

Struktur Hirarkis Jalur Kereta Api Semi Double Track Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus

Tri Utomo¹, Subiono²

¹Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, Three1st@gmail.com

²Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, Subiono2008@matematika.its.ac.id

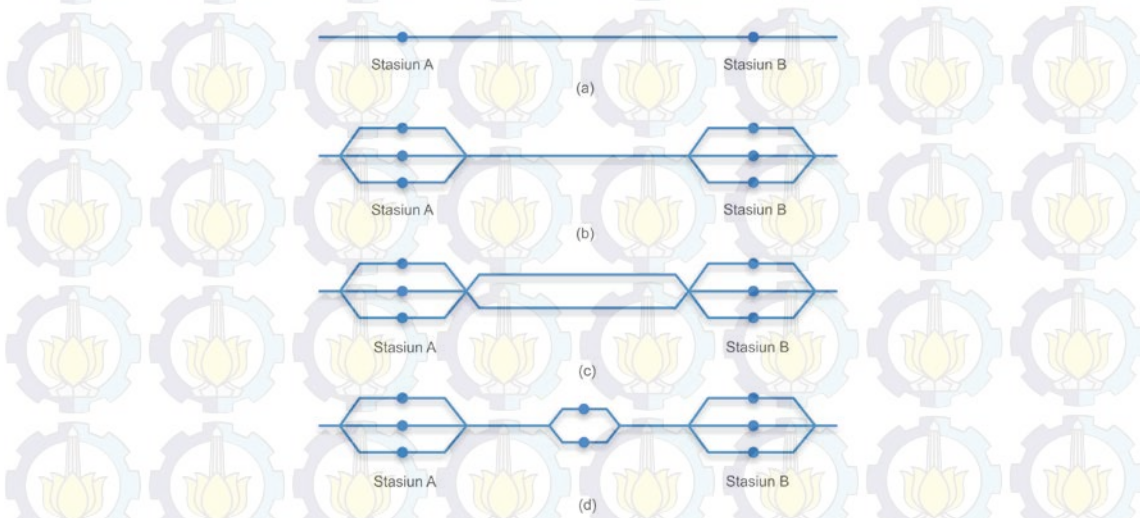
Abstrak. Masih tingginya perbedaan pembangunan antara kota-kota besar dan daerah di sekitarnya menyebabkan terjadinya proses perpindahan yaitu berupa pengangkutan barang maupun manusianya itu sendiri (arus urbanisasi) atau biasa dikenal dengan istilah transportasi. Dalam mengatasi permasalahan transportasi ini pemerintah menetapkan beberapa kebijakan salah satunya yaitu pembangunan jalur kereta api *double track* yang saat ini untuk Lintas Utara Pulau Jawa telah selesai pengerjaannya dan untuk Lintas Selatan Pulau Jawa masih terhambat dengan masalah pembebasan lahan. Penelitian ini dimaksudkan untuk mencari solusi alternatif dalam mengatasi permasalahan transportasi khususnya jalur kereta api dengan mengoptimalkan penggunaan jalur kereta api *single track* yang dalam penelitian ini diberi istilah *semi-double track* menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus. Dalam mengerjakan penelitian ini dikonstruksi model Petri Net dari jalur kereta api *semi-double track*. Model tersebut dikonstruksi berdasarkan aturan struktur hirarkis arah jalur lintasannya, sehingga tidak terjadi *deadlock*. Kemudian mengkonstruksi model Aljabar Max-Plus dari model Petri Net yang sudah didapatkan dan terakhir menganalisis sifat keperiodikan sistem tersebut berdasarkan model Aljabar Max-Plus yaitu didapatkan nilai eigen $\lambda = 32$ yang berarti bahwa keberangkatan kereta api yang berjalan searah pada tiap-tiap stasiun adalah setiap 32 menit sekali.

Kata Kunci: Petri Net, Railways, Semi-Double Track, Struktur Hirarkis.

1 PENDAHULUAN

Salah satu permasalahan yang dihadapi oleh Indonesia saat ini adalah permasalahan transportasi, hal ini dapat dilihat pada transportasi jalur darat, banyak sekali terjadi kemacetan dimana-mana yang mengharuskan pemerintah mencari solusi alternatif untuk mengatasinya. Dalam hal ini, permasalahan transportasi jalur darat dapat diatasi dengan cara mengalihkan ke mode transportasi masal seperti kereta api. Pada akhir-akhir ini pemerintah telah menetapkan beberapa kebijakan yang berkaitan dengan perkeretaapian, yaitu pembangunan jalur kereta api *double track*.

