TESIS – SM 142501

PENGARUH PANAS TERHADAP ALIRAN KONVEKSI BEBAS YANG MELALUI SEBUAH BOLA BERPORI

MOHAMAD TAFRIKAN
NRP. 1213201051

Dosen Pembimbing:
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Dr. Chairul Imron, MI.Komp

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015

THESIS – SM 142501

HEAT EFFECT ON FLUID FREE CONVECTION FLOW PAST A POROSITY SPHERE

MOHAMAD TAFRIKAN

NRP. 1213201051

Supervisor:

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc

Dr. Chairul Imron, MI.Komp

MASTER'S DEGREE

MATHEMATICS DEPARTEMENT

FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES

SEPULUH NOPEMBER OF INSTITUT TECHNOLOGY

SURABAYA

2015

PENGARUH PANAS TERHADAP ALIRAN KONVEKSI BEBAS YANG MELALUI SEBUAH BOLA BERPORI

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat mendapatkan gelar

Magister Sains (M.Si.)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh

MOHAMAD TAFRIKAN
NRP. 1213201051

Tanggal Ujian : 4 Mei 2015
Periode Wisuda : September 2015

Disetujui oleh

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP .19650605 198903 1 002 (Pembimbing I)

Dr. Chairul Imron, MI.Komp.
NIP. 19611115 198703 1 003 (Pembimbing II)

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.
NIP. 19660414 199402 2 001 (Penguji)

Dr. Budi Setiyono, S.Si., M.T.
NIP. 19720207 199702 1 001 (Penguji)

Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.
NIP. 19640405 199002 1 001

PENGARUH PANAS TERHADAP ALIRAN KONVEKSI BEBAS YANG MELALUI SEBUAH BOLA BERPORI

Nama : Mohamad Tafrikan

NRP : 1213201051

Dosen Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.

2. Dr. Chairul Imron, MI.Komp.

ABSTRAK

Permasalahan yang diamati dalam penelitian adalah pengaruh panas terhadap aliran konveksi bebas viskoselastik yang melalui bola berpori dengan penyelesaian secara numerik menggunakan metode beda hingga skema pusat. Pada aliran konveksi bebas dapat diuraikan persamaan kontinuitas, momentum, dan energi. Selanjutnya persamaan pembangun (*governing equation*) berdimensi yang terbentuk ditranformasi ke dalam persamaan non-dimensi dan ditranformasi lagi ke dalam bentuk persamaan non-similar. Berdasarkan hasil simulasi didapat pengaruh parameter viskoselastik (K), bilangan Prandtl (Pr) dan porositas (P) terhadap kecepatan aliran berbanding terbalik, sedangkan pengaruh parameter pembangkit panas atau *heat generation* (γ) berbanding lurus. Adapun pengaruh parameter viskoselastik (K) dan *heat generation* (γ) terhapad temperatur fluida berbanding lurus, sedangkan pengaruh bilangan Prandtl (Pr) dan porositas (P) terhadap temperatur fluida berbanding terbalik.

Kata Kunci: Konveksi Alir Bebas, Viskoselastik, Bilangan Prandtl, Porositas, Pembangkit Panas, Bola Berpori.

HEAT EFFECT ON FLUID FREE CONVECTION FLOW PAST A POROSITY SPHERE

Name : Mohamad Tafrikan

NRP : 1213201051

Supervisor : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.

2. Dr. Chairul Imron, MI.Komp.

ABSTRACT

Issues raised are free convection flow of viscous-elastic through a porous sphere with the completion of numerically using central finite difference method. The free convection flow can described continuity equation, momentum, and energy. Further, governing equations dimensionless form will be transformed into a non-dimensional equation and transformed again into a non-similar equations. The results of this research about the impact of viscoelastic parameter (K), Prandtl number (Pr), and porosity (P) on the flow velocity profile (f ') is inversely proportional , However effect of heat generation parameter (γ) on the flow velocity profile (f ') is inversely proportional. And the effect of the viscoelastic parameters (K) and heat generation (γ) to the flow temperature profile (θ) is proportional, However the effect of Prandtl number (Pr) parameter and porosity (P) on the flow temperature profile (θ) is inversely proportional.

Keywords : *Free Convection, Viscos-Elastic, Prandtl Number, Porosity, Heat Generation, Porosity Sphere.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah Subhanallah Wa Ta'ala yang telah melimpahkan segala nikmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul:

Pengaruh Panas Terhadap Aliran Konveksi
Bebas Yang Melalui Sebuah Bola Berpori

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Penulis sangat menyadari bahwa tulisan ini masih perlu disempurnakan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan dari pembaca berupa kritik dan saran yang membangun, sehingga penelitian selanjutnya diharapkan bisa lebih baik lagi.

Terselesaikannya Tesis ini tentu saja tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari bernagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Tasrikan dan Ibu Khosiah yang dengan segala kasih sayangnya selalu mendoakan penulis untuk tetap semangat belajar dan saudara-saudaraku yang telah memberi semangat dan dukungan selama menempuh pendididkan sehingga dapat menyelesaikan Tesis ini.
2. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D. selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas kepada penulis untuk menyelesaikan Tesis ini.
3. Direktorat Jendral Perguruan Tinggi (DIKTI) selaku penyandang dana yang telah memberikan beasiswa Fresh Graduate.
4. Bapak Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T. selaku Direktur Program Pascasarjana ITS.
5. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika ITS.
6. Bapak Dr. Subiono, M.S. selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika ITS.
7. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. dan Bapak Dr. Chairul Imron,MI.Komp. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, perhatian, arahan,

nasehat dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis mampu menyelesaikan Tesis ini dengan baik.

8. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. dan Bapak Dr. Budi Setiyono, S.Si., M.T. selaku dosen penguji atas masukan, kritik, dan saran yang membantu penulis untuk memperbaiki Tesis ini.
9. Terima kasih sangat saya ucapkan kepada UST. FAIZ NASRULLAH.S.Kom yang tak henti-henti mendoakan demi kelancaran pengerjaan Tesis ini.

Terakhir, penulis berharap semoga laporan Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang akan membutuhkan.

Surabaya, Mei 2015

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN i
ABSTRAK iii
ABSTRACT v
KATA PENGANTAR vii
DAFTAR ISI ix
DAFTAR GAMBAR xi
DAFTAR SIMBOL xiii
BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Batasan Masalah 3
1.4 Tujuan Penelitian 3
1.5 Manfaat Penelitian 4
1.6 Kontribusi Hasil Penelitian 4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA 5
2.1 Penelitian Terdahulu 5
2.2 Fluida 6
2.3 Tipe Aliran Berdasarkan Kriteria Waktu 6
2.4 Tipe Aliran Berdasarkan Perbandingan Gaya – gaya Inersia Dengan Kekentalan 6
2.5 Viskositas 7
2.6 Konveksi Panas 8
2.7 Lapisan Batas (*Boundary Layer*) 9
2.8 Fluida Newtonian dan Fluida Non-Newtonian 10
2.9 Persamaan Kontinuitas, Momentum, dan Energi 10
2.9.1 Persamaan Kontinuitas 11
2.9.2 Persamaan Momentum 12
2.9.3 Persamaan Energi 14
2.10 Bilangan Non-Dimensi pada Aliran Perpindahan Panas 16
2.10.1 Bilangan Non-Dimensi Grashof ($\boldsymbol{Gr}$) 16
2.10.2 Bilangan Non-Dimensi Prandtl ($\mathbf{Pr}$) 17
2.11 Metode Beda Hingga Skema Pusat 17
BAB III 19

METODE PENELITIAN 19
BAB IV MODEL MATEMATIKA 23
4.1 Model Aliran Konveksi Bebas 23
4.3 Persamaan Konservasi Momentum 26
Persamaan Konservasi Energi 31
4.4 Persamaan Pembangun Non-dimensional 33
4.5 Transformasi persamaan non-dimensional ke persamaan similar 35
BAB V HASIL DAN PEMBAHASAN 37
5.1 Tahap Diskritisasi 37
5.2 Tahapan Iterasi 38
5.3 Algoritma Pemrograman 39
5.3.1 Algoritma untuk mendapatkan interval parameter K, Pr, $\boldsymbol{\gamma}$, dan P. 39
5.3.2 Algoritma untuk mendapatkan profil kecepatan dan temperatur fluida. 40
5.4 Hasil simulasi dan analisa grafik 41
BAB VI KESIMPULAN DAN SARAN 49
6.1 Kesimpulan 49
6.2 Saran 50
DAFTAR PUSTAKA 51
LAMPIRAN 1 53
LAMPIRAN 2 59
LAMPIRAN 3 62
LAMPIRAN 4 65
LAMPIRAN 5 67
LAMPIRAN 6 72
LAMPIRAN 7 76
BIODATA PENULIS 87

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 : Model fisik aliran konveksi bebas yang melalui sebuah bola berpori……. 2

Gambar 2.1 : Aliran fluida diantara dua pelat…… 7

Gambar 2.2 : Lapisan batas pada pelat datar…… 8

Gambar 2.3 : Klasifikasi fluida Newtonian dan Non-Newtonian……. 10

Gambar 2.4 : Jaringan titik hitungan dalam bidang *x-y*..... 17

Gambar 4.1 : Volume kendali pada aliran yang melalui bola berpori……... 22

Gambar 4.2 : Volume kendali pada aliran yang melalui bola berpori beserta fluk massanya…….. 23

Gambar 5.1 : Profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $\gamma = 0.5, Pr = 1, P = 0.1$ dan viskoselastik (K) yang divariasi..... 59

Gambar 5.2 : Profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $\gamma = 0.5, Pr = 1, P = 0.1$, dan viskoselastik (K) divariasi…… 60

Gambar 5.3 : Profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01,\ Pr = 1, P = 0.1$, dan parameter *heat generation* ($\boldsymbol{\gamma}$) yang divariasi..... 61

Gambar 5.4 : Profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01, Pr = 1, P = 0.1$ dan parameter *heat generation* (γ) yang divariasi..... 62

Gambar 5.5 : Profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01,\ \gamma = 0.5,\ P = 0.1$ dan parameter bilangan *Prandtl* (Pr) yang divariasi..... 63

Gambar 5.6 : Profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01,\ \gamma = 0.5,\ P = 0.1$ dan parameter bilangan *Prandtl* (Pr) yang divariasi. 64

Gambar 5.7 : Profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01,\ \gamma = 0.5,\ Pr = 1,$ dan parameter porositas (P)

yang divariasi..... 65

Gambar 5.8 : Profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01$, $\gamma = 0.5$, $Pr = 1$, dan parameter porositas (P) yang divariasi..... 66

DAFTAR SIMBOL

a : $jari - jari\ bola$

ρ : $densitas\ fluida$

ν : $viskositas\ kinematik$

C_p : $koefisian\ tekanan$

g : $gravitasi\ bumi$

β : $koefisien\ perluasan\ volume$

k : $konduktifitas\ thermal\ fluida$

Q_0 : $nilai\ kalor\ awal$

u_e : $kecepatan\ aliran\ dari\ arah\ timur$

u_w : $kecepatan\ aliran\ dari\ arah\ barat$

v_n : $kecepatan\ aliran\ dari\ arah\ utara$

v_s : $kecepatan\ aliran\ dari\ arah\ selatan$

w_t : $kecepatan\ aliran\ dari\ arah\ atas$

w_b : $kecepatan\ aliran\ dari\ arah\ bawah$

J : $kerapatan\ arus\ listrik$

B : $gaya\ magnet$

K^* : $permeabilitas$

V : $komponen\ kecepatan\ fluida$

K : *parameter viskoelastik*

I : *matrik identitas*

p_d : *tekanan dinamik*

p : *tekanan*

p_h : *tekanan hidrostatik*

F_x : *gaya yang bekerja pada sumbu* x

F_y : *gaya yang bekerja pada sumbu* y

P : *parameter porositas*

γ : *parameter pembangkit panas*

Pr : *bilangan Prandtl*

T : *suhu atau temperatur*

u : *kecepatan aliran pada sumbu* x

u : *kecepatan aliran pada sumbu* y

x : *koordinat pada parah gerak permukaan*

y : *koordinat pada sumbu normal terhadap gerak permukaan*

α : *diffusi termal*

θ : *suhu non-dimensi*

μ_0 : *viskositas dinamik*

ψ : *fungsi stream*

U_∞ : *kecepatan aliran bebas*

T_∞ : *suhu lingkungan*

q_w : *konstanta fluks panas*

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

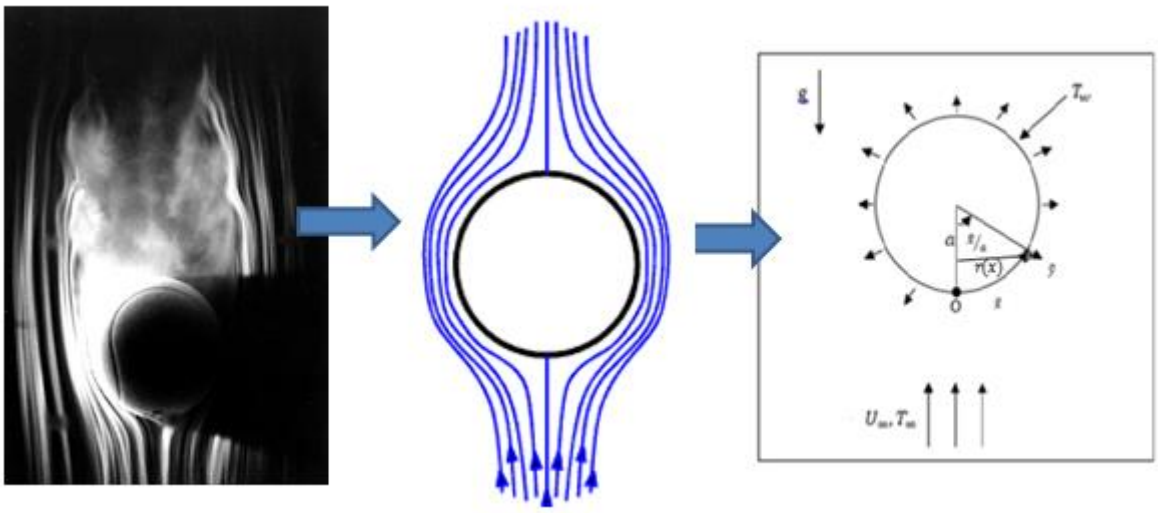
Perpindahan panas dari satu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh pergerakan fluida disebut perpindahan panas konveksi. Adapun konveksi panas secara umum dibagi menjadi dua, yaitu konveksi bebas (*free convection*) dan konveksi paksa (*forces convection*). Konveksi bebas disebabkan oleh gaya apung (*buoyancy forces*) karena perbedaan temperatur pada fluida. Sedangkan konveksi paksa terjadi ketika fluida dipaksa untuk mengalir di atas permukaan oleh sumber eksternal atau internal. Sumber eksternal bekerja pada saat fluida mengalir tanpa batasan dari benda solid atau dapat dikatakan pada saat fluida mengalir di atas permukaan pelat datar. Sedangkan sumber internal bekerja pada saat fluida mengalir di antara benda solid seperti mengalir melalui pipa. Saat aliran gaya pada konveksi bebas menjadi signifikan, proses tersebut disebut sebagai aliran konveksi campuran yang merupakan gabungan antara aliran konveksi bebas dan konveksi paksa.

Salah satu contoh dari kasus aliran konveksi bebas adalah proses pengambilan minyak bumi melalui pengeboran. Alat bor yang digunakan pada bagian ujungnya berbentuk lancip dengan ketahanan gesekan tertentu. Pada saat ujung bor mengenai minyak bumi, terjadilah gaya aliran ke atas yang menyebabkan aliran naik ke atas melewati permukaaan ujung bor tersebut. Sehingga aliran tersebut dapat menyebabkan pembentukan kerak atau lapisan batas pada seluruh permukaan dari ujung alat bor.

Oleh karena itu pada tesis ini, permasalahan yang diangkat adalah pengaruh panas aliran konveksi bebas fluida viskoelastik yang melewati permukaan sebuah bola berpori disekitar lapisan batas atau kerak. Penelitian tentang konveksi bebas atas sebuah bola telah banyak dilakukan karena banyak penerapannya dalam bidang teknik. Amin, dkk (2002) telah meneliti aliran konveksi campuran dari fluida viskos tak mampu-mampat (*incompressible*) yang melewati sebuah bola pejal dengan temperatur konstan dalam kondisi tunak (*steady*). Molla, dkk (2005) meneliti tentang aliran konveksi bebas magnet dinamis pada bola dengan

pembangkitan panas menggunakan metode kotak Keller. Akhter dan Alim (2008) meneliti pengaruh radiasi pada aliran konveksi bebas yang melewati sebuah bola dengan fluks panas permukaan yang seragam. Kasim (2014) meneliti tentang aliran konveksi campuran dalam kondisi tunak (*steady*) dari fluida viskoelastik tak mampu-mampat (*incompressible*) yang melewati permukaan sebuah bola dengan penyelesaian numeric menggunakan metode kotak Keller.

Namun, permasalahan pengaruh panas pada aliran konveksi bebas dalam kondisi tunak (*steady*) dari fluida viskoelastik tak mampu-mampat (*incompressible*) belum banyak yang meneliti. Sehingga dalam penelitian ini, dianalisa pengaruh parameter viskoelastik (K), bilangan Prandtl (P_r), parameter heat generation (γ) dan parameter porositas (P) terhadap kecepatan temperatur (f') dan profil temperatur (θ). Aliran fluida konveksi bebas yang mengalir pada suatu bola berpori membentuk suatu lapisan batas lingkaran seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.1, dengan a merupakan jari – jari bola. Aliran lapisan batas konveksi bebas dalam kondisi tunak (*steady state*) merupakan model fisik dan sistem koordinat yang digunakan untuk mendapatkan solusi secara numerik dari suatu persamaan lapisan batas non-similar dengan menggunakan metode beda hingga pusat.



Sumber: www.roymech.co.uk

Gambar 1.1: Model fisik aliran konveksi bebas yang melalui sebuah bola berpori

Pada Gambar 1.1 koordinat $\bar{x}$ merupakan jarak sepanjang permukaan bola dari titik tetap yang lebih rendah (*stagnation point*), adapun koordinat $\bar{y}$ merupakan jarak normal pada permukaan bola. Sedangkan $\bar{r}(\bar{x})$ merupakan jarak radial dari sumbu simetris hingga permukaan bola yang didefinisikan dengan $\bar{r}(\bar{x}) = a\ sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana pembangunan model matematika dari pengaruh pembangkit panas terhadap aliran konveksi bebas yang melalui permukaan sebuah bola berpori?
2. Bagaimana penyelesaian numerik model matematika dari pengaruh pembangkit panas terhadap aliran konveksi bebas yang melalui permukaan sebuah bola berpori dengan menggunakan skema metode beda hingga pusat ?
3. Apa pengaruh parameter viskoelastik (K), parameter pergerakan seperti bilangan Prandtl (P_r), parameter pembangkit panas (γ), dan parameter porositas (P) pada profil kecepatan (f') dan profil temperatur (θ) dari aliran konveksi bebas yang melalui permukaan sebuah bola berpori ?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

1. Fluida yang digunakan bersifat viskoelastik (*non-Newtonian*).
2. Media yang digunakan berbentuk bola berpori dan dalam kondisi diam.
3. Aliran lapisan batas konveksi bebas bersifat tunak (*steady*) dan tak-mampu mampat (*incompressible*).

