TESIS – SM 142501

KENDALI OPTIMAL MODEL DIVERSIFIKASI BERAS DAN NON-BERAS DENGAN PEMBERIAN SUBSIDI OLEH PEMERINTAH PADA NON-BERAS

NASRUDDIN
NRP 1213201047

Dosen Pembimbing:
Subchan, M.Sc., Ph.D.
Dr. Hariyanto, M.Si.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015

THESIS – SM 142501

OPTIMAL CONTROL OF DIVERSIFICATION MODEL RICE AND NON-RICE WITH THE PROVISION GOVERNMENT SUBSIDIES ON NON-RICE

NASRUDDIN
NRP 1213201047

Supervisior:
Subchan, M.Sc., Ph.D.
Dr. Hariyanto, M.Si.

MAGISTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTEMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2015

KENDALI OPTIMAL MODEL DIVERSIFIKASI BERAS DAN NON-BERAS DENGAN PEMBERIAN SUBSIDI OLEH PEMERINTAH PADA NON-BERAS

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat mendapatkan gelar
Magister Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh
NASRUDDIN
NRP 1213 201 047

Tanggal Ujian : 4 Mei 2015
Periode Wisuda : September 2015

Disetujui oleh:

Subchan, M.Sc., Ph.D. (Pembimbing I)
NIP 19710513 199702 1 001

Dr. Hariyanto, M.Si. (Pembimbing II)
NIP 19530414 198203 1 002

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. (Penguji)
NIP 19650605 198903 1 002

Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si., M.T. (Penguji)
NIP 19690405 199403 2 003

Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.
NIP 19640405 199002 1 001

KENDALI OPTIMAL MODEL DIVERSIFIKASI BERAS DAN NON-BERAS DENGAN PEMBERIAN SUBSIDI OLEH PEMERINTAH PADA NON-BERAS

Nama Mahasiswa	:	Nasruddin
NRP	:	1213 201 047
Pembimbing	:	1. Subchan, M.Sc., Ph.D.
		2. Dr. Hariyanto, M.Si.

ABSTRAK

Ketahanan pangan merupakan salah satu kebijakan yang perlu diperhatikan oleh pemerintah, karena pangan merupakan kebutuhan dasar manusia. Sebagian besar penduduk Indonesia memilih beras sebagai makanan pokok. Peningkatan jumlah penduduk dapat menyebabkan kebutuhan beras semakin meningkat. Di sisi lain, berkurangnya lahan pertanian menyebabkan jumlah persediaan beras semakin menurun sehingga mengakibatkan angka impor beras semakin tinggi. Oleh karena itu, pemerintah mengeluarkan kebijakan diversifikasi pangan yang bertujuan mengurangi ketergantungan masyarakat terhadap konsumsi beras dengan memanfaatkan sumber pangan lokal yang berupa non-beras. Pada penelitian ini, dibentuk model matematika tentang diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi pemerintah pada non-beras. Model dinamik yang digunakan berdasarkan pada model Lotka-Volterra dan permasalahan kendali optimal diselesaikan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin. Kendali optimal bertujuan meminimumkan konsumsi beras dan meningkatkan konsumsi non-beras sehingga dapat meminimumkan biaya. Pada model tersebut terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan tanpa diversifikasi pangan dan titik kesetimbangan dengan diversifikasi pangan. Titik kesetimbangan tersebut bersifat stabil saat persentase tingkat pertumbuhan konsumsi beras dan non-beras mengalami penurunan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pemberian subsidi pemerintah pada non-beras mengakibatkan konsumsi beras menurun secara optimal hingga 93.4003 dari konsumsi awal 100.80, sedangkan konsumsi non-beras meningkat mencapai 20.6977 dari konsumsi awal 16.30.

Kata kunci: Diversifikasi pangan, beras dan non-beras, titik kesetimbangan, kestabilan, kendali optimal, Prinsip Minimum Potryagin

OPTIMAL CONTROL OF DIVERSIFICATION MODEL RICE AND NON-RICE WITH THE PROVISION GOVERMENT SUBSIDIES ON NON-RICE

Name	:	Nasruddin
NRP	:	1213 201 047
Supervisors	:	1. Subchan, M.Sc., Ph.D.
		2. Dr. Hariyanto, M.Si.

ABSTRACT

Food security is one of the policies which need to be considered by the government because food is basic need of the human. Most of the population of Indonesia prefer rice as a staple food. The increasing population causes the increasing of the rice demand. On the other hand, the reduction of agricultural land impact on amount of rice production decreased, so that amount of rice import becomes higher. Therefore, the government release a policy in the diversification of food, which aims to reduce society's dependence on rice consumption by making use of local food sources. In this study, we establish a mathematical model for diversification of rice and non-rice with the government subsidies on non-rice. The dynamic model uses Lotka-Volterra model and the optimal control problems solved by Pontryagin Minimum Principle. The optimal control aims to minimize the consumption of rice and increase the consumption of non-rice, so it can minimize the costs. There are two equilibrium points, i.e. equilibrium without food diversification and the point of equilibrium with the food diversification. These equilibrium points are stable when the percentage of growth rate of rice and non-rice consumption decreased. The simulation results show that the government subsidies on non-rice resulted in declining of rice consumption 93.4003 from the initial consumption 100.80, and the consumption of non-rice increased to 20.6977 from the initial consumption 16.30.

Keywords: Diversification of food, rice and non-rice, equilibrium point, stability, optimal control, Pontryagin's Minimum Principle

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur atas kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini dengan judul **"Kendali Optimal Model Diversifikasi Beras dan Non-Beras dengan Pemberian Subsidi oleh Pemerintah pada Non-Beras"**. Shalawat dan salam penulis haturkan kepada baginda junjungan Nabi besar Muhammad SAW yang telah dijadikan sebagai panutan dan suri tauladan oleh umat manusia di dunia. Tesis ini merupakan salah satu persyaratan akademis untuk memperoleh gelar magister (S-2) di Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan oleh berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu, Bapak dan Nenek beserta keluarga tercinta atas segala kasih sayangnya yang selalu bersedia memberikan dukungan dan doa agar penulis dapat menyelesaikan Tesis ini.
2. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D. selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas kepada penulis untuk menyelesaikan Tesis ini.
3. Direktorat Jendral Perguruan Tinggi (DIKTI) selaku penyandang dana yang telah memberikan beasiswa BPPDN melalu Program Pra Pasca.
4. Bapak Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T. selaku Direktur Program Pascasarjana ITS.
5. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku ketua Jurusan Matematika ITS.
6. Bapak Dr. Subiono, M.S. selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika ITS.
7. Bapak Dr. Imam Mukhlas, M.T. selaku dosen wali yang telah memberikan motivasi dan bimbingan selama penulis mengikuti proses perkuliahan.
8. Bapak Subchan, M.Sc., Ph.D. dan Bapak Dr. Hariyanto, M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, arahan, nasehat dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan Tesis ini.

9. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. dan Ibu Dr. Dwi Ratna S, S.Si., M.T. selaku dosen penguji atas masukan, kritik, dan saran yang membantu penulis untuk memperbaiki Tesis ini.
10. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf administrasi dan Karyawan Program Studi Magister Matematika-ITS atas segala bantuannya.
11. Ibu Retno Wahyu Dewanti, S.Si., M.Si. selaku dosen di Institut Teknologi Kalimantan (ITK) yang telah banyak memberikan saran dan waktunya untuk diskusi dalam penyusunan Tesis ini.
12. Teman-teman seperjuangan Pra S2 SAINTEK 2012 dan 2013 yang selalu memberi dukungan, motivasi, dan segala bantuannya selama ini.
13. Keluarga besar Pascasarjana ITS 2013, terkhusus untuk sahabat-sahabat ku Mas Ghani, Mas Wayan, Mas Rif, Mas Bagus, Mas Rizky, Pak Alfian dan Si Mancung serta semua pihak yang telah membantu penulis selama proses penulisan Tesis ini.

Semoga Allah SWT selalu memberikan karuniah dan hidayah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan Tesis ini.

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyelesaian Tesis ini masih terdapat kekurangan dan kekeliruan. Oleh karena itu, penulis mengharap kritik dan saran dari berbagai pihak yang bersifat membangun sebagai bahan perbaikan dimasa yang akan datang. Semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Surabaya, Mei 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR NOTASI

H	Fungsi Hamiltonian
I	Matriks Identitas
J	Matriks Jacobian
$J(u(t))$	Fungsi tujuan
M	Matriks M
p	Subsidi pemerintah pada non-beras
q_1	Bobot biaya pengendalian terhadap ketergantungan konsumsi beras
q_2	Bobot biaya pengendalian terhadap ketergantungan konsumsi non-beras
R	Bilangan Real
t_0	Waktu awal
t_f	Waktu akhir tetap
$u, u(t)$	Vektor kendali
$u^*, u^*(t)$	Vektor kendali optimal
V	Fungsi Lagrange
ω_1	Bobot biaya penyimpangan tingkat konsumsi dengan persediaan beras
ω_2	Bobot biaya penyimpangan tingkat konsumsi dengan persediaan non-beras
$x_1(t)$	Konsumsi beras pada waktu t
$x_2(t)$	Konsumsi non-beras pada waktu t
$\dot{x}$	Variabel keadaan
$x, x(t)$	Vektor keadaan
$x^*, x^*(t)$	Vektor keadaan optimal
$\dot{x}_1(t)$	Laju perubahan konsumsi beras pada waktu t
$\dot{x}_2(t)$	Laju perubahan konsumsi non-beras pada waktu t
$x_1^s(t)$	Tingkat persediaan beras pada wakti t
$x_2^s(t)$	Tingkat persediaan non-beras pada wakti t
α_1	Persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras
α_2	Persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi non-beras
β_1	Konstanta positif yang merepresentasikan dampak yang berpengaruh pada konsumsi beras akibat adanya diversifikasi pangan
β_2	Konstanta positif yang merepresentasikan dampak yang berpengaruh pada konsumsi non-beras akibat adanya diversifikasi pangan
δ	Menunjukkan variasi
γ	Laju penurunan persediaan pada beras
λ	Nilai eigen
Φ	Fungsi Mayer

BAB 1
PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai hal-hal yang melatar belakangi permasalahan dalam penelitian ini, kemudian masalah tersebut dipersempit dengan perumusan masalah yang disertai dengan batasan masalah. Terdapat pula tujuan dan manfaat dari penelitian ini.

1.1 Latar Belakang

Rawan pangan yang terjadi di Indonesia sebenarnya sangat terkait dengan ketergantungan masyarakat Indonesia terhadap beras. Dalam hal ini, nasi adalah makanan yang populer dikalangan masyarakat (Nur'aripin, 2010). Menurut Darmawati (1998) mengatakan bahwa pangan adalah masalah yang sangat penting, karena merupakan kebutuhan pokok masyarakat, jika kebutuhan pangan tersebut tidak terpenuhi maka akan timbul berbagai masalah ekonomi dan sosial di lingkungan masyarakat.

Ketergantungan terhadap beras sebagai makanan pokok oleh sebagian besar penduduk Indonesia dapat menyebabkan tingginya angka impor beras setiap tahun (Simanjuntak, 2006; Setiawan, 2010). Pembangunan ketahanan pangan di Indonesia telah ditegaskan dalam peraturan Pemerintah Nomor 68 Tahun 2002 Tentang Ketahanan Pangan dan Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 18 Tahun 2012 Tentang Pangan (Lastinawati, 2010). Pada kenyataannya pemerintah telah menetapkan berbagai instrumen untuk menghindari perilaku ketergantungan konsumsi pangan masyarakat terhadap satu jenis pangan pokok yaitu beras. Hal ini tercantum dalam Peraturan Presiden No.22 Tahun 2009 tentang Kebijakan Percepatan Penganekaragaman Konsumsi Pangan Berbasis Sumber Daya Lokal. Salah satu upaya yang dilakukan oleh pemerintah adalah dengan mengeluarkan kebijakan diversifikasi pangan yang bertujuan untuk mengalihkan sebagian konsumsi karbohidrat masyarakat dari beras menuju sumber pangan non-beras (Dewanti, 2014).

Upaya diversifikasi konsumsi pangan telah dibahas dalam buku Roadmap Diversifikasi Pangan 2011-2015 yang menjelaskan bahwa diversifikasi pangan merupakan salah satu prioritas dari empat target sukses pertanian di Indonesia. Dalam Peraturan Presiden disebutkan dua sasaran dari upaya diversifikasi pangan yaitu: (1) Memasyarakatkan pola konsumsi yang beragam, bergizi, seimbang dan aman untuk dikonsumsi (2) Mengurangi konsumsi beras 15 % per kapita per tahun (Anonim, 2012).

Beras sebagai sumber karbohidrat dapat disubstitusikan dengan sumber karbohidrat non-beras yang dapat diproduksi secara lokal dengan biaya yang murah dan mudah didapatkan, dengan kandungan gizi yang tidak jauh berbeda dengan beras, hal ini dilakukan untuk mendorong kelancaran program diversifikasi pangan (Budiningsih, 2009; Dewanti, 2014). Berikut ini beberapa sumber pangan lokal yang dapat berperan sebagai sumber karbohidrat dalam konsumsi bahan pangan non-beras, seperti (1) serelia: jagung, sorghum, hotong, jali, jawat, dan lain-lain (2) ubi-ubian: singkong, ubi kayu, ubi jalar, kentang, talas, sagu, gayong, garut, gembili, dan lain-lain (3) buah: sukun, pisang, labu kuning, buah bakau, dan lain-lain (Anonim, 2012).

Hubungan antara beras dan non-beras sangat menarik untuk dipelajari dan dikembangkan agar dapat mewujudkan cita-cita bangsa yakni salah satunya adalah memenuhi kebutuhan masyarakat dalam bidang pangan yang bercorak dari sistem Ketahanan Pangan Nasional. Hal tersebut menjadi topik dalam sebuah Tesis yang dikerjakan oleh Dewanti (2014) yang berjudul Kendali Optimal Model Diversifikasi Beras dan Non-Beras. Metode yang digunakan dalam menyelesaikan masalah kendali optimal pada penelitian tersebut adalah menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin yang bertujuan untuk mengoptimalkan tingkat konsumsi beras dan non-beras sehingga dapat mengeluarkan biaya yang minimum.

Pada penelitian tersebut, sistem dinamik yang digunakan belum terdapat kebijakan langsung oleh pemerintah yang dikhususkan pada non-beras. Oleh karena itu, penulis bermaksud melakukan penelitian pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan sistem dinamik yang digunakan yaitu dengan adanya kebijakan khusus yang dilakukan oleh pemerintah pada non-beras yang berupa pemberian subsidi pada non-beras.

Berdasarkan pada uraian di atas, penulis menerapkan teori kendali optimal pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras. Sehingga diperlukan analisa untuk mengetahui kestabilan dari keadaan tersebut pada setiap titik kesetimbangan. Dengan adanya pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras diharapkan dapat meminimumkan tingkat konsumsi beras dan meningkatkan konsumsi non-beras sehingga dapat mengeluarkan biaya yang minimum (Anonim, 2012).

Selanjutnya, model dinamik yang digunakan untuk mengintepretasikan keadaan tersebut berdasarkan pada model Lotka-Volterra, mengacu pada penelitian yang dilakukan Dewanti (2014) dengan membahas tentang kendali optimal pada model diversifikasi beras dan non-beras. dalam model ini tidak terdapat pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana memodelkan dan menganalisa sistem diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras?
2. Bagaimana menyelesaikan kendali optimal dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras?
3. Bagaimana performansi sistem yang optimal dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Model sistem dinamik yang digunakan adalah model Lotka-Volterra.
2. Jenis pangan non-beras yang dimaksud pada penelitian ini adalah jagung, ubi kayu, gaplek, tepung ubi kayu/ tapioka, ubi jalar, sagu dan kentang.
3. Penyelesaian kendali optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.
4. Penelitian ini menggunakan data statistik konsumsi pangan di Indonesia tahun 2012.
5. Simulasi menggunakan *software* Matlab 2013a.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mendapatkan model dan analisa dari sistem diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras.
2. Mendapatkan kendali yang optimal dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras pada periode waktu tertentu.
3. Mengetahui performansi sistem yang optimal dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Sebagai salah satu kontribusi dalam pengembangan ilmu Matematika terapan di bidang teknik dan industri.

2. Sebagai kontribusi mengenai teori kendali optimal menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin yang diterapkan pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras.

3. Sebagai bahan pertimbangan pemerintah dalam menentukan kebijakan pada aspek produksi dan konsumsi pangan di Indonesia.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai diversifikasi pangan yang mencakup beras dan non-beras, kebijakan pemerintah tentang diversifikasi pangan, analisa kestabilan dari titik kesetimbangan, sistem dinamik dari model matematika tentang diversifikasi beras dan non-beras, dan penyelesaian masalah kendali optimal dari sistem dinamik dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.

2.1 Diversifikasi Pangan

Upaya diversifikasi pangan sudah dilakukan oleh pemerintah sejak awal tahun 50-an, namun sampai sekarang upaya tersebut masih sulit terwujud (Nur'aripin, 2010). Berbagai upaya penganekaragaman pangan terus dilakukan sampai saat ini, namun kenyataannya implementasi kebijakan ini cenderung berjalan lamban sehingga terjadinya ketidak seimbangan antara kebutuhan konsumsi pangan masyarakat terhadap beras dan non-beras (Budiningsih, 2009).

2.1.1 Diversifikasi Beras dan Non-Beras

Diversifikasi pangan atau penganekaragaman pangan adalah suatu cara yang dilakukan pemerintah untuk mengadakan lebih dari satu jenis barang atau komuditi yang dapat dikonsumsi oleh masyarakat (Budiningsih, 2009). Dalam Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 68 Tahun 2002 pasal 9 ayat (1) menyatakan bahwa penganekaragaman pangan diselenggarakan untuk meningkatkan ketahanan pangan dengan memperhatikan sumber daya, kelembagaan dan budaya lokal (Anonim, 2012).

Sedangkan menurut Riadi dalam Budiningsih (2009) menyatakan bahwa diversifikasi pangan merupakan suatu proses pemilihan pangan yang tidak hanya bergantung pada satu jenis pangan saja, akan tetapi memiliki beragam pilihan *(alternatif)* terhadap berbagai bahan pangan. Pertimbangan rumah tangga untuk memiliki bahan makanan pokok keluarga didasarkan pada aspek produksi, aspek pengolahan, dan aspek konsumsi pangan. Penganekaragaman pangan bertujuan tidak hanya untuk mengurangi ketergantungan pada satu jenis pangan tertentu, akan tetapi dimasukkan pula untuk mencapai keberagaman komposisi gizi sehingga mampu menjamin peningkatan kualitas gizi masyarakat.

Upaya diversifikasi pangan ditinjau dari aspek konsumsi mencakup perilaku yang didasari pertimbangan ekonomis (pendapatan dan harga komoditas) dan pertimbangan nonekonomis (selera, kebiasaan dan pengetahuan). Diversifikasi pangan dan pola konsumsi ini secara dinamis mengalami perubahan. Jadi, diversifikasi pangan selain merupakan upaya mengurangi ketergantungan pada beras, juga penganekaragaman dari beras ke sumber kalori dan protein lainnya yang lebih berkualitas (Darmawati, 1998).

Tingginya dominasi beras dalam pola konsumsi pangan penduduk Indonesia hingga saat ini merupakan salah satu penyebab masalah rendahnya kualitas konsumsi pangan nasional yang belum beragam dan bergizi seimbang. Kontribusi beras dalam konsumsi pangan masyarakat kelompok padi-padian sebesar 996 kkal per kapita per hari atau mencapai 80,6 % terhadap total energi padi-padian (1.236 kkal per kapita per hari) pada tahun 2011 (Anonim, 2012).

Ketergantungan kebutuhan beras sebagai makanan pokok penduduk Indonesia dan dengan keterbatasan tingkat produksi beras dapat mengakibatkan tingginya angka impor beras yang terjadi di Indonesia (Lastinawati, 2010). Selanjutnya menurut Nur'aripin (2010) menyatakan bahwa diversifikasi pangan atau penganekaragaman pangan untuk saat ini dapat dijadikan sebagai salah satu kunci utama dalam mewujudkan keberhasilan dalam mempertahankan ketahanan pangan yang ada di Indonesia.

2.1.2 Kebijakan Pemerintah terhadap Diversifikasi Beras dan Non-Beras

Kebijakan pemerintah dalam mempertahankan ketahan pangan negara telah dilakukan dengan berbagai jenis program kerja pemerintah. Program kerja yang dilakukan oleh pemerintah baik yang dilaksanakan secara langsung maupun tidak langsung terkait dengan program diversifikasi beras dan non-beras terus digulirkan oleh pemerintah melalui berbagai macam kegiatan dan yang dilakukan oleh banyak instansi pemerintahan (Rachman, 2008).

Pada tahun 1974, dikeluarkan Instruksi Presiden (Inpres) Nomor 14 tahun 1974 tentang Usaha Perbaikan Menu Makanan Rakyat (UPMMR) yang selanjutnya ditegaskan kembali melalui Inpres nomor 20 Tahun 1979 tentang UPMMR (Budiningsih, 2009). Dari sisi kelembagaan, tahun 1989 pada kabinet pembangunan VI dibentuk kantor Mentri Negara Urusan Pangan yang berhasil meluncurkan sebuah sologan "Aku Cinta Makanan Indonesia (ACMI)". Selanjutnya diberlakukan gerakan sadar pangan dan gizi yang dilaksanakan oleh Departemen Kesehatan, program diversifikasi pangan dan gizi oleh Departemen Pertanian (1993-1998) dan lain-lain (Anonim, 2012).

Kemudian pada tahun 1996, dikeluarkan Undang-Undang nomor 7 Tahun 1996 tentang Pangan yang memberikan amanat untuk mewujudkan Ketahanan Pangan Nasional. Dalam usaha perwujudan ketahanan pangan di Indonesia yaitu pada umumnya dan upaya program diversifikasi konsumsi pangan pada khususnya juga dituangkan dalam Undang-Undang nomor 25 Tahun 2000 tentang Program Pembangunan Nasional (Propenas) melalui program Peningkatan Ketahanan Pangan. Pada tahun 2001 pada Era Gotong Royong telah dibentuk Dewan Ketahanan Pangan (DKP) yang dipimpin langsung oleh Presiden Republik Indonesia. Kemudian pada tahun 2002 dikeluarkan Keputusan Presiden Nomor 68 tentang Ketahanan Pangan (Ariani, 2009).

Selanjutnya pada tahun 2009 dikeluarkan Peraturan Presiden (Perpres) Nomor 22 Tahun 2009 tentang pola konsumsi pangan yang beragam, bergizi dan aman serta pengurangan konsumsi beras 15 % per kapita per tahun. Kemudian yang terakhir hingga saat ini dikeluarkan buku Roadmap Diversifikasi Pangan 2011-2015 yang dijadikan sebagai bahan acuan untuk melaksanakan kegiatan percepatan upaya diversifikasi pangan dengan sasaran utamanya pada beras dan non-beras yang dilaksanakan secara terstruktur dan terukur, dengan kegiatan, sasaran dan ukuran kinerja yang jelas (Anonim, 2012).

2.1.3 Tujuan Diversifikasi Beras dan Non-Beras

Laju pertumbuhan penduduk di Indonesia menuntut adanya ketersediaan pangan dan jumlah pangan yang cukup, harga terjangkau dan tersedia setiap saat. Hal ini merupakan tantangan yang sangat besar dalam pelaksanaan diversifikasi beras dan non-beras. Dari aspek pelaksanaan, diversifikasi atau penganekaragaman pangan memiliki dua bentuk tujuan, yaitu tujuan berdasarkan konsep pembangunan berkelanjutan *(Sustainable development)* dan tujuan berdasarkan aspek kesejahteraan masyarakat (Anonim, 2012).

Tujuan program diversifikasi beras dan non-beras adalah (1) Mengurangi ketergantungan impor beras (2) Mencapai pola konsumsi pangan yang tepat (3) Mewujudkan pola pangan harapan dengan meningkatnya hasil produksi dari beras dan non-beras (4) Gizi yang terjangkau oleh semua tingkat pendapatan (Budiningsih, 2009).

Sumber pangan pokok beras dan non-beras haruslah benar-benar mendapat perhatian yang lebih dari pemerintah untuk memenuhi kebutuhan konsumsi pangan masyarakat. Namun kenyataan yang ada, dari kencenderungan masyarakat mengkonsumsi beras mengakibatkan produksi beras dalam negeri tidak dapat memenuhi kebutuhan konsumsi pangan masyarakat sehingga menyebabkan angka impor beras selalu meningkat hingga berkisar 240 juta ton per tahun dari lima negara. Untuk mengurangi angka impor tersebut, pemerintah diharapkan dapat memberikan kebijakan khususnya pada non-beras agar kebutuhan konsumsi pangan masyarakat dapat terpenuhi setiap saat (Anonim, 2012) .

Dari uraian di atas, sangatlah terlihat jelas bahwa dalam memenuhi kebutuhan konsumsi pangan masyarakat merupakan salah satu tujuan utama dari beberapa program penting pemerintah yang selama ini telah dilaksanakan. Salah satu program pemerintah yang terus dilaksanakan adalah program diversifikasi beras dan non-beras, dalam upaya diversifikasi pangan diharapkan dapat memenuhi kebutuhan konsumsi pangan masyarakat setiap waktu, sehingga tercipta ketahanan pangan dalam negara. Dalam hal ini, upaya diversifikasi pangan sangatlah berperan penting untuk mewujudkan cita-cita pemerintah dalam mewujudkan ketahanan pangan Nasional.