Dari penjelasan di atas, pada penelitian ini dimaksudkan untuk mencari solusi alternatif dalam mengatasi permasalahan transportasi khususnya perkeretaapian, yaitu dengan menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus sebagai alat pemodelannya. Ide penelitian ini adalah mengoptimalkan penggunaan jalur kereta api *single track*, yaitu dengan menambahkan persimpangan di tengah-tengah jalur kereta api *single track* di antara dua stasiun utama yang selanjutnya diberi istilah jalur kereta api *semi-double track*, sebagai ilustrasi bisa dilihat pada **Gambar 1**.



Gambar 1 Ilustrasi Permasalahan dari Dua Stasiun Kereta Api, (a) Dua Stasiun yang Digambarkan dalam Sebuah Graf, (b) Ilustrasi Jalur Kereta Api *single track*, (c) Ilustrasi Jalur Kereta Api *double track*, (d) Ilustrasi Jalur Kereta Api *semi-double track*

Permasalahan pada jalur kereta api *semi-double track* adalah bagaimana menentukan struktur hirarkis arah jalur lintasannya. Hal ini disebabkan pembagian *resource* (rel) secara bergantian untuk beberapa kereta api yang melaluinya. Berbeda dengan jalur kereta api *double track*, kita bisa langsung menentukan arah jalur lintasan yang berbeda-beda untuk setiap *resource*-nya. Permasalahan serupa pernah dibahas oleh [1] dalam disertasinya dengan judul *A Hierarchical Control Structure for A Class of Timed Discrete Event Systems*, dalam hal ini yang menjadi sumber rujukan utama penelitian.

Penelitian ini dilakukan pada jalur kereta api Waru-Sidoarjo, kemudian dengan menggambarkan permasalahan kereta api seperti pada **Gambar 1**, nantinya akan dilakukan pembentukan model menggunakan Petri Net dengan memberikan struktur hirarkis arah jalur lintasannya, kemudian menjabarkan model Petri Net tersebut ke dalam model Aljabar Max-Plus dan mensimulasikannya dengan menggunakan Scilab 5.5.0.

2 TINJAUAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Tinjauan Pustaka

Penelitian terkait dengan penjadwalan kereta api juga sudah pernah dilakukan oleh [2] yaitu *Pemodelan dan Penjadwalan Monorel dan Trem yang Terintegrasi di Kota Surabaya Menggunakan Aljabar Max-Plus*, dan menghasilkan kesimpulan periode keberangkatannya adalah 4,6. Selain itu [3] dengan judul *Pemodelan dan Penjadwalan Jaringan Kereta Rel Listrik (KRL) Menggunakan Aljabar Max-Plus* juga meneliti tentang penjadwalan kereta api. Akan tetapi penelitian-penelitian mengenai penjadwalan kereta api ini hanya membahas penjadwalannya tanpa melihat jalur kereta yang digunakan yaitu *single track* atau *double track*. Sehingga peneliti ingin melakukan penelitian terkait masalah penjadwalan kereta api dengan mempertimbangkan jalur kereta api yang digunakan.

2.2 Dasar Teori

Dalam penelitian ini digunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus sebagai alat untuk memodelkan permasalahan jalur kereta api *semi-double track*. Petri Net adalah suatu graf bipartisi, yang terdiri dari dua himpunan bagian P dan T , masing-masing menyatakan *place* dan *transition*. Secara matematis Petri Net dapat dituliskan sebagai 4-tuple (P, T, A, w) dengan,

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ adalah himpunan berhingga dari *places*,

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ adalah himpunan berhingga dari *transition*,

$A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ adalah himpunan dari garis berarah (*arcs*),

$w: A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ adalah fungsi bobot pada *arcs*,

diasumsikan bahwa pada (P, T, A, w) tidak ada *place* dan *transition* yang terisolasi [4].

Sedangkan Aljabar Max-Plus adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari \mathbb{R}_ϵ dengan $\mathbb{R}_\epsilon = \mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$ dan $\epsilon = -\infty$ dengan dua operator biner yaitu Operator Max (\oplus “baca: oplus”) dan Operator Plus (\otimes “baca: otimes”), yang didefinisikan sebagai berikut, $\forall x, y \in \mathbb{R}_\epsilon$

$$x \oplus y = \max\{x, y\} \text{ dan } x \otimes y = x + y.$$

Diketahui bahwa $(\mathbb{R}_\epsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif dengan elemen netral ϵ dan elemen satuan e ($e = 0$). Lebih lanjut lagi, $(\mathbb{R}_\epsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semifield idempoten [5].