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang ada, maka tujuan dari penelitian ini adalah

1. Membangun model matematika dari aliran konveksi bebas fluida viskoelastik yang melalui permukaan sebuah bola berpori.

2. Menganalisa solusi numerik dari model matematika fluida viskoelastik dengan menggunakan metode beda hingga skema pusat.
3. Menganalisa pengaruh parameter viskoelastik (K), parameter pergerakan seperti bilangan Prandtl (P_r), parameter pembangkit panas (γ), dan parameter porositas (P) pada profil kecepatan (f') dan profil temperatur dari aliran konveksi bebas yang melalui permukaan sebuah bola berpori (θ).

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini merupakan salah satu bagian kontribusi dalam pengembangan ilmu Matematika terapan di bidang teknologi dan industri.

1.6 Kontribusi Hasil Penelitian

Kontribusi hasil penelitian ini terhadap pengembangan ilmu di bidang teknologi dan industri adalah pengeboran minyak, industri makanan dan kertas. Hal tersebut disebabkan karena karakteristik dari fluida viskoelastik yang bersifat viskos dan elastik.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada bagian ini diberikan beberapa hasil penelitian yang terdahulu tentang aliran konveksi yang melewati permukaan bola, sebagai berikut :

1. Amin, dkk (2002) : Aliran lapisan batas konveksi campuran di permukaan bola pejal dengan temperatur permukaan yang konstan. Isi penelitian ini adalah aliran konveksi dalam kondisi tunak (*steady*) dan fluida viskos yang tak mampu-mampat (*incompressible*) dengan kondisi temperatur (aliran yang searah dan berlawanan arah) yang konstan. Persamaan – persamaan konservasi yang didapat diselesaikan dengan metode kotak Keller.
2. Nazar, dkk (2010): Aliran lapisan batas konveksi campuran yang melewati sebuah bola pejal dengan pemanasan *Newtonian*. Dalam penelitian ini, terdapat suatu pemanasan *Newtonian* yang mana perpindahan panas dari permukaan adalah sebanding dengan temperatur permukaan lokal. Solusi numerik yang dihasilkan adalah koefisien gesekan kulit, temperatur dinding, profil temperatur dan kecepatan fluida dengan beberapa parameter konveksi campuran (λ), bilangan Prandtl (P_r), dan parameter conjugate (γ).
3. Kasim (2014): Aliran konveksi bebas fluida viskoelastik yang melewati permukaan sebuah bola dengan metode kotak Keller. Dalam penelitian ini, diteliti mengenai aliran konveksi campuran dalam kondisi tunak (*steady*) dari fluida viskoelastik yang tak mampu-mampat (*incompressible*). Persamaan – persamaan konservasi yang dihasilkan ditransformasikan dalam bentuk non-dimensi, kemudian ditransformasikan lagi dalam bentuk non-similar. Persamaan non-similar yang didapatkan kemudian diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode kotak Keller.

Berdasarkan penelitian – penelitian terdahulu tersebut, maka penelitian yang diusulkan adalah pengaruh panas pada aliran konveksi bebas fluida viskoelastik yang melewati permukaan sebuah bola berpori dengan metode beda hingga pusat.

2.2 Fluida

Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser. Fluida terbagi menjadi dua, yaitu cair dan gas. Perbedaan zat cair dan gas adalah zat cair merupakan zat yang tak mampu mampat (*incompressible*) sedangkan gas merupakan zat yang mampu mampat (*compressible*). Kemampatan merupakan perubahan (pengecilan) volume karena adanya perubahan (penambahan) tekanan. Fluida cair tekanan dapat diabaikan dan viskositasnya akan turun lebih cepat bila temperaturnya dinaikkan (Widodo, 2011).

2.3 Tipe Aliran Berdasarkan Kriteria Waktu

Menurut (Widodo, 2011), tipe aliran yang dicirikan berdasarkan perubahan waktu terhadap kecepatan dapat dibagi menjadi dua, yaitu:

1. Aliran Tetap (*Steady Flow*)

   Aliran tetap atau *steady flow*, yaitu aliran dimana kecepatan aliran tidak berubah terhadap waktu. Dalam kondisi ini, berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Aliran Tidak Tetap (*Unsteady State*)

   Aliran tidak tetap atau *unsteady flow*, yaitu aliran dimana kecepatan aliran berubah menurut waktu. Dalam kondisi ini, berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

2.4 Tipe Aliran Berdasarkan Perbandingan Gaya – gaya Inersia Dengan Kekentalan

Menurut (Widodo, 2011), tipe aliran yang dicirikan berdasarkan perbandingan gaya inersia dengan kekentalan dapat dibagi menjadi tiga, yaitu:

1. Aliran Laminar

   Dalam aliran laminar partikel – partikel fluida bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi apabila kecepatan kecil dan atau kekentalan besar. Aliran laminar terjadi bila bilangan Reynolds kurang dari 500 ($Re < 500$).

2. Aliran Transisi

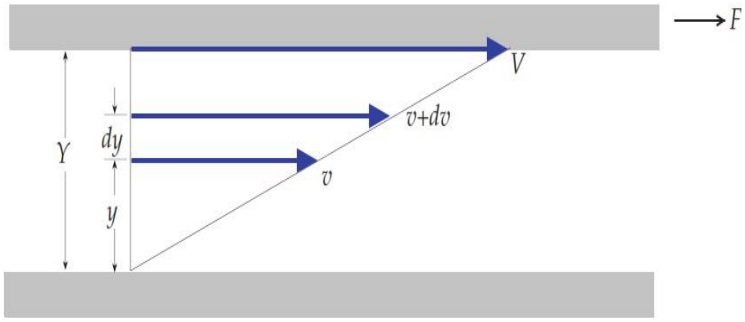
Pengaruh kekentalan adalah sangat besar sehingga meredam gangguan yang dapat menyebabkan aliran turbulen. Kekentalan yang berkurang dan kecepatan aliran yang bertambah maka daya redam terhadap gangguan akan berkurang sampai pada suatu batas tertentu akan menyebabkan terjadinya perubahan laminar ke turbulen. Aliran transisi ini mempunyai bilangan Reynolds antara 500 sampai 12.500 ($500 < R_e < 12.500$).

3. Aliran Turbulen

Pada aliran turbulen gerak partikel – partikel fluida tidak teratur. Aliran ini terjadi bila kecepatan besar dan kekentalan fluida kecil. Aliran turbulen mempunyai bilangan Reynolds lebih dari 12.500 ($R_e > 12.500$).

2.5 Viskositas

Viskositas dari suatu fluida merupakan besaran gesekan internal yang berlawanan arah dengan aliran fluida.



Sumber: www.foundationcoalition.org

Gambar 2.1 : Aliran fluida diantara dua pelat

Gambar 2.1 merupakan ilustrasi aliran fluida diantara dua pelat dengan luas A dan cukup besar sehingga pengaruh tepi diabaikan. Misalkan Y merupakan jarak dua pelat yang terisi dengan fluida. Pelat atas bergerak sejajar dengan pelat bawah dengan kecepatan v dan gaya F. Partikel fluida yang bersinggungan dengan pelat akan mengikutinya. Jika Y atau bahkan v tidak terlalu besar maka kecepatan fluida akan meningkat secara linear dengan jarak dari pelat tersebut. Gaya yang dihasilkan sebanding dengan luas pelat dan gradien kecepatan v/Y, secara matematika dapat dituliskan sebagai berikut.

$$F \propto A\frac{v}{Y} = \eta A\frac{v}{Y} \qquad (2.1)$$

sedangkan tegangan geser (τ) dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\tau \equiv \frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy} \tag{2.2}$$

dengan η merupakan viskositas dari fluida (Streeter, 1988).

2.6 Konveksi Panas

Konveksi panas merupakan proses perpindahan energi dari permukaan ke fluida karena perbedaan temperatur antara permukaan dan fluida. Konveksi panas secara umum dibagi menjadi dua, yaitu:

1. Konveksi bebas atau alamiah (*free convection*)

   Konveksi bebas terjadi ketika sebuah benda ditempatkan dalam suatu fluida yang suhunya lebih tinggi atau lebih rendah daripada benda tersebut. Perbedaan suhu tersebut menyebabkan panas mengalir diantara fluida dan benda serta perubahan kerapatan (*density*) lapisan – lapisan fluida di dekat permukaan. Perbedaan kerapatan menyebabkan fluida yang lebih berat mengalir ke bawah dan fluida yang lebih ringan mengalir ke atas. Gerakan fluida tersebut hanya disebabkan oleh perbedaan kerapatan, diakibatkan oleh gradien suhu. Dalam hal ini, suhu yang lebih tinggi menyebabkan kerapatan semakin kecil, sehingga fluida akan mengalir ke atas yang disebabkan oleh gaya apung (*buoyancy force*). Sedangkan suhu yang lebih kecil menyebabkan kerapatan semakin besar, sehingga fluida akan mengalir ke bawah yang disebabkan oleh gaya tarik gravitasi. Koefisien perpindahan panas pada konveksi alamiah lebih kecil daripada konveksi paksa karena konveksi alamiah tidak disebabkan oleh gaya dari luar.

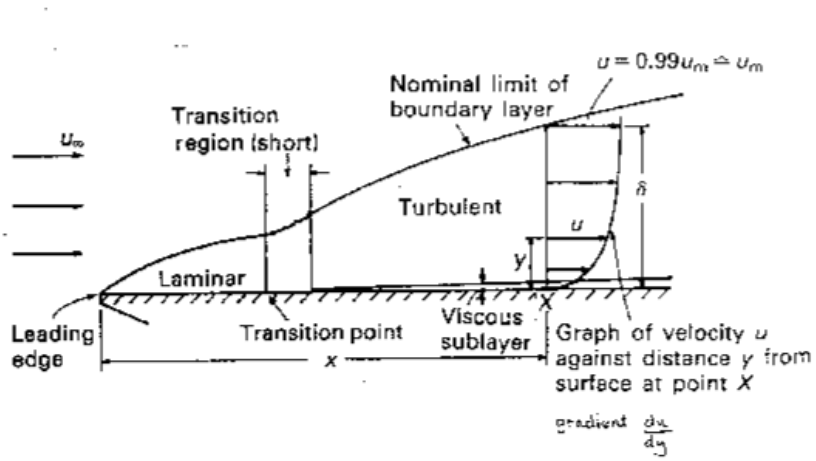
2. Konveksi paksa (*forced convection*)

   Konveksi paksa (adveksi panas) merupakan pergerakan fluida yang disebabkan oleh gaya luar dan gaya apung diabaikan. Konveksi paksa biasanya digunakan untuk meningkatkan kecepatan perubahan panas. Contoh sederhana dari konveksi paksa seperti sistem kerja kipas angin yang mempercepat proses sirkulasi udara panas yang masuk kedalam makanan pada oven.

Perbandingan bilangan Grashof dan Reynolds (G_r/R_e^2) memberikan petunjuk kualitatif tentang pengaruh konveksi bebas maupun konveksi paksa. Dalam hal ini, jika perbandingan bilangan Grashof dan Reynolds mendekati 1 ($G_r/R_e^2 \cong 1$) maka pengaruh konveksi bebas dan konveksi paksa tidak dapat diabaikan.

2.7 Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Lapisan batas adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat tempat fluida mengalir yang dipengaruh oleh viskositas (kekentalan) dan gaya inersia. Lapisan batas pada fluida juga bisa dikatakan lapisan daerah sekitar dari suatu permukaan yang membatasi dimana pengaruh viskositas menjadi signifikan dan profil kecepatan pada aliran karena tegangan geser pada dinding.



Sumber : www.tutorhelpdesk.com

Gambar 2.2 : Lapisan batas pada pelat datar

Ketebalan lapisan batas (δ) merupakan jarak dari dinding ke titik dimana kecepatan sebesar 99% dari kecepatan arus bebas ($u = 0.99u_{mainstream}$), kecepatan di tengah pipa atau sungai. Nilai δ akan meningkat dengan jarak dari titik dimana pada mulanya fluida melewati atas batas (bidang datar). Selain itu, gaya gesek D pada fluida karena tegangan geser τ_0 pada dinding meningkat dari nol pada awal pelat hingga maksimum pada daerah aliran penuh yang bernilai konstan (Sleigh, 2001).

2.8 Fluida Newtonian dan Fluida Non-Newtonian

Fluida Newtonian merupakan fluida yang memiliki kurva tegangan yang linier. Fluida Newtonian tidak mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida, namun hanya bergantung pada tekanan dan temperatur. Viskositas sendiri merupakan suatu konstanta yang berkaitan dengan besar tegangan geser dan gradien kecepatan seperti pada persamaan berikut.

$$\tau = \mu \frac{du}{dx} \tag{2.3}$$

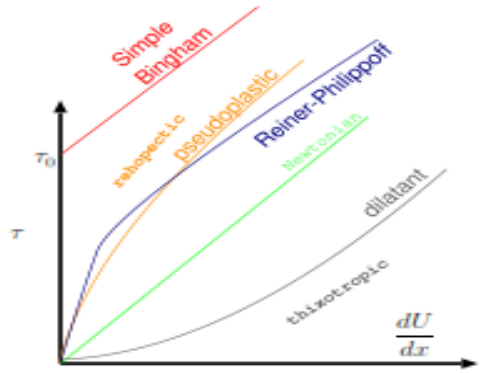
dengan

τ = tegangan geser fluida

μ = viskositas fluida

$\frac{du}{dx}$ = gradien kecepatan yang arahnya tegak lurus dengan arah kecepatan

Fluida Non-Newtonian merupakan fluida yang mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini menyebabkan fluida Non-Newtonian tidak memiliki viskositas yang konstan(Genick, 2013).



Sumber: www.hindawi.com

Gambar 2.3: Klasifikasi Fluida Non-Newtonian

2.9 Persamaan Kontinuitas, Momentum, dan Energi

Dalam mekanika fluida terdapat beberapa prinsip – prinsip dasar fisika, yaitu kekekalan massa (persamaan kontinuitas), hukum kedua Newton tentang gerak (persamaan momentum), serta hukum pertama dan kedua termodinamika

(persamaan energi). Ketiga prinsip – prinsip tersebut dijelaskan sebagai berikut (Munson, 2003).

2.9.1 Persamaan Kontinuitas

Sebuah sistem merupakan sebuah kumpulan dari isi yang tidak berubah, maka prinsip kekekalan massa untuk sebuah sistem dinyatakan secara sederhana sebagai berikut.

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0 \tag{2.4}$$

dengan massa sistem M_{sys} dinyatakan sebagai berikut.

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho \, d\forall \tag{2.5}$$

Berdasarkan teorema *transport Reynolds* untuk sebuah volume kendali yang tetap dan tidak berdeformasi, yaitu :

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho b \, d\forall + \int_{CS} \rho b V . \hat{n} \, dA \tag{2.6}$$

dengan $B_{sys} = M_{sys}$ dan $b = 1$, maka didapatkan persamaan sebagai berikut.

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, d\forall + \int_{CS} \rho V . \hat{n} \, dA \tag{2.7}$$

Atau dengan kata lain:

Kecepatan perubahan terhadap waktu dari massa sistem yang berimpit	=	*Kecepatan perubahan terhadap waktu dari massa kandungan volume kendali yang berimpit*	+	*Kecepatan aliran netto dari massa melalui permukaan kendali*

Integran $V . \hat{n} \, dA$, dalam integral kecepatan aliran massa menyatakan perkalian dari komponen kecepatan V yang tegak lurus terhadap suatu bagian

kecil permukaan kontrol dan bidang diferensial dA. Dalam hal ini integran $V.\hat{n}\,dA$ adalah kecepatan aliran volume melalui dA, sedangkan integran $\rho V.\hat{n}\,dA$ adalah kecepatan aliran massa melalui dA. Tanda perkalian titik $V.\hat{n}$ adalah "+" untuk aliran keluar dari volume kendali dan "-" untuk aliran kedalam volume kendali. Jumlah seluruh kuantitas diferensial $\rho V.\hat{n}\,dA$ pada seluruh permukaan kontrol dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\int_{CS} \rho V.\hat{n}\,dA = \sum \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} \tag{2.8}$$

dengan $\dot{m}$ adalah kecepatan aliran massa (slug/s atau kg/s). Berdasarkan persamaan (2.4), (2.5), dan (2.7) untuk volume kendali yang tetap dan tidak berdeformasi, maka diperoleh suatu persamaan kontinuitas sebagai berikut.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho\, d\forall + \int_{CS} \rho V.\hat{n}\,dA = 0 \tag{2.9}$$

Karena dalam penelitian ini aliran lapisan batas konveksi bebas bersifat tunak (*steady*) yang artinya tidak melibatkan variable waktu t, maka persamaan (2.9) menjadi :

$$\int_{CS} \rho V.\hat{n}\,dA = 0 \tag{2.10}$$

2.9.2 Persamaan Momentum

Momentum merupakan $massa \times keceptan$ yang dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$p_{sys} = M_{sys}V \tag{2.11}$$

dengan M_{sys} adalah massa sistem dan V adalah kecepatan. Berdasarkan persamaan (2.5), (2.6), dan (2.11) dengan $B_{sys} = p_{sys}$ dan $b = 1$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys} V\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} V\rho\, d\forall + \int_{CS} V\rho V.\hat{n}\, dA \qquad (2.12)$$

Atau dengan kata lain :

Kecepatan perubahan terhadap waktu dari momentum sistem sistem linier	=	*Kecepatan perubahan terhadap waktu dari momentum linier kandungan volume kendali*	+	*Kecepatan aliran netto dari momentum linier melalui permukaan kendali*

Berdasarkan hukum kedua Newton dari gerak suatu sistem yang dinyatakan sebagai berikut.

Kecepatan perubahan terhadap waktu dari momentum linier sistem	=	*Jumlah dari gaya – gaya luar yang bekerja pada sistem*

atau

$$\frac{D}{Dt}\, p_{sys} = \sum F_{sys}$$

$$\frac{D}{Dt} M_{sys} V = \sum F_{sys}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys} V\rho\, d\forall = \sum F_{sys}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} V\rho\, d\forall + \int_{CS} V\rho V.\hat{n}\, dA = \sum F_{sys} \qquad (2.13)$$

Sebuah volume kendali yang berimpit dengan sebuah sistem, gaya – gaya yang bekerja pada sistem tersebut dan gaya – gaya yang bekerja pada kandungan dari volume kendali yang berimpit akan menjadi identik. Dengan kata lain bahwa :

$$\sum F_{sys} = \sum F_{kandungan\ volume\ kendali\ yang\ berimpit} \quad (2.14)$$

Berdasarkan persamaan (2.13) dan (2.14), diperoleh persamaan momentum untuk volume kendali yang tetap dan tidak berderformasi sebagai berikut.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} V\rho\ d\forall + \int_{CS} V\rho V.\hat{n}\ dA = \sum F_{kandungan\ volume\ kendali} \quad (2.15)$$

Karena dalam penelitian ini aliran lapisan batas konveksi bebas bersifat tunak (*steady*) yang artinya tidak melibatkan variable waktu t, maka persamaan (2.15) menjadi:

$$\int_{CS} V\rho V.\hat{n}\ dA = \sum F_{kandungan\ volume\ kendali} \quad (2.16)$$

2.9.3 Persamaan Energi

Hukum pertama termodinamika untuk sebuah sistem dinyatakan sebagai berikut.