2.2 Sistem Dinamik

Suatu sistem yang dapat diketahui nilainya dimasa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi pada masa sekarang atau masa yang lalu disebut sebagai sistem dinamik. Dengan kata lain, sistem dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh keadaan waktu (t). Jika waktu t yang kontinu, maka bentuk dari sistem dinamik tersebut dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial (Nagle, 2012). Sistem persamaan diferensial orde satu yang dapat dibentuk yakni sebagai berikut:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_n), i = 1, ..., n \tag{2.1}$$

dengan f_i pada Persamaan (2.1) adalah fungsi bernilai riil yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu t disebut sistem *autonomous*. Sistem *autonomous* ada dua jenis, yaitu sistem *autonomous* linear dan sistem *autonomous* nonlinear (Fatimah, 2010).

2.2.1 Model Diversifikasi Beras dan Non-Beras

Model matematika dari sistem dinamik tentang diversifikasi beras dan non-beras adalah sebagai berikut (Dewanti, 2014):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2 x_2 - \beta_2 x_1 x_2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan:

x_1	:	konsumsi beras pada waktu t
x_2	:	konsumsi non-beras pada waktu t
α_1	:	persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras
α_2	:	persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi non-beras
β_1	:	konstanta positif yang merepresentasikan dampak yang berpengaruh pada konsumsi beras akibat adanya upaya diversifikasi pangan
β_2	:	konstanta positif yang merepresentasikan dampak yang berpengaruh pada konsumsi non-beras akibat adanya upaya diversifikasi pangan

Dari sistem dinamik pada Persamaan (2.2) menyatakan bahwa laju perubahan dalam mengkonsumsi beras $\left(\frac{dx_1}{dt}\right)$ dan laju perubahan dalam mengkonsumsi non-beras $\left(\frac{dx_1}{dt}\right)$ sangat dipengaruhi oleh besar kecilnya persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras dan mengkonsumsi non-beras. Sedangkan penurunan pada konsumsi beras dan konsumsi non-beras dapat terjadi karena adanya upaya diversifikasi pangan. Peningkatan pada konsumsi beras menyebabkan penurunan pada tingkat konsumsi non-beras dan begitu pula sebaliknya, peningkatan pada konsumsi non-beras dapat menyebabkan penurunan pada tingkat konsumsi beras. Adanya upaya diversifikasi beras dan non-beras yang menyebabkan terjadinya pengaruh antara beras dan non-beras sehingga dapat menyebabkan pengurangan pada tingkat konsumsi masing-masing selama jangka waktu *I*, dengan demikian dapat diasumsikan bahwa konsumsi beras dan konsumsi non-beras selalu bernilai positif (Dewanti, 2014).

Upaya diversifikasi pangan diharapkan dapat mewujudkan tercapainya ketahanan pangan di Indonesia setiap saat. Oleh karena itu, pemerintah dipandang perlu memberikan kebijakan khusus pada non-beras yang berupa subsidi sehingga dapat mempercepat tercapainya tujuan upaya diversifikasi pangan atau penganekaragaman pangan (Anonim, 2012). Berdasarkan hal tersebut di atas, dapat dibentuk model matematika tentang diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras.

2.2.2 Ketunggalan Penyelesaian Model

Misalkan sistem dinamik tak linear berbentuk $\frac{dX}{dt} = f(X(t), t), X(0) = X_0$, dengan $X \in R^n$ dan $t \in R^+$, untuk menunjukkan eksistensi dan ketunggalan penyelesaian dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras digunakan asumsi Desoer, yaitu:

1) $T \subset R^+$ memuat titik-titik berhingga tiap satuan interval.

2) Untuk setiap $X \in R^+$, $f(X,t)$ kontinu pada $t \notin T$.

3) Untuk setiap $t_i \in T$, $f(X,t)$ mempunyai limit kiri dan limit kanan pada $t = t_i$

4) $f : R^n \times R \longrightarrow R^n$ memenuhi kondisi Lipschitz, yaitu terdapat fungsi kontinu sebagian demi sebagian $k : R^+ \longrightarrow R^+$ sehingga $\| f(X_1(t)) - f(X_2(t)) \| \leq k(t) \| X_1 - X_2 \|$ untuk semua $t \in R^+$ dan semua titik $X_1, X_2 \in R^n$.

(Hariyanto, 2014)

2.3 Analisis Kestabilan

Dalam melakukan analisa kestabilan pada model Lotka-Volterra, dianalisis dengan cara menentukan titik kesetimbangan pada sistem dinamik tersebut, kemudian diperiksa kestabilan dari setiap titik kesetimbangan yang telah diperoleh. Oleh karena persamaan Lotka-Volterra adalah berbentuk persamaan diferensial tak linier maka sistem tersebut perlu dilinearisasikan terlebih dahulu dengan membentuk matriks Jacobian.

Pandanglah persamaan diferensial dua variabel berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Jika titik $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ yang merupakan titik kesetimbangan dari Persamaan (2.3) maka akan memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Oleh karena turunan dari suatu konstanta sama dengan nol, maka sepanjang fungsi konstan $x(t) \equiv \bar{x}_0$ dan $y(t) \equiv \bar{y}_0$ adalah merupakan penyelesaian kesetimbangan dari Persamaan (2.3) untuk semua t (Lestari, 2011).

Definisi 2.1
Titik kesetimbangan $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ dari Persamaan (2.3) disebut stabil jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga setiap penyelesaian $(x(t), y(t))$ dari Persamaan (2.3) yang pada saat $t = 0$ memenuhi $(x(0) - \bar{x}_0)^2 + (y(0) - \bar{y}_0)^2 < \delta$ akan berakibat $(x(0) - \bar{x}_0)^2 + (y(0) - \bar{y}_0)^2 < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

Definisi 2.2
Titik kesetimbangan $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ *dari Persamaan (2.3) disebut stabil asimtotik jika titik itu stabil dan ada* δ_0 *sedemikian hingga setiap penyelesaian* $(x(t), y(t))$ *dari Persamaan (2.3) yang pada saat* $t = 0$ *memenuhi:* $(x(0) - \bar{x}_0)^2 + (y(0) - \bar{y}_0)^2 < \delta_0$ *untuk semua* $t \geq 0$ *dan memenuhi*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}_0 \ dan \ \lim_{t \to \infty} y(t) = \bar{y}_0$$

Definisi 2.3
Titik kesetimbangan $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ *dari Persamaan (2.3) disebut tidak stabil jika tidak memenuhi definisi 2.2.*

(Finizio, 1988)

Secara intuisi sistem dikatakan stabil apabila penyelesaian sangat dekat dengan titik kesetimbangan didalam suatu persekitaran. Sedangkan stabil asimtotik berarti penyelesaian konvergen ke titik setimbang (asalkan titik awal adalah cukup dekat ke titik setimbang). Sistem dikatakan tidak stabil apabila selalu ada penyelesaian yang dimulai dari manapun dekatnya dengan titik setimbang tapi akhirnya menjauh dari titik kesetimbangan (Subiono, 2013).

2.4 Stabil Asimtotik Lokal

Kestabilan asimtotik lokal pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras merupakan kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari linearisasi sistem tak linear. Kestabilan lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda bagian real dari akar-akar karakteristik sistem dari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik kesetimbangan. Ada beberapa konsep kestabilan untuk persamaan diferensial tersebut. Kestabilan ini dibedakan menurut kestabilan sistem *autonomous* (berkaitan dengan vektor keadaan) dan kestabilan yang dikaitkan dengan masukan dan keluaran sistem (Subiono, 2013).

2.4.1 Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial

Linearisasi adalah proses hampiran dari suatu persamaan diferensial non linear menjadi bentuk linear. Tinjau kembali Persamaan (2.3) dengan menyatakan bahwa f dan g merupakan fungsi non linear dan $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ adalah titik kesetimbangan dari Persamaan (2.3). Selanjutnya akan dicari pendekatan linear disekitar titik $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor disekitar titik $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, yaitu sebagai berikut (Aini, 2010).

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(\bar{x}_0,\bar{y}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(x-\bar{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(y-\bar{y}_0) + R_1(\bar{x}_0,\bar{y}_0) \\
\frac{dy}{dt} &= g(\bar{x}_0,\bar{y}_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(x-\bar{x}_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(y-\bar{y}_0) + R_2(\bar{x}_0,\bar{y}_0)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan R_1 dan R_2 adalah residu yang memuat bilangan real sangat kecil atau mendekati nol sehingga dapat diabaikan. Jika $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ merupakan titik kesetimbangan maka berlaku $f(\bar{x}_0,\bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0,\bar{y}_0) = 0$ sehingga Persamaan (2.4) menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(x-\bar{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(y-\bar{y}_0) + R_1(\bar{x}_0,\bar{y}_0) \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(x-\bar{x}_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(y-\bar{y}_0) + R_2(\bar{x}_0,\bar{y}_0)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Jika berlaku

$$\lim_{r\to\infty} \frac{R_i(x,y)}{r} = 0, i = 1,2$$

dengan $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ maka Persamaan (2.5) menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(x-\bar{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(y-\bar{y}_0) \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(x-\bar{x}_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)(y-\bar{y}_0)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Untuk melinearkan Persamaan (2.6) di atas, dimisalkan $x-\bar{x}_0 = u$ dan $y-\bar{y}_0 = v$ maka berlaku $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$ sehingga dari Persamaan (2.6) dapat dibentuk:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \dot{u} = u\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0,\bar{y}_0) + v\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0,\bar{y}_0) \\
\frac{dv}{dt} &= \dot{v} = u\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_0,\bar{y}_0) + v\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) merupakan hasil linearisasi dari Persamaan (2.3) disekitar $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$. Sehingga Persamaan (2.7) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{|(\bar{x}_0,\bar{y}_0)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis

$$J\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

dengan matriks J= $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{|(\bar{x}_0, \bar{y}_0)}$ disebut sebagai matriks Jacobian disekitar titik kesetimbangan $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$.

2.4.2 Akar-akar Persamaan Karakteristik

Dalam menentukan kestabilan dari sitem dinamik model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras, hal yang perlu dilakukan adalah mencari persamaan karakteristik dari sistem dinamik tersebut. Oleh karena itu, menurut Finizio (1988) mendefinisikan persamaan karakteristik sebagai berikut.

Definisi 2.4

Jika J adalah matriks yang berukuran $n \times n$ maka vektor tak nol dinamakan vektor karakteristik dari J jika memenuhi:

$$Jx = \lambda x \tag{2.8}$$

Untuk suatu skalar λ disebut nilai karakteristik dari J dan x dikatakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai karakteristik dari matriks J yang berukuran $n \times n$, maka dapat ditulis kembali bentuk Persamaan (2.8) di atas sebagai $Jx = \lambda x$ atau yang ekuivalen dengan $(J - \lambda I)x = 0$, mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika $\mid J - \lambda I \mid= 0$.

Jika matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka Persamaan (2.8) dapat ditulis dalam bentuk:

$J = \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = 0$ atau $\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0$.

Maka dengan demikian akar-akar karakteristik dari matriks Jacobian tersebut sebagai berikut:

$\lambda_{1,2} = \dfrac{(a + b) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$.

Theorema 2.1

Titik setimbang $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ *stabil asimtotik jika nilai karakteristik matriks* $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, *mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.*

(Finizio, 1988)

Jika nilai eigen yang diperoleh dari suatu matriks Jacobian adalah bernilai $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dan $Re(\lambda_i) \neq 0$, dengan $i = 1, 2$ maka dapat diperoleh kestabilan dari titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear yang telah dilinierkan terlebih dahulu, sehingga dapat ditentukan berdasarkan analisis kestabilan dari sistem *autonomous* linear. Kriteria kestabilan dari sistem *autonomous* akan ditunjukkan pada tabel 2.1 berikut. Oleh sebab itu, kestabilan yang diperoleh hanya bersifat lokal atau berada di daerah sekitar titik kesetimbangan (Boyce, 2009).

Tabel 2.1: Kriteria Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem *Autonomous* Nonlinear

Nilai Eigen	**Jenis Titik Kritis**	**Kestabilan**
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Titik pelana	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Teratur atau simpul tidak teratur	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Teratur atau simpul tidak teratur	Stabil
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$	Titik spiral	
$a > 0$		Tidak stabil
$a < 0$		Stabil asimtotik
$\lambda_1 = ib, \lambda_2 = -ib$	Pusat	Stabil

Sedangkan menurut Kuhnova (2009) dalam salah satu penelitian yang dilakukan tentang *Analisis Model Prey-Predator* yang menyatakan bahwa jika nilai eigen yang diperoleh dari suatu matriks Jacobian terdapat λ_1 dan λ_2 maka ada beberapa jenis titik kesetimbangan dengan meninjau nilai karakteristik atau nilai eigen dari persamaan karakteristinya, yaitu:

i) Jika $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ dan $\lambda_1\lambda_2 > 0$, maka titik kesetimbangan $(\dot{x}, \dot{y})$ *node*;

ii) Jika $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ dan $\lambda_1\lambda_2 < 0$, maka titik kesetimbangan $(\dot{x}, \dot{y})$ *saddle*;

iii) Jika $\lambda_1, \lambda_2 = \pm bi$, yaitu λ_1, λ_2 imajiner, maka titik kesetimbangan $(\dot{x}, \dot{y})$ *center* atau *rotation point*;

iv) Jika $\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi, a \neq 0$, maka titik kesetimbangan $(\dot{x}, \dot{y})$ adalah *focus*;

v) Jika bagian real dari λ_1 dan λ_2 adalah negatif, maka titik kesetimbangan $(\dot{x}, \dot{y})$ adalah *asymptotically stable*;

vi) Jika bagian real dari λ_1 dan λ_2 adalah positif, maka titik kesetimbangan $(\dot{x}, \dot{y})$ *unstable*.

Persamaan karakteristik dari $det(J(\dot{x}, \dot{y})) - \lambda I = 0$, dapat dicari dengan ketentuan sebagai berikut.

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{tr(J(\dot{x}, \dot{y})) \pm \sqrt{tr(J(\dot{x}, \dot{y}))^2 - 4det(J(\dot{x}, \dot{y}))}}{2}$$

Berdasarkan dari jenis titik kesetimbangan di atas, misalkan $(\dot{x}, \dot{y})$ adalah titik kesetimbangan dari Persamaan (2.3), maka untuk menentukan jenis titik kesetimbangan dapat pula digunakan kriteria sebagai berikut:

1. Jika $det(J(\dot{x}, \dot{y})) < 0$, maka $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ dan $(\dot{x}, \dot{y})$ adalah *saddle*;

2. Jika $det(J(\dot{x}, \dot{y})) > 0$, diperoleh:

   (a) Jika $4det(J(\dot{x}, \dot{y}) < tr(J(\dot{x}, \dot{y}))^2$, maka
   $tr(J(\dot{x}, \dot{y})) < 0$ dan $(\dot{x}, \dot{y}) < 0$ adalah *stable node*;
   $tr(J(\dot{x}, \dot{y})) > 0$ dan $(\dot{x}, \dot{y}) > 0$ adalah *unstable node*;

   (b) Jika $4det(J(\dot{x}, \dot{y}) > tr(J(\dot{x}, \dot{y}))^2$, maka
   $tr(J(\dot{x}, \dot{y})) < 0$ dan $(\dot{x}, \dot{y}) < 0$ adalah *stable focus*;
   $tr(J(\dot{x}, \dot{y})) > 0$ dan $(\dot{x}, \dot{y}) > 0$ adalah *unstable focus*;

   (c) Jika $tr(J(\dot{x}, \dot{y})) = 0$ maka $(\dot{x}, \dot{y}) = 0$ adalah *rotation point* atau *focus*.

(Kuhnova, 2009)

Jika terdapat matriks Jacobian yang sulit dalam mencari nilai eigen, dengan kata lain sulit dalam menentukan persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut, maka kriteria dari bentuk kestabilan titik kesetimbangan yang dimaksud dapat ditentukan berdasarkan Theorema 2.2 berikut.

Theorema 2.2

Diberikan matriks Jacobian berukuran $n \times n$ dengan elemen didalamnya adalah $a_{ij}(i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., n)$. Maka kestabilan matriks Jacobian dapat ditentukan berdasarkan kondisi berikut.

(i) Terdapat $a_{ii} \leq 0$ untuk semua i;

(ii) Terdapat $a_{ii} \neq 0$ untuk setidaknya satu i;

(iii) Terdapat $a_{ij} \leq 0$ untuk semua $i \neq j$;

(iv) Untuk setiap urutan dari tiga atau lebih indeks $i, j, k, ..., q, r$ (dengan $i \neq j \neq k \neq ... \neq q \neq r$), perkalian $a_{ij}a_{jk}...a_{qr}a_{ri} = 0$;

(v) det $J \neq 0$.

(Quirk, 1965)

2.5 Fungsi Tujuan dari Kendali Optimal

Dalam fungsi tujuan dari kendali optimal pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras bertujuan untuk mengoptimalkan konsumsi beras dan non-beras sehingga dapat mengeluarkan biaya yang minimum. Dalam hal ini, untuk mencari kendali $u(t)$ yang optimal dipengaruhi oleh beberapa hal, yaitu bobot biaya dari tingkat konsumsi dan ketersediaan beras dan non-beras yang dapat dinotasikan sebagai ω_i dan $x_i^s(t)$, bobot biaya pengendalian atas ketergantungan masyarakat dalam mengkonsumsi beras dan non-beras yang dinotasikan dengan q_1 dan q_2. Sedangkan $x_i^s(t)$ adalah tingkat persediaan beras dan non-beras pada waktu t.

Fungsi tujuan untuk mengoptimalkan konsumsi beras dan non-beras sebagai berikut (Dewanti, 2014).

$$\begin{aligned} J(u(t)) = {} & \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \{\omega_1(x_1(t) - x_1^s(t))^2 + \omega_2(x_2(t) - x_2^s(t))^2\} \; dt \; + \\ & \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \{q_1u_1^2(t) + q_2u_2^2(t)\}\, dt \\ & \frac{1}{2}\{v_1(x_1(t_f) - \bar{x}_1^s)^2 + v_2(x_2(t_f) - \bar{x}_2^s)^2\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

dengan:

ω_1	:	bobot biaya penyimpangan tingkat konsumsi dengan persediaan beras
ω_2	:	bobot biaya penyimpangan tingkat konsumsi dengan persediaan non-beras
$x_1^s(t)$	:	tingkat persediaan beras pada waktu *t*
$x_2^s(t)$	:	tingkat persediaan non-beras pada waktu *t*
$u_1(t)$	:	variabel pengendali konsumsi beras pada waktu *t*

$u_2(t)$	:	variabel pengendali konsumsi non-beras pada waktu *t*
q_1	:	bobot biaya pengendalian atas ketergantungan mengkonsumsi beras
q_2	:	bobot biaya pengendalian atas ketergantungan mengkonsumsi non-beras
v_1	:	bobot biaya penyimpangan konsumsi beras dengan target konsumsinya diakhir periode
v_2	:	bobot biaya penyimpangan konsumsi non-beras dengan target konsumsinya diakhir periode
$x_1(t_f)$	:	konsumsi beras pada waktu akhir
$x_2(t_f)$	:	konsumsi non-beras pada waktu akhir
$\bar{x}_1^s$	:	target akhir konsumsi beras
$\bar{x}_2^s$	:	target akhir konsumsi non-beras

dengan bobot biaya penyimpangan konsumsi beras dan non-beras diasumsikan selalu bernilai positif atau $v_1 > 0$ dan $v_2 > 0$.

2.6 Kendali Optimal

Pada bagian ini, akan dibahas tujuan utama dari permasalahan kendali optimal yaitu untuk mencari nilai kendali $u(t)$ yang akan dimasukkan kedalam fungsi dinamik dan akan memenuhi kendala fisik atau konstrain. Kemudian pada waktu yang sama, kita dapat menentukan nilai yang optimum yaitu nilai maksimum atau minimum yang dapat memenuhi kriteria pada fungsi tujuan. Dengan kata lain kendali pada saat keadaan dan waktu yang sama dapat ditentukan nilai yang optimum berdasarkan fungsi tujuan.

Formulasi kendali optimal terdiri dari deskripsi secara matematis suatu sistem atau model matematika yang ada, kemudian menentukan fungsi tujuan dan kendala atau syarat batas yang berlaku. Dengan tujuan untuk mencari nilai $u(t)$ yang dapat mengoptimalkan fungsi tujuan tersebut. Pada umumnya masalah kendali optimal dapat diformulasikan sebagai berikut (Naidu, 2002).

$$J(u(t)) = \Phi(x(t_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t)dt \tag{2.10}$$

dengan sistem dinamik dinyatan oleh persamaan berikut:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{2.11}$$

dan kondisi batas,

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \end{aligned} \tag{2.12}$$

Berikutnya dapat diartikan bahwa fungsi tujuan merupakan kuantitas dari suatu sistem atau hal yang sangat berpengaruh dalam menentukan keoptimalan suatu sistem. Dalam masalah ekonomi, fungsi tujuan dapat memberikan ukuran kuantitas yang tepat mengenai suatu keuntungan, penjualan yang telah dilakukan pada periode waktu tertentu, biaya yang telah dikeluarkan pada saat proses teransaksi, meminimumkan terjadinya kerugian, dan lain sebagainya.

Kendali $u^*(t)$ merupakan kendali yang optimal, jika disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.10) akan diperoleh state atau keadaan yang optimal $x^*(t)$ selanjutnya dapat dinotasikan dengan $J^*(u^*(t))$ atau J^*. State yang optimal $x^*(t)$ dibatasi oleh kondisi batas, yaitu kondisi awal dan kondisi akhir.

Dalam fungsi tujuan $J(u(t))$ pada Persamaan (2.10) secara umum dapat dinyatakan sebagai bentuk Bolza. Pada saat Φ = 0 maka Persamaan (2.10) dapat disebut bentuk Lagrange sedangkan pada saat $V = 0$ Persamaan (2.10) disebut sebagai bentuk Meyer. Dengan waktu akhir tetap atau bebas dan keadaan (*state*) akhir seluruhnya atau sebagian bebas atau tetap (Naidu, 2002).

2.7 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin merupakan salah satu cara untuk menyelesaikan masalah kendali optimal dalam menentukan pengendali yang optimal dari sistem dinamik yang dibatasi oleh persamaan kendala, dalam hal ini untuk meminimumkan fungsi tujuan atau *Performance Index*. Penyelesain dalam masalah kendali optimal dengan menggunakan metode tidak langsung dilakukan dengan menyelesaikan kondisi perlu kendali optimal. Berdasarkan Prinsip Minimum Pontryagin, kondisi perlu dari masalah kendali optimal yang harus diselesaikan adalah persamaan *stasioner*, persamaan *state* dan kemudian diselesaikan persamaan *costate* serta kondisi *transversality*.

Berikut ini adalah langkah penyelesaian dari masalah kendali optimal yang telah diberikan oleh Persamaan (2.10). Langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut (Naidu, 2002):

1. Bentuk Hamilton

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)\, f(x(t), u(t), t)$$

2. Meminimumkan H terhadap $u(t)$ yaitu dengan cara:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

sehingga diperoleh kondisi *stasioner*

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. Menggunakan $u^*(t)$ yang telah dihasilkan pada langkah 2, untuk mendapatkan fungsi Hamilton baru yang optimal, selanjutnya dinyatakan dalam bentuk H^*, yaitu:

$$H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = H(x^*(t), \lambda^*, t)$$

4. Selesaikan 2n persamaan *state* dan *costate*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda}$$

dan

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}$$

Dengan kondisi batas yang telah diberikan oleh keadaan awal dan keadaan akhir yang disebut sebagai kondisi *transversality*. Adapun kondisi batas secara umum untuk sistem yaitu:

$$\left(H^* + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t)\right]'_{t_f} \delta x_f = 0$$

dengan Φ adalah bentuk Mayer dari fungsi objektif J, H adalah persamaan Hamiltonian, δ menunjukkan variasi dan tanda $*$ menunjukkan keadaan saat variabel pengendalinya *stasioner*.

5. Substitusi hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 kedalam persamaan $u^*(t)$ pada langkah 2 untuk mendapatkan kendali yang optimal.

