu :

$$\begin{aligned} E(MSPQ) &= E\left(4M \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (\bar{y}_{..pq..} - \bar{y}_{..p...} - \bar{y}_{...q..} + \bar{y}_{.....})^2\right) \\ &= 4M \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 E\left((\omega\gamma)_{pq} + \bar{\varepsilon}_{..pq..} - \bar{\varepsilon}_{..p...} - \bar{\varepsilon}_{...q..} + \bar{\varepsilon}_{.....}\right)^2 \\ &= 4M \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \left((\omega\gamma)_{pq}^2 + E(\bar{\varepsilon}_{..pq..}^2) + \dots + E(\bar{\varepsilon}_{.....}^2) - 2E(\bar{\varepsilon}_{..pq..} \bar{\varepsilon}_{..p...}) - \dots - 2E(\bar{\varepsilon}_{...q..} \bar{\varepsilon}_{.....})\right) \\ &= 4M \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \left((\omega\gamma)_{pq}^2 + \frac{\sigma_{SP}^2}{4M} + \dots + \frac{\sigma_{SP}^2}{16M} - 2\frac{\sigma_{SP}^2}{8M} - \dots - 2\frac{\sigma_{SP}^2}{16M}\right) \end{aligned}$$

$$= 4M \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (\theta\phi)_{pq}^2 + \sigma_{SP}^2,$$

dan EMS efek interaksi antara faktor WP dan SP adalah :

$$E(MSAP) = 4M \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{p=1}^2 (\theta\omega)_{\alpha p}^2 + \sigma_{SP}^2$$

Karena $E(MSE_{SP}) = \sigma_{SP}^2$, maka untuk pengujian kontras pada rancangan SP digunakan MSE_{SP} sebagai pembagi dalam statistik uji F .

Berdasarkan uraian di atas disusun tabel ANOVA (Tabel 4.9) untuk menganalisa rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$ dengan generator R = ABPQ, sebagai berikut :

Tabel 4.9. Tabel ANOVA Rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$ *

Source of Variation	Degree of Freedom (df)	Sum of Square (SS)	Mean Square	F
A	2-1	SSA	MSA	FA
B	2-1	SSB	MSB	FB
AB	(2-1)(2-1)	SSAB	MSAB	FAB
Error WP	$2^{(2-0)}(M-1)$	SSE WP	MSE WP	FEWP
P	2-1	SSP	MSP	FP
Q	2-1	SSQ	MSQ	FQ
R	2-1	SSR	MSR	FR
PQ	(2-1)(2-1)	SSPQ	MSPQ	FPQ
PR	(2-1)(2-1)	SSPR	MSPR	FPR
RQ	(2-1)(2-1)	SSRQ	MSRQ	FRQ
AP	(2-1)(2-1)	SSAP	MSAP	FAP
AQ	(2-1)(2-1)	SSAQ	MSAQ	FAQ
AR	(2-1)(2-1)	SSAR	MSAR	FAR
BP	(2-1)(2-1)	SSBP	MSBP	FBP
BQ	(2-1)(2-1)	SSBQ	MSBQ	FBQ
BR	(2-1)(2-1)	SSBR	MSBR	FBR
Error SP	$(2^{(2+3)-(0+1)} - 2^{(2-0)})(M-1)$	SSE SP	MSE SP	
Total	$2^{(2+3)-(0+1)}M-1$	SST		

*Uraian SS, MS, dan F dapat dilihat pada Lampiran 5.

Pengujian kontras dengan menggunakan Tabel *ANOVA* (Tabel 4.9) memiliki hipotesis sebagai berikut :

$$H_{0A} : \theta_1 = \theta_2 = 0$$

$$H_{1A} : \text{ada satu } \theta_a \neq 0$$

$$H_{0B} : \phi_1 = \phi_2 = 0$$

$$H_{1B} : \text{ada satu } \phi_b \neq 0$$

$$H_{0AB} : (\theta\phi)_{11} = (\theta\phi)_{12} = (\theta\phi)_{21} = (\theta\phi)_{22} = 0$$

$$H_{1AB} : \text{paling tidak ada satu } (\theta\phi)_{ab} \neq 0$$

$$H_{0P} : \omega_1 = \omega_2 = 0$$

$$H_{1P} : \text{ada satu } \omega_p \neq 0$$

$$H_{0Q} : \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

$$H_{1Q} : \text{ada satu } \gamma_q \neq 0$$

$$H_{0R} : \tau_1 = \tau_2 = 0$$

$$H_{1R} : \text{ada satu } \tau_r \neq 0$$

$$H_{0PQ} : (\omega\gamma)_{11} = (\omega\gamma)_{12} = (\omega\gamma)_{21} = (\omega\gamma)_{22} = 0$$

$$H_{1PQ} : \text{paling tidak ada satu } (\omega\gamma)_{pq} \neq 0$$

⋮

$$H_{0BR} : (\phi\tau)_{11} = (\phi\tau)_{12} = (\phi\tau)_{21} = (\phi\tau)_{22} = 0$$

$$H_{1BR} : \text{paling tidak ada satu } (\phi\tau)_{br} \neq 0$$

$$H_{0Error WP} : \sigma_{WP}^2 = 0$$

$$H_{1Error WP} : \sigma_{WP}^2 \neq 0$$

Secara umum untuk rancangan FFSP $2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)}$ yang melibatkan faktor-faktor tetap, maka penduga parameter model *ANOVA* adalah :

- Penduga efek utama faktor : $\hat{\theta}_a = \bar{y}_a - \bar{y}$

- Penduga efek interaksi dua faktor : $(\widehat{\theta\phi})_{ab} = \bar{y}_{ab} - \bar{y}_a - \bar{y}_b + \bar{y}$

- Penduga efek interaksi tiga faktor : $(\widehat{\theta\phi\omega})_{abc} = \bar{y}_{abc} - \bar{y}_{ab} - \bar{y}_{bc} - \bar{y}_{ac} + \bar{y}_a + \bar{y}_b + \bar{y}_c - \bar{y}$

- dan seterusnya.

Penduga *error* untuk WP maupun SP dapat dicari melalui dekomposisi model untuk rancangan WP dan SP. Penduga-penduga tersebut merupakan penduga tak bias untuk parameter-parameter model rancangan.

Tabel *ANOVA* yang digunakan untuk menganalisa data hasil percobaan dengan rancangan FFSP $2^{(k_1+k_2)-(r_1+r_2)}$ terbagi menjadi dua bagian, yaitu bagian yang digunakan untuk menganalisa faktor-faktor WP beserta interaksinya, serta bagian yang digunakan untuk menganalisa faktor-faktor SP beserta interaksi antar faktor SP dan interaksi antara faktor WP dan SP. Dalam pengujian hipotesa yang melibatkan faktor-faktor WP maka MSE_{WP} yang digunakan sebagai pembagi pada statistik uji F . Sedangkan kontras-kontras yang lain diuji dengan menggunakan MSE_{SP} sebagai pembagi pada statistik uji F .

4.3. Faktor-faktor yang Mempengaruhi Proses Pengenalan Optik yang Digunakan untuk Mengetahui Posisi *Wafer* di bawah Laser Perbaikan

Untuk kepentingan ilustrasi analisa data dengan menggunakan rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$, data pada studi kasus oleh Lewis dkk (1997) dalam Bingham dan Sitter (2003) digunakan kembali dengan mengasumsikan bahwa faktor-faktor yang tidak signifikan dalam rancangan WP diabaikan. Akibatnya pada rancangan percobaan terdapat replikasi, sehingga data dapat dianalisa dengan menggunakan tabel *ANOVA*. Faktor-faktor SP yang tidak signifikan tetap diikutsertakan dalam analisa, mengingat penekanan dari percobaan adalah untuk mengetahui pengaruh faktor-faktor SP terhadap variabel respon. Lewis dkk (1997) dalam Bingham dan Sitter (2003) menganalisa data hasil percobaan menggunakan pemodelan *location-dispersion*. Bingham dan Sitter (2003) menggunakan pendekatan lain untuk menganalisa data yaitu dengan menggunakan *half normal plot* dari efek. Hasil analisa menunjukkan terdapat delapan efek yang signifikan yaitu P, D, BP, BD, DP, B, BDP, ABP = DEP. Dari hasil analisa tersebut dapat disimpulkan bahwa faktor WP yang memberikan kontribusi besar terhadap variasi data variabel respon adalah B dan D, sedangkan untuk faktor SP adalah P.

Untuk menyesuaikan dengan rancangan percobaan aslinya maka data percobaan pada Lampiran 4, dianggap diperoleh dari percobaan dengan menggunakan rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$ dengan *generator* $R = PQ$ atau *defining relation* $I = PQR$. Rancangan ini bukan merupakan rancangan dengan resolusi tertinggi, akan tetapi merupakan salah satu rancangan dengan aberasi minimum pada resolusi III. Selain itu rancangan tersebut merupakan rancangan yang menyebabkan varian prediksi variabel respon minimum, karena kolom-kolom matriks rancangan yang dihasilkan

ortogonal. Struktur data dari rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$ dapat dilihat pada Lampiran

5. Faktor WP adalah B dan D, sedangkan faktor SP adalah P,Q, dan R. Struktur alias

dari rancangan adalah :

$$\begin{array}{llll}
 I = PQR & P = QR & BQ = BPR & DR = DPQ \\
 B = BPQR & Q = PR & BR = BPQ & BDP = BDQR \\
 D = DPQR & R = PQ & DP = DQR & BDQ = BDPR \\
 BD = BDPQR & BP = BQR & DQ = DPR & BDR = BDPQ
 \end{array}$$

Model rancangan adalah :

$$\begin{aligned}
 y_{bdpqrm} = & \mu + \theta_b + \phi_d + (\theta\phi)_{bd} + \delta_{bdm} + \omega_p + \gamma_q + \tau_r + (\theta\omega)_{bp} + (\theta\gamma)_{bq} + (\theta\tau)_{br} + \\
 & (\phi\omega)_{dp} + (\phi\gamma)_{dq} + (\phi\tau)_{dr} + (\theta\phi\omega)_{bdp} + (\theta\phi\gamma)_{bdq} + (\theta\phi\tau)_{bdr} + \varepsilon_{bdpqrm}, \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

dimana $b = d = p = q = r = 1, 2$ dan $m = 1, 2, 3, 4$. Asumsi dari model adalah

$\delta_{bdm} \sim IIDN(0, \sigma_{WP}^2)$ dan $\varepsilon_{bdpqrm} \sim IIDN(0, \sigma_{SP}^2)$ serta δ_{bdm} dan ε_{bdpqrm} saling bebas.

