



TUGAS AKHIR - TE 141599

**KOMPENSASI KESALAHAN SENSOR BERBASIS
DESCRIPTOR DENGAN PERFORMA H_{∞} PADA
*WINDING MACHINE***

Hendra Antomy
NRP 2211 100 130

Dosen Pembimbing
Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

JURUSAN TEKNIK ELEKTRO
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015



FINAL PROJECT - TE 141599

***SENSOR FAULT COMPENSATION BASED ON
DESCRIPTOR WITH H_{∞} PERFORMANCE FOR
WINDING MACHINE***

Hendra Antomy
NRP 2211 100 130

Supervisor
Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ELECTRICAL ENGINEERING DEPARTMENT
Faculty of Industrial Technology
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015

KOMPENSASI KESALAHAN SENSOR BERBASIS *DESCRIPTOR* DENGAN PERFORMA H_∞ PADA *WINDING MACHINE*

Nama : Hendra Antomy
Pembimbing : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ABSTRAK

Kesalahan pada sensor dapat terjadi pada sistem kontrol dengan umpan balik sehingga mengakibatkan sistem mengalami penurunan stabilitas dan performa. *Fault Tolerant Control* (FTC) adalah metode untuk mengkompensasi kesalahan pada komponen sistem, salah satunya adalah kesalahan sensor. Metode FTC dapat disusun dengan cara mendesain estimator untuk mengestimasi besarnya kesalahan sensor yang terjadi. Kompensasi dilakukan dengan cara mengurangi estimasi kesalahan sensor dengan keluaran sistem. Pada makalah ini, FTC untuk kesalahan sensor diterapkan pada sistem *winding machine*. Estimator dirancang menggunakan pendekatan sistem *descriptor* dan didesain memenuhi performa H_∞ . Permasalahan dalam desain estimator dirumuskan dalam bentuk *Linear Matrix Inequality* (LMI). Untuk merancang kontroler nominal, sistem *winding machine* direpresentasikan sebagai model *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S). Berdasarkan model tersebut, aturan kontroler disusun menggunakan konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC) dengan struktur kontrol servo tipe 1. Hasil simulasi menunjukkan bahwa kompensasi yang diberikan dapat menjaga performa dan stabilitas sistem saat terjadi kesalahan sensor. Selain itu, estimator memenuhi performa H_∞ dengan L_2 -gain kurang dari tingkat pelemahan yang ditentukan.

Kata Kunci : *Descriptor System, Fault Tolerant Control, Fuzzy Takagi-Sugeno, Kompensasi Kesalahan Sensor, Linear Matrix Inequality, Performa H_∞ , Sistem Winding Machine*



Halaman ini sengaja dikosongkan

SENSOR FAULT COMPENSATION BASED ON DESCRIPTOR WITH H_{∞} PERFORMANCE FOR THE WINDING MACHINE

Name : Hendra Antony
Supervisor : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ABSTRACT

Sensor fault may occur in the feedback control system resulting in decreased system stability and performance. Fault Tolerant Control (FTC) is a method to compensate for faults in the system's component, one of them is a sensor fault. FTC uses the estimator to detect fault in the sensor and calculate the magnitude of the error. The estimation result is used to compensate for fault occurred. In this final project, sensor fault tolerant control is applied to the winding machine system. Sensor fault estimator is designed based on descriptor system and designed to satisfy the H_{∞} performance. Estimator design problem is formulated into Linear Matrix Inequality (LMI) form. To design nominal controller, winding machine system is represented by Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model. Based on these models, the rules are designed using Parallel Distributed Controller (PDC) concept with servo type 1 control structure. The simulation results show that given compensation can maintain system stability and performance during sensor fault occurred. In addition, estimator also satisfies H_{∞} performance with L_2 -gain is less than the specified level of attenuation.

Keywords : *Descriptor System, Fault Tolerant Control, H_{∞} Performance, Linear Matrix Inequality, Sensor Fault Compensation, Takagi-Sugeno Fuzzy, Winding Machine System*



**KOMPENSASI KESALAHAN SENSOR BERBASIS
DESCRIPTOR DENGAN PERFORMA H_{∞} PADA
WINDING MACHINE**

TUGAS AKHIR

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Teknik**

Pada

**Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan
Jurusan Teknik Elektro
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Menyetujui :

Dosen Pembimbing



Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.

NIP: 1968 08 12 1994 03 2001

**SURABAYA
JULI, 2015**



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena atas segala rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam juga penulis sampaikan kepada Rasulullah Muhammad SAW yang telah menjadi teladan bagi penulis.

Tugas Akhir ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan guna menyelesaikan pendidikan Strata-1 pada Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan, Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan judul:

KOMPENSASI KESALAHAN SENSOR BERBASIS DESCRIPTOR DENGAN PERFORMA H_{∞} PADA WINDING MACHINE

Dalam pengerjaan Tugas Akhir ini, penulis mendapat banyak sekali bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala hormat, penulis mengucapkan terima kasih kepada Ayah dan Ibu penulis yang memberikan berbagai bentuk doa serta dukungan tulus tiada henti, Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T., selaku dosen pembimbing yang telah sabar dalam membimbing, Katherine Indriawati, S.T.,M.T., yang telah berbagi ilmu pengetahuan dengan penulis, teman-teman FTC Team dan angkatan E-51 serta semua pihak yang memberikan dukungan penuh kepada penulis dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa pengerjaan Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu, penulis memohon maaf atas segala kekurangan dalam buku Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan manfaat dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Surabaya, Juli 2015

Penulis



Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN TUGAS AKHIR	iii
HALAMAN PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
KONVENSI PENULISAN TUGAS AKHIR	xix
DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Sistematika Penulisan	4
1.5 Relevansi	5
BAB II TEORI PENUNJANG	7
2.1 Tinjauan Pustaka	7
2.2 Sistem <i>Winding Machine</i>	8
2.3 Sistem Nonlinear Lipschitz	17
2.4 Kontroler Servo Tipe I	19
2.5 Model <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno	22
2.6 Sektor Nonlinearitas	25
2.7 Analisis Kestabilan Lyapunov	27
2.8 Kontrol Toleransi Kesalahan Sensor	30
2.8.1 Klasifikasi Kesalahan Sensor	31
2.8.2 Estimator Kesalahan Sensor Berbasis <i>Augmented</i> <i>Descriptor System</i>	33
2.8.3 Performa H_∞	34
2.8.4 <i>Pole Region</i>	36
2.8.5 Kompensasi Kesalahan Sensor	38
2.9 Linear Matrix Inequality	38
BAB III PERANCANGAN SISTEM	41
3.1 Pemodelan <i>Fuzzy</i> T-S Sistem <i>Winding Machine</i>	41

3.2	Kontroler Servo Tipe 1	47
3.3	Desain <i>Robust Sensor Fault Estimator</i>	52
3.3.1	<i>Augmented Descriptor System</i>	52
3.3.2	Perumusan Fungsi Lyapunov	54
3.3.3	Performa H_{∞}	57
3.3.4	Perumusan LMI	59
3.3.5	Prosedur Desain	60
3.3.6	Hasil Perancangan	61
3.4	Diagram Simulink untuk Simulasi	62
BAB IV PENGUJIAN DAN ANALISIS DATA		65
4.1	Pengujian Keadaan Nominal	66
4.2	Pengujian dengan Kesalahan Sensor	70
4.2.1	<i>Bias Fault</i>	70
4.2.2	<i>Loss of Sensitivity</i>	76
4.2.3	<i>Loss of Measurement</i>	82
4.3	Pengujian terhadap Gangguan Masukan	85
BAB V PENUTUP		89
5.1	Kesimpulan	89
5.2	Saran	89
DAFTAR PUSTAKA		91
LAMPIRAN A		93
A.1	Linearisasi Sistem <i>Winding Machine</i>	93
A.2	Matriks Hasil Perancangan Kontroler Nominal	95
LAMPIRAN B		97
B.1	Program Perhitungan <i>Gain</i> Kontroler	97
B.2	Blok Diagram Simulink	102
LAMPIRAN C		107
C.1	Matriks Parameter <i>Augmented Descriptor System</i>	107
RIWAYAT PENULIS		109

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Sistem <i>Winding Machine</i>	9
Gambar 2.2	Rentangan Material Tampak Depan dan Tampak Samping.....	10
Gambar 2.3	Bentangan Material Diantara Dua <i>Roller</i> yang Berurutan.....	11
Gambar 2.4	Gaya yang Bekerja pada <i>Roller</i>	13
Gambar 2.5	Diagram Blok Kontroler Servo Tipe 1 Ketika <i>Plant</i> Tidak Memiliki Integrator	20
Gambar 2.6	Skema PDC.....	23
Gambar 2.7	Sektor Nonlinearitas	25
Gambar 2.8	Diagram Blok Sistem Kontrol dengan <i>Fault Estimator</i> . ..	30
Gambar 2.9	Klasifikasi Kesalahan Sensor Berdasarkan Waktu	32
Gambar 2.10	<i>Pole Region</i> pada Bidang Kompleks	37
Gambar 3.1	Fungsi Keanggotaan untuk Aturan <i>Plant</i> dan Kontroler ..	46
Gambar 3.2	Diagram Blok Kontroler <i>Fuzzy</i> Servo Tipe 1	48
Gambar 3.3	Diagram Blok <i>Sensor Fault Estimator</i> dengan $D = 0$...	53
Gambar 3.4	Diagram Simulink untuk Simulasi.....	63
Gambar 4.1	Respon Keluaran Sistem dengan Variasi Kondisi Awal ..	67
Gambar 4.2	Respon Sinyal Kontrol.....	68
Gambar 4.3	Respon y_3 dengan Perubahan <i>Set Point</i>	69
Gambar 4.4	Respon y_1 dan y_2 Saat Terjadi Perubahan <i>Set Point</i> pada y_3	69
Gambar 4.5	Hasil Pembobotan pada Setiap Aturan <i>Fuzzy</i>	70
Gambar 4.6	Perbandingan Hasil Estimasi f_s dengan Kesalahan Sensor pada Pengujian <i>Bias Fault</i>	71
Gambar 4.7	Perbandingan Hasil Estimasi f_s Terhadap Kesalahan Sensor pada y_3 dengan Pengujian <i>Bias Fault</i>	72
Gambar 4.8	L_2 -gain Performa Estimator pada Pengujian <i>Bias Fault</i>	73
Gambar 4.9	Respon Keluaran Sistem Setelah Kompensasi yang Diberikan pada Pengujian <i>Bias Fault</i>	74
Gambar 4.10	Perbandingan Respon Sistem Dengan Kompensasi dan Tanpa Kompensasi pada Pengujian <i>Bias Fault</i>	75
Gambar 4.11	Perbandingan Hasil Estimasi f_s dengan Kesalahan Sensor pada Pengujian <i>Loss of Sensitivity</i>	77

Gambar 4.12	Keluaran Sistem dengan Kompensasi yang Diberikan pada Pengujian <i>Loss of Sensitivity</i>	79
Gambar 4.13	L_2 -gain Performa Estimator pada Pengujian <i>Loss of Sensitivity</i>	80
Gambar 4.14	Perbandingan Respon Sistem Dengan Kompensasi dan Tanpa Kompensasi pada Pengujian <i>Loss of Sensitivity</i> ..	81
Gambar 4.15	Perbandingan Hasil Estimasi f_s dengan Kesalahan Sensor <i>Loss of Measurement</i> pada y_2	83
Gambar 4.16	Respon Keluaran Sistem dengan Kompensasi Kesalahan Sensor pada y_2	84
Gambar 4.17	Perbandingan Respon y_2 Dengan Kompensasi dan Tanpa Kompensasi pada Pengujian <i>Loss of Measurement</i>	84
Gambar 4.18	L_2 -gain pada Beberapa Nilai <i>Variance</i> Gangguan pada x_1 dan x_2	85
Gambar 4.19	Hasil Estimasi Kesalahan Sensor dengan Beberapa Nilai <i>Variance</i> Gangguan pada x_1 dan x_2	86
Gambar 4.20	Respon Keluaran Sistem dengan Beberapa Nilai <i>Variance</i> Gangguan pada x_1 dan x_2	87

KONVENSI PENULISAN TUGAS AKHIR

1. Matriks dinyatakan dengan huruf kapital dan tebal. Contoh: **A**, **B**, **C**, **D**.
2. Vektor dinyatakan dengan huruf kecil dan tebal. Contoh: **x**, **y**, **z**.
3. Matriks atau vektor dengan tanda *tilde* menyatakan matriks atau vektor yang tersusun atas beberapa matriks lain. Contoh: $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{x}}$.
4. Vektor dengan tanda *hat* menyatakan vektor hasil estimasi dari suatu algoritma. Contoh: $\hat{\mathbf{x}}$.
5. Himpunan dinyatakan dengan huruf kapital, miring, dan tidak tebal. Contoh: *X*.
6. Elemen anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil, miring, dan tidak tebal. Contoh: x_1 , x_2 , x_3 .
7. Variabel bukan matriks ataupun vektor dinyatakan dengan huruf kapital/kecil, miring, dan tidak tebal. Contoh: gaya (*F*), massa (*m*), kecepatan (*v*), dan sebagainya.



Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL

\mathbf{x}	Vektor <i>state</i> x
x_n	<i>State</i> ke- n
\dot{x}_n	Turunan pertama <i>state</i> ke- n
\in	Anggota Himpunan
\notin	Bukan anggota himpunan
\mathbf{I}	Matriks identitas
\mathbf{A}^T	Transpos matriks \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	Invers matriks \mathbf{A}
$\mathbf{A} > \mathbf{0}$	Matriks \mathbf{A} definit positif
$\mathbf{A} < \mathbf{0}$	Matriks \mathbf{A} definit negatif
$\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$	Matriks \mathbf{A} semi definit positif
$\mathbf{A} \leq \mathbf{0}$	Matriks \mathbf{A} semi definit negatif
$\text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_n)$	Matriks diagonal dengan f_n merupakan elemen diagonal ke- n
j	Bilangan imajiner
γ	Tingkat pelemahan
$ \mathbf{A} $	Determinan matriks \mathbf{A}
$\ \cdot\ _\infty$	∞ -norm
$\ \cdot\ _2$	L_2 -norm
$\sum(\cdot)$	Penjumlahan dari nilai deret
$\frac{d}{dx}(\cdot)$	Turunan pertama terhadap x
$\frac{\partial}{\partial x}(\cdot)$	Turunan parsial pertama terhadap x
$\int(\cdot)dx$	Integral terhadap x
$\int_{t_1}^{t_2}(\cdot)dx$	Integral dari t_1 sampai dengan t_2 terhadap x



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Kategori Kesalahan pada Sensor	31
Tabel 2.2 Kategori Kesalahan Sensor Berdasarkan Parameter α dan β	32
Tabel 4.1 Nilai <i>Eigen</i> pada Setiap Aturan <i>Plant</i>	66
Tabel 4.2 Karakteristik Respon Keluaran Sistem.....	68
Tabel 4.3 Performa IAE Sistem pada Pengujian <i>Bias Fault</i>	72
Tabel 4.4 Performa IAE Sistem pada Pengujian <i>Loss of Sensitivity</i>	78
Tabel 4.5 Performa IAE Sistem pada Pengujian <i>Loss of Measurement</i>	83
Tabel 4.6 IAE pada Beberapa Nilai <i>Variance</i> Gangguan.....	87



Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB I

PENDAHULUAN

Tugas Akhir merupakan penelitian yang dilakukan oleh mahasiswa S1 Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat wajib untuk menyelesaikan studi dalam program sarjana teknik. Topik yang dibahas pada Tugas Akhir ini adalah *Fault Tolerant Control (FTC)*.

Pada Bab ini membahas tentang hal-hal yang mendahului pelaksanaan Tugas Akhir. Hal-hal tersebut meliputi latar belakang, perumusan masalah, tujuan, sistematika penulisan, dan relevansi.

1.1 Latar Belakang

Sistem kontrol modern mengandalkan sistem kontrol yang canggih untuk memenuhi kinerja dan kebutuhan keamanan. Desain kontrol umpan balik konvensional untuk sistem yang kompleks dapat mengakibatkan kinerja yang tidak memuaskan, atau bahkan ketidakstabilan. Hal ini dikarenakan otomasi sistem sangat rentan terhadap kesalahan pada sensor atau aktuator. Pada umumnya, penggunaan sensor tidak dapat dihindari, mengingat kontrol umpan balik memerlukan sensor untuk mengukur keluaran sistem sebagai umpan balik. Untuk mengatasi kelemahan tersebut, pendekatan baru dalam desain sistem kontrol dikembangkan untuk mentolerir kerusakan komponen sehingga stabilitas dan performa sistem tetap terjaga. Hal ini sangat penting untuk sistem yang membutuhkan tingkat keselamatan tinggi. Dalam sistem tersebut, konsekuensi dari kesalahan kecil dalam komponen dapat berakibat kerugian yang besar [1].

Winding machine merupakan *plant* yang membutuhkan performa dan stabilitas yang tinggi. Pada *winding machine* menjaga tegangan material merupakan hal yang wajib dilakukan. Tegangan material ini berpengaruh terhadap kondisi material. Jika tegangan terlalu kecil maka mengakibatkan pemborosan material, sedangkan jika tegangan terlalu besar maka material mengalami pemanjangan berlebihan, perubahan bentuk, bahkan robek. Variabel lain yang penting dalam sistem ini adalah kecepatan motor. Motor digunakan untuk memutar *roller* pada bagian *rewind roller* dan *unwind roller*. Kecepatan motor yang rendah menyebabkan produktifitas menurun, sedangkan kecepatan yang terlalu tinggi menyebabkan tegangan yang tidak stabil [2].

Untuk memenuhi kebutuhan keamanan tersebut diperlukan sistem kontrol yang mampu mendeteksi adanya kesalahan dan memberikan sebuah tindakan agar kesalahan tersebut dapat ditoleransi. Metode dan strategi kontrol ini disebut sebagai *Fault Tolerant Control* (FTC). Secara umum terdapat dua macam metode dalam FTC, yaitu *Passive Fault Tolerant Control schemes* (PFTCs) dan *Active Fault Tolerant Control schemes* (AFTCs). Pada metode PFTCs, parameter kontroler dibuat tetap dan didesain menggunakan kontrol *robust* untuk memastikan sistem kontrol tetap mampu mengatasi kesalahan dari komponen sistem. Pada metode ini, tidak diperlukan informasi kesalahan secara *on-line* maupun konfigurasi ulang kontroler, tapi memiliki batas kesalahan yang bisa ditangani. Sedangkan metode AFTCs, parameter dari kontroler dikonfigurasi ulang sesuai dengan informasi kesalahan yang didapatkan secara *on-line* guna meningkatkan stabilitas dan performa dari keseluruhan sistem saat terjadi kesalahan pada komponen [1].

Fault hiding merupakan salah satu metode AFTCs. Metode ini bertujuan untuk mengkompensasi kesalahan sensor yang terjadi, sehingga kesalahan pada sensor dapat dihilangkan. Kompensasi dilakukan dengan cara mengurangi keluaran sistem dengan estimasi besarnya kesalahan sensor yang terjadi. Untuk mengestimasi kesalahan sensor tersebut digunakan estimator kesalahan sensor. Estimator kesalahan sensor telah dibahas pada [3] dan [4] dengan menggunakan metode yang berbeda.

Perancangan estimator kesalahan sensor dapat menggunakan metode *Extended State Observer* (ESO) yang dijelaskan pada [3]. Parameter pada ESO dicari menggunakan *Singular Value Decomposition* (SVD) dan merupakan sebuah observer diskrit. Hasil estimasi observer ditambahkan pada sinyal kontrol. Namun, observer ini menghasilkan estimasi kesalahan yang belum sempurna.

Perancangan estimator berbasis *augmented descriptor system* dijelaskan pada [4]. Berbeda dengan ESO, hasil estimasi observer ditambahkan pada bagian keluaran; bukan pada sinyal kontrol. Sehingga variabel yang diumpan balik merupakan variabel yang telah dikompensasi. Metode ini menghasilkan performa dan stabilitas yang lebih baik dibandingkan dengan ESO. Hal ini dikarenakan kompensasi yang diberikan tidak mempengaruhi sinyal kontrol secara langsung.

Pada Tugas Akhir ini akan dilakukan perancangan sistem kontrol toleransi kesalahan sensor yang diterapkan pada *winding machine*. Estimator berbasis *augmented descriptor system* dirancang untuk mengestimasi kesalahan sensor. Hasil estimasi digunakan untuk

melakukan kompensasi pada keluaran sistem. Permasalahan desain estimator akan diubah kedalam bentuk *Linear Matrix Inequality* (LMI). Kontrol nominal dirancang menggunakan kontroler *fuzzy* dengan struktur servo tipe 1. *Gain* kontroler ditentukan dengan metode kontrol optimal.

1.2 Perumusan Masalah

Sistem kontrol konvensional memerlukan sensor sebagai umpan balik menuju kontroler. Kesalahan yang terjadi pada sensor dapat mengakibatkan kontroler memberikan sinyal kontrol yang salah pada sistem. Hal ini dapat mengakibatkan performa dan stabilitas sistem menurun. *Winding machine* merupakan salah satu *plant* yang membutuhkan performa dan stabilitas yang tinggi. Oleh karena itu, untuk menjaga performa dan stabilitas pada *winding machine*, maka sensor yang digunakan harus bekerja dengan baik. Untuk menjaga performa dan stabilitas sistem *winding machine* pada saat terjadi kesalahan sensor, maka dapat dilakukan kompensasi kesalahan sensor. Kompensasi kesalahan sensor dapat dilakukan jika besarnya kesalahan sensor diketahui. Besarnya kesalahan sensor dapat diestimasi menggunakan estimator kesalahan sensor berbasis *augmented descriptor system*.

Performa estimator dapat dipengaruhi oleh gangguan pada sistem *winding machine*. Gangguan tersebut dapat mengakibatkan estimator menghasilkan hasil estimasi yang kurang tepat sehingga mempengaruhi kompensasi kesalahan sensor yang diberikan. Oleh karena itu, agar estimator kokoh terhadap gangguan, maka metode desain *robust* diperlukan dalam mendesain estimator. Pada metode ini performa estimator diukur sebagai performa H_{∞} .

Pada Tugas Akhir ini yang menjadi permasalahan utama adalah menjaga performa dan stabilitas sistem *winding machine* pada keadaan nominal dan saat terjadi kesalahan pada sensor. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, akan dirancang estimator kesalahan sensor berbasis sistem *descriptor*. Agar estimator kokoh terhadap gangguan pada sistem, maka estimator didesain untuk memenuhi performa H_{∞} . Kontroler nominal yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah kontroler servo tipe 1. *Gain* kontroler ditentukan dengan metode kontrol optimal.

Pada Tugas Akhir ini terdapat beberapa batasan masalah terkait dengan pemodelan sistem *winding machine* dan estimator, yaitu:

1. Material pada *winding machine* diasumsikan memiliki ketebalan yang sangat tipis. Dengan demikian inersia sistem cenderung tetap

sehingga sistem dapat dimodelkan sebagai *Linear Time Invariant* (LTI).

2. Kesalahan pada sensor dan gangguan pada sistem merupakan penambahan sinyal tertentu yang dianggap sebagai representasi kesalahan pada sensor dan gangguan pada sistem.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah merancang estimator kesalahan sensor yang memenuhi performa H_∞ . Estimator ini diterapkan pada *winding machine* yang diharapkan mampu menjaga performa dan stabilitas sistem pada keadaan nominal dan pada saat terjadi kesalahan sensor. Kontroler nominal yang digunakan adalah kontroler *fuzzy* servo tipe 1. *Gain* kontroler ditentukan dengan metode kontrol optimal.

Hasil perancangan berupa *gain* estimator yang memenuhi performa H_∞ . Hasil perancangan kontroler berupa *gain* kontroler yang diharapkan mampu membuat keluaran sistem *winding machine* mengikuti sinyal referensi yang ditentukan. Adapun hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi sebagai bahan referensi dalam penelitian *Fault Tolerant Control* (FTC).

1.4 Sistematika Penulisan

Pembahasan Tugas Akhir ini dibagi menjadi lima Bab dengan sistematika sebagai berikut:

Bab I : Pendahuluan

Bab ini meliputi latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metodologi penelitian, sistematika laporan, dan relevansi.

Bab II : Teori Penunjang

Bab ini menjelaskan tentang tinjauan pustaka, konsep dasar dari sistem *winding machine*, sistem nonlinear Lipschitz, Kontroler servo tipe 1, model *fuzzy* T-S, sektor nonlinearitas, analisis kestabilan Lyapunov, metode FTC, dan LMI. Materi tersebut merupakan landasan teori dalam melakukan penelitian ini.

Bab III : Perancangan Sistem

Bab ini membahas desain dan perancangan kontrol nominal dan estimator kesalahan sensor yang sesuai dengan teori pada Bab II. Hasil perancangan akan diuji dan dianalisis pada Bab IV.

Bab IV : Pengujian dan Analisis Data

Bab ini memuat hasil pengujian yang dilakukan untuk mengetahui performa estimator dan kontroler hasil desain. Untuk mengetahui performa tersebut dilakukan analisis data hasil simulasi.

Bab V : Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari hasil pengujian yang telah diperoleh.

1.5 Relevansi

Hasil yang diperoleh dari Tugas Akhir ini diharapkan dapat menjadi referensi perencanaan desain estimator kesalahan sensor, pengembangan, dan perbandingan metode kontrol yang tepat untuk sistem *winding machine* di masa mendatang. Hasil yang diperoleh juga digunakan untuk analisis pengaruh metode FTC pada sistem *winding machine* yang mengalami kesalahan pada sensor.



BAB II TEORI PENUNJANG

Pada Bab ini membahas tentang teori penunjang yang digunakan dalam pelaksanaan Tugas Akhir. Pada bagian awal diberikan tinjauan pustaka yang menggambarkan landasan teori secara umum yang akan digunakan pada Tugas Akhir ini. Pada bagian selanjutnya membahas tentang teori-teori pendukung, meliputi sistem *winding machine*, sistem nonlinear Lipschitz, kontroler servo tipe 1, model *fuzzy* Takagi-Sugeno, sektor nonlinearitas, analisis kestabilan Lyapunov, kontrol toleransi kesalahan sensor, dan *Linear Matrix Inequality* (LMI).

2.1 Tinjauan Pustaka

Dalam beberapa dekade terakhir, para peneliti mengembangkan metode baru untuk menjaga performa dan stabilitas sistem saat terjadi kesalahan pada komponen, salah satunya adalah kesalahan pada sensor. Metode tersebut adalah *Fault Tolerant Control* (FTC). Metode FTC dapat dibagi menjadi dua yaitu PFTCs dan AFTCs. Metode PFTCs merupakan metode untuk melemahkan efek kesalahan sensor dengan teori kontrol *robust*. Pada metode ini, kontroler dibuat kokoh terhadap kesalahan sensor, sehingga saat terjadi kesalahan sensor, sistem kontrol mampu untuk mengkompensasinya. Sedangkan AFTCs melibatkan algoritma dinamik yang mampu mengestimasi *state* sistem sekaligus magnitudo kesalahan sensor secara simultan. Estimasi magnitudo kesalahan sensor ini disebut sebagai metode *fault detection*. Karena magnitudo kesalahan sensor dapat diketahui, maka kompensasi dilakukan dengan cara mengurangi keluaran sistem yang terdapat kesalahan sensor dengan hasil estimasi kesalahan sensor. Metode ini disebut sebagai *fault hiding* [1].

Metode PFTCs memiliki kelemahan bila dibandingkan metode AFTCs. Salah satu kelemahannya adalah PFTCs bergantung pada jenis dan besarnya kesalahan yang terjadi pada sensor. Tingkat pelemahan efek kesalahan sensor terbatas pada tingkat pelemahan tertentu. Dengan demikian kesalahan sensor masih tetap dirasakan sistem, walaupun dengan magnitudo yang berkurang. Berbeda dengan metode PFTCs, permasalahan utama pada AFTCs bukanlah bagaimana melemahkan efek dari kesalahan sensor, namun bagaimana mengestimasi besarnya kesalahan yang terjadi pada sensor. Apabila besarnya kesalahan pada sensor dapat diestimasi dengan tepat, maka kompensasi yang diberikan

dapat membuat sinyal umpan balik bebas terhadap kesalahan. Dengan demikian AFTCs dapat memberikan performa yang lebih baik daripada PFTCs [1].

Observer atau estimator adalah sebuah algoritma yang bertujuan untuk mengestimasi suatu *state* pada suatu sistem dengan informasi masukan dan keluaran pada sistem tersebut. Dalam mengestimasi besarnya kesalahan sensor, digunakan sebuah estimator kesalahan sensor. Estimator memerlukan representasi model sistem yang sempurna agar menghasilkan estimasi yang baik. Ketidakpastian parameter sistem dan gangguan masukan pada sistem dapat mengakibatkan hasil estimasi yang tidak sempurna. Efek gangguan ini dapat dilemahkan dengan cara mendesain estimator yang memenuhi performa H_{∞} .

Pada Tugas Akhir ini, estimator akan dirancang menggunakan konsep *augmented descriptor system*. Sistem *descriptor* merupakan sebuah sistem yang menggabungkan *state* yang memiliki differensial dengan *state* tanpa differensial. Kesalahan sensor dianggap sebagai *state* yang tidak memiliki differensial. Sedangkan *state* dengan differensial adalah *state* pada sistem. Dengan demikian konsep *augmented descriptor* adalah menggabungkan *state* kesalahan sensor dengan *state* sistem menjadi *descriptor state*. Kemudian dengan informasi *state* sistem yang terukur, maka *descriptor state* dapat diestimasi. Dengan demikian kesalahan sensor dapat diestimasi [4].

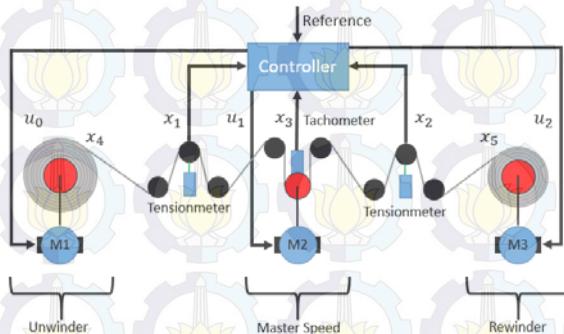
Kontroler nominal yang digunakan adalah kontroler servo tipe 1 dengan *gain* kontroler ditentukan dengan metode kontrol optimal. Karena *winding machine* merupakan sistem nonlinear, maka sistem *winding machine* dimodelkan sebagai model *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S). Dengan model *fuzzy* ini, maka konsep kontroler linear dapat disusun sesuai konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC) [5].

2.2 Sistem *Winding Machine* [6]

Winding machine adalah sebuah sistem yang umum dijumpai pada industri manufaktur, fabrikasi, transportasi material seperti kertas, besi, aluminium foil, dan film. Terdapat tiga komponen utama pada *winding machine*, yaitu *rewind roller*, *master speed roller* dan *unwind roller*. Masing-masing elemen tersebut diputar oleh penggerak elektrik berupa motor DC. Material yang berbentuk gulungan mula-mula berada di *unwind roller*. Material ini kemudian digulung kembali menuju *rewind roller*. Kecepatan material diatur oleh *master speed roller* atau *nip roller*. Perbedaan kecepatan antar *roller* mengakibatkan perbedaan torsi yang

diberikan pada material. Hal ini menunjukkan bahwa ada gaya tarik yang bekerja pada material yang berasal dari torsi *roller*. Gaya ini merupakan tegangan pada material. Tegangan material sangat penting untuk diperhatikan. Material dapat mengalami kerusakan jika gaya berlebih, atau material dapat kusut jika gaya yang diberikan kurang. Untuk itu diperlukan pengaturan tegangan material agar tegangan material berada pada nilai yang diinginkan.