Jika nilai $u(t)$ tak linier di H, maka pada variabel pengendali dapat ditentukan sebagai berikut (Subchan, 2009):

$$u(t) = u(x(t), \lambda(t), t) \tag{2.13}$$

Dalam menentukan kondisi *transversal* pada fungsi objektif yang sesuai, terdapat lima tipe kondisi batas, yaitu:

1. *Fix* Waktu Akhir dan *Fix State* Akhir
   Artinya sistem dengan waktu akhir ditentukan dan *state* saat waktu akhir telah

ditentukan, yaitu:

$$x(t_0) = x_0$$

dan

$$x(t_f) = x_f$$

2. *Free* Waktu Akhir dan *Fix State* Akhir
   Artinya sistem dengan waktu akhir belum ditentukan dan *state* saat waktu akhir telah ditentukan.

$$x(t_0) = x_0$$

dan

$$x(t_f) = x_f$$

atau

$$\left(H^* + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t_f} = 0$$

3. *Fix* Waktu Akhir dan *Free State* Akhir
   Artinya sistem dengan waktu akhir telah ditentukan dan *state* saat waktu akhir belum ditentukan.

$$x(t_0) = x_0$$

dan

$$\lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{*t_f}$$

4. *Free* Waktu Akhir dan *Dependent Free State* Akhir
   Artinya Sistem dengan waktu akhir dan *state* pada waktu akhir belum ditentukan keduanya, dengan *state* pada waktu akhir merupakan fungsi yang bergantung pada sesuatu.

$$x(t_0) = x_0$$

dan

$$x(t_f) = \theta(t_f), \delta x_f \approx \dot{\theta}(t_f)\delta t_f$$

atau dalam bentuk

$$\left[\left(H^* + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t)\right)' \dot{\theta}(t)\right]_{t_f} \delta x_f = 0$$

Oleh karena waktu akhir belum ditentukan maka δ_{t_f} bernilai sebarang, oleh sebab itu untuk sistem ini berlaku:

$$\left[\left(H^* + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t)\right)' \dot{\theta}(t)\right]_{t_f} = 0$$

5. *Free* Waktu Akhir dan *Independent Free State* Akhir

   Artinya sistem dengan waktu akhir dan *state* pada waktu akhir tidak ditentukan keduanya, dengan nilai yang tidak bergantung pada sesuatu.

$$\delta x(t_0) = x_0$$

   dan

$$(H^* + \frac{\partial \Phi}{\partial t})_{t_f} = 0$$

   atau

$$\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t)\right]_{t_f} = 0$$

Dalam penelitian ini yang akan digunakan adalah Tipe tiga yaitu *Fix* Waktu Akhir dan *Free State* Akhir atau dapat diartikan sebagai waktu akhir yang telah ditentukan dan keadaan akhir belum pasti sebab tingkat produksi dan tingkat konsumsi beras dan non-beras bersifat *fluktuatif* atau sifatnya berubah-ubah sesuai dengan kondisi lingkungan seperti halnya bencana alam, musim, budaya daerah dan kebijakan pemerintah pada setiap wilayah.

BAB 3
METODA PENELITIAN

Pada bagian ini, dibahas metodologi penelitian yang akan digunakan dalam menyelesaikan atau mencapai tujuan penelitian ini, yaitu studi literatur, kemudian dari masalah yang ada peneliti mengkonstruksi model matematika dari masalah diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras, melakukan analisa kestabilan dari setiap titik kesetimbangan, penyelesaian masalah kendali optimal, simulasi, dan penarikan kesimpulan.

3.1 Studi Literatur

Tahap ini peneliti melakukan identifikasi permasalahan dengan menggunakan referensi dari beberapa buku, jurnal, penelitian, paper maupun artikel dari internet yang berkaitan dengan masalah diversifikasi pangan khususnya mengenai diversifikasi konsumsi beras dan non-beras, subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah untuk pangan, sistem *autonomous*, kestabilan lokal, penyelesaian masalah kendali optimal. Adapun model matematika yang digunakan dalam penelitian ini yaitu bentuk persamaan Lotka-Volterra dengan teori kendali optimal yang digunakan adalah Prinsip Minimum Pontryagin.

3.2 Mengkonstruksi Model

Pada tahap ini, peneliti akan mengkonstruksi model matematika tentang diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras. Model matematika yang digunakan untuk model diversifikasi beras dan non-beras adalah berdasarkan model Lotka-Volterra yang mendefinisikan dinamika interaksi kompetisi. Kompetisi yang dimaksud melibatkan dua sumber pangan yaitu konsumsi beras dan konsumsi non-beras.

Agar kebutuhan konsumsi pangan masyarakat dapat terpenuhi setiap saat maka pemerintah mengeluarkan kebijakan diversifikasi atau penganekaragaman pangan yang bertujuan untuk memanfaatkan pangan lokal yang berupa non-beras. Tujuan diversifikasi pangan cepat tercapai apabila pemerintah memberikan subsidi pada non-beras dan memberikan pemahaman pada generasi muda bahwa Indonesia ini kaya dengan bahan baku pangan lokal sehingga masyarakat tidak terfokus hanya pada satu jenis tanaman pangan saja.

Berikut ini akan diberikan penjelasan mengenai pembentukan model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras dengan menggunakan prinsip-prinsip pada model Lotka-Volterra. Misalkan $x_1(t)$ menyatakan banyaknya beras yang dikonsumsi pada saat waktu t dan $x_2(t)$ menyatakan banyaknya non-beras yang dikonsumsi pada waktu t, sehingga dalam membentuk model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras diperoleh dengan cara sebagai berikut:

1 . Menentukan laju perubahan dalam mengkonsumsi beras

Untuk menentukan laju perubahan dalam mengkonsumsi beras, diberikan banyaknya beras yang dikonsumsi x_1 pada waktu t. Jika diasumsikan bahwa laju perubahan dalam mengkonsumsi beras sebanding dengan konsumsi beras pada saat waktu t, maka hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial berikut.

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 \tag{3.1}$$

dengan x_1 menyatakan konsumsi beras yang diasumsikan tumbuh secara eksponensial sedangkan α_1 konstanta proporsi yang menyatakan persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras persatuan waktu. Konsumsi beras (x_1) dikatakan positif atau mengalami kenaikan jika $\frac{dx_1}{dt} > 0$. Dengan demikian Persamaan (3.1) nilai $\alpha_1 > 0$.

Adanya kebijakan berupa kompensasi dari pemerintah dalam bentuk upaya diversifikasi beras dan non-beras maka akan terjadi pengaruh antara beras dan non-beras, yaitu terjadi pengurangan terhadap konsumsi beras karena masyarakat yang awalnya hanya mengkonsumsi beras dapat pula mengkonsumsi non-beras. Dengan demikian banyaknya beras yang dikonsumsi akan berkurang. Dalam hal ini, laju pengurangan konsumsi beras sebanding dengan upaya diversifikasi beras dan non-beras.

Secara matematis, hal tersebut di atas dapat dibentuk dalam persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\frac{dx_1}{dt} = -\beta_1 x_1 x_2 \tag{3.2}$$

dengan β_1 menyatakan konstanta positif yang mempersentasikan dampak yang berpengaruh pada konsumsi beras akibat adanya upaya diversifikasi pangan yang secara tidak langsung dapat menyebabkan terjadinya pengurangan terhadap konsumsi beras, sehingga dari Persamaan (3.1) dan Persamaan (3.2) diperoleh laju perubahan dalam mengkonsumsi beras yang dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 \tag{3.3}$$

Persamaan (3.3) x_1 menyatakan konsumsi beras pada waktu t, sedangkan untuk x_2 menyatakan konsumsi non-beras pada waktu t. Selanjutnya α_1 menyatakan persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras sedangkan β_1 menyatakan konstanta positif yang mempersentasikan dampak yang berpengaruh pada konsumsi beras akibat dari adanya upaya diversifikasi beras dan non-beras.

2 . Menentukan laju perubahan dalam mengkonsumsi non-beras
Untuk menentukan laju perubahan dalam mengkonsumsi non-beras, diberikan banyaknya non-beras yang dikonsumsi x_2 pada waktu t. Jika diasumsikan bahwa laju perubahan konsumsi non-beras sebanding dengan konsumsi non-beras pada saat waktu t, maka hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial berikut.

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 \tag{3.4}$$

dengan x_2 menyatakan konsumsi non-beras yang diasumsikan tumbuh secara eksponensial sedangkan α_2 konstanta proporsi yang menyatakan persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi non-beras persatuan waktu. Banyaknya non-beras yang dikonsumsi (x_2) dikatakan positif atau mengalami kenaikan jika $\frac{dx_2}{dt} > 0$. Dengan demikian Persamaan (3.4) nilai $\alpha_2 > 0$.

Adanya kebijakan berupa kompensasi dari pemerintah dalam bentuk upaya diversifikasi beras dan non-beras maka akan terjadi pengaruh terhadap konsumsi non-beras dan konsumsi beras. Terjadinya pengurangan pada konsusmi non-beras disebabkan karena adanya masyarakat yang tetap mengkonsumsi beras walaupun berada dalam lingkungan masyarakat yang mengkonsumsi non-beras. Dengan demikian banyaknya non-beras yang dikonsumsi akan berkurang. Dalam hal ini, laju pengurangan konsumsi non-beras sebanding dengan upaya diversifikasi beras dan non-beras.
Secara matematis, hal tersebut di atas dapat dibentuk dalam persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\frac{dx_2}{dt} = -\beta_2 x_1 x_2 \tag{3.5}$$

dengan β_2 menyatakan konstanta positif yang mempersentasikan dampak yang berpengaruh pada konsumsi non-beras akibat adanya upaya diversifikasi beras dan non-beras.

Untuk mempercepat tercapainya tujuan diversifikasi pangan, maka pemerintah memberikan subsidi pada non-beras sehingga banyaknya non-beras yang dikonsumsi dapat bertambah. Dalam hal ini, laju penambahan dalam mengkonsumsi non-beras sebanding dengan subsidi yang diberikan oleh pemerintah pada non-beras. Secara matematis hal ini dapat dibentuk persamaan diferensial berikut.

$$\frac{dx_2}{dt} = px_2 \tag{3.6}$$

dengan p menyatakan subsidi yang diberikan oleh pemerintah pada non-beras, sehingga dari Persamaan (3.4), Persamaan (3.5) dan Persamaan (3.6) diperoleh laju perubahan dalam mengkonsumsi non-beras yang dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 + px_2 - \beta_2 x_1 x_2 \tag{3.7}$$

Pada Persamaan (3.7) x_1 menyatakan konsumsi beras pada waktu t, sedangkan x_2 menyatakan konsumsi non-beras pada waktu t, α_2 menyatakan persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi non-beras, p menyatakan subsidi yang diberikan oleh pemerintah pada non-beras dan β_2 menyatakan konstanta positif yang mempersentasikan dampak yang berpengaruh pada konsumsi non-beras akibat adanya upaya diversifikasi beras dan non-beras.

Berdasarkan pada Persamaan (3.3) dan Persamaan (3.7) dapat dibentuk sistem dinamik dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2 x_2 + px_2 - \beta_2 x_1 x_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

dengan:

x_1	:	konsumsi beras pada waktu t
x_2	:	konsumsi non-beras pada waktu t
α_1	:	persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi

beras

α_2 : persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi non-beras

β_1 : konstanta positif yang merepresentasikan dampak yang berpengaruh pada konsumsi beras akibat adanya upaya diversifikasi pangan

β_2 : konstanta positif yang merepresentasikan dampak yang berpengaruh pada konsumsi non-beras akibat adanya upaya diversifikasi pangan

p : subsidi yang diberikan pada non-beras

Parameter α_1 dan α_2 berada dalam interval $[-1, 1]$. Pada interval tersebut, batas atas $(+1)$ menunjukkan bahwa terjadi peningkatan pada konsumsi beras dan konsumsi non-beras yang tidak melebihi 100%, sedangkan batas bawa (-1) menyatakan bahwa terjadi penurunan pada konsumsi beras dan konsumsi non-beras yang juga tidak akan melebihi 100%.

Dari Persamaan (3.8), terlihat jelas bahwa laju perubahan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras sangat dipengaruhi oleh besar kecilnya nilai dari parameter α_1 dan α_2 yang menyatakan persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras. Dari hal tersebut dapat diasumsikan bahwa peningkatan maupun penurunan konsumsi beras dan non-beras dipengaruhi oleh persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras sepanjang waktu t, sebab persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras selalu ada meskipun upanya diversifikasi pangan tidak dilaksanakan.

3.3 Analisis Kestabilan Lokal

Dalam menentukan analisis kestabilan pada suatu sistem diawali dengan menentukan titik kesetimbangan dan diakhiri dengan mencari kestabilan lokal dari setiap titk kesetimbangan tersebut. Untuk lebih jelasnya, berikut langkah-langkah analisis kestabilan lokal model:

1. Menentukan titik kesetimbangan dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras yang telah direduksi.

2. Menentukan kestabilan lokal setiap titik setimbang yang telah didapat dengan mula-mula mencari nilai eigen pada matriks Jacobian dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subidi oleh pemerintah pada non-beras yang telah direduksi.

3.4 Penyelesaian Kendali Optimal

Tahap ini peneliti mengkaji masalah kendali optimal yang meliputi sistem dinamik pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras dan fungsi objektif, kondisi syarat batas yang harus dipenuhi serta menyelesaikan kendali optimal dengan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan masalah kendali optimal pada tahap ini adalah sebagai berikut:

1. Membentuk fungsi Hamiltonian,
2. Menentukan persamaan *state* dan *costate*,
3. Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi,
4. Menentukan pengendali optimal.

3.5 Simulasi Permasalahan

Pada tahap ini dicari solusi numerik dari permasalahan kendali optimal tersebut dengan memanfaatkan persamaan *state*, persamaan *costate*, persamaan pengendali optimal, dan kondisi-kondisi yang harus terpenuhi dengan menggunakan *software MATLAB 2013a*. Selanjutnya dilakukan analisis terhadap hasil simulasi yang diperoleh untuk mengetahui prilaku dari sistem diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras.

3.6 Penarikan Kesimpulan dari Penelitian

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penulisan laporan dan penarikan kesimpulan terhadap pembahasan yang telah dilalukan pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras serta memberikan saran untuk perbaikan dan pengembangan pada penelitian selanjutnya.

BAB 4
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas analisis kestabilan dan kendali optimal pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras. Pembahasan model tersebut dimulai dengan mencari penyelesaian positif dan menentukan eksistensi ketunggalan penyelesaian dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras, kemudian menentukan titik kesetimbangan dari model tersebut dan menganalisa kestabilan dari tiap titik kesetimbangan yang diperoleh serta menyelesaikan masalah kendali optimal dari sistem dinamik dengan fungsi objektif yang diselesaikan menggunakan metode Prinsip Minimum Potryagin.

4.1 Model Matematika Sistem Diversifikasi Beras dan Non-Beras dengan Pemberian Subsidi Pemerintah pada Non-Beras

Pada bagian ini dilakukan pembahasan mengenai model matematika dari upaya diversifikasi pangan yang berkaitan dengan konsumsi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras. Dalam hal ini, beras sebagai bahan konsumsi utama masyarakat dapat menyebabkan terjadinya pengurangan terhadap persediaan beras yang ada. Faktor lain yang menyebabkan berkurangnya persediaan beras di Indonesia adalah jumlah penduduk yang terus meningkat setiap tahun serta berkurangnya lahan pertanian yang dapat menyebabkan terbatasnya hasil produksi beras di Indonesia sehingga kebutuhan konsumsi pangan masyarakat terhadap beras juga terbatas.

Agar kebutuhan konsumsi pangan masyarakat dapat selalu terpenuhi setiap saat, maka pemerintah mengeluarkan berbagai kebijakan yakni salah satunya adalah program diversifikasi pangan. Program diversifikasi pangan bertujuan untuk tidak memfokuskan konsumsi pangan masyarakat hanya pada satu jenis tanaman pangan saja. Pelaksanaan upaya diversifikasi pangan dapat menyebabkan terjadinya dinamika interaksi kompetisi. Kompetisi yang terjadi melibatkan dua sumber pangan yaitu beras dan non-beras.

Oleh karena itu, upaya diversifikasi pangan dapat menyebabkan terjadinya pengurangan terhadap pertumbuhan konsumsi beras dan konsumsi non-beras. Agar mempercepat tercapainya tujuan upaya diversifikasi pangan maka pemerintah perlu melakukan kebijakan yang dikhususkan pada non-beras yakni berupa pemberian subsidi pada non-beras.

Model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras telah diberikan pada Persamaan (3.8). Persamaan tersebut terdiri dari konsumsi beras (x_1) dan konsumsi non-beras (x_2) yang dapat ditulis sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2 x_2 + p x_2 - \beta_2 x_1 x_2
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Laju perubahan dalam mengkonsumsi beras mengalami peningkatan karena dipengaruhi oleh persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras. Kemudian mengalami pengurangan karena adanya upaya diversifikasi beras dan non-beras. Laju perubahan dalam mengkonsumsi non-beras mengalami peningkatan karena dipengaruhi oleh persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi non-beras dan adanya pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras. Kemudian mengalami pengurangan karena adanya upaya diversifikasi beras dan non-beras.

Persamaan (4.1) dapat dibentuk dalam dua kelompok konsumsi pangan yaitu kelompok konsumsi beras dan kelompok konsumsi non-beras. Kedua kelompok konsumsi pangan tersebut terdapat dua bentuk persamaan diferensial biasa yaitu $\frac{dx_1}{dt}$ dan $\frac{dx_2}{dt}$ yang masing-masing menyatakan perubahan terhadap konsumsi beras dan non-beras setiap waktu.

Berikut ini dijelaskan lebih rinci dari setiap persamaan diferensial pada Persamaan (4.1) untuk mencari penyelesaian positif dari model, melakukan analisa tentang eksistensi dan ketunggalan penyelesaian dari model, menentukan titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangan yang terdapat pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemeberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras.

4.1.1 Penyelesaian Positif pada Model

Berdasarkan model matematika pada Persamaan (4.1) dianalisa agar diketahui bahwa sistem tersebut mempunyai penyelesaian positif, yang berarti akan ditunjukkan bahwa nilai dari $x_1 > 0$ dan $x_2 > 0$. Berikut ini diberikan analisa dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras.

1. Konsumsi Beras
   Laju perubahan dalam mengkonsumsi beras dapat diperoleh dari Persamaan (4.1), yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 \tag{4.2}$$

   a) Suku $\alpha_1 x_1$ didefinisikan sebagai pertambahan jumlah konsumsi beras dengan penambahan sebesar α_1 yang disebabkan oleh adanya masyarakat yang tetap mengkonsumsi beras setiap waktu, sehingga menyebabkan$\alpha_1 > 0$.

   b) Suku $\beta_1 x_1 x_2$ menyatakan bahwa pada saat tersebut pemerintah telah mengeluarkan kebijakan diversifikasi pangan sehingga terjadi pengaruh antara konsumsi beras x_1 dengan konsumsi non-beras x_2. Adanya upaya diversifikasi pangan tersebut dapat menyebabkan terjadinya dampak pengurangan terhadap konsumsi beras dengan pengurangan sebesar β_1. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa masyarakat yang awalnya hanya mengkonsumsi beras x_1 pada akhirnya ada juga yang mengkonsumsi non-beras x_2 sehingga mengurangi jumlah konsumsi beras x_1. Misalkan parameter berkurangnya konsumsi beras yang disebabkan oleh adanya diversifikasi pangan adalah k_1, maka berlaku:

$$\beta_1 x_1 x_2 = k_1 x_1, \quad k_1 > 0$$

   Sehingga dengan demikian Persamaan (4.2) dapat pula dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - k_1 x_1 \tag{4.3}$$

2. Konsumsi Non-Beras
   Laju perubahan dalam mengkonsumsi non-beras dapat pula diperoleh dari Persamaan (4.1) yaitu:

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 + p x_2 - \beta_2 x_1 x_2 \tag{4.4}$$

   a) Suku $\alpha_2 x_2$ didefinisikan sebagai pertambahan jumlah konsumsi non-beras dengan penambahan sebesar α_2 yang disebabkan oleh adanya masyarakat yang tetap mengkonsumsi non-beras sehingga $\alpha_2 > 0$.

b) Suku px_2 didefinisikan sebagai pertambahan jumlah konsumsi non-beras yang disebabkan adanya pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras sebesar p sehingga $p > 0$.

c) Suku $\beta_2 x_1 x_2$ menyatakan bahwa pada saat tersebut pemerintah telah mengeluarkan kebijakan diversifikasi pangan sehingga terjadi pengaruh antara konsumsi beras x_1 dan konsumsi non-beras x_2. Adanya upaya diversifikasi pangan tersebut dapat menyebabkan terjadinya dampak pengurangan terhadap konsumsi non-beras, dengan pengurangan pada konsumsi non-beras sebesar β_2. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa masyarakat yang awalnya hanya mengkonsumsi non-beras x_2 pada akhirnya ada juga yang mengkonsumsi beras x_1 sehingga dapat mengurangi konsumsi non-beras x_2. Misalkan berkurangnya konsumsi non-beras yang disebabkan oleh adanya upaya diversifikasi pangan adalah k_2, maka berlaku:

$$\beta_2 x_1 x_2 = k_2 x_2, \;\; k_2 > 0$$

Sehingga Persamaan (4.4) menjadi:

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 + px_2 - k_2 x_2 \tag{4.5}$$

Berdasarkan pada Persamaan (4.3) dan Persamaan (4.5) diperoleh model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 x_1 - k_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2 x_2 + px_2 - k_2 x_2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

dengan keadaan awal,

$$x_1(t_0) = x_1(0)$$

$$x_2(t_0) = x_2(0)$$

dan keadaan akhir,

$$x_1(t_f) = x_{f_1}$$

$$x_2(t_f) = x_{f_2}$$

dengan t_f adalah waktu akhir yang telah ditentukan.

Misalkan total konsumsi pangan di Indonesia adalah $N(t)$ dengan $N(t) > 0$, maka:

$$\dot{N}(t) = \dot{x}_1(t) \; + \; \dot{x}_2(t)$$

atau dapat pula dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \; + \; \frac{dx_2}{dt} \tag{4.7}$$

Oleh karena $\dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - k_1 x_1$ dan $\dfrac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 + p x_2 - k_2 x_2$, maka dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} \\ &= \alpha_1 x_1 - k_1 x_1 \; + \; \alpha_2 x_2 + p x_2 - k_2 x_2 \\ &= (\alpha_1 - k_1)x_1 + (\alpha_2 + p - k_2)x_2 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Kemudian parameter-parameter yang terdapat pada Persamaan (4.8), selanjutanya dianalisis dan menafsirkan hasilnya sehingga diperoleh penyelesaian positif dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras. Dengan demikian diperoleh sebagai berikut.

1. Untuk Konsumsi Beras

   a) Parameter α_1 merupakan parameter yang menunjukkan bertambahnya konsumsi beras x_1 yang disebabkan oleh persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras atau dapat dikatakan bahwa ada masyarakat yang tetap mengkonsumsi beras. Oleh karena masyarakat Indonesia pada umumnya mengkonsumsi beras sebagai makanan pokok, maka wajar jika pada saat keadaan akhir tetap ada masyarakat yang mengkonsumsi beras yaitu pada $t = [0, \infty)$.
   Dengan demikian, diasumsikan $\lim\limits_{t \to \infty} \alpha_1 x_1 > 0$.

   b) Suku $k_1 x_1$ mendeskripsikan bahwa berkurangnya konsumsi beras x_1 disebabkan karena telah terlaksananya upanya diversifikasi pangan atau masyarakat yang tadinya hanya mengkonsumsi beras akhirnya ada juga yang mengkonsumsi non-beras. Diasumsikan bahwa semakin bertambahnya waktu seiring terlaksananya upaya diversifikasi konsumsi beras dan non-beras yang akan memberikan pandangan pada generasi muda bahwa Indonesia kaya dengan pangan lokal yang berupa non-beras

sehingga saat keadaan akhir konsumsi pangan masyarakat akan normal, sehingga menyebabkan upaya diversifikasi pangan akan ditiadakan seiring dengan berjalannya waktu.
Dengan demikian $\lim_{t \to \infty} k_1 x_1 \approx 0$.

2. Untuk Konsumsi Non-Beras

a) Parameter α_2 merupakan parameter yang menunjukkan bertambahnya konsumsi non-beras x_2 yang disebabkan oleh persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi non-beras atau dapat dikatakan bahwa ada masyarakat yang tetap mengkonsumsi non-beras setiap waktu. Oleh karena adanya masyarakat Indonesia yang tetap mengkonsumsi non-beras sesuai dengan kebiasaan sehari-hari, maka diasumsikan pada keadaan akhir konsumsi non-beras akan tetap ada. Dalam hal ini, dapat dikatakan bahwa selalu ada masyarakat yang mengkonsumsi non-beras.
Dengan demikian $\lim_{t \to \infty} \alpha_2 x_2 > 0$.

b) Parameter p merupakan parameter yang menyatakan bertambahnya jumlah konsumsi non-beras x_2 yang disebabkan adanya pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras. Karena diketahui bahwa masyarakat Indonesia sebagian kecil masih mengkonsumsi non-beras sementara persediaan non-beras terus bertambah, maka diasumsikan pada keadaan akhir subsidi yang diberikan pada non-beras selalu ada setiap waktu.
Dengan demikian $\lim_{t \to \infty} p x_2 > 0$.

c) Suku $k_2 x_2$ mendeskripsikan berkurangnya jumlah konsumsi non-beras x_2 yang disebabkan oleh masyarakat yang tadinya hanya mengkonsumsi non-beras pada akhirnya ada juga yang mengkonsumsi beras. Diasumsikan bahwa semakin bertambahnya waktu seiring terlaksananya upaya diversifikasi konsumsi beras dan non-beras yang akan menciptakan pola konsumsi pangan masyarakat akan normal, sehingga upaya diversifikasi pangan tersebut akan ditiadakan dengan sendirinya seiring berjalannya waktu.
Dengan demikian $\lim_{t \to \infty} k_2 x_2 \approx 0$.