Sebagai tambahan informasi, diperkenalkan nilai eigen dan vektor eigen yaitu nilai karakteristik dan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ dari suatu matriks persegi A berukuran $m \times m$, yang didefinisikan sebagai berikut, misalkan $A \in \mathbb{R}_\epsilon^{m \times m}$ merupakan matriks persegi, jika $\lambda \in \mathbb{R}$ adalah skalar dan $v \in \mathbb{R}_\epsilon^m$ adalah vektor yang setidaknya memuat satu elemen tak nol (ϵ) sedemikian hingga

$$A \otimes v = \lambda \otimes v$$

maka λ disebut dengan nilai eigen dari A dan v disebut vektor eigen dari A yang berkaitan dengan nilai eigen λ [6].

Salah satu cara untuk menghitung nilai eigen dan vektor eigen dapat digunakan Algoritma Power sebagai berikut.

1. Ambil sebarang vektor awal $x(0) \in \mathbb{R}_\epsilon^m$ dengan $x(0) \neq \epsilon$.
2. Iterasi persamaan $x(k+1) = A \otimes x(k)$ sehingga didapatkan bilangan bulat $p > q \geq 0$ dan bilangan real c sedemikian hingga

$$x(p) = c \otimes x(q)$$

3. Hitung nilai eigen dengan menggunakan persamaan berikut

$$\lambda = \frac{c}{p - q}$$

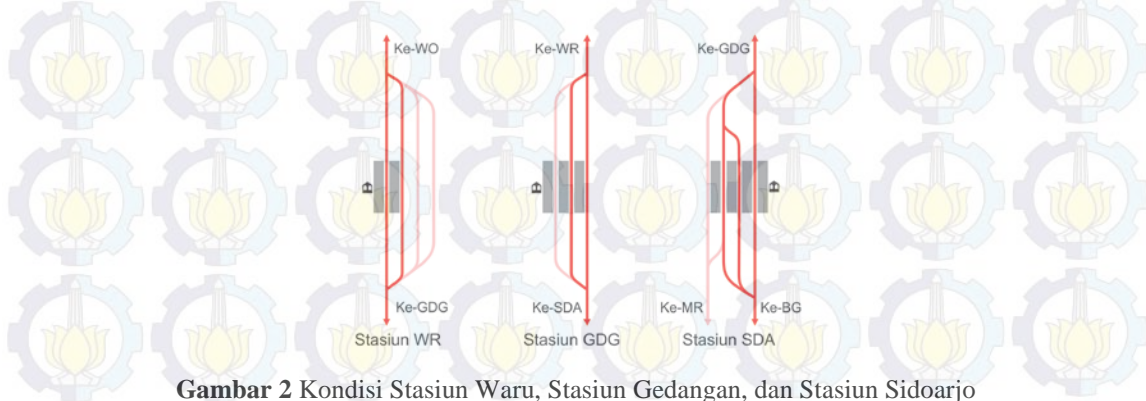
4. Hitung vektor eigen dengan menggunakan persamaan berikut

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes (p-q-i)} \otimes x(q+i-1) \right)$$

3 PEMBAHASAN

3.1 Pengantar Permasalahan

Penelitian ini dilakukan pada jalur kereta api Waru-Sidoarjo, yang terdiri dari 3 stasiun, 2 stasiun utama yaitu Stasiun Waru (WR) dan Stasiun Sidoarjo (SDA), dan 1 stasiun yang berada di antara jalur *single track* Waru-Sidoarjo yaitu Stasiun Gedangan (GDG), dalam hal ini yang difungsikan sebagai stasiun lokasi persimpangan. Sebagai tambahan ilustrasi, jalur kereta api Waru-Sidoarjo ini selanjutnya menuju ke Stasiun Wonokromo (WO) ke arah utara, dan menuju ke Stasiun Bangil (BG) ke arah selatan, satu lagi ke arah barat menuju ke Stasiun Mojokerto (MR) (**Gambar 2**).