Kecepatan perubahan terhadap waktu dari energi tersimpan total dari suatu sistem	=	*Kecepatan netto pertambahan perpindahan energi dari kalor ke dalam sistem*	+	*Kecepatan netto pertambahan energi dari kerja yang dipindahkan ke dalam sistem*

atau dengan kata lain :

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys} e\rho\, d\forall = \left(\sum \dot{Q}_{in} - \sum \dot{Q}_{out}\right)_{sys} + \left(\sum \dot{W}_{in} - \sum \dot{W}_{out}\right)_{sys}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys} e\rho\, d\forall = \left(\dot{Q}_{in\ netto} + \dot{W}_{in\ netto}\right)_{sys} \tag{2.17}$$

Energi tersimpan total per satuan massa dari setiap partikel di dalam sistem (e), terkait dengan energi dalam per satuan massa ($\breve{u}$), energi kinetik per satuan massa ($V^2/2$), dan energi potensial per satuan massa (gz), menurut persamaan.

$$e = \breve{u} + \frac{V^2}{2} + gz \tag{2.18}$$

Volume kendali untuk hukum pertama termodinamika yang berimpit dengan sebuah sistem, diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\left(\dot{Q}_{in\ netto} + \dot{W}_{in\ netto}\right)_{sys} = \left(\dot{Q}_{in\ netto} + \dot{W}_{in\ netto}\right)_{\substack{volume\ kontrol \\ berimpit}} \tag{2.19}$$

Berdasarkan teorema transport Reynolds dengan $b = e$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys} e\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho\, d\forall + \int_{CS} e\rho V.\hat{n}\, dA \tag{2.20}$$

atau

Kecepatan perubahan terhadap waktu dari dari energi tersimpan total dari suatu system	=	*Kecepatan perubahan terhadap waktu dari energi tersimpan total pada kandungan volume kendali*	+	*Kecepatan aliran netto dari energi tersimpan total keluar volume kendali melalui permukaan kendali*

Berdasarkan persamaan (2.17), (2.19), dan (2.20), maka diperoleh volume kendali untuk hukum pertama termodinamika sebagai berikut.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho \, d\forall + \int_{CS} e\rho V.\hat{n} \, dA = \left(\dot{Q}_{in\,netto} + \dot{W}_{in\,netto}\right)_{CV} \qquad (2.21)$$

Karena dalam penelitian ini aliran lapisan batas konveksi bebas bersifat tunak (*steady*) yang artinya tidak melibatkan variable waktu t, maka persamaan (2.21) menjadi:

$$\int_{CS} e\rho V.\hat{n} \, dA = \left(\dot{Q}_{in\,netto} + \dot{W}_{in\,netto}\right)_{CV} \qquad (2.22)$$

2.10 Bilangan Non-Dimensi pada Aliran Perpindahan Panas

Pada aliran perpindahan panas terdapat beberapa bilangan non-dimensi yang terkait dengan kondisi aliran, viskositas, dan suhu. Secara umum, konveksi perpindahan panas meliputi: panjang (L), kecepatan (U), viskositas (μ), dan temperatur yang berdasarkan pada karakteristik perbedaan temperatur antara fluida dan benda (Φ), (Favre, 2009). Bilangan non-dimensi Grashof dan Prandtl dijelaskan sebagai berikut.

2.10.1 Bilangan Non-Dimensi Grashof (G_r)

Bilangan Grashof merupakan perbandingan gaya apung terhadap gaya viskos dalam aliran fluida konveksi bebas atau alamiah. Secara matematik bilangan Grashof dinyatakan sebagai berikut.

$$G_r = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\mu} \qquad (2.23)$$

dengan g adalah gaya gravitasi, β adalah koefisien muai panas, L adalah panjang karakteristik (tergantung bentuk media), μ adalah viskositas, T_s adalah temperatur permukaan benda, dan T_∞ adalah temperatur lingkungan (Kreith, 1994).

2.10.2 Bilangan Non-Dimensi Prandtl (P_r)

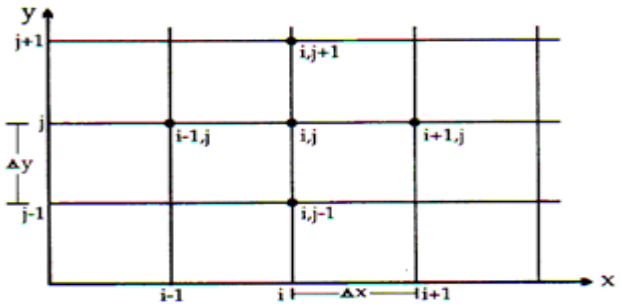
Bilangan Prandtl merupakan perbandingan antara viskositas kinematika terhadap difusivitas termal fluida. Viskositas kinematika (ν) atau (μ/ρ) disebut sebagai difusivitas molekular momentum karena merupakan ukuran kecepatan perpindahan momentum antara molekul – molekul. Difusivitas termal fluida (α) atau ($\rho k c_p$) disebut sebagai difusivitas molekular panas karena berkaitan dengan ukuran perbandingan antara penerusan panas dan kapasitas penyimpanan energi molekul – molekul. Secara matematik bilangan Prandtl dinyatakan sebagai berikut.

$$P_r = \frac{Viskositas\ Kinematika}{Difusivitas\ Termal} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{\rho c_p}} = \frac{c_p \mu}{k} \tag{2.24}$$

dengan μ adalah viskositas fluida, k adalah konduktivitas panas fluida, dan c_p adalah panas jenis pada tekanan konstan (Kreith, 1994).

2.11 Metode Beda Hingga Skema Pusat

Gambar 2.4 adalah jaringan titik hitungan pada bidang *x*-*y* yang dapat dibagi menjadi sejumlah pias segi empat dengan sisi Δx dan Δy. Panjang pias dalam arah *x* adalah Δx dan dalam arah *y* adalah Δy. Dengan menggunakan jaringan titik hitungan pada Gambar 2.4, semua diferensial ditulis pada titik hitungan (*i*,*j*), bentuk turunan pertama dan kedua didekati oleh:



Gambar 2.4: Jaringan titik hitungan dalam bidang *x*-*y*

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.24}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{2.25}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{2.26}$$

Bentuk Persamaan (2.24), (2.25) dan (2.26) disebut dengan diferensial maju, mundur, dan terpusat. Adapun untuk skema beda hingga pusat turunan kedua, turunan ketiga, dan turunan keempat sebagai berikut:

1. Skema beda hingga pusat turunan kedua:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{2.27}$$

2. Skema beda hingga pusat untuk turunan ketiga:

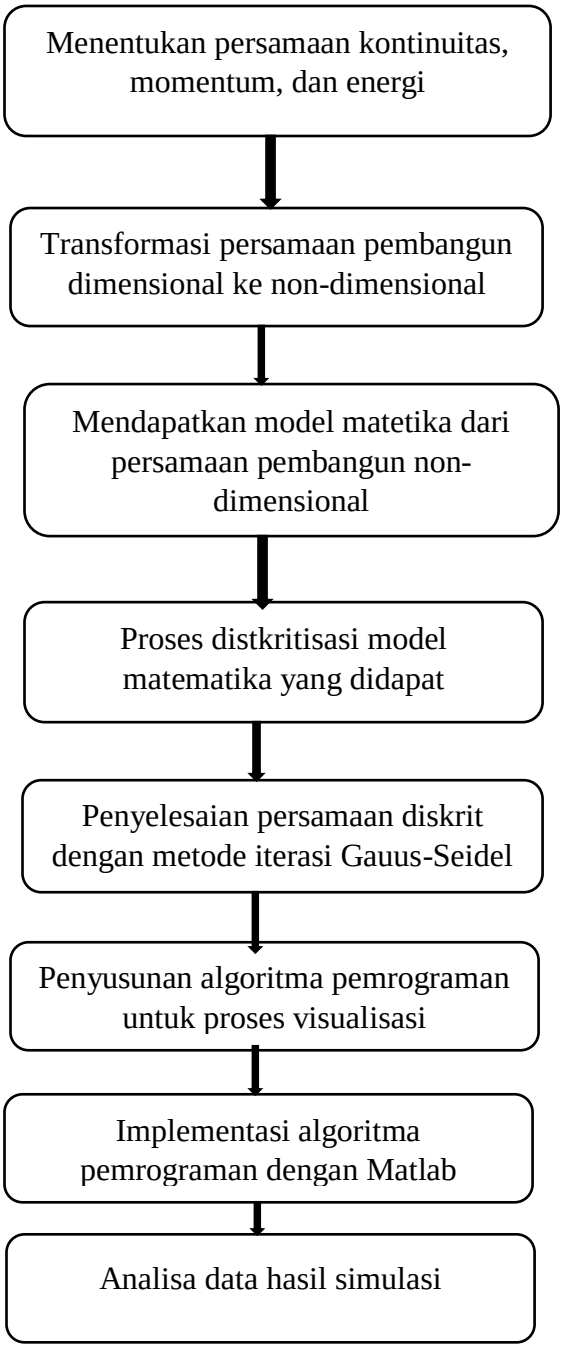
$$f'''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} \tag{2.28}$$

3. Skema beda hingga pusat untuk turunan keempat:

$$f''''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} \tag{2.29}$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Untuk membangun sebuah model matematika dari aliran konveksi bebas fluida viskoelastik yang melewati permukaan sebuah bola berpori diperlukan persamaan konservasi massa, momentum, dan energi. Sehingga untuk menjawab rumusan masalah pada penelitian ini, maka langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:



Adapun penjelasan dari bagan alir di atas, dijelaskan sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan kontinuitas, momentum, dan energi dari kasus yang dikaji dengan menggunakan dasar hukum kekekalan massa, hukum kekalan momentum, dan hukum Termodinamika I. Persamaan yang didapat pada tahap ini disebut persamaan pembangun dimensional.
2. Membentuk persamaan pembangun dimensional ke dalam bentuk persamaan pembangun non-dimensional menggunakan parameter-parameter non-dimensional yang telah didefinisikan. Tahap ini bertujuan untuk memudahkan dalam memasukkan nilai-nilai parameter saat proses komputasi.
3. Membentuk persamaan pembangun non-dimensional menjadi persamaan pembangun similar menggunakan funggsi alur (*stream function)*. Tujuan dari tahap ini adalah untuk mengelompokkan variabel-variabel yang sejenis, dalam hal ini variabel momentum u dan v menjadi satu variabel f. Hasil dari tahap ini berupa model matematika dari pengaruh pembangkit panas terhadap aliran konveksi bebas yang melalui permukaan sebuah bola berpori.
4. Mendiskritisasi model matematika dari pengaruh pembangkit panas terhadap aliran konveksi bebas yang melalui permukaan sebuah bola berpori menggunakan metode beda hingga eksplisit skema pusat.
5. Menyelesaikan persamaan hasil diskritasi menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel.
6. Menyusun algoritma pemrograman dari hasil diskritisasi sebelum dilakukan implementasi program pada *software* Matlab. Algoritma ini meliputi algoritma untuk mendapatkan nilai interval parameter viskoelastik K, bilangan Prandtl Pr, pembangkit panas γ, dan porositas P serta algoritma untuk mendapatkan profil kecepatan dan temperatur fluida akibat pengaruh parameter viskoelastik K, bilangan Prandtl Pr, pembangkit panas γ, dan porositas P.
7. Implementasi algoritma pemrograman menggunakan *software* Matlab untuk mendapatkan data profil kecepatan dan temperatur fluida akibat pengaruh

parameter viskoelastik K, bilangan Prandtl Pr, pembangkit panas γ, dan porositas P.

8. Menganalisa hasil simulasi dari implementasi program yang kaitannya dengan pengaruh parameter viskoelastik K, bilangan Prandtl Pr, pembangkit panas γ, dan porositas P terhadap aliran konveksi bebas yang melewati sebuah bola berpori.

Adapun tempat penelitian ini dilakukan di laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

BAB IV
MODEL MATEMATIKA

4.1 Model Aliran Konveksi Bebas

Pada subbab ini menjelaskan tentang suatu pergerakan fluida viskoelastik secara vertikal yang melewati permukaan sebuah bola berpori. Pada penelitian ini, pengaruh gaya apung (*buoyancy forces*) dari konveksi bebas dikarenakan terdapat perbedaan temperatur antara fluida dengan permukaan bola. Lapisan batas yang terbentuk dari aliran tersebut, kemudian dianalisa profil temperatur fluida, temperature dinding permukaan bola, dan profil kecepatan fluida. Temperatur fluida merupakan faktor utama yang mempengaruhi ketebalan suatu lapisan batas dan apabila semakin tinggi suhunya mengakibatkan lapisan batas semakin kecil. Sehingga kondisi tersebut dapat mengakibatkan profil kecepatan fluida semakin cepat. Sebaliknya, apabila semakin rendah temperatur disekitar permukaan bola, maka lapisan batas semakin tebal, sehingga kondisi tersebut mengakibatkan profil kecepatan fluida bergerak lambat.

Persamaan pembangun yang terdiri dari persamaan konservasi massa, momentum, dan energi diformulasikan dari persamaan Navier-Stokes. Ketiga persamaan tersebut dengan kondisi aliran bersifat tunak (*steady state*) dan tak-mampu mampat (*incompressible*). Selanjutnya, ketiga persamaan tersebut ditransformasikan kedalam bentuk non-dimensi dengan menggunakan *stream function* ψ.

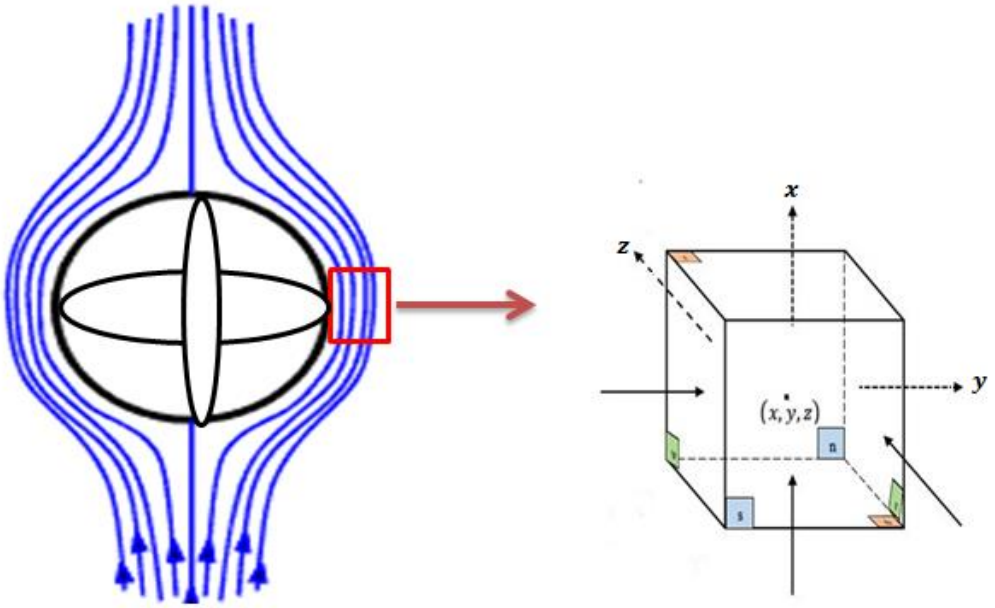
Pada penelitian ini, diasumsikan bahwa aliran konveksi bebas dari fluida viskoelastik yang melewati permukaan sebuah bola berpori hanya pada arah lateral dan vertikal seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.1. Simbol U_∞ merupakan kecepatan fluida viskoelastik dan T_∞ merupakan temperatur fluida viskoelastik serta O merupakan titik stagnasi, dengan kondisi saat $\bar{x} = 0$ dan $\bar{y} = 0$. Sehingga kecepatan fluida U_∞ pada permukaan sebuah bola berpori saat kondisi tersebut adalah $\bar{u} = 0$ dan $\bar{v} = 0$. Pada saat posisi dan waktu tertentu kecepatan aliran fluida viskoelastik di sepanjang permukaan sebuah bola berpori membentuk sudut sebesar $(\bar{x}/a)$ dan $\bar{r}$, dengan $\bar{r}$ merupakan jarak dari sumbu simetris terhadap permukaan sebuah bola berpori. Gaya gesek antara permukaan

sebuah bola berpori dengan aliran fluida viskoelastik dapat menyebabkan terjadinya perubahan nilai energi yang semakin berkurang. Selanjutnya, penurunan persamaan konservasi massa, momentum, dan energi dijelaskan pada pembahasan subbab selanjutnya.

4.2 Persamaan Konservasi Massa

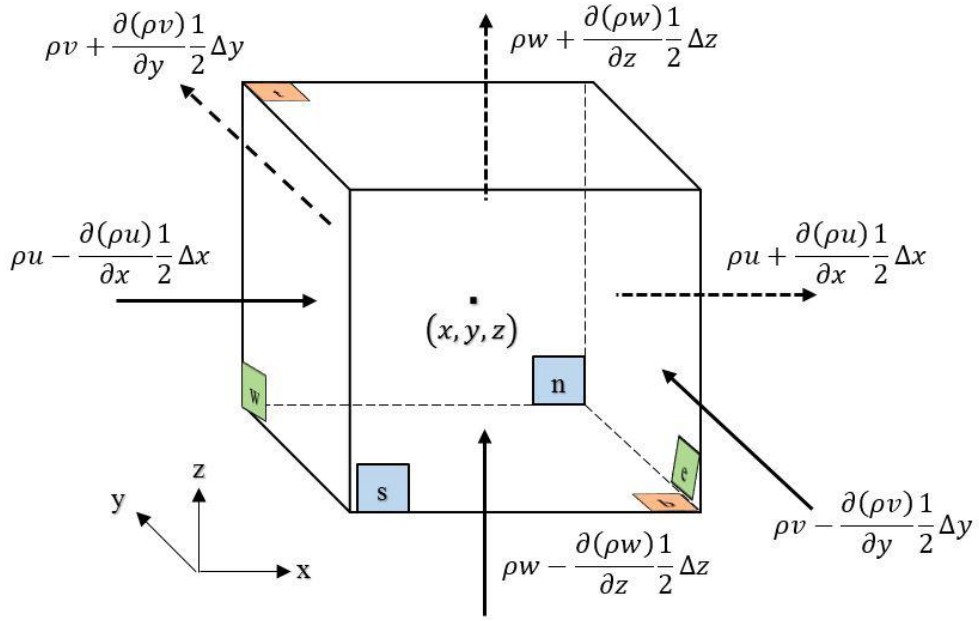
Jika pada Persamaan (2.10) digambarkan arah fluks massanya, maka Persamaan (2.10) dapat ditulis menjadi:

$$\rho VA|_{out} - \rho VA|_{in} = 0 \tag{4.1}$$



Gambar 4.1: Volume kendali pada aliran yang melalui bola berpori.

