



TESIS - SM 142501

**KENDALI OPTIMAL PRODUKSI LIPID NETRAL
PADA MIKROALGA DENGAN KETERBATASAN
NUTRISI**

NASRIA NACONG
NRP 1213 201 042

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Dra. Mardlijah, M.T

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015



TESIS - SM 142501

**OPTIMAL CONTROL OF NEUTRAL LIPIDS IN
MIKROALGAE PRODUCTION WITH NUTRIENT
LIMITATION**

NASRIA NACONG
NRP 1213 201 042

Supervisor
Dr. Dra. Mardlijah, M.T

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015

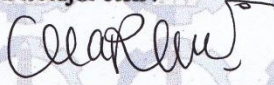
**KENDALI OPTIMAL PRODUKSI LIPID NETRAL PADA MIKROALGA
DENGAN KETERBATASAN NUTRISI**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

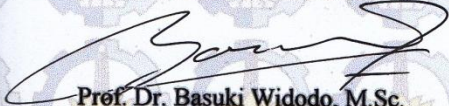
Oleh :
NASRIA NACONG
NRP. 1213 201 042

Tanggal Ujian : 8 Juli 2015
Periode Wisuda : September 2015

Disetujui oleh :


Dr. Dra. Mardijah, M.T.
NIP. 19670114 199102 2 001

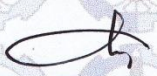
(Pembimbing I)


Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

(Penguji)


Dr. Drs. Hariyanto, M.Si.
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)


Dr. Drs. Chairul Imron, Ml.Komp.
NIP. 19611115 198703 1 003

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana


Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.
NIP. 19640405 199002 1 001



KENDALI OPTIMAL PRODUKSI LIPID NETRAL PADA MIKROALGA DENGAN KETERBATASAN NUTRISI

Nama Mahasiswa : Nasria Nacong
NRP : 1213 2010 42
Pembimbing : Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

ABSTRAK

Kebutuhan konsumen terhadap bahan bakar minyak semakin meningkat, sementara persediaan bahan bakar minyak bumi saat ini mulai berkurang. Oleh karena itu perlu upaya untuk melakukan pengembangan energi alternatif terbarukan seperti pemanfaatan mikroalga. Mikroalga memiliki 4 komponen zat utama, yaitu karbohidrat, protein, asam nukleat, dan lipid. Kadar lipid yang relatif tinggi dapat dijadikan sumber biomassa dengan bantuan sinar matahari, glukosa, nutrisi, karbondioksida dan air. Pada penelitian ini konsentrasi nutrisi dimodifikasi untuk mempertahankan konsentrasi biomassa melalui tingkat pengenceran. Pada penelitian ini dibahas masalah kestabilan sistem dan kendali optimal pada model produksi lipid netral dengan keterbatasan nutrisi. Kendali optimal ini bertujuan untuk mendapatkan biomassa yang optimal melalui pengontrolan tingkat pengenceran dengan menggunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin. Pada model tersebut diperoleh dua titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan pertama bersifat stabil dengan syarat $\bar{\mu}$ berada pada interval $[-1,0) \cup (0,1]$ dan titik kesetimbangan yang kedua bersifat tidak stabil. Titik kesetimbangan pertama bersifat stabil saat laju pertumbuhan mikroalga mengalami penurunan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa dengan adanya pengenceran persentase jumlah biomassa setelah diberi kendali meningkat sebesar 0,6877 dibandingkan sebelum diberi kendali.

Kata Kunci: *Mikroalga*, Kestabilan, Kendali Optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin.

OPTIMAL CONTROL OF NEUTRAL LIPIDS IN MIKROALGAE PRODUCTION WITH NUTRIENT LIMITATION

Name : Nasria Nacong
Student Identity Number : 1213 2010 42
Supervisor : Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

ABSTRACT

Consumer demand for fuel is increasing, while the supply of fuel is began dwindling. Therefore, it is necessary to undertake an effort to develop a renewable energy alternative such as the utilization of microalgae. Microalgae has four main components of substances i.e carbohydrates, proteins, nucleic acids and lipids. The relatively high lipid levels can be used as a source of biomass with the help of sunlight, glucose, nutrients, carbondioxide and water. Nutrient concentration is modified to maintain the concentration of biomass through the dilution rate. This Research observed the model of the system stability and the optimal control of model neutral lipid production mikroalga with nutrients limitation. The optimal control aims to get an optimal biomass by controlling the dilution rate through nutrient limitation using pontryagin maximun principle. The model obtained two points of equilibrium. The first is a stable equilibrium point with condition $\bar{\mu}$ at interval $[-1,0) \cup (0,1]$ and the second equilibrium point is unstable. The first equilibrium point is stable when the microalga growth rate decreased. Based on the simulation results, the percentage of the amount of biomass after being controllod increased by 0,6877 than before.

Keywords : *Microalgae*, Stability, Optimal Control, Pontryagin Maximun Principle.

KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat, Taufiq, dan Hidayah-Nya, serta junjungan Beliau Rasulullah SAW atas suri teladan yang dibawanya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul **“Kendali Optimal Produksi Lipid Netral pada Mikroalga dengan Keterbatasan Nutrisi”** ini tepat pada waktunya. Tesis ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar magister di Program Studi Magister Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan Tesis ini tidak lepas dari bimbingan, bantuan, dan dukungan moral maupun spiritual dari banyak pihak. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu, Bapak, beserta keluarga tercinta yang selalu memberikan dukungan, doa, dan motivasi agar penulis dapat menyelesaikan Tesis ini.
2. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Dr. Mardlijah, M.T., selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, memberikan masukan dan mendorong penulis dalam menyelesaikan Tesis ini.
4. Dr. Moh. Yunus, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan motivasi, arahan, dan bimbingan selama penulis menempuh kuliah.
5. Prof. Dr. Basuki Widodo., Dr. Hariyanto, M.Si., Dr. Drs. Chairul Imron, MI.Komp dan Dr. Mardlijah, M.T. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan juga motivasi bagi penulis sehingga Tesis ini dapat selesai tepat waktu.
6. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf administrasi Program Studi Magister Matematika atas segala bantuannya.

7. Sahabat penulis terima kasih atas semua bantuan, semangat, dan dukungannya selama proses penulisan Tesis ini.
8. Keluarga besar Pascasarjana Matematika ITS 2013, dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan Tesis ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terima kasih.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan Tesis ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan kedepannya. Kritik dan saran bisa dikirim melalui email penulis nasrianacong0507@gmail.com. Akhirnya semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR.....	xi
DAFTAR TABEL	xiii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Kajian pustaka.....	5
2.2 Dasar Teori.....	5
2.2.1 Mikroalga.....	5
2.3 Model Matematika.....	7
2.4 Kestabilan Sistem	9
2.5 Kestabilan Kriteria Routh-Hurwitz	11
2.6 Kendali Optimal	12
2.7 Prinsip Maksimum Pontryagin	13

BAB 3	METODE PENELITIAN	15
3.1	Studi Literatur.....	15
3.2	Analisis Kestabilan	15
3.3	Penyelesaian Kendali Optimal	15
3.4	Simulasi	16
3.5	Analisis Hasil Simulasi.....	17
3.1	Kesimpulan.....	17
BAB 4	PEMBAHASAN	19
4.1	Model Matematika.....	19
4.2	Titik Keseimbangan	21
4.3	Analisis Kestabilan	27
4.4	Penyelesaian Kendali Optimal	36
4.4	Proses Hasil Simulasi	45
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	59
5.1	Kesimpulan.....	59
5.2	Saran	59
DAFTAR PUSTAKA		61
BIODATA PENULIS		63

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Kriteria Routh-Hurwitz	12
Tabel 4.1	Kriteria Routh-Hurwitz	34
Tabel 4.2	Nilai awal untuk semua kondisi	43
Tabel 4.3	Nilai parameter	45
Tabel 4.4	Nilai awal untuk substrat nutrisi.....	45
Tabel 4.5	Nilai awal untuk kuota nitrogen	46
Tabel 4.6	Nilai awal untuk biomassa	47
Tabel 4.7	Nilai awal untuk kuota lipid	48
Tabel 4.8	Nilai awal untuk kuota fungsional karbon	49

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Jumlah penduduk di Indonesia semakin bertambah, mengakibatkan kebutuhan manusia juga semakin meningkat. Salah satu kebutuhan manusia adalah kebutuhan bahan bakar minyak. Bahan bakar minyak bumi saat ini mulai berkurang, masalah ini mendorong usaha pencarian bahan bakar alternatif seperti pengembangan mikroalga yang dapat menjadi penunjang kebutuhan manusia. Mikroalga memiliki potensi yang cukup tinggi sebagai sumber biomassa terbarukan, (Metting, 1996) dalam penelitiannya menjelaskan tentang mikroalga mengandung banyak lipid sehingga memiliki kemampuan untuk memproduksi produk yang bernilai tinggi seperti biodiesel. Sebagai organisme fotosintetik, mikroalga memiliki kandungan klorofil yang berperan pada proses fotosintesis yang dapat menghasilkan bahan organik. Pada proses fotosintesis, gas karbondioksida sangat dibutuhkan sebagai bahan baku untuk pembentukan biomassa.

Produksi biomassa yang cepat dengan kadar lipid yang relatif tinggi merupakan keunggulan yang dimiliki oleh mikroalga (Chisti, 2007; Li, 2008). Proses pertumbuhan mikroalga membutuhkan beberapa unsur seperti cahaya, glukosa, nutrisi, karbondioksida dan air. Mikroalga adalah tumbuhan mikroskopik yang menggunakan karbondioksida sebagai sumber karbon. Mikroalga dapat menyerap karbondioksida sehingga memiliki pengaruh positif terhadap efek gas rumah kaca, selain itu dengan adanya pemanfaatan cahaya dari sinar matahari mikroalga mampu berfotosintesis sehingga dapat mengubah energi matahari menjadi energi kimia yang merupakan energi alternatif yang dapat diperbaharui. Mikroalga juga mampu menyerap logam berat dan limbah sehingga sering dimanfaatkan sebagai pemurni lingkungan, oleh karena itu mikroalga dalam pengembangan bioteknologi berbasis kultur alga dapat menghasilkan produksi biofuel yang bermanfaat dan bernilai ekonomi tinggi.

Spesies mikroalga memiliki kemampuan dengan baik untuk mensintesis dan mengumpulkan sejumlah lipid (Metting, 1996) dan laju pertumbuhan mikroalga yang tergolong lebih cepat, akan tetapi kehabisan nitrogen dapat meningkatkan kadar lemak sel dan pada saat yang sama dapat mengurangi laju pertumbuhan, lipid yang ada dalam sel mikroalga dapat dimanfaatkan sebagai *biofuel* atau biodiesel. Lipid yang terdapat pada mikroalga diperkirakan dapat mencapai 200 kali dibandingkan dengan tumbuhan besar penghasil minyak, seperti kelapa sawit dan jarak pagar (Rachmaniah, 2010). Akumulasi lipid netral dan pertumbuhan merupakan kunci untuk mengoptimalkan produksi biomassa.

Strategi optimasi dalam pengembangan suatu model dinamik yang dapat memprediksi produksi lipid netral dibawah batasan nitrogen, model ini dikembangkan pada dasar percobaan yang dilakukan di berbagai kondisi nitrogen (penuh, keterbatasan dan kelaparan/kehabisan) dengan alga yang berjenis *Isochrysis aff. Galbana*. Model yang paling sederhana untuk menggambarkan pertumbuhan populasi mikroalga dengan batasan nitrogen adalah model Droop. Model ini mengasumsikan bahwa tingkat pertumbuhan bergantung pada konsentrasi intraseluler nitrogen (Droop, 1968).

Mairet dkk. (2011) pada penelitiannya membahas tentang masalah strategi optimasi pada model produksi lipid netral pada pertumbuhan mikroalga dengan keterbatasan nitrogen. Pada penelitian ini akan dianalisis kestabilan sistem pada model tersebut dan suatu usaha untuk mendapatkan biomassa yang optimal dengan menerapkan teori kendali optimal pada model produksi lipid netral pada mikroalga dibawah batasan nutrisi, dengan mengontrol tingkat pengenceran melalui pembatasan nutrisi, dimana tingkat pengenceran dipertahankan sampai *steady state* kuota yang masuk. Tujuannya adalah untuk mengoptimalkan hasil biomassa pada produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi.

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan masalah kendali optimal tersebut adalah Prinsip Maksimum Pontryagin. Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan untuk menyelesaikan kendali optimal secara tidak langsung, sedangkan

metode langsung diselesaikan dengan menggunakan *software* Matlab. Data yang digunakan untuk simulasi tersebut adalah nilai parameter-parameter yang diperoleh dari penelitian Mairet dkk.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana melakukan analisis stabilitas pada model produksi lipid netral pada mikroalga dengan batasan nutrisi.
2. Bagaimana mengkonstruksi kendali optimal pada model produksi lipid netral pada mikroalga dengan batasan nutrisi.
3. Bagaimana menentukan biomassa yang optimal pada model produksi lipid netral pada mikroalga dengan batasan nutrisi.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian adalah sebagai berikut:

1. Kendali optimal diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
2. Nilai parameter diperoleh dari hasil eksperimen pada referensi (Mairet, 2011).
3. Model yang digunakan adalah model produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi (Mairet, 2011).

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk memperoleh sifat kestabilan pada model produksi lipid netral pada mikroalga dengan batasan nutrisi.

