



TUGAS AKHIR - KM184801

**KAJIAN FORMULA ANALITIS HARGA OPSI
CATASTROPHE EQUITY PUT (CATEPUT) AMERIKA
PERPETUAL DENGAN ADANYA MODERATE
CORRELATION COEFFICIENT**

VIRA DIANA ULNAZILLA
NRP. 06111540000067

Dosen Pembimbing:
Endah R.M Putri, S.Si., M.T., Ph.D
Wawan Hafid S, M.Si, M.Act.Sc

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019



TUGAS AKHIR - KM184801

**KAJIAN FORMULA ANALITIS HARGA OPSI
CATASTROPHE EQUITY PUT (CATEPUT) AMERIKA
PERPETUAL DENGAN ADANYA MODERATE
CORRELATION COEFFICIENT**

VIRA DIANA ULNAZILLA
NRP 06111540000067

Dosen Pembimbing:
Endah R.M Putri, Ph.D
Wawan Hafid S, M.Si, M.Act.Sc

DEPARTEMEN MATEMATIKA

Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019



FINAL PROJECT - KM184801

**STUDY OF ANALYTIC FORMULA FOR AMERICAN
PERPETUAL CATASTROPHE EQUITY PUT (CATEPUT)
OPTIONS PRICE WITH MODERATE CORRELATION
COEFFICIENT**

VIRA DIANA ULNAZILLA
NRP 06111540000067

Supervisors :
Endah R.M Putri, Ph.D
Wawan Hafid S, M.Si, M.Act.Sc

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Faculty of Mathematics, Computation, and Data Sciences
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019

LEMBAR PENGESAHAN

**KAJIAN FORMULA ANALITIS HARGA OPSI CATASTROPHE
EQUITY PUT (CATEPUT) AMERIKA PERPETUAL DENGAN
ADANYA MODERATE CORRELATION COEFFICIENT**

***STUDY OF ANALYTIC FORMULA FOR AMERICAN PERPETUAL
CATASTROPHE EQUITY PUT (CATEPUT) OPTIONS PRICE WITH
MODERATE CORRELATION COEFFICIENT***

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar
Sarjana Sains

Pada Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

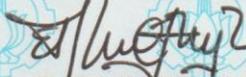
Oleh

VIRA DIANA ULNAZILLA
NRP. 06111540000067

Surabaya, 9 Juli 2019

Menyetujui,

Dosen Pembimbing I,


Endah R.M Putri, Ph.D
NIP. 19761213 200212 2 001

Dosen Pembimbing II,


Wawan H. S, M.Si, M.Act.Sc
NIP. 1992201911068

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FMKSD ITS


Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

**KAJIAN FORMULA ANALITIS HARGA OPSI
CATASTROPHE EQUITY PUT (CATEPUT) AMERIKA
PERPETUAL DENGAN ADANYA MODERATE
CORRELATION COEFFICIENT**

Nama Mahasiswa : Vira Diana Ulnazilla
NRP : 0611154000067
Departemen : Matematika FMKSD-ITS
Pembimbing : 1. Endah R.M Putri, Ph.D
2. Wawan H. S, M.Si, M.Act.Sc

Abstrak

Bencana alam merupakan kejadian yang sulit diprediksi dan menimbulkan kerugian yang besar. Perusahaan asuransi memiliki peran untuk melakukan ganti rugi apabila pemegang polis mengalami kerugian, seperti bencana alam. Hal ini mengakibatkan perusahaan asuransi harus mengambil langkah preventif untuk mengatasi kerugian yang ditimbulkan oleh bencana alam. Salah satu caranya adalah dengan menggunakan instrumen keuangan berupa opsi CatEPut Amerika perpetual. Jenis opsi ini membantu perusahaan asuransi mendapatkan dana apabila terjadi suatu bencana alam selama dalam waktu kontrak opsi. Pada Tugas Akhir ini, dilakukan perhitungan untuk mendapatkan formula analitis dari harga opsi CatEPut Amerika perpetual dengan memerhatikan pengaruh adanya *moderate correlation coefficient* di antara pergerakan harga saham perusahaan asuransi dengan kerugian akibat bencana alam. Hasil simulasi numerik, menunjukkan bahwa semakin tinggi tingkat korelasi koefisien, semakin tinggi pula harga dari opsi CatEPut Amerika perpetual. Namun, perbedaan harga saham, tingkat suku bunga, frekuensi bencana, volatilitas harga saham dan *trigger level* berpengaruh pada naik turunnya harga opsi CatEPut Amerika perpetual.

Kata Kunci : Instrumen Keuangan, Moderate Correlation Coefficient, Opsi CatEPut Amerika Perpetual, dan Pemegang Polis.

**STUDY OF ANALYTIC FORMULA FOR AMERICAN
PERPETUAL CATASTROPHE EQUITY PUT (CATEPUT)
OPTIONS PRICE WITH MODERATE CORRELATION
COEFFICIENT**

Name : Vira Diana Ulnazilla
NRP : 0611154000067
Department : Mathematics FMCDS-ITS
Supervisors : 1. Endah R.M Putri, Ph.D
2. Wawan H. S, M.Si, M.Act.Sc

Abstract

Catastrophe event is hard to predict and cause large losses. The increasing frequency of catastrophe event has affected insurance company by taking the responsibility to pay compensation to policy holder. In order to hedge against risk or covering losses by catastrophe event, insurance companies need to use the financial instrument namely perpetual American CatEPut options. This kind of options, could help insurance companies raise more equity capital when catastrophe event occurs during the life of the option. The valuation of analytical formula for perpetual American CatEPut options will be obtained in this study by observing the effect of moderate correlation coefficient between stock prices movement and catastrophe losses. The result of numerical analysis presented that, the bigger moderate correlation coefficient, the higher price of perpetual American CatEPut options. Furthermore, the difference of stock price, interest rate, volatility, catastrophe frequency, and trigger level, give different result for the price of perpetual American CatEPut options.

Key-Words : *Financial Instrument, Moderate Correlation Coefficient, Perpetual American CatEPut Options, and Policy Holder.*

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Segala puji dan syukur Penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga Penulis bisa menyelesaikan Tugas Akhir yang Berjudul

”KAJIAN FORMULA ANALITIS HARGA OPSI CATASTROPHE EQUITY PUT (CATEPUT) AMERIKA PERPETUAL DENGAN ADANYA MODERATE CORRELATION COEFFICIENT”

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

- a. Kedua orang tua saya Moh. Suyud dan Nining Eko Purwanti yang telah memberikan doa, semangat, motivasi serta kepercayaan sepenuhnya dalam mengerjakan Tugas Akhir.
- b. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Kepala Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data (FMKSD), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.
- c. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si selaku Kaprodi S1 Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data (FMKSD), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.
- d. Bapak Drs. Iis Harisman, M.Si selaku Sekprodi S1 Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data (FMKSD), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

- e. Ibu Endah R.M. Putri, Ph.D dan Bapak Wawan H. S., M.Si., M. Act. Sc selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada Penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
- f. Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si, Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si, dan Bapak Subchan, Ph.D selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun bagi Penulis selama proses seminar proposal, seminar hasil, hingga sidang atau ujian Tugas Akhir.
- g. Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc dan Bapak Drs. Suharmadi, Dipl.Sc, M.Phil selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama Penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.
- h. Bapak dan Ibu dosen Departemen Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada Penulis selama menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.
- i. Juanta Pratama S yang telah memberikan semangat dan nasihat kepada Penulis bahwa Tugas Akhir adalah 100% tanggung jawab pribadi.
- j. Venansius Ryan T yang telah mengajarkan semua mata kuliah yang diambil oleh Penulis selama menempuh pendidikan S-1.
- k. Anak-anak Umik yaitu Evika, Nadya, dan Ajeng yang telah berjuang bersama dengan Penulis selama proses pengerjaan Tugas Akhir.
- l. Penghuni Rumah Aljabar yaitu Diki, Amina, dan Nadiya yang telah menemani Penulis tinggal di Surabaya selama menempuh pendidikan S-1.
- m. Geng HBD yaitu Nidok, Amina, Izah, Fina, Isabel, Dhono, Mail, Aldo, dan Udin yang telah memberikan kenangan dan kesan yang tak bisa dilupakan selama Penulis menempuh pendidikan S-1.

- n. Riko, Titin, dan Diana yang bersedia menjadi teman makan, jalan-jalan, dan menerima segala kerepotan yang terjadi dengan Penulis selama menempuh pendidikan S-1.
- o. Teman - teman Actuarial Ghenkz, TKO, ASCI, Alpha BEM FMKSD, Pemandu, Pejuang Tangguh ITS Mengajar, dan Cauchy-Chaucy Club yang telah membantu Penulis untuk selalu belajar dan belajar baik dari segi akademis maupun non-akademis selama menempuh pendidikan S-1.
- p. Seluruh teman-teman DOHMAIn yang sudah berjuang bersama-sama menempuh pendidikan di Departemen Matematika bersama Penulis sejak masa pengkaderan hingga saat ini.
- q. Seluruh pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Penulis mengucapkan terima kasih yang sangat dalam, atas doa dan semangat yang diberikan kepada Penulis.

Penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan manfaat berbagai pihak.

Surabaya, 4 Juli 2019

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	iii
TITLE PAGE	v
LEMBAR PENGESAHAN	vii
ABSTRAK	ix
ABSTRACT	xi
KATA PENGANTAR	xiii
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xxi
DAFTAR TABEL	xxiii
DAFTAR SIMBOL	xxv
DAFTAR ISTILAH	xxvii
BAB I	
PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II	
TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Terdahulu	7

2.2	Proses Stokastik	8
2.3	Proses Wiener	9
2.3.1	Generalisasi Proses Wiener	10
2.3.2	Model Pergerakan Harga Saham Berdasarkan Generalisasi Proses Wiener	10
2.4	Lemma Itô	11
2.5	Proses Poisson	11
2.6	Proses Compound Poisson	13
2.7	Model Lompatan (Jump) Saham	13
2.8	Opsi Put Saham	14
2.9	Opsi Amerika Perpetual	15
2.10	Opsi Catastrophe Equity Put (CatEPut)	17
2.11	Aljabar Himpunan	17
2.11.1	Aljabar dan σ -aljabar	17
2.11.2	Filtrasi	18
2.12	Martingale	18
2.13	Valuasi Risk-Neutral pada Gerak Brown Geometrik	19
2.14	Peubah Acak Bivariat Kontinu	20
2.14.1	Distribusi Eksponensial Bivariat	20
2.15	Transformasi Laplace	22
2.15.1	Transformasi Laplace-Stieltjes	23

BAB III

METODE PENELITIAN	25
3.1 Tahapan Penelitian	25
3.2 Skema Metode Penelitian	28

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN	29
4.1 Konstruksi Model Pergerakan Harga Saham dengan Difusi Lompatan (Jump Diffusion)	29
4.1.1 Konstruksi Gerak Brown Geometrik	29
4.1.2 Gerak Brown Geometrik dengan Lemma Itô	31
4.1.3 Model Difusi Lompatan (Jump Diffusion)	33
4.1.4 Model Pergerakan Harga Saham dengan Di- fusi Lompatan (Jump Diffusion)	34

4.2	Konstruksi Model Total Kerugian Akibat Bencana Alam	36
4.3	Penentuan Distribusi Bersama (Joint Distribution) Antara Pergerakan Harga Saham dan Kerugian Akibat Bencana Alam	37
4.4	Konstruksi Formula Analitis Opsi CatEPut Amerika Perpetual	40
4.4.1	Konstruksi Formula Analitis Opsi Put Amerika Perpetual	43
4.4.2	Formula Analitis Opsi CatEPut Amerika Perpetual	62
4.5	Simulasi Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual	90
4.5.1	Pengaruh Harga Saham Perusahaan Asuransi Terhadap Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual	90
4.5.2	Pengaruh Tingkat Suku Bunga Harga Saham Perusahaan Asuransi Terhadap Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual	91
4.5.3	Pengaruh Volatilitas Terhadap Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual	92
4.5.4	Pengaruh Frekuensi Bencana Alam Terhadap Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual	93
4.5.5	Pengaruh <i>Trigger Level</i> Terhadap Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual	94

BAB V		
PENUTUP		97
5.1	Kesimpulan	97
5.2	Saran	98
DAFTAR PUSTAKA		99
LAMPIRAN		103

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.5.1 Lintasan Proses Poisson	13
Gambar 2.8.1 Diagram Fungsi Payoff Opsi Put	15
Gambar 3.2.1 Diagram Alir Metode Penelitian	28
Gambar 4.4.1 Skema Opsi CatEPut Amerika Perpetual . .	41
Gambar 4.4.2 Ilustrasi Opsi CatEPut Amerika Perpetual Setelah di-Exercise	42