Gambar 4.1 merupakan volume kendali jika diperbesar dan digambarkan arah fluks massanya. Dengan menggunakan Persaamaan (4.1), massa pada permukaan yang dilalui fluida saat masuk (W) dan massa pada permukaan yang dilalui fluida saat keluar (E), yang berjarak $\frac{1}{2}\Delta x$ dari pusat elemen dinyatakan berturut-turut sebagai $\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}\Delta x$ dan $\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}\Delta x$. Dengan cara yang sama diperoleh suatu persamaan permukaan N, S, T dan B seperti yang tampak pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2: Volume kendali pada aliran yang melalui bola berpori beserta fluks massanya

Berdasarkan Persamaan (4.1), maka diperoleh suatu persamaan berikut:

$$\rho(u_e - u_w)\Delta y\Delta z + \rho(v_n - v_s)\Delta x\Delta z + \rho(w_b - w_t)\Delta x\Delta y = 0 \quad (4.2)$$

Dengan membagi Persamaan (4.2) oleh $\Delta x\Delta y\Delta z$, maka didapat :

$$\frac{\rho(u_e - u_w)}{\Delta x} + \frac{\rho(v_n - v_s)}{\Delta y} + \frac{\rho(w_b - w_t)}{\Delta z} = 0 \quad (4.3)$$

Karena ρ tak-mampu mampat (*incompressible*), maka diperoleh:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

Karena dalam penelitian ini yang dikaji hanya pada arah lateral dan vertical, maka Persamaan (4.4) dapat dituliskan menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.5)$$

Atau dapat dinyatakan dalam bentuk notasi vektor sebagai berikut:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.6)$$

Karena dalam penelitian ini, media aliran berupa sebuah bola, maka Persamaan (4.6) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{r}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\bar{r}\bar{v}) = 0 \quad (4.7)$$

4.3 Persamaan Konservasi Momentum

Berdasarkan Persamaan (2.16) dan Gambar 4.1, maka persamaan (2.16) dapat ditulis menjadi:

$$(\rho VA|_{out} - \rho VA|_{in})V = \sum F \tag{4.8}$$

Jika Persamaan (4.8) diuraikan arah fluks momentumnya, maka didapat:

$$\rho(u_e - u_w)\Delta y\Delta z\, V + \rho(v_n - v_s)\Delta x\Delta z\, V + \rho(w_b - w_t)\Delta x\Delta y\, V = \sum F \tag{4.9}$$

Jika kedua ruas Persamaan (4.9) dibagi oleh $\Delta x\Delta y\Delta z$, maka didapat:

$$\frac{\rho(u_e - u_w)}{\Delta x}V + \frac{\rho(v_n - v_s)}{\Delta y}V + \frac{\rho(w_b - w_t)}{\Delta z}V = \frac{\sum F}{\Delta x\Delta y\Delta z} \tag{4.10}$$

Karena ρ tak-mampu mampat (*incompressible*), maka persamaan (4.10) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)V = \frac{\sum F}{\Delta x\Delta y\Delta z} \tag{4.11}$$

Karena dalam penelitian ini hanya pada arah lateral dan vertikal, maka Persamaan (4.11) menjadi:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)V = \frac{\sum F}{\Delta x\Delta y\Delta z} \tag{4.12}$$

Selanjutnya dalam penelitian ini terdapat tiga jenis gaya yang terlibat, yaitu gaya viskositas, gaya tekan, dan gaya gravitasi bumi. Sehingga persamaan (4.12) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)V = \frac{F_{viscous} + F_{press} + F_{gravitasi}}{\Delta x\Delta y\Delta z} \tag{4.13}$$

Disisi lain, $\nabla.VV = V.(\nabla V) + V(\nabla.V)$. Berdasarkan Persamaan (4.6), maka $\nabla.VV = V.(\nabla V) + V(\nabla.V) = V.(\nabla \mathrm{V}) + 0 = \mathrm{V}.(\nabla \mathrm{V})$. Sehingga persamaan (4.13) dapat ditulis menjadi:

$$\rho\nabla.VV = \frac{F_{viscous} + F_{press} + F_{gravitasi}}{\Delta x\Delta y\Delta z}$$

$$\rho V.(\nabla \mathrm{V}) = \frac{F_{viscous} + F_{press} + F_{gravitasi}}{\Delta x\Delta y\Delta z} \tag{4.14}$$

Dengan menggunakan Persamaan (4.14), persamaan momentum pada arah x dan arah y dapat diperoleh.

a) Momentum pada arah x

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\left[\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\,\Delta x\right)(\Delta y\Delta z)+\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,\Delta y\right)(\Delta x\Delta z)-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,\Delta x\right)(\Delta y\Delta z)+F_x(\Delta x\Delta y\Delta z)\right]}{\Delta x\Delta y\Delta z}$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+F_x \qquad (4.15)$$

b) Momentum pada arah y

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\left[\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\,\Delta x\right)(\Delta y\Delta z)+\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}\,\Delta y\right)(\Delta x\Delta z)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\,\Delta y\right)(\Delta x\Delta z)+F_y(\Delta x\Delta y\Delta z)\right]}{\Delta x\Delta y\Delta z}$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+F_y \qquad (4.16)$$

Pada penelitian ini jenis fluida yang dikaji adalah fluida jenis Walter-B yang mempunyai tensor regangan sebagai berikut:

$$\tau=2\mu_0 d-2k_0\hat{d} \qquad (4.17)$$

dengan $\hat{d}=(V.\nabla)d-d.(\nabla V)^T-(\nabla V).d$, sehingga persamaan (4.17) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\tau=2\mu_0 d-2k_0\{(V.\nabla)d-d.(\nabla V)^T-(\nabla V).d\} \qquad (4.18)$$

Kondisi tunak (*steady state*) dari tensor dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\tau_{ij}=2\mu_0 d_{ij}-2k_0\left\{(V.\nabla)d_{ij}-\frac{\partial v_j}{\partial x_m}\,d_{im}-\frac{\partial v_i}{\partial x_m}\,d_{mj}\right\} \qquad (4.19)$$

dengan $d_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right]$.

Dengan menggunakan Persamaaan (4.19), maka didapatkan persamaaan momentum pada arah x sebagai berikut:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)- \\ 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\left(3\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)- \\ \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \end{array}\right\}+F_x \qquad (4.20)$$

Dan persamaan momentum pada arah y sebagai berikut:

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right)- \\ \frac{\partial v}{\partial y}\left(3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+ \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)-4\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \end{array}\right\}+F_y \qquad (4.21)$$

Adapun langkah-langkah untuk mendapatkan $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yy}, \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}$ dan $\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$ terdapat pada Lampiran 1. Adapun uraian untuk mendapatkan Persamaaan (4.20) dan (4.21) masing-masing dijelaskan pada Lampiran 2 dan Lampiran 3.

Menurut Ahmed, dkk (2012) permasalahan aliran fluida yang dipengaruhi oleh medan magnet (MHD) dan menurut hukum Darcy, gaya yang bekerja pada aliran fluida yang melewati benda berpori, didefinisakan oleh:

$$F=\rho g+J\times B+\frac{\mu_0}{K^*}V \qquad (4.22)$$

dengan F = gaya total,

ρ = densitas fluida,

g = gaya gravitasi bumi,

B = gaya magnet,

J = densitas arus listrik,

μ_0 = viskositas dinamik,

K^* = permeabilitas benda,

V = kecepatan fluida.

Karena pada penelitian ini fluida yang digunakan tidak mengandung magnet, maka Persamaan (4.22) dapat ditulis menjadi:

$$F = \rho g + \frac{\mu_0}{K^*} V$$

$$F = \rho g + \frac{\mu_0}{K^*}(-u, -v, 0) \quad (4.23)$$

Secara umum gaya gravitasi di ruang dua dimensi didefinikan $g = (-g_x, -g_y, 0)$. Gaya gravitasi bernilai negative, sebab aliran fluida yang melewati bola berpori melawan arah gravitasi. Sehingga Persamaan (4.23) menjadi:

$$F = \rho(-g_x, -g_y, 0) + \frac{\mu_0}{K^*}(-u, -v, 0) \quad (4.24)$$

Selanjutnya Persamaan (4.24) disubtitusikan ke Persamaan (4.20) dan (4.21) untuk mendapatkan persamaan momentum pada arah x dan y, didapat persamaan momentum pada arah x:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{k_0}{\rho}\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right) + v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) - \\ 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(3\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \end{array}\right\} - g_x - \frac{\mu_0}{\rho K^*}u \quad (4.25)$$

dan persamaan momentum pada arah y:

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{k_0}{\rho}\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}\right) + v\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right) - \\ \frac{\partial v}{\partial y}\left(3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) - 4\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{array}\right\} - g_y - \frac{\mu_0}{\rho K^*}v \quad (4.26)$$

Persamaan (4.25) dan (4.26) kemudian direduksi dengan teori lapisan batas, karena terlalu rumit untuk diselesaikan. Menurut teori Prandtl, persamaan pembangun dapat disederhanakan untuk menjadi kumpulan persamaan pendekatan atau disebut dengan persamaan lapisan batas (Bejan, 2004). Persamaan momentum lapisan batas diperoleh dengan menyederhanakan order magnitud untuk tiap suku dengan mengunakan teori lapisan batas (Ozisik, 1985). Persamaan (4.25) dan (4.26) diukur ke dalam bentuk unit 1 dan Δ sebagai berikut:

$$u \sim 1, x \sim 1, v \sim \Delta, y \sim \Delta, \frac{k_0}{\rho} \sim \Delta^2, \frac{\mu_0}{\rho} \sim \Delta^2, g \sim 1, \sigma \sim \frac{1}{\Delta^2}, B_0^2 \sim \Delta^2, K^* \sim \Delta^2$$

Hasil perhitungan dari proses order magnitude menyebabkan (4.26) tereduksi keseluruhan. Sehingga hanya menyisakan persamaan momentum pada arah x:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{k_0}{\rho}\left\{u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\right\}- g_x-\frac{\nu}{K^*}u \tag{4.27}$$

dengan $\nu=\frac{\mu_0}{\rho}$ viskositas kinematik.

Adapun perhitungan dari proses order magnitude untuk persamaan momentum pada arah x dan y dijelaskan pada Lampiran 4.

Pada penelitian ini, ada pengaruh aliran konvektif, maka tekanan p pada Persamaan (4.27) adalah kombinasi dari tekanan hidrostatik p_h dan tekanan dinamik p_d. Dengan demikian tekanan p dapat ditulis sebagai berikut:

$$p=p_h+p_d \tag{4.28}$$

Karena p_h merupakan tekanan yang berasal dari fluida disekitar bola dengan medan gravitasi diberikan sebagai berikut:

$$\nabla p_h=\rho_\infty g_x \tag{4.29}$$

dengan ρ_∞ merupakan densitas dari fluida disekitar bola. Karena gravitasi bergerak ke bawah sedangkan sumbu x bergerak ke atas, maka didapat gradient dari tekanan sebagai berikut:

$$\frac{\partial p_h}{\partial x}=-\rho_\infty g_x \tag{4.30}$$

Sehingga Persamaan (4.28) apabila diturunkan terhadap x didapat:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial p_h}{\partial x}-\frac{\partial p_d}{\partial x}=-\frac{\partial p_d}{\partial x}+\rho_\infty g_x \tag{4.31}$$

Apabila Persamaan (4.31) disubtitusikan kedalam Persamaan (4.27), diperoleh :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_d}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{k_0}{\rho}\left\{u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\right\}+$$

$$g_x \frac{1}{\rho}(\rho_\infty - \rho) - \frac{\nu}{K^*}u \tag{4.32}$$

Menurut pendekatan Boussnesq semua pengaruh variabel untuk densitas dapat dihilangkan. Pendekatan ini bertujuan untuk mendekati perbedaan densitas yang menyebabkan aliran terjadi pada interaksi antara gradient tekanan hidrostatis dengan *gravitional body force*. Nilai maksimum $(T - T_\infty)$ diasumsikan kecil dan penjabaran deret Taylor didefinisikan sebagai berikut (Leal,1992).

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2 \tag{4.33}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk lain :

$$\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} = \beta(T - T_\infty) \tag{4.34}$$

dan percepatan gravitasi pada aliran sumbu x didefinisikan sebagai berikut (Nazar, 2003).

$$g_x = g sin\left(\frac{x}{a}\right) \tag{4.35}$$

dengan a merupakan jari-jari bola. Kemudian Persamaan (4.35) disubtitusikan ke Persamaan (4.32) diperoleh:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_d}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$-\frac{k_0}{\rho}\left\{u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right) + v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\right\}$$
$$+ g\beta(T - T_\infty) sin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\nu}{K^*}u \tag{4.36}$$

Karena tekanan dinamik diasumsikan sangat kecil, akibatnya $\frac{\partial p_d}{\partial x} = 0$. Sehingga didapatkan suatu persamaan momentum dari aliran konveksi bebas melalui bola sebagai berikut:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{k_0}{\rho}\left\{u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right) + v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\right\}$$
$$+ g\beta(T - T_\infty) sin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\nu}{K^*}u \tag{4.37}$$

Persamaan Konservasi Energi

Untuk mendapatkan persamaan energi dari kasus ini, maka dimulai dari Persamaan (2.22) sebagai berikut.

$$\int_{CS} \rho V.\hat{n}\, dA\, e = \left(\dot{Q}_{in\ netto} + \dot{W}_{in\ netto}\right)_{CV}$$

Karena jenis fluida tak-mampu mampat, maka tidak ada perubahan volume. Sehingga tidak ada usaha yang bekerja pada sistem, artinya $\dot{W}_{in\ netto} = 0$. Oleh karena itu Persamaan (2.22) dapat ditulis menjadi:

$$\int_{CS} \rho V.\hat{n}\, dA\, e = \dot{Q}_{in\ netto} \tag{4.38}$$

Ruas kiri pada Persamaan (4.38) merupakan energi total persatuan massa, sedangkan pada ruas kanan terdiri konduksi panas dan pembangkit panas. Secara matematik dapat ditulis sebagai berikut:

$$\rho\big(\nabla.(Ve)\big) = \nabla.(k\nabla T) + \dot{q} \tag{4.39}$$

dengan $\dot{q} = \begin{cases} Q_0(T - T_\infty), & T \geq T_\infty \\ 0 & T < T_\infty \end{cases}$,

dan $\nabla.Ve = V.(\nabla e) + e(\nabla.V)$, berdasarkan persamaan kontinuitas, $\nabla.V = 0$, sehingga $\nabla.Ve = V.(\nabla e) + e(\nabla.V) = V.(\nabla \mathrm{e}) + 0 = \mathrm{V}.(\nabla \mathrm{e})$. Sehingga Persamaan (4.39) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\rho(V.(\nabla \mathrm{e})) = \nabla.(k\nabla T) + Q_0(T - T_\infty) \tag{4.40}$$

Disisi lain hubungan antara energi total (e) dengan entalpi (h) adalah sebagai berikut:

$$h = e - \left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{4.41}$$

apabila kedua ruas didefferensialkan, maka diperoleh:

$$\partial h = \partial e - \partial\left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{4.42}$$

karena usaha $W = 0$, mengakibatkan $d\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0$. Sehingga Persamaan (4.42) menjadi:

$$\partial h = \partial e \approx\ C_p \partial T \tag{4.43}$$

berdasarkan Persamaan (4.43), maka Persamaan (4.40) dapat dituliskan menjadi:

$$\rho C_p(V.\nabla \mathrm{T}) = (k\nabla^2 T) + Q_0(T - T_\infty) \tag{4.44}$$

jika Persamaan (4.44) diuraikan didapat persamaan berikut:

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + Q_0(T - T_\infty)$$

$$\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{K}{\rho C_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+Q_0(T-T_\infty)$$

atau

$$\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+Q_0(T-T_\infty) \tag{4.45}$$

dengan $\alpha=\frac{K}{\rho C_p}$. Karena tempertaur pada arah x sangat kecil dibandingkan pada arah y, artinya $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ll\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$, maka Persamaan (4.45) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+Q_0(T-T_\infty) \tag{4.46}$$

4.4 Persamaan Pembangun Non-dimensional

Persamaan pembangun dimensional yang telah didapat untuk aliran konveksi bebas pada fluida viskoelastik yang melalui sebuah bola berpori adalah sebagai berikut:

4. Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}}(\bar{r}\bar{u})+\frac{\partial}{\partial\bar{y}}(\bar{r}\bar{v})=0 \tag{4.47}$$

5. Persamaan momentum:

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = \bar{v}\left[\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}\right] - \frac{k_0}{\rho}\left[\bar{u}\left(\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial\bar{x}^3\bar{y}^2}\right)+\bar{v}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial\bar{y}^3}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}\partial\bar{x}}\right)+\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}\right)\right]+ g\beta(\bar{T}-\bar{T}_\infty)\sin(\bar{x}/\bar{a})-\frac{\nu}{K^*}\bar{u} \tag{4.48}$$

6. Persamaan energi:

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}}=\alpha\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2}+Q_0(\bar{T}-\bar{T}_\infty) \tag{4.49}$$

dengan kondisi batas sebagai berikut.

$$\left.\begin{array}{c} \bar{u} = \bar{v} = 0, \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = -\frac{q_w}{k} \; pada \; \bar{y} = 0 \\ \bar{u} = 0, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0, \qquad \bar{T} = \bar{T}_\infty \qquad pada \; \bar{y} \to \infty \end{array}\right\} \tag{4.50}$$

Proses mentransformasi persamaan dimensional menjadi persamaan non-dimensional dilakukan dengan cara mensubtitusikan variable-variabel non-dimensional ke dalam persamaan dimensional. Adapun variable-variabel non-dimensional didefiniskan sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{v} = vva^{-1}Gr^{\frac{1}{4}} \\ \bar{u} = uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}} \\ \bar{x} = ax \\ \bar{y} = ayGr^{-\frac{1}{4}} \\ (\bar{T} - \bar{T}_\infty) = \frac{\theta T_w a}{k} \\ \bar{r} = ar \end{array}\right\} \tag{4.51}$$

Sehingga diperoleh persamaan kontinuitas, momentum, dan energi non-dimensional sebagai berikut:

- Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \tag{4.52}$$

- Persamaan momentum:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$\theta \; \sin x - K\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] - Pu \tag{4.53}$$

dengan $P = \frac{a^2}{Gr^{\frac{1}{2}}K^*}$ dan $K = \frac{k_0}{\rho}\frac{Gr^{1/2}}{a^2}$, berturut-turut merupakan parameter porositas dan viskositas.

- Persamaan energy:

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma\theta \tag{4.54}$$

dengan $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ dan $\gamma = \frac{a^2 Q_0}{\upsilon \rho C_p G r^{\frac{1}{2}}}$ berturut-turut adalah bilangan Prandtl dan *heat generater*.

dengan kondisi batas:

$$u = v = 0, \frac{\partial \theta}{\partial y} = -1 \text{ untuk } y = 0$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \theta = 0 \text{ untuk } y \to \infty \tag{4.55}$$

4.5 Transformasi persamaan non-dimensional ke persamaan similar

Pada tahap ini, dilakukan proses pembentukan persamaan non-dimensional menjadi persamaan similar menggunakan *stream function*. Tujuan dari proses ini adalah untuk mengelompokkan variable-variabel yang sejenis, dalam hal ini variable kecepatan fluida pada arah x yang dinotasikan dengan variable u dan variable kecepatan pada arah y yang dinotasikan dengan v. Adapun fungsi alur atau *stream function* didefinisikan sebagai berikut:

$$\psi = xr(x)f(x,y), \theta = \theta(x,y) \tag{4.56}$$

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4.57}$$

dengan $r(x) = \sin x$.