2. Untuk memperoleh bentuk kendali optimal model produksi lipid netral pada mikroalga dengan batasan nutrisi menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Untuk mendapatkan biomassa yang optimal pada model produksi lipid netral pada mikroalga dengan batasan nutrisi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Secara umum untuk mengembangkan ilmu matematika, khususnya pada bidang kendali optimal yang diterapkan pada masalah-masalah biologi dan kimia.
2. Memberikan informasi pada masyarakat bahwa mikroalga dengan batasan nutrisi dapat menghasilkan biomassa yang optimal.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Kajian Pustaka

Penelitian-penelitian sebelumnya telah banyak membahas tentang energi alternatif yang bersifat terbarukan berbahan mikroalga, salah satunya pengaruh metode pemanenan mikroalga terhadap biomassa dan kandungan esensial *Chorella vulgaris* (Pratama, 2011), menjelaskan bahwa kandungan nutrisi merupakan hal yang paling penting dalam pemanfaatan mikroalga. Lipid, klorofil, beta karotin, dan protein merupakan beberapa kandungan nutrisi yang dikandung oleh mikroalga yang dapat dimanfaatkan oleh manusia, pada metode pemanenan tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap kandungan beta karotin, lipid, dan protein. (Lestarini, 2012) pada penelitiannya menjelaskan tentang penurunan rumus model matematika dengan menggunakan prinsip konservasi massa yang diterapkan pada kinetika reaksi transesterifikasi yang berlangsung di dalam *batch reactor*. Selain itu dalam penelitiannya sistem dinyatakan dinamik dari masalah kendali optimal temperatur pada produksi biodiesel bersifat terkontrol. Upaya pengendalian temperatur selama reaksi transesterifikasi berlangsung terbukti dengan meningkatnya konsentrasi ester metil/biodiesel (C_E) yang dihasilkan yaitu semakin tinggi temperatur awal yang digunakan maka semakin besar konsentrasi ester metil/biodiesel (C_E) yang dihasilkan.

2.2 Dasar Teori

2.2.1 Mikroalga

Mikroalga adalah salah satu organisme yang dapat tumbuh pada rentang kondisi yang luas di permukaan bumi, pada umumnya mikroalga tumbuh pada tempat-tempat yang lembab, atau tempat yang sering terkena air dan banyak hidup pada lingkungan yang berair. Mikroalga memiliki keanekaragaman yang sangat tinggi. Ada sekitar 200.000 – 800.000 spesies mikroalga yang ada di bumi, dimana

baru sekitar 35.000 spesies saja yang telah diidentifikasi (Assadad, 2012). Beberapa spesies mikroalga dikenal sangat baik karena kemampuan untuk mensintesis dan mengumpulkan jumlah lipid yang cukup (Metting, 1996). Potensi ini telah menyebabkan beberapa penulis untuk mempertimbangkan bahwa mikroalga bisa menjadi salah satu bio utama penghasil bahan bakar di masa depan (Huntley, 2007).

Mikroalga merupakan mikroorganisme fotosintetik yang dapat menggunakan sinar matahari dan karbondioksida untuk menghasilkan biomassa serta menghasilkan sekitar 50% oksigen yang terdapat di atmosfer, selain itu mikroalga memiliki 4 komponen zat utama, yaitu karbohidrat, protein, asam nukleat, dan lipid. Persentase dari keempat komponen tersebut bermacam-macam tergantung pada jenis mikroalganya (Manullang, 2012). Mikroalga dapat digunakan sebagai salah satu bahan baku biofuel yang mempunyai keunggulan dibandingkan dengan bahan baku lainnya karena mikroalga mudah dibudidayakan, mikroalga pada masa pertumbuhannya dapat memanfaatkan kelebihan karbon dioksida di udara sehingga memiliki pengaruh positif terhadap efek gas rumah kaca.

Mikroalga *Isochrysis aff. Galbana* sangat sesuai sebagai suatu sumber nutrisi dengan pertumbuhan yang cepat. Keunggulan dari pengembangan mikroalga sebagai sumber bahan bakar fosil adalah:

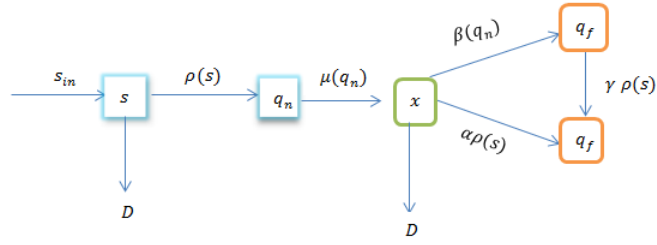
1. Memiliki kandungan lipid hingga 70%.
2. Memiliki kemampuan efisiensi fotosintesis yang tinggi.
3. Dapat menghasilkan biomassa yang lebih banyak.
4. Pertumbuhan mikroalga yang lebih cepat.
5. Dapat menggunakan air hasil daur ulang sehingga mampu menghemat sumber daya air (water recycling).
6. Dapat mengurangi emisi gas rumah kaca (CO_2 recycling).
7. Dapat menggunakan limbah tertentu sebagai sumber nutrisi.
8. Mempunyai komponen sampingan lain selain lipid (misalnya protein dan pigmen yang mempunyai nilai ekonomi yang tinggi).
9. Dapat mengubah CO_2 menjadi biomassa melalui proses fotosintesis.

10. Dapat bertahan di dalam salinitas tinggi sesuai dengan iklim Indonesia.

Trigliserida merupakan komponen utama lipid dari mikroalga, senyawa trigliserida dari mikroalga dapat diubah ke dalam bentuk metil ester melalui proses transesterifikasi. Asam lemak metil ester yang diperoleh dapat digunakan sebagai bahan bakar biodiesel (Panggabean, 2010), banyak hal yang melatar belakangi pemilihan mikroalga sebagai sumber biofuel diantaranya adalah potensi keanekaragaman hayati mikroalga di perairan Indonesia dan keunggulan produksi biofuel pada teknologi mikroalga, tetapi di Indonesia penelitian tentang biofuel berbahan baku mikroalga masih sangat terbatas. Sehingga perlu untuk melakukan penelitian pengembangan untuk mengetahui kandungan lipid pada berbagai jenis mikroalga.

2.3 Model Matematika

Laju perubahan nutrisi dipengaruhi oleh nutrisi yang masuk s_{in} dan pengenceran sebesar D . Laju penyerapan nutrisi oleh mikroalga untuk membuat nitrogen dilambangkan $\rho(s)$, di satu sisi kuota nitrogen dipengaruhi oleh serapan nutrisi sebesar $\rho(s)$ di sisi lain akan berkurang karena adanya multiplikasi atau pembelahan sel sebesar $\mu(q_n)$. laju pertumbuhan mikroalga tergantung pada kuota intra-seluler nutrisi sebesar $\mu(q_n)x$. Pertumbuhan mikroalga diilustrasikan pada Gambar 2.1. pada proses budidaya mikroalga karbon dioksida dipompa kedalam bioreaktor yang berisikan air dan berubah menjadi glukosa melalui fotosintesis. Glukosa tersebut dimobilisasi atau digerakkan untuk menghasilkan fungsional karbon terutama protein ketika mikroalga menyerap nitrogen $\alpha\rho(s)x$, secara paralel glukosa digunakan untuk menghasilkan asam lemak bebas yang dapat disimpan sebagai netral lipid $\beta q_n \mu(q_n)x$. Kemudian asam lemak tersebut dimobilisasi untuk menghasilkan fungsional karbon $\gamma\rho(s)x$. Produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi dimodelkan dengan perubahan substrat nutrisi (s), kuota nitrogen (q_n), biomassa (x), kouta lipid (q_l), dan kuota fungsional karbon (q_f) terhadap waktu.



Gambar 2.1 Pertumbuhan Mikroalga

Model produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi dikatakan dinamis, karena model tersebut dinamis maka sistem pada model produksi lipid netral dengan keterbatasan nutrisi bersifat dinamis. Secara matematika model produksi lipid netral dengan keterbatasan nutrisi dapat dinyatakan pada Persamaan (2.1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \dot{s} &= Ds_{in} - \rho(s)x - Ds \\
 \dot{q}_n &= \rho(s) - \mu(q_n)q_n \\
 \dot{x} &= \mu(q_n)x - Dx \\
 \dot{q}_l &= (\beta q_n - q_l) \mu(q_n) - \gamma \rho(s) \\
 \dot{q}_f &= q_f \mu(q_n) + (\alpha + \gamma) \rho(s)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Keterangan:

- s = substrat nutrisi
- s_{in} = konsentrasi nutrisi yang dimasukkan
- q_n = kuota nitrogen
- x = biomassa
- q_l = kuota lipid
- q_f = kuota karbon fungsional
- D = laju pengenceran
- ρ = laju penyerapan
- μ = laju pertumbuhan
- $\bar{\mu}$ = laju pertumbuhan maksimum
- β = koefisien sintesis asam lemak

γ = koefisien mobilisasi asam lemak

α = koefisien sintesis protein

Q_0 = kuota nitrogen minimum

dengan kondisi awal:

$$s(t_0) = s(0)$$

$$q_n(t_0) = q_n(0)$$

$$x(t_0) = x(0)$$

$$q_l(t_0) = q_l(0)$$

$$q_f(t_0) = q_f(0)$$

keadaan akhir,

$$s(t_f) = s_{f1}$$

$$q_n(t_f) = q_{nf2}$$

$$x(t_f) = x_{f3}$$

$$q_l(t_f) = q_{lf4}$$

$$q_f(t_f) = q_{ff5}$$

dan kondisi batas:

$$s(t_f) = 3$$

$$q_n(t_f) = 0.5$$

$$x(t_f) = 0.06$$

$$q_l(t_f) = 0.6$$

$$q_f(t_f) = 0.5$$

2.4 Kestabilan Sistem

Model sistem yang bersifat deterministik sering kali memerlukan pengujian kestabilan. Analisa kestabilan dilakukan dengan cara menentukan titik kesetimbangan pada sistem dinamik. Analisis kestabilan berupa kajian atas proses perkembangan suatu sistem yaitu seberapa jauh perkembangan sistem yang dimodelkan menyimpang dari titik keseimbangan yang dicapainya.

Sistem dinamik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.2}$$

untuk menentukan kestabilan suatu sistem, dimana f dan g tak linear, jika titik (x_0, y_0) membuat fungsi f dan g sama dengan nol maka titik setimbang. Untuk sistem tak linear akar karakteristik atau nilai eigen diperoleh dengan melinearkan terlebih dahulu sehingga diperoleh bentuk sistem yang linear. Selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linear yang ekuivalen dengan persamaan (2.2). Ekspansi deret Taylor pada system dinamik $f(x, y)$ disekitaran titik (x_0, y_0) sebagai berikut:

$$f(x, y) \equiv f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} \big|_{(x_0, y_0)} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} \big|_{(x_0, y_0)} + \dots$$

$$g(x, y) \equiv g(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x} \big|_{(x_0, y_0)} + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y} \big|_{(x_0, y_0)} + \dots$$

Misalkan $u = x - x_0$ dan $v = y - y_0$ maka akan diperoleh sistem yang telah dilinearisasi

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u \frac{\partial f}{\partial x} \big|_{(x_0, y_0)} + v \frac{\partial f}{\partial y} \big|_{(x_0, y_0)} + \dots \\ \dot{v} &= u \frac{\partial g}{\partial x} \big|_{(x_0, y_0)} + v \frac{\partial g}{\partial y} \big|_{(x_0, y_0)} + \dots\end{aligned}\tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) dapat juga ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \big|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial f}{\partial y} \big|_{(x_0, y_0)} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \big|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial g}{\partial y} \big|_{(x_0, y_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{Taslina, 2011}).$$

Dengan J adalah matriks Jacobian

Jika sistem (2.2) merupakan sistem linear dengan koefisien konstan, maka mempunyai bentuk

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{aligned}$$

dapat ditulis kembali dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dengan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka akar-akar persamaan karakteristik atau nilai eigen yang disimbolkan λ dari matrik A adalah $|\lambda I - A|$ atau $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$ dengan I adalah matrik identitas.

Stabilitas sistem dapat ditentukan dari nilai eigen (Boyce, 2008):

- a. Sistem dikatakan stabil jika dan hanya jika akar karakteristiknya real dan negatif.
- b. Sistem dikatakan stabil asimtotis jika akar karakteristiknya real negatif atau mempunyai bagian real negatif

Sistem dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika akar karakteristiknya real positif atau mempunyai paling sedikit satu akar karakteristik dengan bagian real positif.

2.5 Kestabilan Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-hurwitz digunakan untuk menentukan apakah sistem linear stabil atau tidak dengan memeriksa akar-akar persamaan karakteristik sistem. Pada model produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi memiliki polinomial pangkat lima sehingga pada kasus tersebut permasalahan kestabilan titik setimbang tidak mudah ditemukan bagian real nilai eigen, oleh karena itu kriteria

Routh-Hurwitz dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini. Persamaan karakteristik sistem orde n sebagai berikut:

$$\rho(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (2.4)$$

dengan $a_n \neq 0$. Kriteria Routh-Hurwitz dapat digunakan untuk mengecek langsung kestabilan dengan melihat koefisien a_i tanpa melakukan perhitungan akar-akar dari polinomial yang telah ada pada Persamaan (2.4), dengan melihat tabel kriteri Routh-Hurwitz maka dapat ditentukan apakah semua akar-akar bagian realnya adalah negatif (Subiono, 2013).

Tabel 2.1 Kriteria Routh-Hurwitz (Subiono, 2013)

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3
$\vdots$	$\vdots$		
s^0	q		

Nilai b_1, b_2, b_3, c_1, c_2 , dan c_3 diperoleh dari perhitungan sebagai berikut:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

Sistem dikatakan stabil jika tidak ada perubahan tanda dalam kolom pertama pada tabel Kriteria Routh-Hurwitz yaitu semuanya bertanda positif atau negatif.

2.6 Kendali Optimal

Tujuan utama dari kendali optimal adalah untuk mendapatkan kendali $u(t)$ yang diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi beberapa kendala fisis, sehingga akan diperoleh nilai maksimum atau minimum yang sesuai dengan kriteria fungsi tujuan. Kendali dengan keadaan dan waktu yang sama dapat ditentukan nilai optimum berdasarkan fungsi tujuan yang diberikan. Komponen-komponen kendali yang dapat diberikan pada masalah kendali optimal adalah sebagai berikut (Naidu, 2002).