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.5.1 Daftar Parameter Simulasi Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual	90
Tabel 4.5.2 Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Berdasarkan Perbedaan Harga Saham Perusahaan Asuransi	91
Tabel 4.5.3 Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Berdasarkan Perbedaan Tingkat Suku Bunga	92
Tabel 4.5.4 Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Berdasarkan Perbedaan Volatilitas	93
Tabel 4.5.5 Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Berdasarkan Perbedaan Frekuensi Bencana Alam	94
Tabel 4.5.6 Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Berdasarkan Perbedaan <i>Trigger Level</i>	95

DAFTAR SIMBOL

S	:	Harga saham
K	:	<i>Strike price</i>
σ	:	Volatilitas
μ	:	<i>Drift rate</i>
t	:	Waktu
T	:	Waktu jatuh tempo (<i>maturity date</i>)
Δt	:	Perubahan waktu / selang waktu
dW	:	Proses Wiener
ϵ	:	Bilangan acak berdistribusi normal standar
λ	:	Intensitas lompatan harga saham
$N(t)$:	Proses Poisson
$C(t)$:	Proses <i>Compound Poisson</i>
\mathcal{F}	:	Filtrasi
r	:	<i>Interest rate</i> (tingkat suku bunga)
ρ	:	Koefisien korelasi
I	:	Fungsi Bessel
X	:	Penurunan log harga saham
R	:	Kerugian bencana alam
$L(t)$:	Total kerugian bencana alam saat t
μ_X	:	Mean log harga saham
μ_R	:	Mean kerugian akibat bencana alam saat t
\mathcal{L}	:	Batas kerugian bencana alam agar opsi dapat di- <i>exercise</i> (<i>trigger level</i>)
κ	:	<i>Stopping time</i>
τ	:	<i>Optimal stopping time</i>
\mathcal{T}_t	:	Himpunan seluruh <i>stopping time</i>
\mathcal{K}	:	<i>Optimal exercise boundary</i>
$P(t)$:	Harga opsi put Amerika perpetual
$o(\Delta t)$:	Error
\mathbb{E}	:	Ekspektasi
\mathbb{P}	:	Ukuran probabilitas P
\mathbb{Q}	:	Ukuran probabilitas Q

DAFTAR ISTILAH

<i>Catastrophe</i>	:	Bencana alam
<i>Policy holder</i>	:	Pemegang polis
<i>Reinsurer</i>	:	Pihak yang mengasuransikan
<i>Reinsured</i>	:	Pihak yang diasuransikan
<i>Holder</i>	:	Pemegang opsi
<i>Writer</i>	:	Penerbit opsi
<i>Exercise Opsi</i>	:	Menjual atau membeli opsi
<i>Underlying asset</i>	:	Aset yang mendasari produk (opsi)
<i>Strike price</i>	:	Harga perjanjian
<i>Financial derivative</i>	:	Produk keuangan turunan
<i>Maturity time</i>	:	Jangka waktu kontrak opsi
<i>Equity</i>	:	Selisih nilai aset dan hutang
<i>Drift rate</i>	:	Perubaha rata-rata per satuan unit waktu
<i>Variance rate</i>	:	Perubahan variansi per satuan unit waktu
<i>Interest rate</i>	:	Tingkat suku bunga
<i>Hedging</i>	:	Lindung nilai
<i>Payoff</i>	:	Harga opsi saat di- <i>exercise</i>
<i>Intrinsic value</i>	:	Harga opsi saat di- <i>exercise</i>
<i>Stopping time</i>	:	Waktu opsi di <i>exercise</i>
<i>Optimal stopping time</i>	:	Waktu optimal opsi di- <i>exercise</i>
<i>Trigger level</i>	:	Batas minimum kerugian bencana alam
<i>In-the-money (put)</i>	:	Kondisi pada saat harga saham lebih rendah dibandingkan <i>strike price</i>
<i>Out-of-money (put)</i>	:	Kondisi pada saat harga saham lebih tinggi dibandingkan <i>strike price</i>

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat penulisan Tugas Akhir.

1.1 Latar Belakang

Bencana alam (*natural catastrophe*) merupakan kejadian yang sulit diprediksi dan menimbulkan kerugian yang cukup besar. Menurut data dari Badan Nasional Penanggulangan Bencana (BNPB), tercatat sebanyak 2.575 kasus bencana alam yang terdiri dari banjir, tanah longsor, gelombang pasang, puting beliung, kekeringan, kebakaran hutan, gempa bumi, tsunami dan letusan gunung api terjadi di Indonesia pada tahun 2018 [1]. Salah satu pihak yang terkena dampak dari bencana alam adalah industri asuransi. Meskipun dampak dari bencana alam terhadap suatu perusahaan asuransi bersifat tidak langsung, namun kerugian akibat bencana alam tidak bisa diabaikan begitu saja. Pemegang polis (*policy holder*) yang memiliki perlindungan asuransi terhadap kerugian bencana bisa mengajukan klaim kepada perusahaan asuransi. Besar klaim yang diajukan oleh pemegang polis juga bervariasi. Apabila besar klaim yang diterima oleh perusahaan asuransi melebihi anggaran pembayaran klaim yang telah disediakan, maka perusahaan akan mengalami kerugian.

Tindakan pencegahan terhadap kerugian akibat bencana alam yang biasa dilakukan oleh perusahaan asuransi adalah mengasuransikan perusahaannya melalui reasuransi. Reasuransi adalah transaksi yang terjadi di mana perusahaan asuransi (*the reinsurer*) bersedia untuk mengganti rugi semua atau sebagian kerugian yang dialami oleh perusahaan asuransi lain (*the reinsured*). Sebagai gantinya, perusahaan yang mengasuransikan perusahaannya (*the reinsured*) harus membayar premi ke perusahaan yang menanggung (*the reinsurer*) [2]. Pada kenyataannya, reasuransi tidak bisa menutup semua kerugian akibat bencana alam. Dua alasan utamanya adalah kerugian yang terjadi akibat bencana alam yang relatif besar dan frekuensi bencana alam yang terjadi semakin meningkat [3]. Oleh karena itu, perusahaan

asuransi mulai menggunakan produk keuangan turunan seperti *futures*, *options*, dan *bonds* untuk mendiversifikasi kerugian yang mereka alami.

Opsi *Catastrophe Equity Put* (CatEPut) merupakan salah satu produk bencana alam turunan (*catastrophe derivative*) yang telah digunakan sejak tahun 1996 sebagai *alternative risk transfer* (ART) oleh perusahaan asuransi untuk menutupi kerugian akibat bencana alam. Opsi CatEPut adalah kontrak antara dua pihak yaitu *holder* dan *writer* yang memberikan hak kepada *holder* (perusahaan asuransi) untuk menjual sejumlah sahamnya kepada *writer* (perusahaan asuransi, reasuransi, bank investasi, atau institusi keuangan) pada harga tertentu dalam jangka waktu berlakunya opsi apabila dipenuhi dua kondisi yaitu total kerugian yang dialami oleh *holder* telah melebihi batas yang disepakati oleh kedua belah pihak pada saat membuat kontrak perjanjian dan nilai saham perusahaan asuransi lebih rendah dibandingkan dengan harga *exercise* opsi. Melalui opsi CatEPut perusahaan asuransi bisa mendapatkan dana secara langsung untuk menjalankan kembali operasional perusahaan dengan membayarkan premi pada harga tertentu, atau dengan kata lain opsi CatEPut bukanlah pinjaman yang harus dilunasi untuk membayarkan klaim akibat bencana alam [4].

Penelitian untuk menentukan harga opsi CatEPut pertama kali dilakukan oleh Cox, dkk [5] pada tahun 2004 dengan asumsi bahwa pergerakan harga saham mengikuti gerak Brown geometrik atau *geometric Brownian motion* dan total kerugian bencana alam mengikuti proses Poisson. Bergerak dari model yang dikemukakan oleh Cox, S.H, Jaimungal dan Wang [6] melakukan generalisasi model tersebut dengan mengasumsikan bahwa total kerugian akibat bencana mengikuti proses *compound Poisson* di tahun 2006. Pada tahun 2009, Lin, dkk [7] melakukan penelitian serupa untuk menentukan harga opsi CatEPut dengan menggunakan opsi tipe Amerika perpetual karena sifatnya yang memiliki jangka berlaku relatif lama dan bisa di-*exercise* kapanpun selama dalam rentang waktu berlakunya opsi.

Beberapa penelitian untuk menentukan harga opsi CatEPut yang telah ada, mengasumsikan bahwa terdapat hubungan yang posi-

tif antara harga saham perusahaan asuransi dengan kerugian akibat bencana alam yaitu turunnya harga saham perusahaan asuransi jika terjadi bencana alam [8]. Faktanya, setiap bencana alam yang terjadi memiliki pengaruh berbeda terhadap saham perusahaan asuransi sehingga diperlukan penelitian lebih lanjut untuk menentukan harga opsi CatEPut dengan adanya *moderate correlation* antara pergerakan harga saham perusahaan asuransi dengan kerugian akibat bencana alam. Artinya, hubungan antara harga saham perusahaan asuransi dengan kerugian akibat bencana alam tidak sepenuhnya bersifat positif. Oleh karena itu, pada Tugas Akhir ini penulis melakukan kajian terhadap formula analitis harga opsi CatEPut Amerika perpetual dengan adanya *moderate correlation coefficient* di antara harga saham perusahaan asuransi dengan total kerugian akibat bencana alam dari model pergerakan harga saham dan total kerugian akibat bencana alam.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut.

1. Bagaimana model dari pergerakan harga saham dan total kerugian akibat bencana alam (*aggregate catastrophe loss*) ?
2. Bagaimana proses untuk mendapatkan formula analitis dari harga opsi CatEput Amerika perpetual ?

1.3 Batasan Masalah

Ruang lingkup permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Opsi put yang digunakan dalam penentuan harga opsi CatEPut menggunakan opsi put Amerika perpetual.
2. *Underlying asset* perusahaan asuransi yang dibahas pada Tugas Akhir ini adalah saham perusahaan asuransi.

3. Penentuan harga opsi CatEPut Amerika perpetual menggunakan asumsi kondisi pasar *arbitrage-free*.
4. Tidak ada biaya transaksi dan pengaruh dividen.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui model dari pergerakan harga saham dan total kerugian akibat bencana alam (*aggregate catastrophe loss*).
2. Mengetahui proses untuk mendapatkan formula analitis dari harga opsi CatEPut Amerika perpetual.

1.5 Manfaat

Tugas Akhir ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Diperoleh pengetahuan mengenai pengaruh adanya hubungan antara harga saham dengan kerugian akibat bencana alam (*natural catastrophe*) terhadap harga suatu opsi CatEPut Amerika perpetual.
2. Digunakan sebagai pertimbangan oleh perusahaan asuransi untuk mendiversifikasi kerugian perusahaan akibat bencana alam.

1.6 Sistematika Penulisan

Secara garis besar, Tugas Akhir ini terdiri dari lima bab dan lampiran yaitu :

1. BAB I PENDAHULUAN

Pada BAB I dijelaskan gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi Latar Belakang, Rumusan Masalah, Batasan Masalah, Tujuan, Manfaat, dan Sistematika Penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada BAB II diuraikan tentang teori utama maupun materi penunjang yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir, di antaranya adalah Penelitian Terdahulu, Proses Stokastik, Proses Wiener, Lemma Itô, Proses Poisson, Proses *compound Poisson*, Model Lompatan (*jump*), Opsi Put Saham, Opsi Amerika Perpetual, Opsi *Catastrophe Equity Put* (CatEPut), Aljabar Himpunan, Martingale, Valuasi *Risk-Neutral*, Peubah Acak Bivariat Kontinu, dan Transformasi Laplace.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Pada BAB III dideskripsikan tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir yaitu Studi Literatur, Mengonstruksi Model Pergerakan Harga Saham dan Total Kerugian Akibat Bencana Alam, Penentuan Distribusi Bersama untuk Harga Saham dan Kerugian Bencana Alam, Menentukan Formula Analitis Harga Opsi Put Amerika Perpetual, Menentukan Formula Analitis Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual, Melakukan Simulasi Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Menggunakan *Software* Matlab, Penarikan Kesimpulan serta Pemberian Saran, dan Penulisan Laporan Tugas Akhir.

4. BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada BAB IV akan dibahas secara detail mengenai Konstruksi Model Pergerakan Harga Saham dan Kerugian Akibat Bencana serta Penentuan Formula Analitis dari Opsi CatEPut Saham.