Untuk mengetahui besarnya tegangan material, dipasang *load cell* pada bagian antara *rewind roller* dan *master speed roller* serta antara *unwind roller* dan *master speed roller*. Untuk mengetahui kecepatan *roller* digunakan *tachometer* atau *rotary encoder*. Selain ketiga *roller* yang telah disebutkan sebelumnya, juga terdapat *roller* lainnya yang tidak digerakan oleh penggerak elektrik. *Roller* ini disebut sebagai *guiding roller* yang berfungsi untuk perantara material bergerak. Gambar 2.1 merupakan bentuk *prototype* dari *winding machine*.



Gambar 2.1 Sistem *Winding Machine* [6]

Sebelum memodelkan sistem *winding machine* kedalam model matematika, perlu dipahami mengenai dinamika dari rentangan material dan *roller*. Dinamika rentangan material memberikan persamaan diferensial tegangan material. Sedangkan dinamika *roller* memberikan persamaan diferensial kecepatan sudut *roller*.

Untuk mendapatkan persamaan diferensial tegangan material, diterapkan prinsip kekekalan massa untuk mengontrol volume yang didefinisikan sebagai rentangan material antara dua *roller* yang berurutan. Sebagian material dibawah regangan longitudinal akan mengalami tegangan dalam tiga arah. Dimensi tersebut adalah *Machine Direction*

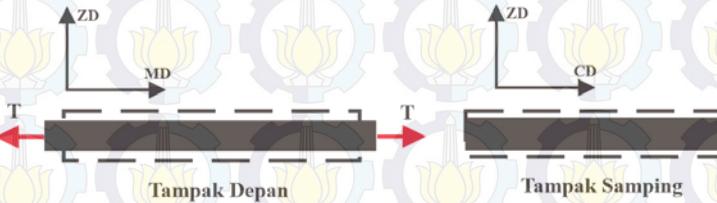
(MD), *Cross Direction* (CD), dan *Z direction* (ZD) seperti pada Gambar 2.2. Tegangan pada ketiga arah tersebut memenuhi Persamaan (2.1)-(2.2)-(2.3)

$$\varepsilon_x = \frac{L_s - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L_0}{L_0} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_w = \frac{w_s - w_0}{w_0} = \frac{\Delta w_0}{w_0} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_h = \frac{h_s - h_0}{h_0} = \frac{\Delta h_0}{h_0} \quad (2.3)$$

dengan L, w , dan h merepresentasikan panjang, lebar, dan ketebalan material. Δ merepresentasikan pertambahan material pada masing-masing arah dan ε melambangkan regangan material. Subskrip x, w , dan h merepresentasikan arah MD, CD dan Z. Pada pembahasan selanjutnya, akan difokuskan pada arah MD. Arah ini merupakan arah pergerakan material. Arah MD dilambangkan dengan x agar memudahkan dalam penulisan.



Gambar 2.2 Rentangan Material Tampak Depan dan Tampak Samping

Diasumsikan bahwa *cross section* dalam kondisi tetap, maka menurut hukum kekekalan massa, massa material konstan pada setiap kondisi baik ketika terdapat regangan maupun tanpa regangan. Dengan demikian pernyataan tersebut dapat ditulis dalam Persamaan (2.4)-(2.5)-(2.6)

$$\rho_0 L w_0 h_0 = \rho_s L w_s h_s \quad (2.4)$$

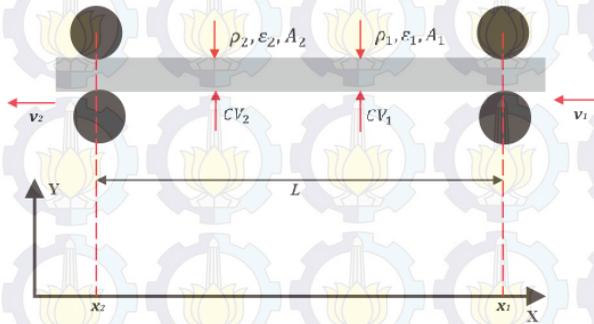
$$\rho_0 A_0 = \rho_s A_s (1 + \varepsilon) \quad (2.5)$$

$$\frac{m_s}{m_0} = \frac{\rho_s A_s}{\rho_0 A_0} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad (2.6)$$

dengan ρ dan A adalah massa jenis dan *cross section area* material, m_s dan m_0 adalah massa material sesudah dan sebelum meregang. Sekarang tinjau sebuah sistem rentangan material seperti pada Gambar 2.3. Menerapkan hukum kekekalan massa pada material dari x_1 sampai x_2 , maka didapatkan hubungan perubahan massa per satuan waktu seperti pada Persamaan (2.7).

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) A(x, t) dx \right] \quad (2.7)$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho_2(t) A_2(t) v_2(t) - \rho_1(t) A_1(t) v_1(t) \quad (2.8)$$



Gambar 2.3 Bentangan Material Diantara Dua *Roller* yang Berurutan

Dengan mengasumsikan bahwa regangan pada material terdistribusi secara *uniform*, maka dapat diketahui bahwa $\varepsilon(x, t) = \varepsilon_1(t)$, yang berimplikasi bahwa $\rho(x, t) = \rho_1(t)$ dan $A(x, t) = A_1(t)$ adalah benar. Persamaan (2.9) merupakan integral dari Persamaan (2.7).

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) A(x, t) dx = L \rho_1(t) A_1(t) \quad (2.9)$$

Substitusi Persamaan (2.6) dan (2.8) ke dalam Persamaan (2.7) didapatkan sistem dinamik dari bentangan material seperti pada Persamaan (2.10).

$$L \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{1 + \varepsilon_1(t)} \right] = \frac{v_2(t)}{1 + \varepsilon_2(t)} - \frac{v_1(t)}{1 + \varepsilon_1(t)} \quad (2.10)$$

Untuk $\varepsilon \approx 0$, maka dapat dilakukan pendekatan sebagai berikut:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \cong 1 - \varepsilon \quad (2.11)$$

substitusi Persamaan (2.11) pada Persamaan (2.10) maka diperoleh Persamaan (2.12).

$$\dot{\varepsilon}_1(t) = \frac{1}{L} [\varepsilon_2(t)v_2(t) - \varepsilon_1(t)v_1(t) + v_1(t) - v_2(t)] \quad (2.12)$$

Berdasarkan hukum Hooke, diketahui bahwa tegangan dan regangan material memiliki hubungan dengan pendekatan seperti pada Persamaan (2.13)

$$T(t) = AE\varepsilon(t) \quad (2.13)$$

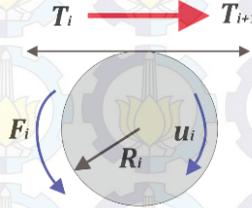
dengan T adalah tegangan material, A adalah *cross-section area*, dan E adalah modulus Young material. Substitusi Persamaan (2.13) pada Persamaan (2.12) maka diperoleh Persamaan (2.14).

$$\dot{T}_1(t) = \frac{1}{L} [-v_1(t)T_1(t) + v_2(t)T_2(t) + AE(v_1(t) - v_2(t))] \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) merupakan persamaan diferensial tegangan material dan merupakan persamaan dinamik pada rentangan material. Persamaan (2.14) dapat ditulis menjadi bentuk umum seperti pada Persamaan (2.15).

$$\dot{T}_i(t) = \frac{1}{L} \left[-v_i(t)T_i(t) + v_{i+1}(t)T_{i+1}(t) + AE(v_i(t) - v_{i+1}(t)) \right] \quad (2.15)$$

Selanjutnya akan membahas mengenai dinamika *roller*. *Roller* pada *winding machine* digerakkan oleh tegangan material, yaitu tegangan $T_i(t)$ dan $T_{i+1}(t)$ dan torsi yang diberikan oleh motor penggerak ($u_i(t)$). *Roller* juga mengalami torsi gesekan $F_i(t)$ seperti pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Gaya yang Bekerja pada *Roller*

Secara umum, persamaan dinamika *roller* dapat diturunkan menggunakan hukum Newton kedua seperti pada Persamaan (2.16)

$$\frac{d}{dt} (J_i \omega_i(t)) = u_i(t) - \beta_{f_i} \omega_i(t) + R_i (T_{i+1}(t) - T_i(t)) \quad (2.16)$$

dengan J_i adalah momen inersia *roller* ke- i , ω_i adalah kecepatan sudut *roller* ke- i , R_i adalah jari-jari *roller* ke- i , dan $F_i(t) = \beta_{f_i} \omega_i(t)$ gaya gesek pada *roller*, dengan β_{f_i} adalah koefisien gesekan total pada *roller* ke- i . Dapat dilihat bahwa parameter J adalah *time-varying* pada bagian *unwinder* dan *winder*.

Setelah mengetahui dinamika pada bentangan material dan *roller*, selanjutnya masing-masing bagian akan dianalisis untuk mencari model matematikanya. Pada bagian *unwind roller*, perlu diketahui persamaan diferensial tegangan material dan kecepatan *roller*. Tegangan material pada *unwind roller* merupakan tegangan material yang mengarah menuju *master speed roller*. Sesuai dinamika tegangan material pada Persamaan (2.15), maka tegangan material antara bagian *unwinder* dan *master speed roller* dapat dinyatakan dalam Persamaan (2.17)

$$\dot{T}_1(t) = \frac{1}{L_1} [v_1(t)T_1(t) + AE(v_1(t) - v_0(t))] \quad (2.17)$$

dengan L_1 adalah panjang bentang material antara *unwind roller* dan *master speed roller*, $v_0(t)$ dan $v_1(t)$ adalah kecepatan transport material pada *unwind roller* dan *master speed roller*. Untuk dinamika kecepatan sudut pada bagian *unwind roller* dinyatakan dalam Persamaan (2.18)

$$\frac{d}{dt} (J_0 \omega_0(t)) = -u_0(t) - \beta_{f_0} \omega_0(t) + R_0 T_1(t) \quad (2.18)$$

dengan J_0 adalah momen inersia *unwind roller*, R_0 adalah jari-jari *unwind roller*, β_{f_0} adalah koefisien gesekan total pada *unwind roller*. Karena pada proses *unwinding*, jari-jari dan momen inersia berubah, maka Persamaan (2.18) dapat ditulis menjadi Persamaan (2.19)

$$\dot{J}_0 \omega_0 + J_0 \dot{\omega}_0 = -u_0 - \beta_{f_0} \omega_0 + R_0 T_1 \quad (2.19)$$

dengan ω_0 adalah kecepatan sudut *unwind roller*.

Momen inersia total (J_0) pada *unwind roller* adalah momen inersia *roller* (J_{c_0}) ditambah dengan momen inersia material di atasnya (J_{cu}). Pernyataan ini dapat dinyatakan dengan Persamaan (2.20). J_{c_0} memiliki nilai konstan sedangkan J_{cu} tidak konstan atau *time-varying*. Momen inersia J_{cu} dapat dinyatakan dalam Persamaan (2.21)

$$J_0 = J_{c_0} + J_{cu} \quad (2.20)$$

$$J_{cu} = \frac{\pi}{2} t_p t_w (R_0^4 - R_{u0}^4) \quad (2.21)$$

dengan t_p adalah massa jenis material, t_w adalah lebar material, R_{u0} adalah jari-jari *roller* tanpa material di atasnya. Perubahan momen inersia sebagai akibat perubahan jari-jari dapat dinyatakan dalam Persamaan (2.22).

$$\dot{J}_0 = \dot{J}_{cu} = 2\pi t_p t_w \dot{R}_0^4 R_0 \quad (2.22)$$

Kecepatan sudut *unwind roller* memiliki hubungan dengan kecepatan transport material yang dapat dinyatakan dalam Persamaan (2.23).

$$v_0 = R_0 \omega_0 \quad (2.23)$$

Menurunkan Persamaan (2.23) pada kedua sisi diperoleh Persamaan (2.24).

$$\dot{\omega}_0 = \frac{\dot{v}_0}{R_0} - \frac{\dot{R}_0 v_0}{R_0^2} \quad (2.24)$$

Diameter pada *unwind roller* berubah saat mesin bekerja. Perubahan tersebut dapat didekati dengan model matematis pada Persamaan (2.25)

$$\dot{R}_0 \approx -\frac{e_w v_0}{2\pi R_0} \quad (2.25)$$

dengan e_w adalah ketebalan material. Persamaan (2.25) merupakan pendekatan karena ketebalan material berpengaruh terhadap jari-jari setelah beberapa perputaran. Pendekatan secara kontinyu valid jika ketebalan material diasumsikan sangat kecil. Substitusi Persamaan (2.19) melalui Persamaan (2.25) pada Persamaan (2.18), maka diperoleh dinamika *unwind roller* seperti pada Persamaan (2.26).

$$\dot{v}_0 = -\frac{\beta_{f_0}}{J_0} v_0 - \frac{R_0}{J_0} u_0 + \frac{1}{J_0} \left[T_1 R_0^2 - \frac{e_w}{2\pi} \left(\frac{J_0}{R_0^2} - 2\pi t_\rho t_w R_0^2 \right) v_0^2 \right] \quad (2.26)$$

Menggabungkan Persamaan (2.17) dan (2.26) maka diperoleh dinamika pada *unwind roller* seperti pada Persamaan (2.27).

$$\begin{cases} \dot{T}_1 = \frac{1}{L_1} [v_1 T_1 + AE(v_1 - v_0)] \\ \dot{v}_0 = -\frac{\beta_{f_0}}{J_0} v_0 - \frac{R_0}{J_0} u_0 + \frac{1}{J_0} \left[T_1 R_0^2 - \frac{e_w}{2\pi} \left(\frac{J_0}{R_0^2} - 2\pi t_\rho t_w R_0^2 \right) v_0^2 \right] \end{cases} \quad (2.27)$$

Pada *master speed roller*, jari-jari dan momen inersia *roller* tidak berubah. Hal ini dikarenakan material hanya berpindah di atas permukaan *roller* ini. Oleh karena itu nilai dari J_1 dan R_1 adalah konstan. Dengan demikian dinamika pada *master speed roller* dapat dinyatakan dalam Persamaan (2.28).

$$\dot{v}_1 = -\frac{\beta_{f_1}}{J_1} v_1 + \frac{R_1}{J_1} u_1 + \frac{R_1^2}{J_1} (T_2 - T_1) \quad (2.28)$$

Dinamika pada *rewind roller* dapat diturunkan dengan cara yang sama pada *unwind roller*. Perbedaannya hanya terdapat pada arah putar dan perubahan jari-jari dan inersia. Jika pada *unwind roller* jari-jari dan inersia akan berkurang pada saat mesin bekerja, sedangkan pada *rewind roller* adalah sebaliknya. Maka dinamika *rewind roller* diberikan pada Persamaan (2.29).

$$\begin{cases} \dot{T}_2 = \frac{1}{L_2} [v_2 T_2 - v_1 T_1 + AE(v_2 - v_1)] \\ \dot{v}_2 = -\frac{\beta_{f_2}}{J_2} v_2 + \frac{R_2}{J_2} u_2 + \frac{1}{J_2} \left[-T_2 R_2^2 + \frac{e_w}{2\pi} \left(\frac{J_2}{R_2^2} - 2\pi t_\rho t_w R_2^2 \right) v_2^2 \right] \end{cases} \quad (2.29)$$

Sistem *winding machine* secara keseluruhan memiliki lima *state* dan tiga masukan. Misalkan *state* tersebut adalah sebagai berikut:

- x_1 : Tegangan material pada *unwinder roller*
- x_2 : Tegangan material pada *rewinder roller*
- x_3 : Kecepatan transport material pada *master speed roller*
- x_4 : Kecepatan transport material pada *unwinder roller*
- x_5 : Kecepatan material pada *rewinder roller*

atau dapat ditulis sebagai Vektor (2.30).

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T = [T_1 \quad T_2 \quad v_1 \quad v_0 \quad v_2]^T \quad (2.30)$$

Sinyal kontrol diberikan oleh penggerak elektrik berupa torsi pada bagian *unwind roller*, *master speed roller*, dan *rewind roller*. Misalkan \mathbf{u}

adalah vektor sinyal kontrol, maka dapat dinyatakan sebagai Vektor (2.31).

$$\mathbf{u} = [u_0 \quad u_1 \quad u_2]^T \quad (2.31)$$

Substitusi Persamaan (2.30)-(2.31) ke dalam Persamaan (2.27)-(2.28)-(2.29), maka diperoleh persamaan *state* sistem pada Persamaan (2.32).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{1}{L_1} [x_3 x_1 + AE(x_3 - x_4)] \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L_2} [x_5 x_2 - x_3 x_1 + AE(x_5 - x_3)] \\ \dot{x}_3 = -\frac{\beta_{f_1}}{J_1} x_3 + \frac{R_1}{J_1} u_1 + \frac{R_1^2}{J_1} (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_4 = -\frac{\beta_{f_0}}{J_0} x_4 - \frac{R_0}{J_0} u_0 + \frac{1}{J_0} \left[R_0^2 x_1 - \frac{e_w}{2\pi} \left(\frac{J_0}{R_0^2} - 2\pi t_\rho t_w R_0^2 \right) x_4^2 \right] \\ \dot{x}_5 = -\frac{\beta_{f_2}}{J_2} x_5 + \frac{R_2}{J_2} u_2 + \frac{1}{J_2} \left[-R_2^2 x_2 + \frac{e_w}{2\pi} \left(\frac{J_2}{R_2^2} - 2\pi t_\rho t_w R_2^2 \right) x_5^2 \right] \end{array} \right. \quad (2.32)$$

2.3 Sistem Nonlinear Lipschitz [7]

Lipschitz Continuity adalah bentuk yang kuat dalam kontinuitas seragam pada suatu fungsi Lipschitz. Secara intuitif, fungsi Lipschitz kontinyu terbatas dalam cara cepatnya suatu fungsi berubah dari suatu nilai ke nilai lain. Terdapat sebuah bilangan real tertentu sehingga untuk setiap pasang titik pada grafik fungsi Lipschitz, nilai absolut dari kemiringan garis yang menghubungkan titik-titik ini tidak lebih besar dari bilangan real tersebut. Bilangan real ini disebut sebagai *Lipschitz constant*.

Persamaan (2.33) merupakan bentuk umum sistem nonlinear yang merupakan model nonlinear *state* dari suatu sistem tertentu.

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{array} \quad (2.33)$$

Bila kita cermati pada Persamaan (2.33), pada umumnya tidak semua bagian pada persamaan tersebut mengandung unsur nonlinearitas. Artinya suatu sistem nonlinear tersusun atas bagian linear dan bagian nonlinear. Konsep utama dari sistem nonlinear Lipschitz adalah memisahkan kedua bagian ini. Persamaan (2.34) merupakan bentuk umum dari sistem nonlinear Lipschitz

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (2.34)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ adalah vektor *state*, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ adalah sinyal kontrol, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$ adalah vektor keluaran, $\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{R}^n$ adalah vektor fungsi nonlinear dengan konstanta Lipschitz θ . Konstanta Lipschitz membatasi pergerakan suatu fungsi sesuai dengan Persamaan (2.35).

$$\|\Phi(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\| \leq \theta \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \quad (2.35)$$

Pada umumnya, banyak sistem nonlinear yang dapat dimodelkan sebagai sistem nonlinear Lipschitz. Hal ini dikarenakan bagian nonlinear dari sebuah sistem dapat dimodelkan terbatas pada *range* kerja tertentu. Oleh karena itu, Persamaan (2.35) dapat dipenuhi sebagai syarat kontinuitas Lipschitz. Sistem *winding machine* pada Persamaan (2.32) dapat dimodelkan ke dalam Sistem (2.34) dengan Parameter (2.36)-(2.37)-(2.38)-(2.39).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{AE}{L_1} & -\frac{AE}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{AE}{L_2} & 0 & \frac{AE}{L_2} \\ \frac{R_1^2}{J_1} & \frac{R_1^2}{J_1} & -\frac{\beta_{f_1}}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{R_0^2}{J_0} & 0 & 0 & -\frac{\beta_{f_0}}{J_0} & 0 \\ 0 & -\frac{R_2^2}{J_2} & 0 & 0 & -\frac{\beta_{f_2}}{J_2} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_1}{J_1} & 0 \\ -\frac{R_0}{J_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{J_2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0 \quad (2.38)$$

$$\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} x_3 x_1 \\ \frac{1}{L_2} (x_5 x_2 - x_3 x_1) \\ 0 \\ -\frac{e_w}{2\pi J_0} \left(\frac{J_0}{R_0^2} - 2\pi t_\rho t_w R_0^2 \right) x_4^2 \\ \frac{e_w}{2\pi J_2} \left(\frac{J_2}{R_2^2} - 2\pi t_\rho t_w R_2^2 \right) x_5^2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

2.4 Kontroler Servo Tipe I [8]

Jika *plant* tidak memiliki integrator (*plant* tipe 0), prinsip dasar dalam mendesain sistem kontrol servo tipe 1 adalah dengan menambahkan integrator pada umpan balik antara *error comparator* dan *plant*. Gambar 2.5 merupakan struktur kontrol servo tipe 1 ketika *plant* tidak memiliki integrator. Bila kita amati, terdapat dua *gain* kontroler, yaitu \mathbf{K} dan \mathbf{K}_i . Nilai *gain* tersebut dapat ditentukan dengan beberapa metode, salah satunya adalah dengan optimisasi *Linear Quadratic* (LQ). Metode ini merupakan metode kontrol optimal.

Tinjau *Plant* (2.40)-(2.41). Berdasarkan Gambar 2.5 maka dapat diperoleh Persamaan (2.42)-(2.43)

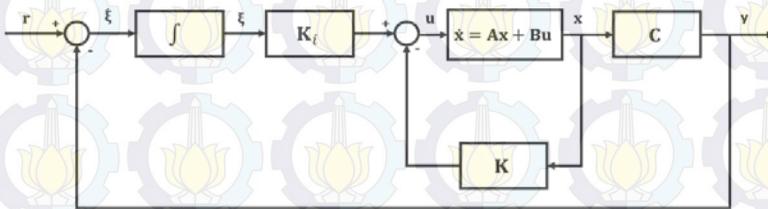
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}_i \xi \quad (2.42)$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{y} = \mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.43)$$

dengan \mathbf{x} adalah vektor *state* pada *plant*, \mathbf{u} adalah sinyal kontrol, \mathbf{y} adalah sinyal keluaran, ξ adalah keluaran dari integrator, \mathbf{r} adalah sinyal referensi, dan \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} adalah matriks parameter *plant* yang bersesuaian.



Gambar 2.5 Diagram Blok Kontroler Servo Tipe 1 Ketika *Plant* Tidak Memiliki Integrator

Diasumsikan sinyal referensi adalah *unit step* dengan *step time* = 0. Maka, untuk $t > 0$ dinamika sistem dapat ditulis sebagai Persamaan (2.44) yang merupakan gabungan dari Persamaan (2.40)-(2.43).

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (2.44)$$

Diinginkan Sistem (2.44) stabil asimtotik sehingga $\mathbf{x}(\infty)$, $\xi(\infty)$, dan $\mathbf{u}(\infty)$ mendekati nilai konstan. Pada kondisi *steady state* $\dot{\xi}(t) = 0$. Sehingga diperoleh bahwa $\mathbf{y}(\infty) = \mathbf{r}$. Persamaan (2.45) merupakan dinamika sistem pada kondisi *steady state*.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}(\infty) \quad (2.45)$$

Nilai $\mathbf{r}(t)$ adalah konstan untuk $t > 0$, sehingga $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\infty)$. Dengan mengurangi Persamaan (2.45) terhadap Persamaan (2.44), maka diperoleh Persamaan (2.46)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \boldsymbol{\xi}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e(t) \quad (2.46)$$

dengan

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_e(t) &= \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \\ \boldsymbol{\xi}_e(t) &= \boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\xi}(\infty) \\ \mathbf{u}_e(t) &= \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(\infty) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{K}_i\boldsymbol{\xi}_e(t) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Diasumsikan sebuah vektor kesalahan seperti pada Vektor (2.48). Maka dengan mensubstitusikan Vektor (2.48) kedalam Persamaan (2.46) diperoleh Persamaan (2.49)

$$\tilde{\mathbf{e}}_c(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \boldsymbol{\xi}_e(t) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_c = \tilde{\mathbf{A}}_c\tilde{\mathbf{e}}_c + \tilde{\mathbf{B}}_c\mathbf{u}_e \quad (2.49)$$

dengan

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \tilde{\mathbf{B}}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_e &= -\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{e}}_c, & \tilde{\mathbf{K}} &= [\mathbf{K} \quad \vdots \quad -\mathbf{K}_i] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Gain kontroler $\tilde{\mathbf{K}}$ dapat ditentukan dengan metode kontrol optimal, yaitu dengan metode optimisasi *Linear Quadratic* (LQ). Metode ini bertujuan untuk mencari *gain* $\tilde{\mathbf{K}}$, sehingga meminimumkan indeks performa pada Persamaan (2.51)

$$J = \int_0^{\infty} (\tilde{\mathbf{e}}_c^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{e}}_c + \mathbf{u}_e^T \mathbf{R} \mathbf{u}_e) dt \quad (2.51)$$

dengan \mathbf{Q} dan \mathbf{R} adalah matriks simetris definit positif yang ditentukan. Matriks ini merupakan matriks pembobot dari indeks performa pada Persamaan (2.51). Penentuan matriks \mathbf{Q} dan \mathbf{R} dapat dilakukan dengan cara *trial and error*.

2.5 Model Fuzzy Takagi-Sugeno [5]

Model *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) telah banyak digunakan untuk merepresentasikan perilaku sistem nonlinear. *Plant* nonlinear direpresentasikan sebagai sebuah himpunan dari model linear yang diinterpolasi oleh *membership function*. Kemudian kontroler berbasis model *fuzzy* dikembangkan untuk mengendalikan sistem nonlinear tersebut. Karena *fuzzy* T-S mampu merepresentasikan sistem nonlinear dengan baik, maka kontroler *fuzzy* T-S telah berhasil diimplementasikan pada beberapa aplikasi praktis.

Model *fuzzy* T-S dideskripsikan sebagai aturan *If-Then*. Aturan yang terdapat pada sistem kontrol *fuzzy* T-S adalah aturan *plant* dan aturan kontroler. Aturan *plant* merupakan aturan yang mendeskripsikan sistem nonlinear sebagai suatu himpunan sistem linear. Aturan kontroler merepresentasikan kontroler yang bersesuaian dengan aturan *plant*. Masing-masing aturan kontroler dihitung berdasarkan aturan *plant* yang bersesuaian. Konsep aturan kontroler seperti ini disebut sebagai konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC).

Dalam skema PDC, setiap aturan kontroler berfungsi sebagai kompensasi aturan *plant* yang bersesuaian. Deskripsi dari skema PDC ditunjukkan oleh Gambar 2.6. Variabel premis yang digunakan dalam aturan *If-Then* dapat berupa variabel sistem yang terukur, sinyal kontrol, dan sebagainya. Sedangkan bagian konsekuen untuk aturan *plant* merupakan representasi *state* sistem nonlinear yang diperoleh dari linearisasi pada beberapa titik kerja. Bagian konsekuen untuk aturan kontroler adalah *gain* kontroler yang ditentukan berdasarkan aturan *plant* yang bersesuaian.

Model *Fuzzy* T-S (2.52) merupakan pemodelan sistem nonlinear berdasarkan linearisasi di beberapa titik kerja

Aturan *plant* ke - i :

If $\lambda_1(t)$ is M_{i1} AND ... AND $\lambda_g(t)$ is M_{ig}

Then $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)$

$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i \mathbf{u}(t)$

$i = 1, 2, \dots, r$

(2.52)

dengan r adalah jumlah aturan *fuzzy*, g adalah jumlah himpunan *fuzzy* dalam satu aturan, M_{ig} adalah himpunan *fuzzy*, dan $\lambda(t) \in \mathbf{R}^j$ merupakan variabel premis sistem *fuzzy*.

Inferensi *fuzzy* yang digunakan pada Model (2.52) menggunakan penghubung AND (operator *product*) dan metode defuzzifikasi yang digunakan adalah *center (weighted) average*. Bentuk keseluruhan model *Fuzzy T-S* (2.52) dapat dinyatakan sebagai Persamaan (2.53)-(2.54)

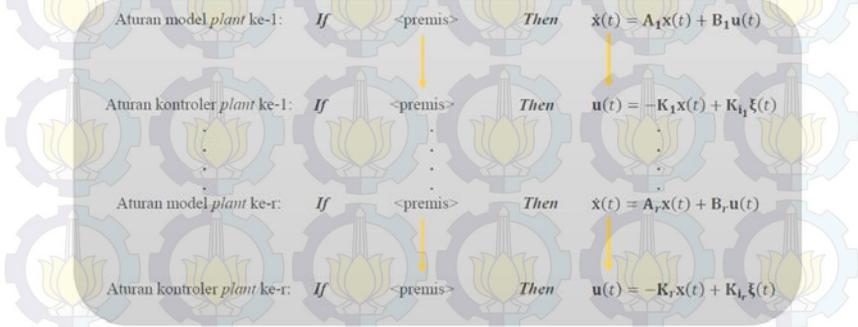
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\lambda(t)) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)] \quad (2.53)$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\lambda(t)) [\mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i \mathbf{u}(t)] \quad (2.54)$$

dengan

$$h_i(\lambda(t)) = \frac{\mu_i(\lambda(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\lambda(t))} \quad (2.55)$$

$$\mu_i(\lambda(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}(\lambda_j(t)) \quad (2.56)$$



Gambar 2.6 Skema PDC

Diasumsikan bahwa $\mu_i(\lambda(t)) \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^r \mu_i(\lambda(t)) > 0$; $i = 1, 2, \dots, r$, maka dapat disimpulkan bahwa Persamaan (2.57)-(2.58) adalah benar untuk $t \geq 0$.

$$h_i(\lambda(t)) \geq 0 \quad (2.57)$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(\lambda(t)) = 1 \quad (2.58)$$

Selanjutnya aturan kontroler disusun dengan mengadopsi skema PDC yang bersesuaian dengan skema kontrol pada Persamaan (2.42). Jika semua *state* terukur, maka Aturan Kontroler *Fuzzy* (2.59) digunakan untuk mendesain sistem kontrol *fuzzy*.

Aturan kontroler ke - j :

If $\lambda_1(t)$ is M_{j1} AND ... AND $\lambda_j(t)$ is M_{jg}

Then $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_j \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\xi}(t)$

$$j = 1, 2, \dots, r \quad (2.59)$$

Keluaran dari kontroler *fuzzy* secara keseluruhan dapat dinyatakan oleh Persamaan (2.60).

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^r h_j(\lambda(t)) \left[-\mathbf{K}_j \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\xi}(t) \right] \quad (2.60)$$

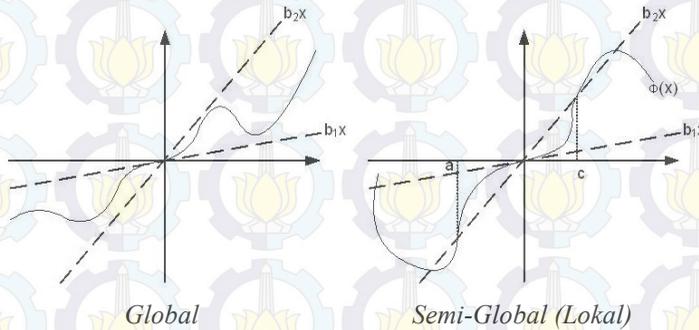
Substitusi Persamaan (2.60) ke dalam Persamaan (2.53)-(2.54) maka diperoleh sistem lup tertutup seperti pada Persamaan (2.61)-(2.62).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\lambda(t)) h_j(\lambda(t)) \left[(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i \boldsymbol{\xi}(t) \right] \quad (2.61)$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\lambda(t)) h_j(\lambda(t)) \left[(\mathbf{C}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i \mathbf{K}_i \boldsymbol{\xi}(t) \right] \quad (2.62)$$

2.6 Sektor Nonlinearitas [5]

Salah satu metode dalam membangun model *fuzzy* T-S adalah sektor nonlinearitas. Pada metode ini, sistem nonlinear dipandang sebagai sebuah fungsi yang berada pada sektor yang dibentuk dari garis lurus, yaitu b_1x dan b_2x . Batas sektor yang dibentuk oleh garis ini dapat mencakup sektor global atau semi-global. Pada umumnya, sangat sulit mencari sektor nonlinearitas global yang mewakili fungsi nonlinear secara keseluruhan. Oleh karena itu, sektor nonlinearitas dapat dipandang sebagai sektor nonlinearitas semi-global yang mewakili dinamika sistem nonlinear pada batas tertentu. Gambar 2.7 menunjukkan sektor nonlinearitas global dan semi-global (lokal).