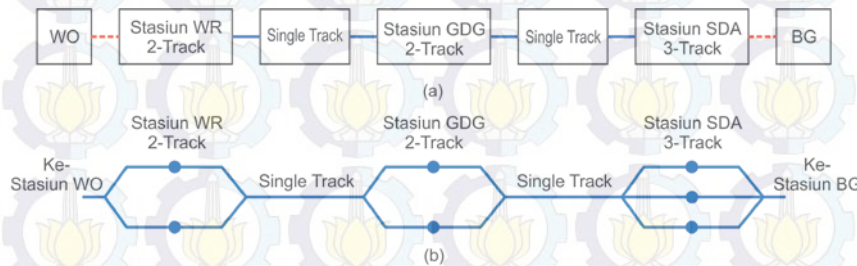


Gambar 2 Kondisi Stasiun Waru, Stasiun Gedangan, dan Stasiun Sidoarjo

Berdasarkan data yang diambil dari PT Kereta Api Indonesia (Persero) Daerah Operasi 8 Surabaya [7], diketahui bahwa WR memiliki 4 jalur, dengan jalur 1 dan 2 adalah jalur untuk kereta reguler yang berhenti maupun langsung serta untuk pertemuan kereta api yang berjalan berlawanan arah, sementara 2 jalur lainnya diperuntukkan untuk kereta api peti kemas. Kereta api peti kemas ini hanya beroperasi dua hari sekali. Sehingga dalam penelitian ini disimpulkan bahwa WR hanya memiliki 2 jalur untuk kereta api reguler.

Sedangkan SDA memiliki 5 jalur, akan tetapi 1 jalur sekarang sudah digusur, kemudian 1 jalur tidak beroperasi yaitu jalur yang menuju ke Stasiun Mojokerto (MR). Sehingga dalam penelitian ini disimpulkan bahwa SDA hanya memiliki 3 jalur untuk kereta api reguler. Sedangkan untuk GDG pada awalnya mempunyai 3 jalur rel kereta api, namun 1 jalur dibongkar dan kini tinggal 2 jalur saja. Sehingga dalam penelitian ini disimpulkan bahwa GDG hanya memiliki 2 jalur untuk kereta api reguler.

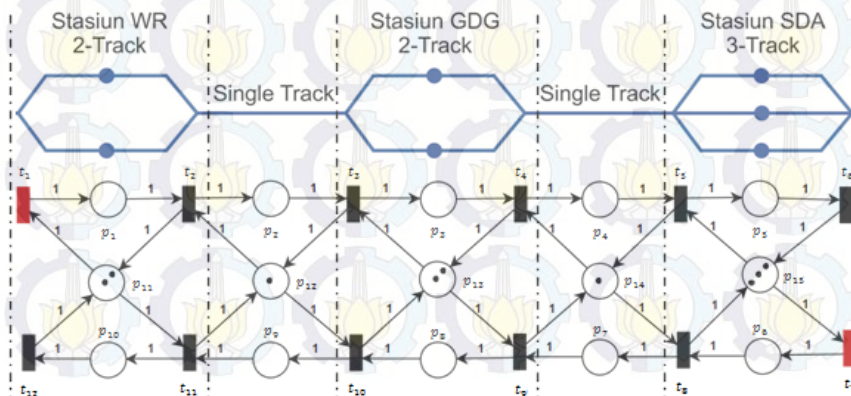
Berdasarkan penjelasan kondisi jalur kereta api Waru-Sidoarjo, dapat digambarkan sebagai berikut (**Gambar 3**).



Gambar 3 Gambaran Umum Jalur Kereta Api Waru-Sidoarjo

3.2 Model Petri Net

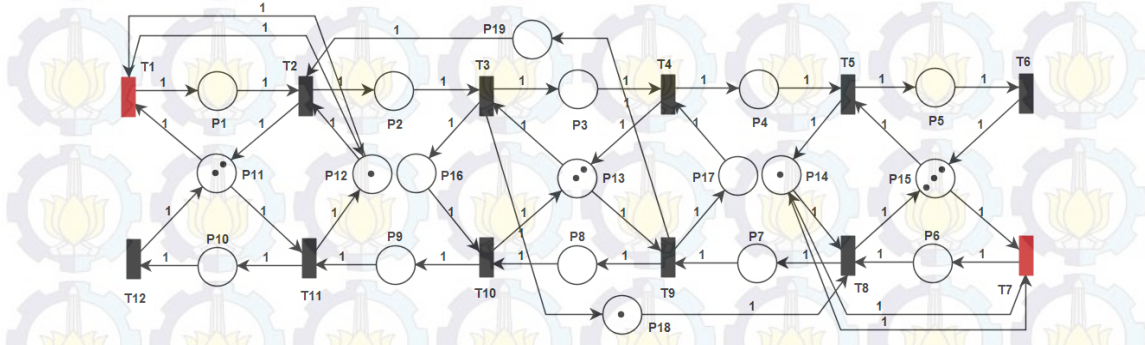
Berdasarkan kondisi jalur kereta api Waru-Sidoarjo dan beberapa penjelasan pada Sub-Bab 3.1, berikut disusun Petri Net jaringan kereta api jalur Waru-Sidoarjo (**Gambar 4**).