5. BAB V KESIMPULAN

Pada BAB V berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisa dan pembahasan Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan teori yang menunjang penulisan Tugas Akhir, antara lain penjelasan mengenai proses stokastik, proses Wiener, Lemma Itô, proses Poisson, proses *compound Poisson*, model lompatan (*jump*), opsi put saham, opsi Amerika perpetual, opsi *Catastrophe Equity Put* (CatEPut), aljabar himpunan, martingale, valuasi *risk-neutral*, peubah acak bivariat kontinu, dan transformasi Laplace.

2.1 Penelitian Terdahulu

Penulisan Tugas Akhir ini merujuk pada beberapa penelitian sebelumnya yang sesuai dengan topik yang diambil. Rujukan pertama yang digunakan adalah penelitian yang dilakukan oleh X.Sheldon Lin pada tahun 2009 dengan judul "*Pricing Perpetual American Catastrophe Put Options : A Penalty Function Approach*" [7]. Penelitian ini menggunakan model yang dikemukakan oleh Samuel H. Cox [5] dan Sebastian Jaimungal [6]. Samuel H. Cox mengonstruksi model pergerakan harga saham berdasarkan gerak Brown geometrik atau *geometric Brownian motion* dengan *jump-diffusion* dan mengasumsikan bahwa total kerugian akibat bencana alam mengikuti proses Poisson. Jaimungal melakukan generalisasi model dari Samuel H. Cox dengan asumsi bahwa kerugian akibat bencana mengikuti proses *compound Poisson*. Dua penelitian tersebut menggunakan opsi tipe Eropa untuk mendapatkan harga opsi CatEPut. Oleh karena itu, X. Sheldon melakukan penelitian lebih lanjut untuk menentukan harga opsi CatEPut dengan menggunakan opsi tipe Amerika. Penelitian ini dilakukan karena pada praktiknya, opsi CatEPut bisa di-*exercise* kapanpun saat total kerugian akibat bencana telah melebihi batas yang telah ditetapkan di dalam kontrak opsi sesuai dengan sifat dari opsi tipe Amerika.

Penulis juga mengambil rujukan penelitian dari Hwa-Sung Kim pada tahun 2014 dengan judul "*Pricing Perpetual American CatEPut Options When Stock Prices Are Correlated With Catastrophe Losses*"[8]. Penelitian tersebut menggunakan model dengan asumsi

adanya hubungan antara pergerakan harga saham dan kerugian akibat bencana alam untuk menentukan harga opsi CatEPut. Penelitian ini dilakukan sebagai penyempurnaan dari hasil penelitian sebelumnya yang mengasumsikan bahwa hubungan antara pergerakan harga saham perusahaan asuransi dengan total kerugian akibat bencana alam bersifat positif. Sehingga, Hwa-Sung Kim menggunakan *moderate correlation coefficient* dalam menentukan formula analitis dari harga opsi CatEPut Amerika perpetual.

2.2 Proses Stokastik

Proses stokastik adalah koleksi peubah acak yang nilainya berubah terhadap waktu dengan cara yang tidak tentu [9]. Proses stokastik sering digunakan untuk memodelkan sistem yang mengandung unsur keacakan di dalamnya. Sebagai akibatnya, suatu peubah acak yang mengikuti proses stokastik tidak dapat diketahui nilainya pada masa yang akan datang secara pasti melainkan peluang terjadinya saja. Pergerakan harga saham merupakan salah satu contoh dari proses stokastik [10]. Berdasarkan parameter waktu, proses stokastik dibedakan menjadi dua jenis yaitu proses stokastik waktu diskrit dan proses stokastik waktu kontinu.

1. Proses stokastik waktu diskrit

Suatu peubah acak X_n dikatakan mengikuti proses stokastik waktu diskrit apabila peubah acak tersebut memiliki nilai yang berubah-ubah untuk setiap waktu ke- n dengan $n = 0, 1, 2, \dots$ atau dapat dinotasikan dengan

$$\{X_n, n \geq 0\}. \quad (2.2.1)$$

2. Proses stokastik waktu kontinu

Suatu peubah acak $X(t)$ dikatakan mengikuti proses stokastik waktu kontinu apabila peubah acak tersebut memiliki nilai yang berubah-ubah untuk setiap waktu kontinu, $t \geq 0$ atau dapat dinotasikan dengan

$$\{X(t) \mid t \geq 0\}. \quad (2.2.2)$$

2.3 Proses Wiener

Proses Wiener merupakan salah satu bentuk dari proses stokastik Markov yang sering disebut dengan gerak Brown. Peubah acak yang berdistribusi normal standar yaitu memiliki rata-rata 0 dan variansi 1 dikatakan mengikuti proses Wiener [11]. Suatu peubah acak $W(t)$ yang mengikuti proses Wiener memiliki sifat-sifat berikut ini.

Sifat 2.3.1. *Perubahan nilai W yaitu ΔW selama selang waktu Δt adalah*

$$\Delta W = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (2.3.1)$$

dimana, ϵ memiliki peluang distribusi normal standar, $N(0, 1)$.

Sifat 2.3.2. *Bila $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ dan didefinisikan increment dari $W(t)$ dengan*

$$\begin{aligned} Y_1 &= W(t_1) - W(t_0) \\ Y_2 &= W(t_2) - W(t_1) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ Y_n &= W(t_n) - W(t_{n-1}) \end{aligned}$$

maka

- a. $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ saling bebas dan berdistribusi normal.
- b. $\mathbb{E}(Y_j) = 0$ untuk setiap j .
- c. $\text{var}(Y_j) = t_j - t_{j-1}$ untuk setiap j .

2.3.1 Generalisasi Proses Wiener

Pada proses stokastik, perubahan rata-rata per satuan unit waktu dinamakan dengan *drift rate* dan perubahan variansi per satuan unit waktu dinamakan dengan *variance rate* [11]. Pada proses Wiener, ΔW terjadi pada selang waktu yang kecil, Δt . Apabila diambil $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta W$, maka diperoleh proses Wiener pada selang waktu kontinu sebagai dW . Generalisasi proses Wiener untuk peubah acak x dapat didefinisikan sebagai

$$dx = a dt + b dW \quad (2.3.2)$$

dimana a adalah *drift rate* dan b adalah *variance rate* yang nilainya konstan dan dW adalah proses Wiener. Pada selang waktu yang sangat kecil, Δt , generalisasi proses Wiener dapat dinyatakan sebagai

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (2.3.3)$$

dengan ϵ berdistribusi normal standar $N(0, 1)$.

2.3.2 Model Pergerakan Harga Saham Berdasarkan Generalisasi Proses Wiener

Berdasarkan generalisasi proses Wiener, $dx = a dt + b dW$, diasumsikan peubah acak x sebagai harga saham S sehingga diperoleh $dS = a dt + b dW$. Jika S merupakan harga saham pada saat t , maka keuntungan harapan dari harga saham, S untuk selang waktu yang kecil adalah $\mu S \Delta t$ dengan μ sebagai *drift rate*. Sedangkan standar deviasi harga saham pada interval waktu Δt , proporsional terhadap harga saham yakni $\sigma S dW$. Sehingga, model pergerakan harga saham untuk $\Delta t \rightarrow 0$ yang mengikuti proses Wiener adalah

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \quad (2.3.4)$$

Model pergerakan harga saham tersebut dikenal dengan gerak Brown geometrik [11].

2.4 Lemma Itô

Harga setiap produk keuangan turunan merupakan fungsi dari peubah acak stokastik produk keuangan turunannya dan waktu. Oleh karena itu, untuk mendapatkan harga produk keuangan turunan dengan *underlying asset* berupa saham, dibutuhkan model dari pergerakan harga saham berdasarkan Lemma Itô. Proses stokastik yang berkaitan dengan Lemma Itô adalah proses Itô. Suatu peubah acak x yang mengikuti proses Itô didefinisikan sebagai

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW \quad (2.4.1)$$

dengan dW adalah proses Wiener dan a dan b adalah fungsi terhadap x dan t . Pada proses Itô, peubah acak x memiliki *drift rate* a dan *variance rate* b . Lemma Itô menunjukkan bahwa fungsi G terhadap peubah acak x dan t mengikuti proses berikut [11].

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dW. \quad (2.4.2)$$

Berdasarkan model gerak Brown geometrik, jika peubah acak x didefinisikan sebagai harga saham S , maka dengan menggunakan Lemma Itô fungsi G terhadap S dan t dinyatakan sebagai

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dW. \quad (2.4.3)$$

Jika didefinisikan $G = \log S$, maka model dari pergerakan harga saham berdasarkan Lemma Itô dapat dinyatakan sebagai

$$d \log S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW. \quad (2.4.4)$$

2.5 Proses Poisson

Proses Poisson berkaitan dengan peubah acak eksponensial dan Poisson. Oleh karena itu, akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai peubah acak eksponensial dan Poisson.

Definisi 2.5.1. (Distribusi Eksponensial) [9]

Peubah acak non-negatif x dengan parameter $\lambda > 0$ dikatakan sebagai peubah acak eksponensial apabila memiliki fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } x < 0. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Definisi 2.5.2. (Distribusi Poisson) [9]

Peubah acak x dengan parameter λ dikatakan sebagai peubah acak Poisson apabila memiliki fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^x}{x!} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ dan } \lambda > 0 \quad (2.5.2)$$

yang mana Persamaan 2.5.2 selanjutnya disebut dengan distribusi Poisson.

Definisi 2.5.3. (Proses Poisson) [9]

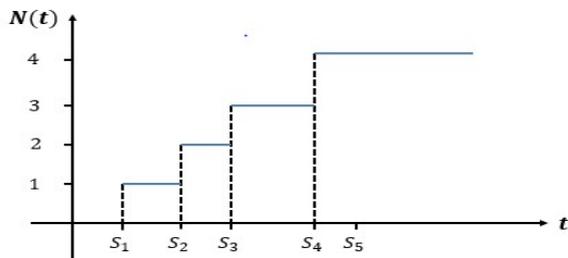
Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ dimana $N(t)$ adalah total waktu kejadian yang terjadi pada interval waktu $(0, t]$ dan didefinisikan sebagai

$$N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \quad t \geq 0 \quad (2.5.3)$$

dikatakan sebagai proses Poisson dengan parameter λ apabila $\{T_n, n \geq 1\}$ adalah barisan dari peubah acak eksponensial yang saling bebas dan memiliki distribusi yang identik satu sama lain. Dimana T_n merupakan selisih waktu kejadian ke n , S_n dengan waktu kejadian ke $(n - 1)$, S_{n-1} , yaitu

$$T_n = S_n - S_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (2.5.4)$$

Adapun contoh lintasan dari proses Poisson dapat dilihat pada Gambar 2.5.1 di bawah ini.



Gambar 2.5.1. Lintasan Proses Poisson

2.6 Proses Compound Poisson

Proses *compound Poisson* biasa digunakan untuk memodelkan beberapa kejadian yang terjadi pada waktu yang bersamaan [9].

Definisi 2.6.1. (Proses Compound Poisson) [9]

Jika λ dan $\{C_n, n \geq 1\}$ merupakan barisan peubah acak dengan nilai ekspektasi τ dan momen kedua s^2 yang saling bebas, memiliki distribusi identik satu sama lain, serta mengikuti proses Poisson yang saling bebas, maka $\{C(t), t \geq 0\}$ dikatakan sebagai proses *compound Poisson* untuk

$$C(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} C_n, \quad ; t \geq 0. \quad (2.6.1)$$

2.7 Model Lompatan (Jump) Saham

Model lompatan (*jump*) pada harga saham memiliki kaitan erat dengan proses Poisson dan proses *compound Poisson* [10]. Misalkan suatu lompatan (*jump*) yang terjadi pada interval waktu t dinotasikan dengan N_t . Peluang terjadinya suatu lompatan (*jump*) pada selang waktu yang singkat Δt mengikuti distribusi Bernoulli [12].

$$P(N_t - N_{t-\Delta t} = 1) = \lambda \Delta t \quad \text{dan} \quad P(N_t - N_{t-\Delta t} = 0) = 1 - \lambda \Delta t \quad (2.7.1)$$

dengan $\Delta t = \frac{t}{n}$ dan λ merupakan intensitas terjadinya lompatan (*jump*) dimana $0 < \lambda \Delta t < 1$. Sehingga apabila terjadi sebanyak k lompatan pada interval $[0, t]$, maka lompatan tersebut memiliki peluang distribusi Binomial, yaitu

$$P(N_t - N_0 = k) = \binom{n}{k} (\lambda t)^k (1 - \lambda t)^{n-k}. \quad (2.7.2)$$

Untuk $n \rightarrow \infty$ peluang distribusi pada Persamaan 2.7.2 menjadi

$$P(N_t - N_0 = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \quad (2.7.3)$$

Artinya, apabila terjadi sebanyak k lompatan pada interval $[0, t]$, maka lompatan tersebut memiliki peluang distribusi Poisson dengan parameter $\lambda t > 0$.