Selanjutnya dengan mengambil nilai-nilai limit ($t \to \infty$) pada Persamaan (4.8) dari parameter-parameter yang berpengaruh sesuai dengan hasil analisa yang telah dilakukan, maka dapat diperoleh:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{dN}{dt} &= \lim_{t\to\infty}(\alpha_1 - k_1)x_1 + \lim_{t\to\infty}(\alpha_2 + p - k_2)x_2 \\
&= (\alpha_1 - 0)x_1 + (\alpha_2 + p - 0)x_2 \\
&= \alpha_1 x_1 + (\alpha_2 + p)x_2
\end{aligned}$$

Oleh karena nilai dari $\alpha_1 x_1 > 0$ dan $(\alpha_2 + p)x_2 > 0$, maka dengan demikian dapat diperoleh persamaan total perubahan konsumsi pangan di Indonesia, yakni sebagai berikut:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dN}{dt} = \alpha_1 x_1 + (\alpha_2 + p)x_2 > 0 \tag{4.9}$$

Persamaan (4.9) menunjukkan bahwa model pada Persamaan (4.6) mempunyai penyelesaian yang positif.

Dengan demikian, total perubahan konsumsi pangan di Indonesia dipengaruhi oleh banyaknya masyarakat yang mengkonsumsi beras dan non-beras atau dengan kata lain sangat dipengaruhi oleh besar kecilnya persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras serta besarnya subsidi yang diberikan oleh pemerintah pada non-beras. Berdasarkan hasil analisa dari model di atas, maka dapat disusun Theorema 4.1 berikut.

Theorema 4.1.
Jika x_1 dan x_2 merupakan penyelesaian dari sistem Persamaan (4.6), maka terdapat parameter $\alpha_1 > 0$ yang berasosiasi dengan x_1 dan parameter $\alpha_2, p > 0$ yang berasosiasi dengan x_2 sedemikian hingga Persamaan (4.6) mempunyai penyelesaian positif.

Bukti.
Untuk menunjukkan bahwa Persamaan (4.6) mempunyai penyelesaian positif maka haruslah persamaan perubahan total konsumsi pangan bernilai positif atau $\frac{dN}{dt} > 0$ dengan $\frac{dN}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}$. Selanjutnya dengan mensubstitusikan nilai dari persamaan $\frac{dx_1}{dt}$ dan $\frac{dx_2}{dt}$ pada Persamaan (4.7), maka $(\alpha_1 - k_1)x_1 + (\alpha_2 + p - k_2)x_2 > 0$.

Untuk menunjukkan bahwa $(\alpha_1 - k_1)x_1 + (\alpha_2 + p - k_2)x_2 > 0$ maka perlu dibuktikan bahwa $(\alpha_1 - k_1)x_1 > 0$, karena x_1 menyatakan konsumsi beras setiap waktu maka diasumsikan $x_1 > 0$ yang berarti bahwa selalu ada masyarakat yang mengkonsumsi beras sedemikian hingga $(\alpha_1 - k_1) > 0$, dengan bentuk lain $\alpha_1 > k_1$. Hal ini menunjukkan bahwa persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras selalu lebih besar daripada dampak yang berpengaruh pada konsumsi beras akibat dari upaya diversifikasi pangan. Selain itu juga perlu ditunjukkan bahwa $(\alpha_2 + p - k_2)x_2 > 0$, karena x_2 menyatakan konsumsi non-beras setiap waktu maka diasumsikan $x_2 > 0$ yang berarti bahwa selalu ada masyarakat yang mengkonsumsi non-beras sedemikian hingga $(\alpha_2 + p - k_1) > 0$, dengan bentuk lain $\alpha_1 + p > k_1$. Hal ini menunjukkan bahwa persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi non-beras dengan subsidi yang diberikan pada non-beras lebih besar daripada dampak yang berpengaruh pada konsumsi non-beras akibat dari upaya diversifikasi pangan.

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa nilai dari $(\alpha_1 - k_1)x_1 > 0$ dan $(\alpha_2 + p - k_2)x_2 > 0$ maka diperoleh $\frac{dx_1}{dt} > 0$ dan $\frac{dx_2}{dt} > 0$, sehingga dengan demikian $\frac{dN}{dt} > 0$. Q.E.D ■

Dari uraian di atas, dapat dibuktikan bahwa model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras yang ditunjukkan pada Persamaan (4.6) mempunyai penyelesaian positif. Oleh karena Persamaan (4.6) mempunyai penyelesaian positif dan merupakan representasi dari Persamaan (4.1) sehingga dengan demikian dapat dibuktikan bahwa Persamaan (4.1) mempunyai penyelesaian positif.

4.1.2 Eksistensi dan Ketunggalan Penyelesaian Model

Selanjutnya dianalisis eksistensi dan ketunggalan penyelesaian dari Persamaan (4.6) sehingga perlu ditunjukkan bahwa model pada Persamaan (4.6) memenuhi asumsi Desoer. Telah diperoleh model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras yang tereduksi seperti yang ditunjukkan pada Persamaan (4.6), yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 x_1 - k_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2 x_2 + p x_2 - k_2 x_2 \end{aligned}$$

Misalkan, $X = \{x_1, x_2\}$ dan $\dfrac{dX}{dt} = f(X(t), t)$, maka persamaan di atas dapat menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (\alpha_1 - k_1)x_1 = f_{x_1}(x_1, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= (\alpha_2 + p - k_2)x_2 = f_{x_2}(x_2, t) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Selanjutnya Persamaan (4.10) dapat ditulis:

$$f(X_1) = \frac{dX_1}{dt} \tag{4.11}$$

dengan,

$$f(X_1) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Pada kasus ini terdapat parameter-parameter tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras, subsidi yang diberikan oleh pemerintah pada non-beras dan dampak yang terjadi pada beras dan non-beras akibat diversifikasi pangan yaitu $\alpha_1, \alpha_2, p, \beta_1$ dan β_2 diasumsikan sebagai fungsi kuadrat dengan variabel waktu t.
Dengan demikian, jika dimisalkan:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - k_1) &= Q_{x_1}(t) \\ (\alpha_2 + p - k_2) &= Q_{x_2}(t) \end{aligned} \tag{4.13}$$

Maka Persamaan (4.13) adalah fungsi kuadrat. Disisi lain, berdasarkan pada Persamaan (4.13) di atas, maka dapat dibentuk Persamaan (4.12) yang baru, sehingga Persamaan (4.12) menjadi:

$$f(X_1, t) = \begin{pmatrix} Q_{x_1}(t)x_{11}(t) \\ Q_{x_2}(t)x_{21}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_{11}, t) \\ f_{x_2}(x_{21}, t) \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Sebelum ditunjukkan bahwa Persamaan (4.14) di atas mempunyai penyelesaian tunggal, maka terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $Q_{x_1}(t)$ dan $Q_{x_2}(t)$ merupakan fungsi kuadrat, dimana sebelumnya telah dibuktikan bahwa $Q_{x_1}(t)$ dan $Q_{x_2}(t)$ masing-masing adalah jenis fungsi kuadrat. Dengan menggunakan konsep pada Analisis Real, maka akan dibuktikan bahwa sebarang fungsi kuadrat

$Q(t) = pt^2 + qt + r$, dengan p, q dan r adalah suatu konstanta, yang merupakan fungsi kontinu pada R.

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, lalu untuk setiap $u \in R$ ambil suatu $\sigma' > 0$ sedemikian hingga $|t-u| < \sigma'$, maka jika diberikan $\sigma > 0$ dengan $\sigma = \inf\left\{\sigma', \dfrac{\epsilon}{|p(t+u)+q|}\right\}$, maka untuk setiap u yang memenuhi $|t-u| < \sigma$ diperoleh:

$|t-u| < \inf\left\{\sigma', \dfrac{\epsilon}{|p(t+u)+q|}\right\}$, maka

$|t-u| < \dfrac{\epsilon}{|p(t+u)+q|}$, sehingga

$|t-u||p(t+u)+q| < \varepsilon$, dengan demikian didapat

$|p(t-u)(t+u) + q(t-u)| < \epsilon$, berakibat

$|p(t-u)(t+u) + q(t-u)| < \epsilon$, sehingga diperoleh

$|p(t^2-u^2) + q(t-u) - r + r| < \epsilon$

Hal ini berarti

$|(pt^2 + qt + r) - (pu^2 + qu + r)| < \epsilon.$

Jadi $|Q(t) - Q(u)| < \epsilon$ untuk $|t-u|$, yang berarti sebarang fungsi kuadrat $Q(t)$ kontinu pada R. Dengan demikian Q_{x_1} dan Q_{x_2} kontinu pada R. Berdasarkan uraian di atas, maka dapat dibentuk Theorema 4.2 berikut.

Theorema 4.2.

Jika parameter-parameter persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan konsumsi beras dan non-beras, dampak diversifikasi pada beras dan non-beras, dan subsidi pada non-beras berupa fungsi kuadrat dan $x_1(t), x_2(t)$ masing-masing adalah fungsi kontinu pada R^+, maka model Persamaan (4.14) mempunyai penyelesaian tunggal.

Bukti.

Theorema 4.2 akan dibuktikan dengan mencari eksistensi ketunggalan penyelesaian pada Persamaan (4.14), sehingga dengan demikian Persamaan (4.14) harus memenuhi asumsi Desoer, yaitu:

1. Ambil $T \subseteq R^+$ yang memuat titik-titik berhingga persatuan interval sedemikian hingga:
   $T = [0, l_1] \cup [0, l_2]$,
   dengan:

$$l_1, l_2 \in R^+$$

dan memenuhi

$$
\begin{aligned}
&x_{11}(t), t \in l_1 \\
&x_{21}(t), t \in l_2
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

2. Akan ditunjukkan f_{x_1} dan f_{x_2} adalah fungsi kontinu pada $t \notin T$. Dalam hal ini dianggap $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ fungsi kontinu padaR^+, maka:

$$
\begin{aligned}
f_{x_{11}}(x_1, t) &= Q_{x_1}(t) x_{11}(t) \\
f_{x_{21}}(x_2, t) &= Q_{x_2}(t) x_{21}(t)
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

   Masing-masing adalah fungsi kontinu pada R^+, sebab telah diketahui $Q_{x_1}(t)$ dan $Q_{x_2}(t)$ adalah fungsi kuadrat, akibatnya kontinu pada R. Sedangkan perkalian antara fungsi kontinu dengan fungsi kontinu menghasilkan fungsi kontinu, sehingga dengan demikian f_{x_1} dan f_{x_2} juga fungsi kontinu pada $R^+ \backslash T \subseteq R^+$ yang berarti kontinu pada $t \notin T$.

3. Ditunjukkan bahwa $f(X_1, t)$ dan $f(X_2, t)$ merupakan fungsi kontinu dari $f : R^2 \times R^+ \to R^2$. Diberikan $\|.\|$ adalah norma baku Euclid di R^n, yaitu $\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$, dengan $y = (y_i)_{i=1}^{n} \in R^n$, maka dalam hal ini untuk model di atas berada dalam R^2 sehingga didapat:

$$
\| f(X_1) - f(X_2) \| = \left\| \begin{array}{c} Q_{x_1}(t)[x_{11} - x_{12}(t)] \\ Q_{x_2}(t)[x_{21} - x_{22}(t)] \end{array} \right\|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\{Q_{x_1}(t)[x_{11} - x_{12}(t)]\}^2 + \{Q_{x_2}(t)[x_{21} - x_{22}(t)]\}^2} \\
&\leq maks \sqrt{\{|Q_{x_1}(t)|, |Q_{x_2}(t)|\}^2} \sqrt{\{[x_{11}(t) - x_{12}(t)]\}^2 + \{[x_{21}(t) - x_{22}(t)]\}^2} \\
&= maks\{|Q_{x_1}|, |Q_{x_2}|\} \sqrt{\{[x_{11}(t) - x_{12}(t)]\}^2 + \{[x_{21}(t) - x_{22}(t)]\}^2} \\
&= K(t) \|X_1 - X_2\|
\end{aligned}
$$

   dengan $K(t) = maks\{|Q_{x_1}|, |Q_{x_2}|\}$
   jadi,

$$
\|f(X_1, t) - f(X_2, t)\| \leq K(t) \|X_1 - X_2\| \tag{4.17}
$$

   dengan $K(t) = maks\{|Q_{x_1}|, |Q_{x_2}|\}$

Terlihat jelas bahwa $K(t)$ adalah fungsi kuadrat pada R dan telah diketahui sebarang fungsi kuadrat adalah kontinu pada R, demikian sehingga dapat disimpulkan bahwa $K(t)$ adalah fungsi kontinu pada R. Q.E.D ■

Dari uraian di atas, dapat ditunjukkan bahwa Persamaan (4.14) memenuhi asumsi Desoer sehingga model tersebut terbukti mempunyai penyelesaian yang tunggal. Oleh karena model pada Persamaan (4.14) merupakan representasi dari model Persamaan (4.1), sehingga dengan demikian Persamaan (4.1) mempunyai penyelesaian tunggal.

4.2 Analisis Kestabilan Sistem

Tahap ini peneliti melakukan analisa kestabilan pada titik kesetimbangan yang terdapat pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras. Hal tersebut diawali dengan menetukan titik kesetimbangan dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi pada non-beras kemudian menentukan matriks Jacobian dan diakhiri dengan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian tersebut.

4.2.1 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan adalah titik yang *invariant* atau yang tidak bergantung terhadap waktu. Syarat nilai suatu fungsi $f(t)$ berada di titik kesetimbangan adalah $\frac{df(t)}{dt} = 0$ atau derivatif terhadap waktu sama dengan nol. Demikian sehingga titik-titik setimbang dalam sistem dinamik model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras dapat diperoleh dari $\frac{dx_1}{dt} = 0$ dan $\frac{dx_2}{dt} = 0$.

Untuk menentukan titik kesetimbangan dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras, substitusi nilai dari $\frac{dx_1}{dt} = 0$ dan $\frac{dx_2}{dt} = 0$ pada Persamaan (4.6), diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 x_1 - k_1 x_1 = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2 x_2 + p x_2 - k_2 x_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Sebelum menentukan titik kesetimbangan pada Persamaan (4.18) terlebih dahulu akan direduksi suku yang menyatakan diversifikasi pangan. Berdasarkan pada proses menentukan penyelesaian positif yang terdapat pada Persamaan (4.6) telah ditunjukkan bahwa suku yang menyatakan terjadinya upaya diversifikasi pangan pada konsumsi beras x_1 dan konsumsi non-beras x_2 adalah $\beta_1 x_1 x_2 = k_1 x_1$, dengan $k_1 > 0$ dan $\beta_2 x_1 x_2 = k_2 x_2$, dengan $k_2 > 0$.

Oleh karena suku yang menyatakan terjadinya diversifikasi pangan lebih dari nol, hal ini menunjukkan bahwa masyarakat Indonesia telah melaksanakan upaya diversifikasi pangan. Misalkan S menyatakan pengurangan yang terjadi pada konsumsi beras akibat adanya upaya diversifikasi konsumsi pangan dan T menyatakan pengurangan yang terjadi pada konsumsi non-beras akibat adanya upaya diversifikasi konsumsi pangan sehingga suku yang menyatakan terjadinya upaya diversifikasi pangan menjadi:

$$\begin{aligned} k_1 x_1 &= S \\ k_2 x_2 &= T \end{aligned} \tag{4.19}$$

Maka Persamaan (4.18) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 x_1 - S = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2 x_2 + p x_2 - T = 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ada dua titik kesetimbangan yang diperoleh dalam penelitian ini, yaitu titik kesetimbangan tanpa upaya diversifikasi pangan dan titik kesetimbangan dengan adanya upaya diversifikasi pangan. Masing-masing titik kesetimbangan tersebut diperoleh dengan analisa sebagai berikut:

1. Titik Kesetimbangan Tanpa Upaya Diversifikasi Pangan

   Pada titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa pola konsumsi masyarakat tidak dipengaruhi oleh adanya upaya diversifikasi pangan. Artinya pemerintah belum mengeluarkan kebijakan upaya diversifikasi pangan sehingga masyarakat Indonesia masih mengkonsumsi beras dan non-beras secara alami. Dengan kata lain, konsumsi beras dan konsumsi non-beras belum saling berpengaruh atau tidak ada hubungan antara konsumsi beras dan konsumsi non-beras.

   Untuk menentukan titik kesetimbangan tanpa upaya diversifikasi pangan dilakukan dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 x_1 - S = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2 x_2 + p x_2 - T = 0 \end{aligned}$$

lebih lanjut,

$$\begin{aligned}\alpha_1 x_1 - S &= 0\\ \alpha_2 x_2 + p x_2 - T &= 0\end{aligned}$$

Oleh karena titik kesetimbangan ini menyatakan tanpa adanya upaya diversifikasi pangan atau belum dilaksanakan upaya diversifikasi konsumsi beras dan non-beras, maka dapat diasumsikan bahwa nilai $S = 0$ dan $T = 0$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\alpha_1 x_1 \alpha - S &= 0\\ \alpha_1 x_1 &= 0\\ x_1 &= 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

dan

$$\begin{aligned}\alpha_2 x_2 + p x_2 - T &= 0\\ \alpha_2 x_2 + p x_2 &= 0\\ (\alpha_2 + p) x_2 &= 0\\ x_2 &= 0\end{aligned} \tag{4.22}$$

Berdasarkan pada Persamaan (4.21) dan Persamaan (4.22) dapat diperoleh nilai dari $x_1^* = 0$ dan nilai $x_2^* = 0$ sehingga dengan demikian titik kesetimbangan tanpa upaya diversifikasi pangan adalah $E_1(x_1^*, x_2^*) = E_1(0,0)$. Hal ini dapat diartikan bahwa pada saat tersebut pemerintah belum mengeluarakan kebijakan yang berupa diversifikasi beras dan non-beras yang menyebabkan masyarakat Indonesia dalam mengkonsumsi beras dan non-beras sesuai dengan kebiasaan dan kebutuhannya masing-masing atau dengan kata lain terjadi secara alami.

2. Titik Kesetimbangan dengan Upaya Diversifikasi Pangan
   Pada titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa pemerintah telah mengeluarkan kebijakan yang berupa pelaksanaan upaya diversifikasi pangan atau diversifikasi konsumsi beras dan non-beras sehingga terjadi pengaruh antara konsumsi beras dan konsumsi non-beras. Hal ini disebabkan karena akibat adanya upaya diversifikasi pangan.

Untuk menentukan titik kesetimbangan dengan adanya upaya diversifikasi pangan, dilakukan dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 x_1 - S = 0\\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2 x_2 + p x_2 - T = 0\end{aligned}$$

Lebih lanjut,

$$\begin{aligned}\alpha_1 x_1 - S &= 0\\ \alpha_1 x_1 &= S\\ \alpha_1 x_1 &= S\\ x_1 &= \frac{S}{\alpha_1} \qquad (4.23)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\alpha_2 x_2 + p x_2 - T &= 0\\ \alpha_2 x_2 + p x_2 &= T\\ (\alpha_2 + p) x_2 &= T\\ x_2 &= \frac{T}{\alpha_2 + p} \qquad (4.24)\end{aligned}$$

Berdasarkan pada Persamaan (4.23) dan Persamaan (4.24) dapat diperoleh nilai dari $x_1^* = \dfrac{S}{\alpha_1}$ dan untuk nilai $x_2^* = \dfrac{T}{\alpha_2 + p}$. Sehingga dengan demikian dari nilai x_1^* dan x_2^* diperoleh titik kesetimbangan untuk titik E_2 yang menyatakan titik kesetimbangan dengan adanya upaya diversifikasi pangan yaitu $E_2(x_1^*, x_2^*) = E_2\left(\dfrac{S}{\alpha_1}, \dfrac{T}{\alpha_2 + p}\right)$. Hal ini berarti bahwa pertumbuhan atau penurunan konsumsi beras dan konsumsi non-beras sangat dipengaruhi oleh upaya diversifikasi pangan.

Titik kesetimbangan $E_2(x_1^*, x_2^*) = E_2\left(\dfrac{S}{\alpha_1}, \dfrac{T}{\alpha_2 + p}\right)$ yang telah diperoleh di atas, menunjukkan bahwa pemerintah telah mengeluarkan kebijakan yang berupa pelaksanaan upaya diversifikasi pangan atau diversifikasi beras dan non-beras yang menyebabkan konsumsi beras x_1 dan konsumsi non-beras x_2 dapat saling berkaitan atau terjadi pengaruh antara pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dengan pertumbuhan konsumsi non-beras.

4.2.2 Analisis Kestabilan Lokal

Setelah menentukan titik kesetimbangan dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras selanjutnya dilakukan analisa kestabilan dari setiap titik setimbang yang telah diperoleh dengan menggunakan matriks Jacobian dan kemudian mencari nilai karakteristik atau nilai eigen dari matriks Jacobian tersebut.
Misalkan:

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_1 x_1 - S \\ f_2 &= \alpha_2 x_2 + p x_2 - T \end{aligned} \tag{4.25}$$

dengan $f_1,\ f_2$ merupakan fungsi nonlinier, maka matriks Jacobian dari Persamaan (4.25) dapat dibentuk sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

didapat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \alpha_1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \alpha_2 + p \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobian dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras yaitu dibentuk sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + p \end{bmatrix}$$

Dari matriks Jacobian di atas, dengan melihat elemen-elemen dari matriks tersebut, tampak bahwa elemen-elemennya hanya bergantung pada nilai parameter-parameter yang ada. Dengan demikian titik kesetimbangan E_1 dan titik kesetimbangan E_2 stabil pada saat persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras mengalami penurunan.

Dari keadaan di atas, dapat disusun Theorema 4.3 berikut.

Theorema 4.3.
Jika persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras mengalami penurunan pada titik kesetimbangan E_1 dan E_2 sedemikian hingga $\alpha_1 < 0$ dan $\alpha_2 + p < 0$ maka titik kesetimbangan E_1 dan E_2 adalah stabil.

Bukti.
Analisa kestabilan dilakukan pada titik kesetimbangan E_1 dan titik kesetimbangan E_2, yaitu sebagai berikut:

1. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_1(0,0)$
   Matriks Jacobian untuk titik kesetimbangan E_1 adalah J_{E_1}, yang dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & p + \alpha_2 \end{bmatrix}$$

   Selanjutnya nilai eigen dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $|J_{E_1} - \lambda I| = 0$, dengan I adalah matriks Identitas. Maka dari matriks Jacobian untuk titik $E_1(0,0)$ diperoleh:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & 0 \\ 0 & p + \alpha_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

   Oleh karena matriks Jacobian di atas adalah matriks diagonal, maka dapat disimpulakan bahwa nilai eigen dari matriks Jacobian tersebut adalah elemen-elemen diagonalnya, yaitu:

$$\lambda_1 = \alpha_1$$
$$\lambda_2 = p + \alpha_2$$

   Untuk mengecek jenis atau kriteria kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut, maka terlebih dahulu ditentukan determinan dari matriks Jacobian di atas, yaitu:

$$det(J_{E_1}) = (\alpha_1)(\alpha_2 + p)$$

   Misalkan, parameter-parameter tersebut adalah suatu konstanta, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut:

(i) Jika $\lambda_1 = \alpha_1 > 0 \Leftrightarrow \alpha_1 > 0$ dan $\lambda_2 = \alpha_2 + p > 0 \Leftrightarrow \alpha_2 + p > 0$ akan didapat

$$det(J_{E_1}) \ = \ (\alpha_1)(\alpha_2 + p) > 0$$

sehingga jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_1(0, 0)$ adalah ***node***.
Selanjutnya menentukan $tr(J_{E_1})$, diperoleh

$$tr(J_{E_1}) = \alpha_1 + \alpha_2 + p > 0$$

sehingga diperoleh jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_1(0, 0)$ adalah ***unstable***.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_1(0, 0)$ adalah ***unstable node***.

(ii) Jika $\lambda_1 = \alpha_1 < 0 \Leftrightarrow \alpha_1 < 0$ dan $\lambda_2 = \alpha_2 + p < 0 \Leftrightarrow \alpha_2 + p < 0$ akan didapat

$$det(J_{E_1}) \ = \ (\alpha_1)(\alpha_2 + p) > 0$$

sehingga jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_1(0, 0)$ adalah ***node***.
Selanjutnya menentukan $tr(J_{E_1})$, diperoleh

$$tr(J_{E_1}) = (\alpha_1) + (\alpha_2 + p) < 0$$

sehingga dapat diperoleh jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_1(0, 0)$ adalah ***stable***.
Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_1(0, 0)$ adalah ***stable node***.

(iii) Jika $\lambda_1 = \alpha_1 > 0 \Leftrightarrow \alpha_1 > 0$ dan $\lambda_2 = \alpha_2 + p < 0 \Leftrightarrow \alpha_2 + p < 0$ akan didapat

$$det(J_{E_1}) \ = \ (\alpha_1)(\alpha_2 + p) < 0$$

sehingga jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_1(0, 0)$ adalah ***saddel***.