Gambar 2.7 Sektor Nonlinearitas

Berdasarkan nilai koefisien b_1 dan b_2 , fungsi keanggotaan $M_j^i(x)$ pada sektor ke- j dapat dirumuskan sebagai Persamaan (2.63)

$$M_j^1(x) = \frac{f(x) - b_2}{b_1 - b_2}, \quad M_j^2(x) = \frac{b_1 - f(x)}{b_1 - b_2} \quad (2.63)$$

dengan $M_j^1(x) + M_j^2(x) = 1$ dan $0 \leq M_j^i(x) \leq 1$.

Sebagai contoh penggunaan metode sektor nonlinearitas, tinjau sistem nonlinear yang sesuai dengan Sistem (2.64).

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) + x_1(t)x_2^2(t) \\ x_1(t) + x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Variabel *state* pada Sistem (2.64) diasumsikan terbatas pada:

$$x_1(t) \in [-1,1], \quad x_2(t) \in [1,2]$$

Persamaan (2.64) dapat ditulis sebagai Persamaan (2.65)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f(x,t) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

dengan $f(x,t) = x_1(t)x_2(t)$.

Nilai maksimum dan minimum dari $f(x,t)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{min}(x,t) &= \min_{x_1(t)x_2(t)} f(x,t) = -1 \\ f_{max}(x,t) &= \max_{x_1(t)x_2(t)} f(x,t) = 2 \end{aligned}$$

bentuk $f(x,t)$ dapat dirumuskan ulang menggunakan pendekatan dalam Persamaan (2.66).

$$f(x,t) = M^1(x)f_{max}(x,t) + M^2(x)f_{min}(x,t) \quad (2.66)$$

$$f(x,t) = 2M^1(x) - M^2(x) \quad (2.67)$$

Dalam menyusun fungsi keanggotaan harus memenuhi syarat bahwa $M^1(x) + M^2(x) = 1$. Fungsi keanggotaan yang memenuhi syarat tersebut dapat dihitung dengan cara mensubstitusikan syarat tersebut ke dalam Persamaan (2.67) sehingga diperoleh fungsi keanggotaan seperti pada Persamaan (2.68).

$$M^1(x) = \frac{f(x,t) + 1}{2}, \quad M^2(x) = \frac{1 - f(x,t)}{2} \quad (2.68)$$

Dengan demikian dapat dibentuk sejumlah 2^N model lokal. N menunjukkan jumlah dari sektor nonlinearitas. Fungsi nonlinear pada Persamaan (2.64) memiliki satu sektor nonlinearitas sehingga dapat dibentuk dua model lokal. Sesuai dengan Persamaan (2.53), maka model *fuzzy* T-S untuk Sistem (2.64) adalah sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(\lambda(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t)$$

dengan

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.7 Analisis Kestabilan Lyapunov

Dalam sistem kontrol, stabilitas merupakan hal yang paling penting untuk ditentukan. Jika sistem adalah linear dan *time invariant*, banyak kriteria kestabilan yang tersedia, antara lain kriteria kestabilan Nyquist dan kriteria kestabilan Routh. Jika sebuah sistem adalah nonlinear, atau linear namun *time varying*, kriteria kestabilan tersebut tidak berlaku.

A.M. Lyapunov memperkenalkan metode untuk menganalisis kestabilan sistem nonlinear dan *time varying*. Metode tersebut adalah metode pertama dan kedua Lyapunov. Metode pertama menggunakan solusi persamaan differensial dari sistem untuk analisis kestabilan. Sedangkan metode kedua tidak membutuhkan solusi dari persamaan differensial tersebut. Dengan demikian, metode kedua Lyapunov memiliki keuntungan yaitu analisis kestabilan tidak memerlukan solusi dari persamaan differensial sistem nonlinear karena solusi persamaan differensial tersebut cukup sulit untuk diselesaikan.

Berdasarkan metode kedua Lyapunov, jika sistem memiliki *state* ekuilibrium yang stabil asimtotik, maka energi yang tersimpan dalam sistem akan berkurang seiring dengan bertambahnya waktu sampai energi tersebut mencapai nilai minimalnya pada *state* ekuilibrium sistem tersebut. Untuk sistem matematis murni, sangat sulit untuk mendefinisikan sebuah fungsi energi. Untuk mengatasi kesulitan tersebut, Lyapunov memperkenalkan sebuah fungsi, yaitu fungsi Lyapunov yang merupakan fungsi energi buatan. Fungsi ini secara umum lebih mudah untuk diaplikasikan daripada fungsi energi [8].

Fungsi Lyapunov bergantung pada x_1, x_2, \dots, x_n dan t yang dinotasikan sebagai $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ atau secara ringkas $V(\mathbf{x}, t)$. Jika fungsi Lyapunov tidak memasukkan t secara eksplisit, maka fungsi dinotasikan sebagai $V(\mathbf{x})$. Dalam metode kedua Lyapunov, perilaku $V(\mathbf{x}, t)$ dan turunannya $dV(\mathbf{x}, t)/dt$ memberikan informasi mengenai kestabilan, kestabilan asimtotik, atau ketidakstabilan dari sebuah *state*

ekuilibrium tanpa memerlukan solusi dari persamaan differensial sistem. Metode ini dapat berlaku pada sistem linear maupun nonlinear.

Teorema kestabilan Lyapunov dapat dijelaskan sebagai berikut.

Teorema 2.1 Jika terdapat fungsi skalar $V(\mathbf{x})$ definit positif, dengan $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, maka vektor *state* \mathbf{x} yang memenuhi Persamaan (2.69)

$$V(\mathbf{x}) = C \quad (2.69)$$

dengan C adalah konstanta positif, berada pada permukaan tertutup dalam ruang *state* berdimensi n di sekitar origin. Jika $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ dengan $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, maka permukaan tertutupnya akan menutupi seluruh ruang *state*. Permukaan $V(\mathbf{x}) = C_1$ akan berada seluruhnya di dalam permukaan $V(\mathbf{x}) = C_2$ jika $C_1 < C_2$. Untuk sistem tertentu, jika fungsi skalar definit positif $V(\mathbf{x})$ dapat ditemukan sehingga turunannya terhadap waktu selalu bernilai negatif, maka seiring dengan bertambahnya waktu $V(\mathbf{x})$ akan memiliki nilai C yang semakin kecil. Sehingga pada akhirnya $V(\mathbf{x})$ akan menuju nol dan \mathbf{x} juga akan menuju nol. Hal ini berarti bahwa *state* ekuilibrium pada origin adalah stabil asimtotik [8].

Teorema 2.2 Asumsikan suatu Sistem (2.70)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.70)$$

dengan $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ untuk semua t . Jika terdapat fungsi skalar $V(\mathbf{x}, t)$

1. $V(\mathbf{x}, t)$ adalah definit positif
2. $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ adalah definit negatif

Maka *state* ekuilibrium pada origin adalah stabil asimtotik secara uniform [8].

Untuk mempermudah pemahaman tentang teorema diatas, tinjau sistem linear *time-invariant* seperti pada Persamaan (2.71)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.71)$$

dengan \mathbf{x} adalah vektor *state* dengan dimensi $n \times 1$ dan \mathbf{A} adalah matriks konstan dengan dimensi $n \times n$, serta titik ekuilibrium berada pada origin ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Diasumsikan bahwa \mathbf{A} adalah matriks nonsingular. Untuk Sistem (2.71), kandidat fungsi Lyapunov dapat dipilih sebagai Persamaan (2.72)

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (2.72)$$

dengan \mathbf{P} adalah matriks simetris definit positif. Maka dapat diperoleh turunan pertama terhadap waktu dari $V(\mathbf{x})$ yang dinyatakan pada Persamaan (2.73).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Untuk kestabilan asimtotik, $V(\mathbf{x})$ dipilih definit positif. Maka sesuai dengan Teorema 2.2, $\dot{V}(\mathbf{x})$ harus definit negatif. Oleh karena itu:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

dengan

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) > \mathbf{0} \quad (2.74)$$

sehingga untuk menjamin kestabilan Sistem (2.71) harus terdapat matriks simetris positif definit \mathbf{P} ($\mathbf{P} > \mathbf{0}$) yang memenuhi Pertidaksamaan (2.75)

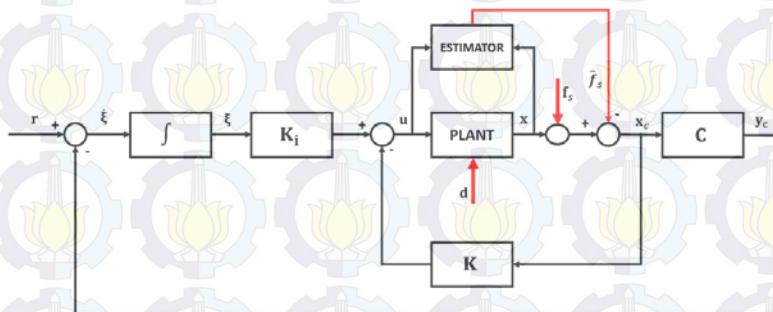
$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad (2.75)$$

Metode yang telah dijelaskan sebelumnya merupakan analisis kestabilan sistem dengan metode kedua Lyapunov. Dapat dilihat bahwa dalam menentukan kestabilan sistem, tidak diperlukan solusi persamaan diferensial pada Persamaan (2.72).

2.8 Kontrol Toleransi Kesalahan Sensor

Untuk setiap sistem dengan kontrol umpan balik, kesalahan sensor dapat membuat kontroler menghasilkan perintah dari kesalahan pengukuran. Hal ini dapat membuat performa dan stabilitas sistem menurun. Untuk menjaga performa dan stabilitas sistem saat terjadi kesalahan pada sensor, banyak penelitian yang telah dilakukan. Salah satunya adalah metode *Fault Detection and Isolation* (FDI). Dengan metode ini alarm dapat diciptakan ketika kesalahan sensor terjadi. Namun besarnya kesalahan sensor tidak dapat ditentukan menggunakan FDI.

Salah satu metode lain adalah rekonstruksi kesalahan sensor. Metode ini bertujuan untuk mengestimasi besarnya kesalahan sensor. Jika besarnya kesalahan sensor dapat diestimasi, maka dapat dilakukan kompensasi dengan cara mengurangi estimasi kesalahan sensor dengan keluaran terukur. Metode ini disebut sebagai *fault hiding*. Metode ini merupakan salah satu metode AFTCs. Untuk mengestimasi kesalahan sensor dapat dirancang sebuah observer. Perancangan observer pada metode ini dapat digunakan dengan pendekatan *augmented descriptor system*. Gambar 2.8 merupakan diagram blok sistem kontrol dengan *fault estimator*. Vektor \mathbf{x}_c merupakan *state* sistem yang telah dikompensasi sedangkan \mathbf{y}_c adalah keluaran sistem yang telah dikompensasi. Dengan estimasi kesalahan sensor, diharapkan keluaran yang telah dikompensasi bebas terhadap kesalahan sensor. Dengan demikian performa dan stabilitas sistem dapat terjaga [4].



Gambar 2.8 Diagram Blok Sistem Kontrol dengan *Fault Estimator*

Blok estimator pada Gambar 2.8 berisi algoritma untuk mengestimasi magnitudo kesalahan sensor. Algoritma ini dirancang dengan metode *augmented descriptor system*. Metode ini memungkinkan

estimasi kesalahan sensor secara *realtime*, sehingga dapat dilakukan kompensasi kesalahan sensor. Kompensasi yang diberikan diharapkan mampu menjaga stabilitas dan performa sistem saat terjadi kesalahan sensor.

2.8.1 Klasifikasi Kesalahan Sensor

Kesalahan adalah gangguan yang terjadi pada sensor. Kesalahan sendiri memiliki dua macam dampak pada sistem, multiplikatif dan aditif. Pada kesalahan multiplikatif, sinyal yang salah merupakan perkalian antara sinyal awal dikalikan dengan besarnya kesalahan yang terjadi. Sedangkan untuk kesalahan aditif, sinyal yang salah merupakan penjumlahan antara sinyal awal dengan besarnya kesalahan yang terjadi.

Jika ditinjau dari segi karakteristik waktunya, kesalahan diklasifikasikan menjadi *abrupt fault*, *incipient fault*, dan *intermittent fault* seperti pada Gambar 2.9. *Abrupt fault* merupakan kesalahan yang terjadi secara tiba-tiba. Kesalahan ini dimodelkan sebagai fungsi *step*. *Incipient fault* adalah kesalahan yang muncul secara perlahan-lahan menuju ke nilai tertentu. Kesalahan ini dimodelkan sebagai fungsi *ramp*. *Intermittent fault* adalah kesalahan yang terjadi pada rentang waktu tertentu dan memiliki periode tertentu. Kesalahan ini dimodelkan sebagai sinyal pulsa [9].

Berdasarkan bentuk kesalahannya, kesalahan pada sensor dapat dikategorikan seperti pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Kategori Kesalahan pada Sensor

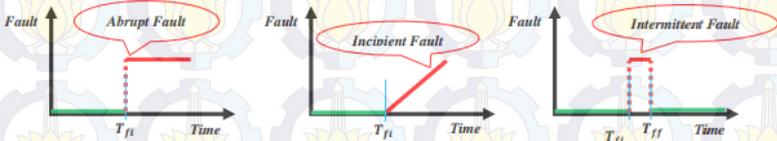
Kategori Kesalahan	Keterangan
<i>Bias</i>	<i>Error</i> konstan pada output sensor
<i>Stuck sensor reading</i>	Sensor menghasilkan hasil pembacaan yang sama walaupun terjadi perubahan keluaran
<i>Loss of accuracy</i>	Berkurangnya akurasi pada sensor
<i>Loss of measurement</i>	Kesalahan yang terjadi akibat sensor tidak berfungsi
<i>Loss of sensitivity</i>	Berkurangnya sensitivitas sensor

Kategori kesalahan pada Tabel 2.1 dapat dimodelkan secara matematis sesuai pada Persamaan (2.76). Parameter n menyatakan jumlah kesalahan sensor yang terjadi pada sistem.

$$\mathbf{f}_s(t) = (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{I})\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\beta} \quad (2.76)$$

dengan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ \boldsymbol{\beta} &= [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n]^T \end{aligned} \quad (2.77)$$



Gambar 2.9 Klasifikasi Kesalahan Sensor Berdasarkan Waktu

Menggabungkan kesalahan sensor pada Persamaan (2.76) dengan keluaran sistem pada Persamaan (2.41), maka diperoleh keluaran sistem dengan kesalahan sensor seperti pada Persamaan (2.78).

$$\mathbf{y}_f(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_s[(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{I})\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\beta}] \quad (2.78)$$

Besarnya $\boldsymbol{\alpha}$ dan $\boldsymbol{\beta}$ menentukan tipe kesalahan sensor. Berdasarkan variasi parameter $\boldsymbol{\alpha}$ dan $\boldsymbol{\beta}$, maka kesalahan sensor sesuai dengan Tabel 2.1 dapat digolongkan seperti pada Tabel 2.2 [10]. Kesalahan sensor pada pengujian pada Bab IV mengacu pada kategori kesalahan sensor tersebut. Kesalahan ini ditambahkan pada keluaran sistem sebagai representasi kesalahan yang terjadi pada sensor. Hal ini telah sesuai dengan batasan masalah yang ditentukan pada Bab I.

Tabel 2.2 Kategori Kesalahan Sensor Berdasarkan Parameter $\boldsymbol{\alpha}$ dan $\boldsymbol{\beta}$

	$\beta_i = 0$	$\beta_i \neq 0$
$\alpha_i = 1$	<i>Free fault</i>	<i>Bias</i>
$0 < \alpha_i < 1$	<i>Loss of sensitivity</i>	<i>Loss of sensitivity</i>
$\alpha_i = 0$	<i>Loss of measurement</i>	<i>Stuck sensor reading</i>
$\alpha_i = f(t)$	<i>Time varying parametric fault</i>	<i>Time varying parametric fault with bias</i>

2.8.2 Estimator Kesalahan Sensor Berbasis *Augmented Descriptor System* [4]

Sistem *descriptor* merupakan sebuah sistem yang menggabungkan *state* dengan persamaan diferensial dan *state* tanpa persamaan diferensial. Metode ini biasanya digunakan untuk menganalisis masalah komputasi sistem linear. Sistem *descriptor* memiliki bentuk umum yang dinyatakan pada Persamaan (2.79).

$$\begin{cases} \mathbf{E}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.79)$$

Pada perancangan estimator/observer kesalahan sensor dapat menggunakan pendekatan sistem *descriptor*. Kesalahan sensor dan gangguan keluaran dianggap sebagai sebuah vektor *descriptor*, sehingga dapat digabungkan dengan *state* sistem. Prinsip dari observer ini adalah mengestimasi *state* sistem sehingga dapat digunakan untuk mengestimasi besarnya kesalahan sensor. Bentuk sistem nonlinear akan dibawa kedalam bentuk sistem nonlinear Lipschitz. Selain itu agar observer *robust* (kokoh) terhadap gangguan pada sistem, maka digunakan performa H_∞ dalam menentukan *gain* observer.

Tinjau sebuah sistem nonlinear Lipschitz (2.34) dengan gangguan masukan dan kesalahan sensor pada Persamaan (2.80)-(2.81)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{B}_d \mathbf{d} \quad (2.80)$$

$$\mathbf{y}_f = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{D}_s \mathbf{f}_s \quad (2.81)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ adalah vektor *state*, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ adalah sinyal kontrol, $\mathbf{y}_f \in \mathbf{R}^p$ adalah vektor keluaran dengan kesalahan sensor, $\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{R}^n$ adalah vektor fungsi nonlinear dengan konstanta Lipschitz θ , $\mathbf{f}_s \in \mathbf{R}^k$ adalah vektor kesalahan sensor, $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^l$ adalah gangguan terbatas pada sistem yang tidak diketahui, serta $\mathbf{B}_d \in \mathbf{R}^{n \times l}$ merupakan matriks pembobot gangguan. Konstanta Lipschitz yang ditentukan harus memenuhi Pertidaksamaan (2.82).

$$\|\Phi(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\| = \theta \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \quad (2.82)$$

Untuk membentuk *augmented descriptor plant* yang sesuai dengan Sistem (2.79) maka dibentuk beberapa matriks gabungan seperti pada Persamaan (2.83).

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \tilde{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \tilde{\Phi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} \Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \tilde{\mathbf{C}} &= [\mathbf{C} \quad \mathbf{I}_p] \\ \tilde{\mathbf{B}}_d &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \\ \mathbf{0}_{p \times l} \end{bmatrix}, & \tilde{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.83)$$

Dari Persamaan (2.80)-(2.81) dan (2.83), maka dapat diperoleh *augmented Plant* (2.84)-(2.85).

$$\tilde{\mathbf{E}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \tilde{\Phi}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{y}_f = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.85)$$

Plant (2.84)-(2.85) merupakan sistem *descriptor*. Vektor \mathbf{x} dan \mathbf{f}_s adalah *state descriptor* dari *augmented plant*. Untuk mencari nilai dari kedua *state* tersebut diperlukan sebuah estimator yang mengestimasi *state* sistem (\mathbf{x}) sekaligus \mathbf{f}_s dengan *state* ini adalah besarnya kesalahan pada sensor.

State descriptor pada *Plant* (2.84)-(2.85) dapat diestimasi menggunakan *robust state – space estimator* dalam Persamaan (2.86)-(2.87).

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}})\hat{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \mathbf{D})\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{L}}_p \mathbf{y}_f + \tilde{\Phi}(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \quad (2.86)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{L}}_d \tilde{\mathbf{C}})^{-1} (\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{L}}_d \mathbf{y}_f - \tilde{\mathbf{L}}_d \mathbf{D}\mathbf{u}) \quad (2.87)$$

dengan $\tilde{\mathbf{L}}_p$ dan $\tilde{\mathbf{L}}_d$ merupakan *gain* proportional dan derivatif estimator. $\hat{\mathbf{x}}$ merupakan vektor estimasi dari vektor $\tilde{\mathbf{x}}$. Estimator tersebut digunakan untuk mengestimasi *state descriptor* pada *Plant* (2.84)-(2.85).

2.8.3 Performa H_∞ [11]

Tujuan dalam perancangan sistem kontrol adalah terwujudnya stabilitas dari sistem. Selain itu, sistem hasil desain diharapkan memiliki

performa yang diinginkan. Performa yang dimaksud adalah ketahanan sistem terhadap gangguan yang terjadi pada sistem. Gangguan ini dapat terjadi akibat gangguan dari luar atau ketidakpastian parameter sistem. Sebagai contoh pada sistem *winding machine*, parameter ketebalan material tidaklah sama untuk setiap rentangan material. Ketidakpastian parameter ini dapat menurunkan performa sistem.

Metode perancangan kontroler yang mempertimbangkan performa sistem saat terjadi gangguan pada sistem disebut sebagai metode kontrol *robust*. Metode kontrol *robust* yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah kontrol *robust* H_∞ . Konsep pada metode ini adalah efek gangguan yang terjadi pada sistem akan dilemahkan hingga mencapai tingkat pelemahan yang diinginkan. Pengaruh terburuk dari suatu gangguan pada sistem dengan fungsi alih $G(s)$ dapat diketahui dengan cara menghitung nilai ∞ -norm. Nilai ∞ -norm dapat dihitung dengan cara menghitung magnitudo maksimal dari respon frekuensi sistem. Sehingga secara matematis dapat dinyatakan pada Persamaan (2.88).

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)| \quad (2.88)$$

Pada Tugas Akhir ini konsep kontrol *robust* diterapkan dalam perancangan estimator kesalahan sensor. Hal ini bertujuan untuk melemahkan efek gangguan pada sistem sehingga vektor *error* estimasi $\tilde{\mathbf{e}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ stabil secara *robust* dalam performa H_∞ dengan tingkat pelemahan $\gamma > 0$. Performa ini diberikan pada Persamaan (2.89).

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{e}}(t)\|_2}{\|\mathbf{d}(t)\|_2} = \frac{\sqrt{\int_0^{T_f} \{[\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)]^T [\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)]\} dt}}{\sqrt{\int_0^{T_f} \mathbf{d}(t)^T \mathbf{d}(t) dt}} \leq \gamma \quad (2.89)$$

dengan mengkuadratkan kedua sisi diperoleh

$$\frac{\int_0^{T_f} \{[\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)]^T [\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)]\} dt}{\int_0^{T_f} \mathbf{d}(t)^T \mathbf{d}(t) dt} \leq \gamma^2 \quad (2.90)$$

atau

$$\int_0^{T_f} \{[\hat{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]^T [\hat{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]\} dt \leq \gamma^2 \int_0^{T_f} \mathbf{d}(t)^T \mathbf{d}(t) dt \quad (2.91)$$

dengan γ adalah tingkat pelemahan yang diinginkan dan \mathbf{d} adalah gangguan pada sistem.

Pada Persamaan (2.90) atau (2.91) memiliki makna bahwa efek dari semua nilai $\mathbf{d}(t)$ pada kesalahan estimasi $\hat{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)$ harus dilemahkan sampai di bawah tingkat pelemahan yang diinginkan (γ) dari sudut pandang energi, dengan kata lain L_2 -gain dari $\mathbf{d}(t)$ terhadap kesalahan estimasi harus kurang dari sama dengan γ^2 . Adapun ∞ -norm untuk permasalahan ini yang sesuai dengan definisi pada Persamaan (2.88) dinyatakan pada Persamaan (2.92).

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{E}}(s)\|_\infty}{\|\mathbf{D}(s)\|_\infty} = \sup_\omega \frac{|\tilde{\mathbf{E}}(j\omega)|}{|\mathbf{D}(j\omega)|} = \sup_{\|\mathbf{d}(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|\tilde{\mathbf{e}}(t)\|_2}{\|\mathbf{d}(t)\|_2} \quad (2.92)$$

Jika tingkat pelemahan maksimal yang diinginkan adalah kurang dari γ^* , maka performa dari sistem estimator dapat dinyatakan dalam Pertidaksamaan (2.93).

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{E}}(s)\|_\infty}{\|\mathbf{D}(s)\|_\infty} = \sup_{\|\mathbf{d}(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|\tilde{\mathbf{e}}(t)\|_2}{\|\mathbf{d}(t)\|_2} = \gamma^* < \gamma \quad (2.93)$$

2.8.4 Pole Region [12]

Dalam perancangan estimator kesalahan sensor, stabilitas merupakan objektif paling dasar yang harus dipenuhi. Namun, estimator yang bagus juga harus mempertimbangkan spek desain lainnya, yaitu spek transien. Spek ini bertujuan untuk memenuhi salah satu syarat estimator, yaitu estimator harus memiliki respon yang lebih cepat daripada sistem yang diestimasi. Hal ini dapat terpenuhi jika *pole* estimator terletak disebelah kiri *pole* sistem pada bidang kompleks. Pada umumnya, estimator yang baik memiliki *pole* paling kecil minimal sepuluh kali lebih besar daripada *pole* sistem yang paling besar. Untuk itu

digunakan syarat *pole region* agar estimator hasil desain memiliki spek desain yang diinginkan.

Pole region merupakan syarat atau batasan dalam mendesain estimator. Batasan ini dapat dinyatakan sebagai *subsets* \mathbf{D} dari bidang kompleks yang dinyatakan pada Persamaan (2.94)

$$\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : \mathbf{L} + \mathbf{M}z + \mathbf{M}^T \bar{z} < 0\} \quad (2.94)$$

dengan \mathbf{M} dan $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$ adalah matriks real konstan.

Berikut adalah beberapa contoh dari *pole region*.

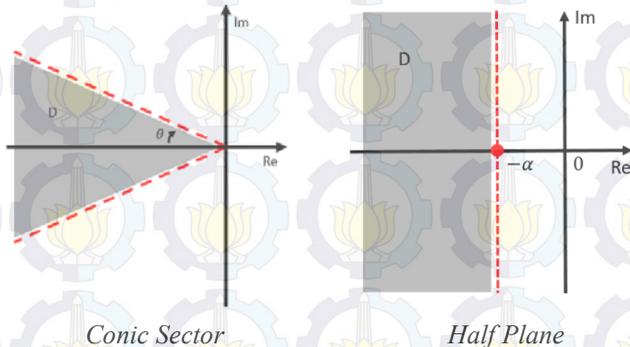
a. *Half plane* $\text{Re}(z) = -\alpha$.

$$f_a(z) = z + \bar{z} + 2\alpha \mathbf{I} < 0 \quad (2.95)$$

b. *Conic sector* dengan pusat di origin dan sudut dalam θ

$$f_a(z) = \begin{bmatrix} \sin \theta (z + \bar{z}) & \cos \theta (z - \bar{z}) \\ \cos \theta (z - \bar{z}) & \sin \theta (z + \bar{z}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.96)$$

Gambar 2.10 menunjukkan *pole region* dengan bentuk *half plane* dan *conic sector* pada bidang kompleks.



Gambar 2.10 Pole Region pada Bidang Kompleks

2.8.5 Kompensasi Kesalahan Sensor

Keluaran estimator adalah estimasi kesalahan sensor dan estimasi *state* sistem. Hasil estimasi kesalahan sensor digunakan sebagai kompensasi keluaran sistem yang terukur oleh sensor. Kompensasi dilakukan dengan cara mengurangi keluaran sistem dengan hasil estimasi kesalahan sensor. Diharapkan dengan kompensasi tersebut keluaran yang diumpun balik bebas terhadap kesalahan sensor dan gangguan pada sistem.

State $\hat{\mathbf{f}}_s$ adalah hasil estimasi kesalahan sensor. *State* ini merupakan bagian dari *state* hasil estimasi estimator. Persamaan (2.97) menyatakan hubungan antara $\hat{\mathbf{f}}_s$ dan *state* estimator.

$$\hat{\mathbf{f}}_s = [\mathbf{0}_{p \times n} \quad \mathbf{I}_p] \hat{\mathbf{x}} \quad (2.97)$$

Mengurangkan *state* keluaran dengan *State* (2.97), maka diperoleh keluaran terkompensasi seperti pada Persamaan (2.98).

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{y}_f - \hat{\mathbf{f}}_s = \mathbf{y}_f - [\mathbf{0}_{p \times n} \quad \mathbf{I}_p] \hat{\mathbf{x}} \quad (2.98)$$

2.9 Linear Matrix Inequality

Sistem (2.71) adalah stabil (semua trayektori konvergen menuju nol) jika dan hanya jika ada sebuah matriks positif definit \mathbf{P} sehingga

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0}$$

Syarat $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ dan $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0}$ merupakan pertidaksamaan Lyapunov pada \mathbf{P} dan bentuk khusus dari LMI [13]. Bentuk ini merupakan bentuk LMI pertama yang dikenalkan pada sistem dinamik. Lyapunov juga membuktikan bahwa LMI ini dapat diselesaikan dengan perhitungan analitis. Dengan cara mengambil sembarang nilai $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}$ kemudian menyelesaikan persamaan linear $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ untuk matriks \mathbf{P} . Untuk sebuah sistem sederhana pertidaksamaan tersebut dapat diselesaikan secara analitis. Namun untuk sistem yang memiliki orde tinggi, sangat sulit menyelesaikannya secara analitis. Untuk itu metode yang digunakan dalam menyelesaikan masalah tersebut adalah menggunakan LMI.

LMI memiliki bentuk umum seperti pada Persamaan (2.99)

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > \mathbf{0} \quad (2.99)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ adalah variabel LMI dan $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ adalah matriks simetris yang sesuai. Pertidaksamaan dalam bentuk (2.99) menunjukkan bahwa $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ adalah positif definit. LMI pada bentuk (2.99) merupakan fungsi kendala dari \mathbf{x} , dengan nilai \mathbf{x} dicari sedemikian hingga $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$.

LMI ganda dalam bentuk $\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ dapat dinyatakan ke dalam LMI tunggal yaitu dalam bentuk $\text{diag}(\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x})) > \mathbf{0}$. Ketika matriks \mathbf{F}_i adalah diagonal, maka LMI $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ merupakan sebuah himpunan pertidaksamaan linear. Pertidaksamaan nonlinear (konveks) dapat diubah menjadi bentuk LMI menggunakan Schur's complement. Misalkan terdapat LMI (2.100)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (2.100)$$

dengan $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$ dan $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$ maka LMI (2.100) ekuivalen dengan Pertidaksamaan (2.101)-(2.102).

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \quad (2.101)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > \mathbf{0} \quad (2.102)$$

Untuk menyelesaikan permasalahan LMI, dapat digunakan *toolbox* LMI pada MATLAB. Tata cara penggunaan *toolbox* ini dijelaskan pada [14].