Apabila Persamaan (4.57) diuraikan maka diperoleh:

$$u = x\frac{\partial f}{\partial y} \tag{4.58}$$

dan

$$v = -\frac{f}{r}(r + x\, cos\, x) - x\frac{\partial f}{\partial x} \tag{4.59}$$

Untuk mendapatkan persamaan pembangun similar, maka Persamaan (4.58) dan (4.59) disubtitusikan ke dalam Persamaan (4.53) sampai (4.55). Adapun penjelasan tahapan proses mentransformasi persamaan pembangun non-dimensional menjadi persamaan similar dijelaskan pada Lampiran 6. Persamaan dalam bentuk similar merupakan model matematika yang diharapkan dari permasalahan yang diangkat. Model matematika untuk permasalahan pengaruh pembangkit panas terhadap aliran konveksi bebas yang melewati sebuah bola berpori adalah sebagai berikut:

$$f'^2 - 2ff'' = f''' + \theta - K\left[2f'f''' - 2ff'''' - f''^2\right] - Pf' \tag{4.60}$$

dan

$$-2f\theta' = \frac{1}{Pr}\theta'' + \gamma\theta \tag{4.61}$$

dengan $\frac{\partial\theta}{\partial y} = \theta'$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = f'$ serta kondisi batas:

$$f(0) = f'(0) \quad = 0, \theta'(0) \quad = -1 \quad untuk\ y = 0$$

$$f'(\infty) \quad = f''(\infty) \quad = 0, \theta(\infty) \quad = 0 \quad untuk\ y \to \infty \tag{4.62}$$

BAB V
HASIL DAN PEMBAHASAN

5.1 Tahap Diskritisasi

Pada tahap ini dilakukan proses diskritisasi dari Persamaan (4.60), (4.61), dan (4.62) dengan menggunakan metode beda hingga eksplisit skema pusat. Sehingga dengan menggunakan Persamaan (2.26) sampai (2.29), didapat hasil diskritisasi dari Persamaan (4.60), (4.61), dan (4.62) sebagai berikut:

- Untuk Persamaan (4.60):

$$\left(\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta y}\right)^2 - 2f_i\left(\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{\Delta y^2}\right) - \left(\frac{f_{i+2}-2f_{i+1}+2f_{i-1}-f_{i-2}}{2\Delta y^3}\right) + K\begin{bmatrix} 2\left(\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta y}\right)\left(\frac{f_{i+2}-2f_{i+1}+2f_{i-1}-f_{i-2}}{2\Delta y^3}\right) - \\ 2f_i\left(\frac{f_{i+2}-4f_{i+1}+6f_i-4f_{i-1}+f_{i-2}}{\Delta y^4}\right) - \left(\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{\Delta y^2}\right)^2 \end{bmatrix} + P\left(\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta y}\right) - \theta_i = 0 \quad (5.1)$$

dengan memisalkan: $A = \frac{1}{\Delta y}, B = \frac{1}{\Delta y^2}, C = \frac{1}{\Delta y^3}, dan\ D = \frac{1}{\Delta y^4}$, maka Persamaan (5.1) dapat ditulis menjadi:

$$\left(\frac{DK}{2}\right)f_{i+2}f_{i+1} - (2DK)f_if_{i+2} - \left(\frac{DK}{2}\right)f_{i+2}f_{i-1} + \left(\frac{B-8DK}{4}\right)f_{i+1}^2 + (12DK-2B)f_if_{i+1} - \left(\frac{B}{2}\right)f_{i-1}f_{i+1} - \left(\frac{DK}{2}\right)f_{i-2}f_{i+1} + (4B-16DK)f_i^2 + (12DK-2B)f_if_{i-1} - (2DK)f_if_{i-2} + \left(\frac{B-8DK}{4}\right)f_{i-1}^2 + \left(\frac{DK}{2}\right)f_{i-2}f_{i-1} + \left(\frac{2C+AP}{2}\right)f_{i+1} - \left(\frac{2C+AP}{2}\right)f_{i-1} + \left(\frac{C}{2}\right)f_{i-2} - \theta_i = 0 \quad (5.2)$$

Selanjutnya dengan memisalkan: $t_1 = \frac{DK}{2}$, $t_2 = \frac{B-8DK}{4}$, $t_3 = 12DK - 2B$, $t_4 = 4B - 16DK$, dan $t_5 = \frac{2C+AP}{2}$, maka Persamaan (5.2) dapat ditulis menjadi:

$$t_1f_{i+2}f_{i+1} - 4t_1f_if_{i+2} - t_1f_{i+2}f_{i-1} + t_2f_{i+1}^2 + t_3f_if_{i+1} - \left(\frac{B}{2}\right)f_{i-1}f_{i+1} - t_1f_{i-2}f_{i+1} + t_4f_i^2 + t_3f_if_{i-1} - 4t_1f_if_{i-2} + t_2f_{i-1}^2 + t_1f_{i-2}f_{i-1} + t_5f_{i+1} - t_5f_{i-1} + \left(\frac{C}{2}\right)f_{i-2} - \theta_i = 0 \quad (5.3)$$

- Untuk Persamaan (4.61):

$$-2f\theta' = \frac{1}{Pr}\theta'' + \gamma\theta$$

$$-2f_i\left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta y}\right) = \frac{1}{Pr}\left(\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta y^2}\right) + \gamma\theta_i \qquad (5.4)$$

dengan memisalkan: $A = \frac{1}{\Delta y}, B = \frac{1}{\Delta y^2}$, dan $E = \frac{B}{Pr}$, maka Persamaan (5.4) menjadi:

$$(Af_i - E)\theta_{i-1} - (Af_i + E)\theta_{i+1} + (2E - \gamma)\theta_i = 0 \qquad (5.5)$$

- Untuk Persamaan (4.62):

$f_i = 0, \quad f_{i+1} = f_{i-1}, \quad \theta_{i+1} = -2\Delta y + \theta_{i-1}$ untuk i = 0

$f_{i+1} = f_{i-1},\ f_{i+1} = 2f_i - f_{i-1}, \theta_i = \theta_{i-1} - \Delta y,\ \ \theta_i = 0$ untuk i = M (5.6)

5.2 Tahapan Iterasi

Pada tahap ini, dilakukan penyelesaian dari Persamaan (5.3) dan (5.5) dengan metode Gauss-Seidel. Adapun formula dari metode Gauss-Seidel sebagai berikut:

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1, j\neq i}^{m}\left(-a_{ij}^{k-1}\right) + b_i\right], i = 1,2,3, \dots, m. \qquad (5.7)$$

dengan a_{ii} sebuah koefisien mutlak terbesar dan x_i^{k-1} nilai awal.

Selanjutnya metode iterasi Gauss-Seidel yang tertera di Persamaan (5.7) diterapkan dengan mensubtitusikan parameter-parameter $K, P, Pr, \gamma\ dan\ \Delta y$. Sehingga diperoleh nilai koefisien-koefisien, dimana didapat koefisien terbesar yaitu t_4 yang merupakan koefisien dari ${f_i}^2$. Sehingga didapat bentuk iterasi dari Persamaan (5.3) sebagai berikut:

$$f_i = \left[\frac{-1}{t_4}\left(t_1 f_{i+2} f_{i+1} - 4t_1 f_i f_{i+2} - t_1 f_{i+2} f_{i-1} + t_2 f_{i+1}^2 + t_3 f_i f_{i+1} - \left(\frac{B}{2}\right) f_{i-1} f_{i+1} - t_1 f_{i-2} f_{i+1} + t_3 f_i f_{i-1} - 4t_1 f_i f_{i-2} + t_2 f_{i-1}^2 + t_1 f_{i-2} f_{i-1} + t_5 f_{i+1} + t_5 f_{i-1} + \left(\frac{C}{2}\right) f_{i-2} - \theta_i\right)\right]^{1/2} \qquad (5.8)$$

dan bentuk iterasi dari Persamaan (5.4) sebagai berikut:

$$\theta_i = \frac{(E - Af_0)(\theta_{i-1} + 2\Delta y) + (Af_0 + E)\theta_{i+1}}{(2E - \gamma)} \qquad (5.9)$$

5.3 Algoritma Pemrograman

Sebelum dilakukan tahap implementasi program menggunakan *software* Matlab, maka diperlukan algoritma pemrograman untuk memvisualisasi Persamaan (5.8) dan (5.9). Algoritma pemrograman ini terbagi menjadi dua algoritma. Pertama algoritma untuk mendapatkan nilai interval parameter viskoelastik K, bilangan Prandtl Pr, pembangkit panas γ, dan porositas P. Kedua, algoritma untuk mendapatkan profil kecepatan dan temperatur fluida akibat pengaruh parameter viskoelastik K, bilangan Prandtl Pr, pembangkit panas γ, dan porositas P.

5.3.1 Algoritma untuk mendapatkan interval parameter K, Pr, γ, dan P.

Input: parameter yang diinputkan yaitu: jari-jari a, densitas fluida ρ, bilangan Grashof Gr, konduktifitas bola k_0, kalor awal Q_0, viskositas kinematik fluida υ, kalor jenis fluida C_p, diffusi thermal α, dan permeabilitas fluida K*. Pada penelitian ini nilai parameter dari jari-jari: $0.1 \leq a \leq 1$ dalam meter, densitas fluida $\rho = 600\ kg/m^3$, bilangan Grashof: $1 \leq Gr \leq 100000$, konduktifitas bola $k_0 = 1\ J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$, kalor awal: $0 \leq Q_0 \leq 100$ dalam Joule, viskositas kinematik fluida: $0.0007 \leq \upsilon \leq 0.5$ dalam m^2/s, kalor jenis fluida $C_p = 1\ J/kg$, diffusi thermal $\alpha = 0.04\ m^2/s$, dan permeabilitas fluida $K^* = 1\ m/s$.

Procedure

for $Gr = 1$ and $a = 0.1$, $\upsilon = 0.0007$, $Q_0 = 0$ **do**

$$K_minimum = \frac{k_0}{\rho}\frac{Gr^{1/2}}{a^2}.$$

$$\gamma_minimum = \frac{a^2 Q_0}{\upsilon\rho C_p Gr^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Pr_minimum = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$P_minimum = \frac{a^2}{Gr^{\frac{1}{2}}K^*}$$

end for

for $Gr = 100000$, $\upsilon = 0.5$, $Q_0 = 100$, and $a = 1$ **do**

$$K_maximum = \frac{k_0}{\rho}\frac{Gr^{1/2}}{a^2}.$$

$$\gamma_maximum = \frac{a^2 Q_0}{\upsilon\rho C_p Gr^{\frac{1}{2}}}$$

$$Pr_maximum = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$P_maximum = \frac{a^2}{Gr^{\frac{1}{2}}K^*}$$

end for

Output: nilai interval parameter viskoelastik K, bilangan Prandtl Pr, pembangkit panas γ, dan porositas P.

5.3.2 Algoritma untuk mendapatkan profil kecepatan dan temperatur fluida.

Input: nilai variasi parameter viskoelastik K, bilangan Prandtl Pr, pembangkit panas γ, porositas P, partisi ketebalan lapisan batas Δy, dan ketebalan lapisan batas y. Adapun nilai interval dari parameter viskoelastik K, bilangan Prandtl Pr, pembangkit panas γ, dan porositas P yang diperoleh dari algoritma sebelumnya berturut-turut adalah K=[0.016667, 0.527046], Pr=[0.0175, 12.5], γ=[0, 0.752923], dan P=[0.01, 1].

Procedure:

Kondisi awal (*initial condition*) $f(i)$ dan $\theta(i)$.

for it_max = 1:N

for $i = 1 : M$

$$f_i = \left[\frac{(-1)}{t_4}\begin{pmatrix} t_1 f_{i+2} f_{i+1} - 4t_1 f_i f_{i+2} - t_1 f_{i+2} f_{i-1} + t_2 f_{i+1}^2 + t_3 f_i f_{i+1} - \\ \left(\frac{B}{2}\right) f_{i-1} f_{i+1} - t_1 f_{i-2} f_{i+1} + t_3 f_i f_{i-1} - 4t_1 f_i f_{i-2} + \\ t_2 f_{i-1}^2 + t_1 f_{i-2} f_{i-1} + t_5 f_{i+1} + t_5 f_{i-1} + \left(\frac{C}{2}\right) f_{i-2} - \theta_i \end{pmatrix}\right]^{1/2}$$

$$\theta_i = \frac{(E - Af_i)(\theta_{i-1} + 2\Delta y) + (Af_i + E)\theta_{i+1}}{(2E - \gamma)}$$

if i = 1 iterasi f_i **do**
$f_i \leftarrow f_{i-1} = f_{i+1}$ dan $f_{i-2} = f_i$
else if $i = 2$ iterasi f_i **do**
$f_i \leftarrow f_{i-2} = f_{i+1}$
else if $i = M - 1$ iterasi f_i **do**
$f_i \leftarrow f_{i-2} = f_i$
else if $i = M$ iterasi f_i **do**
$f_i \leftarrow f_{i+1} = f_{i-1}$ dan $f_{i+2} = f_i$
else iterasi f_i
end if
if i = 1 iterasi θ_i **do**
$\theta_i \leftarrow \theta_{i-1} = \theta_{i+1} + 2\Delta y$
else if $i = M$ iterasi θ_i **do**
$\theta_i \leftarrow \theta_{i+1} = 0$

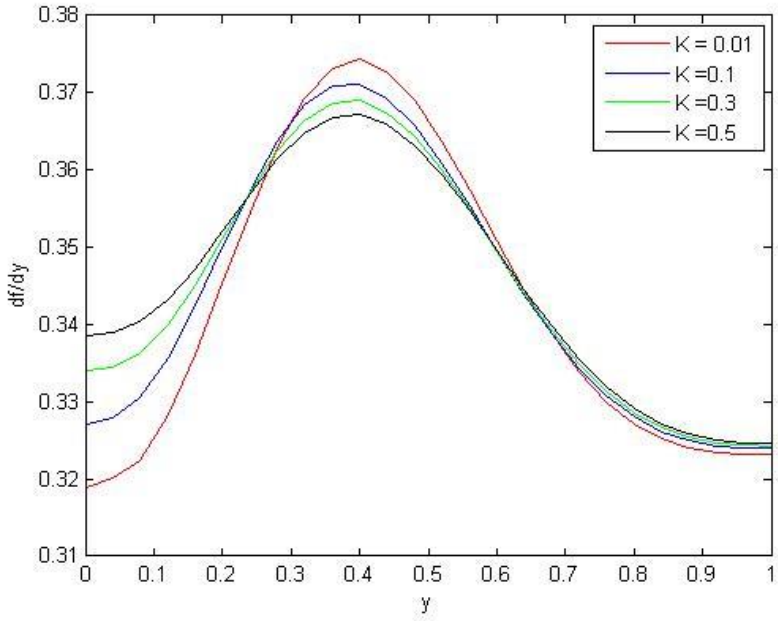
```
      else iterasi θ_i
      end if
   end for
end for
return f_i , θ_i
```

Output: data profil kecepatan dan temperatur aliran akibat pengaruh parameter viskoelastik (K), bilangan Prandtl (P_r), pembangkit panas (γ), dan porositas (P).

5.4 Hasil simulasi dan analisa grafik

Hasil dari simulasi ini berupa data yang akan dianalisa yang merepresentasikan solusi dari permasalahan. Adapun analisa grafik dijelaskan sebagai berikut:

a) Grafik profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $\gamma = 0.5, Pr = 1, P = 1$ dan viskoselastik (K) yang divariasi.



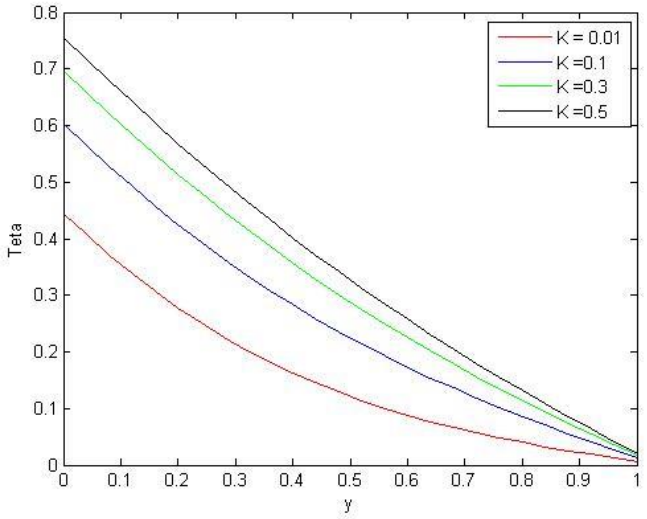
Gambar 5.1: Profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $\boldsymbol{\gamma = 0.5, Pr = 1, P = 10}$dan viskoselastik (K) yang divariasi.

Gambar 5.1 merupakan hasil *plotting* data profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $\gamma = 0.5, \mathrm{Pr} = 1, \mathrm{P} = 1$ dan viskoselastik (K) yang divariasi. Pada penjelasan sebelumnya, bahwa parameter viskoselastik (K)

dinyatakan dengan $K = \frac{k_0}{\rho}\frac{Gr^{1/2}}{a^2}$, dan diperoleh interval $0.0166 \leq K \leq 0.527046$. Dari hasil simulasi terlihat bahwa semakin kecil nilai viskoselastik (K=0.01), artinya kekentalan fluida semakin rendah, maka kecepatan dari aliran tersebut semakin naik (grafik warna merah). Sebaliknya, ketika kekentalan fluida semakin besar (K=0.5), maka kecepatan dari aliran fluida semakin turun (grafik warna hitam).

Nilai K sangat bergantung dengan bilangan Grashof Gr yang merupakan perbandingan antara gaya apung dengan gaya viskos. Semakin besar bilangan Grashof mengakibatkan nilai K semakin besar, artinya kekentalan fluida semakin besar. Akibat semakin kental fluida menyebabkan gesekan antara dinding bola dengan fluida semakin besar dan pada akhirnya kecepatan fluida semakin turun. Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai kekentalan dari suatu fluida berbanding terbalik terhadap kecepatan dari aliran yang mengalir melalui permukaan sebuah bola berpori.

b) Grafik profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $\gamma = 0.5, Pr = 1, P = 1$ dan viskoselastik (K) divariasi.



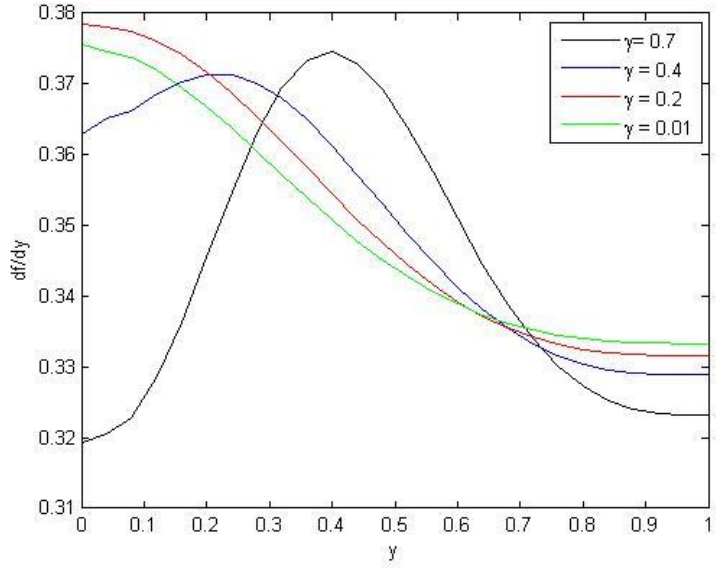
Gambar 5.2: Profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $\gamma = 0.5, \mathrm{Pr} = 1, \mathrm{P} = 1,$ dan viskoselastik (K) divariasi.