(iv) Jika $\lambda_1 = \alpha_1 < 0 \Leftrightarrow \alpha_1 < 0$ dan $\lambda_2 = \alpha_2 + p > 0 \Leftrightarrow \alpha_2 + p > 0$ akan didapat

$$det(J_{E_1}) \ = \ (\alpha_1)(\alpha_2 + p) < 0$$

sehingga diperoleh jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_1(0, 0)$ adalah ***saddel***.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa titik $E_1(0,0)$ akan stabil jika memenuhi syarat yaitu $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ yang didefinisikan sebagai $\alpha_1 < 0$ dan $\alpha_2 + p < 0$ atau $-\alpha_2 < p$.

Hal ini dapat diartikan bahwa jika $\alpha_1 < 0$ bukan berarti tidak ada masyarakat Indonesia yang mengkonsumsi beras untuk pada saat tersebut, akan tetapi terjadi penurunan terhadap persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras. Sedangkan $\alpha_2 + p < 0$ atau $-\alpha_2 < p$, hal ini menunjukkan bahwa terjadi penurunan terhadap persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi non-beras dengan subsidi yang diberikan pada non-beras lebih besar daripada penurunan persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras.

2. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_2\left(\dfrac{S}{\alpha_1}, \dfrac{T}{\alpha_2 + p}\right)$
   Matriks Jacobian untuk titik kesetimbangan E_2 adalah J_{E_2}, yang dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$J_{E_2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & p + \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya nilai eigen dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $|J_{E_2} - \lambda I| = 0$, dengan I adalah matriks Identitas. Maka dari matriks Jacobian untuk titik $E_2\left(\dfrac{S}{\alpha_1}, \dfrac{T}{\alpha_2 + p}\right)$ diperoleh:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & 0 \\ 0 & p + \alpha_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Oleh karena matriks Jacobian di atas adalah matriks diagonal, maka dapat disimpulakan bahwa nilai eigen dari matriks Jacobian E_2 adalah elemen-elemen diagonalnya, yaitu:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1 \\ \lambda_2 &= p + \alpha_2 \end{aligned}$$

Untuk mengecek jenis atau kriteria kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut, maka terlebih dahulu menentukan determinan dari matriks Jacobian di atas, yaitu:

$$det(J_{E_2}) \ = \ (\alpha_1)(\alpha_2 + p)$$

Misalkan, parameter-parameter tersebut adalah suatu konstanta, maka akan diperoleh sebagai berikut:

(i) Jika $\lambda_1 = \alpha_1 > 0 \Leftrightarrow \alpha_1 > 0$ dan $\lambda_2 = \alpha_2 + p > 0 \Leftrightarrow \alpha_2 + p > 0$ akan didapat

$$det(J_{E_2}) \ = \ (\alpha_1)(\alpha_2 + p) > 0$$

sehingga jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_2\left(\frac{S}{\alpha_1}, \frac{T}{\alpha_2 + p}\right)$ adalah ***node***.
Selanjutnya menentukan $tr(J_{E_2})$, diperoleh

$$tr(J_{E_2}) = \alpha_1 + \alpha_2 + p > 0$$

sehingga diperoleh jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_2\left(\frac{S}{\alpha_1}, \frac{T}{\alpha_2 + p}\right)$ adalah ***unstable***.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_2\left(\frac{S}{\alpha_1}, \frac{T}{\alpha_2 + p}\right)$ adalah ***unstable node***.

(ii) Jika $\lambda_1 = \alpha_1 < 0 \Leftrightarrow \alpha_1 < 0$ dan $\lambda_2 = \alpha_2 + p < 0 \Leftrightarrow \alpha_2 + p < 0$ akan didapat

$$det(J_{E_2}) \ = \ (\alpha_1)(\alpha_2 + p) > 0$$

sehingga jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_2\left(\frac{S}{\alpha_1}, \frac{T}{\alpha_2 + p}\right)$ adalah ***node***.
Selanjutnya menentukan $tr(J_{E_2})$, diperoleh

$$tr(J_{E_2}) = (\alpha_1) + (\alpha_2 + p) < 0$$

sehingga dapat diperoleh jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_2\left(\frac{S}{\alpha_1}, \frac{T}{\alpha_2 + p}\right)$ adalah ***stable***.
Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_2\left(\frac{S}{\alpha_1}, \frac{T}{\alpha_2 + p}\right)$ adalah ***stable node***.

(iii) Jika $\lambda_1 = \alpha_1 > 0 \Leftrightarrow \alpha_1 > 0$ dan $\lambda_2 = \alpha_2 + p < 0 \Leftrightarrow \alpha_2 + p < 0$ akan didapat

$$det(J_{E_2}) = (\alpha_1)(\alpha_2 + p) < 0$$

sehingga jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_2\left(\frac{S}{\alpha_1}, \frac{T}{\alpha_2 + p}\right)$ adalah ***saddel***.

(iv) Jika $\lambda_1 = \alpha_1 < 0 \Leftrightarrow \alpha_1 < 0$ dan $\lambda_2 = \alpha_2 + p > 0 \Leftrightarrow \alpha_2 + p > 0$ akan didapat

$$det(J_{E_2}) = (\alpha_1)(\alpha_2 + p) < 0$$

sehingga dapat diperoleh jenis titik kesetimbangan untuk titik $E_2\left(\frac{S}{\alpha_1}, \frac{T}{\alpha_2 + p}\right)$ adalah ***saddel***.

Oleh karena elemen-elemen dari matriks Jacobian pada titik kesetimbangan E_2 sama dengan elemen-elemen matriks Jacobian titik kesetimbangan E_1 hanya bergantung pada nilai parameter-parameter dan tidak bergantung pada x_1^* dan x_2^* maka diperoleh hasil analisis yang sama. Dalam hal ini, titik kesetimbangan E_2 stabil jika $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ atau harus memenuhi $\alpha_1 < 0$ dan $\alpha_2 + p < 0$ atau $-\alpha_2 < p$. Q.E.D ■

Dengan demikian, dapat dibuktikan bahwa jika terjadi penurunan persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras maka titik kesetimbangan E_1 dan titik kesetimbangan E_2 adalah stabil.

4.3 Penyelesaian Kendali Optimal

Secara umum masalah kendali optimal terdiri dari model matematika yang biasa disebut dengan sistem dinamik dengan kondisi awal dan keadaan akhir. Sistem dinamik tersebut memiliki fungsi objektif serta kondisi batas yang harus dipenuhi. Dengan menggunakan Prinsip Minimum Potryagin diperoleh kendali yang optimal dari model matematika yang memiliki kondisi batas tertentu untuk mencapai fungsi tujuannya.

4.3.1 Formulasi Kendali Optimal

Pada penelitian ini, dari Persamaan (4.1) terdapat variabel bebas dan variabel terikat. Variabel bebas yakni α dan β, sedangkan variabel terikat x_1 dan x_2. Variabel bebas, dalam hal ini α dan β mempunyai pengaruh terhadap variabel terikat yaitu x_1 dan x_2, dengan kata lain besarnya perubahan dari x_1 dan x_2 sangat bergantung pada besar kecilnya nilai α dan β. Namun diantara variabel bebas α dan β, nilai variabel bebas α lebih dominan dari pada nilai variabel bebas β, karena variabel bebas β hanya berpengaruh pada saat terjadinya upaya diversifikasi pangan. Sedangkan nilai α selalu dapat berpengaruh pada model meskipun tanpa adanya upaya diversifikasi pangan. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa nilai α memiliki pengaruh yang sangat besar terhadap perubahan x_1 dan x_2.

Beberapa hal yang dapat mempengaruhi besar kecilnya nilai α_1 dan α_2 atau persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras, yaitu (1) jumlah penduduk, besarnya jumlah penduduk akan berpengaruh pada besarnya konsumsi pangan masyarakat sepanjang waktu t (2) pendapatan masyarakat, semakin besar *expected income* akan semakin besar pula pengeluaran konsumsi seseorang seiring waktu berjalan (3) tingkat harga, banyak sedikitnya beras dan non-beras yang akan dikonsumsi oleh masyarakat sangat bergantung pada harga pangan itu sendiri (4) produksi pangan, besar kecilnya hasil produksi pangan dapat berdampak pada pola konsumsi pangan masyarakat. Dari poin $(1) - (4)$ dapat disimpulkan bahwa hal-hal yang mempengaruhi persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras dapat berubah-ubah pada saat waktu t.

Pada Persamaan (4.1) terlihat bahwa semakin besar nilai α_1 dan α_2 maka semakin besar pula laju perubahan konsumsi beras dan konsumsi non-beras. Sebaliknya, jika semakin kecil nilai α_1 dan α_2 maka semakin kecil pula laju perubahan konsumsi beras dan konsumsi non-beras. Dengan demikian yang akan dikontrol adalah α_1 dan α_2 sedemikian hingga $\alpha_1 \equiv u_1(t)$ dan $\alpha_2 \equiv u_2(t)$ untuk $t \in I$. Dalam hal ini $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ sebagai Variabel pengendali selama jangka waktu $I = [t_0, t_f]$.

Oleh karena persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras dapat berubah-ubah, dalam hal ini dapat meningkat maupun menurun tergantung pada pola konsumsi pangan masyarakat yang telah dijelaskan pada poin (1)-(4) di atas, sehingga variabel pengendalinya diasumsikan berada dalam interval $[-1, 1]$. Batas atas satu (positif) menyatakan bahwa terjadi peningkatan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras sedangkan batas bawah satu (minus) menyatakan bahwa terjadi penurunan terhadap konsumsi beras dan konsumsi non-beras dengan peningkatan atau penurunan persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras tidak melebihi seratus persen. Hal ini menunjukkan bahwa $-1 \leq u_1(t) \leq 1$ dan $-1 \leq u_2(t) \leq 1$ yang selanjutnya dapat ditulis kedalam bentuk:

$$U = u = (u_1(t)), u_2(t) \in R^2 : -1 \leq u_1(t), u_2(t) \leq 1 \subset R^2$$

Dengan demikian Persamaan (4.1) menjadi seperti berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= u_1(t)x_1(t) - \beta_1 x_1(t)x_2(t)\\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= u_2(t)x_2(t) + px_2(t) - \beta_2 x_1(t)x_2(t)\end{aligned} \tag{4.26}$$

dengan kondisi awal,

$$x_1(t_0) = x_1(0)$$

$$x_2(t_0) = x_2(0)$$

dan keadaan akhir,

$$x_1(t_f) = x_{f_1}$$

$$x_2(t_f) = x_{f_2}$$

dengan t_f adalah waktu akhir yang telah ditentukan. Pada permasalahan ini, nilai akhir telah ditentukan yaitu 5 tahun.

Sedangkan Variaber pengendalinya adalah sebagai berikut:

$$-1 \leq u_1(t) \leq 1, t \in I = [t_0, t_f]$$

$$-1 \leq u_2(t) \leq 1, t \in I = [t_0, t_f] \tag{4.27}$$

4.3.2 Fungsi Tujuan

Secara matematika fungsi objektif pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras yang terdapat pada Persamaan (4.26) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}J(u(t)) = &\ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left\{\omega_1(x_1(t) - x_1^s(t))^2 + \omega_2(x_2(t) - x_2^s(t))^2\right\}\ dt\ +\\ &\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left\{q_1 u_1^2(t) + q_2 u_2^2(t)\right\}\ dt\ +\\ &\frac{1}{2}\left\{v_1(x_1(t_f) - \bar{x}_1^s)^2 + v_2(x_2(t_f) - \bar{x}_2^s)^2\right\}\end{aligned} \tag{4.28}$$

dengan:

ω_1	:	bobot biaya penyimpangan tingkat konsumsi dengan persediaan beras
ω_2	:	bobot biaya penyimpangan tingkat konsumsi dengan persediaan non-beras

$x_1^s(t)$: tingkat persediaan beras pada waktu t
$x_2^s(t)$: tingkat persediaan non-beras pada waktu t
$u_1(t)$: variabel pengendali konsumsi beras pada waktu t
$u_2(t)$: variabel pengendali konsumsi non-beras pada waktu t
q_1 : bobot biaya pengendalian atas ketergantungan mengkonsumsi beras
q_2 : bobot biaya pengendalian atas ketergantungan mengkonsumsi non-beras
v_1 : bobot biaya penyimpangan konsumsi beras dengan target konsumsinya diakhir periode
v_2 : bobot biaya penyimpangan konsumsi non-beras dengan target konsumsinya diakhir periode
$x_1(t_f)$: konsumsi beras pada waktu akhir
$x_2(t_f)$: konsumsi non-beras pada waktu akhir
$\bar{x}_1^s$: target akhir konsumsi beras
$\bar{x}_2^s$: target akhir konsumsi non-beras

Dengan bobot biaya penyimpangan konsumsi beras dan non-beras diasumsikan selalu bernilai positif atau $v_1 > 0$ dan $v_2 > 0$. Dalam kasus ini terdapat tiga aspek yang diminimumkan pada fungsi tujuan tersebut, yaitu yang pertama adalah biaya dari selisih tingkat konsumsi beras dan non-beras dan tingkat persediaan beras dan non-beras, kedua adalah biaya pengendalian yang berhubungan dengan ketergantungan masyarakat terhadap konsumsi beras dan non-beras dan yang ketiga adalah biaya akibat adanya selisih tingkat konsumsi beras dan non-beras dengan target konsumsi beras dan non-beras diakhir periode.
Selanjutnya Persamaan (4.28) dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned}J(u(t)) =& \frac{1}{2}\{v_1(x_1(t_f)-\bar{x}_1^s)^2 + v_2(x_2(t_f)-\bar{x}_2^s)^2\} + \\ & \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{\omega_1(x_1(t)-x_1^s(t))^2 + \omega_2(x_2(t)-x_2^s(t))^2 \quad + \\ & q_1u_1^2(t) + q_2u_2^2(t)\}\,dt \end{aligned} \tag{4.29}$$

Fungsi di atas merupakan bentuk fungsi objektif yang memiliki fungsi Meyer yang Φ dan fungsi Lagrange V. Penyelesaian masalah kendali optimal pada Persamaan (4.26) yang menyatakan sistem dinamik dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras yang diselesaikan dengan metode Prinsip Minimum Potryagin. Hal ini menunjukkan bahwa model tersebut diselesaikan sesuai dengan fungsi objektif yang terdapat pada Persamaan (4.29).

4.3.3 Penyelesaian Kendali Optimal

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menentukan kendali optimal adalah terlebih dahulu dibentuk fungsi Hamiltonian sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
H &= H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \\
&= L(x(t), u(t), t) \ + \ \lambda^{'}(t) f(x(t), u(t), t) \\
&= \frac{1}{2}\{\omega_1(x_1(t) - x_1^s(t))^2 + \omega_2(x_2(t) - x_2^s(t))^2 \ + \ q_1 u_1^2(t) \ + \\
&\quad q_2 u_2^2(t)\} \ + \ \lambda_1(t)(u_1(t)x_1(t) - \beta_1 x_1(t)x_2(t)) + \\
&\quad \lambda_2(t)(u_2(t)x_2(t) \ + \ p x_2(t) - \beta_2 x_1(t)x_2(t)) \\
&= \frac{1}{2}\ [\omega_1\{x_1^2(t) - 2x_1(t)x_1^s(t) + x_1^s(t)^2\} \ + \omega_2\{x_2^2(t) \ - \ 2x_2(t)x_2^s(t) + \\
&\quad x_2^s(t)^2\} \ + \ q_1 u_1^2(t) + q_2 u_2^2(t)] \ + \ \lambda_1(t)(u_1(t)x_1(t) \ - \ \beta_1 x_1(t)x_2(t)) + \\
&\quad \lambda_2(t)(u_2(t)x_2(t) \ + \ p x_2(t) \ - \beta_2 x_1(t)x_2(t)) \\
&= \frac{1}{2}\ \{\omega_1 x_1^2(t) - \omega_1 2x_1(t)x_1^s(t) + \omega_1 x_1^s(t)^2 \ + \ \omega_2 x_2^2(t) \ - \ \omega_2 2x_2(t)x_2^s(t) + \\
&\quad \omega_2 x_2^s(t)^2 \ + \ q_1 u_1^2(t) + q_2 u_2^2(t)\} \ + \ \lambda_1(t)(u_1(t)x_1(t) \ - \ \beta_1 x_1(t)x_2(t)) + \\
&\quad \lambda_2(t)(u_2(t)x_2(t) \ + \ p x_2(t) \ - \beta_2 x_1(t)x_2(t)) \\
&= \frac{1}{2}\omega_1 x_1^2(t) - \omega_1 x_1(t)x_1^s(t) + \frac{1}{2}\omega_1(x_1^s(t))^2 \ + \ \frac{1}{2}\omega_2 x_2^2(t) \ - \\
&\quad \omega_2 x_2(t)x_2^s(t) + \frac{1}{2}\omega_2(x_2^s(t))^2 \ + \ \frac{1}{2}q_1 u_1^2(t) + \frac{1}{2}q_2 u_2^2(t) \ + \\
&\quad \lambda_1(t)(u_1(t)x_1(t) - \ \beta_1 x_1(t)x_2(t)) \ + \ \lambda_2(t)(u_2(t)x_2(t) \ + \\
&\quad p x_2(t) \ - \beta_2 x_1(t)x_2(t)) \\
&= \frac{1}{2}\omega_1 x_1^2(t) - \omega_1 x_1(t)x_1^s(t) + \frac{1}{2}\omega_1(x_1^s(t))^2 \ + \ \frac{1}{2}\omega_2 x_2^2(t) \ - \\
&\quad \omega_2 x_2(t)x_2^s(t) + \frac{1}{2}\omega_2(x_2^s(t))^2 \ + \ \frac{1}{2}q_1 u_1^2(t) + \frac{1}{2}q_2 u_2^2(t) \ + \\
&\quad \lambda_1(t)u_1(t)x_1(t) - \ \lambda_1(t)\beta_1 x_1(t)x_2(t) \ + \ \lambda_2(t)u_2(t)x_2(t) \ + \\
&\quad \lambda_2(t)p x_2(t) \ - \lambda_2(t)\beta_2 x_1(t)x_2(t)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Langkah berikutnya adalah mendapatkan nilai $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$ atau nilai u yang optimal dengan menurunkan Persamaan (4.30) terhadap $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ atau dengan kata lain menentukan kondisi stasioner dari persamaan Hamiltonian. Nilai $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ yang optimal diperoleh dengan ketentuan berikut.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Fungsi objektif pada permasalahan ini memiliki dua kendali, maka dari kedua kendali tersebut masing-masing akan dicari kendali yang optimal dari $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$, yaitu sebagai berikut:

1. Untuk kendali $u_1^*(t)$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1(t)} = 0$$

$$\begin{aligned} 2\left\{\frac{1}{2}q_1 u_1(t)\right\} + \lambda_1(t)x_1(t) &= 0 \\ q_1 u_1(t) + \lambda_1(t)x_1(t) &= 0 \\ q_1 u_1(t) &= -\lambda_1(t)x_1(t) \\ u_1(t) &= -\frac{\lambda_1(t)x_1(t)}{q_1} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan kendali yang optimal untuk $u_1^*(t)$, adalah sebagai berikut:

$$u_1^*(t) = -\frac{\lambda_1(t)x_1(t)}{q_1} \tag{4.31}$$

2. Untuk kendali $u_2^*(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_2(t)} &= 0 \\ 2\left\{\frac{1}{2}q_2 u_2(t)\right\} + \lambda_2(t)x_2(t) &= 0 \\ q_2 u_2(t) + \lambda_2(t)x_2(t) &= 0 \\ q_2 u_2(t) &= -\lambda_2(t)x_2(t) \\ u_2(t) &= -\frac{\lambda_2(t)x_2(t)}{q_2} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan kendali yang optimal untuk $u_2^*(t)$, adalah sebagai berikut:

$$u_2^*(t) = -\frac{\lambda_2(t)x_2(t)}{q_2} \tag{4.32}$$

Pada pembahasan sebelumnya telah ditetapkan bahwa kendali $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ yang optimal berada dalam interval $[-1, 1]$, jadi dapat dipastikan bahwa kendali yang optimal dari masing-masing kendali $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$ berada dalam interval tersebut.

Selanjutnya akan dilakukan uji turunan kedua untuk menunjukkan bahwa H minimum di $u(t)$, yaitu:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial U_1^2} = q_1 > 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial U_2^2} = q_2 > 0$$

Sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= maks\{min\{-\lambda_1(t)x_1(t)/q_1,\ 1\},\ -1\} \\ u_2^*(t) &= maks\{min\{-\lambda_2(t)x_2(t)/q_2,\ 1\},\ -1\} \end{aligned} \tag{4.33}$$

Karena turunan kedua H terhadap semua pengendali bernilai positif, maka dapat disimpulkan bahwa uji turunan kedua terpenuhi. Kemudian substitusi nilai Persamaan (4.31) dan Persamaan (4.32) pada Persamaan (4.30) sehingga diperoleh persamaan Hamiltonian baru yang optimal, yaitu:

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{1}{2}\omega_1 x_1^2(t) - \omega_1 x_1(t)x_1^s(t) + \frac{1}{2}\omega_1(x_1^s(t))^2 + \frac{1}{2}\omega_2 x_2^2(t) - \\ &\quad \omega_2 x_2(t)x_2^s(t) + \frac{1}{2}\omega_2(x_2^s(t))^2 + \frac{1}{2}q_1(u_1^*(t))^2 + \frac{1}{2}q_2(u_2^*(t))^2 + \\ &\quad \lambda_1(t)u_1^*(t)x_1(t) - \beta_1\lambda_1(t)x_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u_2^*(t)x_2(t) + \\ &\quad \lambda_2(t)px_2(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_1(t)x_2(t) \\ &= \frac{1}{2}\omega_1 x_1^2(t) - \omega_1 x_1(t)x_1^s(t) + \frac{1}{2}\omega_1(x_1^s(t))^2 + \frac{1}{2}\omega_2 x_2^2(t) - \\ &\quad \omega_2 x_2(t)x_2^s(t) + \frac{1}{2}\omega_2(x_2^s(t))^2 + \frac{1}{2}q_1\left(-\frac{\lambda_1(t)x_1(t)}{q_1}\right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2}q_2\left(-\frac{\lambda_2(t)x_2(t)}{q_2}\right)^2 + \lambda_1(t)\left(-\frac{\lambda_1(t)x_1(t)}{q_1}\right)x_1(t) - \\ &\quad \beta_1\lambda_1 x_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)\left(-\frac{\lambda_2(t)x_2(t)}{q_2}\right)x_2(t) + \\ &\quad \lambda_2(t)px_2(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_1(t)x_2(t) \\ &= \frac{1}{2}\omega_1 x_1^2(t) - \omega_1 x_1(t)x_1^s(t) + \frac{1}{2}\omega_1(x_1^s(t))^2 + \frac{1}{2}\omega_2 x_2^2(t) - \\ &\quad \omega_2 x_2(t)x_2^s(t) + \frac{1}{2}\omega_2(x_2^s(t))^2 + \frac{1}{2q_1}\lambda_1^2(t)x_1^2(t) + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2q_2}\lambda_2^2(t)x_2^2(t) - \frac{\lambda_1^2(t)x_1^2(t)}{q_1} - \beta_1\lambda_1 x_1(t)x_2(t) - \frac{\lambda_2^2(t)x_2^2(t)}{q_2} + \lambda_2(t)px_2(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_1(t)x_2(t)$$

$$= \frac{1}{2}\omega_1 x_1^2(t) - \omega_1 x_1(t)x_1^s(t) + \frac{1}{2}\omega_1(x_1^s(t))^2 + \frac{1}{2}\omega_2 x_2^2(t) - \omega_2 x_2(t)x_2^s(t) + \frac{1}{2}\omega_2(x_2^s(t))^2 - \frac{\lambda_1^2(t)x_1^2(t)}{2q_1} - \beta_1\lambda_1(t)x_1(t)x_2(t) - \frac{\lambda_2^2(t)x_2^2(t)}{2q_2} + \lambda_2(t)px_2(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_1(t)x_2(t) \tag{4.34}$$

Untuk mendapatkan persamaan *state* dan persamaan *costate* yang optimal pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras, maka ada dua cara yang dapat dilakukan yaitu pertama menurunkan secara parsial fungsi Hamiltonian baru yang optimal atau nilai dari H^* yang telah diperoleh pada Persamaan (4.34) dan yang kedua adalah menurunkan secara parsial fungsi Hamiltonian H pada Persamaan (4.30) kemudian substitusi nilai $u(t)$ yang optimal $u^*(t)$. Adapun cara yang digunakan dalam penelitian ini yaitu menurunkan secara parsial fungsi Hamiltonian H^* pada Persamaan (4.34) kemudian mensubstitusikan nilai $u(t)$ optimal $u^*(t)$ yang telah diperoleh pada Persamaan (4.31) dan Persamaan (4.32).

Dari Persamaan (4.34) akan diperoleh persamaan *state* dan persamaan *costate* yang optimal sebagai berikut.