BAB III PERANCANGAN SISTEM

Pada Bab ini membahas tentang perancangan sistem kontrol *winding machine* dan estimator kesalahan sensor. Bagian awal membahas tentang pemodelan *fuzzy* T-S sistem *winding machine*. Untuk membangun model *fuzzy* T-S digunakan metode sektor nonlinearitas. Kemudian kontroler servo tipe I dirancang untuk masing-masing model linear yang telah diperoleh dengan menggunakan pendekatan model *fuzzy* T-S sesuai konsep PDC. *Gain* kontroler dihitung dengan menggunakan metode optimisasi *linear quadratic*. Untuk menjaga performa dan stabilitas sistem terhadap kesalahan sensor dan gangguan, maka dirancang estimator kesalahan sensor menggunakan pendekatan *descriptor*. *Gain* estimator dirumuskan dari pertidaksamaan Lyapunov dengan menyertakan performa H_∞ yang kemudian diubah ke dalam bentuk LMI. Untuk menyelesaikan LMI digunakan LMI *Toolbox* pada MATLAB. Pada akhir Bab ini membahas tentang perancangan sistem menggunakan Simulink MATLAB untuk keperluan simulasi.

3.1 Pemodelan *Fuzzy* T-S Sistem *Winding Machine*

Model matematika *winding machine* telah dibahas pada Bab sebelumnya. Persamaan tersebut menunjukkan bahwa sistem *winding machine* adalah sistem nonlinear. Tabel A.1 pada Lampiran A merupakan parameter *winding machine* dengan material yang digunakan adalah aluminium.

Pemodelan *fuzzy* T-S pada Tugas Akhir ini digunakan untuk merancang kontroler *fuzzy* servo tipe 1 yang akan dibahas pada Subbab selanjutnya. Kontroler servo tipe 1 merupakan kontroler linear. Oleh karena itu, agar teori kontrol linear dapat digunakan sebagai kontroler sistem nonlinear, maka kontroler linear akan disusun dengan skema PDC. Perancangan kontroler linear dilakukan untuk setiap aturan *plant* sehingga dapat disusun aturan kontroler yang bersesuaian.

Model *fuzzy* T-S sistem *winding machine* akan dibangun dengan metode sektor nonlinearitas lokal. Persamaan *state winding machine* pada (2.32) dapat diubah ke dalam Persamaan (3.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.1)$$

dengan

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} [x_3 x_1 + AE(x_3 - x_4)] \\ \frac{1}{L_2} [x_5 x_2 - x_3 x_1 + AE(x_5 - x_3)] \\ -\frac{\beta_{f_1}}{J_1} x_3 + \frac{R_1^2}{J_1} (x_2 - x_1) \\ -\frac{\beta_{f_0}}{J_0} x_4 + \frac{1}{J_0} \left[R_0^2 x_1 - \frac{e_w}{2\pi} \left(\frac{J_0}{R_0^2} - 2\pi t_\rho t_w R_0^2 \right) x_4^2 \right] \\ -\frac{\beta_{f_2}}{J_2} x_5 + \frac{1}{J_2} \left[-R_2^2 x_2 + \frac{e_w}{2\pi} \left(\frac{J_2}{R_2^2} - 2\pi t_\rho t_w R_2^2 \right) x_5^2 \right] \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{R_1}{J_1} u_1 & -\frac{R_0}{J_0} u_0 & \frac{R_2}{J_2} u_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.3)$$

Sesuai dengan Persamaan (2.65), maka Persamaan (3.1) dapat diubah menjadi Persamaan (3.4)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.4)$$

dengan matriks $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ merupakan matriks persegi berdimensi lima yang didalamnya terdapat sektor nonlinear. Untuk penurunan Persamaan (3.4) dapat dilihat pada Lampiran A.

Pada matriks $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ terdapat lima sektor nonlinear yang mengandung *state* x_3 , x_4 , dan x_5 . Karena masing-masing *roller* memiliki kecepatan transport material yang hampir sama, maka $x_3 \approx x_4 \approx x_5$. Dengan demikian *state* x_4 dan x_5 dapat didekati sebagai x_3 . Pendekatan ini menghasilkan matriks $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ yang baru dengan lima sektor nonlinear yang mengandung *state* x_3 saja. Maka linearisasi lokal hanya dapat divariasikan pada x_3 .

Berdasarkan [6], x_3 memiliki *range* kerja antara 0 m/s sampai dengan 4 m/s. Agar menghasilkan model *fuzzy* T-S yang akurat, maka *range* kerja x_3 dibagi ke dalam 4 *range* kerja yaitu $x_3 \in [0,1]$, $x_3 \in [1,2]$, $x_3 \in [2,3]$, dan $x_3 \in [3,4]$. Tujuan dari pembagian *range* kerja tersebut adalah agar pemodelan sistem *winding machine* tidak dipandang sebagai

pendekatan global, namun dipandang sebagai beberapa pendekatan lokal sehingga menghasilkan pendekatan model yang lebih akurat. Sektor nonlinear pada (A.2) memiliki nilai maksimum dan minimum pada masing-masing *range* kerja sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{min}^1(x_3, t) &= 0, & f_{max}^1(x_3, t) &= 1 \\ f_{min}^2(x_3, t) &= 1, & f_{max}^2(x_3, t) &= 2 \\ f_{min}^3(x_3, t) &= 2, & f_{max}^3(x_3, t) &= 3 \\ f_{min}^4(x_3, t) &= 3, & f_{max}^4(x_3, t) &= 4 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai maksimum dan minimum *range* kerja ke dalam Persamaan (A.3) maka diperoleh lima model lokal seperti pada Persamaan (3.5)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_3 \mathbf{x} + \mathbf{B}_3 \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_4 \mathbf{x} + \mathbf{B}_4 \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_5 \mathbf{x} + \mathbf{B}_5 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.5)$$

dengan

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 800 & -800 & 0 \\ 0 & 0 & -800 & 0 & 800 \\ -0,83 & 0,83 & -1,87 & 0 & 0 \\ 2,04 & 0 & 0 & -1,50 & 0 \\ 0 & -2,04 & 0 & 0 & -1,50 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,33 & 0 & 800 & -800 & 0 \\ -0,33 & 0,33 & -800 & 0 & 800 \\ -0,83 & 0,83 & -1,87 & 0 & 0 \\ 2,04 & 0 & 0 & 1,15 & 0 \\ 0 & -2,04 & 0 & 0 & -4,15 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0,67 & 0 & 800 & -800 & 0 \\ -0,67 & 0,67 & -800 & 0 & 800 \\ -0,83 & 0,83 & -1,87 & 0 & 0 \\ 2,04 & 0 & 0 & 3,79 & 0 \\ 0 & -2,04 & 0 & 0 & -6,79 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 800 & -800 & 0 \\ -1 & 1 & -800 & 0 & 800 \\ -0,83 & 0,83 & -1,87 & 0 & 0 \\ 2,04 & 0 & 0 & 6,44 & 0 \\ 0 & -2,04 & 0 & 0 & -9,44 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1,33 & 0 & 800 & -800 & 0 \\ -1,33 & 1,33 & -800 & 0 & 800 \\ -0,83 & 0,83 & -1,87 & 0 & 0 \\ 2,04 & 0 & 0 & 9,08 & 0 \\ 0 & -2,04 & 0 & 0 & -12,08 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \dots = \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,83 & 0 \\ -1,17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,17 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Model *Fuzzy* T-S (2.52) dapat dibangun dari linearisasi lokal yang telah dilakukan sebelumnya. Model T-S sistem *winding machine* memiliki lima aturan *plant* dengan satu variabel premis. Berdasarkan Parameter (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), dan (3.11), maka model *fuzzy* T-S dapat dibentuk dengan aturan *plant* sebagai berikut:

Aturan *plant* ke-1:

$$\begin{aligned} \text{If } & x_3(t) \text{ is } M_1 \text{ (sekitar 0 m/s)} \\ \text{Then } & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t) \\ & \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Aturan *plant* ke-2:

$$\begin{aligned} \text{If } & x_3(t) \text{ is } M_2 \text{ (sekitar 1 m/s)} \\ \text{Then } & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \\ & \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aturan *plant* ke-3:

$$\begin{aligned} \text{If } & x_3(t) \text{ is } M_3 \text{ (sekitar 2 m/s)} \\ \text{Then } & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_3 \mathbf{u}(t) \\ & \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_3 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_3 \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Aturan *plant* ke-4:

If $x_3(t)$ is M_4 (sekitar 3 m/s)

Then $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_4\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_4\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_4\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_4\mathbf{u}(t) \quad (3.15)$$

Aturan *plant* ke-5:

If $x_3(t)$ is M_5 (sekitar 4 m/s)

Then $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_5\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_5\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_5\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_5\mathbf{u}(t) \quad (3.16)$$

dengan

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \dots = \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \dots = \mathbf{D}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Berdasarkan skema PDC, aturan kontroler *fuzzy* (2.59) dapat disusun dengan aturan *plant* yang bersesuaian. Aturan kontroler *fuzzy* yang disusun adalah sebagai berikut:

Aturan kontroler ke-1:

If $x_3(t)$ is M_1 (sekitar 0 m/s)

Then $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_{i_1}\xi(t)$ (3.19)

Aturan kontroler ke-2:

If $x_3(t)$ is M_2 (sekitar 1 m/s)

Then $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_{i_2}\xi(t)$ (3.20)

Aturan kontroler ke-3:

If $x_3(t)$ is M_3 (sekitar 2 m/s)

Then $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_3\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_{i_3}\xi(t)$ (3.21)

Aturan kontroler ke-4:

If $x_3(t)$ is M_4 (sekitar 3 m/s)

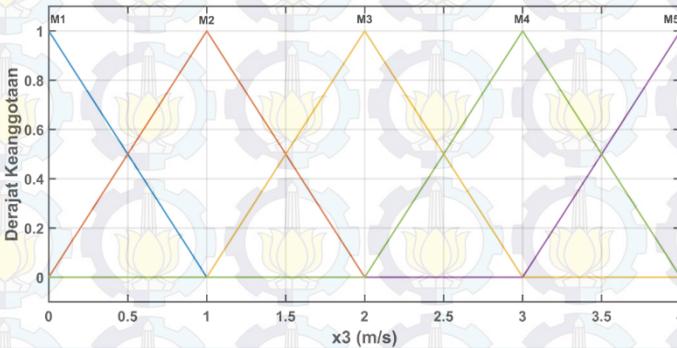
$$\text{Then } \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_4 \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_{i_4} \xi(t) \quad (3.22)$$

Aturan kontroler ke-5:

If $x_3(t)$ is M_5 (sekitar 4 m/s)

$$\text{Then } \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_5 \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_{i_5} \xi(t) \quad (3.23)$$

Fungsi keanggotaan pada masing-masing titik kerja direpresentasikan sebagai fungsi *triangular* seperti pada Gambar 3.1. Persamaan (3.24) merupakan fungsi keanggotaan $M_1, M_2, M_3, M_4,$ dan M_5 .



Gambar 3.1 Fungsi Keanggotaan untuk Aturan *Plant* dan Kontroler

$$\begin{aligned}
 M_1(x_3(t)) &= -x_3(t) + 1, & 0 \leq x_3(t) \leq 1 \\
 M_2(x_3(t)) &= \begin{cases} x_3(t), & 0 \leq x_3(t) \leq 1 \\ -x_3(t) + 2, & 1 \leq x_3(t) \leq 2 \end{cases} \\
 M_3(x_3(t)) &= \begin{cases} x_3(t) - 1, & 1 \leq x_3(t) \leq 2 \\ -x_3(t) + 3, & 2 \leq x_3(t) \leq 3 \end{cases} \\
 M_4(x_3(t)) &= \begin{cases} x_3(t) - 2, & 2 \leq x_3(t) \leq 3 \\ -x_3(t) + 4, & 3 \leq x_3(t) \leq 4 \end{cases} \\
 M_5(x_3(t)) &= x_3(t) - 3, & 3 \leq x_3(t) \leq 4
 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Metode implikasi dan agregasi yang digunakan adalah *product* dan *sum* serta metode defuzzifikasi yang digunakan adalah *center (weighted) average*. Persamaan (3.25)-(3.26) menunjukkan bentuk keseluruhan model *fuzzy* T-S sistem *winding machine*.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^5 h_i(x_3(t)) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)] \quad (3.25)$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^5 h_i(x_3(t)) [\mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i \mathbf{u}(t)] \quad (3.26)$$

Keluaran dari kontroler *fuzzy* dapat dinyatakan oleh Persamaan (3.27).

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^5 h_j(x_3(t)) [-\mathbf{K}_j \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_{i_j} \xi(t)] \quad (3.27)$$

Substitusi Persamaan (3.27) pada Persamaan (3.25)-(3.26) diperoleh sistem lup tertutup yang dinyatakan oleh Persamaan (3.28).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^5 h_i(x_3(t)) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_{i_j} \xi(t)] \quad (3.28)$$

dengan

$$h_i(x_3(t)) = \frac{\mu_i(x_3(t))}{\sum_{i=1}^5 \mu_i(x_3(t))}$$

$$\mu_i(x_3(t)) = M_i(x_3(t)), \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

3.2 Kontroler Servo Tipe 1

Pada Subbab ini membahas tentang perancangan kontroler servo tipe 1 untuk keperluan *tracking*. *Gain* kontroler ditentukan melalui metode kontrol optimal. Oleh karena itu, *gain* $\bar{\mathbf{K}}$ dipilih sedemikian hingga meminimumkan indeks performa pada Persaman (2.51) dan sinyal

kontrol $\mathbf{u}_e(t)$ optimal untuk setiap kondisi inisial ($\tilde{\mathbf{e}}_c(0)$). Perancangan kontroler dilakukan untuk setiap aturan kontroler. Gambar 3.2 merupakan diagram blok kontroler *fuzzy* servo tipe 1.

Dinamika kesalahan sistem servo diberikan pada Persamaan (2.49). Dengan mensubstitusikan $\mathbf{u}_e = -\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{e}}_c$ pada Persamaan (2.49), diperoleh Persamaan (3.29).

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_c = \tilde{\mathbf{A}}_c \tilde{\mathbf{e}}_c + \tilde{\mathbf{B}}_c \mathbf{u}_e = (\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c \tilde{\mathbf{K}}) \tilde{\mathbf{e}}_c \quad (3.29)$$

Diasumsikan bahwa $\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c \tilde{\mathbf{K}}$ adalah stabil atau nilai *eigen* dari $\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c \tilde{\mathbf{K}}$ berada di sebelah kiri sumbu imajiner. Substitusi Persamaan (3.29) ke dalam indeks performa (2.51) diperoleh Persamaan (3.30).

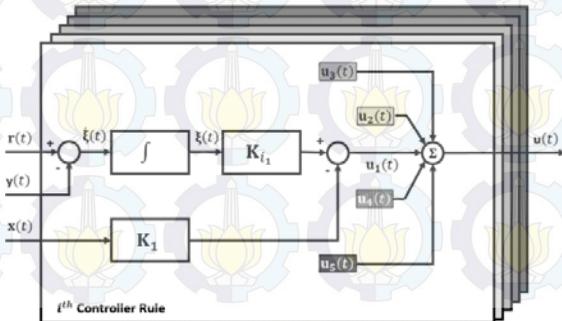
$$J = \int_0^{\infty} (\tilde{\mathbf{e}}_c^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{e}}_c + \tilde{\mathbf{e}}_c^T \tilde{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{e}}_c) dt$$

$$J = \int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{e}}_c^T (\mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{K}}) \tilde{\mathbf{e}}_c dt \quad (3.30)$$

Misalkan vektor kesalahan $\tilde{\mathbf{e}}_c$ dijadikan kandidat fungsi Lyapunov, maka diperoleh Persamaan (3.32)

$$\tilde{\mathbf{e}}_c^T (\mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{K}}) \tilde{\mathbf{e}}_c = -\frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{e}}_c^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{e}}_c) \quad (3.31)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_c^T (\mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{K}}) \tilde{\mathbf{e}}_c = -\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_c^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{e}}_c - \tilde{\mathbf{e}}_c^T \mathbf{P} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_c \quad (3.32)$$



Gambar 3.2 Diagram Blok Kontroler *Fuzzy* Servo Tipe 1

dengan \mathbf{P} adalah matriks Hermitian definit positif. Substitusi Persamaan (3.29) ke dalam Persamaan (3.32) maka diperoleh Persamaan (3.33).

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{e}}_c^T(\mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{K}}^T\mathbf{R}\tilde{\mathbf{K}})\tilde{\mathbf{e}}_c &= -[(\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c\tilde{\mathbf{K}})\tilde{\mathbf{e}}_c]^T\mathbf{P}\tilde{\mathbf{e}}_c - \tilde{\mathbf{e}}_c^T\mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c\tilde{\mathbf{K}})\tilde{\mathbf{e}}_c \\ \tilde{\mathbf{e}}_c^T(\mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{K}}^T\mathbf{R}\tilde{\mathbf{K}})\tilde{\mathbf{e}}_c &= -\tilde{\mathbf{e}}_c^T[(\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c\tilde{\mathbf{K}})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c\tilde{\mathbf{K}})]\tilde{\mathbf{e}}_c\end{aligned}\quad (3.33)$$

Membandingkan kedua sisi pada Persamaan (3.33) dan memperhatikan bahwa persamaan ini harus berlaku untuk setiap $\tilde{\mathbf{e}}_c$, maka berlaku Persamaan (3.34).

$$-(\mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{K}}^T\mathbf{R}\tilde{\mathbf{K}}) = (\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c\tilde{\mathbf{K}})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c\tilde{\mathbf{K}})\quad (3.34)$$

Dengan metode kedua Lyapunov, jika $\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c\tilde{\mathbf{K}}$ adalah matriks stabil, maka terdapat sebuah matriks definit positif \mathbf{P} yang memenuhi Persamaan (3.34).

Karena semua nilai *eigen* matriks $\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c\tilde{\mathbf{K}}$ diasumsikan disebelah kiri sumbu imajiner, maka $\tilde{\mathbf{e}}_c$ menuju nol pada saat $t \rightarrow \infty$. Substitusi Persamaan (3.31) pada Persamaan (2.51) diperoleh Persamaan (3.35).

$$\begin{aligned}J &= \int_0^\infty \tilde{\mathbf{e}}_c^T(\mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{K}}^T\mathbf{R}\tilde{\mathbf{K}})\tilde{\mathbf{e}}_c dt = -\tilde{\mathbf{e}}_c^T\mathbf{P}\tilde{\mathbf{e}}_c|_0^\infty \\ &= -\tilde{\mathbf{e}}_c^T(\infty)\mathbf{P}\tilde{\mathbf{e}}_c(\infty) + \tilde{\mathbf{e}}_c^T(0)\mathbf{P}\tilde{\mathbf{e}}_c(0) \\ J &= \tilde{\mathbf{e}}_c^T(0)\mathbf{P}\tilde{\mathbf{e}}_c(0)\end{aligned}\quad (3.35)$$

Persamaan (3.35) menunjukkan bahwa indeks performa (2.51) dapat diperoleh sebagai kondisi inisial $\tilde{\mathbf{e}}_c(0)$ dan \mathbf{P} .

Untuk memperoleh solusi dari permasalahan *quadratic optimal control*, diasumsikan $\mathbf{R} = \mathbf{T}^T\mathbf{T}$ dengan \mathbf{T} adalah matriks nonsingular. Asumsi ini dapat dilakukan karena matriks \mathbf{R} merupakan matriks simetris definit positif. Dengan asumsi ini, maka Persamaan (3.34) dapat ditulis sebagai Persamaan (3.36).

$$(\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c\tilde{\mathbf{K}})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c\tilde{\mathbf{K}}) + \mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{K}}^T\mathbf{T}^T\mathbf{T}\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_c^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_c + [\mathbf{T} \tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{T} \tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{P}] \\ - \mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}}_c \mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Untuk meminimumkan indeks performa J maka dapat dilakukan dengan cara meminimumkan Persamaan (3.37).

$$\min \tilde{\mathbf{e}}_c^T [\mathbf{T} \tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{T} \tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{P}] \tilde{\mathbf{e}}_c \quad (3.37)$$

Agar Persamaan (3.37) minimum, maka $\mathbf{T} \tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{P} = \mathbf{0}$. Oleh karena itu, diperoleh *gain* $\tilde{\mathbf{K}}$ pada Persamaan (3.38) yang meminimumkan Persamaan (3.37) sehingga meminimumkan indeks performa (2.51).

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{P} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{T} \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{P} \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{P} \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{P} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Substitusi *gain* $\tilde{\mathbf{K}}$ yang memenuhi Persamaan (3.38) pada Persamaan (3.36), maka dapat diperoleh Persamaan (3.39).

$$\tilde{\mathbf{A}}_c^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_c + -\mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}}_c \mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.39)$$

Berdasarkan penurunan fungsi yang telah dilakukan diatas, langkah desain kontroler optimal servo tipe 1 adalah sebagai berikut:

1. Menentukan matriks $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$ dan $\mathbf{R} > \mathbf{0}$ serta menyusun matriks augmentasi $\tilde{\mathbf{A}}_c$ dan $\tilde{\mathbf{B}}_c$.
2. Menyelesaikan Persamaan (3.39) sehingga diperoleh matriks \mathbf{P} .
3. Substitusi matriks \mathbf{P} yang telah diperoleh pada langkah sebelumnya dan matriks \mathbf{R} pada Persamaan (3.38), sehingga diperoleh *gain* $\tilde{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad ; \quad -\mathbf{K}_i]$ yang optimal.

Sesuai dengan konsep PDC yang telah dibahas pada Subbab 3.1 *gain* kontroler pada masing-masing aturan kontroler dapat ditentukan dengan model pada aturan *plant* yang bersesuaian. Persamaan (3.39) dapat diubah menjadi Persamaan (3.40) untuk menyesuaikan terhadap model *fuzzy* yang telah disusun sebelumnya

$$\tilde{\mathbf{A}}_{c_i}^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{A}}_{c_i} + -\mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{B}}_{c_i} \mathbf{R}_i^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_{c_i}^T \mathbf{P}_i + \mathbf{Q}_i = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

dengan

$$\tilde{\mathbf{A}}_{c_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{c_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

Matriks \mathbf{Q} dan \mathbf{R} ditentukan secara *trial dan error* sedemikian hingga respon sistem memenuhi kriteria yang diinginkan. Pada Tugas Akhir ini matriks \mathbf{Q} dan \mathbf{R} untuk semua aturan kontroler adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{Q}_2 = \dots = \mathbf{Q}_5 = 20 \times \mathbf{I}_8 \\ \mathbf{R}_1 &= \mathbf{R}_2 = \dots = \mathbf{R}_5 = 0.1 \times \mathbf{I}_3 \end{aligned}$$

Matriks \mathbf{P} untuk masing-masing aturan kontroler diperoleh dengan cara mensubstitusikan matriks \mathbf{Q} dan \mathbf{R} serta parameter *plant* yang bersesuaian ke dalam Persamaan (3.40) kemudian menyelesaikan persamaan tersebut. Hasil perhitungan matriks \mathbf{P} untuk masing-masing aturan kontroler dapat dilihat pada Lampiran A. Sedangkan program untuk menghitung *gain* kontroler dapat dilihat pada Lampiran B.

Dengan mensubstitusikan matriks \mathbf{P} dan \mathbf{R} pada Persamaan (3.38), maka diperoleh *gain* kontroler sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 10,60 & 2,06 & 70,25 & -106,48 & 24,78 \\ 6,17 & -6,17 & 116,34 & -50,18 & -50,18 \\ 2,06 & 10,60 & -70,25 & -24,78 & 106,48 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 10,63 & 2,06 & 70,50 & -108,81 & 24,73 \\ 6,23 & -6,19 & 116,72 & -50,36 & -50,24 \\ 2,04 & 10,66 & -70,34 & -24,73 & 104,57 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 10,65 & 2,06 & 70,66 & -111,22 & 24,64 \\ 6,29 & -6,20 & 117,24 & -50,47 & -50,24 \\ 2,03 & 10,71 & -70,33 & -24,64 & 102,74 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} 10,66 & 2,06 & 70,74 & -113,70 & 24,52 \\ 6,36 & -6,22 & 117,90 & -50,53 & -50,18 \\ 2,02 & 10,76 & -70,25 & -24,52 & 100,98 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_5 &= \begin{bmatrix} 10,68 & 2,06 & 70,74 & -116,24 & 24,38 \\ 6,42 & -6,24 & 118,68 & -50,53 & -50,07 \\ 2,00 & 10,80 & -70,10 & -24,38 & 99,28 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{i_1} &= \begin{bmatrix} 12,10 & 2,04 & -7,02 \\ 7,02 & -7,02 & 10,07 \\ 2,04 & 12,10 & 7,02 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{i_2} &= \begin{bmatrix} 12,14 & 2,07 & -6,95 \\ 6,97 & -7,08 & 10,06 \\ 2,01 & 12,07 & 7,10 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{i_3} &= \begin{bmatrix} 12,17 & 2,10 & -6,88 \\ 6,92 & -7,14 & 10,06 \\ 1,98 & 12,03 & 7,17 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{i_4} &= \begin{bmatrix} 12,20 & 2,13 & -6,82 \\ 6,88 & -7,19 & 10,05 \\ 1,95 & 11,99 & 7,25 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{i_5} &= \begin{bmatrix} 12,23 & 2,17 & -6,77 \\ 6,84 & -7,25 & 10,03 \\ 1,93 & 11,95 & 7,31 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3.3 Desain *Robust Sensor Fault Estimator*

Pada Subbab ini membahas tentang perancangan estimator untuk kesalahan sensor. Pertama, *augmented descriptor system* akan dibentuk kemudian ditentukan kestabilannya dengan analisis kestabilan Lyapunov. Agar estimator kokoh terhadap gangguan pada *plant*, maka performa H_∞ ditambahkan pada perumusan fungsi Lyapunov. Penurunan akhir dari fungsi Lyapunov akan diubah dalam bentuk LMI. Letak *pole* estimator ditentukan dengan teknik *pole region*. Syarat *pole region* ini akan diubah ke dalam bentuk LMI kemudian ditambahkan sebagai syarat desain estimator. Bentuk LMI akhir digunakan dalam mencari *gain* estimator yang memenuhi fungsi Lyapunov dan syarat *pole region*. Untuk membantu mencari solusi dari LMI, digunakan LMI *Toolbox* pada MATLAB. Program untuk mencari solusi LMI dapat dilihat pada Lampiran B.

3.3.1 *Augmented Descriptor System*

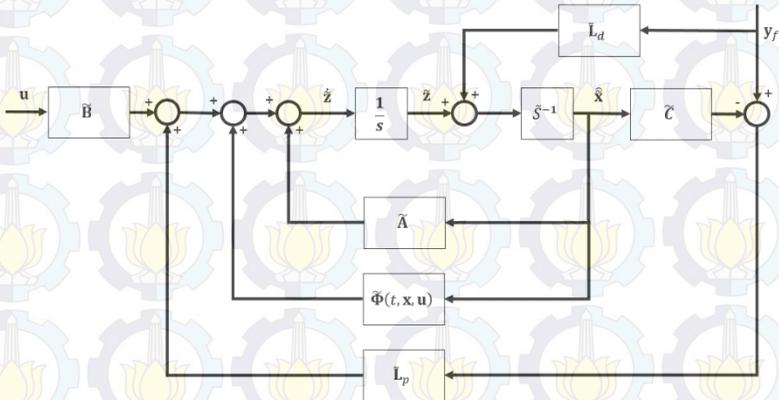
Pada Subbab 2.8.2 telah dijelaskan tentang ide dari estimator kesalahan sensor. Sistem (2.80)-(2.81) adalah sistem nonlinear Lipschitz dengan gangguan pada sistem dan kesalahan sensor. Untuk membentuk estimator yang sesuai dengan Persamaan (2.86)-(2.87) dan mampu mengestimasi kesalahan sensor pada Sistem (2.80)-(2.81) maka dibentuk sebuah *augmented descriptor system* pada Persamaan (3.41). Parameter sistem ini sesuai pada Persamaan (2.83).

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \tilde{\Phi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{B}}_d\mathbf{d} \\ &+ \tilde{\mathbf{L}}_p(\mathbf{y}_f - \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{D}\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{L}}_d(\dot{\mathbf{y}}_f - \tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Sistem (3.41) dapat diubah dalam Persamaan (3.42). Untuk membentuk sebuah estimator kesalahan sensor, maka dibuat sebuah Estimator (3.43) yang mirip dengan (3.42). Gambar 3.3 adalah diagram blok estimator dengan $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Diharapkan Estimator (3.43) mampu mengestimasi *augmented state descriptor* $\tilde{\mathbf{x}}$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \tilde{\Phi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{B}}_d\mathbf{d} + \tilde{\mathbf{L}}_p\mathbf{y}_f - \tilde{\mathbf{L}}_p\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} \\ &- \tilde{\mathbf{L}}_p\mathbf{D}\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{L}}_d(\dot{\mathbf{y}}_f - \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}) - \tilde{\mathbf{L}}_d\tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ (\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{L}}_d\tilde{\mathbf{C}})\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p\tilde{\mathbf{C}})\tilde{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{L}}_p\mathbf{D})\mathbf{u} + \tilde{\Phi}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \\ &+ \tilde{\mathbf{B}}_d\mathbf{d} + \tilde{\mathbf{L}}_p\mathbf{y}_f + \tilde{\mathbf{L}}_d(\dot{\mathbf{y}}_f - \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{L}}_d\tilde{\mathbf{C}})\dot{\hat{\tilde{\mathbf{x}}}} &= (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p\tilde{\mathbf{C}})\hat{\tilde{\mathbf{x}}} + (\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{L}}_p\mathbf{D})\mathbf{u} + \tilde{\Phi}(t, \hat{\tilde{\mathbf{x}}}, \mathbf{u}) \\ &+ \tilde{\mathbf{L}}_p\mathbf{y}_f + \tilde{\mathbf{L}}_d(\dot{\mathbf{y}}_f - \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (3.43)$$



Gambar 3.3 Diagram Blok *Sensor Fault Estimator* dengan $\mathbf{D} = \mathbf{0}$

Hasil estimasi dari Sistem (3.43) adalah *state* sistem $\hat{\tilde{\mathbf{x}}}$ dan *state* $\hat{\mathbf{f}}_s$ dengan $\hat{\mathbf{f}}_s$ adalah estimasi kesalahan sensor. *State* ini digunakan untuk melakukan kompensasi kesalahan sensor yang terjadi pada sistem. Estimator (3.43) memiliki perbedaan dengan Sistem (3.42). Perbedaan

tersebut terletak pada gangguan masukan. Vektor gangguan masukan hanya terdapat pada sistem. Gangguan masukan memang tidak diestimasi oleh estimator, namun efek gangguan ini dilemahkan hingga dibawah level pelemahan yang diinginkan sesuai dengan Performa (2.93). Oleh karena itu performa H_∞ ditambahkan dalam perumusan fungsi Lyapunov yang akan dibahas pada Subbab selanjutnya.

3.3.2 Perumusan Fungsi Lyapunov

Untuk membentuk fungsi Lyapunov, diperlukan kandidat Lyapunov. Kandidat Lyapunov yang dipilih adalah vektor kesalahan estimasi. Dengan mengurangkan Persamaan (3.43) dengan (3.42), maka diperoleh Persamaan (3.44).

$$(\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{L}}_d \tilde{\mathbf{C}}) (\dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}) = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}}) (\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\Phi}(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \tilde{\Phi}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d} \quad (3.44)$$

Misalkan

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}} &= \hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{e}}} &= \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \tilde{\Phi} &= \tilde{\Phi}(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \tilde{\Phi}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \\ \tilde{\mathbf{S}} &= \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{L}}_d \tilde{\mathbf{C}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

maka dengan substitusi Persamaan (3.45) pada Persamaan (3.44) diperoleh Persamaan (3.46).

$$\tilde{\mathbf{S}} \dot{\tilde{\mathbf{e}}} = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\Phi} - \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d} \quad (3.46)$$

Dengan mengalikan invers matriks dari $\tilde{\mathbf{S}}$ pada kedua sisi, maka Persamaan (3.46) dapat diubah menjadi Persamaan (3.47).