1. Persamaan plant $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$
2. Indeks performansi

$$J = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt$$

3. Kondisi batas,

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_f) = x_f$$

2.7 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip maksimum digunakan untuk memperoleh kendali optimal yang terbaik pada sistem dinamik dari state awal sampai state akhir, yaitu dengan memaksimalkan fungsi tujuan dimana kendali $u(t)$ terbatas pada $(u(t) \in U)$. Permasalahan ini telah dikembangkan oleh L. S. Pontryagin dan rekan kerjanya pada tahun 1950 yang diaplikasikan untuk semua masalah kalkulus variasi. Oleh karena itu, prinsip ini disebut dengan Prinsip Pontryagin Maksimum.

Prinsip ini menyatakan secara informal bahwa persamaan Hamiltonian akan dimaksimalkan sepanjang U yang merupakan himpunan kendali yang mungkin (Bryson, 1975). Hasilnya juga dapat dinamakan Prinsip Minimum Pontryagin karena mempunyai pengertian yang sama antara meminimalkan dan memaksimalkan dengan mengalikan (-1) pada fungsi tujuan.

Langkah-langkah penyelesaian untuk memperoleh kendali optimal dari sistem sebagai berikut:

1. Bentuk fungsi Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t)$$

2. Maksimalkan H terhadap semua vektor kendali $u(t)$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_* = 0$$

maka diperoleh $u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$

3. Subtitusikan hasil dari langkah 2 ke dalam langkah 1, sehingga akan diperoleh H^* yang optimal.

$$H^*(t)(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t) = H^*(t)(x^*(t), h(x^*(t)))$$

4. Menyelesaikan persamaan diferensial orde 2 persamaan *state* dan *costate*.

$$\dot{x}^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_* \text{ dan } \dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_*$$

5. Untuk memperoleh kendali optimal, subtitusikan solusi $x^*(t), \lambda^*(t)$ dari langkah 4 ke dalam kendali $u^*(t)$ pada langkah 2.

BAB 3

METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan beberapa metode penelitian yang akan digunakan untuk mencapai tujuan penelitian yaitu studi literatur, melakukan analisa kestabilan dari setiap titik kesetimbangan dari model produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi, penyelesaian masalah kendali optimal, simulasi, analisis hasil simulasi dan menarik kesimpulan.

1.1 Identifikasi Masalah dan Studi Literatur

Pada tahap ini akan dilaksanakan identifikasi permasalahan dan studi literatur untuk memperoleh informasi yang berkaitan dengan mikroalga, biomassa, kestabilan dan kendali optimal. Hal ini diperoleh dengan mengumpulkan beberapa buku, paper, jurnal dan artikel-artikel dari internet yang membahas tentang proses perumbuhan mikroalga yang akan menjadi biomassa, teori tentang kendali optimal yang penyelesaiannya menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

1.2 Analisis Kestabilan

Pada tahap ini model produksi lipid netral pada mikroalga dengan batasan nutrisi dimulai dengan menentukan titik kesetimbangan sehingga mendapatkan persamaan karakteristik dari matrik Jacobian setelah itu menganalisis kestabilan sistem.

1.3 Penyelesaian Kendali Optimal

Pada tahap penyelesaian kendali optimal pada masalah produksi lipid netral pada mikroalga dibawah batasan nutrisi, teori kendali diharapkan dapat mengoptimalkan hasil biomassa dengan mengontrol tingkat pengenceran melalui pembatasan nutrisi dengan menggunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin. Adapun langkah-langkah penyelesaian kendali optimal sebagai berikut:

- a. Bentuk fungsi Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t)$$

- b. Maksimumkan H terhadap semua vektor kendali $u(t)$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_* = 0$$

maka diperoleh $u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$

- c. Subtitusikan hasil langkah 2 ke dalam langkah 1, sehingga akan diperoleh H^* yang optimal.

$$H^*(t)(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t) = H^*(t)(x^*(t), h(x^*(t)))$$

- d. Selesaikan persamaan diferensial orde 2 untuk state dan costate.

$$x^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_* \text{ dan } \lambda^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_*$$

- e. Untuk memperoleh kendali optimal, subtitusikan solusi $x^*(t), \lambda^*(t)$ dari langkah 4 ke dalam kendali $u^*(t)$ pada langkah 2.

3.4 Simulasi

Pada tahap ini simulasi numerik digunakan untuk menyelesaikan masalah kendali optimal pada model tersebut. Pada simulasi numerik ini akan dilihat perilaku antara sistem yang belum diberi kendali dan sistem yang suda diberi kendali. Penyelesaian numerik dengan memanfaatkan metode Sweep Maju-Mundur Runge-Kutta orde 4 untuk mengetahui dinamika perubahan jumlah konsentrasi sebelum dan sesudah diberikan kendali optimal pengenceran. Langkah-langkah dalam metode Sweep Maju-Mundur runge kutta orde 4 adalah sebagai berikut.

Langkah 1: Membagi interval sebanyak n subinterval. Sehingga state dan costate dapat didefinisikan sebagai suatu vektor.

Langkah 2: Menggunakan kondisi awal dan nilai u untuk menyelesaikan persamaan *state* dengan langkah maju metode Runge-Kutta Orde Empat.

Langkah 3: Menggunakan kondisi akhir $(t_f) = b$ dan nilai *state* serta u untuk menyelesaikan persamaan *costate* dengan langkah mundur metode Runge-Kutta Orde Empat.

Langkah 4: Memperbaharui nilai kontrol u dengan mensubstitusi nilai $state$ dan $costate$ yang baru ke dalam karakteristik kendali optimal.

Langkah 5: Memeriksa konvergensi. Jika nilai $error$ dalam iterasi saat ini dan iterasi sebelumnya sangat kecil maka cetak nilai-nilai saat ini sebagai solusi. Tetapi, jika nilai errornya tidak sangat kecil maka kembali ke langkah 2.

3.5 Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini hasil simulasi numerik yang diperoleh pada model tersebut, dianalisa hasil pada sistem tanpa ada kendali dengan sistem yang sudah diberikan kendali.

3.6 Kesimpulan

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penulisan laporan dan penarikan kesimpulan dari hasil analitik dan simulasi numerik mengenai kendali optimal dan hasil yang optimal pada model tersebut.

BAB 4

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang analisis kestabilan dan kendali optimal pada model produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi. Pembahasan model tersebut dimulai dengan mencari titik kesetimbangan dari model produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi dan menganalisa kestabilan dari tiap titik kesetimbangan yang diperoleh serta menyelesaikan masalah kendali optimal dari sistem dinamik dengan fungsi objektif yang diperoleh serta diselesaikan dengan menggunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin.

4.1 Model Matematika

Model produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi (Mairet, dkk, 2011) terdiri dari substrat nutrisi (s), kuota nitrogen (q_n), biomassa (x), kuota lipid (q_l) dan kuota fungsional karbon (q_f) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= Ds_{in} - \rho(s)x - Ds \\ \frac{dq_n}{dt} &= \rho(s) - \mu(q_n)q_n \\ \frac{dx}{dt} &= \mu(q_n)x - Dx \\ \frac{dq_l}{dt} &= (\beta q_n - q_l)\mu(q_n) - \gamma\rho(s) \\ \frac{dq_f}{dt} &= -q_f\mu(q_n) + (\alpha + \gamma)\rho(s)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Laju penyerapan $\rho(s)$ menggunakan fungsi Michaelis-Menten, masing-masing merepresentasikan laju penyerapan maksimum ρ_m dan konstanta setengah

saturasi (K_s). Dimana konstanta setengah saturasi adalah konsentrasi substrat pada waktu separuh pertumbuhan maksimum. Artinya ketika mikroalga belum cukup menyerap nutrisi, mikroalga akan terus menyerap nutrisi tersebut sampai keadaan jenuh. Adapun persamaan untuk laju penyerapan maksimum adalah sebagai berikut:

$$\rho(s) = \rho_m \frac{s}{s + K_s} \quad (4.2)$$

Model untuk laju pertumbuhan spesifik $\mu(q_n)$ menggunakan model Droop sebagai berikut:

$$\mu(q_n) = \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) \quad (4.3)$$

Masing-masing merepresentasikan laju pertumbuhan maksimum mikroalga $\bar{\mu}$ dan kuota nitrogen minimum Q_0 .

Substitusi Persamaan (4.2) dan (4.3) ke Persamaan (4.1), sehingga Persamaan (4.1) akan menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= Ds_{in} - \rho_m \frac{s}{s + K_s} x - Ds \\ \frac{dq_n}{dt} &= \rho_m \frac{s}{s + K_s} - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) q_n \\ \frac{dx}{dt} &= \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) x - Dx \\ \frac{dq_l}{dt} &= (\beta q_n - q_l) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) - \gamma \rho_m \frac{s}{s + K_s} \\ \frac{dq_f}{dt} &= -(q_f) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \rho_m \frac{s}{s + K_s} \end{aligned} \quad (4.4)$$

dengan kondisi awal:

$$\begin{aligned} s(t_0) &= s(0) \\ q_n(t_0) &= q_n(0) \\ x(t_0) &= x(0) \end{aligned}$$

$$q_l(t_0) = q_l(0)$$

$$q_f(t_0) = q_f(0)$$

dan keadaan akhir

$$s(t_f) = s_{f1}$$

$$q_n(t_f) = q_{nf2}$$

$$x(t_f) = x_{f3}$$

$$q_l(t_f) = q_{lf4}$$

$$q_f(t_f) = q_{ff5}$$

dengan t_f adalah waktu akhir yang telah ditentukan

4.2 Titik Keseimbangan

Titik setimbang pada model produksi lipid netral pada mikroalga dengan batasan nutrisi diperoleh ketika kondisi $\dot{s} = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{q}_n = 0$, $\dot{q}_l = 0$, dan $\dot{q}_f = 0$.

Untuk mencari titik setimbang pada Persamaan (4.4) yang artinya mencari state $s = 0$, $q_n = 0$, $x = 0$, $q_l = 0$, dan $q_f = 0$ yang memenuhi Persamaan tersebut.

Persamaan (4.4) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Ds_{in} - \rho_m \frac{s}{s + K_s} x - Ds &= 0 \\ \rho_m \frac{s}{s + K_s} - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) q_n &= 0 \\ \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) x - Dx &= 0 \\ (\beta q_n - q_l) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) - \gamma \rho_m \frac{s}{s + K_s} &= 0 \\ -(q_f) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \rho_m \frac{s}{s + K_s} &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dari sistem (4.5) tersebut akan diperoleh titik setimbang $(s^*, q_n^*, x^*, q_l^*, q_f^*)$.

Pada Persamaan (4.5) akan diperoleh titik

$$\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) x - Dx = 0$$

$$x \left(\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) - D \right) = 0$$

$$x = 0$$

Jika $x = 0$ maka akan diperoleh nilai q_n untuk titik setimbang yang kedua yaitu:

$$\left(\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) - D \right) = 0$$

$$\bar{\mu} - \frac{\bar{\mu}Q_0}{q_n} - D = 0$$

$$\bar{\mu} - D = \frac{\bar{\mu}Q_0}{q_n}$$

$$q_n = \frac{\bar{\mu}Q_0}{\bar{\mu} - D}$$

Substitusikan nilai $x = 0$ ke Persamaan (4.5), sehingga akan diperoleh nilai s sebagai berikut:

$$Ds_{in} - \rho_m \frac{s}{s + K_s} x - Ds = 0$$

$$Ds_{in} - Ds = 0$$

$$s = s_{in}$$

Substitusikan nilai $s = s_{in}$ ke Persamaan (4.5), sehingga akan diperoleh nilai q_n sebagai berikut:

$$\rho_m \frac{s}{s + K_s} - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) q_n = 0$$

$$\rho_m \frac{s_{in}}{s_{in} + K_s} - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) q_n = 0$$

$$\rho_m \frac{s_{in}}{s_{in} + K_s} - \bar{\mu} q_n + \bar{\mu} Q_0 = 0$$

$$\bar{\mu} q_n = \rho_m \frac{s_{in}}{s_{in} + K_s} + \bar{\mu} Q_0$$

$$q_n = \frac{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)}$$

Substitusikan nilai $s = s_{in}$ dan $q_n = \frac{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)}$ ke Persamaan

(4.5), sehingga akan diperoleh nilai q_l sebagai berikut:

$$(\beta q_n - q_l) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n}\right) - \gamma \rho_m \frac{s}{s + K_s} = 0$$

$$\left(\beta \frac{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)} - q_l \right) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0 \bar{\mu} (s_{in} + K_s)}{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s}\right)$$

$$- \gamma \rho_m \frac{s_{in}}{s_{in} + K_s} = 0$$

$$\bar{\mu} \frac{\beta \rho_m s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)} - q_l \bar{\mu} - \frac{Q_0 \bar{\mu} (s_{in} + K_s)}{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s}.$$

$$\left(\frac{\beta \rho_m s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)} \right) + q_l \left(\frac{Q_0 \bar{\mu} (s_{in} + K_s)}{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s} \right) -$$

$$\gamma \rho_m \frac{s_{in}}{s_{in} + K_s} = 0$$

$$- q_l \bar{\mu} + q_l \left(\frac{Q_0 \bar{\mu} (s_{in} + K_s)}{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s} \right) + \bar{\mu} \frac{\beta \rho_m s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)} -$$

$$\beta Q_0 - \gamma \rho_m \frac{s_{in}}{s_{in} + K_s} = 0$$

$$\begin{aligned}
& -q_l \bar{\mu} + q_l \left(\frac{Q_0 \bar{\mu} (s_{in} + K_s)}{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s} \right) + \bar{\mu} \frac{\beta \rho_m s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)} - \\
& \beta Q_0 - \gamma \rho_m \frac{s_{in}}{s_{in} + K_s} = 0 \\
q_l &= \frac{\beta \rho_m s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 K_s - \gamma \rho_m s_{in} - \gamma \bar{\mu} s_{in} Q_0 - \gamma \bar{\mu} s_{in} K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)}
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai $s = s_{in}$ dan $q_n = \frac{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)}$ ke Persamaan