1. Persamaan *state* yang optimal

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda(t)}$$

Dari persamaan di atas, dapat diperoleh persamaan *state* yang optimal yaitu sebagai berikut:

a. Persamaan *state* untuk $\dot{x}_1(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_1(t)}\\ &= -\frac{2\lambda_1(t)x_1^2(t)}{2q_1} - \beta_1 x_1(t)x_2(t)\\ &= -\frac{\lambda_1(t)x_1^2(t)}{q_1} - \beta_1 x_1(t)x_2(t)\end{aligned} \tag{4.35}$$

b. Persamaan *state* untuk $\dot{x}_2(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) =& \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_2(t)} \\ =& -\frac{2\lambda_2(t)x_2^2(t)}{2q_2} + px_2(t) - \beta_1 x_1(t)x_2(t) \\ =& -\frac{\lambda_2(t)x_2^2(t)}{q_2} + px_2(t) - \beta_1 x_1(t)x_2(t) \qquad (4.36)\end{aligned}$$

2. Persamaan *costate* yang optimal

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x(t)}$$

Dari persamaan di atas, maka dapat diperoleh persamaan *costate* yang optimal dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras, yaitu:

a. Persamaan *costate* untuk $\dot{\lambda}_1(t)$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) =& -\frac{\partial H^*}{\partial x_1(t)} \\ =& -\{\frac{1}{2}(2\omega_1 x_1(t)) - \omega_1 x_1^s(t) - \frac{2\lambda_1^2(t)x_1(t)}{2q_1} - \\ & \beta_1\lambda_1(t)x_2(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_2(t)\} \\ =& -\{\omega_1 x_1(t) - \omega_1 x_1^s(t) - \frac{\lambda_1^2(t)x_1(t)}{q_1} - \\ & \beta_1\lambda_1(t)x_2(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_2(t)\} \\ =& -\{\omega_1(x_1(t) - x_1^s(t)) - \frac{\lambda_1^2(t)x_1(t)}{q_1} - \\ & \beta_1\lambda_1(t)x_2(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_2(t)\} \\ =& -\omega_1(x_1(t) - x_1^s(t)) + \frac{\lambda_1^2(t)x_1(t)}{q_1} + \\ & \beta_1\lambda_1(t)x_2(t) + \beta_2\lambda_2(t)x_2(t)\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat ditulis,

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) =& \frac{\lambda_1^2(t)x_1(t)}{q_1} + \beta_1\lambda_1(t)x_2(t) + \beta_2\lambda_2(t)x_2(t) - \\ & \omega_1(x_1(t) - x_1^s(t)) \qquad (4.37)\end{aligned}$$

b. Persamaan *costate* untuk $\dot{\lambda}_2(t)$

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda}_2(t) =& -\frac{\partial H^*}{\partial x_2(t)} \\
=& -\{\frac{1}{2}(2\omega_2 x_2(t)) - \omega_2 x_2^s(t) - \frac{2\lambda_2^2(t)x_2(t)}{2q_2} - \\
& \beta_1\lambda_1(t)x_1(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_1(t) \ + \ p\lambda_2(t)\} \\
=& -\{\omega_2 x_2(t) - \omega_2 x_2^s(t) - \frac{\lambda_2^2(t)x_2(t)}{q_2} - \\
& \beta_1\lambda_1(t)x_1(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_1(t) \ + \ p\lambda_2(t)\} \\
=& -\{\omega_2(x_2(t) - x_2^s(t)) - \frac{\lambda_2^2(t)x_2(t)}{q_2} - \\
& \beta_1\lambda_1(t)x_1(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_1(t) \ + \ p\lambda_2(t)\} \\
=& -\omega_2(x_2(t) - x_2^s(t)) + \frac{\lambda_2^2(t)x_2(t)}{q_2} + \\
& \beta_1\lambda_1(t)x_1(t) + \beta_2\lambda_2(t)x_1(t) \ - \ p\lambda_2(t)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dapat ditulis,

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda}_2(t) =& \frac{\lambda_2^2(t)x_2(t)}{q_2} \ + \ \beta_1\lambda_1(t)x_1(t) + \beta_2\lambda_2(t)x_1(t) \ - \\
& p\lambda_2(t) - \omega_2(x_2(t) - x_2^s(t))
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

Dari persamaan *state* dan *costate* di atas, masing-masing terdapat pada Persamaan (4.35), Persamaan (4.36), Persamaan (4.37) dan Persamaan (4.38) dapat diperoleh kondisi yang diperlukan agar fungsi tujuan dapat menjadi optimal. Kondisi tersebut berbentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) =& -\frac{\lambda_1(t)x_1^2(t)}{q_1} - \beta_1 x_1(t)x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) =& -\frac{\lambda_2(t)x_2^2(t)}{q_2} + px_2(t) - \beta_1 x_1(t)x_2(t) \\
\dot{\lambda}_1(t) =& \frac{\lambda_1^2(t)x_1(t)}{q_1} + \beta_1\lambda_1(t)x_2(t) + \beta_2\lambda_2(t)x_2(t) \ - \\
& \omega_1(x_1(t) - x_1^s(t)) \\
\dot{\lambda}_2(t) =& \frac{\lambda_2^2(t)x_2(t)}{q_2} \ + \ \beta_1\lambda_1(t)x_1(t) + \beta_2\lambda_2(t)x_1(t) \ - \\
& p\lambda_2(t) - \omega_2(x_2(t) - x_2^s(t))
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

dengan $x_1^s(t)$ yang menyatakan tingkat persediaan beras dan $x_2^s(t)$ menyatakan tingkat persediaan non-beras sepanjang periode waktu I.

Dari keterangan di atas, diasumsikan bahwa laju pertumbuhan persediaan pangan non-beras selalu meningkat setiap tahun seiring dengan pertumbuhan jumlah penduduk Indonesia yang terus meningkat pula. Hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}x_2^s(t) = \mu x_2^s(t) \tag{4.40}$$

dengan μ adalah konstanta tak negatif. Dengan demikian Persamaan (4.40) dapat dibentuk menjadi:

$$\frac{d}{dt}x_2^s(t) - \mu x_2^s(t) = 0 \tag{4.41}$$

Persamaan (4.41) berupa persamaan diferensial tingkat satu sehingga memiliki penyelesaian sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_2^s(t)v &= \int 0, vdt + c \\ x_2^s(t)v &= C \end{aligned} \tag{4.42}$$

dengan v adalah faktor pengintegral, yaitu:

$$\begin{aligned} v &= e^{\int -\mu dt} \\ v &= e^{\int -\mu t} \end{aligned} \tag{4.43}$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (4.43) pada Persamaan (4.42), sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x_2^s(t)v &= C \\ x_2^s(t)e^{\int -\mu t} &= C \\ x_2^s(t) &= Ce^{\mu t} \end{aligned} \tag{4.44}$$

untuk $t = 0$ maka:

$$x_2^s(t) = C \tag{4.45}$$

Dari uraian di atas, diperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial yang terdapat pada Persamaan (4.40) yaitu:

$$x_2^s(t) = x_2^s(0)e^{\mu t} \tag{4.46}$$

Pada Persamaan (4.46) dapat menunjukkan bahwa pertumbuhan tingkat persediaan non-beras dapat tumbuh secara eksponensial.

Dari masalah yang ada, seperti yang telah dijelaskan pada Latar Belakang dan Kajian Pustaka, pada dasarnya menyatakan bahwa program diversifikasi pangan bertujuan untuk mengurangi tingkat konsumsi masyarakat terhadap konsumsi beras dan meningkatkan konsumsi terhadap non-beras. Sebab jumlah persediaan beras tidak sebanding lagi dengan jumlah peningkatan penduduk yang semakin bertambah. Dengan kata lain, jumlah penduduk semakin meningkat sementara produksi beras semakin berkurang yang diakibatkan oleh beberapa faktor diantaranya lahan pertanian yang semakin sempit, iklim ekstrim dan kebijakan pemerintah pada suatu wilayah.

Dari keadaan tersebut di atas, dapat diasumsikan bahwa tingkat persediaan beras mengalami penurunan setiap tahun. Hal ini dapat diartikan bahwa persediaan beras menurun secara eksponensial. Maka keadaan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x_1^s(t) = x_1^s(0)e^{-\gamma t}, \gamma \geq 0 \tag{4.47}$$

Diasumsikan bahwa tingkat ketersediaan awal bernilai sama dengan tingkat konsumsi awal, maka dapat dibentuk sebagai berikut.

$$x_1^s(0) = x_1(0) \tag{4.48}$$

$$x_2^s(0) = x_2(0) \tag{4.49}$$

Kemudian substitusi Persamaan (4.48) pada Persamaan (4.47) dan substitusikan nilai dari Persamaan (4.49) pada Persamaan (4.46), sehingga diperoleh persamaan tingkat persediaan beras dan non-beras adalah sebagai berikut:

$$x_1^s(t) = x_1(0)e^{-\gamma t} \tag{4.50}$$

$$x_2^s(t) = xx_2(0)e^{\mu t} \tag{4.51}$$

Dari Persamaan (4.50) dan Persamaan (4.51) telah diperoleh nilai $x_1^s(t)$ dan $x_2^s(t)$, sehingga Persamaan (4.50) dan Persamaan (4.51) dapat disubstitusikan pada Persamaan (4.39) untuk memperoleh sistem persamaan diferensial yang baru agar fungsi tujuan menjadi optimal, sehingga Persamaan (4.39) menjadi:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{\lambda_1(t)x_1^2(t)}{q_1} - \beta_1 x_1(t)x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{\lambda_2(t)x_2^2(t)}{q_2} + px_2(t) - \beta_1 x_1(t)x_2(t) \\
\dot{\lambda}_1(t) &= \frac{\lambda_1^2(t)x_1(t)}{q_1} + \beta_1\lambda_1(t)x_2(t) + \beta_2\lambda_2(t)x_2(t) - \\
&\quad \omega_1(x_1(t) - x_1(0)e^{-\gamma t}) \\
\dot{\lambda}_2(t) &= \frac{\lambda_2^2(t)x_2(t)}{q_2} + \beta_1\lambda_1(t)x_1(t) + \beta_2\lambda_2(t)x_1(t) - \\
&\quad p\lambda_2(t) - \omega_2(x_2(t) - xx_2(0)e^{\mu t})
\end{aligned} \tag{4.52}
$$

dengan kondisi awal adalah:

$$x_1(t_0) = x_1(0)$$

$$x_2(t_0) = x_2(0)$$

Pada formulasi kendali optimal dalam kasus ini menggunakan sistem dengan $x(t_f)$ bebas dan t_f yeng telah ditentukan, sehingga dapat dibentuk kondisi transversality sebagai berikut:

$$\lambda_{t_f}^*(t) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_* \tag{4.53}$$

Pada Persamaan (4.53) dengan Φ adalah bentuk Meyer, sehingga dari fungsi tujuan yang terdapat pada Persamaan (4.29) diperoleh fungsi Meyer yaitu sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{2}\{v_1(x_1(t_f) - \bar{x}_1^s)^2 + v_2(x_2(t_f) - \bar{x}_2^s)^2\} \\
&= \frac{1}{2}\{v_1(x_1^2(t_f) - 2x_1(t_f)\bar{x}_1^s - (\bar{x}_1^s)^2) + v_2(x_2^2(t_f) - 2x_2(t_f)\bar{x}_2^s - (\bar{x}_2^s)^2)\} \\
&= \frac{1}{2}\{v_1x_1^2(t_f) - v_1 2x_1(t_f)\bar{x}_1^s - v_1(\bar{x}_1^s)^2 + v_2x_2^2(t_f) - v_2 2x_2(t_f)\bar{x}_2^s - v_2(\bar{x}_2^s)^2\} \\
&= \frac{1}{2}v_1x_1^2(t_f) - v_1x_1(t_f)\bar{x}_1^s - \frac{1}{2}v_1(\bar{x}_1^s)^2 + \frac{1}{2}v_2x_2^2(t_f) - v_2x_2(t_f)\bar{x}_2^s - \\
&\quad \frac{1}{2}v_2(\bar{x}_2^s)^2
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

Dari Persamaan (4.54) dapat diperoleh kondisi trasversality dengan menggunakan Persamaan (4.53) yaitu sebagai berikut.

$$\lambda^*_{t_f}(t) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_*$$

1. Untuk $\lambda^*_{1t_f}(t)$, didapat

$$\begin{aligned}\lambda^*_{1t_f}(t) &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)_* \\ &= v_1 x_1(t_f) - v_1 \bar{x}_1^s \\ &= v_1(x_1(t_f) - \bar{x}_1^s) \end{aligned} \tag{4.55}$$

2. Untuk $\lambda^*_{2t_f}(t)$, didapat

$$\begin{aligned}\lambda^*_{2t_f}(t) &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)_* \\ &= v_2 x_2(t_f) - v_2 \bar{x}_2^s \\ &= v_2(x_2(t_f) - \bar{x}_2^s) \end{aligned} \tag{4.56}$$

Pada persamaan *state* dan persamaan *costate* yang terdapat pada Persamaan (4.52) merupakan persamaan diferensial tak linier, maka penyelesaian kendali optimal pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras sulit diselesaikan secara analitik. Permasalahan ini akan diselesaikan dengan menggunakan *software MATLAB 2013a* pada fungsi bvp4c, yaitu fungsi yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa dengan masalah nilai awal secara numerik.

4.4 Hasil Simulasi

Pada bagian ini membahas hasil simulasi kestabilan dari titik kesetimbangan yang telah diperoleh dan simulasi dari penyelesaian kendali optimal pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras. Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi tersebut mengacu pada penelitian Dewanti (2014) yang menggunakan data dengan sumber Badan Pusat Statistik (BPS).

Hal di atas dilakukan untuk menentukan tingkat konsumsi beras dan konsumsi non-beras selama 5 tahun. Lamanya waktu tersebut disesuaikan dengan program diversifikasi pangan dalam buku Roodmap Diversifikasi Pangan 2011-2015. Adapun tingkat konsumsi beras dan non-beras dalam kasus ini dalam satuan Kg/kapita/tahun.

Tabel 4.1: Nilai dan Parametar Inputan Persamaan Bolza

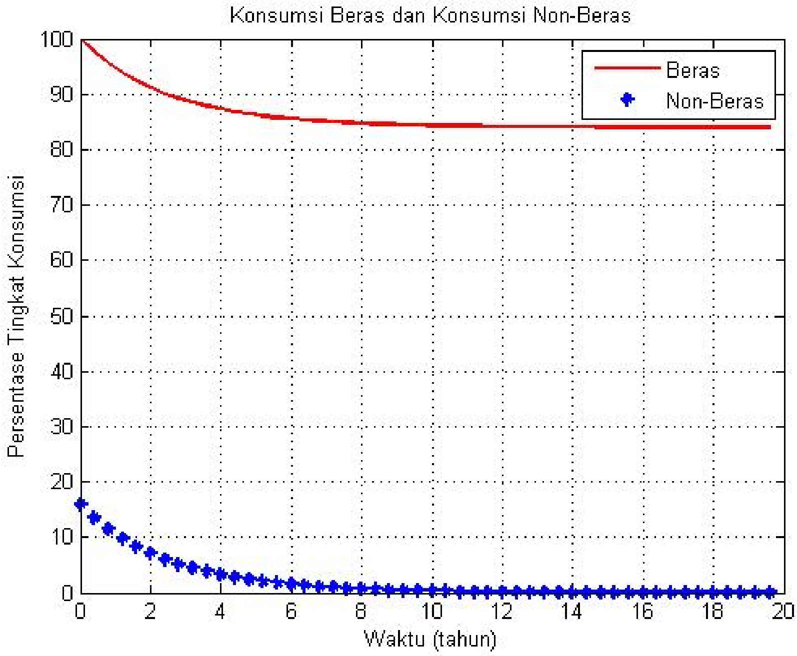
Parameter	**Nilai**
q_1	0.66
q_2	0.34
ω_1	0.64
ω_2	0.36
v_1	0.66
v_2	0.34
$x_1(0)$	100.8
$x_2(0)$	16.3
p	0.1
$\bar{x}_1^s$	93.4
$\bar{x}_2^s$	20.7

Tabel 4.2: Parameter Komputasi Persamaan Bolza

Parameter	Nilai
t_f	5
β_1	0.005
β_2	0.011
μ	0.05
γ	0.015

4.4.1 Simulasi Kestabilan Titik Kesetimbangan

Simulasi kestabilan untuk setiap titik kesetimbangan pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras akan berakibat stabil pada saat persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras mengalami penurunan. Hal ini telah dinyatakan pada Theorema 4.3 yang telah dibuktikan. Selanjutnya hal tersebut ditunjukkan pada Gambar 4.1 sebagai berikut.

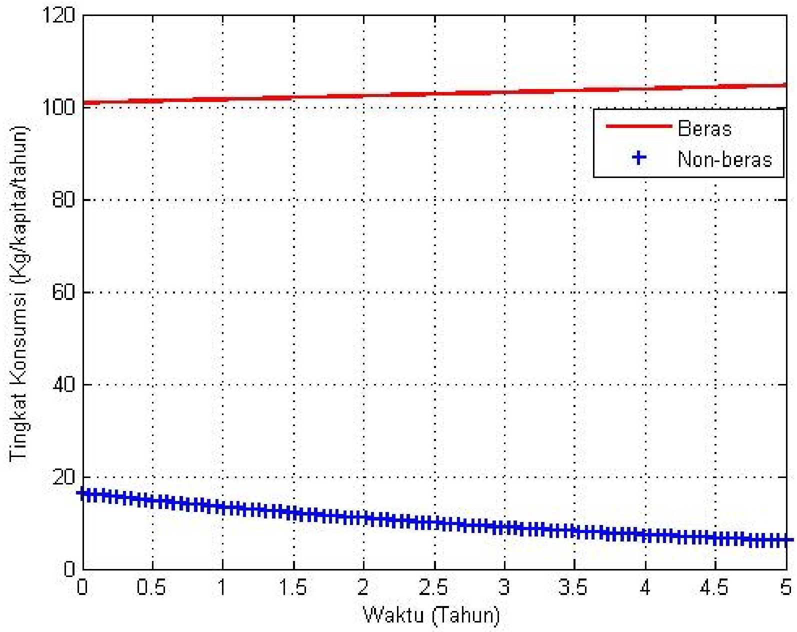


Gambar 4.1: Grafik Kestabilan Titik Kesetimbangan

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa kondisi persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras mengalami penurunan dengan subsidi yang diberikan oleh pemerintah pada non-beras sebesar 0.1. Penurunan persentase tingkat pertumbuhan atau penurunan konsumsi beras dan konsumsi non-beras dapat dilihat pada grafik tersebut, kondisi stabil saat konsumsi beras berada pada titik 84.102 dengan titik awal berada pada titik 100.80 sedangkan konsumsi non-beras berada pada titik 0.102 dengan titik awal berada pada titik 16.30 yang berarti bahwa persentase tingkat pertumbuhan dari kedua tanaman pangan tersebut mengalami penurunan.

4.4.2 Hasil Simulasi Tanpa Kendali

Simulasi untuk masalah kendali optimal model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras dengan waktu awal $t_0 = 0$ dan waktu akhir $t_f = 5$. Nilai variable kendali untuk persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras berkisar antara -1 dan 1. Simulasi dilakukan untuk melihat waktu peroses peralihan pola konsumsi pangan masyarakat dari konsumsi beras menuju konsumsi non-beras selama 5 tahun yang sesuai dengan buku Roadmap Diversifikasi Pangan. Berikut ini adalah hasil simulasi tanpa kendali dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras.

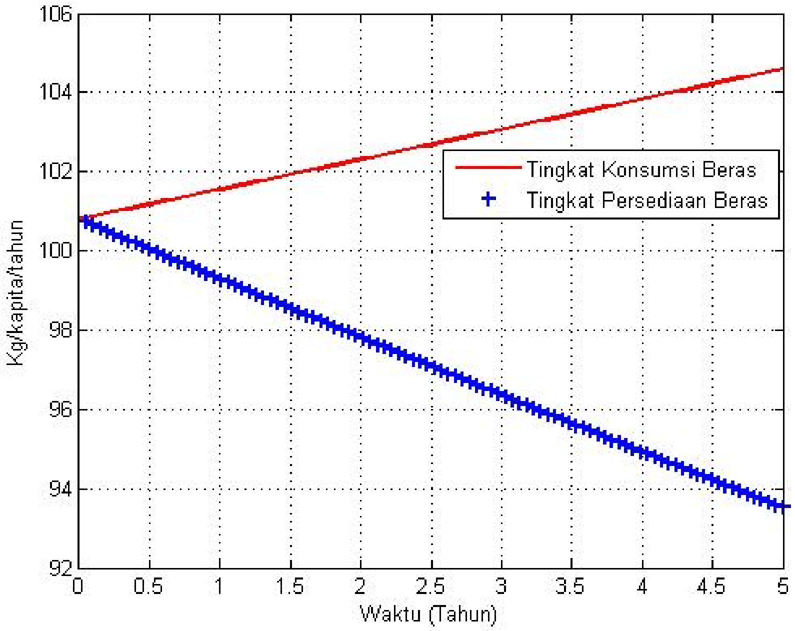


Gambar 4.2: Konsumsi Beras dan Non-Beras Tanpa Kendali

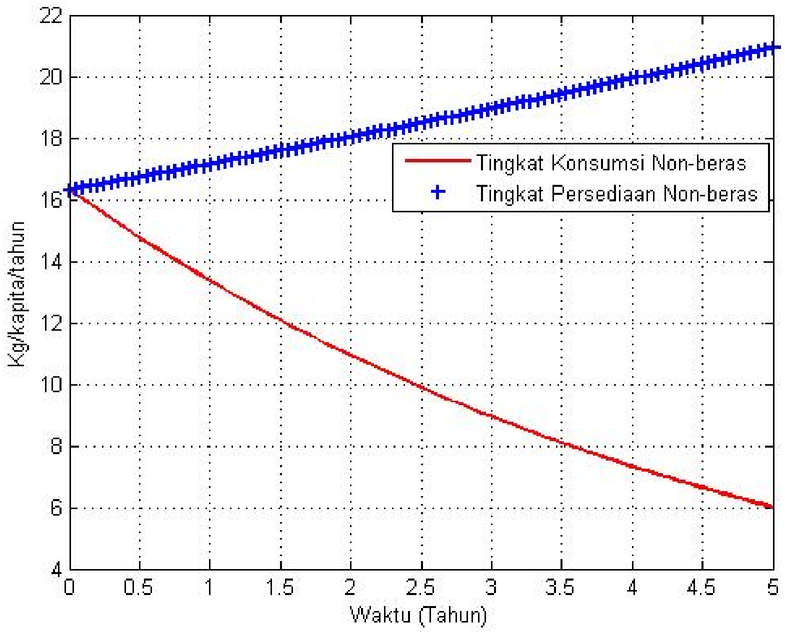
Gambar 4.2 menunjukkan bahwa dalam waktu 5 tahun konsumsi beras mencapai 104.5995 yang berarti dalam hal ini konsumsi beras mengalami peningkatan dari jumlah konsumsi awal yang hanya berkisar 100.80. Sedangkan konsumsi non-beras berkurang hingga 5.9964, dalam hal ini konsumsi non-beras malah mengalami penurunan dari konsumsi awal yang mencapai 16.30. Hal ini disebabkan karena konsumsi masyarakat tidak dikendalikan sehingga mengakibatkan konsumsi masyarakat terhadap beras terus meningkat dan konsumsi masyarakat terhadap non-beras terus menurun setiap waktu.

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa dalam waktu 5 tahun konsumsi beras mencapai 104.5995, sedangkan tingkat persediaan beras menurun hingga 93.5165 penurunan persediaan beras karena konsumsi pangan masyarakat belum dikendalikan sehingga penduduk dapat mengkonsumsi beras sepanjang waktu secara alami. Hal ini menandakan bahwa, pada saat konsumsi beras masyarakat tidak dikendalikan maka persediaan beras akan terus berkurang seiring dengan peningkatan konsumsi masyarakat terhadap beras sepanjang waktu.

Gambar 4.4 menunjukkan bahwa dalam waktu 5 tahun konsumsi non-beras terus menurun hingga 5.994 dari yang awalnya konsumsi non-beras dapat mencapai 16.30, hal ini dikarenakan penduduk Indonesia sebagian besar lebih memilih untuk mengkonsumsi beras dibanding mengkonsumsi non-beras sehingga perlu dilakukan pengendalian. Sedangkan tingkat persediaan non-beras semakin meningkat hingga mencapai 20.9296 yang disebabkan karena kurangnya masyarakat yang mengkon-

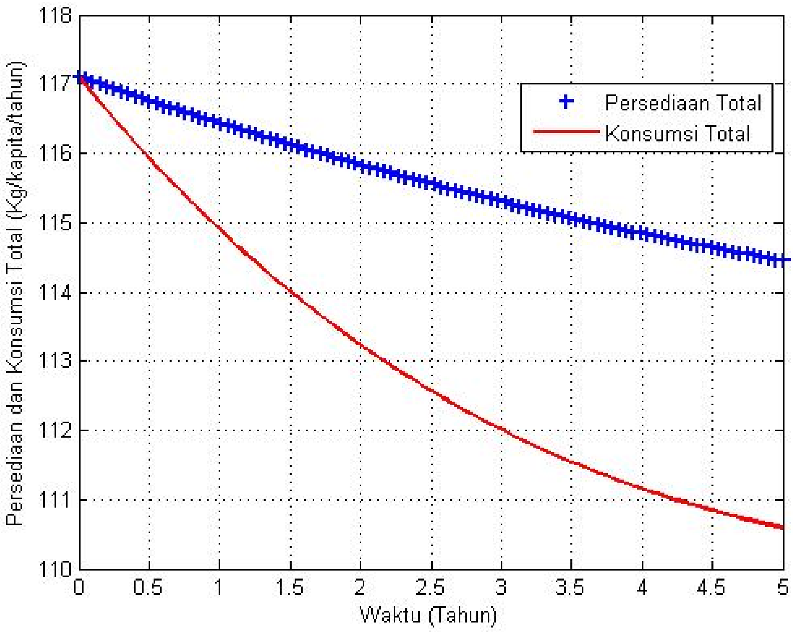


Gambar 4.3: Tingkat Konsumsi dan Persediaan Beras Tanpa Kendali



Gambar 4.4: Tingkat Konsumsi dan Persediaan Non-Beras Tanpa Kendali

sumsi non-beras atau dengan kata lain hal ini terjadi karena konsumsi non-beras pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras tidak dikendalikan.