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\Phi} - \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d} \quad (3.47)$$

Vektor $\tilde{\mathbf{e}}$ dipilih sebagai kandidat fungsi Lyapunov. Diharapkan untuk $t \rightarrow \infty$, vektor $\tilde{\mathbf{e}}$ konvergen menuju nol. Sehingga saat $t \rightarrow \infty$,

kondisi $\hat{\mathbf{x}} \approx \tilde{\mathbf{x}}$ akan terpenuhi. Substitusi $\tilde{\mathbf{e}}$ kedalam fungsi Lyapunov diperoleh Persamaan (3.48)

$$V(\tilde{\mathbf{e}}) = \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} \quad (3.48)$$

dengan

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > \mathbf{0} \quad (3.49)$$

Persamaan (3.50) adalah derivatif dari $V(\tilde{\mathbf{e}})$.

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) = \dot{\tilde{\mathbf{e}}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \dot{\tilde{\mathbf{e}}} \quad (3.50)$$

Substitusi (3.47) pada (3.50) diperoleh Persamaan (3.51).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) &= (\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \Phi - \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d})^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} \\ &\quad + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} (\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \Phi - \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d}) \\ \dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) &= \left\{ \tilde{\mathbf{e}}^T [\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}})]^T + \Phi^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} - \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \right\} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} \\ &\quad + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \left\{ \tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \Phi - \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d} \right\} \\ \dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) &= \tilde{\mathbf{e}}^T \left\{ [\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}})]^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} [\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}})] \right\} \tilde{\mathbf{e}} \\ &\quad + \Phi^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \Phi - \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Secara implisit dapat diketahui bahwa:

$$\begin{aligned} \Phi^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \Phi &= \Phi^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \Phi \\ &\quad - [\Phi^T \Phi + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}}] + \Phi^T \Phi \\ &\quad + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} \\ \Phi^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \Phi &= \Phi^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \Phi \\ &\quad - (\Phi + \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}})^T (\Phi + \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}}) \\ &\quad + \Phi^T \Phi + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} \\ &\leq \Phi^T \Phi + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} \\ \Phi^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \Phi &\leq \Phi^T \Phi + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Pertidaksamaan (2.35) menyatakan kontinuitas Lipschitz. Pertidaksamaan tersebut dapat diubah menjadi Pertidaksamaan (3.53) dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \left\| \widehat{\Phi}(t, \widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \widetilde{\Phi}(t, \widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \right\| \leq \theta \|\widetilde{\mathbf{e}}\| \\ & \|\Phi\| \leq \theta \|\widetilde{\mathbf{e}}\| \\ & \sqrt{\int_0^{T_f} \Phi^T \Phi dt} \leq \theta \sqrt{\int_0^{T_f} \widetilde{\mathbf{e}}^T \widetilde{\mathbf{e}} dt} \end{aligned}$$

dengan mengkuadratkan kedua sisi diperoleh:

$$\int_0^{T_f} \Phi^T \Phi dt \leq \theta^2 \int_0^{T_f} \widetilde{\mathbf{e}}^T \widetilde{\mathbf{e}} dt$$

kedua sisi dikalikan dengan operator derivatif diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{T_f} \Phi^T \Phi dt \right] & \leq \theta^2 \frac{d}{dt} \left[\int_0^{T_f} \widetilde{\mathbf{e}}^T \widetilde{\mathbf{e}} dt \right] \\ \Phi^T \Phi & \leq \theta^2 \widetilde{\mathbf{e}}^T \widetilde{\mathbf{e}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Substitusi Pertidaksamaan (3.53) pada (3.52) diperoleh Pertidaksamaan (3.54).

$$\Phi^T \widetilde{\mathbf{S}}^{-T} \widetilde{\mathbf{P}} \widetilde{\mathbf{e}} + \widetilde{\mathbf{e}}^T \widetilde{\mathbf{P}} \widetilde{\mathbf{S}}^{-1} \Phi \leq \theta^2 \widetilde{\mathbf{e}}^T \widetilde{\mathbf{e}} + \widetilde{\mathbf{e}}^T \widetilde{\mathbf{P}} \widetilde{\mathbf{S}}^{-1} \widetilde{\mathbf{S}}^{-T} \widetilde{\mathbf{P}} \widetilde{\mathbf{e}} \quad (3.54)$$

Substitusi Pertidaksamaan (3.54) pada fungsi Lyapunov (3.51) diperoleh Pertidaksamaan (3.55).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\widetilde{\mathbf{e}}) & \leq \widetilde{\mathbf{e}}^T \left\{ [\widetilde{\mathbf{S}}^{-1}(\widetilde{\mathbf{A}} - \widetilde{\mathbf{L}}_p \widetilde{\mathbf{C}})]^T \widetilde{\mathbf{P}} + \widetilde{\mathbf{P}} [\widetilde{\mathbf{S}}^{-1}(\widetilde{\mathbf{A}} - \widetilde{\mathbf{L}}_p \widetilde{\mathbf{C}})] \right\} \widetilde{\mathbf{e}} \\ & \quad + \theta^2 \widetilde{\mathbf{e}}^T \widetilde{\mathbf{e}} + \widetilde{\mathbf{e}}^T \widetilde{\mathbf{P}} \widetilde{\mathbf{S}}^{-1} \widetilde{\mathbf{S}}^{-T} \widetilde{\mathbf{P}} \widetilde{\mathbf{e}} - \mathbf{d}^T \widetilde{\mathbf{B}}_d^T \widetilde{\mathbf{S}}^{-T} \widetilde{\mathbf{P}} \widetilde{\mathbf{e}} \\ & \quad - \widetilde{\mathbf{e}}^T \widetilde{\mathbf{P}} \widetilde{\mathbf{S}}^{-1} \widetilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Pertidaksamaan (3.55) dapat ditulis sebagai Pertidaksamaan (3.56).

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) &\leq \tilde{\mathbf{e}}^T \left\{ [\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}})]^T \tilde{\mathbf{P}} + \theta^2 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\mathbf{P}} [\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}})] \right\} \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} \\
&\quad - \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d} \\
\dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) &\leq \tilde{\mathbf{e}}^T [\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{L}}_p^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}} \\
&\quad + \theta^2 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}}] \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} \\
&\quad - \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d} \tag{3.56}
\end{aligned}$$

3.3.3 Performa H_∞

Pertidaksamaan (2.91) menyatakan performa H_∞ pada estimator. Pertidaksamaan tersebut bermakna bahwa efek dari semua nilai \mathbf{d} pada kesalahan estimasi $\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}$ harus dilemahkan sampai di bawah tingkat pelemahan yang diinginkan (γ). Dengan penambahan kriteria performa ini, diharapkan estimator kokoh terhadap gangguan yang terjadi pada sistem. Estimator mampu menghasilkan estimasi yang baik walaupun terjadi gangguan pada sistem dengan cara melemahkan efek gangguan tersebut.

Pertidaksamaan (2.91) dapat diubah menjadi Pertidaksamaan (3.57) dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_f} \{[\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}]^T [\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}]\} dt &\leq \gamma^2 \int_0^{T_f} \mathbf{d}^T \mathbf{d} dt \\
\int_0^{T_f} \{\tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}}\} dt &\leq \gamma^2 \int_0^{T_f} \mathbf{d}^T \mathbf{d} dt
\end{aligned}$$

mengalikan kedua sisi dengan operator derivatif maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\int_0^{T_f} \{\tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}}\} dt \right] &\leq \gamma^2 \frac{d}{dt} \left[\int_0^{T_f} \mathbf{d}^T \mathbf{d} dt \right] \\
\tilde{\mathbf{e}}^T \dot{\tilde{\mathbf{e}}} &\leq \gamma^2 \mathbf{d}^T \dot{\mathbf{d}} \\
\tilde{\mathbf{e}}^T \dot{\tilde{\mathbf{e}}} - \gamma^2 \mathbf{d}^T \dot{\mathbf{d}} &\leq 0 \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Salah satu syarat agar vektor $\tilde{\mathbf{e}}$ stabil asimtotis adalah $\dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) < 0$. Oleh karena itu, secara implisit berlaku Pertidaksamaan (3.58).

$$\tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}} - \gamma^2 \mathbf{d}^T \mathbf{d} > \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}} - \gamma^2 \mathbf{d}^T \mathbf{d} + \dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) = H \quad (3.58)$$

$$H = \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}} - \gamma^2 \mathbf{d}^T \mathbf{d} + \dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) \quad (3.59)$$

Substitusi Pertidaksamaan (3.56) pada (3.59) diperoleh Pertidaksamaan (3.60).

$$H \leq \tilde{\mathbf{e}}^T \left[\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{L}}_p^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}} \right. \\ \left. + \theta^2 \mathbf{I} + \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \right] \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}} \quad (3.60) \\ - \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{d} - \gamma^2 \mathbf{d}^T \mathbf{d}$$

Pertidaksamaan (3.60) dapat ditulis kedalam bentuk matriks seperti pada Pertidaksamaan (3.61).

$$H \leq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}^T & \mathbf{d}^T \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{L}}_p^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & -\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \\ -\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}} + \theta^2 \mathbf{I} + \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & \\ -\tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{L}}_p^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & -\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \\ -\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}} + \theta^2 \mathbf{I} + \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & \\ -\tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Agar Pertidaksamaan (3.58) terpenuhi, maka $H < 0$. Agar kondisi tersebut terpenuhi maka $\Psi < 0$ sehingga berlaku Pertidaksamaan (3.63).

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{L}}_p^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & -\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \\ -\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}} + \theta^2 \mathbf{I} + \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & \\ -\tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.63)$$

Prosedur yang telah dilakukan diatas membuktikan bahwa dalam mendesain estimator kesalahan sensor, maka Pertidaksamaan (3.63) harus terpenuhi. Pada pertidaksamaan tersebut terdapat tiga variabel, yaitu $\tilde{\mathbf{P}}$, $\tilde{\mathbf{L}}_p$, dan θ . Ketiga variabel tersebut dipilih sedemikian hingga

Pertidaksamaan (3.63) terpenuhi. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan LMI yang akan dijelaskan pada Subbab selanjutnya.

3.3.4 Perumusan LMI

Pada Subbab ini membahas tentang langkah-langkah dalam mengubah Pertidaksamaan (3.63) kedalam bentuk LMI. Pertidaksamaan (3.63) dapat ditulis kembali dalam Pertidaksamaan (3.64)

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{Y}}^T - \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{C}} & -\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \\ +\theta^2 \mathbf{I} + \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & \\ -\tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.64)$$

dengan

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_p \quad (3.65)$$

Pertidaksamaan (3.64) belum menjadi bentuk LMI. Matriks Ψ dapat diubah menjadi Matriks (3.66) dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{Y}}^T - \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{C}} & -\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \\ +\theta^2 \mathbf{I} + \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & \\ -\tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{Y}}^T & -\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \\ -\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{C}} + \theta^2 \mathbf{I} + \mathbf{I} & \\ -\tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \Psi &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{Y}}^T & -\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d \\ -\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{C}} + \theta^2 \mathbf{I} + \mathbf{I} & \\ -\tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &\quad + [\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \ \mathbf{0}]^T \mathbf{I} [\tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} \ \mathbf{0}] \end{aligned} \quad (3.66)$$

Dengan menggunakan Schur's complement maka diperoleh Pertidaksamaan (3.67). Pertidaksamaan (3.67) merupakan bentuk LMI.

$$\Psi < \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} & -\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_d & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \\ -\tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{Y}}^T - \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{C}} + \theta^2 \mathbf{I} + \mathbf{I} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{B}}_d^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.67)$$

Syarat *pole region* yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah *half plane region* dengan kendala seperti pada Pertidaksamaan (2.95). Bentuk ini dapat diubah ke dalam bentuk LMI seperti pada LMI (3.68).

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{Y}}^T & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \\ -\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{C}} + \theta^2 \mathbf{I} + \mathbf{I} + 2\alpha \mathbf{P} & \\ \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \tilde{\mathbf{P}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.68)$$

3.3.5 Prosedur Desain

Salah satu syarat agar terdapat estimator dalam bentuk (3.43) adalah matriks $\tilde{\mathbf{S}}$ harus *invertible* atau $\tilde{\mathbf{S}}$ adalah matriks nonsingular. Agar syarat tersebut terpenuhi, maka *gain* $\tilde{\mathbf{L}}_d$ dipilih sedemikian hingga $\tilde{\mathbf{S}}$ adalah matriks nonsingular. *Gain* $\tilde{\mathbf{L}}_d$ yang memenuhi kondisi ini dituliskan pada Persamaan (3.69)

$$\tilde{\mathbf{L}}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times p} \\ \mathbf{M}_{p \times p} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

dengan $\text{rank}(\mathbf{M}_{p \times p}) = p$ atau $\mathbf{M}_{p \times p}$ adalah matriks nonsingular. Untuk mempermudah desain, maka $\mathbf{M}_{p \times p}$ dapat dipilih sebagai matriks identitas dengan dimensi p .

Bukti: Dari Persamaan (3.45) maka dapat diperoleh Persamaan (3.70).

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times p} \\ \mathbf{0}_{p \times n} & \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times p} \\ \mathbf{M}_{p \times p} \end{bmatrix} [\mathbf{C}_{p \times n} \quad \mathbf{I}_p] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times p} \\ \mathbf{0}_{p \times n} & \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times p} \\ (\mathbf{MC})_{p \times n} & \mathbf{M}_{p \times p} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{S}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times p} \\ (\mathbf{MC})_{p \times n} & \mathbf{M}_{p \times p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Pada Persamaan (3.70) dapat dibuktikan bahwa agar $\tilde{\mathbf{S}}$ *invertible* maka $\mathbf{M}_{p \times p}$ adalah matriks nonsingular.

Bukti telah lengkap.

Persamaan (3.65) dapat diubah menjadi Persamaan (3.71). *Gain* $\tilde{\mathbf{L}}_p$ dapat ditentukan dengan cara menyelesaikan LMI (3.67) dan (3.68) sehingga diperoleh matriks $\tilde{\mathbf{P}}$ dan $\tilde{\mathbf{Y}}$. Kemudian matriks tersebut disubstitusi pada Persamaan (3.71) sehingga diperoleh *gain* $\tilde{\mathbf{L}}_p$.

$$\tilde{\mathbf{L}}_p = \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{P}}^{-1}\tilde{\mathbf{Y}} \quad (3.71)$$

Berdasarkan analisis di atas, prosedur desain estimator kesalahan sensor dapat diringkas sebagai berikut:

Prosedur Desain:

- 1) Susun *Augmented Descriptor System* (2.84)-(2.85) dengan parameter sistem seperti pada Persamaan (2.83).
- 2) Tentukan nilai γ dan α yang diinginkan.
- 3) Tentukan *gain* $\tilde{\mathbf{L}}_d$ seperti pada Persamaan (3.69). Kemudian tentukan matriks $\tilde{\mathbf{S}}$ dengan Persamaan (3.45).
- 4) Selesaikan LMI (3.67) dan (3.68) dengan syarat Pertidaksamaan (3.49) untuk memperoleh $\tilde{\mathbf{P}}$, $\tilde{\mathbf{Y}}$, dan θ .
- 5) Substitusi matriks $\tilde{\mathbf{P}}$ dan $\tilde{\mathbf{Y}}$ yang telah diperoleh pada langkah sebelumnya pada Persamaan (3.71) untuk memperoleh *gain* $\tilde{\mathbf{L}}_p$.
- 6) Susun Estimator (2.86)-(2.87) yang merupakan estimator kesalahan sensor.

3.3.6 Hasil Perancangan

Untuk perancangan estimator kesalahan sensor pada *winding machine*, diasumsikan semua *state* terukur, sehingga matriks \mathbf{C} adalah matriks identitas dengan dimensi n . Diasumsikan bahwa semua *state* mengalami kesalahan sensor. Dimensi sistem *winding machine* adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} n &= \text{dimensi state sistem} = 5 \\ m &= \text{dimensi vektor sinyal kontrol} = 3 \\ p &= \text{dimensi vektor sinyal keluaran} = 5 \\ k &= \text{dimensi vektor kesalahan sensor} = 5 \end{aligned}$$

= dimensi vektor gangguan = 1

Diasumsikan bahwa *state* yang mengalami *input disturbance* adalah *state* \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , dan \mathbf{x}_3 . Parameter *descriptor* untuk sistem *winding machine* dapat dilihat pada lampiran C. Pada Tugas Akhir ini, tingkat pelemahan yang diinginkan adalah sebesar 0,2 dan $\alpha = 10$. Gain $\tilde{\mathbf{L}}_d$ yang dipilih pada Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

$$\tilde{\mathbf{L}}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 5} \\ \mathbf{I}_5 \end{bmatrix}$$

Matriks $\tilde{\mathbf{S}}$ yang sesuai dapat dilihat pada Lampiran C. Langkah selanjutnya adalah menyelesaikan LMI (3.67) dan (3.68). Matriks $\tilde{\mathbf{P}}$ dan $\tilde{\mathbf{Y}}$ hasil perhitungan dapat dilihat pada Lampiran C. Berdasarkan matriks $\tilde{\mathbf{P}}$ dan $\tilde{\mathbf{Y}}$ yang telah diperoleh, dengan substitusi ke Persamaan (3.71) diperoleh gain $\tilde{\mathbf{L}}_p$ sebagai berikut:

$$\tilde{\mathbf{L}}_p = \begin{bmatrix} 7,33 & 5,81 & 308,02 & -417,69 & -12,69 \\ -5,23 & 7,45 & -371,67 & 6,23 & 397,65 \\ 67,60 & 7,00 & 5,51 & 112,93 & 44,92 \\ 36,18 & -3,01 & -112,72 & 5,18 & 147,94 \\ 14,17 & -16,64 & -44,68 & -148,07 & 5,59 \\ 13,86 & 11,78 & -145,80 & -75,79 & -30,71 \\ -11,78 & 13,86 & 15,88 & 6,42 & 33,56 \\ 145,65 & -15,88 & 13,64 & 241,04 & 96,02 \\ 75,79 & -6,45 & -241,32 & 13,78 & 315,92 \\ 30,82 & -33,53 & -96,00 & -315,70 & 14,19 \end{bmatrix}$$

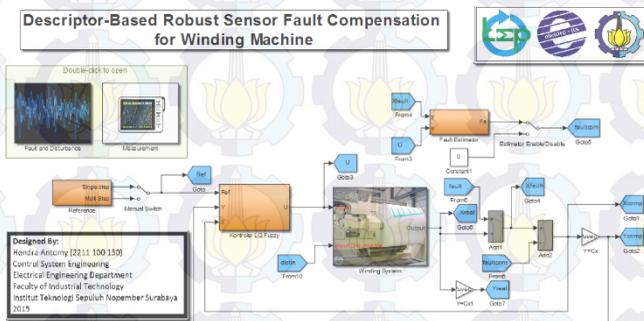
3.4 Diagram Simulink untuk Simulasi

Algoritma kontrol dan estimator yang telah didesain akan disimulasikan menggunakan Simulink MATLAB. Simulasi dilakukan untuk mengetahui kinerja algoritma hasil perancangan yang telah dilakukan. Diagram Simulink sistem ditunjukkan oleh Gambar 3.4. Pada diagram tersebut terdapat dua subsistem, yaitu subsistem pengukuran dan subsistem *fault generator*. Subsistem pengukuran berfungsi untuk mengukur dan mengambil data dari hasil simulasi. Subsistem *fault generator* berfungsi untuk membangkitkan kesalahan dan gangguan yang

terjadi pada sistem. Isi dari masing-masing blok dapat dilihat pada Lampiran B.

Pada Gambar 3.4, *plant* sistem *winding machine* direpresentasikan dengan persamaan nonlinear yang sesuai dengan (2.34) dalam blok *winding system*. Pada blok tersebut terdapat dua masukan, yaitu sinyal kontrol dan *input disturbance*. Sedangkan keluaran sistem adalah *state* sistem *winding machine*. Untuk merepresentasikan adanya kesalahan pada sensor, *state* sistem ditambahkan sinyal *fault generator*. Blok *fault estimator* merupakan blok yang berisi algoritma *fault estimator* yang telah dirancang pada Subbab sebelumnya. Keluaran blok ini adalah \hat{f}_s yang digunakan sebagai kompensasi kesalahan sensor.

Blok kontroler LQ *fuzzy* merupakan blok yang berisi algoritma kontroler *fuzzy* servo tipe 1 yang telah dirancang sebelumnya. Pada blok ini terdapat tiga masukan, yaitu sinyal referensi, keluaran sistem, dan *state* sistem. Sedangkan keluaran blok ini adalah sinyal kontrol. Di dalam blok kontroler LQ *fuzzy* terdapat blok *gain* \mathbf{K} , \mathbf{K}_i , dan blok fuzzifikasi. Di dalam blok fuzzifikasi terdapat blok *membership function* untuk setiap kondisi.



Gambar 3.4 Diagram Simulink untuk Simulasi



BAB IV PENGUJIAN DAN ANALISIS DATA

Pada Bab ini membahas tentang pengujian simulasi sistem kontrol nominal *winding machine* dan pengujian estimator kesalahan sensor yang telah dirancang pada Bab III. Kemudian hasil simulasi tersebut akan dianalisis. Subbab 4.1 membahas tentang pengujian sistem pada kondisi nominal. Pengujian ini digunakan untuk mengetahui hasil desain kontroler. Subbab 4.2 dan 4.3 membahas tentang pengujian estimator. Sistem akan diberikan kesalahan sensor yang sesuai dengan Tabel 2.2. Perbandingan antara kondisi sistem saat diberikan kompensasi kesalahan sensor dan tanpa kompensasi akan disajikan dalam bentuk grafik dan tabel untuk mempermudah analisis.

Nilai *eigen* sistem lup tertutup pada Sistem (2.49) dapat diketahui dengan Persamaan (4.1).

$$|\lambda_c \mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{B}}_c \tilde{\mathbf{K}})| = 0 \quad (4.1)$$

Sesuai dengan Persamaan (4.1), maka dapat dihitung nilai *eigen* sistem lup tertutup pada setiap aturan. Nilai *eigen* ini disajikan pada Tabel 4.1.

Nilai *eigen* sistem Estimator (3.47) dapat diketahui dengan Persamaan (4.2).

$$|\lambda_d \mathbf{I} - [\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{C}})]| = 0 \quad (4.2)$$

Sesuai dengan Persamaan (4.2), nilai *eigen sistem descriptor* ditunjukkan pada (4.3). Dapat dilihat bahwa seluruh nilai *eigen sistem descriptor* berada di sebelah kiri sumbu imajiner dan memiliki nilai yang lebih kecil dari $-\alpha$. Hal ini membuktikan bahwa syarat *pole region* yang diberikan sudah terpenuhi. Selain itu, sistem *descriptor* juga sudah memenuhi syarat kestabilan dengan letak seluruh *pole* ada di sebelah kiri sumbu imajiner.

$$\lambda_d = \{-13,87 \pm 428,67i; -13,87 \pm 113,35i; -13,87; \} \quad (4.3)$$

Pada Tabel 4.1, dapat dilihat bahwa sistem lup tertutup memiliki *pole* paling kecil di sekitar $-0,5$. Sedangkan pada estimator memiliki *pole* terkecil pada $-13,87$. Maka dapat disimpulkan bahwa estimator memiliki

pole sepuluh kali lebih besar daripada *pole* sistem lup tertutup. Estimator memiliki respon yang lebih cepat bila dibandingkan dengan kontrolernya. Hal ini menunjukkan bahwa spek desain estimator telah terpenuhi. Nilai *eigen* pada kontroler dan estimator semuanya berada di sebelah kiri sumbu imajiner. Maka dapat disimpulkan bahwa desain kontroler dan estimator telah memenuhi syarat kestabilan sistem.

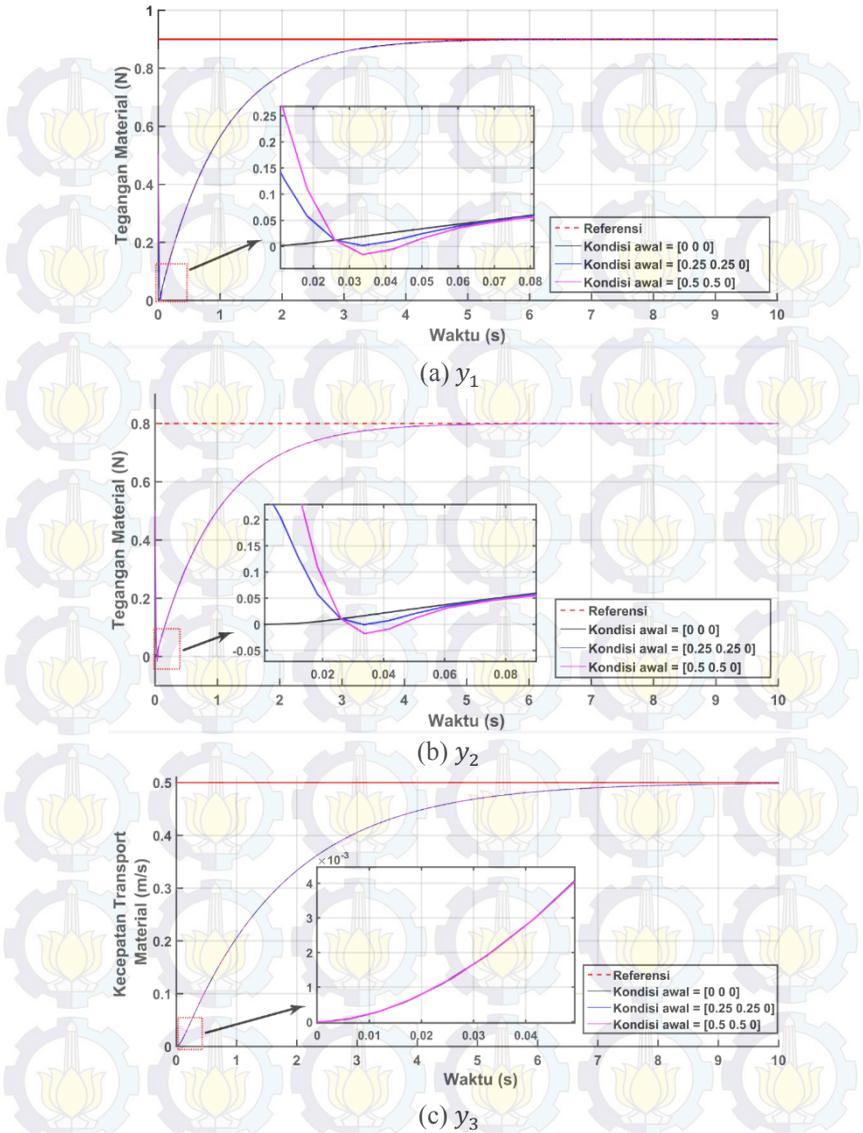
Tabel 4.1 Nilai *Eigen* pada Setiap Aturan *Plant*

Aturan Ke-	Nilai <i>Eigen</i> Sistem Lup Tertutup
1	$-89,81 \pm 104,54i; -76,82 \pm 86,01i; -14,45; -0,57; -0,99; -0,99$
2	$-89,82 \pm 104,54i; -76,83 \pm 86,00i; -14,57; -0,57; -0,99; -0,99$
3	$-89,83 \pm 104,54i; -76,87 \pm 85,97i; -14,93; -0,56; -0,99; -0,99$
4	$-89,86 \pm 104,51i; -76,93 \pm 85,92i; -15,50; -0,53; -0,99; -0,99$
5	$-89,90 \pm 104,48i; -77,00 \pm 85,84i; -16,27; -0,51; -0,99; -0,99$

4.1 Pengujian Keadaan Nominal

Pada keadaan nominal, diasumsikan sistem tidak mengalami gangguan pada sistem dan kesalahan sensor. Pengujian ini bertujuan untuk mengetahui performa sistem dengan kontroler hasil desain. Pengujian dilakukan dengan variasi kondisi awal dan perubahan *set point*.

Gambar 4.1 adalah respon keluaran sistem dengan variasi kondisi awal. Masukan yang diberikan pada sistem adalah *unit step* dengan *final value* pada $[0,9 \ 0,8 \ 0,5]$. Karakteristik respon keluaran sistem dapat dilihat pada Tabel 4.2. Dari hasil pengujian, respon keluaran sistem yang paling lambat adalah y_3 dengan $t_s(5\%)$ sebesar 5,37 detik. Sedangkan respon keluaran y_1 dan y_2 memiliki respon yang mirip, dengan $t_s(5\%)$ sebesar 2,95 detik. Nilai *undershoot* menunjukkan pengaruh kondisi awal terhadap keluaran sistem. Pada pengujian ini kondisi awal diberikan pada y_1 dan y_2 . *Undershoot* pada keluaran y_2 lebih besar bila dibandingkan dengan keluaran y_1 . Dapat dilihat bahwa semakin besar nilai kondisi awal yang diberikan, maka respon keluaran sistem akan memiliki *undershoot* yang semakin besar.

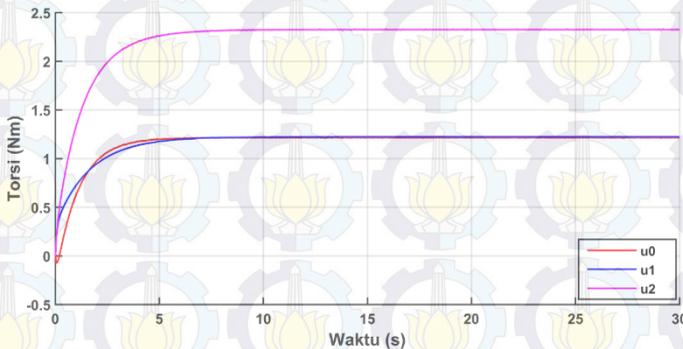


Gambar 4.1 Respon Keluaran Sistem dengan Variasi Kondisi Awal pada Kondisi Nominal

Tabel 4.2 Karakteristik Respon Keluaran Sistem

Keluaran	Kondisi Awal	IAE	$t_s(5\%)$	<i>Undershoot</i>
y_1	[0 0 0]	0,90	2,95	0
	[0,2 0,2 0]	0,89		0,1936
	[0,4 0,4 0]	0,89		0,4079
y_2	[0 0 0]	0,80	2,95	0
	[0,2 0,2 0]	0,79		0,1630
	[0,4 0,4 0]	0,79		0,4106
y_3	[0 0 0]	0,91	5,37	0
	[0,2 0,2 0]	0,91		0
	[0,4 0,4 0]	0,91		0

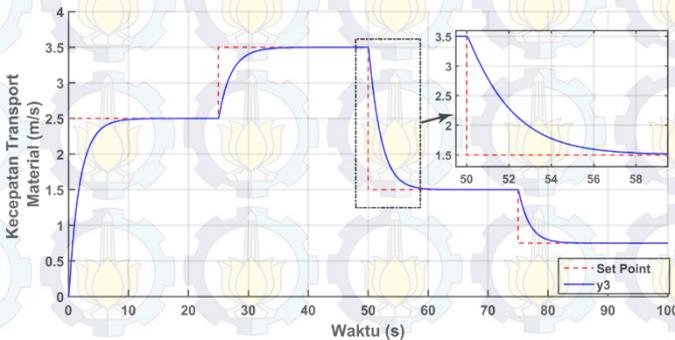
Gambar 4.2 merupakan respon sinyal kontrol pada kondisi awal [0 0 0] dan nilai *set point* yang diberikan adalah sebesar [0,9 0,8 0,5]. Sinyal kontrol pada *rewinding roller* (u_2) memiliki kondisi *steady state* paling tinggi yaitu disekitar 2,3 Nm. Untuk sinyal kontrol pada *unwinding* (u_0) dan *master speed roller* (u_1) memiliki kondisi *steady state* yang hampir sama, yaitu disekitar 1,2 Nm.