(4.5), sehingga akan diperoleh nilai q_f sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& -(q_f) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \rho_m \frac{s}{s + K_s} = 0 \\
& -q_f \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0 \bar{\mu} (s_{in} + K_s)}{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s} \right) + \frac{(\alpha + \gamma) \rho_m s_{in}}{s_{in} + K_s} = 0 \\
& -q_f \bar{\mu} + q_f \bar{\mu} \frac{Q_0 \bar{\mu} (s_{in} + K_s)}{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s} + \frac{(\alpha + \gamma) \rho_m s_{in}}{s_{in} + K_s} = 0 \\
q_f &= \frac{\rho_m s_{in} \alpha + \rho_m s_{in} \gamma + s_{in} \alpha \bar{\mu} Q_0 + K_s \alpha \bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)}
\end{aligned}$$

sehingga, diperoleh titik setimbang pertama dari sistem tersebut yaitu:

$$\begin{aligned}
T_1 \left(s_1^*, q_n^*, x_1^*, q_l^*, q_f^* \right) &= \left\{ s = s_{in}, q_n = \frac{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)}, x = 0, \right. \\
q_l &= \frac{\beta \rho_m s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 K_s - \gamma \rho_m s_{in} - \gamma \bar{\mu} s_{in} Q_0 - \gamma \bar{\mu} s_{in} K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)}, \\
q_f &= \frac{\rho_m s_{in} \alpha + \rho_m s_{in} \gamma + s_{in} \alpha \bar{\mu} Q_0 + K_s \alpha \bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)} \left. \right\}
\end{aligned}$$

Titik setimbang yang kedua diperoleh dengan mensubstitusi nilai $q_n = \frac{\bar{\mu}Q_0}{\bar{\mu} - D}$ ke

Persamaan (4.5), sehingga akan diperoleh nilai titik setimbang yang kedua dari s yaitu:

$$\begin{aligned}\rho_m \frac{s}{s + K_s} - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) q_n &= 0 \\ \rho_m \frac{s}{s + K_s} - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0(\bar{\mu} - D)}{\bar{\mu}Q_0} \right) \frac{\bar{\mu}Q_0}{(\bar{\mu} - D)} &= 0 \\ \rho_m \frac{s}{s + K_s} - \bar{\mu} \frac{\bar{\mu}Q_0}{(\bar{\mu} - D)} + \bar{\mu}Q_0 &= 0 \\ s &= \frac{D\bar{\mu}Q_0K_s}{\rho_m\bar{\mu} - \rho_mD - D\bar{\mu}Q_0}\end{aligned}$$

selanjutnya, dengan mensubstitusi nilai $s = \frac{D\bar{\mu}Q_0K_s}{\rho_m\bar{\mu} - \rho_mD - D\bar{\mu}Q_0}$ ke Persamaan (4.5),

maka diperoleh nilai titik setimbang yang kedua dari x :

$$\begin{aligned}Ds_{in} - \rho_m \frac{s}{s + K_s} x - Ds &= 0 \\ Ds_{in} - \rho_m \frac{\frac{D\bar{\mu}Q_0K_s}{(\rho_m\bar{\mu} - \rho_mD - D\bar{\mu}Q_0)}}{\left(\frac{D\bar{\mu}Q_0K_s}{(\rho_m\bar{\mu} - \rho_mD - D\bar{\mu}Q_0)} \right) + K_s} x - D \left(\frac{D\bar{\mu}Q_0K_s}{\rho_m\bar{\mu} - \rho_mD - D\bar{\mu}Q_0} \right) &= 0 \\ Ds_{in} - \frac{\rho_mD\bar{\mu}Q_0K_s}{D\bar{\mu}Q_0K_s + (\rho_m\bar{\mu} - \rho_mD - D\bar{\mu}Q_0)K_s} x - \left(\frac{D^2\bar{\mu}Q_0K_s}{\rho_m\bar{\mu} - \rho_mD - D\bar{\mu}Q_0} \right) &= 0 \\ x &= \frac{s_{in}\rho_m\bar{\mu}^2 - 2s_{in}\rho_mD\bar{\mu} - Ds_{in}\bar{\mu}^2Q_0 - D\bar{\mu}^2Q_0K_s + s_{in}\rho_mD^2 + D^2s_{in}\bar{\mu}Q_0 + D\bar{\mu}^2Q_0K_s}{\bar{\mu}Q_0(\rho_m\bar{\mu} - \rho_mD - D\bar{\mu}Q_0)}\end{aligned}$$

kemudian, untuk memperoleh nilai dari q_l , maka substitusikan nilai

$s = \frac{D\bar{\mu}Q_0K_s}{\rho_m\bar{\mu} - \rho_mD - D\bar{\mu}Q_0}$ dan $q_n = \frac{\bar{\mu}Q_0}{\bar{\mu} - D}$ ke Persamaan (4.5). sehingga diperoleh

nilai titik setimbang yang kedua dari q_l :

$$(\beta q_n - q_l) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) - \gamma \rho_m \frac{s}{s + K_s} = 0$$

$$\left(\beta \left(\frac{\bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} - D} \right) - q_l \right) \left(\bar{\mu} - \frac{\bar{\mu} Q_0}{\left(\frac{\bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} - D} \right)} \right) - \frac{\left(\frac{D \bar{\mu} Q_0 K_s \gamma \rho_m}{\rho_m \bar{\mu} - \rho_m D - D \bar{\mu} Q_0} \right)}{\left(\frac{D \bar{\mu} Q_0 K_s}{\rho_m \bar{\mu} - \rho_m D - D \bar{\mu} Q_0} \right) + K_s} = 0$$

$$\left(\frac{\beta \bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} - D} - q_l \right) \left(\bar{\mu} - \frac{\bar{\mu} Q_0 (\bar{\mu} - D)}{\bar{\mu} Q_0} \right) - \frac{D \bar{\mu} Q_0 K_s \gamma \rho_m}{D \bar{\mu} Q_0 K_s + K_s (\rho_m \bar{\mu} - \rho_m D - D \bar{\mu} Q_0)} = 0$$

$$\left(\frac{\beta \bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} - D} - q_l \right) D - \frac{D \bar{\mu} Q_0 K_s \gamma \rho_m}{K_s (\rho_m \bar{\mu} - \rho_m D)} = 0$$

$$\left(\frac{\beta \bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} - D} - q_l \right) D - \frac{D \bar{\mu} Q_0 \gamma}{(\bar{\mu} - D)} = 0$$

$$q_l = \frac{\bar{\mu} Q_0 (\beta - \gamma)}{\bar{\mu} - D}$$

selanjutnya, nilai dari q_f diperoleh dengan mensubstitusikan nilai

$s = \frac{D \bar{\mu} Q_0 K_s}{\rho_m \bar{\mu} - \rho_m D - D \bar{\mu} Q_0}$ dan $q_n = \frac{\bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} - D}$ ke Persamaan (4.5). Maka diperoleh nilai

titik setimbang yang kedua dari q_f yaitu:

$$-(q_f) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \rho_m \frac{s}{s + K_s} = 0$$

$$-q_f \bar{\mu} + \frac{q_f \bar{\mu} Q_0}{\left(\frac{\bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} - D} \right)} + (\alpha + \gamma) \rho_m \frac{\left(\frac{D \bar{\mu} Q_0 K_s}{\rho_m \bar{\mu} - \rho_m D - D \bar{\mu} Q_0} \right)}{\left(\frac{D \bar{\mu} Q_0 K_s}{\rho_m \bar{\mu} - \rho_m D - D \bar{\mu} Q_0} \right) + K_s} = 0$$

$$-q_f \bar{\mu} + q_f (\bar{\mu} - D) + (\alpha + \gamma) \frac{D \bar{\mu} Q_0 K_s \rho_m}{D \bar{\mu} Q_0 K_s + K_s (\rho_m \bar{\mu} - \rho_m D - D \bar{\mu} Q_0)} = 0$$

$$-q_f D + \frac{(\alpha + \gamma) D \bar{\mu} Q_0}{(\bar{\mu} - D)} = 0$$

$$q_f = \frac{(\alpha + \gamma) \bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} - D}$$

maka, diperoleh titik setimbang yang kedua dari sistem tersebut yaitu:

$$\begin{aligned} & T_2 \left(s_2^*, q_{n2}^*, x_2^*, q_{l2}^*, q_{f2}^* \right) \\ &= \left\{ s = \frac{D \bar{\mu} Q_0 K_s}{\rho_m \bar{\mu} - \rho_m D - D \bar{\mu} Q_0}, q_n = \frac{\bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} - D}, q_l = \frac{\bar{\mu} Q_0 (\beta - \gamma)}{\bar{\mu} - D}, q_f = \frac{(\alpha + \gamma) \bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} - D} \right. \\ & \left. x = \frac{s_{in} \rho_m \bar{\mu}^2 - 2 s_{in} \rho_m D \bar{\mu} - D s_{in} \bar{\mu}^2 Q_0 - D \bar{\mu}^2 Q_0 K_s + s_{in} \rho_m D^2 + D^2 s_{in} \bar{\mu} Q_0 + D \bar{\mu}^2 Q_0 K_s}{\bar{\mu} Q_0 (\rho_m \bar{\mu} - \rho_m D - D \bar{\mu} Q_0)} \right\} \end{aligned}$$

4.3. Analisis Kestabilan

Setelah mengetahui titik setimbang dari model produksi lipid netral pada mikroalga dengan batasan nutrisi, maka perlu dilakukan analisis suatu kestabilan pada titik setimbang tersebut.

Misalkan:

$$\begin{aligned} f_1 &= D s_{in} - \rho_m \frac{s}{s + K_s} x - D s \\ f_2 &= \rho_m \frac{s}{s + K_s} - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) q_n \\ f_3 &= \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) x - D x \\ f_4 &= (\beta q_n - q_l) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) - \gamma \rho_m \frac{s}{s + K_s} \\ f_5 &= -(q_f) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n} \right) + (\alpha + \gamma) \rho_m \frac{s}{s + K_s} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sistem dinamik pada Persamaan (4.6) adalah sistem yang non-linear, sehingga persamaan tersebut perlu dilinearisasi terlebih dahulu dengan membentuk matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial q_l} & \frac{\partial f_1}{\partial q_f} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial q_l} & \frac{\partial f_2}{\partial q_f} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s} & \frac{\partial f_3}{\partial q_n} & \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial q_l} & \frac{\partial f_3}{\partial q_f} \\ \frac{\partial f_4}{\partial s} & \frac{\partial f_4}{\partial q_n} & \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial q_l} & \frac{\partial f_4}{\partial q_f} \\ \frac{\partial f_5}{\partial s} & \frac{\partial f_5}{\partial q_n} & \frac{\partial f_5}{\partial x} & \frac{\partial f_5}{\partial q_l} & \frac{\partial f_5}{\partial q_f} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{(s+K_s)\rho_m x - \rho_m x s}{(s+K_s)^2} - D & 0 & -\rho_m \frac{s}{(s+K_s)} & 0 & 0 \\ \frac{(s+K_s)\rho_m - \rho_m s}{(s+K_s)^2} & \bar{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\mu} x Q_0}{q_n^2} & \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n}\right) - D & 0 & 0 \\ \frac{(s+K_s)\rho_m \gamma - \rho_m \gamma}{(s+K_s)^2} & \beta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n}\right) + (\beta q_n - q_l) \frac{\bar{\mu} Q_0}{q_n^2} & 0 & -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n}\right) & 0 \\ \frac{(\alpha + \gamma)((s+K_s)\rho_m - \rho_m s)}{(s+K_s)^2} & -\frac{q_f \bar{\mu} Q_0}{q_n^2} & 0 & 0 & -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n}\right) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Selanjutnya, titik setimbang $T_1(s_1^*, q_{n1}^*, x_1^*, q_{l1}^*, q_{f1}^*)$ substitusikan kedalam matriks Jacobian pada Persamaan (4.8), dengan nilai dari

$$s_1^* = s_{in}$$

$$q_{n1}^* = \frac{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)}$$

$$x_1^* = 0$$

$$q_{l1}^* = \frac{\beta \rho_m s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \beta \bar{\mu} Q_0 K_s - \gamma \rho_m s_{in} - \gamma \bar{\mu} s_{in} Q_0 - \gamma \bar{\mu} s_{in} K_s}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)}$$

$$q_{f1}^* = \frac{\rho_m s_{in} \alpha + \rho_m s_{in} \gamma + s_{in} \alpha \bar{\mu} Q_0 + K_s \alpha \bar{\mu} Q_0}{\bar{\mu} (s_{in} + K_s)}$$

maka diperoleh matriks Jacobian untuk titik $T_1 (s_1^*, q_{n1}^*, x_1^*, q_{l1}^*, q_{f1}^*)$:

$$J = \begin{bmatrix} -D & 0 & -\rho_m \frac{s_1^*}{(s_1^* + K_s)} & 0 & 0 \\ \frac{(s_1^* + K_s) \rho_m - \rho_m s_1^*}{(s_1^* + K_s)^2} & \bar{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n1}^*} \right) - D & 0 & 0 \\ \frac{(s_1^* + K_s) \rho_m \gamma - \rho_m \gamma}{(s_1^* + K_s)^2} & \beta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n1}^*} \right) + \left(\beta q_{n1}^* - q_{l1}^* \right) \frac{\bar{\mu} Q_0}{q_{n1}^{2*}} & 0 & -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n1}^*} \right) & 0 \\ \frac{(\alpha + \gamma) \left((s_1^* + K_s) \rho_m - \rho_m s_1^* \right)}{(s_1^* + K_s)^2} & -\frac{q_{f1}^* \bar{\mu} Q_0}{q_{n1}^{2*}} & 0 & 0 & -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n1}^*} \right) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Untuk menganalisis kestabilan pada titik $T_1 (s_1^*, q_{n1}^*, x_1^*, q_{l1}^*, q_{f1}^*)$ tersebut, maka langkah selanjutnya adalah mencari nilai-nilai karakteristik atau nilai eigen dari matriks Jacobian pada Persamaan (4.9). Nilai karakteristik tersebut diperoleh dari $(J - \lambda I)$ sebagai berikut:

$$(J - \lambda I) = \begin{bmatrix} -D - \lambda & 0 & -\rho_m \frac{s_1^*}{(s_1^* + K_s)} & 0 & 0 \\ \frac{(s_1^* + K_s) \rho_m - \rho_m s_1^*}{(s_1^* + K_s)^2} & \bar{\mu} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n1}^*} \right) - D - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{(s_1^* + K_s) \rho_m \gamma - \rho_m \gamma}{(s_1^* + K_s)^2} & \beta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n1}^*} \right) + \left(\beta q_{n1}^* - q_{l1}^* \right) \frac{\bar{\mu} Q_0}{q_{n1}^{2*}} & 0 & -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n1}^*} \right) - \lambda & 0 \\ \frac{(\alpha + \gamma) \left((s_1^* + K_s) \rho_m - \rho_m s_1^* \right)}{(s_1^* + K_s)^2} & -\frac{q_{f1}^* \bar{\mu} Q_0}{q_{n1}^{2*}} & 0 & 0 & -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n1}^*} \right) - \lambda \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Nilai eigen matriks diperoleh dari $|J - \lambda I| = 0$, sehingga akar-akar Persamaan karakteristik yang diperoleh adalah:

$$\lambda_1 = -D$$

$$\lambda_2 = \bar{\mu}$$

$$\lambda_3 = \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0 \bar{\mu} (s_{in} + K_s)}{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s} \right) - D$$

$$D > \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0 \bar{\mu} (s_{in} + K_s)}{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s} \right)$$

$$\lambda_4 = -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0 \bar{\mu} (s_{in} + K_s)}{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s} \right)$$

$$\lambda_5 = -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0 \bar{\mu} (s_{in} + K_s)}{\rho_m s_{in} + \bar{\mu} Q_0 s_{in} + \bar{\mu} Q_0 K_s} \right)$$

Nilai eigen λ_2 dan λ_3 mempunyai bagian real negatif jika nilai $\bar{\mu}$ berada pada interval $[-1, 0) \cup (0, 1]$. Dalam hal ini nilai batas bawah minus satu menyatakan laju pertumbuhan maksimum mengalami penurunan, sedangkan nilai batas atas positif satu menyatakan laju pertumbuhan maksimum mengalami peningkatan. Jika $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$ maka laju pertumbuhan maksimum mengalami penurunan. Karena nilai dari semua $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 < 0$ dan $\lambda_5 < 0$ memiliki akar-akar negatif, sehingga semua nilai eigen bernilai negatif. Dengan kata lain titik kesetimbangan $T_1(s_1^*, q_{n_1}^*, x_1^*, q_{l_1}^*, q_{f_1}^*)$ bersifat stabil.

Selanjutnya, untuk mengecek kestabilan pada titik setimbang $T_2(s_2^*, q_{n_2}^*, x_2^*, q_{l_2}^*, q_{f_2}^*)$. Analisis dilakukan dengan cara yang sama seperti pada analisis titik setimbang yang pertama.

Titik setimbang $T_2(s_2^*, q_{n_2}^*, x_2^*, q_{l_2}^*, q_{f_2}^*)$ disubstitusikan kedalam matriks Jacobian pada Persamaan (4.8), sehingga diperoleh

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{(s_2^* + K_s)\rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} - D & 0 & -\rho_m \frac{s_2^*}{(s_2^* + K_s)} & 0 & 0 \\ \frac{(s_2^* + K_s)\rho_m - \rho_m s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} & \bar{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\mu} x_2^* Q_0}{q_{n2}^2} & \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - D & 0 & 0 \\ \frac{(s_2^* + K_s)\rho_m \gamma - \rho_m \gamma}{(s_2^* + K_s)^2} & \beta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) + \left(\beta q_{n2}^* - q_{l2}^*\right) \frac{\bar{\mu} Q_0}{q_{n2}^2} & 0 & -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) & 0 \\ \frac{(\alpha + \gamma)((s_2^* + K_s)\rho_m - \rho_m s_2^*)}{(s_2^* + K_s)^2} & -\frac{q_{f2}^* \bar{\mu} Q_0}{q_{n2}^2} & 0 & 0 & -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

dengan

$$s_2^* = \frac{D\bar{\mu}Q_0K_s}{\rho_m\bar{\mu} - \rho_m D - D\bar{\mu}Q_0}$$

$$q_{n2}^* = \frac{\bar{\mu}Q_0}{\bar{\mu} - D}$$

$$x_2^* = \frac{s_{in}\rho_m\bar{\mu}^2 - 2s_{in}\rho_m D\bar{\mu} - Ds_{in}\bar{\mu}^2 Q_0 - D\bar{\mu}^2 Q_0 K_s + s_{in}\rho_m D^2 + D^2 s_{in}\bar{\mu}Q_0 + D\bar{\mu}^2 Q_0 K_s}{\bar{\mu}Q_0(\rho_m\bar{\mu} - \rho_m D - D\bar{\mu}Q_0)}$$

$$q_{l2}^* = \frac{\bar{\mu}Q_0(\beta - \gamma)}{\bar{\mu} - D}$$

$$q_{f2}^* = \frac{(\alpha + \gamma)\bar{\mu}Q_0}{\bar{\mu} - D}$$

Untuk menganalisis kestabilan pada titik setimbang $T_2(s_2^*, q_{n2}^*, x_2^*, q_{l2}^*, q_{f2}^*)$ tersebut, maka langkah selanjutnya adalah menentukan nilai-nilai karakteristik dari matriks Jacobian. Nilai karakteristik tersebut merupakan akar-akar karakteristik dari polinomial $h(\lambda) = \det(J - \lambda I)$, dengan I adalah matriks identitas, sebagai berikut:

$$\det(J - \lambda I) =$$

$$\begin{bmatrix}
-\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} - D - \lambda & 0 & -\rho_m \frac{s_2^*}{(s_2^* + K_s)} & 0 & 0 \\
\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m - \rho_m s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} & \bar{\mu} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\bar{\mu} x_2^* Q_0}{q_{n2}^{2^*}} & \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - D - \lambda & 0 & 0 \\
\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m \gamma - \rho_m \gamma}{(s_2^* + K_s)^2} & \beta \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) + \left(\beta q_{n2}^* - q_{l2}^*\right) \frac{\bar{\mu} Q_0}{q_{n2}^{2^*}} & 0 & -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - \lambda & 0 \\
\frac{(\alpha + \gamma) \left((s_2^* + K_s) \rho_m - \rho_m s_2^* \right)}{(s_2^* + K_s)^2} & -\frac{q_{f2}^* \bar{\mu} Q_0}{q_{n2}^{2^*}} & 0 & 0 & -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - \lambda
\end{bmatrix}$$

(4.12)

Nilai eigen matriks diperoleh dari $|J - \lambda I| = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} - D - \lambda \right) (\bar{\mu} - \lambda) \left(\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - D - \lambda \right) \left(-\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - \lambda \right) \\
& \left(-\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - \lambda \right) + \left(-\rho_m \frac{s_2^*}{(s_2^* + K_s)} \right) \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m - \rho_m s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) \left(\frac{\bar{\mu} x_2^* Q_0}{q_{n2}^{2^*}} \right) \left(-\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - \lambda \right) \\
& \left(-\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - \lambda \right) = 0 \\
& \left(-\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - \lambda \right) \left(-\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - \lambda \right) \left(\left(-\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} - D - \lambda \right) \right. \\
& \left. (\bar{\mu} - \lambda) \left(\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - D - \lambda \right) + \left(-\rho_m \frac{s_2^*}{(s_2^* + K_s)} \right) \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m - \rho_m s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) \left(\frac{\bar{\mu} x_2^* Q_0}{q_{n2}^{2^*}} \right) \right) = 0 \\
& \left(-\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - \lambda \right) \left(-\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - \lambda \right) \left(-\lambda^3 + \left(-\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} - D + \bar{\mu} + \right. \right. \\
& \left. \left. \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - D \right) \lambda^2 - \left(\left(-\bar{\mu} \frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} - D \right) - \left(\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*}\right) - D \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} - D \right) \lambda + \left(-\bar{\mu} \frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} - \bar{\mu} D \right) \left(\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right) - D \right) + \\ & \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m - \rho_m s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) + \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m - \rho_m s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) \left(\frac{\bar{\mu} x_2^* Q_0}{q_{n2}^{2*}} \right) \left(-\rho_m \frac{s_2^*}{(s_2^* + K_s)} \right) = 0 \end{aligned}$$

karena nilai karakteristik tidak dapat diperoleh, maka untuk penyelesaian Persamaan (4.12) dapat menggunakan kriteria Routh-hurwitz. Sehingga dapat terbentuk polinomial pada Persamaan (4.12) adalah sebagai berikut:

$$h(\lambda) = \lambda^5 + p_1 \lambda^4 + p_2 \lambda^3 + p_3 \lambda^2 + p_4 \lambda + p_5 \quad (4.13)$$

dimana:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right) - \frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} - 2D + \bar{\mu} \\ p_2 &= \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 - 3\bar{\mu} D \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right) + 2\bar{\mu}^2 \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right) - \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right). \\ & \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) - D \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) - D^2 \\ p_3 &= \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^3 - 2\bar{\mu} D \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 + \bar{\mu}^2 \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2. \\ & \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) + \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_1^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right). \\ & \bar{\mu}^2 \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 + 2\bar{\mu}^2 D \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 - \left(\frac{(s_1^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right). \\ & 2\bar{\mu} D \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right) - 2\bar{\mu} D^2 \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right) - 2\bar{\mu}^3 \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 + 3\bar{\mu}^2 D \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\mu}^2 \left(1 - \frac{Q_0}{q_n^*} \right) \cdot \left(\frac{(s^* + K_s) \rho_m x^* - \rho_m x^* s^*}{(s^* + K_s)^2} \right) + D^2 + D \cdot \left(\frac{(s^* + K_s) \rho_m x^*}{(s^* + K_s)^2} \right. \\
& \left. - \frac{\rho_m x^* s^*}{(s^* + K_s)^2} \right) + \left(\frac{\bar{\mu} x^* Q_0 \rho_m s^* ((s^* + K_s) \rho_m - \rho_m s^*)}{q_n^* (s^* + K_s)^3} \right) \\
p_4 = & \bar{\mu}^2 \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^3 \cdot \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_1^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) - \bar{\mu} D \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 \\
& \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) + \bar{\mu}^2 D \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^3 - \bar{\mu} D^2 \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 - \\
& \bar{\mu}^3 \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^3 + \bar{\mu}^2 \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 \cdot \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) + 2 \bar{\mu}^2 D \\
& \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 - 2 \bar{\mu}^3 \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 \cdot \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) + 2 \bar{\mu}^2 D \\
& \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right) \cdot \left(\frac{(s_2^* + K_s) \rho_m x_2^* - \rho_m x_2^* s_2^*}{(s_2^* + K_s)^2} \right) + \bar{\mu}^3 D \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right)^2 - \bar{\mu}^2 D^2 \\
& \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right) + 2 \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_{n2}^*} \right) \cdot \left(\frac{\bar{\mu} x_2^* Q_0 \rho_m s_2^* ((s_1^* + K_s) \rho_m - \rho_m s_2^*)}{q_{n2}^* (s_2^* + K_s)^3} \right) \\
p_5 = & -\bar{\mu}^4 \left(1 - \frac{Q_0}{q_n^*} \right)^3 \cdot \left(\frac{(s^* + K_s) \rho_m x^* - \rho_m x^* s^*}{(s^* + K_s)^2} \right) + 2 \bar{\mu}^3 D \left(1 - \frac{Q_0}{q_n^*} \right)^2 \\
& \left(\frac{(s^* + K_s) \rho_m x^* - \rho_m x^* s^*}{(s^* + K_s)^2} \right) - \bar{\mu}^4 D \left(1 - \frac{Q_0}{q_n^*} \right)^3 + \bar{\mu}^3 D^2 \left(1 - \frac{Q_0}{q_n^*} \right)^2 + \\
& \bar{\mu}^2 \left(\frac{\bar{\mu} x^* Q_0 \rho_m s^* ((s^* + K_s) \rho_m - \rho_m s^*)}{q_n^* (s^* + K_s)^3} \right) \left(1 - \frac{Q_0}{q_n^*} \right)^2
\end{aligned}$$

Kriteria Routh-Hurwitz dapat digunakan untuk mengecek langsung kestabilan dengan melihat koefisien tanpa melakukan perhitungan akar-akar dari polinomial yang telah ada pada Persamaan (4.13). Sehingga nilai-nilai dari p_1, p_2, p_3, p_3 , dan p_5 dapat di bentuk kedalam tabel kriteria Routh-Hurwitz. Dengan membentuk tabel kriteria Routh-Hurwitz yang ditunjukkan pada Tabel 4.1 maka dapat ditentukan apakah semua akar-akar bagian realnya adalah negatif.