Kondisi ukuran loncatan dari proses Poisson yang selalu sama dengan 1 dianggap kurang fleksibel untuk memodelkan harga saham, sehingga diperlukan adanya proses stokastik lain yang dikenal dengan proses *compound Poisson*. Model untuk lompatan harga saham yang mengikuti proses *compound Poisson* didefinisikan sebagai

$$dS = (q - 1)S dN \quad (2.7.4)$$

dengan q adalah konstanta pada interval $(0, \infty)$ dan dN adalah proses Poisson [12]. Apabila harga saham mengikuti gerak Brown geometrik dan proses *compound Poisson*, maka model dari pergerakan harga saham diberikan sebagai berikut.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW + (q - 1)S dN \quad (2.7.5)$$

dengan μ sebagai *drift rate*, σ adalah *variance rate* dan dW adalah proses Wiener. Model pergerakan harga saham pada Persamaan 2.7.5 tersebut, disebut dengan proses *jump-diffusion*.

2.8 Opsi Put Saham

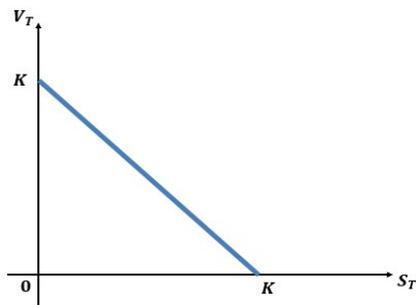
Opsi merupakan salah satu produk keuangan turunan yang ada di pasar modal. Sebagai salah satu alat lindung nilai (*hedging*) suatu

underlying asset, opsi adalah suatu kontrak perjanjian yang memberikan hak kepada *holder* untuk menjual ke, atau membeli dari, *writer* suatu *underlying asset* (komoditi, surat berharga keuangan, saham, atau mata uang asing) pada tingkat harga tertentu yang telah ditetapkan di muka (*strike price*) pada suatu waktu tertentu (*maturity date*) yang telah ditentukan [10].

Salah satu tipe opsi adalah opsi put. Opsi put adalah kontrak perjanjian yang memberikan hak kepada *holder* untuk menjual *underlying asset* dari *writer* dengan harga tertentu yang telah di-sepakati (*strike price*) pada jangka waktu tertentu (*maturity date*) yang telah ditentukan. Jika didefinisikan K sebagai *strike price*, S sebagai harga saham, dan T sebagai *maturity date*, maka *payoff* opsi put pada saat T adalah

$$V(S, T) = \begin{cases} K - S(T), & \text{untuk } S(T) < K \\ 0, & \text{untuk } S(T) \geq K. \end{cases} \quad (2.8.1)$$

Sehingga, berdasarkan fungsi *payoff* pada Persamaan 2.8.1, diperoleh diagram fungsi *payoff* sebagai berikut



Gambar 2.8.1. Diagram Fungsi Payoff Opsi Put

2.9 Opsi Amerika Perpetual

Opsi Amerika perpetual adalah salah satu tipe opsi yang tidak memiliki *maturity date* [10]. Suatu opsi Amerika dikatakan perpetual apabila memenuhi sifat-sifat berikut ini.

1. Harga opsi tidak bergantung pada waktu karena opsi ini tidak memiliki *maturity date*. Sehingga, *payoff* dari opsi Amerika perpetual hanya bergantung pada harga saham dan dinotasikan dengan

$$V = V(S).$$

2. Harga opsi tidak pernah lebih rendah dari fungsi *payoff*.

$$V(S) \geq (S - K)^+ \quad (\text{Opsi Call})$$

$$V(S) \geq (K - S)^+ \quad (\text{Opsi Put})$$

Harga opsi akan lebih rendah dari fungsi *payoff* apabila terdapat arbitrase.

3. Misalkan $V_L(S, t)$ adalah nilai dari opsi Amerika dengan *strike price* K pada saat $t = T$, maka

$$V(S) \geq V_L(S, t).$$

4. Interval harga *underlying asset* pada opsi put Amerika perpetual ($0 \leq S < \infty$) dapat dipartisi menjadi dua bagian yaitu daerah kontinu Σ_1 dan daerah henti Σ_2 . Pada saat $S \in \Sigma_1$ harga opsi lebih tinggi dibandingkan *payoff* yaitu

$$V(S) > (K - S)^+$$

sehingga *holder* tidak perlu meng-*exercise* opsi untuk menghindari kerugian. Namun, pada saat $S \in \Sigma_2$ harga opsi sebanding dengan *payoff* yaitu

$$V(S) = (K - S)^+$$

sehingga *holder* harus me-*exercise* opsi sesegera mungkin untuk menghindari kerugian.

2.10 Opsi Catastrophe Equity Put (CatEPut)

Opsi CatEPut adalah kontrak antara dua pihak yaitu *holder* dan *writer* yang memberikan hak kepada *holder* yang dalam hal ini adalah perusahaan asuransi untuk menjual sejumlah saham yang dimiliki oleh perusahaannya kepada *writer* (perusahaan asuransi, reasuransi, institusi keuangan, bank investasi, dll) dengan harga tertentu selama jangka waktu berlakunya opsi apabila memenuhi dua kondisi yaitu harga saham perusahaan asuransi lebih rendah dibandingkan dengan harga *exercise* opsi tersebut dan total kerugian yang dialami oleh perusahaan telah melebihi batas yang telah ditentukan sebelumnya [3].

Jika didefinisikan K sebagai *strike price*, S sebagai harga saham, T sebagai *maturity date*, maka *payoff* opsi CatEPut didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \text{payoff} &= \mathbf{1}_{\{L(T) - L(t) > \mathcal{L}\}} \\ &= \begin{cases} K - S(T), & \text{untuk } S(T) < K \text{ dan } L(T) - L(t) > \mathcal{L} \\ 0, & \text{untuk } S(T) \geq K \text{ atau } L(T) - L(t) \leq \mathcal{L} \end{cases} \end{aligned}$$

dengan L adalah kerugian akibat bencana alam dan \mathcal{L} sebagai *trigger level*.

2.11 Aljabar Himpunan

Konsep mengenai σ -aljabar sangat diperlukan dalam teori peluang. Pada teori peluang, σ -aljabar diartikan sebagai informasi mengenai hasil percobaan acak. Berikut akan diberikan penjelasan mengenai aljabar, σ -aljabar dan filtrasi.

2.11.1 Aljabar dan σ -aljabar

Definisi 2.11.1. (*aljabar*) [14]

Misalkan Ω adalah sebuah himpunan dan \mathcal{F} adalah koleksi sub-himpunan dari Ω . Suatu aljabar pada Ω adalah koleksi himpunan \mathcal{F} dengan tiga sifat berikut.

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Bila $A \in \mathcal{F}$ maka $A^c \in \mathcal{F}$
3. Bila $A, B \in \mathcal{F}$ maka $A \cup B \in \mathcal{F}$

Berdasarkan hukum De Morgan, bila $A, B \in \mathcal{F}$ maka $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$ sehingga aljabar pada Ω adalah keluarga sub-himpunan dari Ω yang tertutup oleh sejumlah operasi himpunan \cup dan/atau \cap yang terhingga (*finite*).

Definisi 2.11.2. (σ -aljabar) [14]

Misal Ω adalah sebuah himpunan dan \mathcal{F} adalah koleksi sub-himpunan dari Ω . Koleksi himpunan \mathcal{F} disebut σ -aljabar pada Ω bila \mathcal{F} adalah aljabar dan bila A_1, A_2, \dots adalah barisan di \mathcal{F} maka $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

2.11.2 Filtrasi

Sebuah σ -aljabar yang paling sederhana yang bisa dibangun pada Ω adalah \mathcal{F}_t yaitu

$$\mathcal{F}_t = \{\Omega, \emptyset\} \tag{2.11.1}$$

Sedangkan σ -aljabar yang paling kompleks yang bisa dibangun pada Ω adalah \mathcal{F} yaitu keluarga seluruh sub-himpunan dari Ω atau disebut himpunan kuasa dari Ω [14].

Definisi 2.11.3. (Filtrasi) [12]

Bila $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ adalah keluarga sub- σ -aljabar dari \mathcal{F} dengan sifat $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ maka keluarga sub- σ -aljabar tersebut dinamakan filtrasi.

2.12 Martingale

Pada matematika, kata "martingale" sering dikaitkan dengan percobaan *fair gambling* [10]. Proses Wiener, dW merupakan salah satu contoh martingale diskrit.

Definisi 2.12.1. Martingale

Proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ disebut martingale bila memenuhi sifat - sifat berikut ini.

1. $X(t)$ dapat diintegrasikan $\forall t \in T$
2. $\{X(t)\}$ teradaptasi oleh filtrasi $\{\mathcal{F}(t)\}$
3. $E(X(t)|\mathcal{F}(s)) = X(s)$ untuk $s \leq t$

2.13 Valuasi Risk-Neutral pada Gerak Brown Geometrik

Berdasarkan gerak Brown geometrik $dS = \mu S dt + \sigma S dW$, dapat diperoleh

$$dS = rS dt + \sigma S \left[\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW \right] \quad (2.13.1)$$

dimana dW adalah proses Wiener pada ukuran probabilitas P . Jika market price of risk pada ukuran probabilitas Q didefinisikan dengan

$$\gamma = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (2.13.2)$$

dan drift gerak Brown z_t^γ didefinisikan sebagai

$$dz_t^\gamma = \gamma dt + dW. \quad (2.13.3)$$

maka Persamaan 2.13.1 menjadi

$$dS = rS dt + \sigma S dz_t^\gamma. \quad (2.13.4)$$

Berdasarkan Persamaan 2.13.1 dan 2.13.2 dapat dilihat bahwa risk-neutral valuation principle untuk gerak Brown geometrik memiliki perubahan sebagai berikut [12]

$$\begin{aligned} \mu &\rightarrow r \\ P &\rightarrow Q \\ W &\rightarrow z^\gamma. \end{aligned} \quad (2.13.5)$$

2.14 Peubah Acak Bivariat Kontinu

Dua peubah acak yang kontinu memiliki distribusi kepadatan peluang yang didefinisikan sebagai

Definisi 2.14.1. [25] *Distribusi kepadatan peluang dari dua peubah acak X dan Y adalah suatu fungsi $f(x, y)$ yang dapat diintegrasikan sedemikian hingga*

1. $f(x, y) \geq 0$ untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; dan

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

Selain itu, dua peubah acak yang kontinu juga memiliki fungsi kepadatan peluang marginal yang didefinisikan sebagai

Definisi 2.14.2. [25] *Misalkan (X, Y) adalah peubah acak bivariat kontinu, dan $f(x, y)$ adalah fungsi kepadatan peluang bersama dari fungsi X dan Y . Fungsi*

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (2.14.1)$$

adalah fungsi kepadatan peluang marginal dari X dan

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad (2.14.2)$$

adalah fungsi kepadatan peluang marginal dari Y .

2.14.1 Distribusi Eksponensial Bivariat

Distribusi eksponensial bivariat merupakan salah satu distribusi dari peubah acak bivariat kontinu dan memiliki peranan penting dalam teori reliabilitas [18]. Kata "eksponensial bivariat" berarti bahwa distribusi eksponensial bivariat merupakan distribusi bivariat yang mana fungsi kepadatan peluang marginal kedua peubah acaknya adalah eksponensial [19]. Berikut adalah macam-macam distribusi eksponensial bivariat.

1. Distribusi Eksponensial Bivariat Gumbel

Distribusi eksponensial bivariat Gumbel memiliki fungsi kepadatan peluang bersama sebagai berikut.

$$f(x, y) = \{(1 - \theta)\alpha\beta + \theta\alpha^2\beta x + \theta\alpha\beta^2 y + \theta^2\alpha^2\beta^2 xy | \bar{F}(x, y)\}$$

dengan

$$\bar{F}(x, y) = e^{-(\alpha x + \beta y + \theta\alpha\beta xy)}$$

dan $x > 0, y > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$, dan $0 < \theta < 1$ [18].

2. Distribusi Eksponensial Bivariat Hougaard

Distribusi eksponensial bivariat Hougaard memiliki fungsi kepadatan peluang bersama sebagai berikut.

$$f(x, y) = \frac{(xy)^{r-1}}{(\theta\phi)} \left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^r + \left(\frac{y}{\phi}\right)^r \right]^{\frac{1}{r}-2} \left[r - 1 + \left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^r + \left(\frac{y}{\phi}\right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \right] \bar{F}(x, y)$$

dengan

$$\bar{F}(x, y) = e^{-\left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^r + \left(\frac{y}{\phi}\right)^r \right]^{\frac{1}{r}}}$$

dan $x > 0, y > 0, \theta \geq 0, \phi \geq 0$, dan $r > 0$ [18].