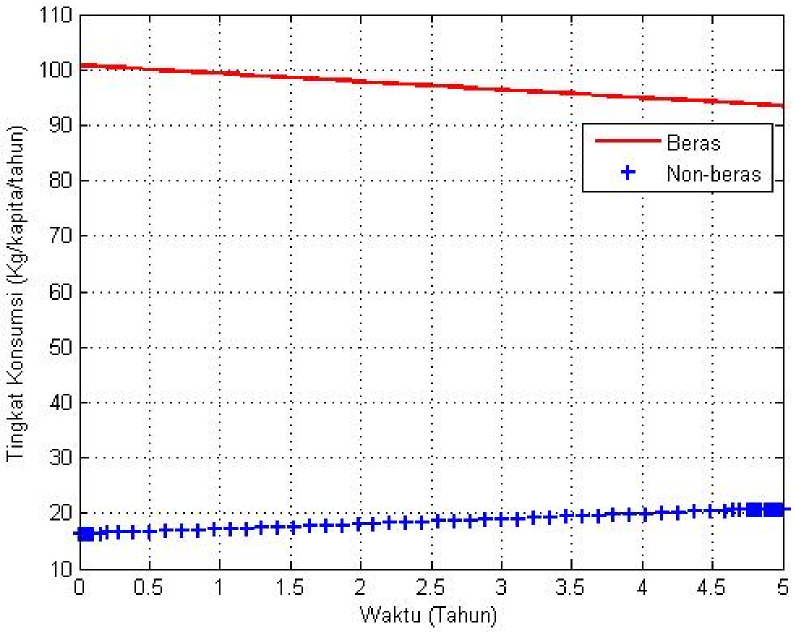


Gambar 4.5: Total Konsumsi dan Persediaan Pangan Tanpa Kendali

Gambar 4.5 menunjukkan keadaan total konsumsi dan persediaan pangan di Indonesia. Dari Gambar Gambar 4.5 terlihat bahwa dalam waktu 5 tahun total persediaan pangan mencapai 114.4462 sedangakan total konsumsi pangan berada hingga 110.5959. Keadaan tersebut meunjukkan bahwa selisih yang terjadi pada total konsumsi pangan dan total persediaan pangan sangat besar yang disebabkan karena kondisi ini belum dikendalikan.

4.4.3 Hasil Simulasi dengan Kendali

Tahap ini penulis melakukan simulasi untuk masalah kendali optimal model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras dengan waktu awal $t_0 = 0$ dan waktu akhir $t_f = 5$. Nilai variable kendali untuk persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras berkisar antara -1 dan 1. Simulasi dilakukan untuk melihat waktu peroses peralihan pola konsumsi masyarakat dari konsumsi beras menuju konsumsi non-beras selama 5 tahun sesuai dengan buku Roadmap Diversifikasi Pangan. Berikut ini adalah hasil simulasi dengan kendali pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras.

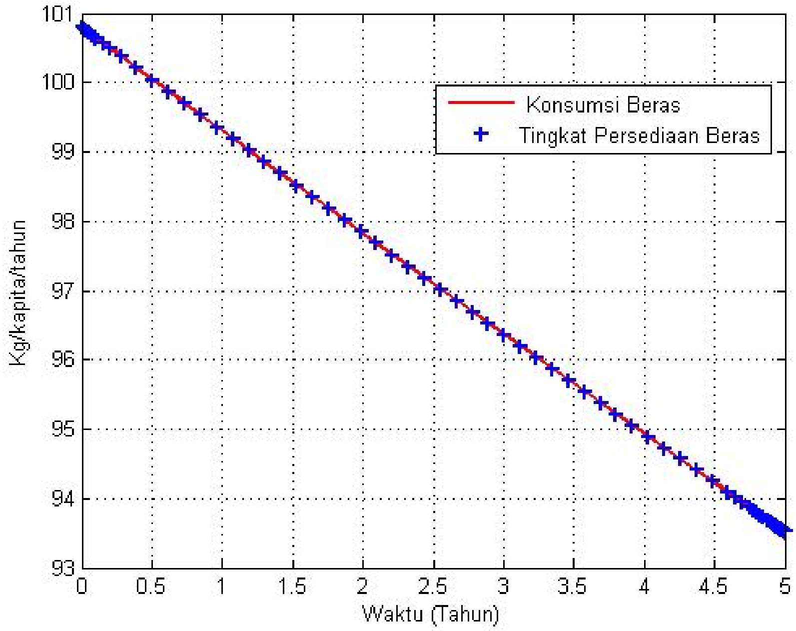


Gambar 4.6: Konsumsi Beras dan Non-Beras dengan Kendali

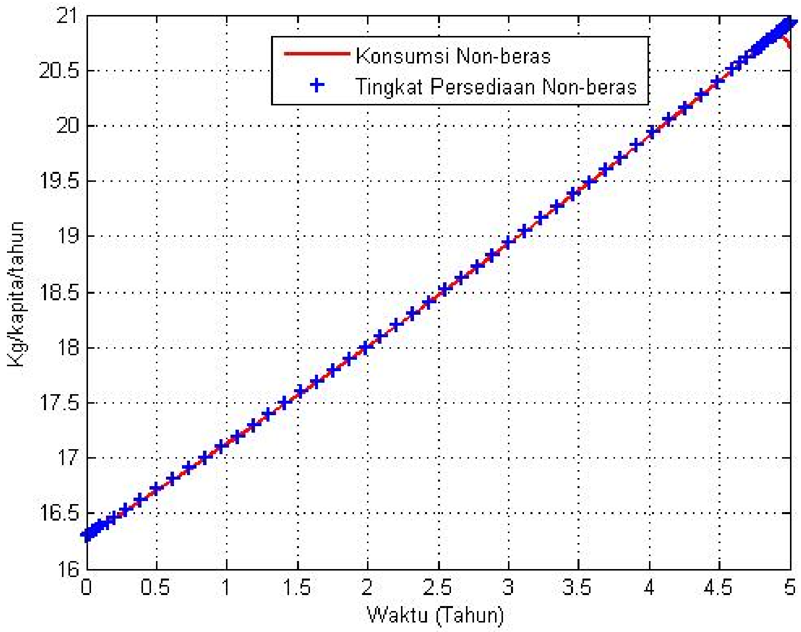
Gambar 4.6 menunjukkan bahwa konsumsi beras mengalami penurunan hingga 93.4003 dari nilai awal dalam mengkonsumsi beras mencapai 100.80 yang berarti dalam hal ini pola konsumsi masyarakat sudah mengalami perubahan. Sedangkan konsumsi non-beras mengalami peningkatan mencapai 20.6977 dalam waktu 5 tahun dari konsumsi awal yang berkisar hingga 16.30. Hal ini disebabkan karena telah diberikan pengendalian pada konsumsi beras dan konsumsi non-beras sehingga diperoleh pola konsumsi masyarakat yang optimal.

Gambar 4.7 menunjukkan bahwa dalam waktu 5 tahun konsumsi beras dan persediaan beras dapat saling terpenuhi. Terlihat bahwa konsumsi beras mengalami penurunan dari konsumsi awal 100.80 hingga mencapai 93.4003 sedangkat tingkat persediaan beras yang berkisar 93.5165 hal ini dapat diartikan bahwa konsumsi beras dapat terpenuhi dari persediaan beras yang ada sebelumnya. Dalam hal ini berarti bahwa selama waktu 5 tahun terdapat penurunun konsumsi beras yang disebabkan oleh pengendalian yang telah dilakukan pada konsumsi beras sehingga dapat terpenuhi sesuai dengan persediaan yang ada.

Gambar 4.8 menunjukkan bahwa setelah dilakukan pengendalian dalam waktu 5 tahun konsumsi non-beras mengalami peningkatan dari konsumsi awal 16.30 hingga mencapai 20.6977 dengan tingkat persediaan hingga 20.9296. Terlihat bahwa saat ini konsumsi non-beras dapat terpenuhi dari persediaan non-beras

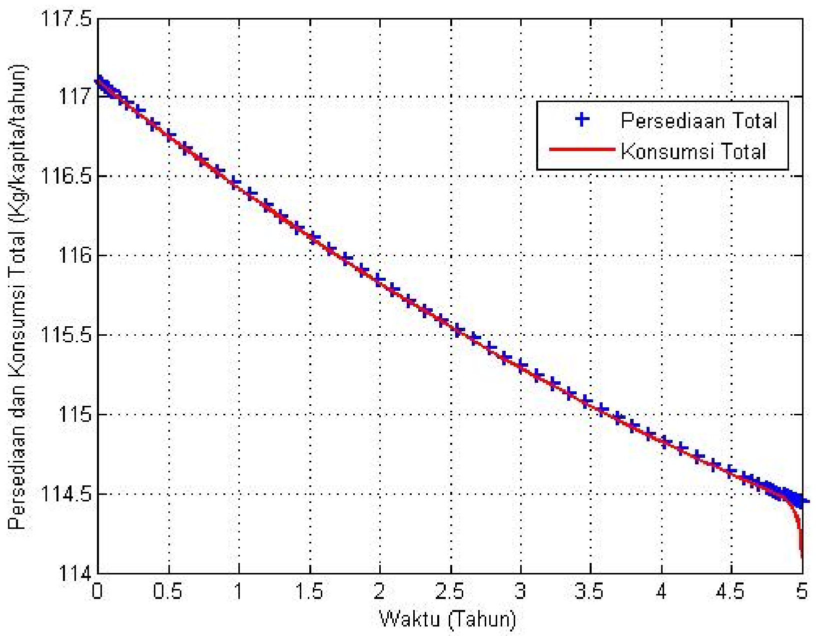


Gambar 4.7: Tingkat Konsumsi dan Persediaan Beras dengan Kendali



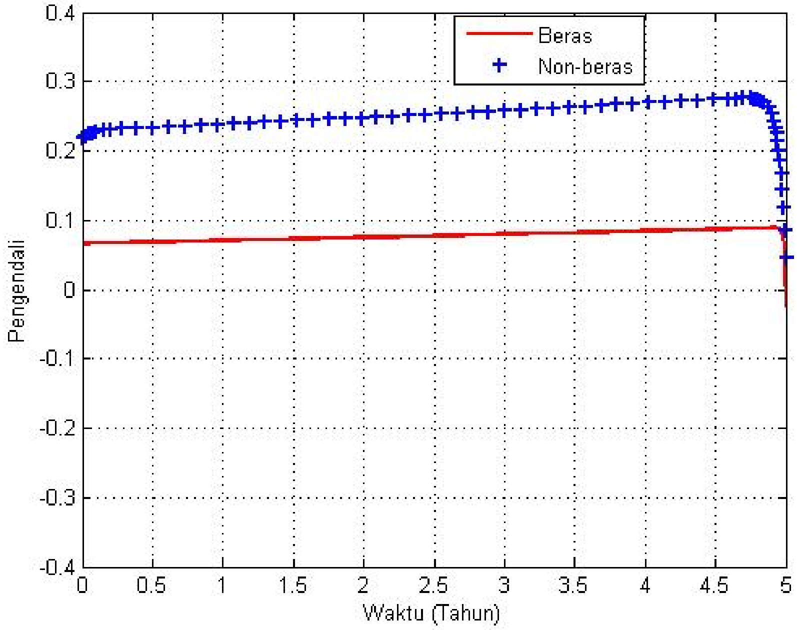
Gambar 4.8: Tingkat Konsumsi dan Persediaan Non-Beras dengan Kendali

yang ada, keadaan ini terjadi karena telah dilakukan pengendalian pada konsumsi non-beras. Hal ini dapat diartiakan bahwa setelah dilakukan pengendalian pada konsumsi non-beras maka dapat menyebabkan perubahan terhadap pola konsumsi masyarakat dari konsumsi beras menuju konsumsi non-beras. Keadaan tersebut menunjukkan bahwa dengan pemberian kendali pada konsumsi non-beras maka persediaan non-beras dapat memenuhi kebutuhan konsumsi pangan masyarakat sepanjang waktu.



Gambar 4.9: Total Konsumsi dan Persediaan Pangan dengan Kendali

Gambar 4.9 menunjukkan bahwa total konsumsi pangan dan total persediaan pangan di Idonesia setelah dilakukan pengendalian terlihat bahwa selisih yang terjadi pada total konsumsi dan persediaan pangan tidak signifikan dengan total konsumsi dan persediaan pangan pada saat tidak dilakukan pengendalian. Hal ini dapat diartikan bahwa selisih yang terjadi pada total konsumsi pangan dan persediaan pangan sangat kecil atau dengan kata lain, adanya pengendali yang optimal bertujuan untuk meminimumkan selisih antara total konsumsi pangan dan persediaan pangan yang ada di Indonesia serta dapat meminimumkan selisih antara tingkat konsumsi pangan dengan target konsumsi diakhir periode, sehingga dengan demikian biaya yang dikeluarkan menjadi minumum.



Gambar 4.10: Kendali Konsumsi Beras dan Non-Beras

Gambar 4.10 menunjukkan pengendali konsumsi beras dan non-beras yang dapat ditulis dengan $(u_1(t))$ dan $(u_2(t))$ selanjutnya disebut sebagai variabel pengendali. Dalam grafik pengendalian konsumsi beras dan non-beras tersebut terlihat bahwa dari kedua pengendali yang didapat tetap berada dalam interval $[-1, 1]$. Pada grafik ini menunjukkan bahwa bahwa persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras terlihat lebih kecil dibandingkan dengan persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi non-beras. Persentase tingkat pertumbuhan konsumsi non-beras yang awalnya mengalami peningkatan dan kemudian mengalami penurunan hingga mendekati akhir periode dari target yang telah ditentukan.

Tabel 4.3: Konsumsi Beras dan Non-Beras dengan Pemberian Subsidi Pemerintah pada Non-Beras

No.	**Uraian**	**Dewanti, (2014)**	$p\boldsymbol{x}_2(t)$
	Konsumsi Awal		
1.	100.80	99.2993	93.4003
2.	16.30	16.9941	20.6977
	Tingkat Persediaan		
3.	93.5165	99.2993	93.4003
4.	20.9296	16.9941	20.6977
	Biaya		
5.		0.0103	0.0074

Berdasarkan hasil simulasi pada Tabel 4.3 menunjukkan bahwa setelah diberikan subsidi pada non-beras diperoleh nilai penurunan tingkat konsumsi beras lebih kecil daripada penurunan tingkat konsumsi beras pada saat belum diberikan subsidi pada non-beras. Sedangkan peningkatan konsumsi non-beras yang telah diberikan subsidi bernilai lebih besar daripada peningkatan konsumsi non-beras pada saat belum diberikan subsidi. Kemudian selisih antara tingkat persediaan dengan konsumsi beras dan non-beras setelah diberikan subsidi lebih kecil daripada selisih antara tingkat persediaan dengan konsumsi beras dan non-beras pada saat belum diberikan subsidi pada non-beras, sehingga biaya yang dikeluarkan minimum. Dari uraian di atas, terlihat bahwa dengan adanya pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras dapat mewujudkan tujuan diversifikasi pangan.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini, diberikan kesimpulan dari hasil yang telah diperoleh setelah melakukan analisa kestabilan, penyelesaian kendali optimal dan simulasi pada model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras. Selain itu, memberikan saran pada pembahasan yang telah dilakukan untuk dikaji lebih mendalam.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil model matematika yang terdapat di Bab 3 dan hasil analisis pada model serta penyelesaian masalah kendali optimal di Bab 4, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik $E_1 = (0, 0)$ dan titik $E_2\left(\dfrac{S}{\alpha_1(t)}, \dfrac{T}{\alpha_2(t)+p}\right)$. Masing-masing titik kesetimbangan tersebut stabil pada saat persentase tingkat pertumbuhan dalam mengkonsumsi beras dan non-beras mengalami penurunan dengan keadaan $\alpha_1 < 0$ dan $\alpha_2 + p < 0$ atau $p < -\alpha_2$.

2. Pada penelitian ini, dengan menerapkan teori kendali optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin diperoleh pengendalian yang optimal dalam konsumsi beras dan konsumsi non-beras yaitu 0.0362.

3. Berdasarkan hasil simulasi yang telah diperoleh, menunjukkan bahwa konsumsi beras dapat menurun secara optimal hingga 93.4003 sementara konsumsi non-beras dapat meningkat mencapai 20.6977, sehingga biaya yang dikeluarkan minimum.

5.2 Saran

Saran yang penulis dapat berikan untuk penelitian berikutnya khususnya yang berkaitan dengan model diversifikasi beras dan non-beras adalah:

1. Pada penelitian ini, penulis mengabaikan adanya gangguan luar pada mdel sehingga peneliti berikutnya dapat menambahkan pada model dengan adanya

gangguan eksternal berupa iklim, penyempitan lahan pertanian, dan gangguan hama.

2. Untuk penelitian selanjutnya, dari model diversifikasi beras dan non-beras dengan pemberian subsidi oleh pemerintah pada non-beras diharapkan dapat mencantumkan pengaruh terhadap ekspor dan impor beras maupun non-beras.

DAFTAR PUSTAKA

Aini, S. N. (2010). *Pengendali Optimal Penggunaan Insektisida dan Virus Penginveksi pada Hama Serangga*. Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS Surabaya.

Anonim. (2012). *Buku Roadmap Diversifikasi Pangan 2011-20015. Edisi 2*. Jakarta.

Ariani, M. (2009). *Penganekaragaman Konsumsi Pangan di Indonesia: Permasalahan dan Implikasi untuk Kebijakan Program*. Tesis Agribisnis UNDIP Semarang 1-15.

Boyce, W. E., dan DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (Ninth ed.). United State of America: John Willey & Sons, Inc.

Budiningsih, R. (2009). *Faktor-faktor yang berpengaruh Terhadap Diversifikasi Konsumsi Pangan Non-Beras di Kabupaten Magelang* . Tesis Agribisnis UNDIP Semarang 1-41.

Darmawati, I. (1998). *Diversifikasi Pangan Non-Beras*. Wacana Utama (13), 1-3.

Dewanti, R. W. (2014). *Kendali Optimal Model Diversifikasi Beras dan Non-Beras*. Tesis Magister Matematika ITS Surabaya.

Fatimah, S. (2010). *Dinamika pada Sistem Autoparametrik*. Bunga Rampai-Kerjasama JICA-UPI (10).

Finizio, N., dan Landas, G. (1988). *Ordinary Differential Equations with Modern Applications*. Wadsworth, California.

Hariyanto. (2012). *Mengkonstruksi Model Distribusi Kontak pada Transmisi Penyebaran Virus pada 2 Lokasi dengan Strain yang Berbeda*. Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta, 69-80

Idayanti, D., dan Subchan (2010). *Kendali Optimal pada Pengadaan Bahan Mentah dengan Kebijakan Pengadaan Tepat Waktu, Pergudangan dan Penundaan*. Jurnal Matematika ITS Surabaya, 1-10.

Kar, T. K., dan Ghosh, B. (2012). *Sustainability and optimal control of an exploited prey predator system through provision of alternatife to predator*. Jurnal Biosystem (109), 22-232.

Kuhnova, J. (2009). *Analysis of the Predator-Prey Model with Climax Prey Population*. Acta Mathematica Universitis Ostraviensis17(1), 23-31.

Lastinawati, E. (2010). *Diversifikasi Pangan dalam Mencapai Ketahanan Pangan*. Jurnal Agrobisnis 2(4), 11-19.

Lestari, D., dan Widodo (2011). *Linearisasi Sistem Persamaan Parsial pada Model Epidemi SIR Berdasarkan Kelompok Umur*. Jurusan Matematika UGM Yogyakarta Indonesia 1-10.

Miah, M. S., dkk. (2011). *Optimum Policy for Integration of Renewable Energy Sources into the Power Generation System*. Energi Economics (34), 558-567.

Nagle, R. K., dkk. (2012). *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems* (Sixth ed.). USA: Pearson Education, Inc.

Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems.* New York: CRC Press.

Nagle, R. K., dkk. (2012). *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems* (Sixth ed.). USA: Pearson Education, Inc.

Nur'aripin, A. P. (2010). *Diversifikasi Pangan untuk Mengatasi Krisis Pangan di Indonesia*. Jurnal Bogor Agricultural University 1-7.

Prasad, B. S. R., dkk (2013). *Dynamics of additional food provided predator-prey system with mutually interfering predators*. Mathematical Biosciences (246), 176-190.

Quirk, J. P., dan Ruppert, R. (1965). Qualitative Economics and The Stability of Equilibrium. *Rev. Econ. Stud.*, 311-326.

Rachman, H. P. S., dan Ariani, M. (2008). *Penganekaragaman Konsumsi Pangan di Indonesia: Permasalahan dan Implikasi untuk kebijakan dan Program*. Analisis Kebijakan Pertanian 6(2), 140-154.

Setiawan, Y. (2010). *Peningkatan Produksi Beras dan Diversifikasi Pangan Lokal untuk Meningkatkan Ketahanan Pangan Nasional*.

Shampane, L., Kierzenk, J., dan Reichelt, M. (2000). *Solving Boundary Value Oroblem for Ordinary Differential Equations in Matlab with BVP4C*. USA.

Simanjuntak, D. (2006). *Pemanfaatan Komoditas Non-beras dalam Diversifikasi Pangan Sumber Kalori*. Pertanian UNIKA St. Thomas SU. 4(1), 45-54.

Subchan, S., dan Zbikowski, R. (2009). *Computational Optimal Control Tools and Practice*, first end, John Wiey & Sons, Ltd, UK.

Subiono. (2013). *Sistem Linear dan Kontrol Optimal Versi 2. 1. 1*. Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya-Indonesia.

Taslima. (2013). *Kendali Optimal pada Pencegahan Wabah Flu Burung Dengan Eleminasi, Karantina dan Pengobatan*. Tesis Magister Matematika ITS Surabaya.