**Gambar 4.2** Respon Sinyal Kontrol

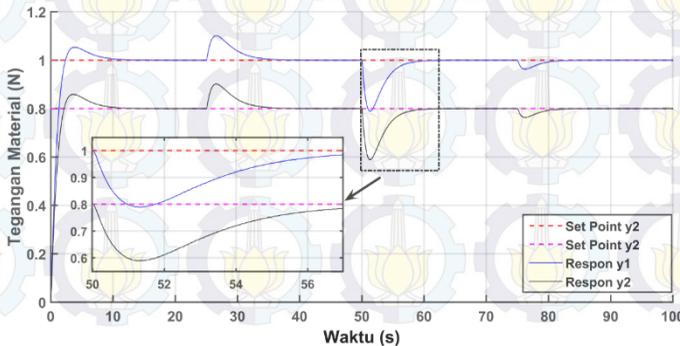
Pengujian selanjutnya digunakan untuk menguji respon keluaran sistem pada perubahan *set point*. Perubahan *set point* diberikan pada y_3 . Gambar 4.3 merupakan respon keluaran y_3 dengan perubahan *set point*. Dapat dilihat bahwa, keluaran y_3 dapat mengikuti perubahannilai *set point* yang diberikan. Gambar 4.4 merupakan respon keluaran y_1 dan y_2

saat y_3 mengalami perubahan *set point*. Dapat dilihat bahwa keluaran y_1 dan y_2 mengalami *undershoot* sesaat sesudah perubahan *set point* diberikan pada y_3 kemudian kembali pada nilai *set point* yang diberikan. *Undershoot* yang paling besar terjadi saat perubahan *set point* dari 3,5 m/s menjadi 1,5 m/s. Dapat disimpulkan bahwa semakin besar perubahan *set point* pada y_3 maka y_1 dan y_2 mengalami *undershoot* yang semakin besar.

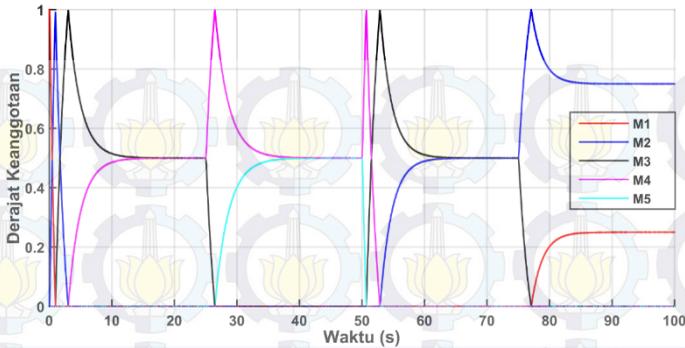
Pengujian terhadap perubahan *set point* y_3 juga dilakukan untuk menguji apakah aturan *fuzzy* yang telah didesain dapat bekerja pada semua titik kerja. Gambar 4.5 adalah grafik hasil pembobotan pada setiap aturan berdasarkan perubahan nilai *set point* pada y_3 . Dapat dilihat bahwa aturan *fuzzy* dapat bekerja pada titik kerja yang ditentukan. Jumlah bobot semua aturan *fuzzy* pada setiap kondisi adalah 1.



Gambar 4.3 Respon y_3 dengan Perubahan *Set Point*



Gambar 4.4 Respon y_1 dan y_2 Saat Terjadi Perubahan *Set Point* pada y_3



Gambar 4.5 Hasil Pembobotan pada Setiap Aturan *Fuzzy*

4.2 Pengujian dengan Kesalahan Sensor

Pada Subbab ini membahas tentang pengujian estimator saat kesalahan sensor terjadi. Bentuk kesalahan sensor yang diuji adalah *bias fault*, *loss of sensitivity* dan *loss of measurement*. Masing-masing kesalahan sensor akan dimodelkan ke dalam bentuk persamaan matematika sebagai kesalahan aditif. Kemudian kesalahan ini ditambahkan pada keluaran sistem sebagai representasi kesalahan sensor. Hasil estimasi kesalahan sensor digunakan untuk mengkompensasi kesalahan sensor yang terjadi.

4.2.1 Bias Fault

Sesuai dengan Persamaan (2.78) dan Tabel 2.2 *Bias fault* dapat dimodelkan sebagai Persamaan (4.4).

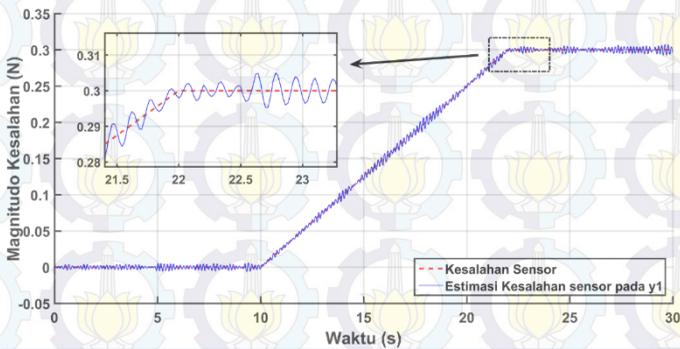
$$\mathbf{f}_s = (\alpha - \mathbf{I})\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\beta}; \quad \alpha = \mathbf{I}_5; \quad \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{f}_{bias} = \boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_5]^T \quad (4.4)$$

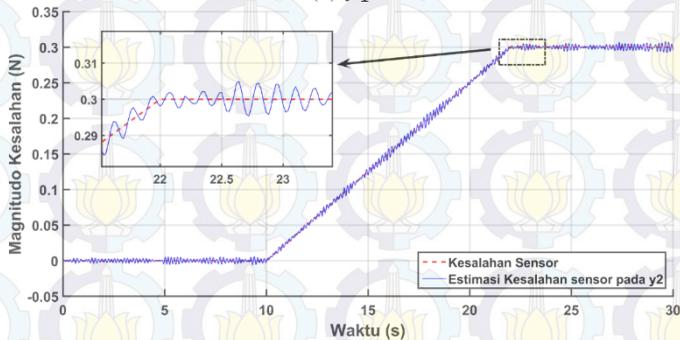
Parameter $\boldsymbol{\beta}$ pada Persamaan (4.4) menunjukkan besarnya deviasi pengukuran. Pada pengujian ini, diasumsikan bahwa seluruh keluaran sistem (y_1, y_2, y_3) terdapat kesalahan sensor dan besarnya deviasi pengukuran pada masing-masing keluaran adalah sama. Dengan demikian diperoleh $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ dan $\beta_4 = \beta_5 = 0$. Deviasi yang terjadi muncul secara *incipient*. Kemudian deviasi saturasi pada nilai $\boldsymbol{\beta}$ yang telah ditentukan. Kesalahan ini diasumsikan muncul pada $t = 10$. Pada pengujian ini nilai $\boldsymbol{\beta}$ adalah sebagai berikut:

$$= [0,3 \quad 0,3 \quad 0,3 \quad 0 \quad 0]^T$$

Gangguan masukan direpresentasikan sebagai fungsi random terdistribusi normal dengan *mean* sebesar 0 dan *variance* sebesar 0,01. Dengan demikian amplitudo gangguan paling besar adalah 0,3 atau sekitar 30% dari sinyal referensi yang diberikan. Agar dapat dibandingkan *state* dengan gangguan dan *state* tanpa gangguan masukan, diasumsikan bahwa gangguan masukan hanya terjadi pada *state* x_1 dan x_2 . Gangguan diberikan untuk menguji apakah estimator mampu menghasilkan estimasi kesalahan sensor yang baik saat terjadi gangguan pada sistem.



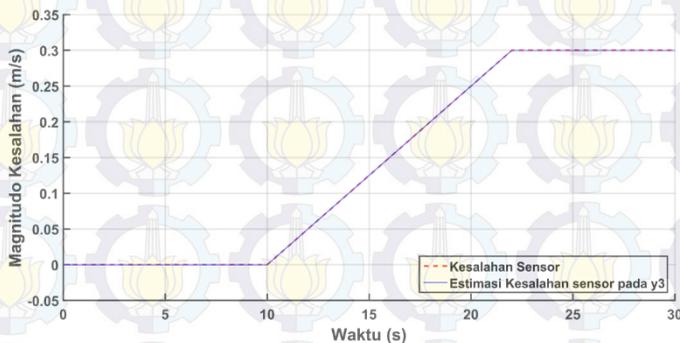
(a) y_1



(a) y_2

Gambar 4.6 Perbandingan Hasil Estimasi \hat{f}_s dengan Kesalahan Sensor pada Pengujian *Bias Fault*

Gambar 4.6 merupakan hasil estimasi *state* kesalahan sensor (\hat{f}_s) pada y_1 dan y_2 . Sedangkan Gambar 4.7 merupakan hasil estimasi \hat{f}_s pada y_3 . Dapat dilihat bahwa estimator mampu menghasilkan estimasi kesalahan sensor yang akurat. Efek gangguan pada masukan juga mampu dilemahkan di bawah tingkat pelemahan yang ditentukan. Hal ini ditunjukkan oleh Gambar 4.8. Untuk mengetahui tingkat keakuratan estimasi, maka dilakukan uji performa *Integral Absolute Error* (IAE). Hasil uji performa ini disajikan pada Tabel 4.3.

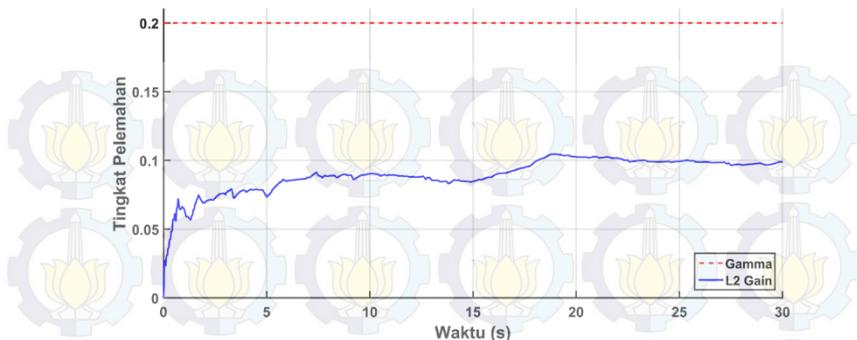


Gambar 4.7 Perbandingan Hasil Estimasi \hat{f}_s Terhadap Kesalahan Sensor pada y_3 dengan Pengujian *Bias Fault*

Berdasarkan Tabel 4.3, performa estimator sudah sangat baik dalam mengestimasi kesalahan sensor. Bila dibandingkan dengan y_1 dan y_2 , estimasi kesalahan sensor pada y_3 memiliki performa yang lebih baik. Hal ini dikarenakan pada y_3 tidak dipengaruhi oleh gangguan masukan. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa hasil estimasi *state* tanpa gangguan masukan lebih baik dibandingkan *state* dengan gangguan masukan.

Tabel 4.3 Performa IAE Sistem pada Pengujian *Bias Fault*

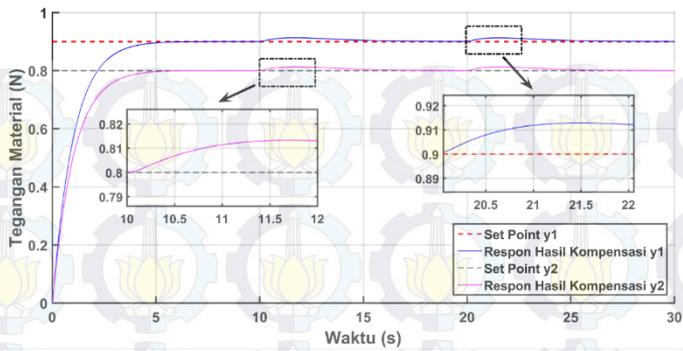
Keluaran	IAE <i>Error</i> Estimasi	IAE pada Keluaran Sistem		IAE pada Hasil Kompensasi
		Dengan Kompensasi	Tanpa Kompensasi	
y_1	0,0706	1,0330	7,2590	1,0050
y_2	0,0703	0,9313	3,7880	0,9020
y_3	0,0003	2,4010	6,3290	2,4010



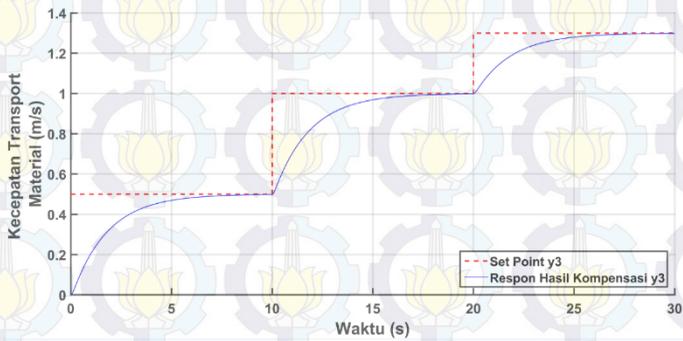
Gambar 4.8 L_2 -gain Performa Estimator pada Pengujian *Bias Fault*

Gambar 4.9 merupakan respon keluaran sistem yang telah dikompensasi. Sinyal ini adalah sinyal yang diumpan balik menuju kontroler. Dapat dilihat bahwa sinyal yang telah dikompensasi sudah bebas terhadap kesalahan sensor dan gangguan masukan. Sinyal keluaran yang mengalami *bias fault* dapat kembali pada nilai *set point* yang telah ditentukan. Hal ini dapat terjadi karena hasil estimasi kesalahan sensor yang sudah baik. Dengan demikian, kompensasi kesalahan sensor yang diberikan mampu menghilangkan efek kesalahan sensor yang terjadi. Gambar 4.10 merupakan respon sistem dengan kompensasi dan tanpa kompensasi. Dengan kompensasi yang diberikan, performa sistem saat terjadi kesalahan sensor dapat terjaga. Jika dilihat dari segi performa IAE Tabel 4.3, maka keluaran sistem dengan kompensasi jauh lebih baik daripada tanpa kompensasi. Hal ini membuktikan bahwa kompensasi yang diberikan dapat menjaga stabilitas dan performa sistem saat terjadi kesalahan sensor.

Berdasarkan respon sistem tanpa kompensasi, kesalahan bias pada pengujian ini mengakibatkan pergeseran respon sistem dari nilai *set point* yang diberikan. Kesalahan bias tidak mengakibatkan sistem menjadi tidak stabil. Namun dengan kesalahan ini performa sistem dapat menurun. Besarnya penurunan performa sistem bergantung pada besarnya kesalahan bias yang terjadi pada sensor. Semakin besar magnitudo kesalahan bias yang terjadi, maka semakin besar penurunan performa yang terjadi, dan sebaliknya. Hal ini menunjukkan bahwa representasi kesalahan bias yang diberikan sudah sesuai dengan kategori kesalahan sensor pada Tabel 2.2.



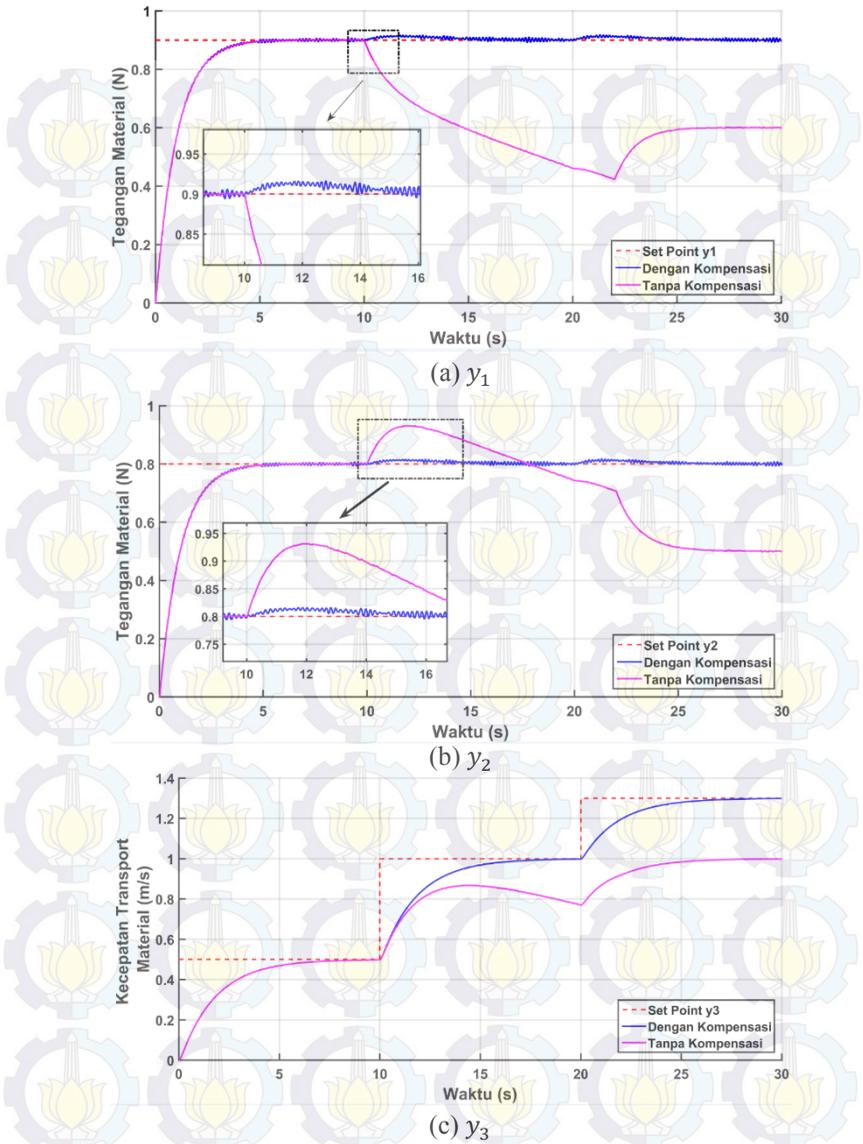
(a) y_1 dan y_2



(b) y_3

Gambar 4.9 Respon Keluaran Sistem Setelah Kompensasi yang Diberikan pada Pengujian *Bias Fault*

Pada pengujian ini membuktikan bahwa performa dan stabilitas sistem dapat terjaga saat terjadi *bias fault* dengan kompensasi kesalahan sensor yang diberikan. Efek gangguan masukan pada estimator dapat dilemahkan hingga dibawah level pelemahan yang diinginkan. Hasil estimasi kesalahan sensor memiliki performa IAE yang baik. Dengan kompensasi hasil estimasi kesalahan sensor, sinyal yang diumpun balik pada kontroler telah bebas terhadap kesalahan pada sensor. Keluaran sistem dengan kompensasi menunjukkan peningkatan performa dan stabilitas sistem bila dibandingkan tanpa kompensasi.



Gambar 4.10 Perbandingan Respon Sistem Dengan Kompensasi dan Tanpa Kompensasi pada Pengujian *Bias Fault*

4.2.2 Loss of Sensitivity

Pada Subbab ini membahas tentang pengujian pengaruh penurunan sensitivitas sensor terhadap performa sistem dengan dan tanpa kompensasi. Berbeda dengan *bias fault* yang merupakan kesalahan aditif, penurunan sensitivitas sensor merupakan kesalahan multiplikatif. Namun kesalahan multiplikatif ini dapat dimodelkan sebagai kesalahan aditif. Sehingga pada pengujian ini, penurunan sensitivitas sensor dimodelkan sebagai kesalahan aditif.

Sesuai dengan Persamaan (2.78) penurunan sensitivitas sensor dapat ditulis sebagai Persamaan (4.5).

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s &= (\alpha - \mathbf{I})\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\beta}; \quad \mathbf{0} < \alpha < \mathbf{1}; \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{sensitivity} &= \mathbf{Z}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

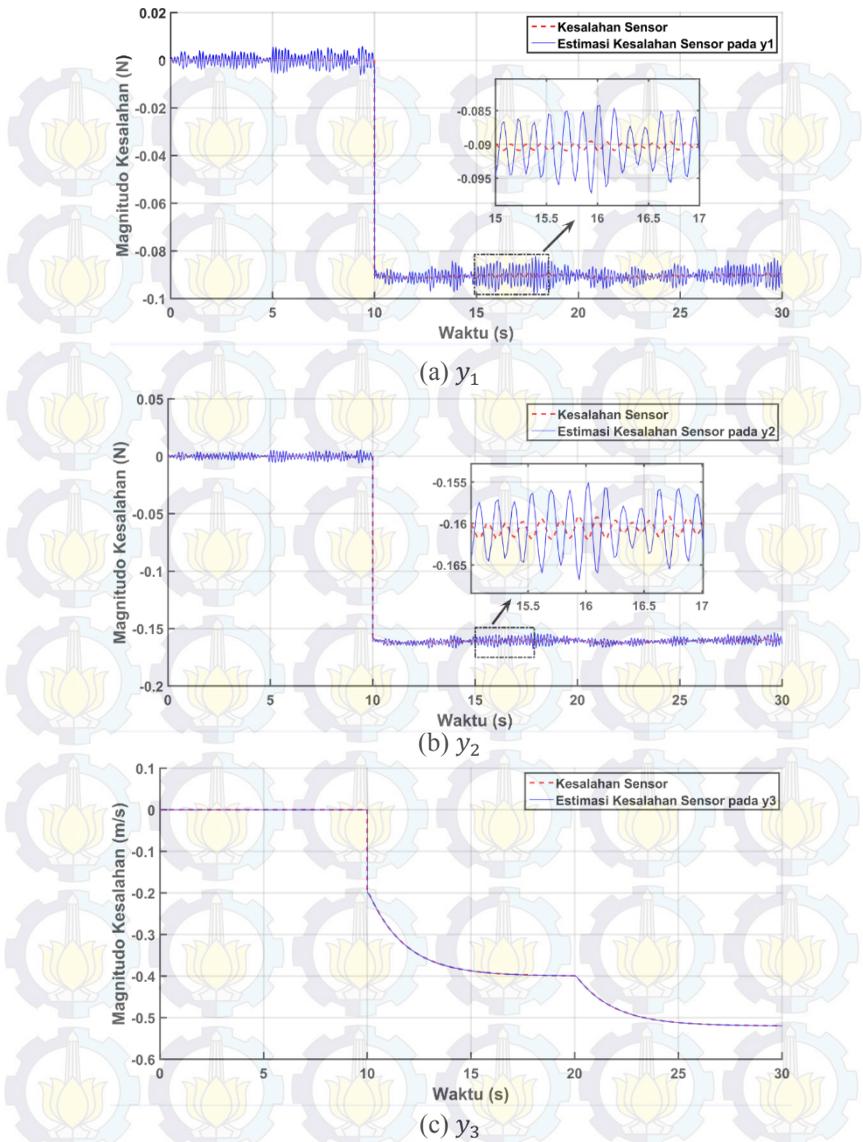
dengan

$$\mathbf{Z} = \alpha - \mathbf{I} = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_5)$$

Pada Persamaan (4.5) \mathbf{Z} merupakan tingkat penurunan sensitivitas sensor dan z_1 adalah penurunan sensitivitas sensor pada y_1 , z_2 adalah penurunan sensitivitas sensor pada y_2 dan seterusnya. Pada pengujian ini, diasumsikan setiap keluaran mengalami penurunan sensitivitas yang berbeda-beda. Hal ini bertujuan untuk mengetahui apakah estimator dapat mengestimasi kesalahan multiplikatif dengan tingkat penurunan yang berbeda. Diasumsikan kesalahan sensor terjadi pada saat $t = 10$ detik. Pada pengujian ini tingkat penurunan sensitivitas adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Berdasarkan Matriks (4.6) penurunan sensitivitas sensor terjadi pada y_1 , y_2 dan y_3 . Penurunan sensitivitas paling besar terjadi pada y_3 . Seperti pada pengujian sebelumnya, gangguan masukan direpresentasikan sebagai fungsi random terdistribusi normal dengan *mean* sebesar 0 dan *variance* sebesar 0,01.



Gambar 4.11 Perbandingan Hasil Estimasi \hat{f}_s dengan Kesalahan Sensor pada Pengujian *Loss of Sensitivity*

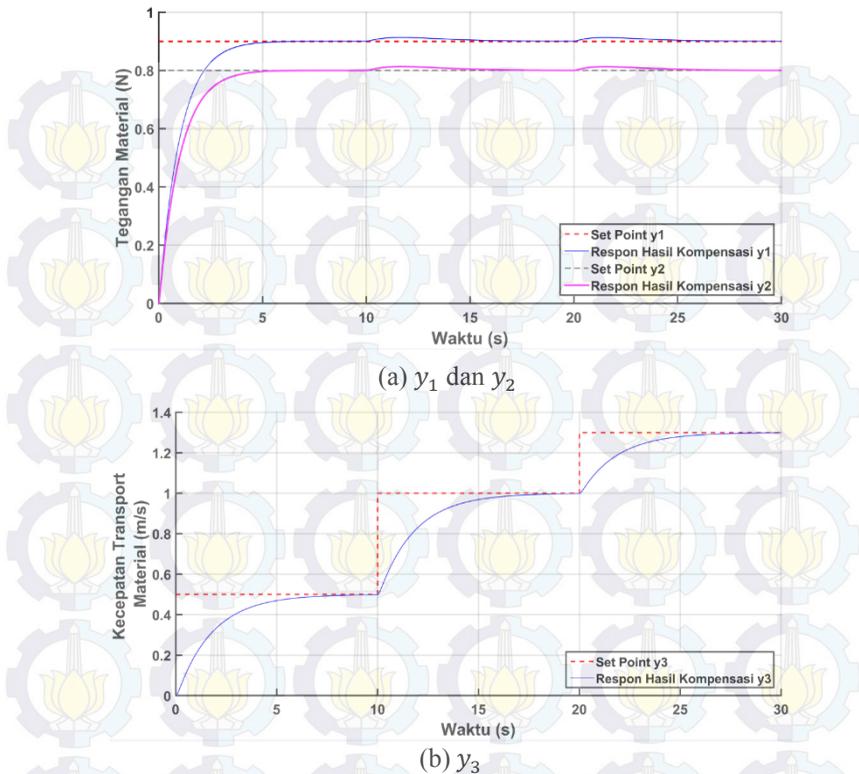
Tabel 4.4 Performa IAE Sistem pada Pengujian *Loss of Sensitivity*

Keluaran	IAE <i>Error</i> Estimasi	IAE pada Keluaran Sistem		IAE pada Hasil Kompensasi
		Dengan Kompensasi	Tanpa Kompensasi	
y_1	0,0706	1,0330	10,2500	1,0050
y_2	0,0726	0,9313	7,0080	0,9036
y_3	0,0003	2,4011	12,9000	2,4010

Gambar 4.11 menunjukkan perbandingan antara hasil estimasi *state* $\hat{\mathbf{f}}_s$ dengan kesalahan sensor. Pada y_1 dan y_2 terdapat sedikit *error* estimasi. Hasil estimasi paling baik terdapat pada y_3 . Hal ini dikarenakan pada y_3 tidak terdapat gangguan masukan. Performa estimator diuji dengan performa IAE seperti pada pengujian sebelumnya. Tabel 4.4 merupakan hasil pengujian IAE pada beberapa kondisi pada kesalahan penurunan sensitivitas sensor.

Bila dibandingkan dengan pengujian pada *bias fault*, IAE hasil estimasi kesalahan sensor hampir sama. Begitu juga dengan IAE pada keluaran sistem yang telah dikompensasi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa estimator mampu mengestimasi kesalahan dalam bentuk multiplikatif dengan baik. Performa IAE juga menunjukkan bahwa hasil estimasi pada kesalahan multiplikatif sama baiknya dengan hasil estimasi pada kesalahan aditif.

Gambar 4.12 merupakan keluaran sistem yang telah dikompensasi. Dapat dilihat bahwa kesalahan sensor dapat dikompensasi dengan baik. Sesuai dengan Tabel 4.4 keluaran yang sudah dikompensasi memiliki IAE yang lebih baik bila dibandingkan keluaran sistem dengan kompensasi. Hal ini membuktikan bahwa efek gangguan masukan pada sistem dapat dilemahkan sehingga hasil estimasi $\hat{\mathbf{f}}_s$ kokoh terhadap gangguan tersebut. Dengan demikian L_2 *gain* pada estimator berada dibawah tingkat pelemahan yang diinginkan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.13. Bila dibandingkan dengan pengujian pada *bias fault*, nilai L_2 *gain* pada pengujian ini memiliki nilai yang hampir sama. Hal ini dikarenakan besarnya gangguan masukan pada kedua pengujian adalah sama. Oleh karena itu, pada pengujian selanjutnya nilai L_2 *gain* dan keluaran hasil kompensasi tidak ditampilkan. Hal ini membuktikan bahwa estimator kokoh terhadap gangguan yang diberikan pada sistem sehingga estimator menghasilkan estimasi kesalahan sensor yang akurat.

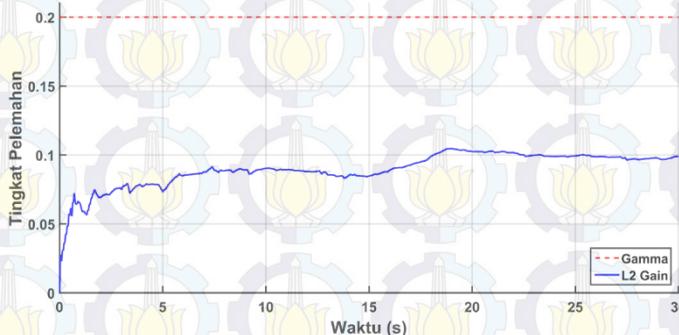


Gambar 4.12 Keluaran Sistem dengan Kompensasi yang Diberikan pada Pengujian *Loss of Sensitivity*

Pada keluaran sistem yang sudah dikompensasi, terdapat *overshoot* saat terjadi perubahan *set point* pada y_3 . Setelah terjadi *overshoot*, respon sistem kembali pada *set point* yang ditentukan. Seperti pada pengujian dalam keadaan nominal, semakin besar perubahan *set point*, maka *overshoot* yang terjadi semakin besar.

Gambar 4.14 menunjukkan perbandingan respon sistem dengan dan tanpa kompensasi kesalahan sensor. Dapat dilihat bahwa performa sistem tanpa kompensasi mengalami degradasi sebagai akibat adanya penurunan sensitivitas sensor. Kesalahan sensor akibat penurunan sensitivitas memberikan penurunan performa yang lebih besar dibandingkan dengan *bias fault*. Hal ini dibuktikan pada perbandingan

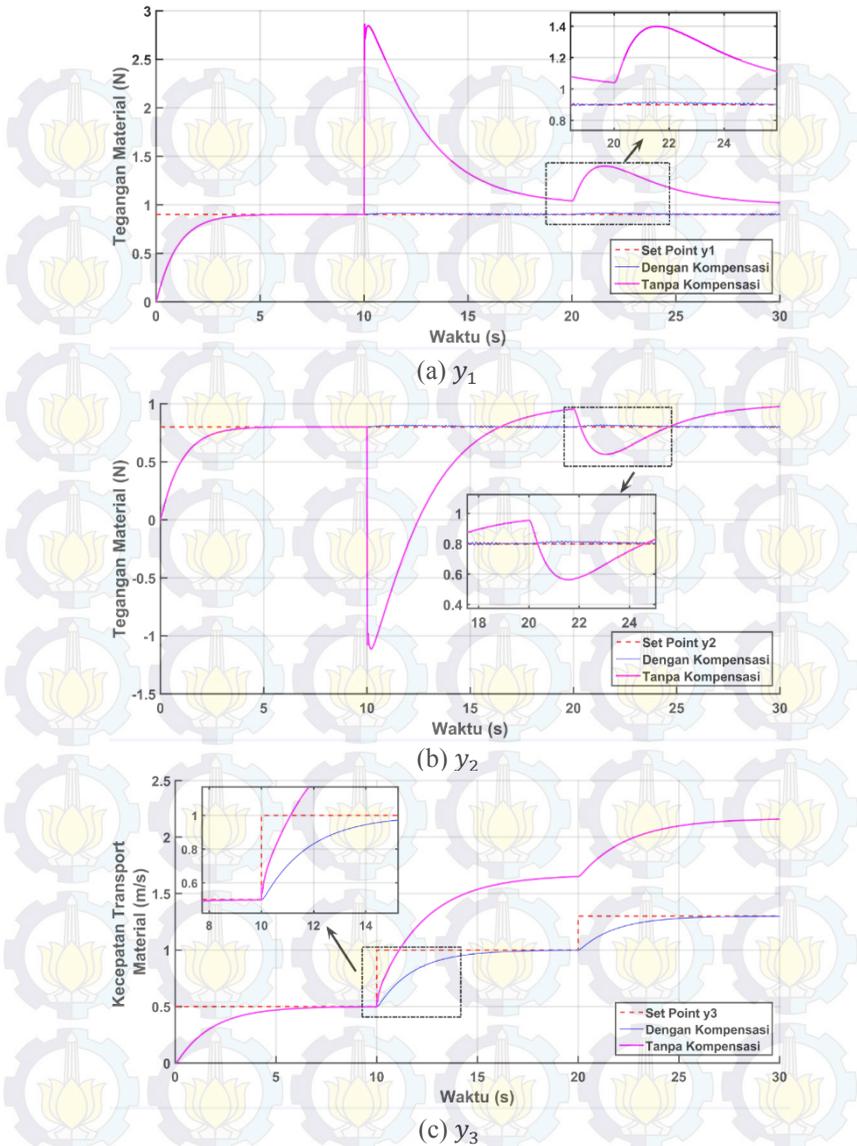
IAE sistem tanpa kompensasi pada kedua pengujian. Sistem tanpa kompensasi pada pengujian *bias fault* memiliki IAE yang lebih kecil dibandingkan pada pengujian penurunan sensitivitas sensor. Meskipun terjadi penurunan performa, kesalahan sensor tidak menyebabkan sistem kehilangan stabilitasnya. Sistem masih mampu menjaga stabilitas sistem saat terjadi kesalahan sensor.