Gambar 5.2 merupakan hasil *plotting* data profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $\boldsymbol{\gamma = 0.5, Pr = 1, P = 1}$ dan viskoselastik (K) yang divariasi. Pada penjelasan sebelumnya, bahwa parameter viskoselastik (K) dinyatakan dengan $K = \frac{k_0}{\rho}\frac{Gr^{1/2}}{a^2}$, dan diperoleh interval $0.0166 \leq K \leq 0.527046$. Dari hasil simulasi terlihat bahwa semakin kecil nilai viskoselastik (K=0.01), artinya kekentalan fluida semakin rendah, maka temperatur dari aliran tersebut semakin turun (grafik warna merah). Begitu juga, ketika kekentalan fluida

semakin besar (K=0.5), maka temperatur fluida semakin turun (grafik warna hitam).

Nilai K sangat bergantung dengan bilangan Grashof Gr yang merupakan perbandingan antara gaya apung dengan gaya viskos. Semakin besar bilangan Grashof mengakibatkan nilai K semakin besar, artinya kekentalan fluida semakin besar. Akibat semakin kental fluida menyebabkan gesekan antara dinding bola dengan fluida semakin besar dan pada akhirnya temperatur fluida semakin tinggi. Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai kekentalan dari suatu fluida berbanding lurus terhadap temperatur dari aliran yang mengalir melalui permukaan sebuah bola berpori.

c) Grafik profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01$, $Pr = 10$, $P = 0.1$, dan parameter *heat generater* (γ) yang divariasi.

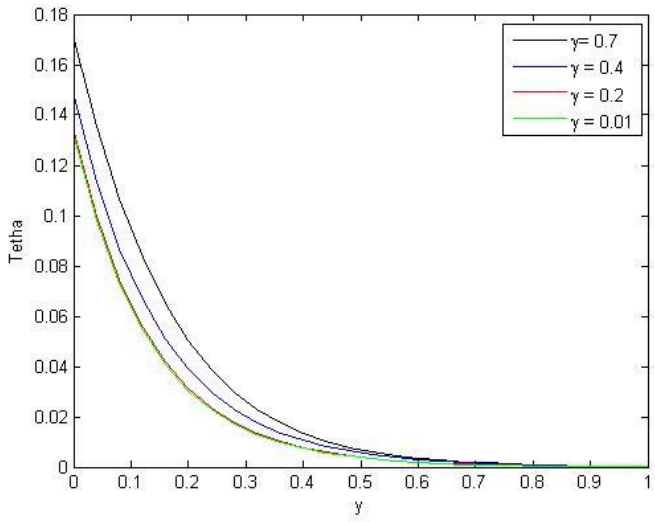


Gambar 5.3: Profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01$, $Pr = 10, P = 1$, dan parameter *heat generater* (γ) yang divariasi.

Gambar 5.3 merupakan hasil *plotting* data profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01$, $Pr = 10$, $P = 0.1$, dan parameter *heat generater* (γ) yang divariasi. Pada penjelasan sebelumnya, parameter *heat generater* (γ) atau pembangkit panas dinyatakan dengan $\gamma = \frac{a^2 Q_0}{\upsilon \rho C_p Gr^{\frac{1}{2}}}$, dan diperoleh interval $0 \leq \gamma \leq 0.752923$. Nilai γ sangat dipengaruhi oleh nilai kalor awal Q_0, semakin besar nilai Q_0 mengakibatkan nilai γ semakin besar pula. Parameter γ merupakan parameter pembangkit panas tambahan yang diberikan ke media yang dilewati fluida. Secara visual Gambar 5.3 terlihat bahwa parameter γ berbanding lurus dengan profil kecepatan fluida. Semakin kecil nilai pembangkit panas (γ =0.1), maka kecepatan dari aliran tersebut semakin turun (grafik warna hijau). Kecepatan dari aliran tersebut semakin turun dikarenakan nilai kalor mula-

mula Q_0 semakin kecil. Sebaliknya, apabila pembangkit panas semakin besar (γ =0.7), maka kecepatan dari aliran fluida semakin naik (grafik warna hitam). Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai parameter *heat generater* (γ) berbanding lurus terhadap kecepatan dari aliran yang mengalir melalui permukaan sebuah bola berpori.

d) Grafik profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01, Pr = 10, P = 1$ dan parameter *heat generater* (γ) yang divariasi.

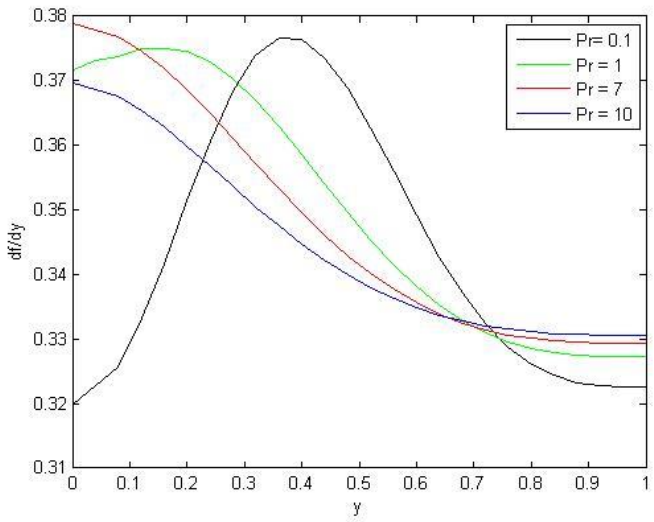


Gambar 5.4: Profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $\mathbf{K} = \mathbf{0.01}, \mathbf{Pr} = \mathbf{10}, \mathbf{P} = \mathbf{1}$ dan parameter *heat generation* ($\boldsymbol{\gamma}$) yang divariasi.

Gambar 5.4 merupakan hasil *plotting* data profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01$, $Pr = 10$, $P = 0.1$, dan parameter *heat generater* (γ) yang divariasi. Pada penjelasan sebelumnya, parameter *heat generater* (γ) atau pembangkit panas dinyatakan dengan $\gamma = \frac{a^2 Q_0}{\upsilon \rho C_p Gr^{\frac{1}{2}}}$, dan diperoleh interval $0 \leq \gamma \leq 0.752923$. Nilai γ sangat dipengaruhi oleh nilai kalor awal Q_0, semakin besar nilai Q_0 mengakibatkan nilai γ semakin besar pula. Parameter γ merupakan parameter pembangkit panas tambahan yang diberikan ke media yang dilewati fluida. Secara visual Gambar 5.4 terlihat bahwa parameter γ berbanding lurus dengan profil temperatur fluida. Semakin kecil nilai pembangkit panas (γ =0.1), maka temperatur aliran tersebut semakin turun (grafik warna hijau). Temperatur dari aliran tersebut semakin turun dikarenakan nilai kalor

mula-mula Q_0 semakin kecil. Begitu juga, apabila pembangkit panas semakin besar (γ =0.7), maka temperatur dari aliran fluida semakin naik (grafik warna hitam). Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai parameter *heat generater* (γ) berbanding lurus terhadap temperatur aliran yang melalui permukan bola berpori.

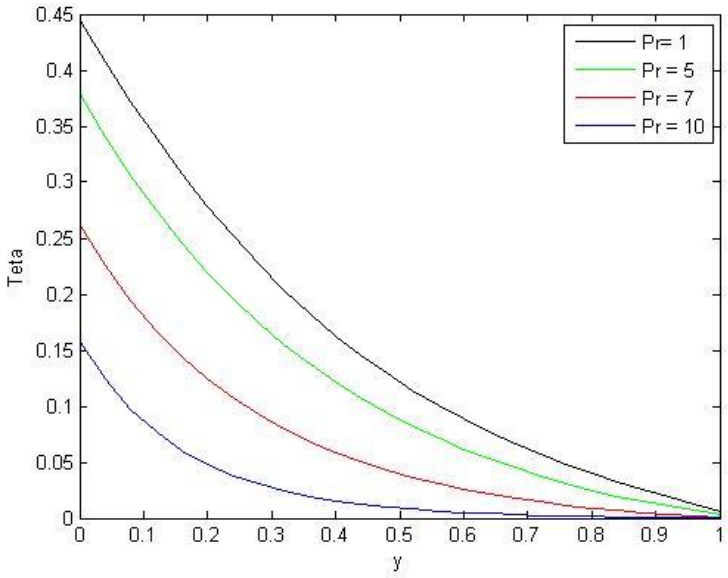
e) Grafik profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01$, $\boldsymbol{\gamma} = 0.2$, $P = 0.1$ dan parameter *bilangan Prandtl* (Pr) yang divariasi.



Gambar 5.5: Profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01$, $\gamma = 0.2$, $P = 0.1$ dan parameter bilangan *Prandtl* (Pr) yang divariasi.

Gambar 5.5 merupakan hasil *plotting* data profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01$, $\gamma = 0.2$, $P = 0.1$ dan parameter bilangan *Prandtl* (Pr) yang divariasi. Pada penjelasan sebelumnya, parameter bilangan *Prandtl* (Pr) atau distribusi panas dinyatakan dengan $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$, dan diperoleh interval $0.0175 \leq Pr \leq 12.5$. Nilai Pr sangat tergantung pada viskositas kinematik ν, viskositas kinematik merupakan ukuran kekentalan fluida. Nilai dari bilangan Prandtl (Pr) berbanding lurus dengan nilai viskositas kinematik ν. Artinya semakin besar nilai viskositas kinematik ν, maka semakin besar nilai bilangan *Prandtl*. Dari hasil simulasi terlihat bahwa semakin kecil nilai bilangan *Prandtl* yang diberikan (Pr = 0.1), mengakibatkan kecepatan dari aliran tersebut semakin naik (grafik warna hitam). Sebaliknya, apabila bilangan *Prandtl* yang diberikan semakin besar (Pr = 10), maka kecepatan dari aliran fluida menjadi turun (grafik warna biru). Ini diakibatkan nilai bilangan *Prandtl* yang tergantung pada nilai viskositas kinematik ν. Sehingga dapat disimpulkan bahwa parameter bilangan *Prandtl* (Pr) berbanding terbalik terhadap kecepatan aliran yang melalui permukan bola berpori.

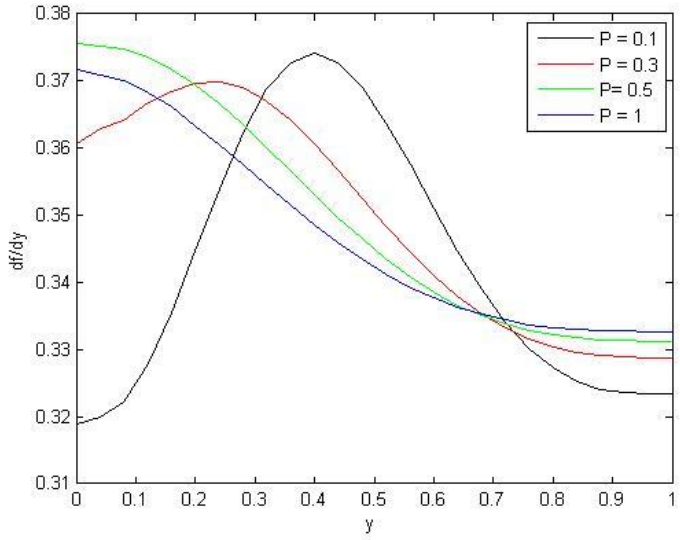
f) Grafik profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01$, $\gamma = 0.2,\ P = 10$ dan parameter bilangan *Prandtl* (Pr) yang divariasi.



Gambar 5.6: Profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01,\ \gamma = 0.2,\ P = 10$ dan parameter bilangan *Prandtl* (Pr) yang divariasi.

Gambar 5.6 merupakan hasil *plotting* data profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01,\ \gamma = 0.5,\ P = 0.1$ dan parameter bilangan *Prandtl* (Pr) yang divariasi. Pada penjelasan sebelumnya, parameter bilangan *Prandtl* (Pr) atau distribusi panas dinyatakan dengan $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$, dan diperoleh interval $0.0175 \leq Pr \leq 12.5$. Nilai Pr sangat tergantung pada viskositas kinematik ν, viskositas kinematik merupakan ukuran kekentalan fluida. Nilai dari bilangan Prandtl (Pr) berbanding lurus dengan nilai viskositas kinematik ν. Artinya semakin besar nilai viskositas kinematik ν, maka semakin besar nilai bilangan *Prandtl*. Dari hasil simulasi terlihat bahwa semakin kecil nilai bilangan *Prandtl* yang diberikan (Pr = 0.1), mengakibatkan temperatur dari aliran tersebut semakin naik (grafik warna hitam). Sebaliknya, apabila bilangan *Prandtl* yang diberikan semakin besar (Pr = 10), maka temperatur dari aliran fluida menjadi turun (grafik warna biru). Ini diakibatkan nilai bilangan *Prandtl* yang tergantung pada nilai viskositas kinematik ν. Sehingga dapat disimpulkan bahwa parameter bilangan *Prandtl* (Pr) berbanding terbalik terhadap kecepatan aliran yang melalui permukan bola berpori.

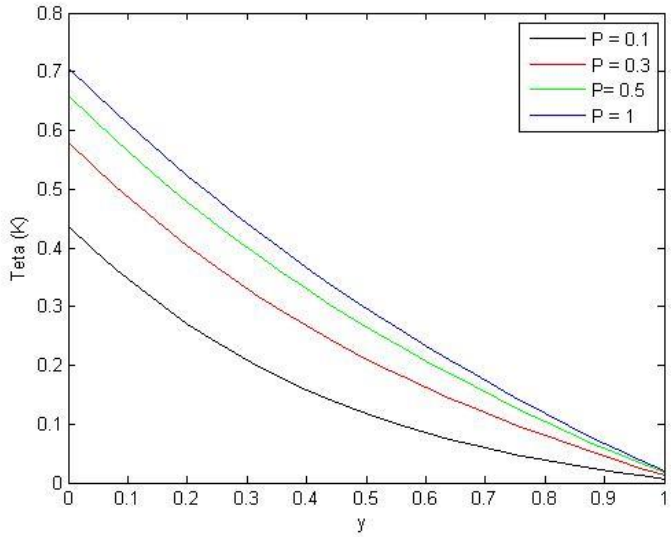
g) Grafik profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01,\ \gamma = 0.2,\ Pr = 1$ dan parameter porositas (P) yang divariasi.



Gambar 5.7: Profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai parameter $\boldsymbol{K = 0.01}$, $\boldsymbol{\gamma = 0.2},\ \boldsymbol{Pr = 1}$ dan parameter porositas (P) yang divariasi.

Gambar 5.7 merupakan hasil *plotting* data profil kecepatan fluida dengan pengaruh nilai $K = 0.01,\ \gamma = 0.2,\ Pr = 1$ dan parameter porositas (P) yang divariasi. Pada penjelasan sebelumnya, parameter porositas (P) dinyatakan dengan $P = \frac{a^2}{Gr^{\frac{1}{2}}K^*}$, dan diperoleh interval $0.01 \leq P \leq 1$. Hubungan antara besar nilai P dengan jari-jari bola a adalah berbanding lurus, artinya semakin besar jari-jari a akan mengakibatkan nilai porositas P semakin besar. Dari hasil simulasi terlihat bahwa semakin kecil nilai porositas bola (P =0.1), mengakibatkan kecepatan dari aliran tersebut semakin naik (grafik warna hitam). Sebaliknya, apabila nilai porositas semakin besar (P = 1), maka kecepatan dari aliran fluida menjadi turun (grafik warna biru). Ini diakibatkan aliran fluida lebih cepat mengalir melalui permukaan bola yang berjari-jari kecil dibandingkan melalui jar-jari bola yang besar. Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai parameter porositas (P) berbanding terbalik terhadap kecepatan aliran yang melalui permukan bola berpori.

h) Grafik profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $K = 0.01$, $\gamma = 0.2$, $Pr = 1$ dan parameter porositas (P) yang divariasi.



Gambar 5.8: Profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai parameter $\boldsymbol{K = 0.01}$, $\boldsymbol{\gamma = 0.5}$, $\boldsymbol{Pr = 1}$, dan parameter porositas (P) yang divariasi.

Gambar 5.8 merupakan hasil *plotting* data profil temperatur fluida dengan pengaruh nilai $K = 0.01$, $\gamma = 0.2$, $Pr = 1$ dan parameter porositas (P) yang divariasi. Pada penjelasan sebelumnya, parameter porositas (P) dinyatakan dengan $P = \frac{a^2}{Gr^{\frac{1}{2}}K^*}$, dan diperoleh interval $0.01 \leq P \leq 1$. Hubungan antara besar nilai P dengan jari-jari bola a adalah berbanding lurus, artinya semakin besar jari-jari a akan mengakibatkan nilai porositas P semakin besar. Dari hasil simulasi terlihat bahwa semakin kecil nilai porositas bola (P =0.1), mengakibatkan temperatur dari aliran tersebut semakin rendah (grafik warna hitam). Begitu juga, apabila nilai porositas semakin besar (P = 1), maka temperatur dari aliran fluida meningkat (grafik warna biru). Ini diakibatkan gesekan antara fluida dengan permukaan bola semakin besar apabila jari-jari bola semakin besar. Sehingga, apabila gesekan antara fluida dengan permukaan bola rendah mengakibatkan temperatur fluida turun. Dapat disimpulkan bahwa nilai parameter porositas berbanding lurus terhadap temperatur aliran yang melalui permukan bola berpori.

BAB VI
KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari penelitian aliran konveksi bebas fluida viskoelastik yang melalui permukaan sebuah bola berpori yaitu:

a) Pengaruh nilai parameter pembangkit panas ($\gamma = 0.5$), bilangan Prandtl ($Pr = 1$), porositas ($P = 10$), dan viskoselastik yang divariasi (K= 0.01, 0.2, 0.5, 1) terhadap kecepatan aliran berbanding terbalik. Sedangkan pengaruh nilai parameter pembangkit panas ($\gamma = 0.5$), bilangan Prandtl($Pr = 1$), porositas ($P = 0.1$), dan viskoselastik yang divariasi (K= 0.01, 0.2, 0.5, 1) terhadap temperatur aliran berbanding lurus. Adapun persamaan viskoselastik memenuhi $K = \frac{k_0}{\rho}\frac{Gr^{1/2}}{a^2}$, dengan interval: $0.0166 \leq K \leq 0.527046$.

b) Pengaruh nilai parameter viskositas ($K = 0.01$) , bilangan Prandtl ($Pr = 10$), porositas ($P = 1$), dan pembangkit panas (*heat generater*) yang divariasi ($\gamma = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$) terhadap kecepatan aliran dan temperatur berbanding lurus. Adapun persamaan pembangkit panas memenuhi $\gamma = \frac{a^2 Q_0}{v\rho C_p Gr^{\frac{1}{2}}}$, dengan interval: $0 \leq \gamma \leq 0.752923$.

c) Pengaruh nilai parameter viskositas ($K = 0.01$) , porositas ($P = 0.1$), pembangkit panas ($\gamma = 0.5$), dan bilangan Prandtl ($Pr = 1, 5, 7, 10$) yang divariasi terhadap kecepatan aliran dan temperatur berbanding terbalik. Adapun persamamaan dari bilangan Prandtl memenuhi $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$, dengan interval: $0.0175 \leq Pr \leq 12.5$.

d) Pengaruh nilai parameter viskositas ($K = 0.01$) , pembangkit panas ($\gamma = 0.5$), bilangan Prandtl ($Pr = 1$), dan porositas yang divariasi ($P = 1, 4, 7, 10$) terhadap kecepatan aliran berbanding terbalik. Sedangkan pengaruh nilai viskositas ($K = 0.01$) , pembangkit panas ($\gamma = 0.5$), bilangan Prandtl ($Pr = 1$), dan porositas yang divariasi ($P = 1, 4, 7, 10$) terhadap terhadap temperatur aliran berbanding lurus.