Tuwankotta, J, M. (1998). *Discrete Dynamical System and Chaos*. Bandung Institute of Technology, Ganesha Bandung, Indonesia.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Jumlah Penduduk Indonesia (ribu), 1930-2013

Tahun	Penduduk	Tahun	Penduduk	Tahun	Penduduk
1930	59 138	1964	103 271	1989	176 336
1940	68 632	1965	105 414	1990 [1)]	179 379
1941	69 549	1966	107 645	1991	182 940
1942	70 478	1967	109 964	1992	186 043
1943	71 419	1968	112 377	1993	189 136
1944	72 373	1969	114 880	1994	192 217
1945	73 340	1970	117 469	1995 [2)]	195 283
1946	74 098	1971 [1)]	119 208	1996	198 320
1947	74 863	1972	123 115	1997	201 353
1948	75 636	1973	126 088	1998	204 393
1949	76 418	1974	129 083	1999	207 437
1950	77 207	1975	132 110	2000 [1)]	205 133
1951	78 741	1976 [2)]	135 190	2001	207 995
1952	80 329	1977	138 342	2002	210 898
1953	81 973	1978	141 579	2003	213 841
1954	83 676	1979	144 893	2004	216 826
1955	85 472	1980 [1)]	147 490	2005	220 926
1956	87 267	1981	151 315	2006	224 228
1957	89 160	1982	154 662	2007	227 579
1958	91 122	1983	158 083	2008	230 980
1959	93 153	1984	161 580	2009	234 432
1960	95 259	1985 [2)]	165 154	2010 [1)]	237 641
1961 [1)]	97 085	1986	167 881	2011	241 991
1962	99 257	1987	170 653	2012	245 425
1963	101 221	1988	173 472	2013	248 818

Sumber: Badan Pusat Statistik

Catatan: [1)] Sensus Penduduk (SP)

[2)] Survei Penduduk Antar Sensus (SUPAS)

- Penduduk pada tahun-tahun antara tahun SUPAS dan SP diperoleh dengan cara diinterpolasi
- Penduduk 2005-2009 dari hasil *backcasting* berdasarkan Laju Pertumbuhan Penduduk SP 2000-SP 2010
- Penduduk 2011-2013 dari hasil Proyeksi Penduduk

Lampiran 2 Ekspor Beras Triwulan Tahun 2009-2013

Periode	Ekspor	
	Berat Bersih (ton)	Nilai FOB (ribu US$)
2009	**2 454,8**	**1 814,3**
Triwulan I	101,0	69,2
Triwulan II	2 127,1	1 549,7
Triwulan III	93,0	77,9
Triwulan IV	133,7	117,5
2010	**345,2**	**451,6**
Triwulan I	59,1	70,0
Triwulan II	60,5	65,7
Triwulan III	83,7	103,7
Triwulan IV	141,9	212,2
2011	**378,9**	**836,7**
Triwulan I	65,6	104,2
Triwulan II	105,0	151,4
Triwulan III	34,7	108,0
Triwulan IV	172,6	473,1
2012	**897,2**	**1 186,7**
Triwulan I	63,7	128,6
Triwulan II	487,3	510,8
Triwulan III	176,7	283,9
Triwulan IV	169,5	263,4
2013	**2 585,7**	**1 191,4**
Triwulan I	174,7	244,3
Triwulan II	560,7	425,1
Triwulan III	131,6	203,2
Triwulan IV	1 718,4	318,8

Sumber: Laporan Bulanan Data Sosial Ekonomi, BPS

Lampiran 3 Impor Beras Triwulan Tahun 2009-2013

Periode	Impor	
	Berat Bersih (ton)	Nilai CIF (ribu US$)
2009	**250 473,1**	**108 153,3**
Triwulan I	78 124,6	31 887,0
Triwulan II	51 648,9	26 495,1
Triwulan III	56 861,3	21 965,1
Triwulan IV	63 838,3	27 806,1
2010	**687 581,5**	**360 785,0**
Triwulan I	43 567,0	26 241,9
Triwulan II	72 900,7	31 749,5
Triwulan III	54 974,3	32 282,3
Triwulan IV	516 139,5	270 511,3
2011	**2 750 476,2**	**1 513 163,5**
Triwulan I	1 194 657,2	622 728,3
Triwulan II	315 690,4	170 527,9
Triwulan III	360 325,6	204 170,7
Triwulan IV	879 803,0	515 736,6
2012	**1 810 372,3**	**945 623,2**
Triwulan I	770 294,7	420 651,4
Triwulan II	171 727,0	111 287,0
Triwulan III	122 839,6	64 461,4
Triwulan IV	754 511,0	349 223,4
2013	**472 664,7**	**246 002,1**
Triwulan I	114 269,0	62 697,1
Triwulan II	129 548,2	64 587,9
Triwulan III	109 668,2	56 043,2
Triwulan IV	119 179,2	62 673,9

Sumber: Laporan Bulanan Data Sosial Ekonomi, BPS

Lampiran 4 Konsumsi Beras Penduduk Indonesia Menurut Provinsi, 2007-2011 Kg/kapita/tahun

Uraian	Tahun				
	2007	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
Nanggroe Aceh Darusalam	116,19	114,13	113,38	114,41	108,62
Sumatera Utara	114,23	114,07	109,04	108,64	110,87
Riau	94,38	97,21	94,09	93,27	99,04
Jambi	100,46	105,06	99,22	97,70	100,72
Sumatera Selatan	100,75	107,48	106,05	103,15	100,20
Bengkulu	118,31	116,13	114,12	115,60	107,79
Lampung	103,75	110,19	104,94	105,22	102,91
Bangka Belitung	93,69	96,19	91,78	94,29	90,71
Kepulauan Riau	83,76	91,27	95,40	89,13	87,32
DKI Jakarta	89,62	92,50	92,53	92,12	96,71
Jawa Barat	106,13	111,99	108,93	105,25	107,91
Jawa Tengah	92,76	100,57	96,93	95,29	99,88
DI Yogyakarta	84,03	89,52	89,70	93,64	93,84
Jawa Timur	88,29	94,71	92,12	90,87	95,70
Banten	106,45	108,75	108,42	102,77	104,15
Bali	127,20	129,88	127,17	124,35	126,47
Nusa Tenggara Barat	122,60	128,43	129,22	129,91	129,03
Nusa Tenggara Timur	101,19	102,53	106,89	111,53	112,65
Kalimantan Barat	109,98	111,74	110,68	109,60	106,35
Kalimantan Tengah	105,92	115,29	107,29	106,84	103,88
Kalimantan Selatan	101,31	102,04	103,01	99,68	103,17
Kalimantan timur	85,00	85,35	78,94	81,82	84,38
Sulawesi Utara	103,96	111,54	106,70	110,87	104,91
Sulawesi Tengah	106,22	112,50	105,89	103,03	109,73
Sulawesi Selatan	110,28	114,36	111,88	110,40	114,77
Sulawesi Tenggara	106,81	111,33	100,40	101,73	102,80
Gorontalo	89,22	101,92	95,65	96,44	95,64
Sulawesi Barat	111,05	109,30	110,82	124,24	119,30
Maluku	70,30	70,34	77,67	76,05	82,26
Maluku Utara	64,30	80,27	69,13	69,75	71,30
Papua Barat	74,81	73,58	72,92	87,52	81,25
Papua	49,22	60,35	59,50	58,76	54,83
Indonesia	**100,05**	**104,85**	**102,22**	**100,75**	**102,87**

Sumber: BKP-Kementerian Pertanian

Lampiran 5 Konsumsi Non-Beras Penduduk Indonesia, 2007-2011
Kg/kapita/tahun

Uraian	Tahun				
	2007	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
Jagung *)	4,745	3,232	0,678	2,659	1,929
Ubi Kayu *)	6,987	1,825	5,527	5,058	5,788
Gaplek	0,678	2,138	0,365	0,313	1,260
Tepung Ubi Kayu/Tapioka*)	0,052	1,825	0,052	0,052	0,052
Ubi Jalar*)	2,399	1,825	2,242	2,294	2,868
Sagu*)	0,730	18,25	0,417	0,365	0,469
Umbi Lainnya*)	0,573	1,929	0,730	0,469	0,782
Kentang*)	2,086	2,034	1,721	1,825	1,564
Total	**18,25**	**16,633**	**11,732**	**13,035**	**13,712**

Sumber: Data Survei Sosial Ekonomi Nasional (Susenas), BPS
Keterangan: *) Diolah oleh Pusat Data dan Sistem Informasi Pertanian (Pusdatin)-Kementerian Pertanian.

Lampiran 6 *Listing* program untuk Kestabilan Titik Kesetimbangan

```
clc;
clear all;
close all;

%------------------------------------------------------------------
-----
disp('NASRUDDIN')
disp('1213201047')
disp('DIVERSIFIKASI BERAS DAN NON-BERAS DENGAN SUBSIDI PADA NON-
BERAS')
disp('                   ')
disp('                   ')
%------------------------------------------------------------------
-----


n = 80;
Alpha1 = 0.0074;
Alpha2 = 0.023;
p = 0.1;
Beta1 = 0.005;
Beta2 = 0.011;
h = 0.35;
x = [];
y = [];

%nilai konsumsi awal
x(1) = 100,8;
y(1) = 16,3;

%sistem dinamik diversifikasi beras dan non-beras
temp1 = sprintf('%0.4f*x-%0.4f*x*y',Alpha1,Beta1);
f1 = inline(temp1, 't','x','y');
temp2 = sprintf('%0.4f*x-%0.4f*x*y+%0.4f*y',Alpha2,Beta2,p);
f2 = inline(temp2, 't','x','y');
t = 0;

%Runge Kutta
for i = 2:n
    t = t+h;
    k1 = f1(t,x(i-1),y(i-1));
    k2 = f1(t+(1/2)*h,x(i-1)+0.5*k1,y(i-1)+0.5*k1);
    k3 = f1(t+(1/2)*h,x(i-1)+0.5*k2,y(i-1)+0.5*k2);
    k4 = f1(t+h,x(i-1)+k3,y(i-1)+k3);
    x(i) = x(i-1)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;

    k1 = f1(t,x(i-1),y(i-1));
    k2 = f1(t+(1/2)*h,x(i-1)+0.5*k1,y(i-1)+0.5*k1);
    k3 = f1(t+(1/2)*h,x(i-1)+0.5*k2,y(i-1)+0.5*k2);
    k4 = f1(t+h,x(i-1)+k3,y(i-1)+k3);
    y(i) = y(i-1)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
end
x
y
t = [0:h:(n-1)*h];
```

```
plot(t,x,'r','LineWidth',3); %plot konsumsi beras
hold on;
plot(t,y,'b','LineWidth',3); %plot konsumsi non-beras

xlabel('Waktu (tahun)'), ylabel('Tingkat Konsumsi');
legend('Beras','Non-Beras');
grid on;
title('Konsumsi Beras-Konsumsi Non-Beras');
grid on;
```

Lampiran 7 *Listing* program untuk Kendali Optimal Tanpa Kendali

1. Fungsi yang digunakan dalam simulasi tanpa kendali

```
b%Diversifikasi beras dan non-beras dengan subsidi pada non-beras
%untuk fungsi tanpa kendali
function m =
Bolza_Tanpa_Kontrol(p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,p9,p10,p11)
global q1 q2 beta1 beta2 w1 w2 v1 v2 x0_1 x0_2 x1_d x2_d c miu
gamma control1 control2
q1=p1;
q2=p2;
v1=p3;
v2=p4;
w1=p5;
w2=p6;
x0_1=p7;
x0_2=p8;
x1_d=p9;
x2_d=p10;
c=p11;
beta1=0;
beta2=0;
miu=0.05;
gamma=0.015;
control1 = 0.0074;
control2 = -0.2;

solinit = bvpinit(linspace(0,5),Bolzainit);

sol = bvp4c(@Bolzaode,@Bolzabc,solinit);

time = sol.x
state1 = sol.y(1,:)
state2 = sol.y(2,:)

%x1d = 100.8*exp(-gamma*time)
%x2d = 16.3*exp(miu*time)
S = x1d + x2d + c
D = state1 + state2
x1_tf=sol.y(1,(size(sol.y,2)))
x2_tf=sol.y(2,(size(sol.y,2)))
J=0;
f1=0.5*(w1*(state1(1)-x1d(1))^2 + w2*(state2(1)-x2d(1))^2 +
q1*control1^2 + q2*control2^2);
f3 = 0.5.*(v1.*(x1_tf-x1_d).^2 + v2.*(x2_tf-x2_d).^2);
for i=1:length(time)-1
    f2=0.5*(sum(sum(w1*(state1(i+1)-x1d(i+1))^2 +
w2*(state2(i+1)-x2d(i+1))^2 + q1*control1^2 + q2*control2^2)));
    J=J+0.5*(f1+f2)*(time(i+1)-time(i));
    f1=f2;
end
J = J+f3

m(1,:) = time;
m(2,:) = state1;
```

```
m(3,:) = state2;
m(4,:) = control1;
m(5,:) = control2;
m(6,:) = x1d;
m(7,:) = x2d;
m(8,:) = c
m(9,:) = S;
m(10,:) = D;

%-----------------------------------------------------------------
----------
function dydt=Bolzaode(t,y)
global q1 q2 beta1 beta2 w1 w2 v1 v2 x0_1 x0_2 x1_d x2_d c miu
gamma control1 control2

%Tanpa kontrol
dydt=[control1*y(1) - beta1*y(1)*y(2)
      control2*y(2) - beta2*y(2)*y(2)];
%-----------------------------------------------------------------
----------

function res=Bolzabc(ya,yb)
global q1 q2 beta1 beta2 w1 w2 v1 v2 x0_1 x0_2 x1_d x2_d c miu

%res=[ya(1) - x0_1
    ya(2) - x0_2];
%-----------------------------------------------------------------
----------

function v=Bolzainit(t)
global q1 q2 beta1 beta2  w2 v1 v2 x0_1 x0_2 x1_d x2_d c miu
gamma control1 control2

v=[x0_1
   x0_2];
```

2. *Listing* program dalam menjalankan fungsi tanpa kendali

```
clear all;
clc;
close all;

 disp('NASRUDDIN')
 disp('1213201047')
 disp('DIVERSIFIKASI BERAS DAN NON-BERAS DENGAN SUBSIDI PADA NON-
BERAS')
 disp('TANPA KENDALI')
 disp('                   ')
 disp('                   ')

flag=0;
flag1=0;
flag2=0;

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif
q1: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: q1 harus positif.')
        disp('         ')
    else
        flag=1;
        q1=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif
q2: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: q2 harus positif.')
        disp('         ')
    else
        flag=1;
        q2=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif
v1: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: v1 harus positif.')
        disp('         ')
    else
```

```
        flag=1;
        v1=var;
    end
end
flag=0;
disp('         ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif
v2: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('          ')
        disp('ERROR: v2 harus positif.')
        disp('          ')
    else
        flag=1;
        v2=var;
    end
end
flag=0;
disp('         ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif
w1: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('          ')
        disp('ERROR: w1 harus positif.')
        disp('          ')
    else
        flag=1;
        w1=var;
    end
end
flag=0;
disp('         ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif
w2: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('          ')
        disp('ERROR: w2 harus positif.')
        disp('          ')
    else
        flag=1;
        w2=var;
    end
end
flag=0;
disp('         ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk tingkat konsumsi
beras yang ditargetkan x1_s: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('          ')
```

```
        disp('ERROR: x1_s harus positif.')
        disp('         ')
    else
        flag=1;
        x1_d=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk tingkat konsumsi
non-beras yang ditargetkan x1_s: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: x2_s harus positif.')
        disp('         ')
    else
        flag=1;
        x2_d=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')


while(flag==0)
    var = input('Masukkan kondisi nilai awal untuk tingkat
produksi sumber energi terbarukan x1(0): ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: x1(0) harus positif.')
        disp('         ')
    else
        flag=1;
        x0_1=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan kondisi nilai awal untuk tingkat
produksi sumber energi tidak terbarukan x2(0): ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: x2(0) harus positif.')
        disp('         ')
    else
        flag=1;
        x0_2=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')
```

```
while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai subsidi pemerintah: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('          ')
        disp('ERROR: c harus positif.')
        disp('          ')
    else
        flag=1;
        c=var;
    end
end
flag=0;
disp('         ')

disp('Mohon tunggu sesaat...')
y1=Bolza_Tanpa_Kontrol(q1,q2,v1,v2,w1,w2,x0_1,x0_2,c);

disp('                ')
y1
           figure(1)
                     plot(y1(1,:),y1(2,:),'r',
y1(1,:),y1(3,:),'b','LineWidth',3)
                     xlabel('Waktu (Tahun)')
                     ylabel('Tingkat Konsumsi (Kg/kapita/tahun)')
                     legend('Beras','Non-beras')
                     grid on

           figure(2)
                     plot(y1(1,:),y1(2,:),'r','LineWidth',3)
                     hold on;
                     plot(
y1(1,:),y1(6,:),'b','LineWidth',3,'LineStyle','--');
                     xlabel('Waktu (Tahun)')
                     ylabel('Kg/kapita/tahun')
                     legend('Tingkat Konsumsi Beras','Tingkat
Persediaan Beras')
                     grid on

           figure(3)
                     plot(y1(1,:),y1(3,:),'r','LineWidth',3)
                     hold on;

plot(y1(1,:),y1(7,:),'b','LineWidth',3,'LineStyle','--');
                     xlabel('Waktu (Tahun)')
                     ylabel('Kg/kapita/tahun')
                     legend('Tingkat Konsumsi Non-beras','Tingkat
Persediaan Non-beras')
                     grid on


            figure(4)


                     plot(y1(1,:),y1(10,:),'b',
'LineWidth',3,'LineStyle','--')
```

```
                    hold on;
                    plot(y1(1,:),y1(11,:),'r','LineWidth',3)
                    xlabel('Waktu (Tahun)')
                    ylabel('Persediaan dan Konsumsi Total
(Kg/kapita/tahun)')
                    legend('Persediaan Total','Konsumsi Total')
                    grid on
```

Lampiran 8 *Listing* program untuk Kendali Optimal dengan Kendali

1. Fungsi yang digunakan dalam simulasi dengan kendali

```
%Diversifikasi beras dan non-beras dengan subsidi pada non-beras
%untuk fungsi dengan kendali

function m = Bolza(p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,p9,p10,p11)
global q1 q2 beta1 beta2 w1 w2 v1 v2 x0_1 x0_2 x1_d x2_d c miu
gamma;
q1=p1;
q2=p2;
v1=p3;
v2=p4;
w1=p5;
w2=p6;
x0_1=p7;
x0_2=p8;
x1_d=p9;
x2_d=p10;
c=p11;
beta1=0.005;
beta2=0.011;
miu=0.05;
gamma=0.015;

solinit = bvpinit(linspace(0,5),Bolzainit);

sol = bvp4c(@Bolzaode,@Bolzabc,solinit);

time = sol.x
state1 = sol.y(1,:)
state2 = sol.y(2,:)
adjoint1 = sol.y(3,:);
adjoint2 = sol.y(4,:);

% u(t) saat kondisi stasioner
% control1 = -(1/q1)*((state1).*(adjoint1))
% control2 = -(1/q2)*((state2).*(adjoint2))
%Dengan kontrol -1 <= u(t) <= 1
control1 = max(min((-(1/q1)*((state1).*(adjoint1))),1),-1)
control2 = max(min((-(1/q2)*((state2).*(adjoint2))),1),-1)
xx1=(control2/beta2)-state1 %saat x2_dot turun
xx2=(control1/beta1)-state2 %saat x1_dot naik

x1d = 100.8*exp(-gamma*time);
x2d = 16.3*exp(miu*time);
%S = x1d + x2d;
%D = state1 + state2;
x1_tf=sol.y(1,(size(sol.y,2)))
x2_tf=sol.y(2,(size(sol.y,2)))
J=0;
f1=0.5*(w1*(state1(1)-x1d(1))^2 + w2*(state2(1)-x2d(1))^2 +
q1*control1(1)^2 + q2*control2(1)^2);
f3 = 0.5.*(v1.*(x1_tf-x1_d).^2 + v2.*(x2_tf-x2_d).^2);
for i=1:length(time)-1
```

```
    f2=0.5*(sum(sum(w1*(state1(i+1)-x1d(i+1))^2 + w2*(state2(i+1)-
x2d(i+1))^2 + q1*control1(i+1)^2 + q2*control2(i+1)^2)));
    J=J+0.5*(f1+f2)*(time(i+1)-time(i));
    f1=f2;
end
J = J+f3

m(1,:) = time;
m(2,:) = state1;
m(3,:) = state2;
m(4,:) = adjoint1;
m(5,:) = adjoint2;
m(6,:) = control1;
m(7,:) = control2;
m(8,:) = x1d;
m(9,:) = x2d;
m(10,:) = c;
m(11,:) = S;
m(12,:) = D;

%-----------------------------------------------------------------
---------
function dydt=Bolzaode(t,y)
global q1 q2 beta1 beta2 w1 w2 v1 v2 x0_1 x0_2 x1_d x2_d c miu
gamma

%Dengan kontrol

dydt=[max(min((-(y(1)*y(3))/q1),1),-1)*y(1) - beta1*y(1)*y(2)
      max(min((-(y(2)*y(4))/q2),1),-1)*y(2) - beta2*y(2)*y(2)
      beta1*y(3)*y(2) + beta2*y(4)*y(2) - max(min((-
(y(1)*y(3))/q1),1),-1)*y(3) - w1*(y(1)-100.8*exp(-gamma*t))
      beta1*y(3)*y(1) + beta2*y(4)*y(1) - max(min((-
(y(2)*y(4))/q2),1),-1)*y(4) - c*y(4)-w2*(y(2)-(16.3*exp(miu*t)))];

%-----------------------------------------------------------------
---------
function res=Bolzabc(ya,yb)
global q1 q2 beta1 beta2 v1 v2 x0_1 x0_2 x1_d x2_d c miu gamma

res=[ya(1) - x0_1
    ya(2) - x0_2
    yb(3) - v1*yb(1) + v1*x1_d
    yb(4) - v2*yb(2) + v2*x2_d];

%---------------------------------------------------------------
function v=Bolzainit(t)
global q1 q2 beta1 beta2  w2 v1 v2 x0_1 x0_2 x1_d x2_d c miu gamma

v=[x0_1
   x0_2
   0
   0];
```

2. *Listing* program dalam menjalankan Fungsi dengan Kendali

```
clear all;
clc;
close all;

 disp('NASRUDDIN')
 disp('1213201047')
 disp('DIVERSIFIKASI BERAS DAN NON-BERAS DENGAN SUBSIDI PADA NON-
BERAS')
 disp('DENGAN KENDALI')
 disp('                    ')
 disp('                    ')

flag=0;
flag1=0;
flag2=0;

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif
q1: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: q1 harus positif.')
        disp('         ')
    else
        flag=1;
        q1=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif
q2: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: q2 harus positif.')
        disp('         ')
    else
        flag=1;
        q2=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif
v1: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: v1 harus positif.')
        disp('         ')
    else
```

```
        flag=1;
        v1=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif 
v2: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: v2 harus positif.')
        disp('         ')
    else
        flag=1;
        v2=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif 
w1: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: w1 harus positif.')
        disp('         ')
    else
        flag=1;
        w1=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk faktor bobot relatif 
w2: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
        disp('ERROR: w2 harus positif.')
        disp('         ')
    else
        flag=1;
        w2=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk tingkat konsumsi 
beras yang ditargetkan x1_s: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('         ')
```

```
        disp('ERROR: x1_s harus positif.')
        disp('          ')
    else
        flag=1;
        x1_d=var;
    end
end
flag=0;
disp('         ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan nilai positif untuk tingkat konsumsi
non-beras yang ditargetkan x2_s: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('          ')
        disp('ERROR: x2_s harus positif.')
        disp('          ')
    else
        flag=1;
        x2_d=var;
    end
end
flag=0;
disp('         ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan kondisi nilai awal untuk tingkat
konsumsi beras x1(0): ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('          ')
        disp('ERROR: x1(0) harus positif.')
        disp('          ')
    else
        flag=1;
        x0_1=var;
    end
end
flag=0;
disp('         ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan kondisi nilai awal untuk tingkat
konsumsi non-beras x2(0): ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('          ')
        disp('ERROR: x2(0) harus positif.')
        disp('          ')
    else
        flag=1;
        x0_2=var;
    end
end
flag=0;
disp('         ')

while(flag==0)
    var = input('Masukkan subsidi c: ');
```

```
    if(var<0 || var==0)
        disp('          ')
        disp('ERROR: c harus positif.')
        disp('          ')
    else
        flag=1;
        c=var;
    end
end
flag=0;
disp('        ')

disp('Mohon tunggu sesaat...')
%ketika u optimal
y1=Bolza(q1,q2,v1,v2,w1,w2,x0_1,x0_2,x1_d,x2_d,c);
%ketika u+-epsilon=20%
%y1=Bolza_uepsilon(q1,q2,v1,v2,w1,w2,x0_1,x0_2,x1_d,x2_d);

disp('               ')
y1

            figure(1)
                     plot(y1(1,:),y1(2,:),'r',
y1(1,:),y1(3,:),'b','LineWidth',3)
                     xlabel('Waktu (Tahun)')
                     ylabel('Tingkat Konsumsi (Kg/kapita/tahun)')
                     legend('Beras','Non-beras')
                     grid on

           figure(2)
                     plot(y1(1,:),y1(2,:),'r','LineWidth',3)
                     hold on;
                     plot(
y1(1,:),y1(8,:),'b','LineWidth',3,'LineStyle','--');
                     xlabel('Waktu (Tahun)')
                     ylabel('Kg/kapita/tahun')
                     legend(' Konsumsi Beras','Tingkat Persediaan
Beras')
                     grid on

           figure(3)
                     plot(y1(1,:),y1(3,:),'r','LineWidth',3)
                     hold on;
                     plot(
y1(1,:),y1(9,:),'b','LineWidth',3,'LineStyle','--');
                     xlabel('Waktu (Tahun)')
                     ylabel('Kg/kapita/tahun')
                     legend('Konsumsi Non-beras','Tingkat
Persediaan Non-beras')
                     grid on

            figure(4)
                     plot(y1(1,:),y1(10,:),'b',
'LineWidth',3,'LineStyle','--')
                     hold on;
                     plot(y1(1,:),y1(11,:),'r','LineWidth',3)
```

```
                     xlabel('Waktu (Tahun)')
                     ylabel('Persediaan dan Konsumsi Total 
(Kg/kapita/tahun)')
                     legend('Persediaan Total','Konsumsi Total')
                     grid on

            figure(5)

plot(y1(1,:),y1(6,:),'r',y1(1,:),y1(7,:),'b','lineWidth',3)
                     legend('Beras','Non-beras')
                     xlabel('Waktu (Tahun)')
                     ylabel('Pengendali')
                     ylim([-0.4 0.4]);
                     grid on
```

BIODATA PENULIS

Nasruddin atau akrab disapa dengan Nash lahir di Kolaka, Sulawesi Tenggara pada 9 September 1988 dan merupakan anak pertama dari pasangan H. Haddise dan Hj. Rosmini. Pendidikan formal yang ditempuh mulai dari SD Negeri Kecil Liku, lulus pada tahun 2000 dan melanjutkan pendidikan ke SMP Negeri 3 Kolaka, lulus pada tahun 2003, dan melanjutkan pendidikan ke SMK Negeri 1 Kolaka dengan jurusan Akuntansi Keuangan, lulus pada tahun 2006, kemudian penulis melanjutkan pendidikan S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas 19 November Kolaka, lulus pada tahun 2010. Penulis melanjutkan pendidikan S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2013 melaului jalur Beasiswa Pra S2-SAINTEK Dikti Angkatan I dengan NRP.1213 201 047. Penulis mengambil bidang minat penelitian Pemodelan Matematika dan Sistem. Untuk membentuk koneksi atau membutuhkan informasi yang berhubungan dengan Tesis ini dapat ditujukan ke alamat e-mail: nash.matematika@gmail.com.