3. Distribusi Eksponensial Bivariat Downton

Distribusi eksponensial bivariat Downton memiliki fungsi kepadatan peluang bersama sebagai berikut.

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\mu_1\mu_2}{1-\rho} I_0 \left(\frac{2\sqrt{\rho\mu_1\mu_2xy}}{1-\rho} \right) \exp\left(-\frac{\mu_1x + \mu_2y}{1-\rho}\right) \quad (2.14.3)$$

dengan $x > 0, y > 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$, dan $0 \leq \rho < 1$ [18].

4. Distribusi Eksponensial Bivariat Arnold dan Strauss
Distribusi eksponensial bivariat Arnold dan Strauss memiliki fungsi kepadatan peluang bersama sebagai berikut.

$$f(x, y) = K e^{-(ax+by+cyx)}$$

dengan K adalah konstanta normalisasi yang didefinisikan sebagai

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{c} e^{\left(\frac{ab}{c}\right) Ei\left(\frac{ab}{c}\right)}$$

dan $x > 0, y > 0, a > 0, b > 0$, dan $c > 0$ [18].

5. Distribusi Eksponensial Bivariat Freund
Distribusi eksponensial bivariat Freund memiliki fungsi kepadatan peluang bersama sebagai berikut.

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha_1 \beta_2 e^{-\beta_2 y - (\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_2)x}, & \text{jika } x < y \\ \alpha_2 \beta_1 e^{-\beta_1 x - (\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1)y}, & \text{jika } y < x \end{cases}$$

dengan $x > 0, y > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0$, dan $\beta_2 > 0$ [18].

6. Distribusi Eksponensial Bivariat Marshal dan Olkin
Distribusi eksponensial bivariat Mashall dan Olkin memiliki fungsi kepadatan peluang bersama sebagai berikut.

$$f(x, y) = \begin{cases} \theta_1(\theta_2 + \theta_3)e^{-\theta_1 x - (\theta_2 + \theta_3)y}, & \text{jika } x < y \\ \theta_2(\theta_1 + \theta_3)e^{-\theta_2 y - (\theta_1 + \theta_3)x}, & \text{jika } y < x \\ \theta_3 e^{-(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)y}, & \text{jika } x = y \end{cases}$$

dengan $x > 0, y > 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0$, dan $\theta_3 > 0$ [18].

2.15 Transformasi Laplace

Transformasi Laplace merupakan salah satu metode yang biasa digunakan untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan diferensial linier. Jika f adalah suatu fungsi dari bilangan real atau bilangan

kompleks dari variabel waktu, $t > 0$ dan s adalah parameter real atau kompleks, maka transformasi Laplace dari fungsi f didefinisikan sebagai [21]

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt & (2.15.1) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

2.15.1 Transformasi Laplace-Stieltjes

Transformasi Laplace-Stieltjes adalah transformasi Laplace dari suatu ukuran Stieltjes atau ukuran vektor, yang memiliki nilai di ruang banach. Transformasi Laplace-Stieltjes memiliki keterkaitan dengan semigrup. Salah satu contoh semigrup adalah gerak Brown. Jika $F(t)$ adalah fungsi dari $t \geq 0$ dan s adalah bilangan kompleks, maka transformasi Laplace-Stieltjes didefinisikan sebagai s dikalikan dengan transformasi Laplace dari $F(t)$ yaitu [22]

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t) & (2.15.2) \\ &= s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt. \end{aligned}$$

Jika X adalah suatu peubah acak dengan fungsi distribusi kumulatif, F , maka transformasi Laplace-Stieltjes dapat dinyatakan dalam bentuk ekspektasi sebagai

$$\{\mathcal{L}^* F\}(s) = \mathbb{E} [e^{-sX}]. \quad (2.15.3)$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.

3.1 Tahapan Penelitian

Langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan pengumpulan teori pendukung mengenai subjek yang dibahas dalam Tugas Akhir yaitu

- a. Proses stokastik dan Proses Wiener
- b. Lemma Itô
- c. Proses Poisson dan proses *compound* Poisson
- d. Model lompatan (*jump*)
- e. Opsi put saham, opsi Amerika perpetual, dan opsi *catas-trophe equity put* (CatEPut)
- f. Aljabar himpunan
- g. Martingale
- h. Valuasi *risk-neutral* gerak Brown geometrik
- i. Peubah acak bivariat kontinu
- j. Transformasi Laplace

Adapaun literatur yang dicari dapat berasal dari jurnal, buku, atau penelitian terdahulu terkait dengan Tugas Akhir ini.

2. Konstruksi Model Pergerakan Harga Saham dan Kerugian Akibat Bencana Alam

Pada tahap ini akan dikonstruksi model pergerakan harga saham perusahaan asuransi dengan proses *jump-diffusion*. Adapun langkah untuk mengonstruksi model pergerakan harga saham yaitu

- a. Konstruksi model pergerakan harga saham dengan gerak Brown geometrik.
- b. Konstruksi bagian difusi dengan menggunakan proses Poisson.

Sedangkan konstruksi model total kerugian akibat bencana alam (*aggregate catastrophe loss*) akan dilakukan dengan menggunakan proses *compound Poisson*.

3. **Penentuan Distribusi Bersama untuk Harga Saham dan Kerugian Bencana Alam**

Pada tahap ini akan ditentukan suatu distribusi bersama untuk mendapatkan struktur korelasi antara pergerakan harga saham perusahaan asuransi dengan kerugian bencana alam. Penentuan distribusi bersama dilakukan dengan asumsi bahwa apabila terdapat sejumlah kerugian akibat bencana alam, maka terjadi penurunan harga saham perusahaan asuransi pada harga tertentu di saat yang bersamaan.

4. **Konstruksi Formula Analitis Harga Opsi Put Amerika Perpetual**

Pada tahap ini akan dikonstruksi formula analitis dari harga opsi put Amerika perpetual terlebih dahulu. Hal ini dilakukan karena opsi CatEPut Amerika perpetual yang telah di-*exercise* akan menjadi opsi put Amerika perpetual. Konstruksi formula analitis harga opsi put Amerika perpetual akan dilakukan dalam dua tahap yaitu

- a. Konstruksi fungsi *payoff* opsi put Amerika perpetual pada daerah henti (*stopping time*).
- b. Konstruksi fungsi *payoff* opsi put Amerika perpetual pada daerah kontinu.

Adapun penentuan formula analitis opsi put Amerika perpetual pada bagian ini, dilakukan dengan menggunakan asumsi bahwa proses *stock return* mengikuti model yang telah diperoleh pada langkah kedua.

5. **Konstruksi Formula Analitis Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual**

Pada tahap ini akan dikonstruksi formula analitis harga opsi CatEPut Amerika perpetual dari formula analitis harga opsi put Amerika perpetual yang diperoleh di tahap sebelumnya. Penentuan formula analitis harga opsi CatEPut Amerika perpetual dilakukan dengan menggunakan metode martingale dan pendekatan *risk-neutral valuation*, dimana terdapat asumsi bahwa pasar memiliki kondisi *arbitrage-free*.

6. **Simulasi Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Menggunakan Software Matlab**

Pada tahap ini dilakukan simulasi secara numerik untuk mengetahui harga opsi CatEPut Amerika perpetual dengan menggunakan *software* Matlab 2015a. Simulasi dilakukan untuk mengamati pengaruh dari koefisien korelasi terhadap perilaku harga opsi CatEPut Amerika perpetual. Selain itu, akan diamati juga pengaruh beberapa variabel lain terhadap harga opsi CatEPut Amerika perpetual, seperti pengaruh harga saham perusahaan asuransi, tingkat suku bunga, volatilitas, frekuensi bencana alam, dan *trigger level*.

7. **Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran**

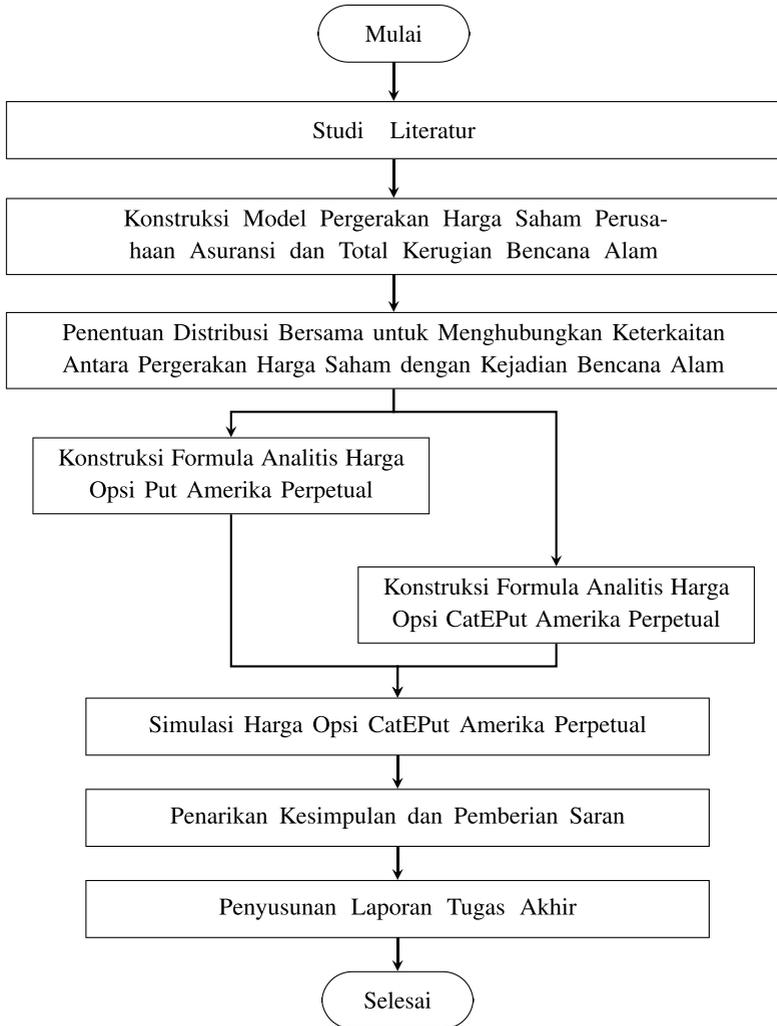
Pada tahap ini ditarik kesimpulan berdasarkan penelitian yang dilakukan pada tahap sebelumnya. Kesimpulan ini merupakan ringkasan akhir dari hasil penelitian yang menjawab tujuan penelitian pada Tugas Akhir. Setelah itu diberikan saran untuk penelitian mendatang berupa perbaikan maupun pengembangan dari penelitian yang telah dilakukan.

8. **Penyusunan Laporan Tugas Akhir**

Pada tahap ini, dilakukan penyusunan laporan Tugas Akhir.

3.2 Skema Metode Penelitian

Secara umum, tahapan penelitian yang akan dilakukan dalam Tugas Akhir ini ditunjukkan dalam diagram alir berikut.



Gambar 3.2.1. Diagram Alir Metode Penelitian

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas proses untuk mendapatkan formula analitis dari harga opsi Catastrophe Equity Put tipe Amerika perpetual dengan adanya *moderate correlation coefficient* di antara kerugian bencana alam dan pergerakan harga saham perusahaan asuransi. Proses untuk mendapatkan formula analitis tersebut akan diawali dengan mendapatkan model dari pergerakan harga saham yang dibahas pada sub bab berikut ini.

4.1 Konstruksi Model Pergerakan Harga Saham dengan Difusi Lompatan (Jump Diffusion)

Model pergerakan harga saham dengan difusi lompatan (*jump diffusion*) terdiri dari dua bagian yaitu gerak Brown geometrik sebagai bagian difusi dan proses Poisson sebagai bagian lompatan. Model pergerakan harga saham dengan difusi lompatan dipilih karena untuk selang waktu yang sangat kecil, Δt , model ini bisa merepresentasikan adanya kemungkinan lompatan harga saham yang cukup tinggi, baik itu lompatan naik maupun lompatan turun[15]. Berikut ini akan dikonstruksi model dari pergerakan harga saham yang mengikuti gerak Brown geometrik terlebih dahulu.