Adapun persamaan porositas memenuhi $P = \frac{a^2}{Gr^{\frac{1}{2}}K^*}$, dengan interval: $0.01 \leq P \leq 1$.

6.2 Saran

Adapun saran-saran untuk penelitian berikutnya adalah sebagai berikut :

1. Sebaiknya aliran lapisan batas konveksi bebas yang dikaji bersifat tak tunak (*unsteady*).
2. Sebaiknya fluida yang digunakan bersifat Magneto Hydrodinamic (MHD).

DAFTAR PUSTAKA

Amin, N., Nazar, R., dan Pop, I, (2002), "On The Mixed Convection Boundary-Layer Flow About A Solid Sphere With Constant Surface Temperature", The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 27, Number 2C.

Favre, M dan Tardu Sedat M, (2009), *Convective Heat Transfer*, Wiley. USA.

Genick, B.M, (2013), *Basics of Fluid Mechanics*. North Washtenaw. Chicago.

Hoffman, K.A & Chiang. S.T, (2000), *Computational Fluid Dynamics Volume I*. A Publication of Engineering Education System, Wichita, Kansas. USA.

Kasim, A.R.M, (2014), *Convective Boundary Flow of Viscoelastic Fluid*, Universitas Teknologi Malaysia, Malaysia.

Kreith, Frank, (1994), *Prinsip – prinsip Perpindahan Panas*, Erlangga. Jakarta.

Munson, Bruce, (2003), *Mekanika Fluida*, Edisi 4, Erlangga. Jakarta.

Nazar, R., Pop, I., Salleh., M.Z, (2010), "Mixed Convection Boundary Layer Flow about A Solid Sphere with Newtonian Heating", Arch. Mech, 62, 4, pp. 283-303, Warszawa.

Potter, M.C., Wiggert, D.C., dan Ramadan, B, (2008), *Mechanics of Fluids*, Global Engineering. United States of America.

Sleigh, Andrew, (2001), *An Introduction to Fluid Mechanics*, University of Leeds. England.

Streeter, Victor L dan Wylie, E. Benjamin, (1988), *Mekanika Fluida*. Edisi Delapan Jilid 1, Erlangga. Jakarta.

Widodo, B., Fatahillah, A., Rahayuningsih, T, (2011), "Mathematical Modelling and Numerical Solution of Iron Corrosion Problem Based on Condensation Chemical Properties", Australian Journal of Basic and Applied Sciences,5(1), pp. 79-86.

LAMPIRAN 1

Proses mendapatkan $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yy}, \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}$ dan $\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$ sebagai berikut:

- $\tau_{xx} = 2\mu_0(d_{xx}) - 2k_0\left\{ (V.\nabla)d_{xx} - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_x}\, d_{xx} + \frac{\partial v_x}{\partial x_y}\, d_{xy}\right) - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_x}\, d_{xx} + \frac{\partial v_x}{\partial x_y}\, d_{yx}\right)\right\}$

$$= 2\mu_0 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - 2k_0\left[\begin{array}{c}\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} - \\ \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\end{array}\right]$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0\left[\begin{array}{c}\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} - \\ \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}\end{array}\right]$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0\left\{u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0\left\{u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right\}$$

- $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu_0(d_{xy}) - 2k_0\left\{ (V.\nabla)d_{xy} - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x_x}\, d_{xx} + \frac{\partial v_y}{\partial x_y}\, d_{xy}\right) - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_x}\, d_{xy} + \frac{\partial v_x}{\partial x_y}\, d_{yy}\right)\right\}$

$$= 2\mu_0 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2k_0\left[\begin{array}{c}\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} - \\ \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}\end{array}\right]$$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) -$$

$$2k_0\left[\begin{matrix}\frac{u}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{v}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)-\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}- \\ \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\}\end{matrix}\right]$$

$$=\mu_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-$$

$$2k_0\left[\begin{matrix}\frac{u}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{v}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)- \\ \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\}\end{matrix}\right]$$

$$=\mu_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-$$

$$2k_0\left[\begin{matrix}\frac{u}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{v}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)- \\ \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0}+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\}\end{matrix}\right]$$

$$=\mu_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-$$

$$2k_0\left\{\begin{matrix}\frac{u}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{v}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)- \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\end{matrix}\right\}$$

- $\tau_{yy}=2\mu_0(d_{yy})-2k_0\left\{(V.\nabla)d_{yy}-\left(\frac{\partial v_y}{\partial x_x}\,d_{yx}+\frac{\partial v_x}{\partial x_y}\,d_{yy}\right)-\left(\frac{\partial v_y}{\partial x_x}\,d_{xy}+\frac{\partial v_y}{\partial x_y}\,d_{yy}\right)\right\}$

$$=2\mu_0\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-$$

$$2k_0\left[\begin{matrix}\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}- \\ \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}\end{matrix}\right]$$

$$=2\mu_0\frac{\partial v}{\partial y}-2k_0\left[\begin{matrix}\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\}- \\ \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\}\end{matrix}\right]$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[\begin{array}{c} u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \\ \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right\} \end{array} \right]$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left\{ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\} \right]$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \right\} \right]$$

- $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0 \left\{ u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \right\} \right]$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2k_0 \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) - \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{array} \right]$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2k_0 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \\ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array} \right\}$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2k_0 \left\{ u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 3\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\}$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} -$$

$$k_0 \left\{ \begin{array}{c} 2u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 6\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \\ 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array} \right\}$$

- $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\begin{array}{c} \mu_0\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \\ 2k_0\left\{\frac{u}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{v}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} \end{array} \right]$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) -$$

$$2k_0 \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) - \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{array} \right]$$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) -$$

$$2k_0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) + \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{array} \right\}$$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) -$$

$$k_0 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ v\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{array} \right\}$$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) -$$

$$k_0 \left\{ \begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right) + v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \\ \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}$$

- $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2k_0\left\{\frac{u}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{v}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}\right]$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) -$$

$$2k_0\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)- \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\end{array}\right\}$$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) -$$

$$2k_0\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)- \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\end{array}\right\}$$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) -$$

$$2k_0\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+u\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+v\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right)+ \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)\end{array}\right\}$$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) -$$

$$k_0\left(\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+u\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+v\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+ \\ v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\end{array}\right)$$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) -$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c}u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+ \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right)-2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\end{array}\right\}$$

$$= \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) -$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) + v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{array}\right\}$$

- $\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0\left[u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}\right]\right]$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$- 2k_0\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}\right]$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$- 2k_0\left\{\begin{array}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + u\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right) - 4\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{0} - \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) \end{array}\right\}$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2k_0\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + u\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 3\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) \end{array}\right\}$$

$$= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$- k_0\left\{\begin{array}{c} 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2u\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 6\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\ 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{array}\right\}$$

LAMPIRAN 2

Langkah mendapatkan persamaan momentum pada arah x.

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}+2\mu_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-$$

$$k_0\left\{2u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+2v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-6\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}+$$

$$\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+ \\ \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \end{array}\right\}+F_x$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_0\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}\right)+v\left(2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right)- \\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+ \\ \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \end{array}\right\}+F_x$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right)- \\ 2\frac{\partial u}{\partial x}\left(3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \end{array}\right\}+F_x$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0}\right)+ \\ v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)}_{0}\right)-2\frac{\partial u}{\partial x}\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0}\right)- \\ \frac{\partial u}{\partial y}\left(2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \end{array}\right\}+F_x$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)-2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}- \\ \frac{\partial u}{\partial y}\left(-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array}\right\}+F_x$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)-2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\left(4\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)- \\ \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array}\right\}+F_x$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)- \\ 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\left(3\frac{\partial u}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}}_{0}\right)- \\ \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array}\right\}+F_x$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) -$$

$$k_0 \left\{ \begin{array}{c} u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \\ 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \end{array} \right\} + F_x$$

LAMPIRAN 3

Langkah-langkah mendapatkan persamaan momentum pada arah y.

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+ \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \end{array}\right\}+$$

$$2\mu_0\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-k_0\left\{\begin{array}{c} 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+2u\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}+2v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}-6\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}- \\ 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \end{array}\right\}+F_y$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+2\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right)+ \\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)- \\ \frac{\partial v}{\partial y}\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) \end{array}\right\}+F_y$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-$$

$$k_0\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right)+ \\ v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right)+ \\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)- \\ \frac{\partial v}{\partial y}\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(4\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) \end{array}\right\}+F_y$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_0 \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) -$$

$$k_0 \begin{Bmatrix} u\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)}_{0} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + \\ v\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)}_{0} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\partial v}{\partial y}\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(4\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) \end{Bmatrix} + F_y$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) -$$

$$k_0 \begin{Bmatrix} u\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}\right) + v\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\partial v}{\partial y}\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(4\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) \end{Bmatrix}$$

$$+ F_y$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) -$$

$$k_0 \begin{Bmatrix} u\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}\right) + v\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(4\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) \end{Bmatrix} + F_y$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) -$$

$$k_0 \begin{Bmatrix} u\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}\right) + v\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right) + \\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(4\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) \end{Bmatrix} + F_y$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) -$$

$$k_0 \left\{ \begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + v\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + \\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(4\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \end{array} \right\} + F_y$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) -$$

$$k_0 \left\{ \begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + v\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + \\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(3\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{0} \right) + 3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(4\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \end{array} \right\} + F_y$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) -$$

$$k_0 \left\{ \begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + v\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) - \\ \frac{\partial v}{\partial y}\left(3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 4\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} + F_y$$

LAMPIRAN 4

- Perhitungan magnitude untuk persamaan momentum pada arah x:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu_0}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{k_0}{\rho}\left\{\begin{matrix} u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)- \\ 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\left(3\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\end{matrix}\right\}-g_x-\frac{\mu_0}{\rho K^*}u \qquad (L4.1)$$

$$\left(1\ \frac{1}{1}\quad \Delta\frac{1}{\Delta}\right)=\Delta^2\left(\frac{1}{1^2}\quad\frac{1}{\Delta^2}\right)\Delta^2$$

$$\left[1\left(\frac{1}{1^3}\quad\frac{1}{1\Delta^2}\right)\Delta\left(\frac{1}{1^2\Delta}\quad\frac{1}{\Delta^3}\right)\left(\frac{\Delta}{1}\frac{1}{1\Delta}\right)\ \frac{1}{1}\left(\frac{\Delta}{1\Delta}\quad\frac{1}{\Delta^2}\right)\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{1\Delta}\quad\frac{\Delta}{1^2}\right)\right](1)\quad\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2}\right)$$

$$(1\quad 1)=(\Delta^2\quad 1)\,\Delta^2$$

$$\left[1\left(1\quad\frac{1}{\Delta^2}\right)\Delta\left(\frac{1}{\Delta}\quad\frac{1}{\Delta^3}\right)\left(\frac{\Delta}{1}\frac{1}{\Delta}\right)\ 1\left(1\quad\frac{1}{\Delta^2}\right)\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{\Delta}\quad\Delta\right)\right](1)\quad(1)$$

$$(1\quad 1)=(\Delta^2\quad 1)\,\Delta^2\left[\left(1\quad\frac{1}{\Delta^2}\right)\left(1\quad\frac{1}{\Delta^2}\right)(1)\ \left(1\quad\frac{1}{\Delta^2}\right)\left(\frac{1}{\Delta^2}\quad 1\right)\right](1)\quad(1)$$

$$(1\quad 1)=(\Delta^2\quad 1)[(\Delta^2\quad 1)(\Delta^2\quad 1)(\Delta^2)\ (\Delta^2\quad 1)(1\quad\Delta^2)](1)\quad(1)$$

Karena hanya suku yang bernilai 1 yang diambil, sehingga Persamaan $(L4.1)$ menjadi:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu_0}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{k_0}{\rho}\left\{u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\right\}-g_x-\frac{\mu_0}{\rho K^*}u \qquad (L4.2)$$

- Perhitungan magnitude untuk persamaan momentum pada arah y:

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-$$

$$\frac{k_0}{\rho}\left\{\begin{array}{c} u\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right)- \\ \frac{\partial v}{\partial y}\left(3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)-4\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{array}\right\}-g_y \quad -\frac{\mu_0}{\rho K^*}v \quad (L4.3)$$

$$\left(\frac{\Delta}{1} \quad \Delta.\frac{\Delta}{\Delta}\right)$$

$$= \Delta^2\left(\frac{\Delta}{1^2} \quad \frac{\Delta}{\Delta^2}\right)\Delta^2\left[1\left(\frac{\Delta}{\Delta^2} \quad \frac{\Delta}{1.\Delta^2}\right)\Delta\left(\frac{\Delta}{1^2\Delta} \quad \frac{\Delta}{\Delta^3}\right)\frac{\Delta}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{\Delta^2}\ \frac{\Delta}{1^2}\right)\ \frac{\Delta}{1}\left(\frac{1}{\Delta^2} \quad \frac{\Delta}{1.\Delta}\right)\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{1\Delta}\right)\right]$$

$$(1) \quad \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2}\Delta\right)$$

$$(\Delta \quad \Delta)$$

$$= (\Delta^3 \quad \Delta)\,\Delta^2\left[\left(\frac{\Delta}{\Delta^2} \quad \frac{\Delta}{\Delta^2}\right)\Delta\left(1 \quad \frac{1}{\Delta^2}\right)\left(\frac{\Delta}{\Delta^2}\ \Delta\right)\ \Delta\left(\frac{1}{\Delta^2} \quad 1\right)\frac{1}{\Delta}(\,1\,)\right](1) \quad (\Delta)$$

$$(\Delta \quad \Delta) = (\Delta^3 \quad \Delta)[(\Delta \quad \Delta\,)\,(\,\Delta^3 \quad \Delta\,)\,(\Delta\ \Delta^3\,)\ \ (\Delta \quad \Delta^3\,)\,(\Delta\,)\,](1) \quad (\Delta)$$

Karena tidak ada yang bernilai 1, maka persamaan momentum pada arah y tereduksi keseluruhan.

LAMPIRAN 5

Proses pembentukan persamaan pembangun non-dimensional.

- Persamaan kontiuitas:

$$\frac{uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\partial\left(uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}ar\right)}{\partial(ax)}+\frac{vva^{-1}Gr^{\frac{1}{4}}\partial\left(uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}ar\right)}{\partial\left(ayGr^{-\frac{1}{4}}\right)}=0$$

$$\frac{\nu^2Gr^{1/2}}{a}\frac{\partial ru}{\partial x}+\frac{\nu^2Gr^{1/2}}{a}\frac{\partial rv}{\partial y}=0$$

$$\frac{\nu^2Gr^{1/2}}{a}\left(\frac{\partial ru}{\partial x}+\frac{\partial rv}{\partial y}\right)=0$$

$$\frac{\partial ru}{\partial x}+\frac{\partial rv}{\partial y}=0$$

- Persamaan momentum:
  - Pada ruas kiri:

$$\Leftrightarrow\frac{uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\partial\left(uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial(ax)}+\frac{vva^{-1}Gr^{\frac{1}{4}}\partial\left(uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial\left(ayGr^{-\frac{1}{4}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\nu^2Gr}{a^3}u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\nu^2Gr}{a^3}v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\nu^2Gr}{a^3}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

  - Pada ruas kanan:

$$\Leftrightarrow\frac{v\partial^2\left(uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial\left(ayGr^{-\frac{1}{4}}\right)^2}+\frac{g\beta\theta T_w a}{k}\sin\left(\frac{ax}{a}\right)-$$

$$\frac{k_0}{\rho}\left[\begin{array}{c}uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\dfrac{\partial^3\left(uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial(ax)\partial\left(ayGr^{-\frac{1}{4}}\right)^2}+\ va^{-1}Gr^{\frac{1}{4}}\dfrac{\partial^3\left(uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial\left(ayGr^{-\frac{1}{4}}\right)^3}-\\ \dfrac{\partial\left(uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial\left(ayGr^{-\frac{1}{4}}\right)}\dfrac{\partial^2\left(uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial(ax)\partial\left(ayGr^{-\frac{1}{4}}\right)}+\dfrac{\partial\left(uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial(ax)}\dfrac{\partial^2\left(uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial\left(ayGr^{-\frac{1}{4}}\right)^2}\end{array}\right]-$$

$$\frac{vuva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}}{K^*}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu^2 Gr}{a^3}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{g\beta\theta T_w a}{k}\sin x - \frac{k_0}{\rho}\frac{\nu^2 Gr^{\frac{3}{2}}}{a^5}\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] -$$

$$\frac{\nu^2 Gr^{\frac{1}{2}}}{aK^*}u$$

Jika kedua ruas digabungkan, maka diperoleh:

$$\frac{\nu^2 Gr}{a^3}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\nu^2 Gr}{a^3}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$\frac{g\beta\theta T_w a}{k}\sin x - \frac{K\nu^2 Gr}{a^3}\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] - \frac{\nu^2 Gr^{\frac{1}{2}}}{aK^*}u$$

dengan $K = \frac{k_0}{\rho}\frac{Gr^{1/2}}{a^2}$ merupakan parameter viskositas, kemudian kedua ruas dibagi dengan $\frac{\nu^2 Gr}{a^3}$, didapat:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$\frac{a^3}{\nu^2 Gr}\frac{g\beta\theta T_w a}{k\ Gr}\sin x - K\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] - \frac{a^2}{Gr^{\frac{1}{2}}K^*}u$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta\sin x - K\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] -$$

$$\left(\frac{k}{g\beta T_w}\right)^{1/2}\frac{\nu}{K^*}u$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta\sin x - K\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] - Pu$$

dengan $P = \left(\frac{k}{g\beta T_w}\right)^{1/2}\frac{\nu}{K^*}$ merupakan parameter *porosity*.