Gambar 4.13 L_2 -gain Performa Estimator pada Pengujian *Loss of Sensitivity*

Respon keluaran sistem dengan kompensasi memiliki performa yang lebih baik dibandingkan tanpa kompensasi. Respon keluaran dengan kompensasi memiliki IAE yang jauh lebih baik daripada tanpa kompensasi seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.4. Respon keluaran sistem dengan kompensasi mampu mengikuti *set point* yang diberikan. Seperti pada pengujian sebelumnya, efek gangguan masukan masih mempengaruhi respon sistem walaupun sudah dilakukan kompensasi. Semakin besar nilai kesalahan, maka keluaran sistem akan memiliki magnitudo osilasi yang semakin besar.

Pada pengujian ini membuktikan bahwa performa dan stabilitas sistem dapat terjaga saat terjadi penurunan sensitivitas sensor dengan kompensasi kesalahan sensor. Efek gangguan masukan pada estimator dapat dilemahkan hingga dibawah level pelemahan yang diinginkan. Hasil estimasi kesalahan sensor memiliki performa IAE yang baik. Dengan kompensasi dengan hasil estimasi kesalahan sensor, sinyal yang diumpun balik pada kontroler telah bebas terhadap kesalahan pada sensor. Keluaran sistem dengan kompensasi menunjukkan peningkatan performa dan stabilitas sistem bila dibandingkan tanpa kompensasi.



Gambar 4.14 Perbandingan Respon Sistem Dengan Kompensasi dan Tanpa Kompensasi pada Pengujian *Loss of Sensitivity*

4.2.3 Loss of Measurement

Pada pengujian ini kesalahan sensor yang terjadi adalah *loss of measurement*. Kesalahan ini terjadi sebagai akibat sensor tidak dapat bekerja sehingga hasil bacaan sensor selalu bernilai nol. Sesuai dengan Persamaan (2.78) maka kesalahan *loss of measurement* dapat dimodelkan ke dalam persamaan matematika seperti pada Persamaan (4.7).

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s &= (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{I})\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\beta}; \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\text{measurement}} &= -\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

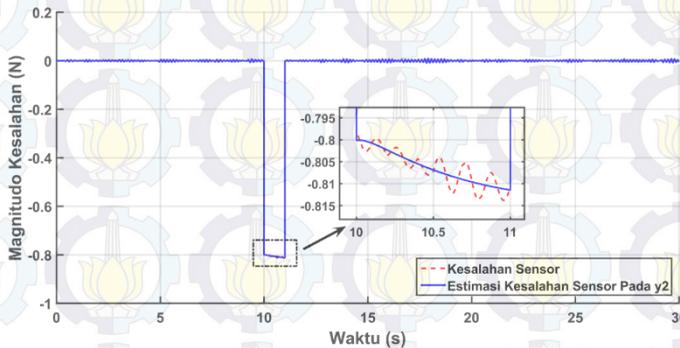
Apabila keluaran sistem ditambah dengan kesalahan sensor seperti pada Persamaan (4.7), maka keluaran sensor adalah nol. Kesalahan sensor ini terjadi jika sensor sama sekali tidak bekerja. Jika kesalahan ini terjadi, maka umpan balik menuju sensor adalah nol, sehingga kontroler akan memberikan sinyal kontrol yang besar secara terus menerus.

Pada pengujian ini, diasumsikan bahwa kesalahan sensor terjadi pada y_2 saja. Kesalahan terjadi pada $t = 10$ detik hingga $t = 11$ detik. Pemberian batasan waktu pada kesalahan ini dikarenakan apabila kesalahan sensor terjadi secara terus menerus, maka sistem menjadi tidak stabil. Sehingga respon sistem tanpa kompensasi tidak bisa dianalisis. Seperti pada pengujian sebelumnya, gangguan masukan direpresentasikan sebagai fungsi random dengan distribusi normal yang memiliki *mean* sebesar 0 dan *variance* sebesar 0,01.

Gambar 4.15 menunjukkan perbandingan kesalahan sensor yang terjadi dengan hasil estimasi kesalahan sensor pada keluaran y_2 . Kesalahan sensor yang terjadi adalah sebesar $-x_2(t)$ untuk $t = 10$ detik hingga $t = 11$ detik. Dapat dilihat bahwa estimasi kesalahan sensor memiliki hasil yang baik. Hal ini ditunjukkan dengan performa IAE pada Tabel 4.5. IAE pada *error* estimasi kesalahan sensor membandingkan antara kesalahan sensor yang terjadi dengan estimasi kesalahan sensor. Dapat dilihat bahwa IAE *error* estimasi pada keluaran y_2 sudah sangat baik, dengan nilai 0,0704. IAE *error* estimasi pada keluaran y_1 dan y_3 juga sudah baik. IAE *error* estimasi pada y_3 memiliki nilai paling kecil bila dibandingkan dengan y_1 dan y_2 . Hal ini dikarenakan gangguan pada sistem diberikan pada keluaran y_1 dan y_2 .

Gambar 4.16 merupakan perbandingan antara respon y_{2f} dan y_{2c} . Sinyal y_{2f} adalah keluaran y_2 dengan penambahan sinyal kesalahan sensor. Sedangkan y_{2c} adalah sinyal y_{2f} dengan penambahan

kompensasi. Sinyal y_{2c} adalah sinyal yang diumpan balik menuju kontroler. Dapat dilihat bahwa kompensasi yang diberikan mampu menghilangkan kesalahan sensor yang terjadi. Hal ini dapat dilihat dari IAE hasil kompensasi yang menunjukkan performa yang baik. Nilai IAE tersebut tidak jauh berbeda pada pengujian sebelumnya. Dapat disimpulkan bahwa kompensasi kesalahan sensor pada pengujian ini mampu mengkompensasi kesalahan *loss of measurement* yang terjadi pada sensor dengan baik.



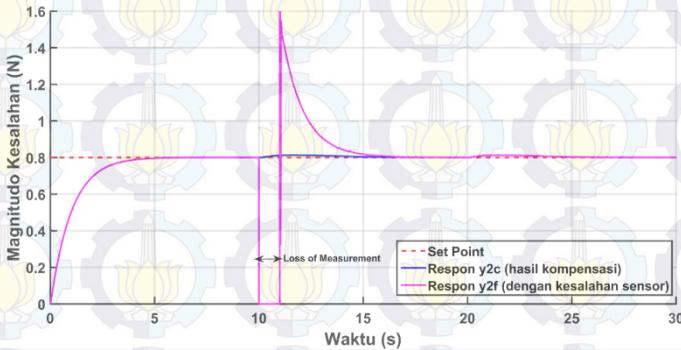
Gambar 4.15 Perbandingan Hasil Estimasi \hat{f}_s dengan Kesalahan Sensor *Loss of Measurement* pada y_2

Tabel 4.5 Performa IAE Sistem pada Pengujian *Loss of Measurement*

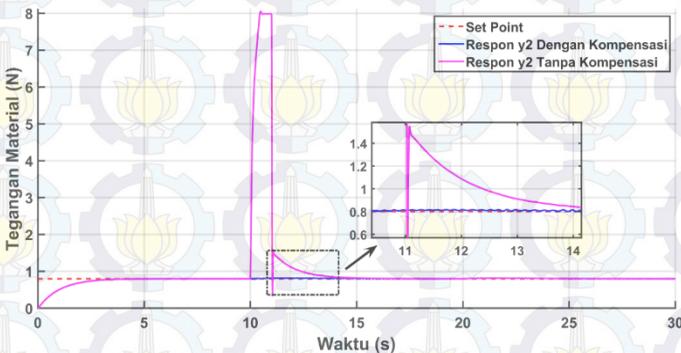
Keluaran	IAE <i>Error</i> Estimasi	IAE pada Keluaran Sistem		IAE pada Hasil Kompensasi
		Dengan Kompensasi	Tanpa Kompensasi	
y_1	0,0706	1,0330	1,052	1,0050
y_2	0,0704	0,9313	7,978	0,9036
y_3	0,0003	2,4010	2,401	2,4010

Gambar 4.17 menunjukkan respon keluaran y_2 dengan dan tanpa kompensasi kesalahan sensor. Dapat dilihat bahwa kesalahan yang terjadi mengakibatkan keluaran sistem menjadi sangat besar sebagai akibat kontroler memberikan sinyal kontrol yang salah. Respon keluaran sistem dengan kompensasi menunjukkan performa yang baik dibandingkan tanpa kompensasi kesalahan sensor. Nilai IAE keluaran sistem dengan kompensasi hampir sama dengan IAE pada hasil kompensasi. Tampak

bahwa pada keluaran sistem dengan kompensasi masih terdapat efek gangguan masukan. Sedangkan efek kesalahan sensor dapat dikompensasi dengan baik oleh estimator.



Gambar 4.16 Respon Keluaran Sistem dengan Kompensasi Kesalahan Sensor pada y_2



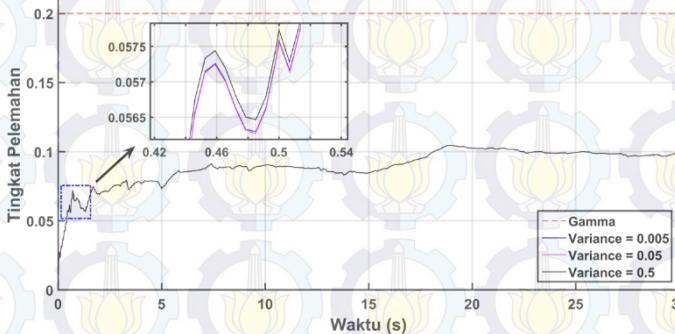
Gambar 4.17 Perbandingan Respon y_2 Dengan Kompensasi dan Tanpa Kompensasi pada Pengujian *Loss of Measurement*

Pada pengujian ini membuktikan bahwa performa dan stabilitas sistem dapat terjaga saat terjadi kesalahan *loss of measurement* pada sensor dengan kompensasi kesalahan sensor. Efek gangguan masukan pada estimator dapat dilemahkan hingga dibawah level pelemahan yang diinginkan. Hasil estimasi kesalahan sensor memiliki performa IAE yang

baik. Dengan kompensasi dengan hasil estimasi kesalahan sensor, sinyal yang diumpun balik pada kontroler telah bebas terhadap kesalahan pada sensor. Keluaran sistem dengan kompensasi kesalahan sensor menunjukkan peningkatan performa dan stabilitas sistem bila dibandingkan tanpa kompensasi.

4.3 Pengujian terhadap Gangguan Masukan

Pada Subbab ini estimator akan diuji terhadap variasi nilai gangguan pada masukan. Pengujian ini bertujuan untuk membuktikan apakah desain estimator yang telah dilakukan pada Bab III telah sesuai dengan performa H_{∞} . Representasi gangguan masukan pada pengujian ini adalah fungsi random terdistribusi normal dengan *mean* sama dengan nol nilai *variance* yang berbeda-beda. Nilai *variance* menunjukkan kekuatan gangguan masukan yang diberikan. Semakin besar nilai *variance*, maka kekuatan gangguan masukan yang diberikan akan semakin besar. Nilai *variance* yang digunakan untuk pengujian ini adalah sebesar 0,005; 0,05; dan 0,5. Sedangkan *state* yang diberikan gangguan masukan adalah x_1 dan x_2 . Untuk menguji pengaruh gangguan masukan terhadap estimasi kesalahan sensor, maka pada pengujian ini diberikan kesalahan sensor berupa *bias fault* yang sama pada pengujian *bias fault*.

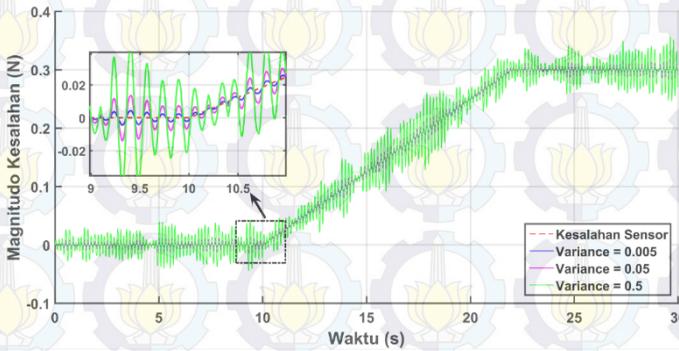


Gambar 4.18 L_2 -gain pada Beberapa Nilai Variance Gangguan pada x_1 dan x_2

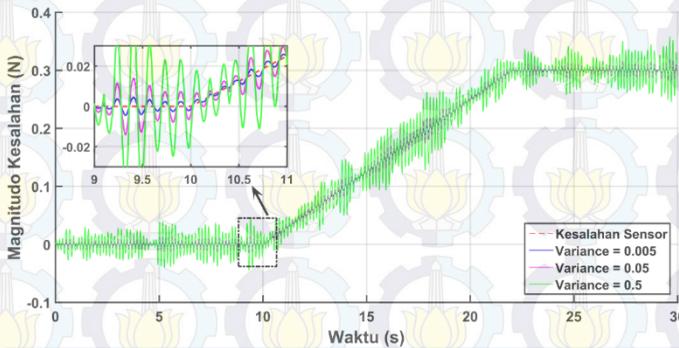
Gambar 4.18 menunjukkan perbandingan L_2 Gain pada nilai *variance* tertentu. Nilai L_2 Gain cenderung tetap pada masing-masing nilai *variance*. Perbedaan nilai L_2 Gain hanya terdapat pada saat transien, dengan L_2 Gain paling besar terdapat pada pengujian dengan *variance*

0,5. Semakin besar nilai *variance* yang diberikan, maka L_2 Gain pada kondisi transien akan semakin besar. Namun magnitudo L_2 Gain paling besar pada masing-masing pengujian kurang dari tingkat pelemahan yang diinginkan. Hal ini telah sesuai dengan performa yang diberikan pada (2.93).

Gambar 4.19 menunjukkan hasil estimasi kesalahan sensor pada keluaran y_1 dan y_2 dengan nilai *variance* yang berbeda-beda. Nilai IAE pada masing-masing kondisi disajikan pada Tabel 4.6. Hasil pengujian menunjukkan semakin besar nilai gangguan pada masukan, maka *error* estimasi kesalahan sensor akan semakin besar. Hal ini mengakibatkan nilai IAE yang juga semakin besar.



(a) y_1

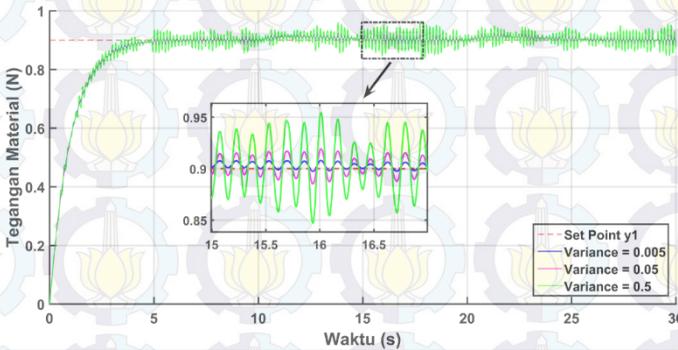


(b) y_2

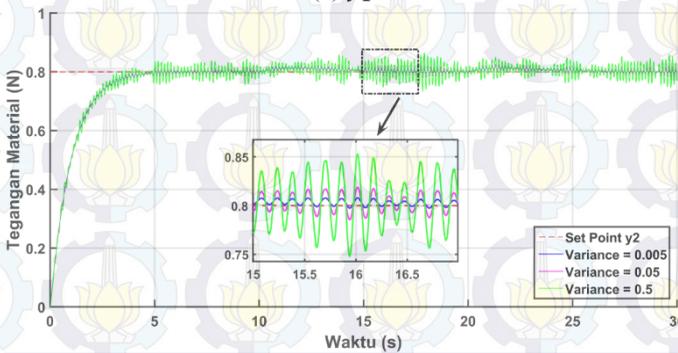
Gambar 4.19 Hasil Estimasi Kesalahan Sensor dengan Beberapa Nilai *Variance* Gangguan pada x_1 dan x_2

Tabel 4.6 IAE pada Beberapa Nilai *Variance* Gangguan

	<i>Variance</i>	y_1	y_2
IAE <i>Error</i> Estimasi	0,005	0,0499	0,0497
	0,050	0,1580	0,1574
	0,500	0,4996	0,4977
IAE Respon Keluaran dengan Kompensasi	0,005	1,0220	0,9204
	0,050	1,0880	0,9862
	0,500	1,3590	1,2580



(a) y_1



(b) y_2

Gambar 4.20 Respon Keluaran Sistem dengan Beberapa Nilai *Variance* Gangguan pada x_1 dan x_2

Respon keluaran sistem dengan kompensasi pada pengujian ini ditunjukkan oleh Gambar 4.20. Efek gangguan masukan mengakibatkan

keluaran sistem memiliki osilasi disekitar nilai *set point* yang diberikan. Dapat dilihat bahwa semakin besar nilai gangguan masukan, maka amplitudo osilasi akan semakin besar. Nilai IAE pada pengujian respon keluaran dengan kompensasi dapat dilihat pada Tabel 4.6. Dapat disimpulkan bahwa semakin besar gangguan pada masukan, maka nilai IAE akan semakin besar. Hal ini disebabkan karena efek gangguan masukan tidak dapat diminimumkan dengan kompensasi kesalahan sensor. Efek gangguan masukan pada respon keluaran sistem bergantung pada kontrolernya. Pada Tugas Akhir ini, pelemahan efek gangguan masukan hanya diterapkan pada estimator kesalahan sensor saja.

Pada pengujian ini, gangguan masukan pada sistem berhasil dilemahkan hingga dibawah tingkat pelemahan yang diinginkan. Dengan melemahkan efek gangguan tersebut, estimator dapat menghasilkan hasil estimasi yang baik saat terjadi gangguan. Dapat disimpulkan bahwa estimator hasil desain kokoh terhadap gangguan pada sistem. Besarnya gangguan pada sistem berpengaruh terhadap hasil estimasi kesalahan sensor. Semakin besar gangguan yang muncul, maka semakin besar magnitudo osilasi pada estimasi kesalahan sensor. Karena adanya osilasi ini, maka respon sistem dengan kompensasi juga terdapat osilasi disekitar nilai *set point* yang diberikan. Oleh karena itu, gangguan pada sistem yang dapat dilemahkan adalah terbatas.

BAB V PENUTUP

Pada Bab ini membahas tentang kesimpulan hasil penelitian Tugas Akhir. Kesimpulan diambil dari hasil pengujian dan analisis data yang telah dilakukan pada Bab IV. Dengan hasil yang telah diperoleh, diberikan saran yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Dari hasil pengujian dan analisis data pada Tugas Akhir ini, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

- Estimator kesalahan sensor yang didesain mampu mengestimasi kesalahan sensor dengan baik. Hal ini dibuktikan dengan IAE *error* estimasi pada masing-masing keluaran sebesar 0,0706 pada y_1 , 0,0703 pada y_2 , dan 0,0003 pada y_3 .
- Kompensasi yang diberikan mampu menjaga performa dan stabilitas sistem saat terjadi kesalahan pada sensor. Hal ini dibuktikan dengan performa IAE pada masing-masing pengujian kesalahan sensor sama dengan kondisi nominal, yaitu sebesar 1,033 pada y_1 , 0,9313 pada y_2 dan 2,401 pada y_3 .
- Estimator kokoh terhadap gangguan pada sistem. Hal ini dibuktikan dengan L_2 -*gain* estimator yang kurang dari tingkat pelemahan yang ditentukan ($\gamma = 0,2$) dengan nilai L_2 -*gain* maksimal adalah sebesar 0,1047.
- Hasil perancangan kontrol nominal mampu membuat keluaran *winding machine* mengikuti sinyal referensi yang diberikan dengan *settling time* (5%) sebesar 2,95 detik pada y_1 , 2,95 detik pada y_2 dan 5,37 detik pada y_3 . Respon sistem kontrol hasil desain tidak memiliki *overshoot* dan *error steady state* sama dengan nol.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil pengujian, gangguan pada masukan sistem tidak dapat dihilangkan dengan metode FTC. Hal ini disebabkan karena metode pada Tugas Akhir ini hanya mengkompensasi besarnya kesalahan pada sensor. Oleh karena itu, untuk menghilangkan efek dari gangguan pada masukan sistem, penulis menyarankan menggunakan metode kontrol *robust* dalam perancangan kontroler.

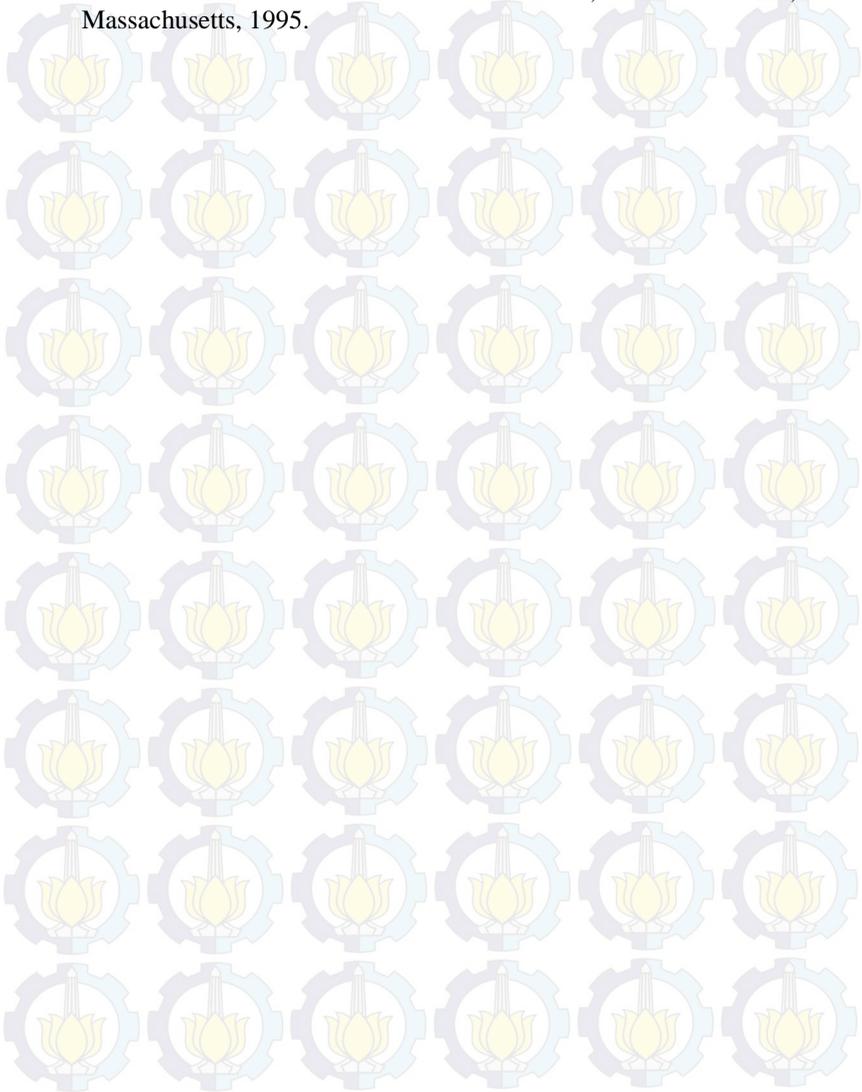


Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Zhang, Y. dan Jiang, J., "Bibliographical Review on Reconfigurable Fault-Tolerant Control Systems", *Annual Reviews in Control*, vol. 32, pp. 229-252, 2008.
- [2] Voss, G. dan Hefti, K., "Importance and Method of Tension Control (Coil Winding Process)", *Proceedings of the Electrical Insulation Conference 1997 and Electrical Manufacturing and Coil Winding Conference*, pp. 617-523, 1997.
- [3] Noura, H., Sauter, D., dan Hamelin, F., "Fault-tolerant control in dynamic systems: Application to a *winding machine*", *IEEE Control Systems Magazines*, vol. 20, pp. 33-49, 2000.
- [4] Gao, Z. dan Ding, S., "Sensor Fault Reconstruction and Sensor Compensation for a Class of Nonlinear State-Space Systems Via a Descriptor System Approach", *IET Control Theory Application*, pp. 578-585, 2007.
- [5] Benzaouia, A. dan El Hajjaji, A., "*Advanced Takagi-Sugeno Fuzzy Systems; Delay and Saturation*", Springer, Switzerland, 2014.
- [6] Zhou, W., "*Robust and Decentralized Control of Web Winding Systems*", Cleveland State University, Ohio, 2007.
- [7] Khalil, H., "*Nonlinear Systems*", Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [8] Ogata, K., "*Modern Control Engineering*", Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [9] Noura, H., Thelliol, D., Ponsart, J.C., dan Chamseddine, A., "*Fault Tolerant Control Systems Design and Practical Applications*", Springer, London, 2009.
- [10] Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., dan Staroswiecki, M., "*Diagnosis and Fault-Tolerant Control Second Edition*", Springer, Berlin, 2006.
- [11] Zhou, K., "*Essentials of Robust Control*", Prentice Hall, Beijing, 1999.
- [12] Mahato, U., "*Low Gain Controller Design with Regional Pole Placement Constraints*", Rourkela National Institute of Technology, Odisha, 2013.
- [13] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., dan Balakrishnan, V., "*Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*", Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1994.

[14] Gahinet, P., Nemirovski, A., J. Laub, A., dan Chilali, M., “*LMI Control Toolbox For Use with MATLAB*”, Mathworks Inc, Massachusetts, 1995.



LAMPIRAN A

A.1 Linearisasi Sistem *Winding Machine*

Persamaan nonlinear *winding machine* pada (3.2)-(3.3) dapat diubah ke dalam Persamaan (3.4) seperti pada Persamaan (A.1).

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1}x_3 & 0 & \frac{AE}{L_1} & -\frac{AE}{L_1} & 0 \\ -\frac{1}{L_2}x_3 & \frac{1}{L_2}x_5 & -\frac{AE}{L_2} & 0 & \frac{AE}{L_2} \\ -\frac{R_1^2}{J_1} & \frac{R_1^2}{J_1} & -\frac{\beta_{f_1}}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{R_0^2}{J_0} & 0 & 0 & -\frac{\beta_{f_0}}{J_0} - \frac{e_w}{2\pi f_0} \left(\frac{J_0}{R_0^2} - 2\pi t_p t_w R_0^2 \right) x_4 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2^2}{J_2} & 0 & 0 & -\frac{\beta_{f_2}}{J_2} + \frac{e_w}{2\pi f_2} \left(\frac{J_2}{R_2^2} - 2\pi t_p t_w R_2^2 \right) x_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_1}{J_1} & 0 \\ -\frac{R_0}{J_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} & \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

Pada Persamaan (A.1) persamaan dengan warna merah merupakan sektor nonlinieritas pada matriks $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Terdapat lima sektor nonlinieritas dengan variabel *state* x_3 , x_4 dan x_5 . Dengan mengasumsikan bahwa $x_3 \approx x_4 \approx x_5$, maka Persamaan (A.1) dapat diubah menjadi Persamaan (A.2).

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1}x_3 & 0 & \frac{AE}{L_1} & -\frac{AE}{L_1} & 0 \\ -\frac{1}{L_2}x_3 & \frac{1}{L_2}x_3 & -\frac{AE}{L_2} & 0 & \frac{AE}{L_2} \\ -\frac{R_1^2}{J_1} & \frac{R_1^2}{J_1} & -\frac{\beta_{f_1}}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{R_0^2}{J_0} & 0 & 0 & -\frac{\beta_{f_0}}{J_0} - \frac{e_w}{2\pi f_0} \left(\frac{J_0}{R_0^2} - 2\pi t_p t_w R_0^2 \right) x_3 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2^2}{J_2} & 0 & 0 & -\frac{\beta_{f_2}}{J_2} + \frac{e_w}{2\pi f_2} \left(\frac{J_2}{R_2^2} - 2\pi t_p t_w R_2^2 \right) x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_1}{J_1} & 0 \\ -\frac{R_0}{J_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} & \quad (A.2)
 \end{aligned}$$

Tabel A.1 adalah parameter sistem *winding machine* yang digunakan pada Tugas Akhir ini. Dengan mensubstitusikan parameter pada Tabel A.1 ke dalam Persamaan (A.2) diperoleh Persamaan (A.3).