Gambar 4 Model Petri Net dari Jalur Kereta Api Waru-Sidoarjo

Himpunan P merupakan himpunan berhingga *place*, $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \dots, p_{15}\}$ dan jumlah *token* yang terdapat pada masing-masing *place* yaitu pada $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}$ menunjukkan keberadaan kereta api saat ke- k dan pada $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}$ menunjukkan jalur yang dapat digunakan kereta api untuk melintas ke stasiun berikutnya saat ke- k . Sedangkan T merupakan himpunan berhingga *transition*, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{12}\}$ yaitu menunjukkan *event* keberangkatan atau kedatangan kereta api di tiap-tiap stasiun.

Pada model Petri Net **Gambar 4** terdapat kejadian *deadlock*, sehingga model Petri Net tersebut masih perlu perbaikan dengan cara mempertimbangkan urutan prioritas. Berikut diberikan model Petri Net setelah mempertimbangkan urutan prioritas ke dalam model yang dikonstruksi (**Gambar 5**), sehingga membentuk suatu struktur hirarkis arah jalur lintasan kereta api. Model Petri Net ini tidak jauh berbeda dengan model Petri Net tanpa prioritas pada **Gambar 4** hanya saja ada penambahan empat buah *place* dan beberapa *arc*, serta adanya perubahan beberapa *arc* yang berfungsi sebagai pengatur arah jalur lintasan kereta api.



Gambar 5 Model Petri Net dengan Prioritas

3.3 Model Aljabar Max-Plus

Berdasarkan model Petri Net yang sudah dibuat pada Sub-Bab 3.2 **Gambar 5**, dapat dibentuk model Aljabar Max-Plus sebagai berikut,

$$t_1(k+1) = [a_1 \otimes t_6(k-2)] \oplus [b \otimes t_2(k-1)] \oplus [b \otimes t_{12}(k-2)] \oplus [b \otimes t_{11}(k)]$$

$$t_2(k+1) = [a_{2,1} \otimes t_1(k+1)] \oplus [b \otimes t_9(k+1)] \oplus [b \otimes t_{11}(k)]$$

$$t_3(k+1) = [a_{3,2} \otimes t_2(k+1)] \oplus [b \otimes t_4(k-1)] \oplus [b \otimes t_{10}(k-1)]$$

$$t_4(k+1) = [a_{4,3} \otimes t_3(k+1)] \oplus [b \otimes t_9(k+1)]$$

$$t_5(k+1) = [a_{5,4} \otimes t_4(k+1)] \oplus [b \otimes t_6(k-2)] \oplus [b \otimes t_8(k-2)]$$

$$t_6(k+1) = [a_{6,5} \otimes t_5(k+1)]$$

$$t_7(k+1) = [a_7 \otimes t_{12}(k-2)] \oplus [b \otimes t_8(k-2)] \oplus [b \otimes t_6(k-3)] \oplus [b \otimes t_5(k)]$$

$$t_8(k+1) = [a_{8,7} \otimes t_7(k+1)] \oplus [b \otimes t_3(k)] \oplus [b \otimes t_5(k)]$$

$$t_9(k+1) = [a_{9,8} \otimes t_8(k+1)] \oplus [b \otimes t_4(k-1)] \oplus [b \otimes t_{10}(k-1)]$$

$$t_{10}(k+1) = [a_{10,9} \otimes t_9(k+1)] \oplus [b \otimes t_3(k+1)]$$

$$t_{11}(k+1) = [a_{11,10} \otimes t_{10}(k+1)] \oplus [b \otimes t_{12}(k-1)] \oplus [b \otimes t_2(k)]$$

$$t_{12}(k+1) = [a_{12,11} \otimes t_{11}(k+1)]$$

atau dapat ditulis ulang menjadi satu kesatuan sistem persamaan dan ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut,