Tabel 4.1. Kriteria Routh-Hurwitz

s^5	-1	p_2	p_4	0	0
s^4	p_1	p_3	p_5	0	0
s^3	b_1	b_2	0	0	0
s^2	c_1	c_2	0	0	0
s^1	d_1	0	0	0	0
s^0	e_1	0	0	0	0

dimana untuk memperoleh nilai dari b_1, b_2, c_1, c_2, d_1 , dan e_1 sebagai berikut:

$$b_1 = \frac{p_1 p_2 + p_3}{p_1}$$

$$b_2 = \frac{p_3 p_4 - p_5 p_2}{p_3}$$

$$c_1 = \frac{b_1 p_3 + b_2 p_1}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_2 p_5}{b_2}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{c_1}$$

$$e_1 = \frac{d_1 c_2}{d_1}$$

Nilai dari p_1, p_2, p_3 dan p_5 bernilai negatif, sedangkan untuk p_4 bernilai positif. Hal ini menyebabkan nilai dari b_1, c_1 dan e_1 bernilai negatif, sedangkan untuk nilai d_1 bernilai positif. Pada Tabel 4.1 terjadi perubahan tanda pada kolom pertama. Sehingga sistem dinamik pada Persamaan (4.5) untuk titik kesetimbangan $T_2 \left(s_2^*, q_{n_2}^*, x_2^*, q_{l_2}^*, q_{f_2}^* \right)$ bersifat tidak stabil. Sistem pada Persamaan (4.5) dikatakan stabil jika tidak ada perubahan tanda pada kolom pertama. Nilai-nilai dari p_1, b_1, c_1, d_1 dan e_1 . Pada Tabel Kriteria Routh-Hurwitz semuanya bertanda negatif artinya nilai dari $p_1, b_1, c_1, d_1, e_1 < 0$.

4.4. Penyelesaian Kendali Optimal

Secara umum masalah kendali optimal terdiri dari 3 komponen yaitu model matematika yang biasa disebut dengan sistem dinamik dengan kondisi awal dan keadaan akhir. Sistem dinamik tersebut memiliki fungsi objektif serta kondisi batas yang harus dipenuhi. Dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin diperoleh kendali yang optimal dari model matematika yang memiliki kondisi batas tertentu untuk mencapai fungsi tujuannya.

Pada Persamaan (4.4) terlihat bahwa semakin besar laju pengenceran maka semakin kecil laju pertumbuhan nutrisi dan laju pertumbuhan biomassa. Pada Persamaan (4.4) D merupakan laju pengenceran, dimana laju pengenceran adalah perbandingan antara nutrisi yang masuk dengan volume. Dengan demikian yang dikontrol adalah D , sedemikian hingga D ekuivalen dengan $u(t)$, dapat ditulis $D \equiv u(t)$ untuk $t \in I$. Dalam hal ini $u(t)$ sebagai variabel pengendali selama jangka waktu $I = [t_0, t_f]$.

Dengan demikian Persamaan (4.4) menjadi sebagai berikut:

$$\frac{ds(t)}{dt} = u(t)s_{in} - \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} x(t) - u(t)s(t)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dq_n(t)}{dt} &= \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) q_n(t) \\
\frac{dx(t)}{dt} &= \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) x(t) - u(t) x(t) \\
\frac{dq_l(t)}{dt} &= (\beta q_n(t) - q_l(t)) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) - \gamma \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} \\
\frac{dq_f(t)}{dt} &= -(q_f(t)) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) + (\alpha + \gamma) \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

dengan kondis awal,

$$\begin{aligned}
s(t_0) &= s(0) \\
q_n(t_0) &= q_n(0) \\
x(t_0) &= x(0) \\
q_l(t_0) &= q_l(0) \\
q_f(t_0) &= q_f(0)
\end{aligned}$$

dan keadaan akhir:

$$\begin{aligned}
s(t_f) &= s_{f1} \\
q_n(t_f) &= q_{nf2} \\
x(t_f) &= x_{f3} \\
q_l(t_f) &= q_{lf4} \\
q_f(t_f) &= q_{f5}
\end{aligned}$$

dengan t_f adalah waktu akhir yang telah ditentukan. Pada permasalahan ini, nilai akhir telah ditentukan yaitu 12 hari dimana setiap iterasinya menyatakan jam.

Sedangkan variabel pengendalnya adalah sebagai berikut:

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in I = [t_0, t_f]$$

1. Fungsi tujuan

Secara matematika fungsi objektif pada model produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi yang terdapat pada Persamaan (4.14) adalah sebagai berikut:

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left(x(t) + q_l(t) - \frac{1}{2}cu(t)^2 \right) dt \quad (4.15)$$

dengan:

$J(u(t))$: Maksimumkan fungsi tujuan dengan meminimumkan kendali

$x(t)$: laju pertumbuhan biomassa pada waktu t

$q_l(t)$: laju pertumbuhan kuota lipid pada waktu t

$u(t)$: kendali yang berupa laju pengenceran pada waktu t

c : bobot konsentrasi nutrisi yang masuk

Pada penelitian ini permasalahan kendali optimal yang terdapat pada fungsi tujuan adalah untuk mendapatkan kendali yang optimal dengan Bobot konsentrasi nutrisi yang masuk yaitu $c = 1$.

Fungsi di atas merupakan bentuk fungsi objektif yang tidak memiliki fungsi *mayer* S dan hanya memiliki fungsi *Lagrange* V . Penyelesaian masalah kendali optimal pada Persamaan (4.14) yang menyatakan sistem dinamik dari model produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi diselesaikan dengan menggunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin, hal ini menunjukkan bahwa model tersebut diselesaikan dengan fungsi objektif yang terdapat pada Persamaan (4.15). untuk memperoleh penyelesaian kendali optimal pada model tersebut dilakukan dengan langkah sebagai berikut:

Langkah yang harus diselesaikan terlebih dahulu adalah membentuk fungsi *Hamiltonian* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H &= H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \\ &= V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t) f(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= x(t) + q_l(t) - \frac{1}{2}cu(t)^2 + \lambda_1(t) \left[u(t)s_{\text{in}} - \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} x(t) - u(t)s(t) \right] + \lambda_2(t) \\
&\quad \left[\rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) q_n(t) \right] + \lambda_3(t) \left[\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) x(t) - u(t)x(t) \right] + \\
&\quad \lambda_4(t) \left[\left(\beta q_n(t) - q_l(t) \right) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) - \gamma \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} \right] + \lambda_5(t) \left[- (q_f(t)) \bar{\mu} \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) + (\alpha + \gamma) \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} \right] \\
&= x(t) + q_l(t) - \frac{1}{2}cu(t)^2 + \lambda_1(t)u(t)s_{\text{in}} - \lambda_1(t)\rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} x(t) - \lambda_1(t)u(t) \\
&\quad s(t) + \lambda_1(t)\rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} - \lambda_1(t)\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) q_n(t) + \lambda_3(t)\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) \\
&\quad x(t) - \lambda_3(t)u(t)x(t) + \lambda_4(t) \left(\beta q_n(t) - q_l(t) \right) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) - \lambda_4(t)\gamma \rho_m \\
&\quad \frac{s(t)}{s(t) + K_s} - \lambda_5(t)\bar{\mu}q_f(t) \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) + \lambda_5(t)(\alpha + \gamma) \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Langkah berikutnya adalah mendapatkan nilai $u^*(t)$ dengan menurunkan Persamaan (4.16) terhadap $u(t)$, dengan kata lain menentukan kondisi *stasioner* dari persamaan Hamiltonian. Maka akan diperoleh u^* optimal dengan ketentuan sebagai berikut.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Fungsi objektif pada permasalahan ini memiliki satu kendali. Mak akan dicari kendali yang optimal $u^*(t)$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow -u(t)c + \lambda_1(t)s_{\text{in}} - \lambda_1(t)s(t) - \lambda_3(t)x(t) = 0$$

$$-u(t)c + \lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t) = 0$$

$$u = \frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c}$$

sehingga diperoleh persamaan kendali yang optimal u^* , adalah sebagai berikut:

$$u^* = \frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c} \quad (4.17)$$

Variabel pengendalinya adalah $0 \leq u(t) \leq 1$, $t \in I = [t_0, t_f]$.

karena $0 \leq u(t) \leq 1$, sehingga

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , u(t) \leq 0 \\ u(t) & , 0 < u(t) < 1 \\ 1 & , u(t) \geq 1 \end{cases}$$

Selanjutnya akan dilakukan uji turunan kedua untuk menunjukkan bahwa H maksimum di $u(t)$, yaitu:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -c < 0$$

Sehingga berlaku:

$$u^*(t) = \min\{1, \max(0, u(t))\}$$

$$\text{atau } u^*(t) = \min\left\{1, \max\left(0, \frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c}\right)\right\}$$

karena turunan kedua H terhadap pengendali bernilai negatif, maka dapat disimpulkan bahwa uji turunan kedua terpenuhi. Kemudian substitusikan u^* optimal pada Persamaan (4.17) ke Persamaan (4.16) untuk mendapatkan persamaan *Hamiltonian* yang optimal yaitu:

$$\begin{aligned}
H^* &= x(t) + q_l(t) - \frac{1}{2}cu(t)^2 + \lambda_1(t)u(t)s_{\text{in}} - \lambda_1(t)\rho_m \frac{s(t)}{s(t)+K_s}x(t) - \lambda_1(t)u(t)s(t) + \\
&\quad \lambda_2(t)\rho_m \frac{s(t)}{s(t)+K_s} - \lambda_2(t)\bar{\mu}\left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)}\right)q_n(t) + \lambda_3(t)\bar{\mu}\left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)}\right)x(t) - \\
&= \lambda_3(t)u(t)x(t) + \lambda_4(t)(\beta q_n(t) - q_l(t))\bar{\mu}\left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)}\right) - \lambda_4(t)\gamma\rho_m \frac{s(t)}{s(t)+K_s} - \\
&\quad \lambda_5(t)(q_f(t))\bar{\mu} + \lambda_5(t)(\alpha + \gamma)\rho_m \frac{s(t)}{s(t)+K_s} \\
H^* &= x(t) + q_l(t) - \frac{1}{2}c\left(\frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c}\right)^2 + \lambda_1(t)\left(\frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t))}{c}s_{\text{in}}\right) - \\
&\quad \frac{\lambda_3(t)x(t)}{c}s_{\text{in}} - \lambda_1(t)\rho_m \frac{s(t)}{s(t)+K_s}x(t) - \lambda_1(t)\left(\frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c}\right)s(t) + \\
&\quad \lambda_2(t)\rho_m \frac{s(t)}{s(t)+K_s} - \lambda_2(t)\bar{\mu}\left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)}\right)q_n(t) + \lambda_3(t)\bar{\mu}\left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)}\right)x(t) - \lambda_3(t)x(t) \\
&\quad \left(\frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c}\right) + \lambda_4(t)(\beta q_n(t) - q_l(t))\bar{\mu}\left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)}\right) - \lambda_4(t)\gamma \\
&\quad \rho_m \frac{s(t)}{s(t)+K_s} - \lambda_5(t)\bar{\mu}q_f(t)\left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)}\right) + \lambda_5(t)(\alpha + \gamma)\rho_m \frac{s(t)}{s(t)+K_s}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Untuk memperoleh persamaan *state* dan persamaan *costate* yang optimal, maka ada dua cara yang dapat dilakukan yaitu pertama menurunkan secara parsial fungsi Hamiltonian baru yang optimal yang diperoleh pada Persamaan (4.18) dan yang kedua adalah menurunkan secara parsial fungsi Hamiltonian pada Persamaan (4.16) kemudian substitusikan nilai $u(t)$ yang optimal. Cara yang digunakan dalam penelitian ini adalah cara yang kedua. Sehingga diperoleh persamaan *state* dan persamaan *costate* yang optimal sebagai berikut:

1. Persamaan *state*

$$\begin{aligned}\dot{s}(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_1(t)} \right) \\ &= u(t) s_{\text{in}} - \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} x(t) - u(t) s(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_n(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} \right) \\ &= \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) q_n(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} \right) \\ &= \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) x(t) - u(t) x(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_l(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} \right) \\ &= (\beta q_n(t) - q_l(t)) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) - \gamma \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_f(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_5} \right) \\ &= -(q_f(t)) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) + (\alpha + \gamma) \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s}\end{aligned}$$