Batasan dari model adalah :

$$\sum_{b=1}^2 \theta_b = \sum_{d=1}^2 \phi_d = \sum_{p=1}^2 \omega_p = \sum_{q=1}^2 \gamma_q = \sum_{r=1}^2 \tau_r = 0$$

$$\sum_{b=1}^2 (\theta\phi)_{bd} = \sum_{b=1}^2 (\theta\omega)_{bp} = \sum_{b=1}^2 (\theta\gamma)_{bq} = \sum_{b=1}^2 (\theta\tau)_{br} = 0$$

$$\sum_{b=1}^2 (\theta\phi\omega)_{bdp} = \sum_{b=1}^2 (\theta\phi\gamma)_{bdq} = \sum_{b=1}^2 (\theta\phi\tau)_{bdr} = 0$$

$$\sum_{d=1}^2 (\theta\phi)_{bd} = \sum_{d=1}^2 (\phi\omega)_{dp} = \sum_{d=1}^2 (\phi\gamma)_{dq} = \sum_{d=1}^2 (\phi\tau)_{dr} = 0$$

$$\sum_{d=1}^2 (\theta\phi\omega)_{bdp} = \sum_{d=1}^2 (\theta\phi\gamma)_{bdq} = \sum_{d=1}^2 (\theta\phi\tau)_{bdr} = 0$$

$$\sum_{p=1}^2 (\theta\omega)_{bp} = \sum_{p=1}^2 (\phi\omega)_{dp} = \sum_{p=1}^2 (\omega\gamma)_{pq} = \sum_{p=1}^2 (\omega\tau)_{pr} = \sum_{p=1}^2 (\theta\phi\omega)_{bdp} = 0$$

$$\sum_{q=1}^2 (\theta\gamma)_{bq} = \sum_{q=1}^2 (\phi\gamma)_{dq} = \sum_{q=1}^2 (\omega\gamma)_{pq} = \sum_{q=1}^2 (\gamma\tau)_{qr} = \sum_{q=1}^2 (\theta\phi\gamma)_{bdq} = 0$$

$$\sum_{r=1}^2 (\theta\tau)_{br} = \sum_{r=1}^2 (\phi\tau)_{dr} = \sum_{r=1}^2 (\omega\tau)_{pr} = \sum_{r=1}^2 (\gamma\tau)_{qr} = \sum_{r=1}^2 (\theta\phi\omega)_{bdr} = 0$$

Dari hasil perhitungan diperoleh penduga parameter model (4.22) sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= 0.93644 & \hat{\theta}_1 &= 0.0116 & \hat{\phi}_1 &= -0.016 & (\widehat{\theta\phi})_{11} &= 0.0144 \\ \hat{\omega}_1 &= -0.0176 & \hat{\gamma}_1 &= 0.00147 & \hat{\tau}_1 &= -0.0007 & (\widehat{\theta\omega})_{11} &= 0.0148 \\ (\widehat{\theta\gamma})_{11} &= -0.001 & (\widehat{\theta\tau})_{11} &= 0.00113 & (\widehat{\phi\omega})_{11} &= -0.0125 & (\widehat{\theta\phi\omega})_{111} &= 0.0115 \\ (\widehat{\phi\gamma})_{11} &= 0.0017 & (\widehat{\phi\tau})_{11} &= -0.0006 & (\widehat{\theta\phi\gamma})_{111} &= -0.0006562 & (\widehat{\theta\phi\tau})_{111} &= -0.000531 \end{aligned}$$

Hasil analisa data dirangkum dalam tabel ANOVA berikut :

Tabel 4.10. Tabel ANOVA Studi Kasus Lewis dkk (1997) dalam Bingham dan Sitter (2003)

	SS	DF	MS	F	p-value
B	0.008604	1	0.008604	8.380519	0.013453
D	0.016448	1	0.016448	16.02078	0.001753
BD	0.013224	1	0.013224	12.88052	0.003721
EWP	0.01232	12	0.001027	1.690837	0.110333
P	0.01988	1	0.01988	32.74075	0.000002
Q	0.00014	1	0.00014	0.230569	0.634007
R	0.000032	1	0.000032	0.052701	0.819727
BP	0.013984	1	0.013984	23.03051	0.000028
BQ	0.000064	1	0.000064	0.105403	0.747319
BR	0.00008	1	0.00008	0.131754	0.718743
DP	0.010052	1	0.010052	16.55483	0.000247
DQ	0.000184	1	0.000184	0.303033	0.585387
DR	0.000024	1	0.000024	0.039526	0.843529
BDP	0.008464	1	0.008464	13.93952	0.000651
BDQ	0.000024	1	0.000024	0.039526	0.843529
BDR	0.000016	1	0.000016	0.026351	0.871955
ESP	0.021859	36	0.000607		
TOTAL	0.125399	63			

Hipotesa rancangan WP dalam analisa adalah :

$$H_{0B} : \theta_1 = \theta_2 = 0$$

$$H_{0BD} : (\theta\phi)_{11} = (\theta\phi)_{12} = (\theta\phi)_{21} = (\theta\phi)_{22} = 0$$

$$H_{1B} : \text{ada satu } \theta_a \neq 0$$

$$H_{1BD} : \text{paling tidak ada satu } (\theta\phi)_{ab} \neq 0$$

$$H_{0D} : \phi_1 = \phi_2 = 0$$

$$H_{0Error WP} : \sigma_{WP}^2 = 0$$

$$H_{1D} : \text{ada satu } \phi_b \neq 0$$

$$H_{1Error WP} : \sigma_{WP}^2 \neq 0$$

Dengan menggunakan $\alpha = 5\%$, pengujian efek-efek B, D, BD, semua menolak H_0 .

Pada pengujian *error* WP H_0 gagal ditolak. Ini berarti *error* WP dalam model rancangan tidak signifikan, atau dengan kata lain semua variasi data pada rancangan WP, telah dapat dijelaskan oleh faktor-faktor WP beserta interaksinya.

Hipotesa rancangan SP dalam analisa adalah :

$$H_{0P} : \omega_1 = \omega_2 = 0$$

$$H_{1P} : \text{ada satu } \omega_p \neq 0$$

$$H_{0Q} : \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

$$H_{1Q} : \text{ada satu } \gamma_q \neq 0$$

$$H_{0R} : \tau_1 = \tau_2 = 0$$

$$H_{1R} : \text{ada satu } \tau_r \neq 0$$

$$H_{0PQ} : (\omega\gamma)_{11} = (\omega\gamma)_{12} = (\omega\gamma)_{21} = (\omega\gamma)_{22} = 0 \quad H_{1PQ} : \text{paling tidak ada satu } (\omega\gamma)_{pq} \neq 0$$

⋮

$$H_{0BDR} : (\theta\phi\tau)_{112} = (\theta\phi\tau)_{121} = (\theta\phi\tau)_{211} = (\theta\phi\tau)_{222} = 0$$

$$H_{1BDR} : \text{paling tidak ada satu } (\theta\phi\tau)_{bdr} \neq 0$$

Dengan menggunakan $\alpha = 5\%$, pengujian efek P, BP, DP, BDP menolak H_0 .

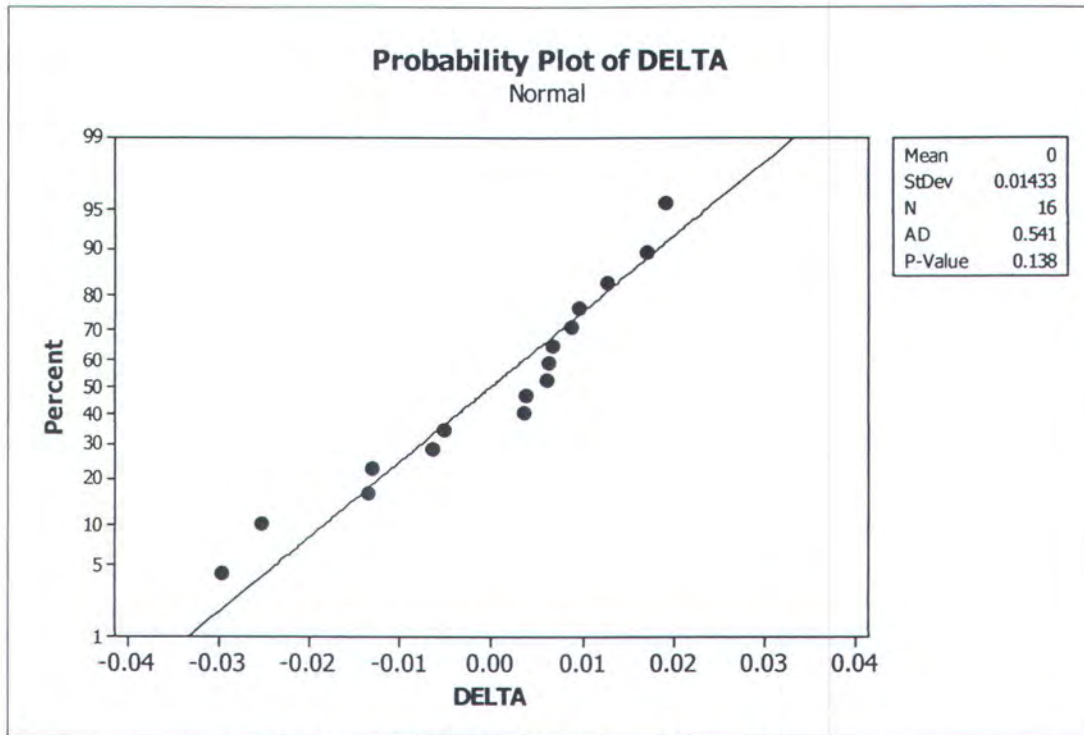
Sedangkan pada pengujian lainnya H_0 gagal ditolak.

Selain pengujian kontras, dilakukan pula pengujian terhadap asumsi yang berkaitan dengan model rancangan FFSP. Pengujian asumsi $\delta_{bdm} \sim N(0, \sigma_{WP}^2)$ diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\text{Pengujian asumsi } \delta_{abm} \sim N(0, \sigma_{WP}^2)$$

H_0 : data *error* WP menyebar mengikuti distribusi normal

H_1 : data *error* WP menyebar tidak mengikuti distribusi normal



Gambar 4.2. Probability Plot of Error WP

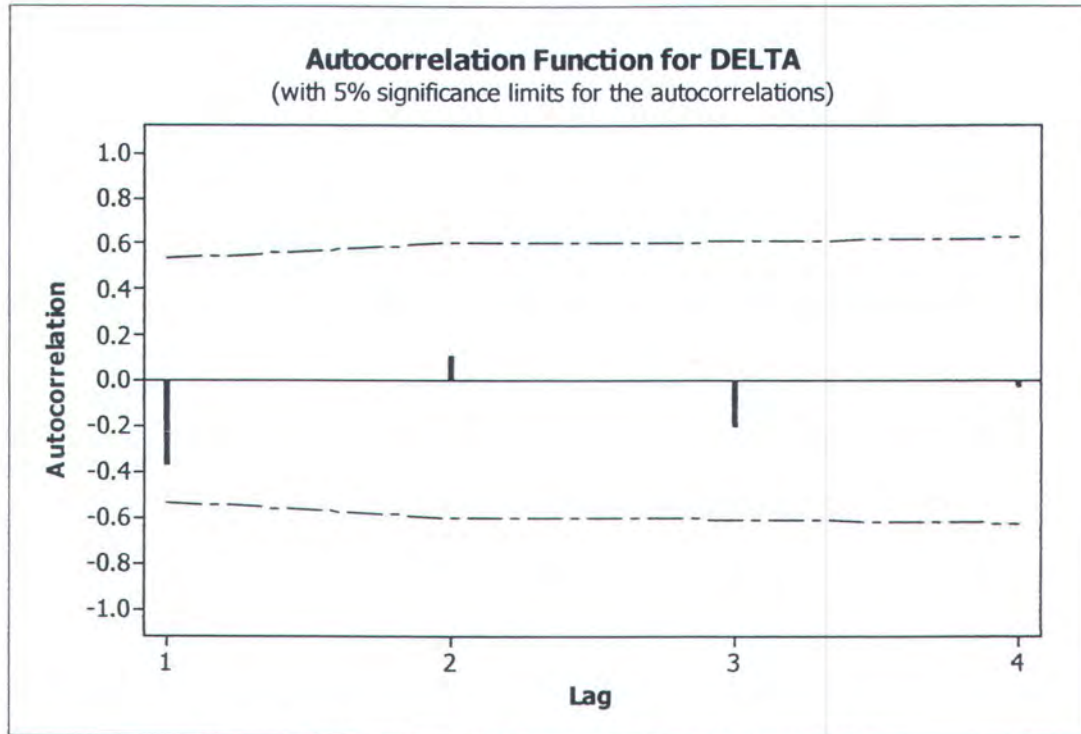
Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$. Ini berarti bahwa asumsi *error* WP menyebar mengikuti distribusi normal dengan mean sama dengan nol dipenuhi.