4.1.1 Konstruksi Gerak Brown Geometrik

Berdasarkan generalisasi proses Wiener pada Persamaan 2.3.2 yaitu

$$dx = a dt + b dW,$$

suku pertama pada persamaan di atas dapat diartikan bahwa peubah acak x memiliki *drift rate*, a per satuan unit waktu. Apabila peubah acak x pada generalisasi proses Wiener tersebut diaplikasikan pada harga saham, S dengan *drift rate* yang dinotasikan sebagai μ , maka suku pertama pada Persamaan 2.3.2 menjadi

$$dS = \mu dt. \tag{4.1.1}$$

Pada faktanya, *drift rate* yang bernilai konstan tidak bisa menggambarkan nilai keuntungan harapan (*expected return*) investor dari suatu saham. Oleh karena itu, nilai *drift rate* yang konstan harus digantikan dengan asumsi bahwa yang bernilai konstan adalah nilai keuntungan harapan (*expected rate of return*) investor. Hal ini dikarenakan, berapapun harga saham pada saat t , investor tetap mengharapkan mendapat nilai keuntungan yang sama. Jika S adalah harga saham pada saat t , maka *expected drift rate* dalam S adalah μS . Sehingga, untuk selang waktu yang singkat, Δt , nilai *expected rate of return* dari S adalah $\mu S \Delta t$ dan Persamaan 4.1.1 menjadi

$$dS = \mu S dt \quad (4.1.2)$$

untuk $\Delta t \rightarrow 0$. Adapun solusi dari Persamaan 4.1.2 adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt \\ \frac{dS}{S} &= \mu dt \\ \int_0^t \frac{dS}{S} &= \int_0^t \mu dt \\ \ln S|_0^t &= \mu t|_0^t \\ \ln S(t) - \ln S(0) &= \mu t \\ \ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right) &= \mu t \\ e^{\ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right)} &= e^{\mu t} \\ \frac{S(t)}{S(0)} &= e^{\mu t} \\ S(t) &= S(0)e^{\mu t} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

dimana $S(0)$ adalah harga saham pada saat $t = 0$ dan $S(t)$ adalah harga saham pada saat t . Berdasarkan solusi tersebut, dapat diketahui bahwa dengan mengabaikan volatilitasnya, harga saham akan bergerak secara *compounded* sebesar μ per satuan unit waktu t .

Berikutnya, apabila pergerakan harga saham dipengaruhi juga oleh volatilitas, σ , maka perubahan harga saham pada interval waktu Δt adalah $\sigma S dW$ dengan dW adalah proses Wiener. Sehingga, model pergerakan harga saham menjadi

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \quad (4.1.4)$$

Model pergerakan harga saham pada Persamaan 4.1.4 di atas disebut dengan gerak Brown geometrik dan memiliki solusi yaitu

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S dW \\ dS &= S(\mu dt + \sigma dW) \\ \frac{dS}{S} &= \mu dt + \sigma dW \\ \int_0^t \frac{dS}{S} &= \int_0^t \mu dt + \int_0^t \sigma dW \\ \ln S|_0^t &= \mu t|_0^t + \sigma W|_0^t \\ \ln S(t) - \ln S(0) &= \mu t + \sigma W(t) \\ \ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right) &= \mu t + \sigma W(t) \\ e^{\ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right)} &= e^{\mu t + \sigma W(t)} \\ \frac{S(t)}{S(0)} &= e^{\mu t + \sigma W(t)} \\ S(t) &= S(0)e^{\mu t + \sigma W(t)}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

4.1.2 Gerak Brown Geometrik dengan Lemma Itô

Harga dari suatu opsi dengan *underlying asset* berupa saham merupakan suatu fungsi dengan variabel stokastik harga saham dan waktu. Oleh karena itu, digunakan Lemma Itô pada model pergerakan harga saham yang mengikuti gerak Brown geometrik. Berdasarkan gerak Brown geometrik pada Persamaan 4.1.4, dapat diketahui bahwa *drift rate* nya adalah μS dan *variance rate* nya σS . Jika *drift rate* dan

variance rate dari gerak Brown geometrik disubstitusikan ke dalam nilai a dan b pada Lemma Itô yaitu

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dW \quad (4.1.6)$$

dan peubah acak x diasumsikan sebagai harga saham S , maka Persamaan 4.1.6 menjadi

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dW. \quad (4.1.7)$$

Jika didefinisikan $G = \log S$, maka

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

dan diperoleh persamaan berikut sebagai hasil substitusi turunan pertama dan kedua dari G terhadap S , serta G terhadap t ke Persamaan 4.1.7 di atas yakni

$$dG = \left(\frac{1}{S} \mu S + 0 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S^2} \right) \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{1}{S} \sigma S dW$$

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW$$

$$d \log S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW \quad (4.1.8)$$

dengan solusi diberikan sebagai

$$d \log S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW \quad (4.1.9)$$

$$\int_0^t d \log S = \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \int_0^t \sigma dW$$

$$\log S|_0^t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t|_0^t + \sigma W|_0^t$$

$$\log S(t) - \log S(0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t)$$

$$\log S(t) = \log S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t).$$

4.1.3 Model Difusi Lompatan (Jump Diffusion)

Seperti yang telah dikemukakan di atas bahwasannya model pergerakan harga saham dengan difusi lompatan (*jump diffusion*) terdiri dari proses Poisson sebagai bagian lompatannya. Pada bagian ini akan dipaparkan mengenai model lompatan (*jump*) dengan proses Poisson.

Pada model lompatan (*jump model*), ukuran lompatan harga saham, ΔS dinyatakan sebagai

$$\Delta S = S(t) - S(t-). \quad (4.1.10)$$

Artinya, ukuran lompatan harga saham adalah selisih dari harga saham saat setelah terjadi lompatan, $S(t)$, dengan harga saham sebelum terjadi lompatan, $S(t-)$. Persamaan 4.1.10 dapat dinyatakan dalam model lompatan proporsional (*proportional jump*) sebagai

$$S(t) = q S(t-) \quad \text{dengan} \quad q > 0. \quad (4.1.11)$$

Artinya, harga saham setelah terjadi lompatan, $S(t)$, merupakan q kali dari harga saham sebelum terjadinya lompatan, $S(t-)$. Apabila model lompatan proporsional pada Persamaan 4.1.11 disubstitusikan pada Persamaan 4.1.10, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta S &= q S(t-) - S(t-) \\ \Delta S &= (q - 1) S(t-) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

dengan $(q - 1)$ sebagai ukuran dari lompatan harga saham.

Misalkan lompatan dinotasikan sebagai N , terjadinya lompatan pada pergerakan harga saham dapat dikatakan mengikuti proses Poisson. Sehingga Persamaan 4.1.12 menjadi

$$dS = (q - 1) S dN \quad (4.1.13)$$

dengan dN adalah proses Poisson. Namun, lompatan yang terjadi pada proses Poisson memiliki ukuran yang konstan. Sedangkan pada Persamaan 4.1.13, ukuran dari lompatan harga saham adalah $(q - 1)$.

Sehingga, model dari lompatan harga saham yang tertera pada Persamaan 4.1.13 di atas, dikatakan mengikuti proses *compound* Poisson. Proses *compound* Poisson tersebut, relevan dengan kejadian dari pergerakan harga saham yang mana nilai dari lompatannya memiliki nilai yang tidak selalu konstan.

4.1.4 Model Pergerakan Harga Saham dengan Difusi Lompatan (Jump Diffusion)

Model pergerakan harga saham yang mengikuti gerak Brown geometrik seperti yang tertera pada Persamaan 4.1.4 dan proses *compound* Poisson pada Persamaan 4.1.13 merupakan model pergerakan harga saham dengan lompatan yang dikenal dengan proses *jump-diffusion* yakni

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW + (q - 1)S dN. \quad (4.1.14)$$

Solusi dari Persamaan 4.1.14 dapat diperoleh dari setiap interval lompatan harga saham. Untuk lompatan pertama yaitu

$$(\Delta S)_1 = (q_1 - 1)S(t_1-),$$

Persamaan 4.1.14 memiliki solusi

$$\log S(t) = \log S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) + (q_1 - 1)S(t_1-).$$

Untuk lompatan kedua yaitu

$$(\Delta S)_2 = (q_2 - 1)S(t_2-),$$

Persamaan 4.1.14 memiliki solusi

$$\log S(t) = \log S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) + (q_2 - 1)S(t_2-).$$

Untuk lompatan ketiga yaitu

$$(\Delta S)_3 = (q_3 - 1)S(t_3-),$$

Persamaan 4.1.14 memiliki solusi

$$\log S(t) = \log S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) + (q_3 - 1)S(t_3-).$$

Sehingga apabila diperumum, dengan melakukan substitusikan solusi untuk lompatan pertama, kedua, hingga ke - n diperoleh solusi dari Persamaan 4.1.14 sebagai

$$\log S(t) = \log S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) + \sum_{n=1}^{N_t} (q_t - 1)S_t(t-) \quad (4.1.15)$$

dengan $\Delta S = (q - 1)S(t-)$ sesuai dengan Persamaan 4.1.12. Oleh karena itu, Persamaan 4.1.15 menjadi

$$\log S(t) = \log S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) + \sum_{n=1}^{N_t} \Delta S_n. \quad (4.1.16)$$

Ketika terjadi bencana alam, kemungkinan yang akan terjadi adalah harga saham perusahaan asuransi akan mengalami penurunan. Penurunan harga saham perusahaan asuransi (*decrement log stock price*) akibat terjadinya bencana alam pada Tugas Akhir ini didefinisikan sebagai

$$X = \log S(t-) - \log S(t). \quad (4.1.17)$$

Artinya, penurunan harga saham asuransi saat terjadi bencana alam adalah selisih dari log harga saham saat sebelum terjadi bencana, $\log S(t-)$, dengan log harga saham perusahaan asuransi setelah terjadi bencana, $\log S(t)$. Persamaan 4.1.17 menunjukkan bahwa terjadi suatu lompatan (*jump*) dari log harga saham perusahaan asuransi. Oleh karena itu, apabila Persamaan 4.1.17 disubstitusikan pada Persamaan 4.1.16 diperoleh

$$\log S(t) = \log S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) - \sum_{n=1}^{N_t} X_n \quad (4.1.18)$$

di bawah ukuran probabilitas P dan tanda minus pada bagian terakhir Persamaan 4.1.18 menandakan lompatan turun harga saham perusahaan asuransi. Dengan menggunakan sifat Martingale [12]

$$\mu = r - \lambda(e^{\mu_j + \frac{1}{2}\sigma^2} - 1), \quad (4.1.19)$$

model pada Persamaan 4.1.18 menjadi

$$\begin{aligned} \log S(t) &= \log S(0) + \left[r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(e^{\mu_j + \frac{1}{2}\sigma^2} - 1) \right] t + \\ &\quad \sigma W(t) - \sum_{n=1}^{N_t} X_n. \end{aligned}$$

di bawah ukuran probabilitas Q . Dimana dengan menggunakan definisi fungsi karakteristik distribusi normal [17] yaitu

$$\mathbb{E} [e^{iuX}] = \exp \left(iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 \right)$$

dapat diperoleh model dari pergerakan harga saham menjadi

$$\begin{aligned} \log S(t) &= \log S(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \mathbb{E} (e^{-X_n} - 1) \right) t + \\ &\quad \sigma W(t) - \sum_{n=1}^{N_t} X_n \end{aligned}$$

yang merupakan solusi dari

$$d \log S(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \mathbb{E} (e^{-X_n} - 1) \right) dt + \sigma dW(t) - d \sum_{n=1}^{N_t} X_n. \quad (4.1.20)$$

4.2 Konstruksi Model Total Kerugian Akibat Bencana Alam

Kejadian bencana alam merupakan proses Poisson. Apabila kerugian akibat bencana alam disimbolkan dengan R , maka total

kerugian bencana alam pada saat t dapat dinyatakan sebagai

$$L(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n \quad (4.2.1)$$

dengan $N(t)$ sebagai proses Poisson yang diinterpretasikan sebagai total kejadian bencana alam pada waktu $[0, t]$.

4.3 Penentuan Distribusi Bersama (Joint Distribution) Antara Pergerakan Harga Saham dan Kerugian Akibat Bencana Alam

Saat terjadi bencana alam, terdapat kemungkinan bahwa harga saham perusahaan asuransi akan mengalami penurunan. Artinya, terdapat hubungan di antara kerugian akibat bencana alam dengan penurunan harga saham perusahaan asuransi. Oleh karena itu, diperlukan suatu distribusi bersama (*joint distribution*) untuk mendapatkan struktur korelasi di antara kerugian akibat bencana alam, R_n dengan penurunan harga saham perusahaan asuransi, X_n , (R_n, X_n) dengan sifat-sifat :

- a. Semakin besar kerugian bencana alam berakibat semakin besar juga penurunan harga saham perusahaan asuransi.
- b. Tingginya kejadian bencana alam memiliki kemungkinan yang kecil.
- c. Ukuran kerugian bencana alam, R_n juga berdistribusi eksponensial dengan mean $\frac{1}{\mu_R}$.
- d. Ukuran lompatan harga saham perusahaan asuransi, X_n harus berdistribusi eksponensial dengan mean $\frac{1}{\mu_k}$.
- e. Koefisien korelasi antara lompatan harga saham perusahaan asuransi, X_n , dan kerugian akibat bencana alam, R_n , ρ , berada pada interval $0 \leq \rho \leq 1$.