$$\mathbf{t}(k+1) = [A_0 \otimes \mathbf{t}(k+1)] \oplus [A_1 \otimes \mathbf{t}(k)] \oplus [A_2 \otimes \mathbf{t}(k-1)] \oplus [A_3 \otimes \mathbf{t}(k-2)] \oplus [A_4 \otimes \mathbf{t}(k-3)] \quad (1)$$

dengan

$$\mathbf{t}(k+1) = [t_1(k+1) \ t_2(k+1) \ t_3(k+1) \ \dots \ t_{12}(k+1)]'$$

$$\mathbf{t}(k) = [t_1(k) \ t_2(k) \ t_3(k) \ t_4(k) \ \dots \ t_{12}(k)]'$$

$$\mathbf{t}(k-1) = [t_1(k-1) \ t_2(k-1) \ t_3(k-1) \ \dots \ t_{12}(k-1)]'$$

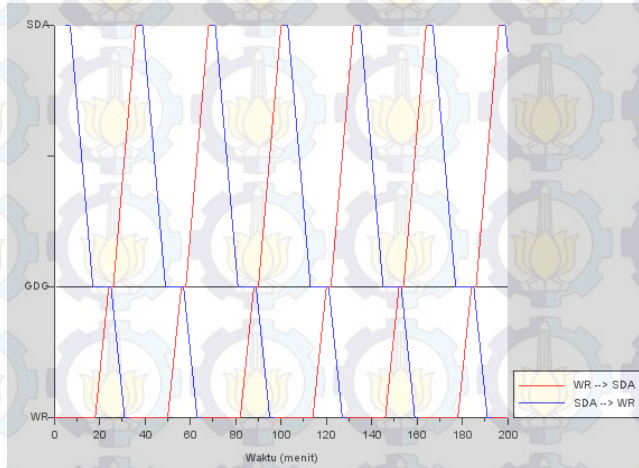
$$\mathbf{t}(k-2) = [t_1(k-2) \ t_2(k-2) \ t_3(k-2) \ \dots \ t_{12}(k-2)]'$$

$$\mathbf{t}(k-3) = [t_1(k-3) \ t_2(k-3) \ t_3(k-3) \ \dots \ t_{12}(k-3)]'$$

dan

$$\tilde{\mathbf{t}}(k) = [\mathbf{t}'(k), \mathbf{t}'(k - 1), \mathbf{t}'(k - 2), \mathbf{t}'(k - 3)]'$$

Persamaan (3) merupakan model Aljabar Max-Plus yang diinginkan dari permasalahan ini. Untuk selanjutnya mengenai simulasi dari model Aljabar Max-Plus akan digunakan *toolbox* Max-Plus dan Petri Net pada aplikasi Scilab dan didapatkan bahwa nilai eigen $\lambda = 32$. Angka ini menunjukkan bahwa diperlukan waktu 32 menit bagi kereta api yang berjalan searah untuk berjalan pada siklus berikutnya dari keberangkatan sebelumnya pada masing-masing stasiun. Berikut hasil simulasi kedatangan dan keberangkatan kereta api untuk 200 menit pertama atau 3 jam dan 20 menit pertama, dapat dilihat bahwa pada selang waktu tersebut dapat digunakan untuk memberangkatkan 12 kereta api, yaitu 6 kereta api dengan arah SDA-WR dan 6 kereta api dengan arah WR-SDA (lihat **Gambar 6**).



Gambar 6 Waktu Kedatangan dan Keberangkatan Kereta Api 200 menit pertama

Sedangkan untuk jadwal kedatangan dan keberangkatan kereta api dapat dilakukan konversi waktu dari format menit menjadi format jam. Jika keberangkatan pertama dilakukan pada jam 4, maka didapatkan jadwal kedatangan dan keberangkatan kereta api pada masing-masing stasiun sebagai berikut (lihat **Tabel 1** dan **Tabel 2**). Pada hasil simulasi **Tabel 1** dan **Tabel 2** jika dikaitkan dengan jadwal keberangkatan kereta api yang diambil dari PT. Kereta Api Indonesia (Persero) Daerah Operasi 8 Surabaya tertanggal 31 Januari 2015 [7], maka dapat disimpulkan bahwa keberangkatan kereta api barang yang berjalan dari arah SDA menuju ke WR merupakan keberangkatan yang ke-2 dengan selisih waktu maksimal 17 menit dari jadwal keberangkatan sebenarnya. Dapat dilihat pada keberangkatan ke-2, pada tabel tersebut menunjukkan bahwa kedatangan kereta api di SDA yaitu pada pukul 04:37, sedangkan pada jadwal sebenarnya pukul 04:20, dan keberangkatan kereta api di stasiun WR yaitu pada pukul 05:05, sedangkan pada jadwal sebenarnya pukul 04:59.