Pengujian asumsi untuk setiap a, b , dan m , δ_{abm} saling independen.

H_0 : tidak ada autokorelasi *lag* ke- i antar data *error* WP

H_1 : ada autokorelasi *lag* ke- i antar data *error* WP

$i = 1, 2, 3, 4, \dots$



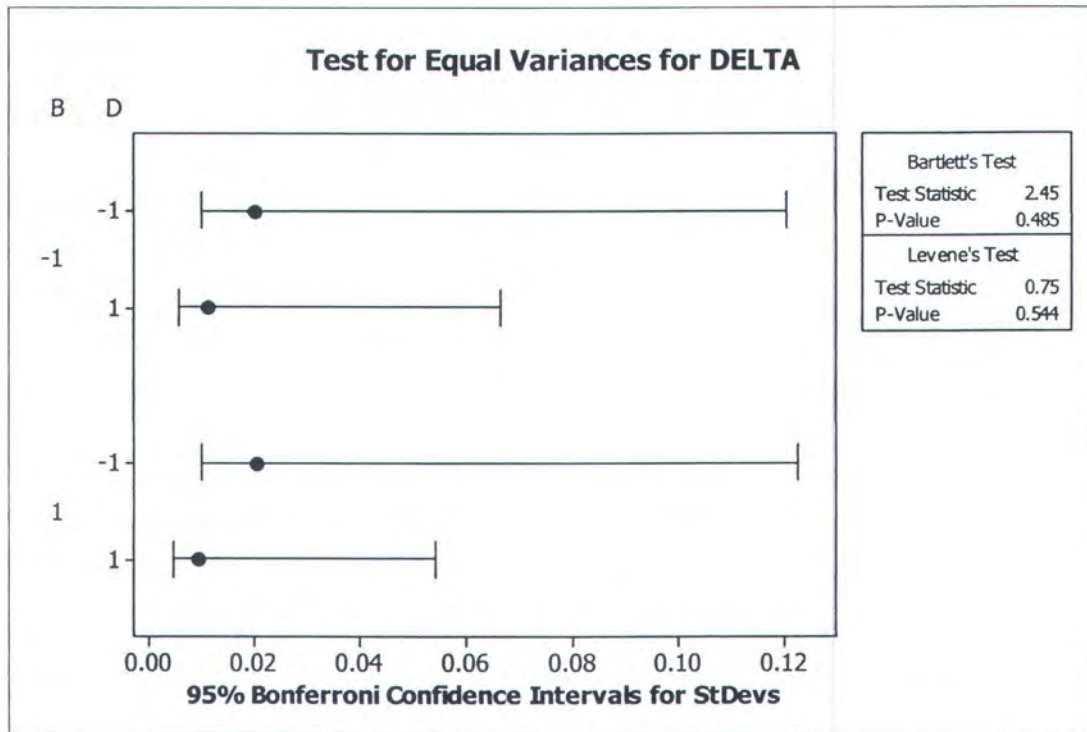
Gambar 4.3. Autocorrelation Function of Error WP

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$. Ini berarti bahwa asumsi antar *error* WP independen dipenuhi.

Pengujian asumsi δ_{abm} memiliki varian yang identik.

$$H_0 : \sigma_{11}^2 = \sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma_{WP}^2$$

$$H_1 : \text{paling tidak ada satu } \sigma_{bd}^2 \neq \sigma_{WP}^2$$



Gambar 4.4. Uji kesamaan varian *Error WP*

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$. Ini berarti bahwa asumsi *error WP* memiliki varian yang identik dipenuhi.

Pengujian asumsi δ_{bdm} dan ε_{bdpqrn} saling bebas.

H_0 : tidak ada korelasi antara *error WP* dengan *error SP*

H_1 : ada korelasi antara *error WP* dengan *error SP*

Correlations: DELTA, EPSILON

Pearson correlation of DELTA and EPSILON = -0.000
P-Value = 1.000

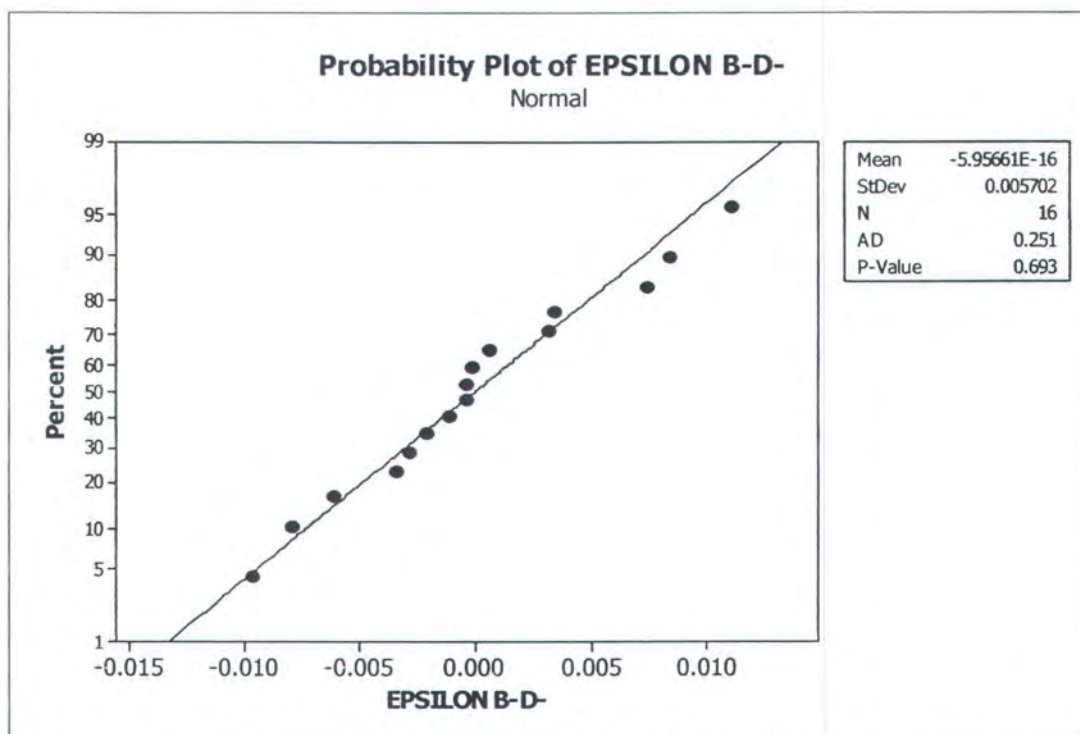
Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$. Ini berarti bahwa asumsi *error WP* dan *error SP* saling bebas dipenuhi.

Pengujian asumsi $\varepsilon_{hdpqrm} \sim N(0, \sigma_{SP}^2)$

Pengujian asumsi data *error* SP menyebar mengikuti distribusi normal, dilakukan perblok (*WP treatment*), karena data antar blok merupakan data yang heterogen, sedangkan data tiap blok merupakan data yang homogen.

H_0 : data *error* SP pada blok (b-,d-) menyebar mengikuti distribusi normal

H_1 : data *error* SP pada blok (b-,d-) menyebar tidak mengikuti distribusi normal

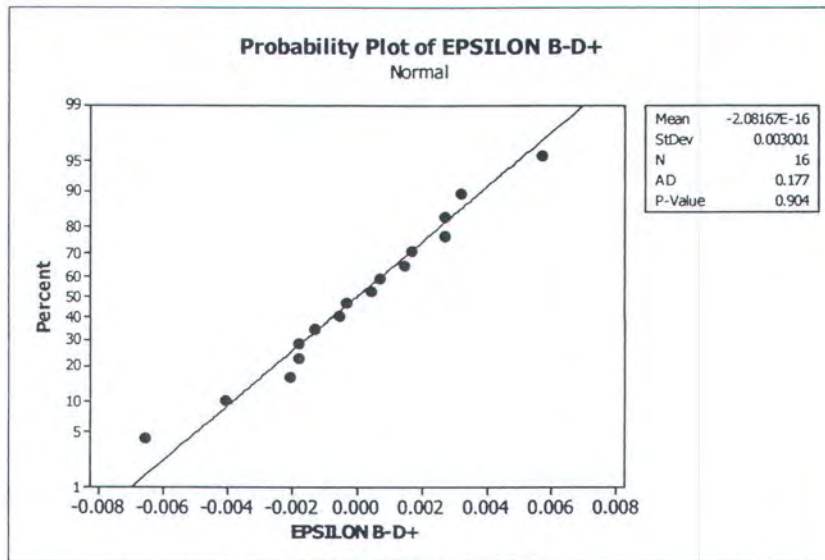


Gambar 4.5. *Probability Plot of Error* SP pada blok (b-,d-)

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : data *error* SP pada blok (b-,d+) menyebar mengikuti distribusi normal

H_1 : data *error* SP pada blok (b-,d+) menyebar tidak mengikuti distribusi normal

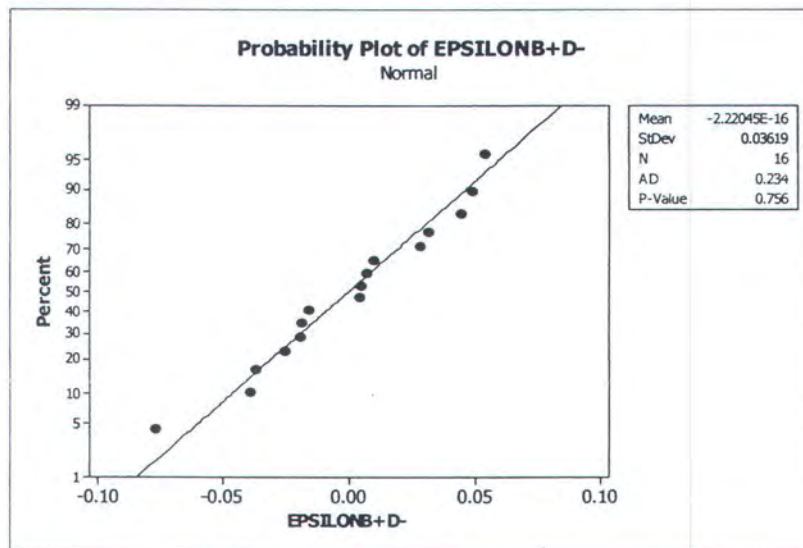


Gambar 4.6. Probability Plot of Error SP pada blok (b-,d+)