Penentuan distribusi bersama (*joint distribution*) antara R_n dan X_n dengan ketentuan yang telah disebutkan tersebut dilakukan dengan menggunakan asumsi bahwa lompatan ke- n dari perubahan harga saham perusahaan asuransi, terjadi pada saat kejadian bencana alam ke- n . Selain itu, ukuran lompatan ke- n harga saham, X_n memiliki korelasi non-negatif dengan jumlah kerugian bencana alam ke- n , R_n . Oleh karena itu, distribusi bersama yang bisa digunakan berdasarkan ketentuan di atas adalah distribusi Eksponensial Bivariat Downton (Downton's BED).

Distribusi bivariat eksponensial Downton atau yang lebih sering disebut dengan Downton's BED merupakan salah satu distribusi bivariat yang paling penting pada teori reliabilitas. Downton's BED memiliki tiga parameter di antaranya $\mu_R > 0$, $\mu_X > 0$, dan ρ , $0 \leq \rho < 1$. Peubah acak R dan X pada Downton's BED memiliki peluang kepadatan marjinal eksponensial dengan parameter μ_R dan μ_X . Suatu vektor acak (R, X) dikatakan mengikuti Downton's BED apabila memiliki distribusi kepadatan peluang bersama (*joint distribution probability density function*) sebagai [18]

$$f_{R,X}(r, x) = \frac{\mu_R \mu_X}{1 - \rho} I_0 \left(\frac{2\sqrt{\rho \mu_R \mu_X r x}}{1 - \rho} \right) \exp \left(-\frac{\mu_R r + \mu_X x}{1 - \rho} \right) \quad (4.3.1)$$

dengan $r > 0$, $x > 0$, ρ sebagai koefisien korelasi antara R dan X , dan I_0 sebagai bentuk pertama fungsi Bessel termodifikasi orde nol yang didefinisikan sebagai [20]

$$\begin{aligned} I_n(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{n+2j}}{2^{n+2j} j! \Gamma(n+1+j)} \Big|_{n=0} \\ I_0(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{0+2j}}{2^{0+2j} j! \Gamma(0+1+j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{2^{2j} j! \Gamma(1+j)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_0(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{2^{2j} j! j!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{2^{2j} j!^2} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j}.
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Berdasarkan hal tersebut, selanjutnya untuk mendapatkan formula dari harga opsi CatEPut Amerika perpetual akan digunakan asumsi bahwa penurunan harga saham dan kerugian akibat bencana alam mengikuti distribusi eksponensial, sedangkan untuk distribusi bersama di antara keduanya, mengikuti distribusi eksponensial bivariat Downton (Downton's BED). Oleh karena itu, apabila kembali pada model pergerakan harga saham di Persamaan 4.1.20 yaitu

$$d \log S(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \mathbb{E} (e^{-X_n} - 1) \right) dt + \sigma dW(t) - d \sum_{n=1}^{N(t)} X_n,$$

nilai ekspektasi pada persamaan tersebut akan dicari terlebih dahulu dengan menggunakan sifat dari ekspektasi bilangan acak dan transformasi Laplace-Stieltjes sebagai berikut ini.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} (e^{-X_n} - 1) &= \mathbb{E} (e^{-X_n}) - 1 \\
&= \left(s \times \frac{\mu_X}{\mu_X + s} \right) - 1
\end{aligned}$$

karena $s = 1$, diperoleh

$$\mathbb{E} (e^{-X_n} - 1) = \left(\frac{\mu_X}{\mu_X + 1} \right) - 1. \tag{4.3.3}$$

Sehingga, dengan mensubstitusikan kembali Persamaan 4.3.3 ke

model pergerakan harga saham pada Persamaan 4.1.20, diperoleh

$$\begin{aligned}
 d \log S(t) &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left[\frac{\mu_X}{\mu_X + 1} - 1 \right] \right) dt + \sigma dW(t) - d \sum_{n=1}^{N(t)} X_n \\
 &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left[\frac{\mu_X}{\mu_X + 1} - \frac{\mu_X + 1}{\mu_X + 1} \right] \right) dt + \sigma dW(t) \\
 &\quad - d \sum_{n=1}^{N(t)} X_n \\
 &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left[\frac{-1}{\mu_X + 1} \right] \right) dt + \sigma dW(t) - d \sum_{n=1}^{N(t)} X_n \\
 &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\lambda}{\mu_X + 1} \right) dt + \sigma dW(t) - d \sum_{n=1}^{N(t)} X_n \\
 &= \alpha dt + \sigma dW(t) - d \sum_{n=1}^{N(t)} X_n. \tag{4.3.4}
 \end{aligned}$$

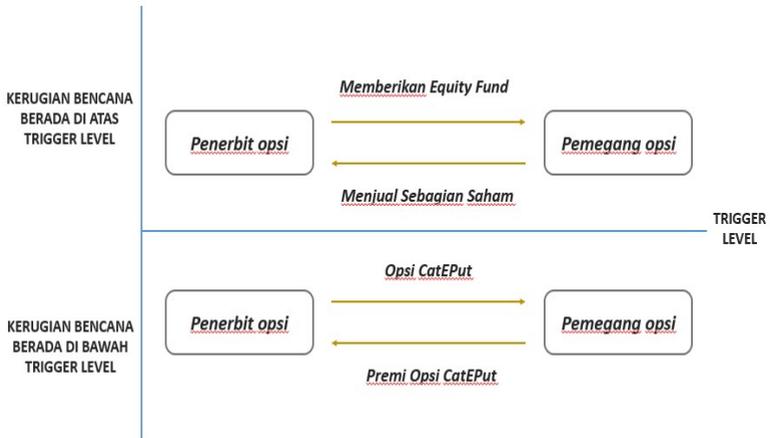
dengan

$$\alpha = r - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\lambda}{\mu_X + 1}. \tag{4.3.5}$$

4.4 Konstruksi Formula Analitis Opsi CatEPut Amerika Perpetual

Opsi CatEPut Amerika Perpetual merupakan salah satu *alternative risk transfer* yang bisa digunakan oleh perusahaan asuransi untuk mengatasi kerugian yang diakibatkan oleh terjadinya suatu bencana alam. Pada Gambar 4.4.1 diberikan gambaran mengenai dari cara kerja opsi CatEPut Amerika Perpetual.

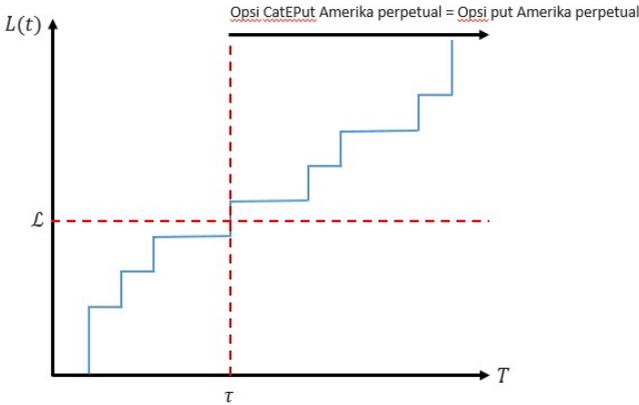
Melalui Gambar 4.4.1, terlihat bahwa opsi CatEPut Amerika perpetual terbagi menjadi dua kondisi. Kondisi pertama adalah pada saat total kerugian akibat bencana alam yang dialami oleh perusahaan asuransi belum melebihi batas minimum total kerugian akibat bencana alam (*trigger level*) sehingga opsi CatEPut Amerika perpetual bisa



Gambar 4.4.1. Skema Opsi CatEPut Amerika Perpetual

di-*exercise*. Pada kondisi ini, perusahaan asuransi yang bertindak sebagai *holder* memiliki kewajiban untuk membayarkan sejumlah biaya tertentu yang dalam hal ini adalah harga dari opsi CatEPut Amerika perpetual (premi) kepada *writer* (perusahaan asuransi lain, reasuransi, bank investasi atau institusi keuangan lain) yang merupakan penerbit opsi CatEPut Amerika perpetual. Kondisi kedua terjadi pada saat kerugian akibat bencana alam yang dialami oleh perusahaan asuransi telah melebihi *trigger level*. Pada kondisi ini, perusahaan asuransi berhak untuk melakukan *exercise* opsi CatEPut Amerika perpetual dengan harapan agar bisa mendapatkan dana (*equity fund*) untuk melanjutkan kembali operasional perusahaan. Sedangkan pihak *writer* akan mendapatkan sebagian saham dari perusahaan asuransi tersebut.

Berdasarkan keterangan di atas, penentuan harga dari opsi CatEPut Amerika perpetual merupakan hal penting yang harus diperhatikan. Sehingga, pada bagian ini akan dikonstruksi suatu formula analitis dari harga opsi CatEPut Amerika perpetual. Pada Gambar 4.4.2 akan diberikan ilustrasi dari opsi CatEPut Amerika perpetual yang telah di-*exercise*.



Gambar 4.4.2. Ilustrasi Opsi CatEPut Amerika Perpetual Setelah di-Exercise

Pada skema di Gambar 4.4.2, \mathcal{L} merupakan notasi dari *trigger level* yaitu batas minimum total kerugian akibat bencana alam dan τ adalah notasi dari waktu ketika total kerugian akibat bencana alam, $L(t)$, telah melebihi *trigger level*, \mathcal{L} , dengan τ didefinisikan sebagai

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : L(t) > \mathcal{L}\}. \quad (4.4.1)$$

Pada saat τ *holder* (perusahaan asuransi) memiliki hak untuk melakukan *exercise* opsi pada harga K (*strike price*). Dengan kata lain, setelah $L(t)$ melebihi \mathcal{L} , opsi CatEPut Amerika perpetual akan menjadi opsi put Amerika perpetual biasa [8]. Sehingga, dengan menggunakan pendekatan *risk-neutral*, pada saat $t = 0$ harga opsi CatEput Amerika perpetual dinyatakan sebagai

$$CatEPut(0) = E \left[e^{-r\tau} P(\tau) \right] \quad (4.4.2)$$

Artinya, harga opsi CatEPut saat $t = 0$ adalah ekspektasi dari harga opsi put Amerika perpetual, $P(\tau)$, yang terdiskonto terhadap *risk-free interest rate*, r , dalam waktu τ . Oleh karena itu, untuk mendapatkan formula dari opsi CatEPut Amerika perpetual harus didapatkan formula dari opsi put Amerika perpetual terlebih dahulu.

4.4.1 Konstruksi Formula Analitis Opsi Put Amerika Perpetual

Opsi Amerika merupakan salah satu tipe opsi yang mana *holder* memiliki hak untuk melakukan *exercise* opsi kapanpun sebelum kontrak opsi berakhir. Oleh karena itu, opsi tipe Amerika dianggap lebih memiliki keunggulan dibandingkan dengan opsi tipe Eropa. Asalkan *holder* melakukan *exercise* opsi pada saat yang tepat, maka *holder* bisa mendapatkan keuntungan. Waktu pada saat *holder* melakukan *exercise* opsi disebut dengan *stopping time*, κ . Sehingga, harga dari opsi put Amerika perpetual pada saat *stopping time* adalah

$$P(t) = \max_{\kappa \in \tau_t} \mathbb{E} \left[e^{-r(\kappa-t)} \max\{K - S(\kappa), 0\} | \mathcal{F}_t \right]$$

dengan τ_t adalah himpunan seluruh *stopping time*. Sedangkan, waktu terbaik untuk melakukan *exercise* opsi dikenal dengan istilah *optimal stopping time* yang didefinisikan sebagai

$$\tau^s(t) = \inf\{u \geq t : S(u) \leq \mathcal{K}\},$$

dan konstanta positif \mathcal{K} sebagai *optimal exercise boundary* untuk opsi put Amerika perpetual yang didefinisikan sebagai [23]

$$\mathcal{K} = \frac{Kr}{\left(r + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\lambda}{(\mu_X + 1)^2} \right)},$$

dengan asumsi bahwa proses *stock return* mengikuti Persamaan 4.3.4. Artinya, saat harga saham turun menjadi \mathcal{K} , opsi put Amerika perpetual harus segera di-*exercise* agar *holder* mendapatkan profit yang optimal. Sehingga, harga dari opsi put Amerika perpetual pada saat t dengan menggunakan pendekatan *risk-neutral* adalah

$$P(t) = E \left[e^{-r(\tau^s(t)-t)} \max\{K - S(\tau^s(t)), 0\} | \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.4.3)$$

Berdasarkan sifat dari opsi put Amerika perpetual, domain dari opsi Amerika $\{0 \leq S < \infty\}$ dan $\{0 \leq t \leq T\}$ terbagi menjadi dua bagian yang disebut dengan daerah kontinu dan daerah henti. Harga

opsi put Amerika perpetual yang tertera pada Persamaan (4.4.6) merupakan harga dari opsi put Amerika perpetual di daerah henti, dalam artian saat opsi tersebut di-*exercise*, yaitu ketika $S(t) \leq \mathcal{K}$. Permasalahan berikutnya muncul pada saat opsi put Amerika perpetual berada pada daerah kontinu, yaitu saat $S(t) > \mathcal{K}$. Sehingga, selanjutnya akan dicari formula analitis dari harga opsi put Amerika perpetual di daerah kontinu, $S(t) > \mathcal{K}$. Berikut adalah teorema yang menyatakan formula dari harga opsi put Amerika perpetual yang dinyatakan berdasarkan *optimal exercise boundary*.