Tabel A.1 Parameter Sistem *Winding Machine*

Parameter	Besaran	Nilai	Satuan
L_1	Jarak antara <i>unwind roller</i> dengan <i>master speed roller</i>	3,00	<i>m</i>
L_2	Jarak antara <i>rewind roller</i> dengan <i>master speed roller</i>	3,00	<i>m</i>
A	Luas penampang material	$2,40 \times 10^{-4}$	m^2
E	Modulus Young material	$10,0 \times 10^6$	$N.m^{-2}$
β_{f_0}	Koefisien gesekan <i>bearing</i> pada <i>unwind roller</i>	2,25	$N.m.s$
β_{f_1}	Koefisien gesekan <i>bearing</i> pada <i>master speed roller</i>	2,25	$N.m.s$
β_{f_2}	Koefisien gesekan <i>bearing</i> pada <i>rewind roller</i>	2,25	$N.m.s$
R_0	Jari-jari <i>unwind roller</i>	1,75	<i>m</i>
R_1	Jari-jari <i>master speed roller</i>	1,00	<i>m</i>
R_2	Jari-jari <i>rewind roller</i>	1,75	<i>m</i>
J_0	Momen inersia bagian <i>unwind roller</i>	1,50	$kg.m^2$
J_1	Momen inersia bagian <i>master speed roller</i>	1,20	$kg.m^2$
J_2	Momen inersia bagian <i>rewind roller</i>	1,50	$kg.m^2$
e_w	Ketebalan material	$1,20 \times 10^{-4}$	<i>m</i>
t_p	Massa jenis material	2700,00	$kg.m^{-3}$
t_w	Lebar material	2,0	<i>m</i>

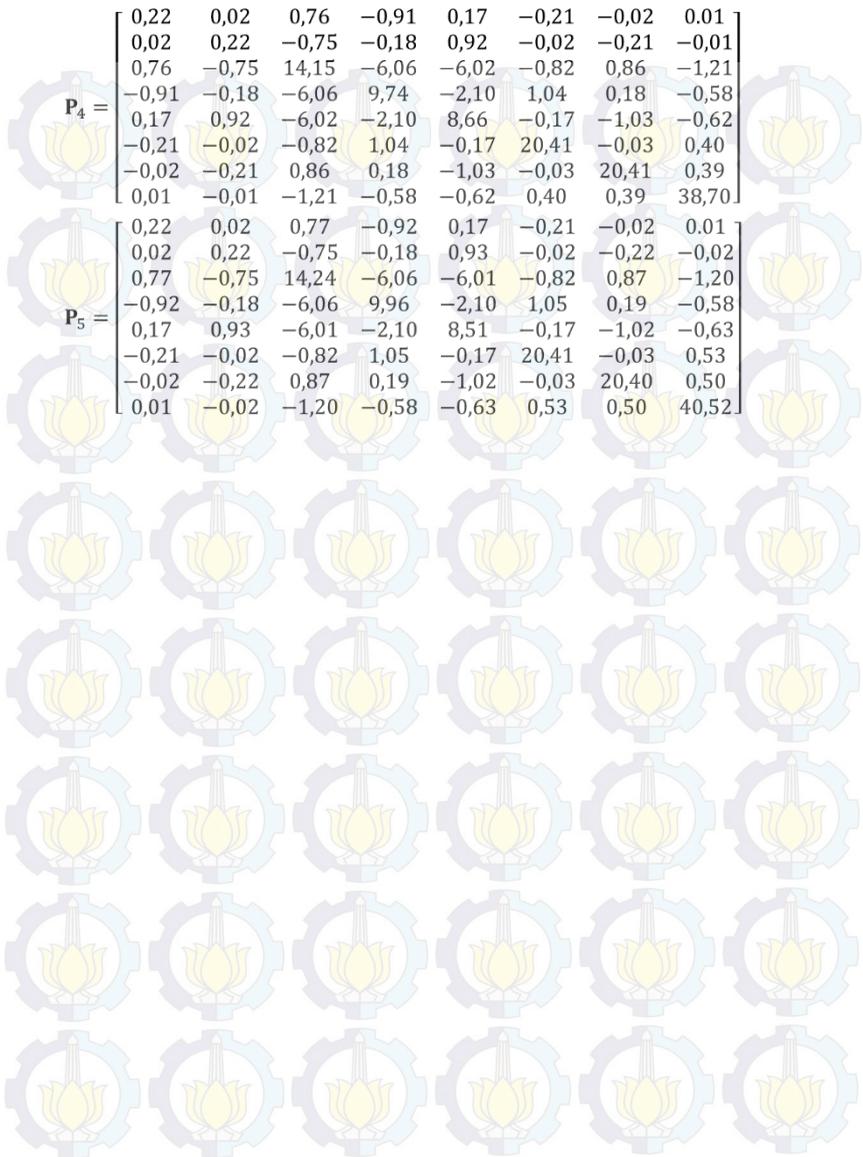
Dengan mensubstitusikan masing-masing nilai titik kerja pada Persamaan (A.3), maka diperoleh sistem hasil linearisasi pada (3.5). Dapat dilihat bahwa x_3 merupakan variabel premis, sehingga variasi nilai titik kerja diberikan pada x_3 .

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,33x_3 & 0 & 800 & -800 & 0 \\ -0,33x_3 & 0,33x_3 & -800 & 0 & 800 \\ -0,83 & 0,83 & 1,87 & 0 & 0 \\ 2,04 & 0 & 0 & 1,15x_3 & 0 \\ 0 & -2,04 & 0 & 0 & -4,15x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,83 & 0 \\ -1,17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (A.3)
 \end{aligned}$$

A.2 Matriks Hasil Perancangan Kontroler Nominal

Dengan menyelesaikan persamaan aljabar Riccati sesuai dengan Persamaan(3.40) pada aturan *plant* yang telah dibuat pada Subbab 3.1, maka diperoleh matriks **P** pada masing-masing aturan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} 0,22 & 0,02 & 0,74 & -0,91 & 0,18 & -0,21 & -0,02 & 0,01 \\ 0,02 & 0,22 & -0,74 & -0,18 & 0,91 & -0,02 & -0,21 & -0,01 \\ 0,74 & -0,74 & 13,96 & -6,02 & -6,02 & -0,84 & 0,84 & -1,21 \\ -0,91 & -0,18 & -6,02 & 9,13 & -2,12 & 1,04 & 0,17 & -0,60 \\ 0,18 & 0,91 & -6,02 & -2,13 & 9,13 & -0,17 & -1,04 & -0,60 \\ -0,21 & -0,02 & -0,84 & 1,04 & -0,17 & 20,41 & -0,03 & -0,01 \\ -0,02 & -0,21 & 0,84 & 0,17 & -1,04 & -0,03 & 20,41 & 0,01 \\ 0,01 & -0,01 & -1,21 & -0,60 & -0,60 & -0,01 & 0,01 & 36,24 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} 0,22 & 0,02 & 0,75 & -0,91 & 0,17 & -0,21 & -0,02 & 0,01 \\ 0,02 & 0,22 & -0,74 & -0,18 & 0,91 & -0,02 & -0,21 & -0,01 \\ 0,75 & -0,74 & 14,00 & -6,04 & -6,03 & -0,84 & 0,85 & -1,21 \\ -0,91 & -0,18 & -6,04 & 9,33 & -2,12 & 1,04 & 0,18 & -0,60 \\ 0,17 & 0,91 & -6,03 & -2,12 & 8,96 & -0,17 & -1,03 & -0,61 \\ -0,21 & -0,02 & -0,84 & 1,04 & -0,17 & 20,41 & -0,03 & 0,13 \\ -0,02 & -0,21 & 0,85 & 0,18 & -1,03 & -0,03 & 20,41 & 0,14 \\ 0,01 & -0,01 & -1,21 & -0,60 & -0,61 & 0,13 & 0,14 & 36,52 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{P}_3 &= \begin{bmatrix} 0,22 & 0,02 & 0,75 & -0,91 & 0,17 & -0,21 & -0,02 & 0,01 \\ 0,02 & 0,22 & -0,74 & -0,18 & 0,92 & -0,02 & -0,21 & -0,01 \\ 0,75 & -0,74 & 14,07 & -6,06 & -6,03 & -0,83 & 0,86 & -1,21 \\ -0,91 & -0,18 & -6,06 & 9,53 & -2,11 & 1,04 & 0,18 & -0,60 \\ 0,17 & 0,92 & -6,03 & -2,12 & 8,81 & -0,17 & -1,03 & -0,61 \\ -0,21 & -0,02 & -0,83 & 1,04 & -0,17 & 20,41 & -0,03 & 0,27 \\ -0,02 & -0,21 & 0,86 & 0,18 & -1,03 & -0,03 & 20,41 & 0,27 \\ 0,01 & -0,01 & -1,21 & -0,60 & -0,61 & 0,27 & 0,27 & 37,35 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 0,22 & 0,02 & 0,76 & -0,91 & 0,17 & -0,21 & -0,02 & 0,01 \\ 0,02 & 0,22 & -0,75 & -0,18 & 0,92 & -0,02 & -0,21 & -0,01 \\ 0,76 & -0,75 & 14,15 & -6,06 & -6,02 & -0,82 & 0,86 & -1,21 \\ -0,91 & -0,18 & -6,06 & 9,74 & -2,10 & 1,04 & 0,18 & -0,58 \\ 0,17 & 0,92 & -6,02 & -2,10 & 8,66 & -0,17 & -1,03 & -0,62 \\ -0,21 & -0,02 & -0,82 & 1,04 & -0,17 & 20,41 & -0,03 & 0,40 \\ -0,02 & -0,21 & 0,86 & 0,18 & -1,03 & -0,03 & 20,41 & 0,39 \\ 0,01 & -0,01 & -1,21 & -0,58 & -0,62 & 0,40 & 0,39 & 38,70 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_5 = \begin{bmatrix} 0,22 & 0,02 & 0,77 & -0,92 & 0,17 & -0,21 & -0,02 & 0,01 \\ 0,02 & 0,22 & -0,75 & -0,18 & 0,93 & -0,02 & -0,22 & -0,02 \\ 0,77 & -0,75 & 14,24 & -6,06 & -6,01 & -0,82 & 0,87 & -1,20 \\ -0,92 & -0,18 & -6,06 & 9,96 & -2,10 & 1,05 & 0,19 & -0,58 \\ 0,17 & 0,93 & -6,01 & -2,10 & 8,51 & -0,17 & -1,02 & -0,63 \\ -0,21 & -0,02 & -0,82 & 1,05 & -0,17 & 20,41 & -0,03 & 0,53 \\ -0,02 & -0,22 & 0,87 & 0,19 & -1,02 & -0,03 & 20,40 & 0,50 \\ 0,01 & -0,02 & -1,20 & -0,58 & -0,63 & 0,53 & 0,50 & 40,52 \end{bmatrix}$$

LAMPIRAN B

B.1 Program Perhitungan *Gain* Kontroler

```
% Perancangan Robust Sensor Fault Estimation
menggunakan Augmented
% Descriptor System pada winding machine system.
Program ini digunakan
% untuk menghitung nilai gain observer dan kontroler
% Observer didesain berdasarkan algoritma ADS.
% -----
% -----
% Program dibuat oleh:
% Nama : Hendra Antomy
% NRP : 2211100130
% Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan
% Jurusan Teknik Elektro
% Fakultas Teknologi Industri
% Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
% Indonesia

% Parameter plant winding machine
% Material pada winding machine (web) yang digunakan
adalah aluminium
L = 3; %Distance between 2 roller
(m)
Rad0 = 1.75; %Unwinding section roller
radius (m)
Rad1 = 1; %Master speed roller radius
(m)
tw = 2; %Web width (m)
Rad2 = 1.75; %Winding section roller
radius (m)
E = 10*10^6; %Modulus Young of Alumunium
(N/m^2)
J0 = 1.5; %Moment of Inertia unwinding
section (kg.m^2)
J1 = 1.2; %Moment of Inertia master
speed roller (kg.m^2)
J2 = 1.5; %Moment of Inertia winding
section (kg.m^2)
betaf = 2.25; %Bearing Friction Coefficient
(N.m.s)
```

```

tp = 2700; %Density of Web (kg/m^3)
ew = 1.2*10^-4; %Web thickness (m)
C = [eye(3) zeros(3,2)]; %Output Matrices
A = tw*ew; %Cross-sectional Area Web
(m^2)

%% Perancangan Kontroller Fuzzy-LQ dengan struktur
kontrol servo type 1

%Titik Kerja Plant
T1 = [-inf 0 1];
T2 = [0 1 2];
T3 = [1 2 3];
T4 = [2 3 4];
T5 = [3 4 inf];

% Linearisasi Plant pada 5 titik kerja dengan v1
(x(3)) sebagai premis.
% Pada titik kerja 0 m/s
[A1,B1,~,~] = linmodv5('winding_machine',[0 0 T1(2)
T1(2) T1(2)]);

% Pada titik kerja +-10 m/s
[A2,B2,~,~] = linmodv5('winding_machine',[0 0 T2(2)
T2(2) T2(2)]);

% Pada titik kerja +-20 m/s
[A3,B3,~,~] = linmodv5('winding_machine',[0 0 T3(2)
T3(2) T3(2)]);

% Pada titik kerja +-30 m/s
[A4,B4,~,~] = linmodv5('winding_machine',[0 0 T4(2)
T4(2) T4(2)]);

% Pada titik kerja +-40 m/s
[A5,B5,~,~] = linmodv5('winding_machine',[0 0 T5(2)
T5(2) T5(2)]);

% Menentukan matriks Augmentasi
n = 5; %Jumlah state
p = 3; %jumlah output
Alhat = [A1 zeros(n,p);-C zeros(p)];
A2hat = [A2 zeros(n,p);-C zeros(p)];
A3hat = [A3 zeros(n,p);-C zeros(p)];

```

```

A4hat = [A4 zeros(n,p);-C zeros(p)];
A5hat = [A5 zeros(n,p);-C zeros(p)];
B1hat = [B1;zeros(p)];
B2hat = [B2;zeros(p)];
B3hat = [B3;zeros(p)];
B4hat = [B4;zeros(p)];
B5hat = [B5;zeros(p)];

```

```

%Menentukan matriks Q dan R

```

```

Q = 20*eye(n+p);
R = 0.1*eye(p);

```

```

%Menghitung gain kontroler

```

```

[K1hat,s1,~] = lqr(A1hat,B1hat,Q,R);
[K2hat,s2,~] = lqr(A2hat,B2hat,Q,R);
[K3hat,s3,~] = lqr(A3hat,B3hat,Q,R);
[K4hat,s4,~] = lqr(A4hat,B4hat,Q,R);
[K5hat,s5,~] = lqr(A5hat,B5hat,Q,R);

```

```

% Gain State feedback

```

```

K1 = K1hat(:,1:5);
K2 = K2hat(:,1:5);
K3 = K3hat(:,1:5);
K4 = K4hat(:,1:5);
K5 = K5hat(:,1:5);

```

```

%Gain Kompensator

```

```

Ki1 = -K1hat(:,6:8);
Ki2 = -K2hat(:,6:8);
Ki3 = -K3hat(:,6:8);
Ki4 = -K4hat(:,6:8);
Ki5 = -K5hat(:,6:8);

```

```

%% Perancangan Sensor Fault Estimator menggunakan
pendekatan Augmented

```

```

% Descriptor System

```

```

% Parameter Plant

```

```

Ap = [0 0 A*E/L -A*E/L 0;...
      0 0 -A*E/L 0 A*E/L;...
      -Rad1^2/J1 Rad1^2/J1 -betaf/J1 0 0;...
      Rad0^2/J0 0 0 -betaf/J0 0;...
      0 -Rad2^2/J2 0 0 -betaf/J2];
Bp = [0 0 0;...

```

```

0 0 0;...
0 Rad1/J1 0;...
-Rad0/J0 0 0;...
0 0 Rad2/J2;
Cp = eye(5); % diasumsikan seluruh state
terukur
Bd = [0.4;0.4;0;0;0];
Ds = [1;1;1;1;1];

% Parameter Descriptor
n = 5; % State vector dimension
m = 3; % Control input dimension
p = 5; % Output vector dimension
k = 5; % Sensor fault vector dimension
d = 1; % Input disturbance vector dimension

Ebar = [eye(n) zeros(n,p);zeros(p,n) zeros(p,p)];
Abar = [Ap zeros(n,p);zeros(p,n) zeros(p,p)];
Bbar = [Bp;zeros(p,m)];
Cbar = [Cp eye(p)];
Bdbar = [Bd;zeros(p,1)];
Ldbar = [zeros(n,p); eye(p)];
Sbar = Ebar+Ldbar*Cbar;
gamma = 0.2; % Tingkat Pelemahan yang Diinginkan
alpha = 10; % Parameter LMI Region (Half Plane)
teta = -2; % Lipschitz Constant

% Mencari gain observer dengan LMI
setlmis([]);

% Mendefinisikan LMI Variabel
P = lmivar(1,[n+p 1]);
Y = lmivar(2,[n+p p]);

% LMI ke-1

% baris ke-1 kolom ke-1
lmiterm([1 1 1 P],1,Sbar\Abar,'s');
lmiterm([1 1 1 Y],-1,Cbar,'s');
lmiterm([1 1 1 0],1);
lmiterm([1 1 1 0],teta);

% baris ke-2 kolom ke-2

```

```

lmiterm([1 2 2 0],-gamma^2);

% baris ke-3 kolom ke-3
lmiterm([1 3 3 0],-1);

% baris ke-2 kolom ke-1 dan baris ke-1 kolom ke-2
lmiterm([1 1 2 P],-1,Sbar\Bdbar);

% baris ke-3 kolom ke-1 dan baris ke-1 kolom ke-3
lmiterm([1 1 3 P],1,inv(Sbar));

% LMI ke-2: P>0
lmiterm([-2 1 1 P],1,1);

% LMI ke-3: syarat pole region
lmiterm([3 1 1 P],1,Sbar\Abar,'s');
lmiterm([3 1 1 Y],-1,Cbar,'s');
lmiterm([3 1 1 0],1);
lmiterm([3 1 1 0],teta);
lmiterm([3 1 1 P],2*alpha,1);

lmiterm([3 1 2 P],1,inv(Sbar));
lmiterm([3 2 2 0],-1);

% mencari feasible solution
lmis = getlmis;
[tmin, xfeas] = feasp(lmis);
fprintf('Tmin = %d \n',tmin);

Pbar = dec2mat(lmis, xfeas, P);
Ybar = dec2mat(lmis, xfeas, Y);

Lpbar = Sbar*(Pbar\Ybar);
parameter1 = Abar-Lpbar*Cbar;
parameter2 = Bbar;
parameter3 = inv(Ebar+Ldbar*Cbar);

fprintf('Lpbar = \n');
disp(Lpbar);
fprintf('Ldbar = \n');
disp(Ldbar);

%% Mencari Pole Observer
zz = eig(Sbar\ (Abar-Lpbar*Cbar));

```

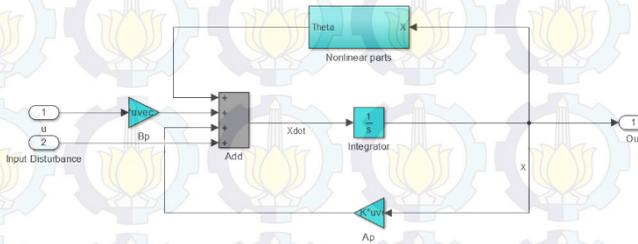
```

pole_plant=eig(Ap);
n_pole=numel(pole_plant);
n_zz=numel(zz);
for i=1:n_pole;
    for j=1:n_zz;
        if zz(j)>=pole_plant(i)-0.0001 &&
            zz(j)<=pole_plant(i)+0.0001;
            zz(j)=0;
        end
    end
end
pole_observer=nonzeros(zz);
fprintf('Pole Observer = \n');
disp(pole_observer);

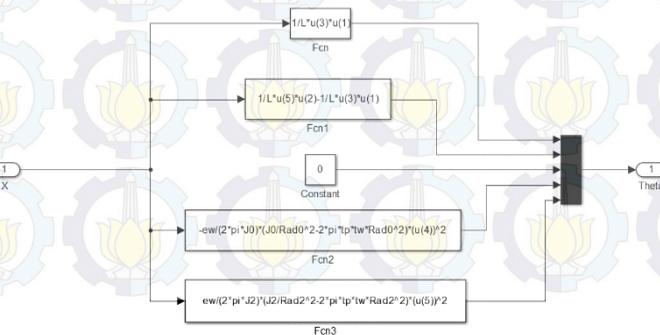
```

B.2 Blok Diagram Simulink

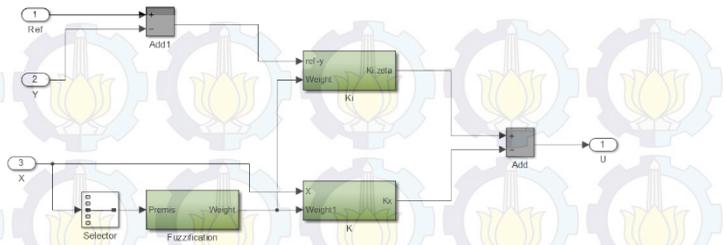
Blok sistem *winding machine*



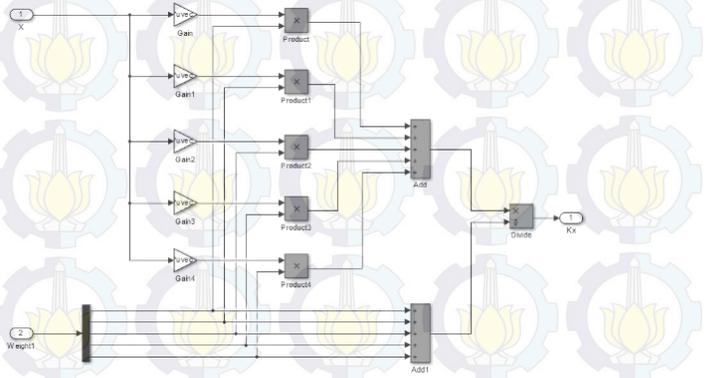
Blok bagian nonlinear



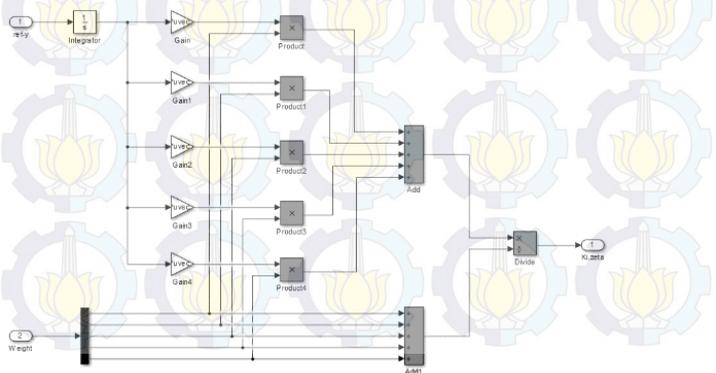
Blok kontroler



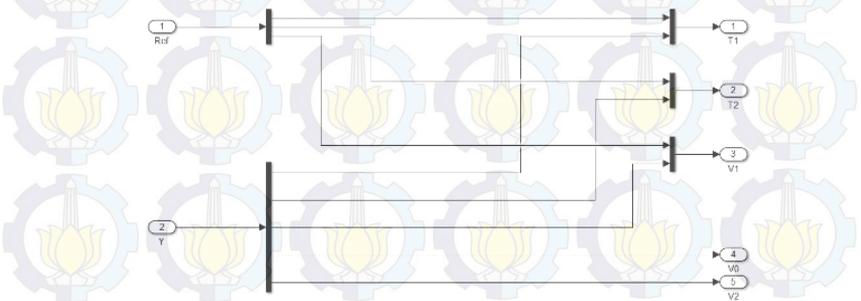
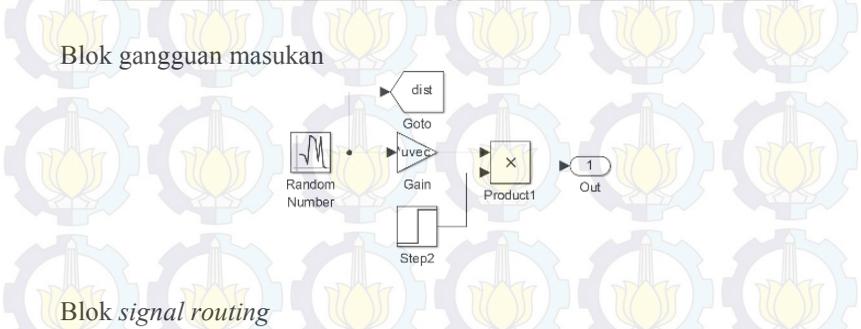
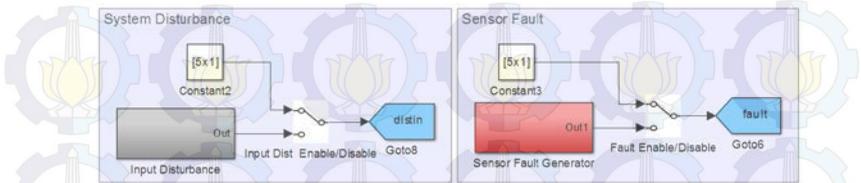
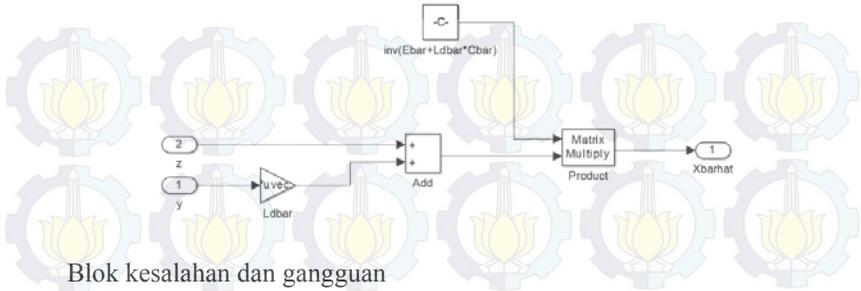
Blok gain state feedback K



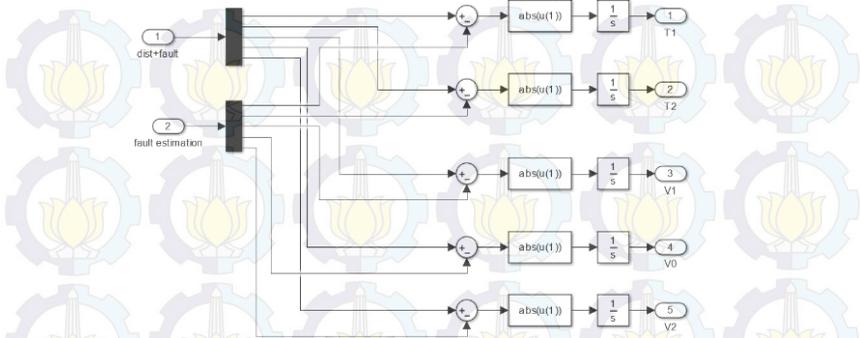
Blok gain kompensator K_i



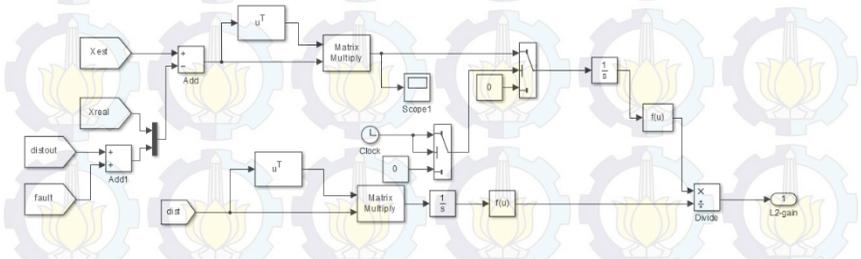
Blok \tilde{z}



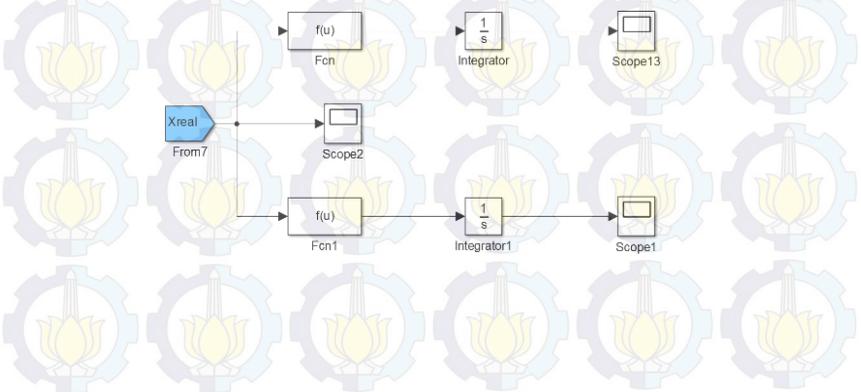
Blok IAE



Blok L_2 gain



Blok diameter roller



LAMPIRAN C

C.1 Matriks Parameter *Augmented Descriptor System*

Parameter *Augmented Descriptor system* hasil desain adalah sebagai berikut:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 800,00 & -800,00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -800,00 & 0 & 800,00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,83 & 0,83 & -1,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,04 & 0 & 0 & -1,50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,04 & 0 & 0 & -1,50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,83 & 0 \\ -1,17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,17 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Phi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} x_3 x_1 \\ \frac{1}{L_2} (x_5 x_2 - x_3 x_1) \\ 0 \\ -\frac{e_w}{2\pi J_0} \left(\frac{J_0}{R_0^2} - 2\pi t_\rho t_w R_0^2 \right) x_4^2 \\ \frac{e_w}{2\pi J_2} \left(\frac{J_2}{R_2^2} - 2\pi t_\rho t_w R_2^2 \right) x_5^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}}_d = \begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks $\tilde{\mathbf{P}}$ dan $\tilde{\mathbf{Y}}$ hasil perhitungan LMI:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0,3773 & 0,0004 & -0,0021 & 0,0045 & -0,0024 & 0,3749 & -0,0004 & 0,0019 & -0,0040 & 0,0021 \\ 0,0004 & 0,3773 & 0,0021 & 0,0024 & -0,0045 & -0,0004 & 0,3749 & -0,0019 & -0,0021 & 0,0040 \\ -0,0021 & 0,0021 & 0,6505 & -0,1248 & -0,1248 & 0,0019 & -0,0019 & 0,1348 & 0,1098 & 0,1098 \\ 0,0045 & 0,0024 & -0,1248 & 0,6562 & -0,1407 & -0,0040 & -0,0021 & 0,1099 & 0,1301 & 0,1233 \\ -0,0024 & -0,0045 & -0,1248 & -0,1407 & 0,6562 & 0,0021 & 0,0040 & 0,1099 & 0,1233 & 0,1301 \\ 0,3749 & -0,0004 & 0,0019 & -0,0040 & 0,0021 & 0,3771 & 0,0003 & -0,0017 & 0,0036 & -0,0019 \\ -0,0004 & 0,3749 & -0,0019 & -0,0021 & 0,0040 & 0,0003 & 0,3771 & 0,0017 & 0,0019 & -0,0036 \\ 0,0019 & -0,0019 & 0,1348 & 0,1099 & 0,1099 & -0,0017 & 0,0017 & 0,5902 & -0,0976 & -0,0976 \\ -0,0040 & -0,0021 & 0,1098 & 0,1301 & 0,1233 & 0,0036 & 0,0019 & -0,0976 & 0,5940 & -0,1091 \\ 0,0021 & 0,0040 & 0,1098 & 0,1233 & 0,1301 & -0,0019 & -0,0036 & -0,0976 & -0,1091 & 0,5940 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} 5,2252 & 4,4332 & -54,2406 & -29,3983 & -11,2391 \\ -4,4267 & 5,2252 & 5,3798 & 2,1081 & 13,5207 \\ 54,3896 & -5,5288 & 1,4856 & 92,6715 & 37,8901 \\ 29,1057 & -2,2616 & -89,0277 & 1,4315 & 120,9527 \\ 11,3927 & -13,2281 & -34,2463 & -116,9937 & 1,4315 \\ 5,2038 & 4,4270 & -55,3935 & -27,6639 & -11,8230 \\ -4,4328 & 5,2038 & 6,5328 & 2,6920 & 11,7862 \\ 55,2198 & -6,3591 & 8,5417 & 89,2557 & 34,4743 \\ 27,9684 & -2,5524 & -92,5130 & 8,5915 & 117,2097 \\ 11,6834 & -12,0908 & -37,7316 & -120,7367 & 8,5915 \end{bmatrix}$$

RIWAYAT PENULIS



Penulis bernama lengkap Hendra Antomy dilahirkan di Ponorogo pada tanggal 30 Agustus 1992. Ia merupakan anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Subur Hariyanto dan Sunarmi. Penulis memiliki seorang saudara kembar bernama Hendri Antomy yang merupakan mahasiswa Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS). Penulis memulai pendidikan di SDN Negeri 1 Pulung, SMPN 2 Ponorogo, SMAN 1 Ponorogo, dan kemudian melanjutkan jenjang Strata-1 dengan Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan di Jurusan Teknik Elektro Fakultas Teknologi Industri Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Pada tahun ketiga perkuliahan, penulis mulai mendalami teori tentang *Fault Tolerant Control* bersama dengan empat rekannya dan dosen pembimbing. Teori tentang FTC ini kemudian dijadikan bahan untuk menyusun karya Tugas Akhir sebagai syarat memperoleh gelar Sarjana Teknik Elektro.