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : data *error* SP pada blok (b+,d-) menyebar mengikuti distribusi normal

H_1 : data *error* SP pada blok (b+,d-) menyebar tidak mengikuti distribusi normal

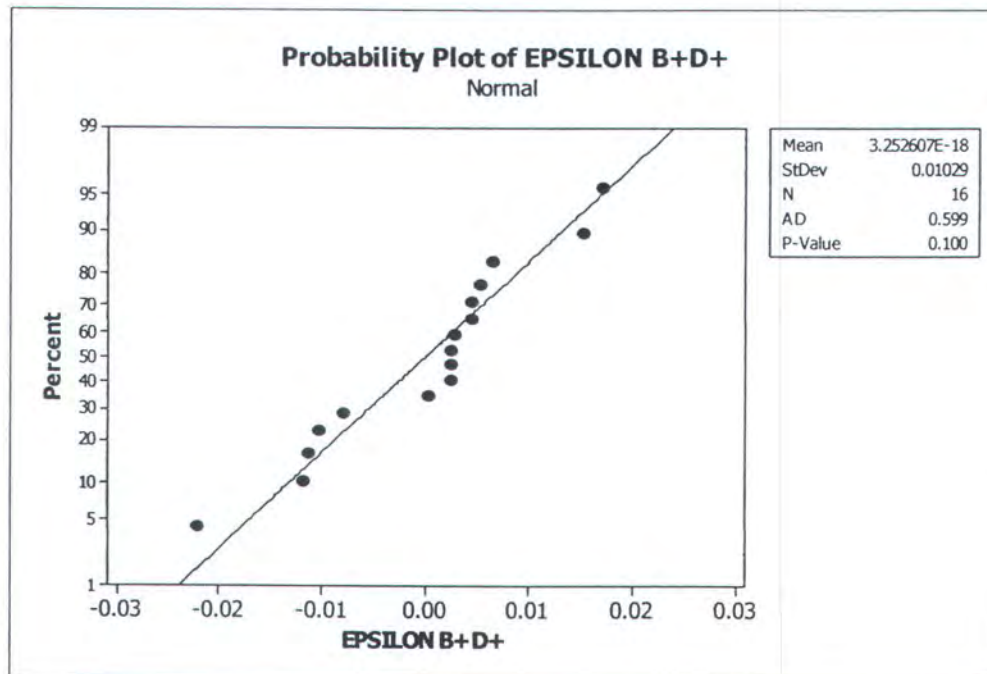


Gambar 4.7. Probability Plot of Error SP pada blok (b+,d-)

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : data *error* SP pada blok (b+,d+) menyebar mengikuti distribusi normal

H_1 : data *error* SP pada blok (b+,d+) menyebar tidak mengikuti distribusi normal



Gambar 4.8. *Probability Plot of Error* SP pada blok (b+,d+)

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

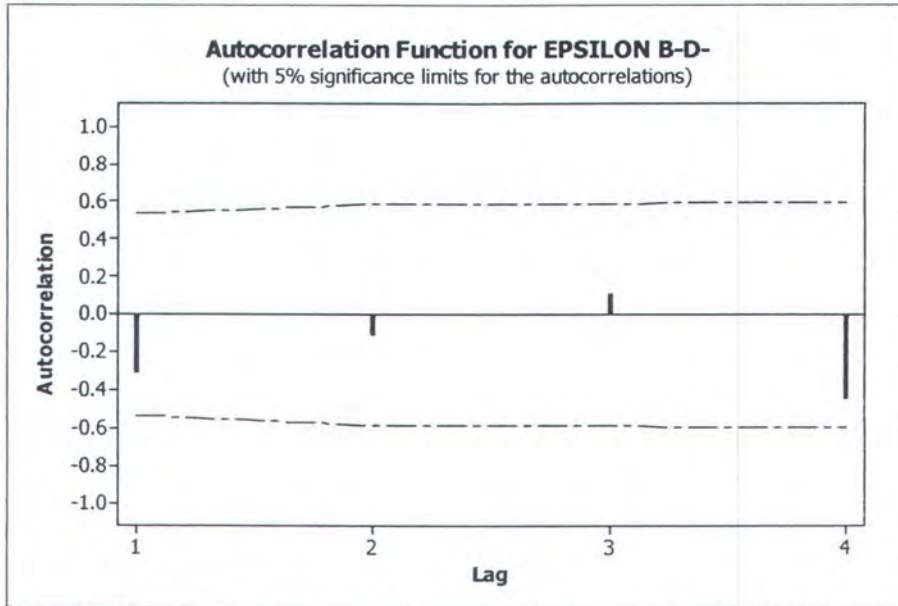
Karena untuk setiap blok (WP *treatment*) pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$, maka dapat disimpulkan bahwa asumsi *error* SP menyebar mengikuti distribusi normal dengan mean sama dengan nol dipenuhi.

Pengujian asumsi antar *error* SP independen, dilakukan perblok (WP *treatment*), karena pengacakan rancangan dilakukan perblok.

H_0 : tidak ada autokorelasi *lag* ke- i antar data *error* SP pada blok (b-,d-)

H_1 : ada autokorelasi *lag* ke- i antar data *error* SP pada blok (b-,d-)

$i = 1, 2, 3, 4, \dots$



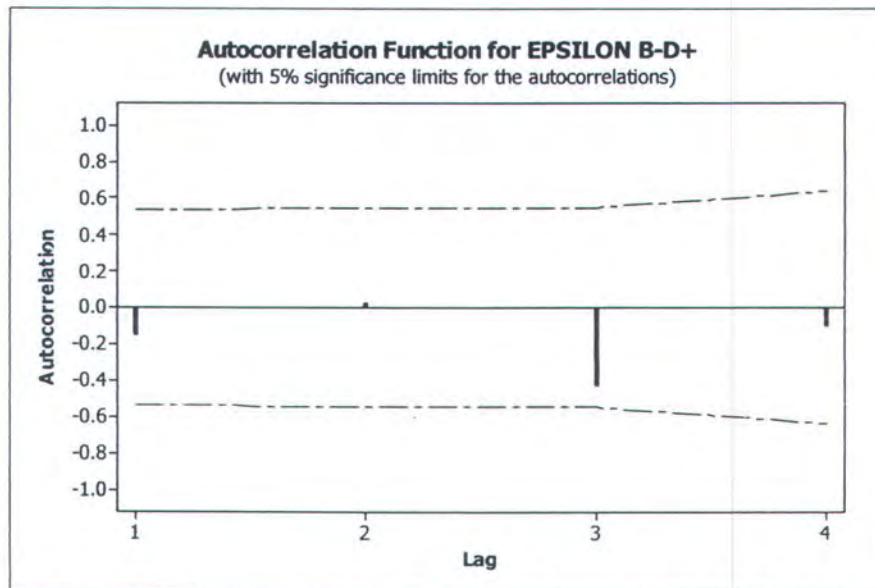
Gambar 4.9. Autocorrelation Function of Error SP pada blok (b-,d-)

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : tidak ada autokorelasi lag ke- i antar data error SP pada blok (b-,d+)

H_1 : ada autokorelasi lag ke- i antar data error SP pada blok (b-,d+)

$i = 1, 2, 3, 4, \dots$



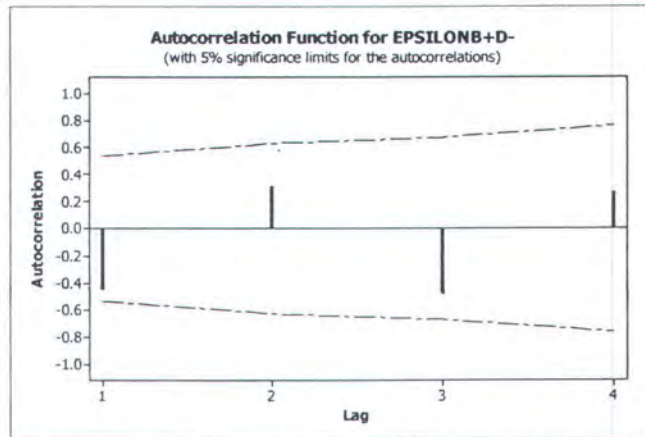
Gambar 4.10. Autocorrelation Function of Error SP pada blok (b-,d+)

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : tidak ada autokorelasi lag ke- i antar data *error* SP pada blok (b+,d-)

H_1 : ada autokorelasi lag ke- i antar data *error* SP pada blok (b+,d-)

$i = 1, 2, 3, 4, \dots$



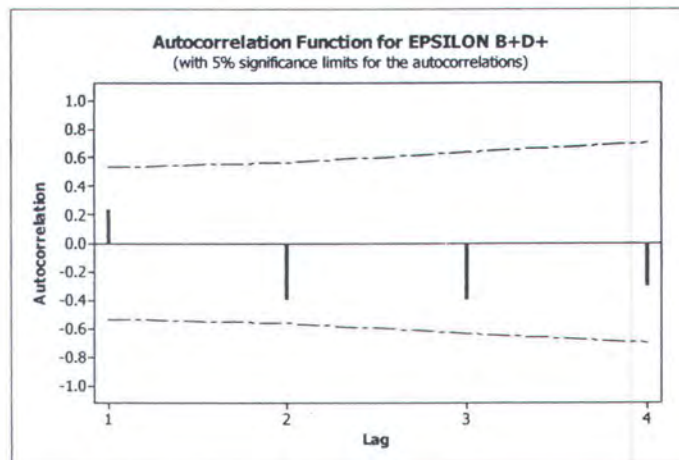
Gambar 4.11. Autocorrelation Function of Error SP pada blok (b+,d-)

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : tidak ada autokorelasi lag ke- i antar data *error* SP pada blok (b+,d+)

H_1 : ada autokorelasi lag ke- i antar data *error* SP pada blok (b+,d+)

$i = 1, 2, 3, 4, \dots$



Gambar 4.12. Autocorrelation Function of Error SP pada blok (b+,d+)

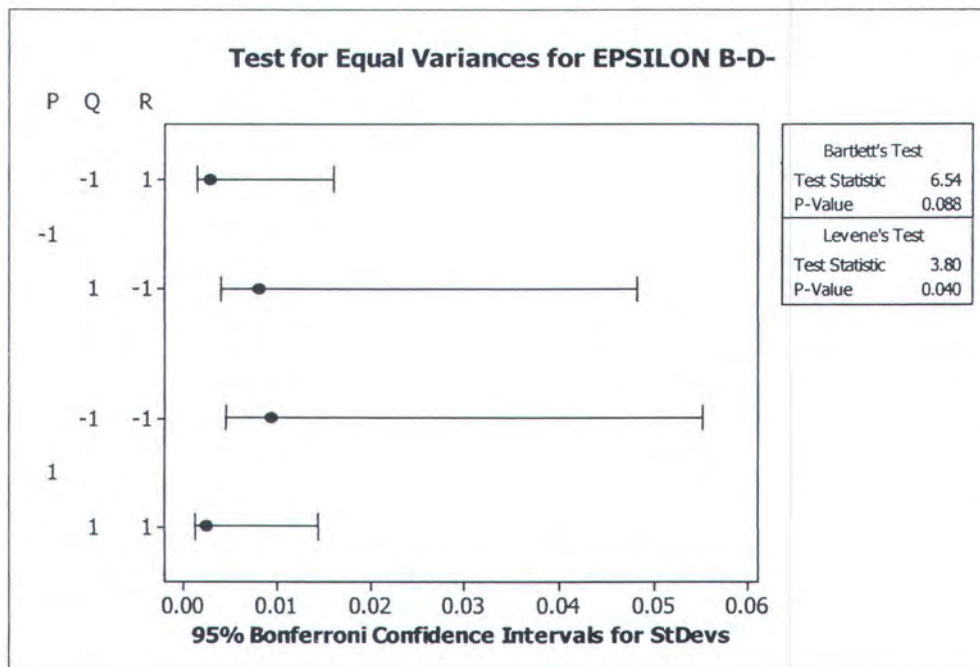
Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

Karena untuk setiap blok (WP *treatment*) pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$, maka dapat disimpulkan bahwa asumsi antar *error* SP independen dipenuhi.