Tabel 1 Jadwal kedatangan dan keberangkatan kereta api dari arah WR menuju ke SDA

No	Waru		Gedangan		Sidoarjo	
	Kedatangan	Keberangkatan	Kedatangan	Keberangkatan	Kedatangan	Keberangkatan
1	3:54	4:12	4:18	4:20	4:30	4:32
2	4:26	4:44	4:50	4:52	5:02	5:04
3	4:58	5:16	5:22	5:24	5:34	5:36
4	5:30	5:48	5:54	5:56	6:06	6:08
5	6:02	6:20	6:26	6:28	6:38	6:40
6	6:34	6:52	6:58	7:00	7:10	7:12
7	7:06	7:24	7:30	7:32	7:42	7:44
8	7:38	7:56	8:02	8:04	8:14	8:16
9	8:10	8:28	8:34	8:36	8:46	8:48
10	8:42	9:00	9:06	9:08	9:18	9:20
11	9:14	9:32	9:38	9:40	9:50	9:52
12	9:46	10:04	10:10	10:12	10:22	10:24
13	10:18	10:36	10:42	10:44	10:54	10:56
14	10:50	11:08	11:14	11:16	11:26	11:28
15	11:22	11:40	11:46	11:48	11:58	12:00
16	11:54	12:12	12:18	12:20	12:30	12:32
17	12:26	12:44	12:50	12:52	13:02	13:04

Pada jadwal yang diperoleh dari PT. Kereta Api Indonesia (Persero) Daerah Operasi 8 Surabaya [7], terdapat jam-jam kosong seperti pada pukul 06:30 sampai dengan pukul 08:15 dan pada pukul 09:25 sampai dengan pukul 11:35, sedangkan pada simulasi diperoleh hasil penjadwalan yang kontinu untuk setiap waktunya. Tambahan jadwal keberangkatan pada hasil simulasi ini bisa direkomendasikan untuk digunakan keberangkatan kereta api yang tidak masuk dalam jadwal sehari-hari, sebagai contoh bisa digunakan untuk keberangkatan kereta api Sewa/Carter (Paket Rombongan) dan kereta api Wisata. Selain itu bisa digunakan untuk penambahan keberangkatan kereta api, seperti pada penambahan keberangkatan kereta api karena adanya lonjakan penumpang pada musim lebaran (arus mudik), atau penambahan keberangkatan kereta api seperti yang dilakukan pada tanggal 1 April 2015, mulai beroperasi KA Ekonomi Sidoarjo-Surabaya Gubeng-Surabaya Pasarturi-Bojonegoro (PP) yang sebelumnya merupakan layanan rute Surabaya Pasarturi-Bojonegoro (PP). Pada dasarnya sudah terdapat jalur yang menghubungkan Surabaya Gubeng dengan Surabaya Pasarturi sebelumnya, hanya saja tidak dibuat jadwal keberangkatan antara stasiun tersebut. Penambahan keberangkatan kereta api ini dilakukan untuk memudahkan pengguna jasa kereta api dari Sidoarjo yang ingin menuju ke Surabaya Pasarturi, atau dari Bojonegoro yang ingin menuju ke Sidoarjo.

Secara umum akan terjadi selisih waktu antara jadwal hasil simulasi dengan jadwal yang diambil dari PT. Kereta Api Indonesia (Persero) Daerah Operasi 8 Surabaya [7]. Selisih waktu tersebut dikarenakan pada simulasi diberikan jadwal keberangkatan kereta api untuk pertama kalinya dimulai pada pukul 04:00, sedangkan pada jadwal sebenarnya dimulai pukul 3:54. Selain itu dikarenakan waktu tunggu yang diberikan pada keberangkatan setiap kereta api harus menunggu selama 1 menit setelah kedatangan kereta api yang berjalan dari arah yang berlawanan, serta pemberian waktu tunggu di masing-masing stasiun yang disamaratakan yaitu berdasarkan waktu tunggu rata-rata, begitu juga pada waktu tempuh yang diperlukan kereta api untuk berjalan dari satu stasiun ke stasiun berikutnya.