2. Persamaan *costate*

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= -\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right) \\
&= \frac{(s(t)+K_s)\rho_m x(t)\lambda_1(t) - \rho_m x(t)s(t)\lambda_1(t)}{(s(t)+K_s)^2} + u(t)\lambda_1(t) - \\
&\quad \left(\frac{(s(t)+K_s)\rho_m \lambda_2(t) - \rho_m s(t)\lambda_2(t)}{(s(t)+K_s)^2}\right) + \left(\frac{(s(t)+K_s)\rho_m \gamma \lambda_4(t) - \gamma \rho_m \lambda_4(t)}{(s(t)+K_s)^2}\right) - \\
&\quad \left(\frac{(s(t)+K_s)(\alpha + \gamma)\rho_m \lambda_5(t) - (\alpha + \gamma)\rho_m s(t)\lambda_5(t)}{(s(t)+K_s)^2}\right) \\
\lambda_2(t) &= -\left(\frac{\partial H}{\partial q_n}\right) \\
&= \bar{\mu} \lambda_2(t) - \frac{\lambda_3(t)x(t)\bar{\mu} Q_0}{q_n(t)} - (\lambda_4(t)\beta \bar{\mu})\left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)}\right) - (\lambda_4(t)\beta q_n(t)\bar{\mu} - \\
&\quad \lambda_4(t)q_l(t)\bar{\mu})\left(\frac{Q_0}{q_n(t)^2}\right) + (\lambda_5(t)q_f(t)\bar{\mu})\left(\frac{Q_0}{q_n(t)^2}\right) \\
\lambda_3(t) &= -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) \\
&= -1 + \rho_m \lambda_1(t) \frac{s(t)}{s(t)+K_s} - \lambda_3(t)\bar{\mu}\left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)}\right) + u(t)\lambda_3(t) \\
\lambda_4(t) &= -\left(\frac{\partial H}{\partial q_l}\right) \\
&= -1 + \lambda_4(t)\bar{\mu}\left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)}\right) \\
\lambda_5(t) &= -\left(\frac{\partial H}{\partial q_f}\right) \\
&= \lambda_5(t)\bar{\mu}\left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)}\right)
\end{aligned}$$

maka, sistem optimal jika mensubstitusikan nilai $u^*(t)$ yang optimal ke persamaan *state* dan persamaan *costate*. Sehingga akan diperoleh sistem sebagai berikut:

$$\dot{s}^*(t) = \left(\frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c} \right) s_{\text{in}} - \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} x(t) - \left(\frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c} \right) s(t)$$

$$\dot{q}_n^*(t) = \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s} - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) q_n(t)$$

$$\dot{x}^*(t) = \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) x(t) - \left(\frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c} \right) x(t)$$

$$\dot{q}_l^*(t) = (\beta q_n(t) - q_l(t)) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) - \gamma \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s}$$

$$\dot{q}_f^* = -(q_f(t)) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) + (\alpha + \gamma) \rho_m \frac{s(t)}{s(t) + K_s}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^*(t) &= \frac{(s(t) + K_s) \rho_m x(t) \lambda_1(t) - \rho_m x(t) s(t) \lambda_1(t)}{(s(t) + K_s)^2} + \left(\frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c} \right) \lambda_1(t) - \\ &\quad \left(\frac{(s(t) + K_s) \rho_m \lambda_2(t)}{(s(t) + K_s)^2} - \frac{\rho_m s(t) \lambda_2(t)}{(s(t) + K_s)^2} \right) + \left(\frac{(s(t) + K_s) \rho_m \gamma \lambda_4(t) - \gamma \rho_m \lambda_4(t)}{(s(t) + K_s)^2} \right) - \\ &\quad \left(\frac{(s(t) + K_s)(\alpha + \gamma) \rho_m \lambda_5(t)}{(s(t) + K_s)^2} - \frac{(\alpha + \gamma) \rho_m s(t) \lambda_5(t)}{(s(t) + K_s)^2} \right) \\ \lambda_2^*(t) &= \bar{\mu} \lambda_2(t) - \frac{\lambda_3(t)x(t) \bar{\mu} Q_0}{q_n(t)} - (\lambda_4(t) \beta \bar{\mu}) \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) - (\lambda_4(t) \beta q_n(t) \bar{\mu} - \\ &\quad \lambda_4(t) q_l(t) \bar{\mu}) \left(\frac{Q_0}{q_n(t)^2} \right) + (\lambda_5(t) q_f(t) \bar{\mu}) \left(\frac{Q_0}{q_n(t)^2} \right) \\ \lambda_3^*(t) &= -1 + \rho_m \lambda_1(t) \frac{s(t)}{s(t) + K_s} + \left(\frac{\lambda_1(t)(s_{\text{in}} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c} \right) \lambda_3(t) - \\ &\quad \lambda_3(t) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right) \end{aligned}$$

$$\lambda_4^*(t) = -1 + \lambda_4(t) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right)$$

$$\lambda_5^*(t) = \lambda_5(t) \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q_n(t)} \right)$$

Penyelesaian optimal dari kendali optimal pada model produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi sulit diselesaikan secara analitik, maka permasalahan ini akan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan *software* Matlab.

4.5. Proses Hasil Simulasi

Simulasi pada model produksi lipid netral dengan keterbatasan nutris menggunakan Runge-Kutta Orde Empat. Syarat perlu untuk bisa menggunakan metode ini adalah adanya nilai awal. Metode Sweep Maju-Mundur digunakan dengan mendiskritisasi interval $[t_0, t_f]$. Selanjutnya, variabel state $s, q_n, x, q_l, q_f, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ dan u didekati dengan metode Runge-Kutta Orde 4 dengan beberapa kondisi nilai awal $s(0), q_n(0), x(0), q_l(0)$ dan $q_f(0)$ seperti pada Tabel 4.2 sebagai berikut:

Tabel 4.2. Nilai awal untuk substrat nutrisi, kuota nitrogen, biomassa, kuota lipid dan kuota fungsional karbon.

Nilai Awal				
s	q_n	x	q_l	q_f
3	0.5	0.06	0.6	0.5
2.5	0.4	0.05	0.5	0.4
2	0.3	0.04	0.4	0.3
1.5	0.25	0.03	0.3	0.2
1	0.2	0.02	0.2	0.1
0.5	0.1	0.01	0.1	0.05

Langkah-langkah penyelesaian numerik untuk setiap kondisi nilai awal pada Tabel. 4.2 diselesaikan dengan memanfaatkan metode Sweep Maju-Mundur adalah sebagai berikut.

Langkah 1

Interval waktu $t = [0, T]$ dibagi sebanyak n subinterval. Sehingga *state* dan *costate* dapat didefinisikan sebagai suatu vektor. Artinya terdapat $n + 1$ titik di sepanjang waktu t .

Langkah 2

Menggunakan nilai awal $s(0)$, $q_n(0)$, $x(0)$, $q_l(0)$ dan $q_f(0)$, serta nilai tebakan u untuk menyelesaikan persamaan *state* secara Sweep maju metode Runge-Kutta Orde Empat.

Langkah 3

Menggunakan nilai akhir $(t_f) = b$ dan nilai *state* serta u untuk menyelesaikan persamaan *costate* dengan langkah mundur metode Runge-Kutta Orde Empat.

Langkah 4

Menghitung nilai u optimal

$$u = \min \left(1, \max \left(0, \frac{(\lambda_1(t)(s_{in} - s(t)) - \lambda_3(t))x(t)}{c} \right) \right)$$

Langkah 5

Menghitung

$$error\ u = sum(abs(u - u_{old}))$$

jika $error > tol$, maka kembali ke langkah 2, dengan $tol = 0.01$.

Langkah 6

Mencetak $s_* = s$, $q_{n_*} = q_n$, $x_* = x$, $q_{l_*} = q_l$, $q_{f_*} = q_f$, dan $u_* = u$.

Pada simulasi ini dilakukan dengan menggunakan *software* Matlab. Diberikan nilai parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

Tabel 4.3. Nilai Parameter

Parameter	Q_0	$\bar{\mu}$	K_s	β	α	s_{in}	ρ_m	γ
Nilai	0.05	1	0.018	4.8	2.6	1.7	0.095	3

Untuk memperlihatkan pengaruh kendali pengenceran pada model produksi lipid netral pada mikroalga dengan ketebatasan nutrisi. Simulasi numerik dibuat dengan menggunakan nilai awal $(s_0, q_{n_0}, x_0, q_{l_0}, q_{f_0})$ yang ada pada Tabel 4.2 dan nilai parameter yang digunakan diberikan pada Tabel 4.3 dan $c = 1$.

Masing-masing konsentrasi dibuat simulasi dari perubahan jumlah konsentrasi setelah diberikan kendali berupa pengenceran, sebagai perbandingan disertakan perubahan jumlah konsentrasi tanpa kendali.

Selanjutnya substrat nutrisi (s), kuota nitrogen (q_n), biomassa (x), kouta lipid (q_l), dan kuota fungsional karbon (q_f) akan dicari nilai yang optimal dengan menggunakan nilai awal yang terdapat pada Tabel 4.2 terhadap interval waktu yang optimal.

Adapun hasil yang diperoleh dari masing-masing kondisi nilai awal untuk setiap kondisi nutrisi, kondisi kuota nitrogen, kondisi biomassa, kondisi kuota lipid dan kondisi fungsional karbon adalah sebagai berikut:

Tabel 4.4 Nilai awal untuk substrat Nutrisi

Nilai awal	waktu	Nilai akhir
3	288 – 289	2.5558
0.5		0.1006
0.02		0.3432
0.25		1.2293

0.5		0.4441
2.5	288 – 289	2.4709
0.5		0.1005
0.02		0.3430
0.25		1.2293
0.5		0.4441
2	288 – 289	1.7026
0.5		0.1004
0.02		0.3426
0.25		0.8932
0.5		0.4443
1.5	288 – 289	1.4416
0.5		0.1003
0.02		0.1860
0.25		0.7533
0.5		0.4443
1	288 – 289	1.4416
0.5		0.1002
0.02		0.1860
0.25		0.6745
0.5		0.4439

Tabel 4.4 dapat diartikan bahwa waktu optimal untuk substrat nutrisi berada pada waktu 288 sampai 289 jam dengan beberapa kondisi awal.

Tabel 4.5 Nilai awal untuk kuota nitrogen

Nilai awal	waktu	Nilai akhir
3	288 – 298	2.5561
0.4		0.0991
0.02		0.3075
0.25		0.3876
0.5		1.2360
3	288 – 298	2.4709
0.3		0.0977
0.02		0.2664
0.25		0.3266
0.5		1.2442
3	288 – 298	2.5570
0.2		0.0977
0.02		0.2169
0.25		0.2593
0.5		1.2546
3	288 – 298	2.5577
0.1		0.0948
0.02		0.2646
0.25		0.1827
0.5		1.2695

Tabel 4.5 dapat diartikan bahwa waktu optimal untuk kuota nitrogen berada pada waktu 288 sampai 289 jam dengan beberapa kondisi awal.

Tabel 4.6 Nilai awal untuk biomassa

Nilai awal	Waktu (jam)	Nilai akhir
3	288 – 298	2.5500
0.5		0.1006
0.05		0.6877
0.25		0.4441
0.5		1.2282
3	288 – 298	2.5519
0.5		0.1006
0.04		0.6877
0.25		0.4441
0.5		1.2286
3	288 – 298	2.5539
0.5		0.1006
0.03		0.5153
0.25		0.4441
0.5		1.2289
3	288 – 298	2.5558
0.5		0.1006
0.02		0.3432
0.25		0.4441
0.5		1.2293
3	288 – 298	2.5557
0.5		0.1006
0.01		0.1714
0.25		0.4441
0.5		1.2296

Tabel 4.6 dapat diartikan bahwa waktu optimal untuk kuota nitrogen berada pada waktu 288 sampai 289 jam dengan beberapa kondisi awal.

Tabel 4.7 Nilai awal untuk kuota lipid

Nilai awal	Waktu (jam)	Nilai akhir
3	288 – 298	2.5558
0.5		0.1006
0.02		0.3432
0.6		0.4639
0.5		1.2293
3	288 – 298	2.5558
0.5		0.1006
0.02		0.3432
0.5		0.4582
0.5		1.2293
3	288 – 298	2.5558
0.5		0.1006
0.02		0.3432
0.4		0.4526
0.5		1.2293
3	288 – 298	2.5558
0.5		0.1006
0.02		0.3432
0.3		0.4469
0.5		1.2293
3	288 – 298	2.5558
0.5		0.1006
0.02		0.3432

0.2		0.4357
0.5		1.2293

Tabel 4.7 dapat diartikan bahwa waktu optimal untuk kuota nitrogen berada pada waktu 288 sampai 289 jam dengan beberapa kondisi awal.

Tabel 4.8 Nilai awal untuk kuota fungsional karbon

Nilai awal	Waktu (jam)	Nilai akhir
3	288 – 298	2.5558
0.5		0.1006
0.02		0.3432
0.25		0.4441
0.4		1.2183
3	288 – 298	2.5558
0.5		0.1006
0.02		0.3432
0.25		0.4441
0.3		1.2073
3	288 – 298	2.5558
0.5		0.1006
0.02		0.3432
0.25		0.4413
0.2		1.1964
3	288 – 298	2.5558
0.5		0.1006
0.02		0.3432
0.25		0.4413
0.1		1.1854

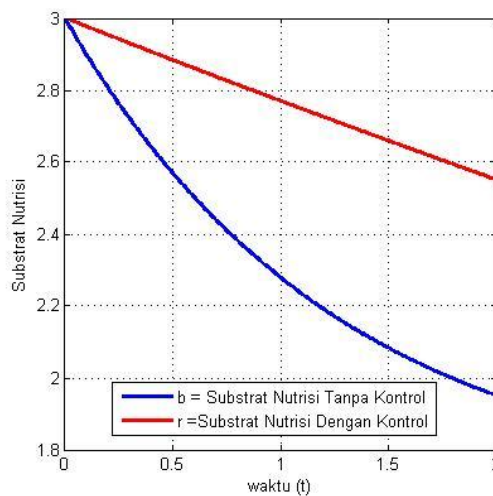
Tabel 4.8 dapat diartikan bahwa waktu optimal untuk kuota nitrogen berada pada waktu 288 sampai 289 jam dengan beberapa kondisi awal.

Kondisi yang optimal untuk masing-masing nilai awal dari substrat nutrisi, kuota karbon, biomassa, kuota lipid dan kuota fungsional karabon adalah sebagai berikut:

a. Perubahan Konsentrasi Substrat Nutrisi

Gambar 4.1 merupakan grafik untuk tingkat substrat nutrisi tanpa kendali dan dengan kendali. Dari grafik tersebut menunjukkan bahwa Jumlah substrat nutrisi tanpa kendali mengalami penurunan yang signifikan dari hari pertama sampai hari ke-12 sebesar 1,9502, sedangkan untuk substrat nutrisi dengan adanya kendali mengalami penurunan yang sangat kecil sebesar 0.4441 dari nilai awalnya.