Pengujian asumsi *error* SP memiliki varian yang identik, dilakukan perblok (WP *treatment*), karena data antar blok merupakan data yang heterogen, sedangkan data tiap blok merupakan data yang homogen.

H_0 : pada blok (b-,d-) $\sigma_{112}^2 = \sigma_{121}^2 = \sigma_{211}^2 = \sigma_{222}^2 = \sigma_{SP}^2$

H_1 : pada blok (b-,d-) paling tidak ada satu $\sigma_{pqr}^2 \neq \sigma_{SP}^2$

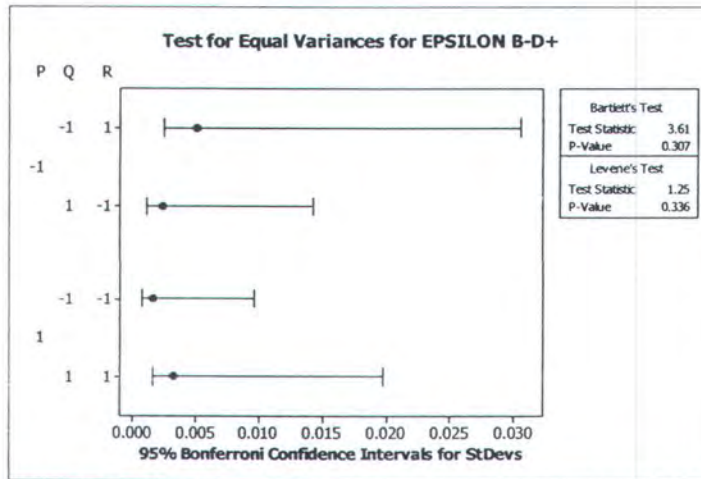


Gambar 4.13. Uji kesamaan varian *Error* SP pada blok (b-,d-)

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : pada blok (b-,d+) $\sigma_{112}^2 = \sigma_{121}^2 = \sigma_{211}^2 = \sigma_{222}^2 = \sigma_{SP}^2$

H_1 : pada blok (b-,d+) paling tidak ada satu $\sigma_{pqr}^2 \neq \sigma_{SP}^2$

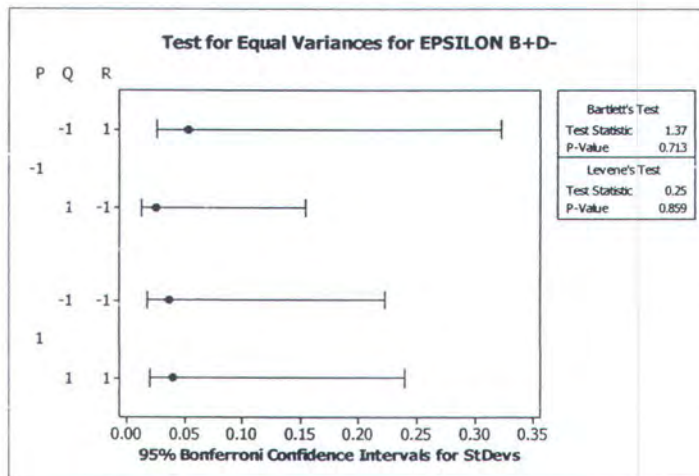


Gambar 4.14. Uji kesamaan varian *Error SP* pada blok (b-,d+)

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : pada blok (b+,d-) $\sigma_{112}^2 = \sigma_{121}^2 = \sigma_{211}^2 = \sigma_{222}^2 = \sigma_{SP}^2$

H_1 : pada blok (b+,d-) paling tidak ada satu $\sigma_{pqr}^2 \neq \sigma_{SP}^2$

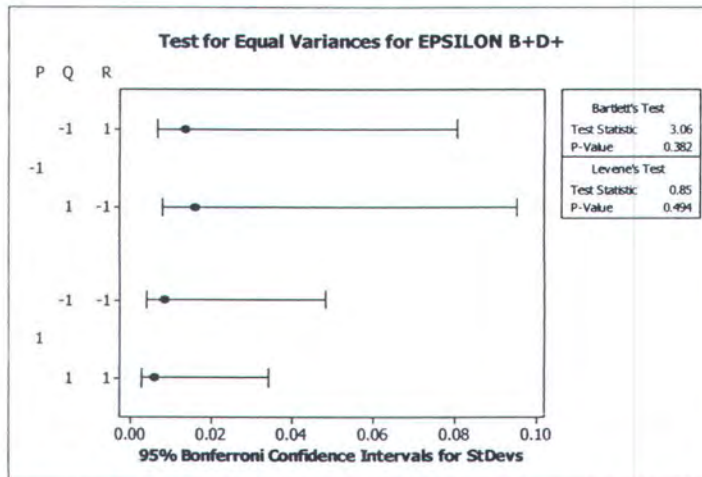


Gambar 4.15. Uji kesamaan varian *Error SP* pada blok (b+,d-)

Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : pada blok (b+,d+) $\sigma_{112}^2 = \sigma_{121}^2 = \sigma_{211}^2 = \sigma_{222}^2 = \sigma_{SP}^2$

H_1 : pada blok (b+,d+) paling tidak ada satu $\sigma_{pqr}^2 \neq \sigma_{SP}^2$



Gambar 4.16. Uji kesamaan varian *Error SP* pada blok (b+,d+)

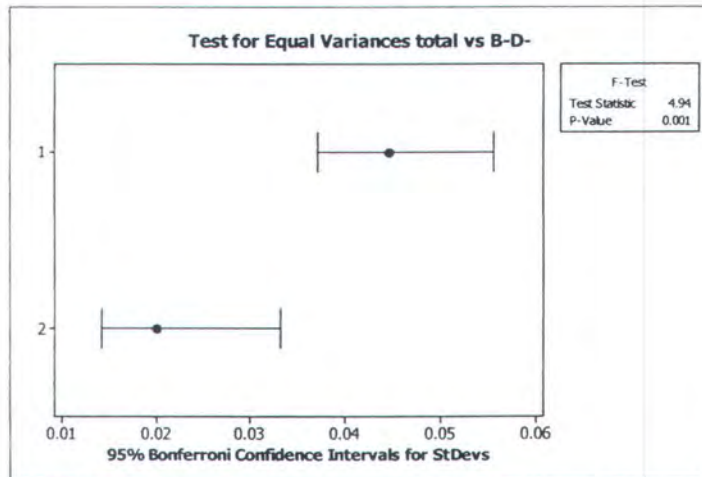
Pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

Karena untuk setiap blok (*WP treatment*) pengujian gagal menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$, maka dapat disimpulkan bahwa asumsi antar *error SP* memiliki varian yang identik dipenuhi.

Pengujian asumsi $\sigma_{WP}^2 > \sigma_{SP}^2$, dilakukan perblok (WP treatment).

H_0 : pada blok (b-,d-) $\sigma_{WP}^2 = \sigma_{SP}^2$

H_1 : pada blok (b-,d-) $\sigma_{WP}^2 \neq \sigma_{SP}^2$

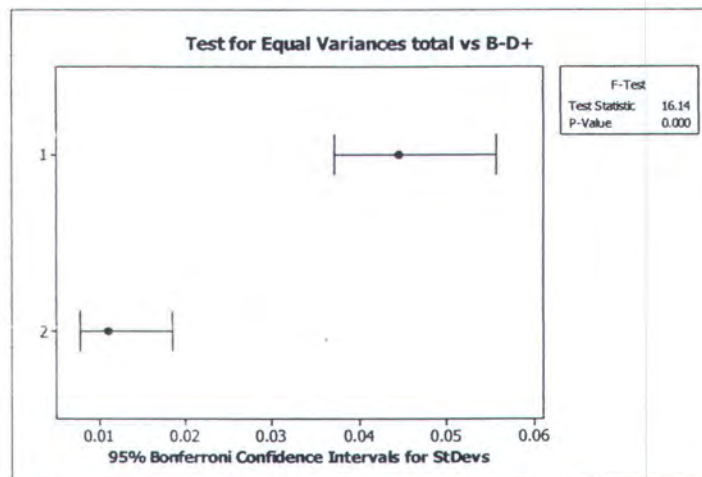


Gambar 4.17. Uji kesamaan varian *Error* WP dan *Error* SP pada blok (b-d-)

Pengujian menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : pada blok (b-,d+) $\sigma_{WP}^2 = \sigma_{SP}^2$

H_1 : pada blok (b-,d+) $\sigma_{WP}^2 \neq \sigma_{SP}^2$

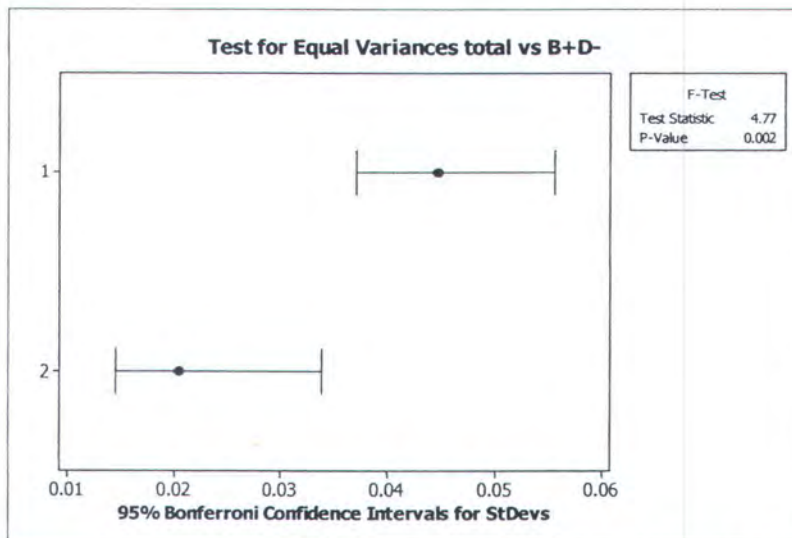


Gambar 4.18. Uji kesamaan varian *Error* WP dan *Error* SP pada blok (b-d+)