- Persamaan energy:

$$uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\left(\frac{\theta T_w a}{k}+\bar{T}_\infty\right)}{\partial(ax)}+vva^{-1}Gr^{\frac{1}{4}}\frac{\partial\left(\frac{\theta T_w a}{k}+\bar{T}_\infty\right)}{\partial\left(ayGr^{-\frac{1}{4}}\right)}$$

$$=\alpha\frac{\partial^2\left(\frac{\theta T_w a}{k}+\bar{T}_\infty\right)}{\partial\left(ayGr^{-\frac{1}{4}}\right)^2}+\frac{Q_0\theta T_w a}{\rho C_p k}$$

$$uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\theta T_w a}{k}\right)}{a\partial(x)}+\frac{\partial(\bar{T}_\infty)}{a\partial(x)}\right\}+vva^{-1}Gr^{\frac{1}{4}}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\theta T_w a}{k}\right)}{ayGr^{-\frac{1}{4}}\partial(y)}+\frac{\partial(\bar{T}_\infty)}{ayGr^{-\frac{1}{4}}\partial(y)}\right\}$$

$$=\alpha\left\{\frac{\partial^2\left(\frac{\theta T_w a}{k}\right)}{ayGr^{-\frac{1}{4}}\partial(y)^2}+\frac{\partial^2(\bar{T}_\infty)}{ayGr^{-\frac{1}{4}}\partial(y)^2}\right\}+\frac{Q_0\theta T_w a}{\rho C_p k}$$

$$uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\theta T_w a}{k}\right)}{a\partial(x)}+0\right\}+vva^{-1}Gr^{\frac{1}{4}}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\theta T_w a}{k}\right)}{ayGr^{-\frac{1}{4}}\partial(y)}+0\right\}$$

$$=\alpha\left\{\frac{\partial^2\left(\frac{\theta T_w a}{k}\right)}{ayGr^{-\frac{1}{4}}\partial(y)^2}+0\right\}+\frac{Q_0\theta T_w a}{\rho C_p k}$$

$$uva^{-1}Gr^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\theta T_w a}{k}\right)}{a\partial(x)}\right\}+vva^{-1}Gr^{\frac{1}{4}}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\theta T_w a}{k}\right)}{ayGr^{-\frac{1}{4}}\partial(y)}\right\}$$

$$=\alpha\left\{\frac{\partial^2\left(\frac{\theta T_w a}{k}\right)}{ayGr^{-\frac{1}{4}}\partial(y)^2}\right\}+\frac{Q_0\theta T_w a}{\rho C_p k}$$

$$\frac{Gr^{\frac{1}{2}}T_w}{ak}vu\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{Gr^{\frac{1}{2}}T_w}{ak}vv\frac{\partial\theta}{\partial y}=\alpha\frac{Gr^{\frac{1}{2}}T_w}{ak}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{Q_0\theta T_w a}{\rho C_p k}$$

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\alpha}{\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{ak}{Gr^{\frac{1}{2}}T_w}\frac{Q_0\theta T_w a}{\nu\rho C_p k}$$

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$$

$$+\gamma\theta$$

dengan $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ dan $\gamma = \frac{a^2 Q_0}{\upsilon \rho C_p G r^{\frac{1}{2}}}$ berturut-turut adalah parameter bilangan Prandtl dan *heat generater*.

LAMPIRAN 6

Proses transformasi dari persamaaan non-dimensional ke similar.

$$u = x\frac{\partial f}{\partial y} \tag{L6.1}$$

dan

$$v = -\frac{f}{r}(r + x\,cos\,x) - x\frac{\partial f}{\partial x} \tag{L6.2}$$

Untuk mendapatkan persamaan dalam bentuk similar, maka dilakukan subtitusi Persamaaan (L6.1) dan (L6.2) ke Persamaan (4.53) sampai (4.55).

- Untuk Persamaan (4.53) tahapannya sebagai berikut:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta \sin x - K\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] - Pu$$

- Pada ruas kiri:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} - \left\{\frac{f}{r}(r + x\,cos\,x) + x\frac{\partial f}{\partial x}\right\}\frac{\partial\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}$$

$$= x\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) - \left\{\frac{f}{r}(r + x\,cos\,x) + x\frac{\partial f}{\partial x}\right\}x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + x^2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - fx\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{f}{r}x^2\,cos\,x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x^2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Pada ruas kanan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta \sin x - K\left[u\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] - Pu =$$

$$\frac{\partial^2\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y^2} + \theta \sin x - K\left[\begin{array}{c} x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x \partial y^2} - \left\{\frac{f}{r}(r + x\,cos\,x) + x\frac{\partial f}{\partial x}\right\}\frac{\partial^3\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y^3} - \\ \frac{\partial\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}\frac{\partial^2\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}\frac{\partial^2\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y^2} \end{array}\right] - Px\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}{\partial y} + \theta \sin x - K\left[\begin{array}{c} x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}+x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)}{\partial y^2} - \left\{\frac{f}{r}(r + x\cos x) + x\frac{\partial f}{\partial x}\right\}\frac{x\partial^4 f}{\partial y^4} - \\ x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}+x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)x\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \end{array}\right]$$

$$- Px\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= x\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \theta \sin x - K\left[\begin{array}{c} x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x^2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3} - f\frac{x\partial^4 f}{\partial y^4} - x^2\frac{f}{r}\cos x\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \\ x^2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 - x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + \\ x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x^2\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \end{array}\right] - Px\frac{\partial f}{\partial y}$$

Jika kedua ruas digabungkan, maka didapat:

$$x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + x^2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - fx\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{f}{r}x^2\cos x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x^2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} +$$

$$\theta \sin x - K\left[\begin{array}{c} x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x^2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3} - f\frac{x\partial^4 f}{\partial y^4} - \\ x^2\frac{f}{r}\cos x\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - x^2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 - \\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x^2\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \end{array}\right]$$

$$- Px\frac{\partial f}{\partial y}$$

Jika kedua ruas dibagi dengan x, maka diperoleh:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{f}{r}x\cos x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \theta \sin x.\frac{1}{x} - K\left[\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3} - f\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \\ x\frac{f}{r}\cos x\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - x\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 - \\ x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \end{array}\right] - P\frac{\partial f}{\partial y}$$

(L6.3)

Subtitusi $r = \sin x$, maka Persamaan (L6.1) menjadi:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - f\frac{x}{\sin x}\cos x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} +$$

$$\theta \sin x \frac{1}{x} - K \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - f\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \\ f\frac{x}{\sin x}\cos x\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - x\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 - \\ x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} - P\frac{\partial f}{\partial y}$$

(L6.4)

Kemudian apabila Persamaan (L6.4) didekati dengan $x \to 0$, maka didapat:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 0 - f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - f.1.1.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 0$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \theta.1\,K \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + 0 - f\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - f.1.1.\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \\ 0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 - 0 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + 0 \end{bmatrix} - P\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \theta - K\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - 2f\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right] - P\frac{\partial f}{\partial y}$$

(L6.5)

dengan memisalkan $\frac{\partial f}{\partial y} = f'$, maka Persamaan (L6.5) menjadi:

$$f'^2 - 2ff'' = f''' + \theta - K\left[2f'f''' - 2ff'''' - f''^2\right] - Pf' \qquad (L6.6)$$

- Untuk Persamaan (4.54) tahapannya sebagai berikut:

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma\theta$$

$$x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\left(\theta(x,y)\right)}{\partial x} - \left\{\frac{f}{r}(r + x\,cos\,x) + x\frac{\partial f}{\partial x}\right\}\frac{\partial\left(\theta(x,y)\right)}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2\left(\theta(x,y)\right)}{\partial y^2} + \gamma\theta(x,y)$$

$$x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \left\{\frac{f}{r}(r + x\,cos\,x) + x\frac{\partial f}{\partial x}\right\}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma\theta$$

$$x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x} - f\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{f}{r}x\,cos\,x\frac{\partial \theta}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma\theta$$

dengan mensubtitusi $r = \sin x$, maka diperoleh:

$$x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x} - f\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{f}{\sin x}x\,cos\,x\frac{\partial \theta}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma\theta \qquad (L6.7)$$

apabila Persamaan (L6.7) pada kedua ruas didekati dengan $x \to 0$, maka didapat:

$$-2f\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \gamma\theta$$

dengan memisalkan $\frac{\partial\theta}{\partial y} = \theta'$, maka diperoleh:

$$-2f\theta' = \tfrac{1}{Pr}\theta'' + \gamma\theta \qquad (L6.8)$$

Dengan kondisi batas:

$$f(0) = f'(0) \quad = 0, \theta'(0) \quad = -1 \quad untuk\ y = 0$$

$$f'(\infty) \quad = f''(\infty) \quad = 0, \theta(\infty) \quad = 0 \quad untuk\ y \to \infty \qquad (L6.9)$$

LAMPIRAN 7

Source Code

```
clear all;clc;close all;
h = 0.04;
y = 0:h:1;
M = length(y);
for i = 1:M
    f(i) =0;
    teta(i) =0;
end;
teta_old = teta;
f_old = f;
%%Viscouselastic value
Viscoelastic(1) = 0.01;
Viscoelastic(2) = 0.1;
Viscoelastic(3) = 1;
Viscoelastic(4) = 10;
%%Heat generation
Gamma(1) = 0.4;
Gamma(2) = 0.3;
Gamma(3) = 0.2;
Gamma(4) = 0.1;
%%Bilangan Prandtl
prandtl(1) = 1;
prandtl(2) = 5;
prandtl(3) = 7;
prandtl(4) = 10;
%%Koefisien Porositas
Porous(1) = 1;
Porous(2) = 4;
Porous(3) = 7;
```

```
Porous(4) = 10;

disp('1. Gamma (tetap), Prandlt(tetap),
Viskositas(bervariasi), Porositas(tetap)');
disp('2. Gamma (bervariasi), Prandtl (tetap),
Viskositas(tetap), Porositas(tetap)');
disp('3. Gamma (tetap), Prandtl (bervariasi),
Viskositas(tetap), Porositas(tetap)');
disp('4. Gamma (tetap), Prandtl (tetap),
Viskositas(tetap), Porositas(bervariasi)');
pilih = input('pilih (1,2,3 atau 4) = ');
for index = 1:4 % BEGINNING OF VARIATION
   if(pilih==1)
        Pr=1;
        K=Viscoelastic(index);
        gama=0.5;
        P=10;
      elseif(pilih==2)
        Pr=10;
        K=0.01;
        gama=Gamma(index);
        P=1;
    elseif(pilih==3)
        Pr=prandtl(index);
        K=0.01;
        gama=0.2;
        P=10;
    elseif(pilih==4)
        Pr=1;
        K=0.01;
        gama=0.2;
        P=Porous(index);
```

```
    else
        return;
    end;
    A = 1/h;
    B = 1/((h^2));
    C= 1/((h^3));
    D= 1/((h^4));
    B1 = B/Pr;
    t1=(D*K/2);
    t2=(B-8*D*K)/4;
    t3=12*D*K-2*B;
    t4=4*B-16*D*K;
    t5=(2*C+A*P)/2;

    for it_max = 1:120 % BEGINNING OF MAX ITERATION
        for i = 1:M % BEGINNING OF MAIN PROGRAM
            if(i>2&i<M-1)
                f(i)=sqrt((-1)*( t1*f(i+2)*f(i+1) -
4*t1*f(i+2)*f(i) - t1*f(i+2)*f(i-1) + t2*(f(i+1))^2 +
t3*f(i)*f(i+1)...
                    - 0.5*B*f(i+1)*f(i-1) -
t1*f(i+1)*f(i-2) + t3*f(i)*f(i-1)  - 4*t1*f(i)*f(i-2) +
t2*(f(i-1))^2  + t1*f(i-1)*f(i-2)...
                    + t5*f(i+1)  - 0.5*C*f(i+2)  -
t5*f(i-1) + 0.5*C*f(i-2)  - teta(i))/t4);
            elseif i==1
                f(i)=sqrt((-1)*( t1*f(i+2)*f(i+1) -
4*t1*f(i+2)*f(i) - t1*f(i+2)*f(i+1) + t2*(f(i+1))^2 +
t3*f(i)*f(i+1)...
                    - 0.5*B*f(i+1)*f(i+1) -
t1*f(i+1)*f(i) + t3*f(i)*f(i+1)  - 4*t1*f(i)*f(i) +
t2*(f(i+1))^2  + t1*f(i+1)*f(i)...
```

```
                    + t5*f(i+1)  - 0.5*C*f(i+2)  -
t5*f(i+1) + 0.5*C*f(i)  - teta(i))/t4);
            elseif i==2
               f(i)=sqrt((-1)*( t1*f(i+2)*f(i+1) -
4*t1*f(i+2)*f(i) - t1*f(i+2)*f(i-1) + t2*(f(i+1))^2 +
t3*f(i)*f(i+1)...
                    - 0.5*B*f(i+1)*f(i-1) -
t1*f(i+1)*f(i+1) + t3*f(i)*f(i-1)  - 4*t1*f(i)*f(i) +
t2*(f(i-1))^2  + t1*f(i-1)*f(i+1)...
                    + t5*f(i+1)  - 0.5*C*f(i+2)  -
t5*f(i-1) + 0.5*C*f(i+1)  - teta(i))/t4);
            elseif i==M-1 %subs : f(i+2)=f(M+1)= f(M-1)
                f(i)=sqrt((-1)*( t1*f(M-1)*f(i+1) -
4*t1*f(M-1)*f(i) - t1*f(M-1)*f(i-1) + t2*(f(i+1))^2 +
t3*f(i)*f(i+1)...
                    - 0.5*B*f(i+1)*f(i-1) -
t1*f(i+1)*f(i-2) + t3*f(i)*f(i-1)  - 4*t1*f(i)*f(i-2) +
t2*(f(i-1))^2  + t1*f(i-1)*f(i-2)...
                    + t5*f(i+1)  - 0.5*C*f(M-1)  -
t5*f(i-1) + 0.5*C*f(i-2)- teta(i)  )/t4);
            else i==M %subs : f(i+1)=f(M+1)= f(M-1) ;
f(i+2)=f(M+2)= f(M)
                f(i)=sqrt((-1)*( t1*f(M)*f(M-1) -
4*t1*f(M)*f(i) - t1*f(M)*f(i-1) + t2*(f(M-1))^2 +
t3*f(i)*f(M-1)...
                    - 0.5*B*f(M-1)*f(i-1) - t1*f(M-
1)*f(i-2) + t3*f(i)*f(i-1)  - 4*t1*f(i)*f(i-2) +
t2*(f(i-1))^2  + t1*f(i-1)*f(i-2)...
                    + t5*f(M-1)  - 0.5*C*f(M)  -
t5*f(i-1) + 0.5*C*f(i-2)- teta(i)  )/t4);
            end;
            if i==1
```

```
teta(i)=(teta(i+1)*(B1+A*f(i))+(teta(i+1)+2*h)*(B1-
A*f(i)))/(2*B1-gama);
            elseif i==M
                teta(i)=(teta(i-1)*(B1))/(2*B1-gama);
            else
                teta(i)= (teta(i+1)*(B1+A*f(i))+teta(i-
1)*(B1-A*f(i)))/(2*B1-gama);
            end;
        end;% END OF MAIN PROGRAM

    end; % END OF MAX ITERATION
    teta_w(index) = teta(1);
    if (pilih==1)

    if(index==1) % BEGINNING OF PLOT CONDITION
        figure(1);
        plot(y,f,'red','LineStyle','-');
%         title('Profile of Velocity');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'red','LineStyle','-');
%         title('Profile of Temperature');
        hold on;
    elseif(index==2)
        figure(1);
        plot(y,f,'blue','LineStyle','-');
%         title('Profile of Velocity');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'blue','LineStyle','-');
%         title('Profile of Temperature');
```

```
        hold on;
    elseif(index==3)
        figure(1);
        plot(y,f,'green','LineStyle','-');
%         title('Profile of velocity');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'green','LineStyle','-');
%         title('Profile of Temperature');
        hold on;
    else
        figure(1);
        plot(y,f,'black','LineStyle','-');
%         title('Profile of velocity');
        hold on;
        legend('K = 0.01','K =0.2','K =0.5','K = 1');
        xlabel('y');
        ylabel('df/dy');
        figure(2);
        plot(y,teta,'black','LineStyle','-');
%         title('Profile of Temperature');
        hold on;
        legend('K = 0.01','K =0.2','K =0.5','K = 1');
        xlabel('y');
        ylabel('Teta');
    end;
   elseif(pilih==2)
        if(index==1)
        figure(1);
        plot(y,f,'black','LineStyle','-');
%         title('Profile of ');
        hold on;
```

```
        figure(2);
        plot(y,teta,'black','LineStyle','-');
%         title('Profil Temperatur');
        hold on;
        elseif(index==2)
        figure(1);
        plot(y,f,'blue','LineStyle','-');
%         title('Profil Laju');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'blue','LineStyle','-');
%         title('Profil Temperatur');
        hold on;
    elseif(index==3)
        figure(1);
        plot(y,f,'red','LineStyle','-');
%         title('Profil Laju');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'red','LineStyle','-');
%         title('Profil Temperatur');
        hold on;
    else
        figure(1);
        plot(y,f,'green','LineStyle','-');
%         title('Profil Laju');
        hold on;
        legend('\gamma= 0.4','\gamma = 0.3','\gamma =
0.2','\gamma = 0.1');
        xlabel('y');
        ylabel('df/dy');
        figure(2);
```

```
        plot(y,teta,'green','LineStyle','-');
%         title('Profil Temperatur');
        hold on;
        legend('\gamma= 0.4','\gamma = 0.3','\gamma =
0.2','\gamma = 0.1');
        end;
        xlabel('y');
        ylabel('Tetha');
    elseif(pilih==3)
        if(index==1)
        figure(1);
        plot(y,f,'black','LineStyle','-');
%         title('Profil Laju');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black','LineStyle','-');
%         title('Profil Temperatur');
        hold on;
    elseif(index==2)
        figure(1);
        plot(y,f,'green','LineStyle','-');
%         title('Profil Laju');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'green','LineStyle','-');
%         title('Profil Temperatur');
        hold on;
    elseif(index==3)
        figure(1);
        plot(y,f,'red','LineStyle','-');
%         title('Profil Laju');
        hold on;
```

```
        figure(2);
        plot(y,teta,'red','LineStyle','-');
%         title('Profil Temperatur');
        hold on;
    else
        figure(1);
        plot(y,f,'blue','LineStyle','-');
%         title('Profil Laju');
        hold on;
        legend('Pr= 1','Pr = 5','Pr = 7','Pr = 10');
        xlabel('y');
        ylabel('df/dy');
        figure(2);
        plot(y,teta,'blue','LineStyle','-');
%         title('Profil Temperatur');
        hold on;
        legend('Pr= 1','Pr = 5','Pr = 7','Pr = 10');
       xlabel('y');
        ylabel('Teta');
        end;
else
        if(index==1)
        figure(1);
        plot(y,f,'black','LineStyle','-');
%         title('Profile of Velocity');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black','LineStyle','-');
%         title('Profile of Temperature');
        hold on;
    elseif(index==2)
        figure(1);
```

```
        plot(y,f,'red','LineStyle','-');
%         title('Profile of Velocity');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'red','LineStyle','-');
%         title('Profile of Temperature');
        hold on;

    elseif(index==3)
        figure(1);
        plot(y,f,'green','LineStyle','-');
%         title('Profile of Velocity');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'green','LineStyle','-');
%         title('Profile of Temperature');
        hold on;
    else
        figure(1);
        plot(y,f,'blue','LineStyle','-');
%         title('Profile of Velocity');
        hold on;
        legend('P = 1','P = 4','P= 7','P = 10');
        xlabel('y ');
        ylabel('df/dy ');
        figure(2);
        plot(y,teta,'blue','LineStyle','-');
%         title('Profile of Temperature');
        hold on;
        legend('P = 1','P = 4','P= 7','P = 10');
        xlabel('y ');
        ylabel('Teta (K)');
```

```
        end;
    end;% END OF PLOT CONDITION
    teta_old = teta
       f_old = f
end; % END OF VARIATION
teta_w
```

BIODATA PENULIS

Penulis bernama lengkap Mohamad Tafrikan, lahir pada tanggal 17-April-1989 di kabupaten Demak. Penulis menempuh pendidikan dasar di SDN I Tanggul. Kemudian melanjutkan pendidikan tingkat pertama di MTs Miftahul Huda Tayu dan pendidikan tingkat atas di MA Miftahul Huda Tayu. Penulis kemudian melanjutkan kuliah sarjana di jurusan Matematika ITS Surabaya melalui program Penerima Beasiswa Santri Berprestasi Kemenag pada tahun 2008 dan lulus S1 pada tahun 2012. Kemudian penulis melanjutkan kuliah pascasarjana di jurusan Matematika ITS dengan beasiswa Fresh Graduate dari DIKTI. Penulis dapat dihubungi melalui email : kan1213201051@gmail.com atau 085732061724.