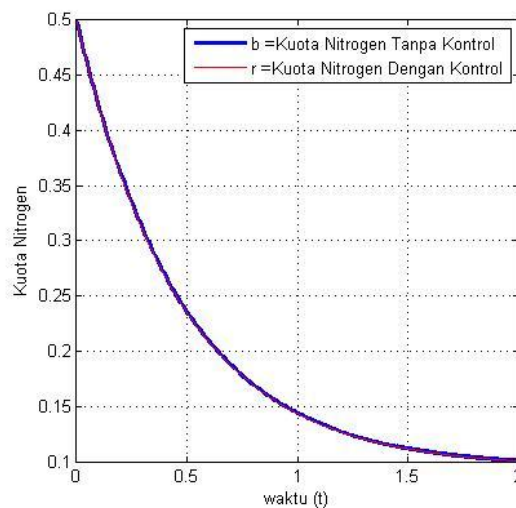
Persentase tingkat substrat nutrisi tanpa kendali lebih kecil dari pada persentase tingkat substrat nutrisi dengan kendali, hal ini dikarenakan adanya kendali berupa laju pengenceran yang menyebabkan jumlah substrat nutrisi berkurang.



Gambar 4.1. Laju pertumbuhan substrat nutrisi tanpa dan dengan kontrol terhadap waktu

b. Perubahan Konsentrasi Kouta Nitrogen

Gambar. 4.2 merupakan grafik untuk tingkat pertumbuhan kuota nitrogen tanpa kendali dan dengan kendali. Dari grafik tersebut menunjukkan bahwa jumlah pertumbuhan kuota nitrogen tanpa kendali mengalami penurunan dari hari pertama hari ke-12 sebesar 0,1006, sedangkan untuk pertumbuhan kuota nitrogen dengan adanya kendali juga mengalami penurunan 0,1005. Tingkat pertumbuhan kuota nitrogen tanpa kendali lebih besar dari pada tingkat pertumbuhan kuota nitrogen dengan kendali.

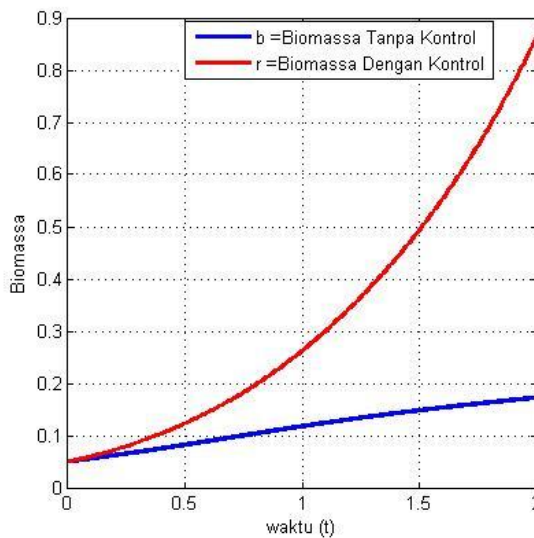


Gambar 4.2. Laju pertumbuhan kuota nitrogen tanpa dan dengan kontrol terhadap waktu

c. Perubahan Konsentrasi Biomassa

Gambar 4.3 merupakan grafik untuk tingkat pertumbuhan biomassa tanpa kendali dan dengan kendali. Dari grafik tersebut menunjukkan bahwa jumlah pertumbuhan biomassa tanpa kendali mengalami peningkatan dari hari pertama sampai hari ke-12 sebesar 0,1724. Sedangkan untuk pertumbuhan biomassa dengan adanya kendali pada hari pertama mengalami peningkatan yang lebih besar dibandingkan tanpa kendali sebesar 0.5153. Pada hari ke-12 jumlah pertumbuhan biomassa mencapai 0.6877.

Persentase tingkat pertumbuhan biomassa tanpa kendali lebih kecil dibandingkan dengan persentase tingkat pertumbuhan biomassa dengan kendali. Hal ini dikarenakan bahwa dengan adanya pengendali berupa pengenceran dapat mempengaruhi pertumbuhan biomassa setiap harinya, sehingga diperoleh jumlah biomassa yang optimal.



Gambar 4.3. Laju pertumbuhan biomassa tanpa dan dengan kontrol terhadap waktu

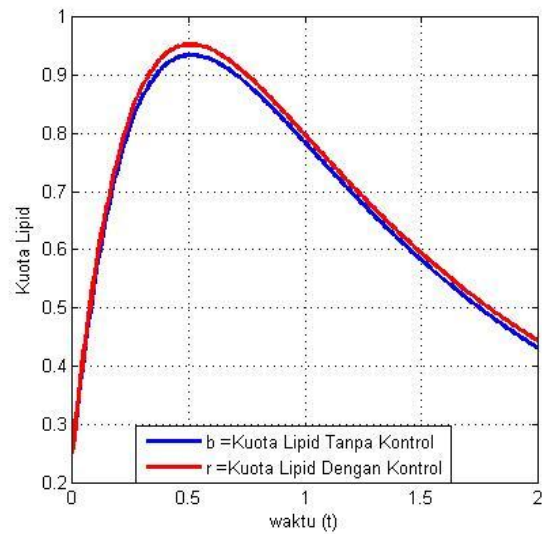
d. Perubahan Konsentrasi Kuota Lipid

Gambar 4.4 merupakan grafik untuk tingkat pertumbuhan lipid tanpa kendali dan dengan kendali. Dari grafik tersebut menunjukkan bahwa jumlah pertumbuhan kuota lipid tanpa kendali mengalami peningkatan dari hari ke-3 sebesar 0,9351, setelah hari berikutnya sampai hari ke-12 mengalami penurunan sebesar 0,4315.

Sedangkan untuk pertumbuhan lipid dengan adanya kendali juga mengalami peningkatan sebesar 0,9531 pada hari ke-3 dan mengalami penurunan sebesar 0,4441.

Persentase dari tingkat pertumbuhan kuota lipid tanpa kendali lebih kecil dibandingkan dengan persentase tingkat pertumbuhan kuota lipid dengan kendali. Hal

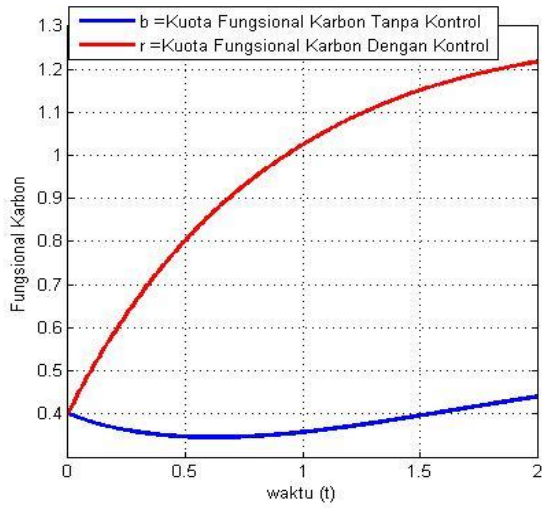
ini mengakibatkan bahwa dengan adanya kendali berupa pengenceran dapat mempengaruhi perubahan pertumbuhan kuota lipid.



Gambar 4.4. Laju pertumbuhan kuota lipid tanpa dan dengan kontrol terhadap waktu

e. Perubahan Konsentrasi Kuota Fungsional Karbon

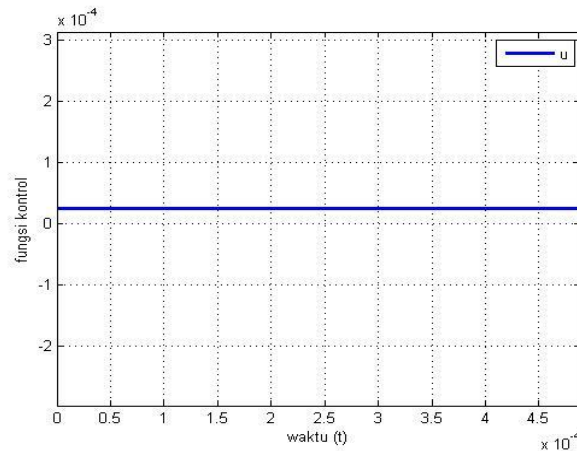
Gambar 4.5 merupakan grafik untuk tingkat pertumbuhan kuota fungsional karbon tanpa kendali dan dengan kendali. Dari grafik tersebut menunjukkan bahwa jumlah pertumbuhan kuota fungsional karbon tanpa kendali mengalami penurunan sebesar 0,4398 pada hari ke-12.



Gambar 4.5. Laju pertumbuhan kuota fungsional karbon tanpa dan dengan kontrol terhadap waktu

f. Fungsi kontrol

Gambar 4.6 menunjukkan bahwa kendali u yang merupakan laju pengenceran konstan pada hari pertama sampai hari ke-12 sebesar 0.0000244. Hal ini dapat diartikan laju pengenceran dipertahankan konstan sampai jumlah biomassa yang dihasilkan optimal.



Gambar 4.6. Fungsi Kendali

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pada Bab 1 dan pembahasan pada Bab 4, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Pada model pertumbuhan mikroalga dengan keterbatasan nutrisi diperoleh dua titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan pertama bersifat stabil dengan syarat $\bar{\mu}$ berada pada interval $[-1,0) \cup (0,1]$ dan titik kesetimbangan yang kedua bersifat tidak stabil.
2. Bentuk kendali optimal yang diperoleh adalah
$$u^* = \frac{\lambda_1(t)(s_{in} - s(t)) - \lambda_3(t)x(t)}{c}$$
 dengan $0 \leq u(t) \leq 1$. Kendali optimal pengenceran yang diterapkan selama 12 hari diperoleh konstan sebesar 0.0000244.
3. Berdasarkan hasil simulasi yang telah diperoleh, menunjukkan bahwa jumlah biomasa sebelum dikendalikan sebesar 0.1724 dan setelah diberi kendali mengalami peningkatan sebesar 0.6877. Artinya rata-rata tingkat pertumbuhan biomassa meningkat sebesar 3.1 % setiap harinya.

5.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya, hal yang dapat dikembangkan dari tesis ini adalah mengkonstruksi model dengan penambahan parameter dengan pemberian dua jenis nutrisi sebagai kontrol u_1 dan u_2 yang dilakukan secara bersamaan.

DAFTAR PUSTAKA

- Assadad, Luthfi., Bagus., dan Rodiah. 2011. *Pemanfaatan Mikroalga Sebagai Bahan Baku Etanol*. Balai Besar Riset Pengolahan Produk dan Bioteknologi Kelautan dan Perikanan : 2.
- Boyce, W.E., dan DiPrima, R.C. 2008. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, New York, John Wiley dan Sons, Inc.
- Bryson, A. E. dan Ho, Y. C. 1975. *Applied Optimal control*. New York: Taylor & Francis Group.
- Chisti, Y., 2007. Biodiesel from microalgae. *Biotechnol. Adv.* 25, 294–306..
- Droop, M.R., 1968. Vitamin B12 and marine ecology. IV. The kinetics of uptake growth and inhibition in *Monochrysis lutheri*. *J. Mar. Biol. Assoc.* 48 (3), 689–733.
- Huntley, M., Redalje, D., 2007. CO₂ mitigation et renewable oil from photosynthetic microbes: a new appraisal. *Mitigat. Adaptat. Strat. Global Change* 12, 573–608.
- Lestarini, D.R., 2012. Kendali Optimal Temperatur pada Proses Produksi Biodiesel. Jurusan Matematika, Fakultas Matematika, Institut Teknologi Sepuluh November, Kampus ITS, Sukolilo, Surabaya, 60111.
- Li, Y., M. Horsman, B. Wang, N. Wu, C.Q. Lan. 2008. Effect of nitrogen sources on cell growth and lipid accumulation of green algae *Neochloris oleabundans*. *Appl. Microbiol. Biotechnol.* 81 : 629-636p.
- Mairet, F., Bernard, O., Masci, P., dkk. 2011. Modelling Natural Lipid Production By The Microalga *Isochrysis aff. Galbana* Under Nitrogen Limitation. *Biotechnol.* 102, 142-149.
- Manullang, Cristiana; Widianingsih; dan Endrawati, Hadi. 2012. Densitas Kandungan Total Lipid Mikroalga *Spirulina platensis* Yang Dikultur pada Tingkatan Perbedaan Fotoperiod. *Journal of Marine Research.* 1 :24-28.
- Metting, F., 1996. Biodiversity and application of microalgae. *J. Indust. Microbiol. Biotechnol.* 17, 477–489.
- Naidu, D.S., 2002. *Optimal Control Systems*, CRC PRESS, New York.

- Panggabean, L., Sutomo, Noerdjito, D. R., dan Afdal. 2010. Mikroalga Laut Sebagai Produsen Biodiesel. Laporan Akhir Program Intensif Peneliti dan Perekraya LIPI : 9-10.
- Pratama, I., 2011. Pengaruh Metode Pemanenan Mikroalga Terhadap Biomassa dan Kandungan Esensial. Fakultas Teknik Kimia. Fakultas Teknik Universitas Indonesia, Depok.
- Rachmaniah, Orchidea, et al., 2010. Pemilihan Metode Ekstraksi Minyak Alga dari *Chlorella* sp. dan Prediksinya sebagai Biodiesel. Jurusan Teknik Kimia, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh November, Kampus ITS, Sukolilo, Surabaya, 60111.
- Subiono., 2013, Sistem linear dan Kontrol Optimal, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Taslina., 2011, Kendali Optimal pada Pencegahan Wabah Flu Burung dengan Eliminasi, Karantina dan Pengobatan. Tesis Magister Matematika ITS.

BIODATA PENULIS



Penulis yang memiliki nama lengkap Nasria Nacong lahir di Mamuju, 05 Juli 1989. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari SDN 1 Tolitoli, SMP Negeri 1 Tolitoli, dan SMA Negeri 1 Tolitoli. Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Universitas Tadulako Palu dan diterima sebagai mahasiswa angkatan 2008. Penulis lulus sarjana dengan delapan semester dan wisuda pada bulan Desember 2012 dengan mendapat gelar Sarjana Sains. Penulis melanjutkan studi S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2013 melalui jalur Beasiswa BPPDN Dikti dengan NRP. 1213 201 042. Selama kuliah S1 dan S2 di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Pemodelan dan Simulasi. Untuk membutuhkan informasi yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui email nasrianacong0507@gmail.com.