Pengujian menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : pada blok (b+,d-) $\sigma_{WP}^2 = \sigma_{SP}^2$

H_1 : pada blok (b+,d-) $\sigma_{WP}^2 \neq \sigma_{SP}^2$

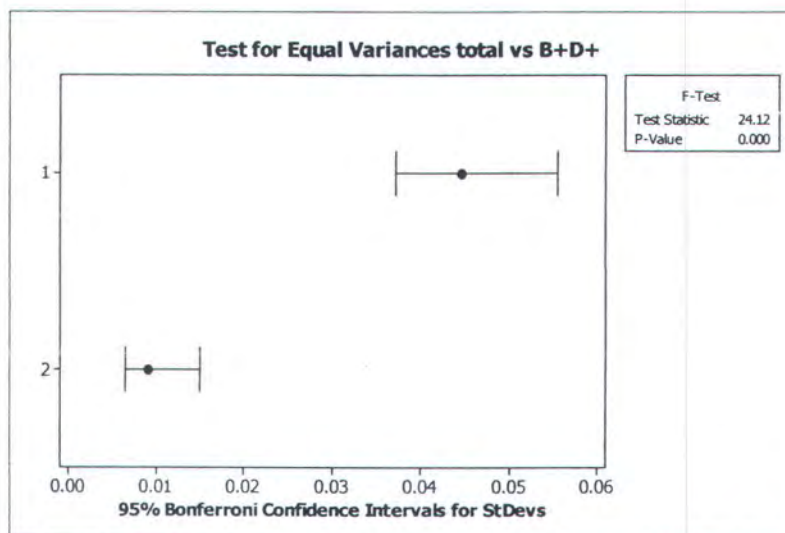


Gambar 4.19. Uji kesamaan varian *Error WP* dan *Error SP* pada blok (b+d-)

Pengujian menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

H_0 : pada blok (b+,d+) $\sigma_{WP}^2 = \sigma_{SP}^2$

H_1 : pada blok (b+,d+) $\sigma_{WP}^2 \neq \sigma_{SP}^2$

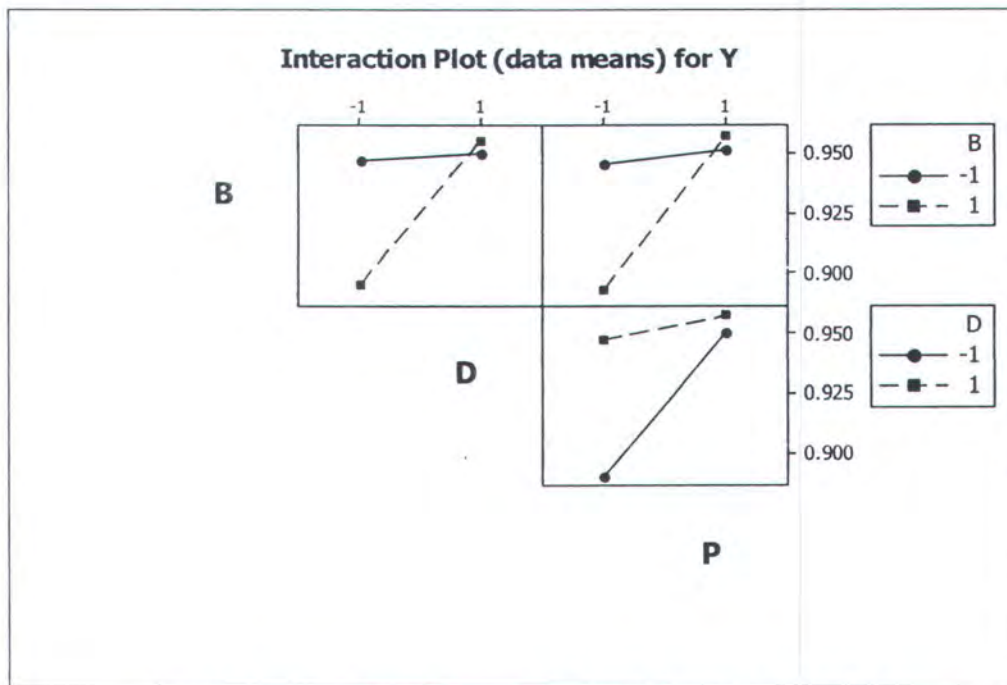


Gambar 4.20. Uji kesamaan varian *Error WP* dan *Error SP* pada blok (b+d+)

Pengujian menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$.

Karena untuk setiap blok (*WP treatment*) pengujian menolak H_0 pada $\alpha = 5\%$, maka dapat disimpulkan bahwa asumsi $\sigma_{WP}^2 > \sigma_{SP}^2$ dipenuhi.

Seperti telah dijelaskan sebelumnya bahwa penelitian ini terutama bertujuan untuk mempelajari pengaruh faktor-faktor yang berkaitan dengan pemakaian oleh *customer*. Dari ketiga faktor yang berkaitan dengan pemakaian oleh *customer*, hanya faktor *ambient light intensity* (batas intensitas pencahayaan) saja yang berpengaruh secara signifikan terhadap variabel respon. Sedangkan untuk faktor-faktor yang terkait dengan subsistem/alat, faktor *illumination level* (tingkat pencahayaan) dan *corner orientation* (orientasi sudut) berpengaruh secara signifikan baik secara individu maupun interaksi keduanya, serta interaksi keduanya dengan faktor *ambient light intensity* (batas intensitas pencahayaan). Untuk mendapatkan nilai variabel respon yang optimal, perlu diperhatikan penentuan level dari ketiga faktor tersebut. Nilai korelasi akan tinggi jika ketiga faktor tersebut disetting pada *level* tinggi.



Gambar 4.21. Interaksi antara faktor-faktor B, D, dan P



BAB V
KESIMPULAN

BAB V

KESIMPULAN

5.1. Kesimpulan

Dari hasil penelitian dan pembahasan dapat dibuat kesimpulan sebagai berikut :

1. Untuk merancang suatu percobaan dengan rancangan faktorial fraksional split-plot dengan dua level berdasarkan kriteria varian prediksi variabel respon minimum dan aberasi minimum, haruslah dipilih *generator* sedemikian hingga rancangan memiliki resolusi $\geq III$.
2. Secara umum untuk rancangan FFSP $2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)}$ yang melibatkan faktor-faktor tetap, maka penduga parameter model *ANOVA* adalah :

a. Penduga efek utama faktor : $\hat{\theta}_a = \bar{y}_a - \bar{y}$

b. Penduga efek interaksi dua faktor : $(\widehat{\theta\phi})_{ab} = \bar{y}_{ab} - \bar{y}_a - \bar{y}_b + \bar{y}$

c. Penduga efek interaksi tiga faktor :

$$(\widehat{\theta\phi\omega})_{abc} = \bar{y}_{abc} - \bar{y}_{ab} - \bar{y}_{bc} - \bar{y}_{ac} + \bar{y}_a + \bar{y}_b + \bar{y}_c - \bar{y}$$

dan seterusnya.

Penduga *error* untuk WP maupun SP dapat dicari melalui dekomposisi model untuk rancangan WP dan SP. Penduga-penduga di atas merupakan penduga tak bias untuk parameter-parameter model rancangan. Tabel *ANOVA* dari rancangan FFSP $2^{(k_1+k_2)-(p_1+p_2)}$ terbagi menjadi dua bagian, yaitu analisa untuk faktor-faktor

WP beserta interaksinya dengan statistik uji $F_{\text{kontras WP}} = \frac{MS(\text{kontras WP})}{MSE_{WP}}$; dan

analisa untuk faktor-faktor SP beserta interaksi antar faktor SP dan interaksi

antara faktor WP dan SP, dengan statistik uji $F_{\text{kontras SP}} = \frac{MS(\text{kontras SP})}{MSE_{SP}}$.

3. Dari ketiga faktor yang berkaitan dengan pemakaian oleh *customer*, hanya faktor *ambient light intensity* (batas intensitas pencahayaan) saja yang berpengaruh secara signifikan terhadap variabel respon. Sedangkan untuk faktor-faktor yang terkait dengan subsistem/alat, faktor *illumination level* (tingkat pencahayaan) dan *corner orientation* (orientasi sudut) berpengaruh secara signifikan baik secara individu maupun interaksi keduanya, serta interaksi keduanya dengan faktor *ambient light intensity* (batas intensitas pencahayaan).

5.2. Saran

Beberapa hal masih dapat dikembangkan dari penelitian ini, antara lain :

1. Dalam penelitian ini pembahasan dibatasi pada percobaan yang melibatkan 5 sampai dengan 10 faktor dengan 16 *run*, oleh karenanya disarankan untuk mempelajari apakah algoritma yang telah dibuat berlaku untuk banyaknya *run*, banyaknya faktor, dan banyaknya *level* yang lainnya.
2. Untuk mempercepat proses pembuatan tabel rancangan MA FFSP nonisomorfis, dapat dibuat program untuk mendapatkan *defining relation* dari rancangan dan program untuk melakukan pengujian keisomorfisan dua rancangan.



DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR PUSTAKA

- Bingham, D. dan Sitter, R. R. (1999) Minimum aberration two-level fractional factorial split-plot designs. *Technometrics*, **41**, 62 - 70.
- _____ (2001) Design issues for fractional factorial split-plot experiments. *J. Qual. Technol.*, **32**, 2 - 15.
- _____ (2003) Fractional factorial split-plot designs for robust parameter experiments. *Technometrics*, **45**, 80 - 89.
- Bingham, D., Schoen, E. D. dan Sitter, R. R. (2004) Designing fractional factorial split-plot experiments with few whole-plot factors. *Appl. Statist.*, **53**, Part 2, pp. 325 - 339.
- Bisgaard, S. (2000) The design and analysis of $2^{k-p} \times 2^{q-r}$ split plot experiments. *J. Qual. Technol.*, **32**, 39 - 56.
- Box, G. E. P. dan Hunter, J. S. (1961) The 2^{k-p} Fractional Factorial Designs Part I. *Technometrics*, **3**, 311 - 351.
- Fries, A. dan Hunter, W. G. (1980) Minimum aberration 2^{k-p} designs. *Technometrics*, **22**, 601 -608.
- Huang, P., Chen, D. dan Voelkel, J. (1998) Minimum aberration two-level split-plot designs. *Technometrics*, **40**, 314 - 326.
- Kemphorne, O. (1952) *Design and Analysis of Experiments*, Wiley Eastern Private Limited, New Delhi.
- Khuri, A. I. dan Cornell, J. A. (1996) *Response Surfaces : Designs and Analyses*, 2nd ed., rev., and expanded, Marcell Dekker, Inc., New York.
- Kleijnen, J. P. C. (1975) Screening designs for poly-factor experimentation. *Technometrics*, **17**, 487 - 493.
- Letsinger, J. D., Myers, R. H. dan Lentner, M. (1996) Response Surface Methods for Bi-Randomization Structures. *J. Qual. Technol.*, **28**, 381 - 397.
- Mitra, A. (1993) *Fundamentals of Quality Control and Improvement*. Macmillan Publishing Company, New York.
- Montgomery, D. C. (2001a) *Design and Analysis of Experiments*, 5th edition. John Willey & Sons, Inc, New York.