Selain itu, pada jadwal keberangkatan yang diperoleh dari hasil simulasi model Aljabar Max-Plus didapatkan sifat keperiodikan yang seragam, yaitu keberangkatan kereta api terjadi setiap 32 menit sekali pada masing-masing stasiun untuk kereta api yang berjalan dengan arah yang sama. Hal ini merupakan keperiodikan minimum yang diperoleh dari model Aljabar Max-Plus yang dibangun untuk mendapatkan jadwal keberangkatan yang efisien dari segi waktu dan penggunaan jalur kereta api *semi-double track* sehingga tidak terjadi *deadlock*.

Tabel 2 Jadwal kedatangan dan keberangkatan kereta api dari arah SDA menuju ke WR

No	Sidoarjo		Gedangan		Waru	
	Kedatangan	Keberangkatan	Kedatangan	Keberangkatan	Kedatangan	Keberangkatan
1	3:59	4:01	4:11	4:19	4:25	4:27
2	4:31	4:33	4:43	4:51	4:57	4:59
3	5:03	5:05	5:15	5:23	5:29	5:31
4	5:35	5:37	5:47	5:55	6:01	6:03
5	6:07	6:09	6:19	6:27	6:33	6:35
6	6:39	6:41	6:51	6:59	7:05	7:07
7	7:11	7:13	7:23	7:31	7:37	7:39
8	7:43	7:45	7:55	8:03	8:09	8:11
9	8:15	8:17	8:27	8:35	8:41	8:43
10	8:47	8:49	8:59	9:07	9:13	9:15
11	9:19	9:21	9:31	9:39	9:45	9:47
12	9:51	9:53	10:03	10:11	10:17	10:19
13	10:23	10:25	10:35	10:43	10:49	10:51
14	10:55	10:57	11:07	11:15	11:21	11:23
15	11:27	11:29	11:39	11:47	11:53	11:55
16	11:59	12:01	12:11	12:19	12:25	12:27
17	12:31	12:33	12:43	12:51	12:57	12:59

4 KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari hasil penelitian ini yaitu berdasarkan hasil simulasi didapatkan bahwa nilai eigen $\lambda = 32$, artinya diperlukan waktu 32 menit bagi kereta api untuk berjalan pada siklus berikutnya dari keberangkatan sebelumnya yang berjalan searah pada masing-masing stasiun. Selain itu, dapat disimpulkan bahwa jika keberangkatan awal kereta api dimulai pukul 04:00 dan diakhiri sampai pukul 13:10, maka ada sebanyak 34 kereta api yang dapat diberangkatkan, yaitu 17 kereta api berjalan dari arah WR menuju ke SDA dan 17 kereta api berjalan dari arah SDA menuju ke WR. Pertemuan kereta api yang berjalan berlawanan arah selalu berada di stasiun, menandakan bahwa tidak terjadi tabrakan antara kereta api yang berjalan dari arah SDA menuju ke WR dengan kereta api yang berjalan dari arah WR menuju ke SDA.

5 DAFTAR PUSTAKA

- [1] Li, Danjing. (2008). *A Hierarchical Control Structure for A Class of Timed Discrete Event Systems*. Dissertation of Electrical Engineering and Computer Science, Technical University of Berlin, Magdeburg.
- [2] Afiatna, F. A. (2013). *Pemodelan dan Penjadwalan Monorel dan Trem yang Terintegrasi di Kota Surabaya Menggunakan Aljabar Max-Plus*. Tugas Akhir S1 Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- [3] Alfiah, S. (2011). *Pemodelan Jaringan Kereta Rel Listrik (KRL) Menggunakan Aljabar Max-Plus*. Tesis Magister Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- [4] Cassandras, C. G., & Lafortune, S. (2008). *Introduction to Discrete Event Systems Second Edition*. New York: Springer.
- [5] Subiono. (2015). *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya Version 3.0.0*. Buku Ajar Mata Kuliah Pilihan Pascasarjana Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- [6] Heidergott, B., Olsder, G. J., & Woude, J. V. (2006). *Max Plus at Work, Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*. United Kingdom: Princeton University Press.
- [7] *PT Kereta Api Indonesia (Persero)*. (2014, Oktober 19). Diambil kembali dari PT Kereta Api Indonesia (Persero): <http://kereta-api.co.id>.