(2001b) *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th edition.
John Willey & Sons, Inc, New York.

Neter, J., Kunter, M. H., Nachtsheim, C. J. dan Wasserman, W. (1996) *Applied Linear Statistical Models*, 4th edition. WCB/McGraw-Hill, USA.





LAMPIRAN

Lampiran 1 : Struktur Data Rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$ dengan *Generator*
 $R=ABPQ$ dan M replikasi

Respon	I	A	B	AB	P	Q	R	PQ	PR	QR	AP	AQ	AR	BP	BQ	BR
Y_{111121}	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1
Y_{111122}	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{11112M}	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1
Y_{112111}	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1
Y_{112112}	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{11211M}	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1
Y_{111211}	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
Y_{111212}	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{11121M}	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
Y_{112221}	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Y_{112222}	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{11222M}	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Y_{121111}	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
Y_{121112}	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{12111M}	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
Y_{122121}	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
Y_{122122}	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{12212M}	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
Y_{121221}	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
Y_{121222}	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{12122M}	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
Y_{122211}	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
Y_{122212}	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{12221M}	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
Y_{211111}	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Respon	I	A	B	AB	P	Q	R	PQ	PR	QR	AP	AQ	AR	BP	BQ	BR
Y_{21111M}	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
Y_{212121}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
Y_{212122}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{21212M}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$Y_{2111221}$	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
$Y_{2111222}$	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$Y_{211222M}$	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
$Y_{2122211}$	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
$Y_{2122212}$	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$Y_{212221M}$	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
$Y_{2211121}$	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
$Y_{2211122}$	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{22112M}	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
Y_{222111}	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
Y_{222112}	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{22211M}	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
Y_{221211}	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
Y_{221212}	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{22121M}	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
Y_{222221}	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Y_{222222}	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Y_{22222M}	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Lampiran 2 : Ekspektasi $\hat{\delta}_{abm}, \hat{\sigma}_{WP}^2, \hat{\varepsilon}_{abpqrm}, \hat{\sigma}_{SP}^2$

$$\hat{\delta}_{abm} = \bar{y}_{ab\dots m} - \bar{y}_{ab\dots} = \delta_{abm} + \bar{\varepsilon}_{ab\dots m} - \bar{\delta}_{ab.} - \bar{\varepsilon}_{ab\dots}$$

$$E(\hat{\delta}_{abm}) = E(\delta_{abm} + \bar{\varepsilon}_{ab\dots m} - \bar{\delta}_{ab.} - \bar{\varepsilon}_{ab\dots}) = 0$$

$$\text{Var}(\hat{\delta}_{abm}) = \text{Var}(\delta_{abm} + \bar{\varepsilon}_{ab\dots m} - \bar{\delta}_{ab.} - \bar{\varepsilon}_{ab\dots})$$

$$= \text{Var}(\delta_{abm}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{ab\dots m}) + \text{Var}(\bar{\delta}_{ab.}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{ab\dots}) +$$

$$-2\text{Cov}(\delta_{abm}, \bar{\delta}_{ab.}) - 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{ab\dots m}, \bar{\varepsilon}_{ab\dots})$$

$$= \sigma_{WP}^2 + \frac{\sigma_{SP}^2}{4} + \frac{\sigma_{WP}^2}{M} + \frac{\sigma_{SP}^2}{4M} - \frac{2\sigma_{WP}^2}{M} - \frac{2\sigma_{SP}^2}{4M} = \frac{(M-1)}{M} \left(\sigma_{WP}^2 + \frac{\sigma_{SP}^2}{4} \right)$$

$$\therefore \hat{\delta}_{abm} \sim N \left(0, \frac{(M-1)}{M} \left(\sigma_{WP}^2 + \frac{\sigma_{SP}^2}{4} \right) \right)$$

$$\hat{\sigma}_{WP}^2 = \frac{4 \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{m=1}^M (\bar{y}_{ab\dots m} - \bar{y}_{ab\dots})^2}{2^{(2-0)} (M-1)} = \frac{\sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{m=1}^M (\delta_{abm} + \bar{\varepsilon}_{ab\dots m} - \bar{\delta}_{ab.} - \bar{\varepsilon}_{ab\dots})^2}{(M-1)}$$

$$E(\hat{\sigma}_{WP}^2) = E(MSE_{WP}) = \frac{\sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{m=1}^M E(\delta_{abm} + \bar{\varepsilon}_{ab\dots m} - \bar{\delta}_{ab.} - \bar{\varepsilon}_{ab\dots})^2}{(M-1)}$$

$$E(\delta_{abm} + \bar{\varepsilon}_{ab\dots m} - \bar{\delta}_{ab.} - \bar{\varepsilon}_{ab\dots})^2 = \text{Var}(\hat{\delta}_{abm})$$

$$E(\hat{\sigma}_{WP}^2) = E(MSE_{WP}) = \frac{\sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{m=1}^M (M-1) \left(\sigma_{WP}^2 + \frac{\sigma_{SP}^2}{4} \right)}{M(M-1)} = 4\sigma_{WP}^2 + \sigma_{SP}^2$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{abpqrm} &= y_{abpqrm} - \bar{y}_{ab\dots m} - \bar{y}_{a.p\dots} - \bar{y}_{a.q\dots} - \bar{y}_{a.r\dots} - \bar{y}_{bp\dots} - \bar{y}_{b.q\dots} - \bar{y}_{b.r\dots} - \bar{y}_{.pq\dots} - \bar{y}_{.p.r\dots} + \\
&\quad - \bar{y}_{.qr\dots} + 3\bar{y}_{a\dots} + 3\bar{y}_{b\dots} + 3\bar{y}_{.p\dots} + 3\bar{y}_{.q\dots} + 3\bar{y}_{.r\dots} - 6\bar{y}_{\dots} \\
&= \varepsilon_{abpqrm} - \bar{\varepsilon}_{ab\dots m} - \bar{\varepsilon}_{a.p\dots} - \bar{\varepsilon}_{a.q\dots} - \bar{\varepsilon}_{a.r\dots} - \bar{\varepsilon}_{bp\dots} - \bar{\varepsilon}_{b.q\dots} - \bar{\varepsilon}_{b.r\dots} - \bar{\varepsilon}_{.pq\dots} - \bar{\varepsilon}_{.p.r\dots} + \\
&\quad - \bar{\varepsilon}_{.qr\dots} + 3\bar{\varepsilon}_{a\dots} + 3\bar{\varepsilon}_{b\dots} + 3\bar{\varepsilon}_{.p\dots} + 3\bar{\varepsilon}_{.q\dots} + 3\bar{\varepsilon}_{.r\dots} - 6\bar{\varepsilon}_{\dots}
\end{aligned}$$

$$E(\hat{\varepsilon}_{abpqrm}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{\varepsilon}_{abpqrm}) &= \text{Var}(\varepsilon_{abpqrm}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{ab\dots m}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{a.p\dots}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{a.q\dots}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{a.r\dots}) + \\
&\quad \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{bp\dots}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{b.q\dots}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{b.r\dots}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{.pq\dots}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{.p.r\dots}) + \\
&\quad \text{Var}(\bar{\varepsilon}_{.qr\dots}) + 9\text{Var}(\bar{\varepsilon}_{a\dots}) + 9\text{Var}(\bar{\varepsilon}_{b\dots}) + 9\text{Var}(\bar{\varepsilon}_{.p\dots}) + 9\text{Var}(\bar{\varepsilon}_{.q\dots}) + \\
&\quad 9\text{Var}(\bar{\varepsilon}_{.r\dots}) + 36\text{Var}(\bar{\varepsilon}_{\dots}) - 2\text{Cov}(\varepsilon_{abpqrm}, \bar{\varepsilon}_{ab\dots m}) - 2\text{Cov}(\varepsilon_{abpqrm}, \bar{\varepsilon}_{a.p\dots}) + \dots + \\
&\quad - 2 \cdot 6\text{Cov}(\varepsilon_{abpqrm}, \bar{\varepsilon}_{\dots}) + 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{ab\dots m}, \bar{\varepsilon}_{a.p\dots}) + 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{ab\dots m}, \bar{\varepsilon}_{a.q\dots}) + \dots + \\
&\quad 2 \cdot 6\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{ab\dots m}, \bar{\varepsilon}_{\dots}) + 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a.p\dots}, \bar{\varepsilon}_{a.q\dots}) + 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a.p\dots}, \bar{\varepsilon}_{a.r\dots}) + \dots + \\
&\quad 2 \cdot 6\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a.p\dots}, \bar{\varepsilon}_{\dots}) + 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a.q\dots}, \bar{\varepsilon}_{a.r\dots}) + 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a.q\dots}, \bar{\varepsilon}_{bp\dots}) + \dots + \\
&\quad 2 \cdot 6\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a.q\dots}, \bar{\varepsilon}_{\dots}) + 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a.r\dots}, \bar{\varepsilon}_{bp\dots}) + 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a.r\dots}, \bar{\varepsilon}_{b.q\dots}) + \dots + \\
&\quad 2 \cdot 6\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a.r\dots}, \bar{\varepsilon}_{\dots}) + 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{bp\dots}, \bar{\varepsilon}_{b.q\dots}) + 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{bp\dots}, \bar{\varepsilon}_{b.r\dots}) + \dots + \\
&\quad 2 \cdot 6\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{bp\dots}, \bar{\varepsilon}_{\dots}) + \dots + 2 \cdot 6\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{.qr\dots}, \bar{\varepsilon}_{\dots}) + 2 \cdot 3 \cdot 3\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a\dots}, \bar{\varepsilon}_{b\dots}) + \dots + \\
&\quad 2 \cdot 3 \cdot 3\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a\dots}, \bar{\varepsilon}_{.r\dots}) - 2 \cdot 3 \cdot 6\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{a\dots}, \bar{\varepsilon}_{\dots}) + 2 \cdot 3 \cdot 3\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{b\dots}, \bar{\varepsilon}_{.p\dots}) + \dots + \\
&\quad - 2 \cdot 3 \cdot 6\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{b\dots}, \bar{\varepsilon}_{\dots}) + 2 \cdot 3 \cdot 3\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{.p\dots}, \bar{\varepsilon}_{.q\dots}) + \dots - 2 \cdot 3 \cdot 6\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_{.r\dots}, \bar{\varepsilon}_{\dots}) \\
&= \frac{12(M-1)}{16M} \sigma_{SP}^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{\varepsilon}_{abpqr} \sim N\left(0, \frac{12(M-1)}{16M} \sigma_{SP}^2\right)$$

$$\hat{\sigma}_{SP}^2 = \frac{\sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M \hat{\varepsilon}_{abpqr}^2}{\left(2^{(2+3)-(0+1)} - 2^{2-0}\right)(M-1)}$$

$$E\left(\hat{\sigma}_{SP}^2\right) = \frac{\sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M E\left(\hat{\varepsilon}_{abpqr}^2\right)}{\left(2^{(2+3)-(0+1)} - 2^{2-0}\right)(M-1)} = \frac{16M}{12(M-1)} \text{Var}\left(\hat{\varepsilon}_{abpqr}\right) = \sigma_{SP}^2$$

Lampiran 3 : Rumus untuk *Sum of Square, Means Square, dan Statistik Uji F* untuk Rancangan FFSP $2^{(2+3)-(0+1)}$

$$SSA = 8M \sum_{a=1}^2 (\bar{y}_{a\dots\dots} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSAB = 4M \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 (\bar{y}_{ab\dots\dots} - \bar{y}_{a\dots\dots} - \bar{y}_{b\dots\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSB = 8M \sum_{b=1}^2 (\bar{y}_{b\dots\dots} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSE_{WP} = 4 \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{m=1}^M (\bar{y}_{ab\dots m} - \bar{y}_{ab\dots})^2$$

$$SSP = 8M \sum_{p=1}^2 (\bar{y}_{\dots p\dots} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSAP = 4M \sum_{a=1}^2 \sum_{p=1}^2 (\bar{y}_{a.p\dots} - \bar{y}_{a\dots\dots} - \bar{y}_{\dots p\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSQ = 8M \sum_{q=1}^2 (\bar{y}_{\dots q\dots} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSAQ = 4M \sum_{a=1}^2 \sum_{q=1}^2 (\bar{y}_{a..q\dots} - \bar{y}_{a\dots\dots} - \bar{y}_{\dots q\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSR = 8M \sum_{r=1}^2 (\bar{y}_{\dots r\dots} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSAR = 4M \sum_{a=1}^2 \sum_{r=1}^2 (\bar{y}_{a...r\dots} - \bar{y}_{a\dots\dots} - \bar{y}_{\dots r\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSPQ = 4M \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (\bar{y}_{\dots pq\dots} - \bar{y}_{\dots p\dots} - \bar{y}_{\dots q\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSBP = 4M \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 (\bar{y}_{bp\dots\dots} - \bar{y}_{b\dots\dots} - \bar{y}_{\dots p\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSPR = 4M \sum_{p=1}^2 \sum_{r=1}^2 (\bar{y}_{\dots p.r\dots} - \bar{y}_{\dots p\dots} - \bar{y}_{\dots r\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSBQ = 4M \sum_{b=1}^2 \sum_{q=1}^2 (\bar{y}_{b.b.q\dots} - \bar{y}_{b\dots\dots} - \bar{y}_{\dots q\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSQR = 4M \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 (\bar{y}_{\dots qr\dots} - \bar{y}_{\dots q\dots} - \bar{y}_{\dots r\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSBR = 4M \sum_{b=1}^2 \sum_{r=1}^2 (\bar{y}_{b..r\dots} - \bar{y}_{b\dots\dots} - \bar{y}_{\dots r\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SSE_{SP} = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M (y_{abpqrm} - \bar{y}_{ab\dots m} - \bar{y}_{a.p\dots} - \bar{y}_{a..q\dots} - \bar{y}_{a...r\dots} - \bar{y}_{bp\dots\dots} - \bar{y}_{b.q\dots} + \\ - \bar{y}_{b..r\dots} - \bar{y}_{\dots pq\dots} - \bar{y}_{\dots p.r\dots} + - \bar{y}_{\dots qr\dots} + 3\bar{y}_{a\dots\dots} + 3\bar{y}_{b\dots\dots} + 3\bar{y}_{\dots p\dots} + 3\bar{y}_{\dots q\dots} + 3\bar{y}_{\dots r\dots} - 6\bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$SST = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^M (y_{abpqrm} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$$

$$MSA = \frac{SSA}{dfA}$$

$$F_A = \frac{MSA}{MSE_{WP}}$$

$$MSB = \frac{SSB}{dfB}$$

$$F_B = \frac{MSB}{MSE_{WP}}$$

$$MSAB = \frac{SSAB}{dfAB}$$

$$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE_{WP}}$$

$$MSP = \frac{SSP}{dfP}$$

$$F_P = \frac{MSP}{MSE_{SP}}$$

$$MSQ = \frac{SSQ}{dfQ}$$

$$F_Q = \frac{MSQ}{MSE_{SP}}$$

$$MSR = \frac{SSR}{dfR}$$

$$F_R = \frac{MSR}{MSE_{SP}}$$

$$MSP_Q = \frac{SSP_Q}{df_{PQ}}$$

⋮

$$MSBR = \frac{SSBR}{df_{BR}}$$

$$F_{PQ} = \frac{MSP_Q}{MSE_{SP}}$$

$$F_{BR} = \frac{MSBR}{MSE_{SP}}$$

$$MSE_{WP} = \frac{SSE_{WP}}{df_{E_{WP}}}$$

$$MSE_{SP} = \frac{SSE_{SP}}{df_{E_{SP}}}$$

$$F_{Error\ WP} = \frac{MSE_{WP}}{MSE_{SP}}$$

Lampiran 4 : Struktur Data dan Nilai Variabel Respon dari Studi Kasus di Industri Semikonduktor oleh Lewis, Hutchens, dan Smith (1997) dalam Bingham dan Sitter (2003)

No.	Faktor WP								Faktor SP			Respon y
	A	B	C	D	E	F	G	H	P	Q	R	
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	0,916
2									+	-	-	0,934
3									-	+	-	0,912
4									+	+	+	0,922
5	+	-	-	-	+	+	-	+	-	-	+	0,967
6									+	-	-	0,964
7									-	+	-	0,959
8									+	+	+	0,972
9	-	+	-	-	+	+	+	-	-	-	+	0,906
10									+	-	-	0,934
11									-	+	-	0,880
12									+	+	+	0,926
13	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	0,856
14									+	-	-	0,967
15									-	+	-	0,822
16									+	+	+	0,959
17	-	-	+	-	-	+	+	+	-	-	+	0,939
18									+	-	-	0,952
19									-	+	-	0,926
20									+	+	+	0,943
21	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-	+	0,957
22									+	-	-	0,954
23									-	+	-	0,964
24									+	+	+	0,961
25	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	0,879
26									+	-	-	0,941
27									-	+	-	0,847
28									+	+	+	0,935
29	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	0,738
30									+	-	-	0,973
31									-	+	-	0,776
32									+	+	+	0,972
33	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	0,934
34									+	-	-	0,948
35									-	+	-	0,948
36									+	+	+	0,948
37	+	-	-	+	-	+	+	-	-	-	+	0,956
38									+	-	-	0,963
39									-	+	-	0,957

No.	Faktor WP								Faktor SP			Respon
	A	B	C	D	E	F	G	H	P	Q	R	y
40									+	+	+	0,958
41	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	0,957
42									+	-	-	0,954
43									-	+	-	0,964
44									+	+	+	0,961
45	+	+	-	+	+	-	-	-	-	-	+	0,941
46									+	-	-	0,972
47									-	+	-	0,953
48									+	+	+	0,969
49	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	0,932
50									+	-	-	0,939
51									-	+	-	0,935
52									+	+	+	0,940
53	+	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	0,961
54									+	-	-	0,960
55									-	+	-	0,960
56									+	+	+	0,956
57	-	+	+	+	-	-	+	-	-	-	+	0,925
58									+	-	-	0,951
59									-	+	-	0,934
60									+	+	+	0,957
61	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	0,972
62									+	-	-	0,971
63									-	+	-	0,929
64									+	+	+	0,974

Lampiran 5 : Struktur Data dalam Bentuk Rancangan FFSP 2.3.0.1 dan Nilai Variabel Respon dari Studi Kasus di Industri Semikonduktor oleh Lewis, Hutchens, dan Smith (1997) dalam Bingham dan Sitter (2003)

No.	Faktor WP		Faktor SP			Respon
	B	D	P	Q	R	y
1	-	-	-	-	+	0,916
2						0,967
3						0,939
4						0,957
5				+	-	0,912
6						0,959
7						0,926
8						0,964
9			+	-	-	0,934
10						0,964
11						0,952
12						0,954
13				+	+	0,922
14						0,972
15						0,943
16						0,961
17		+	-	-	+	0,934
18						0,956
19						0,932
20						0,961
21				+	-	0,948
22						0,957
23						0,935
24						0,96
25			+	-	-	0,948
26						0,963
27						0,939
28						0,96
29				+	+	0,948
30						0,958
31						0,94
32						0,956
33	+	-	-	-	+	0,906
34						0,856
35						0,879
36						0,738
37				+	-	0,88
38						0,822

No.	Faktor WP		Faktor SP			Respon y
	B	D	P	Q	R	
39						0,847
40						0,776
41			+	-	-	0,934
42						0,967
43						0,941
44						0,973
45				+	+	0,926
46						0,959
47						0,935
48						0,972
49		+	-	-	+	0,957
50						0,941
51						0,925
52						0,972
53				+	-	0,964
54						0,953
55						0,934
56						0,929
57			+	-	-	0,954
58						0,972
59						0,951
60						0,971
61				+	+	0,961
62						0,969
63						0,957
64						0,974

Lampiran 6 : Program Macro MINITAB Untuk menghitung WLP Rancangan

Input dari program ini adalah panjang *word* pada *defining relation* yang dicari melalui program Microsoft Excel 2003. Program yang dituliskan di bawah ini adalah untuk kasus $k = 10$.

```
gmacro
hitung_wlp
#
#untuk k=10
#
#mengubah data panjang kata rancangan yang sebelumnya
#berbentuk baris menjadi kolom
#kemudian mengurutkan dari panjang kata "terpendek" sampai "terpanjang"
#
let k12 = count(c1)
copy c1-c63 m1
transpose m1 m2
let k21=64+k12
copy m2 c65-ck21
do k23=65:k21
    sort ck23 ck23;
    by ck23.
enddo

#
#menghitung berapa banyak kata dengan panjang 3, 4, dst
#
let k3=3
let k4=4
let k5=5
let k6=6
let k7=7
let k8=8
let k9=9
let k10=10

let k24=k21+1
do k11=65:k21
    let k13=0
    let k14=0
    let k15=0
    let k16=0
    let k17=0
    let k18=0
```



```

let k19=0
let k20=0
do k2=1:63
    if ck11(k2)=k3
        let k13=k13+1
    elseif ck11(k2)=k4
        let k14=k14+1
    elseif ck11(k2)=k5
        let k15=k15+1
    elseif ck11(k2)=k6
        let k16=k16+1
    elseif ck11(k2)=k7
        let k17=k17+1
    elseif ck11(k2)=k8
        let k18=k18+1
    elseif ck11(k2)=k9
        let k19=k19+1
    else ck11(k2)=k10
        let k20=k20+1
    endif
enddo
let k24=k24+1
copy k13-k20 ck24
enddo

#
#mencetak wlp
#wlp tiap rancangan dicetak pada kolom yang berbeda
#
let k25=k24-k12+1
let k26=count(ck25)

#
#mengubah cetakan wlp rancangan
#dari bentuk kolom untuk masing-masing rancangan
#menjadi bentuk baris
#
copy ck25-ck24 m3
transpose m3 m4
let k28=k24+2
let k27=k28+k26-1
copy m4 ck28-ck27
endmacro

```