Teorema 1. *Harga dari opsi put Amerika perpetual dengan strike price, K adalah*

$$P(t) = \begin{cases} c_1(S(t))^{\chi_1} + c_2(S(t))^{\chi_2}, & \text{jika } S(t) > \mathcal{K} \\ K - S(t), & \text{jika } S(t) \leq \mathcal{K} \end{cases} \quad (4.4.4)$$

dengan

$$c_1 = \frac{(K - \mathcal{K}) \left(\frac{\sigma^2}{2} \chi_2^2 + \alpha \chi_2 - r \right) + \frac{\lambda}{\mu_X + 1} \mathcal{K}}{\mathcal{K}^{\chi_1} (\chi_2 - \chi_1) \left(\frac{\sigma^2}{2} (\chi_1 + \chi_2) + \alpha \right)} \quad (4.4.5)$$

dan

$$c_2 = \frac{(K - \mathcal{K}) \left(\frac{\sigma^2}{2} \chi_1^2 + \alpha \chi_1 - r \right) + \frac{\lambda}{\mu_X + 1} \mathcal{K}}{\mathcal{K}^{\chi_2} (\chi_1 - \chi_2) \left(\frac{\sigma^2}{2} (\chi_1 + \chi_2) + \alpha \right)}. \quad (4.4.6)$$

Bukti :

Formula analitis harga opsi put Amerika perpetual yang tertera pada Teorema 1 diperoleh dengan menggunakan Persamaan 4.4.3 yaitu

$$P(t) = E \left[e^{-r(\tau^s(t)-t)} \max \{ K - S(\tau^s(t)), 0 \} | \mathcal{F}_t \right].$$

Pada saat t , terdapat dua kemungkinan yang terjadi yaitu pergerakan harga saham dan lompatan harga saham. Saat terjadi lompatan harga saham, harga opsi put Amerika perpetual didefinisikan sebagai

$$h_0(u) = E \left[e^{-r(\tau^s(t)-t)} (K - S(\tau^s(t))) \mathbf{1}_{\{\tau^s(t) < \infty\}} \mid \log S(t) = u \right] \quad (4.4.7)$$

untuk u adalah suatu bilangan real dan

$$h_0(\log \mathcal{K}) = K - \mathcal{K}. \quad (4.4.8)$$

Sedangkan sebelum terjadi lompatan, harga opsi put Amerika perpetual didefinisikan sebagai

$$h_1(u) = E \left[e^{-r(\tau^s(t)-t)} (K - S(\tau^s(t))) \mathbf{1}_{\{\tau^s(t) < \infty\}} \mid \log S(t-) = u, \log S(t) < u \right]. \quad (4.4.9)$$

dengan

$$h_1(\log \mathcal{K}) = \int_0^\infty (K - \mathcal{K}e^{-x}) \mu_X e^{-\mu_X x} dx \quad (4.4.10)$$

untuk suatu bilangan real u .

Berdasarkan Persamaan 4.4.7 dan 4.4.9, untuk mendapatkan formula analitis dari harga opsi put Amerika perpetual, harus didapatkan solusi dari $h_0(u)$ dan $h_1(u)$ terlebih dahulu.

Penentuan Solusi $h_0(u)$

Diberikan $\log S(t) = u$ dan $N(t + \Delta t) - N(t) = 0$, $\log S(t + \Delta t)$ berdistribusi normal dengan mean $u + \alpha \Delta t$ dan variansi $\sigma^2 \Delta t$. Berdasarkan Persamaan 2.7.1 (Halaman 13), yaitu

$$\begin{aligned} P(N(t + \Delta t) - N(t) = 0) &= 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) &= \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) &= o(\Delta t), \end{aligned}$$

artinya, untuk $u > \log \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
 h_0(u) &= (1 - \lambda \Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r \Delta t} h_0 \left(u + \alpha \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} z \right) \\
 &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz + \lambda \Delta t h_1(u) + o(\Delta t) \\
 &= (1 - \lambda \Delta t) \left(e^{-r \Delta t} h_0 \left(u + \alpha \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} z \right) \right) \\
 &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz + \lambda \Delta t h_1(u) + o(\Delta t) \\
 &= (1 - \lambda \Delta t) \left(e^{-r \Delta t} h_0 \left(u + \alpha \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} z \right) \right) \\
 &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2/2} dz + \lambda \Delta t h_1(u) + o(\Delta t). \quad (4.4.11)
 \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan solusi dari Persamaan 4.4.11, akan dicari solusi dari bagian integralnya terlebih dahulu. Misalkan

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{z^2}{2} \\
 2u &= z^2 \\
 z &= \sqrt{2u}
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 du &= z dz \\
 du &= \sqrt{2u} dz \\
 dz &= \frac{1}{\sqrt{2u}} du.
 \end{aligned}$$

Apabila dilakukan substitusi nilai u , dan du ke bagian integral pada

Persamaan 4.4.11, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-z^2/2} dz &= \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{2u}} du \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-1/2} du \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \int_0^{\infty} e^{-u} u^{1/2-1} du. \tag{4.4.12}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan digunakan definisi fungsi Gamma [26]

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

dengan $x > 0$ untuk menyelesaikan integral pada Persamaan 4.4.12. Sehingga,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-z^2/2} dz &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}, \tag{4.4.13}
 \end{aligned}$$

dan Persamaan 4.4.11 menjadi

$$\begin{aligned}
 h_0(u) &= (1 - \lambda \Delta t) \left(e^{-r \Delta t} h_0 \left(u + \alpha \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} z \right) \right) \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times \\
 &\quad \frac{\sqrt{2\pi}}{2} + \lambda \Delta t h_1(u) + o(\Delta t) \\
 &= (1 - \lambda \Delta t) \left(e^{-r \Delta t} h_0 \left(u + \alpha \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} z \right) \right) + \lambda \Delta t \times \\
 &\quad h_1(u) + o(\Delta t). \tag{4.4.14}
 \end{aligned}$$

Dari Persamaan 4.4.13, akan ditinjau nilai $e^{-r \Delta t}$ dengan menggu-

nakan definisi deret MacLaurin untuk e^{-x} [27] yaitu

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n. \end{aligned}$$

Sehingga,

$$e^{-r\Delta t} = 1 - r\Delta t + \frac{(r\Delta t)^2}{2!} - \dots \quad (4.4.15)$$

Jika suku ke - 3 dan seterusnya pada Persamaan 4.4.15 dianggap sebagai eror, maka

$$e^{-r\Delta t} = 1 - r\Delta t.$$

Artinya, Persamaan 4.4.14 menjadi

$$\begin{aligned} h_0(u) &= (1 - \lambda\Delta t) (1 - e^{-r\Delta t}) \left(h_0 \left(u + \alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z \right) \right) + \\ &\quad \lambda\Delta t h_1(u) + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Dan, apabila bagian $\left(h_0 \left(u + \alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z \right) \right)$ pada Persamaan 4.4.16, juga didekati dengan menggunakan deret Taylor [27] maka,

$$\begin{aligned} h_0 \left(u + \alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z \right) &= \frac{h_0(u)}{0!} + \left(\alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z \right) h_0'(u) \\ &\quad + \frac{\left(\alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z \right)^2}{2!} h_0''(u) \\ &= h_0(u) + \alpha\Delta t \frac{d}{du} h_0(u) + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) \end{aligned}$$

dan Persamaan 4.4.16 menjadi

$$\begin{aligned}
h_0(u) &= (1 - \lambda\Delta t) \left(h_0(u) + \alpha\Delta t \frac{d}{du} h_0(u) + \frac{\sigma^2\Delta t}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) \right) \\
&\quad (1 - r\Delta t) + \lambda\Delta t h_1(u) + o(\Delta t) \\
&= [(1 - \lambda\Delta t)(1 - r\Delta t)] h_0(u) + [(1 - \lambda\Delta t)(1 - r\Delta t)] \\
&\quad \alpha\Delta t \frac{d}{du} h_0(u) + [(1 - \lambda\Delta t)(1 - r\Delta t)] \frac{\sigma^2\Delta t}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) \\
&\quad + \lambda\Delta t h_1(u) + o(\Delta t) \\
&= (1 - r\Delta t - \lambda\Delta t + \lambda r(\Delta t)^2) h_0(u) + (1 - r\Delta t - \lambda\Delta t \\
&\quad + \lambda r(\Delta t)^2) \alpha\Delta t \frac{d}{du} h_0(u) + (1 - r\Delta t - \lambda\Delta t + \lambda r(\Delta t)^2) \\
&\quad \frac{\sigma^2\Delta t}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) + \lambda\Delta t h_1(u) + o(\Delta t) \\
&= h_0(u) - r\Delta t h_0(u) - \lambda\Delta t h_0(u) + \lambda r(\Delta t)^2 h_0(u) + \alpha \\
&\quad \Delta t \frac{d}{du} h_0(u) - r\alpha(\Delta t)^2 \frac{d}{du} h_0(u) - \lambda\alpha(\Delta t)^2 \frac{d}{du} h_0(u) \\
&\quad + \lambda\alpha r(\Delta t)^3 \frac{d}{du} h_0(u) + \frac{\sigma^2\Delta t}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) - \frac{r\sigma^2(\Delta t)^2}{2} \\
&\quad \frac{d^2}{du^2} h_0(u) - \frac{\lambda\sigma^2(\Delta t)^2}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) + \frac{\lambda r\sigma^2(\Delta t)^3}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) \\
&\quad + \lambda\Delta t h_1(u) + o(\Delta t). \tag{4.4.17}
\end{aligned}$$

Dari Persamaan 4.4.17, nilai $h_0(u)$ pada ruas kiri dan ruas kanan bisa saling menghilangkan. Selain itu, agar lebih sederhana, kedua ruas

dapat dibagi dengan Δt . Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 0 &= -r h_0(u) - \lambda h_0(u) + \lambda r \Delta t h_0(u) + \alpha \frac{d}{du} h_0(u) - r \alpha \Delta t \\
 &\quad \frac{d}{du} h_0(u) - \lambda \alpha \Delta t \frac{d}{du} h_0(u) + \lambda \alpha r (\Delta t)^2 \frac{d}{du} h_0(u) + \frac{\sigma^2}{2} \\
 &\quad \frac{d^2}{du^2} h_0(u) - \frac{r \sigma^2}{2} \Delta t \frac{d^2}{du^2} h_0(u) - \frac{\lambda \sigma^2 \Delta t}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) - \frac{\lambda r \sigma^2}{2} \\
 &\quad (\Delta t)^3 \frac{d^2}{du^2} h_0(u) + \lambda h_1(u). \tag{4.4.18}
 \end{aligned}$$

Pada Persamaan 4.4.18, apabila $\Delta t \approx 0$, maka diperoleh

$$0 = -r h_0(u) - \lambda h_0(u) + \alpha \frac{d}{du} h_0(u) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) + \lambda h_1(u).$$

Sehingga,

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) + \alpha \frac{d}{du} h_0(u) - (\lambda + r) h_0(u) + \lambda h_1(u) = 0. \tag{4.4.19}$$

Berdasarkan hasil perhitungan pada Persamaan 4.4.19, persamaan diferensialnya masih mengandung $h_1(u)$. Oleh karena itu, untuk mendapatkan solusi dari $h_0(u)$ harus dicari terlebih dahulu solusi dari $h_1(u)$.

Penentuan Solusi $h_1(u)$

Berikutnya, akan dicari solusi dari $h_1(u)$ untuk $u > \log \mathcal{K}$ yaitu

$$\begin{aligned}
 h_1(u) &= (1 - \mu_X \Delta u) h_1(u - \Delta u) + \mu_X \Delta u h_0(u) + o(\Delta u) \\
 &= (1 - \mu_X \Delta u) \left(h_1(u) - \Delta u \frac{d}{du} h_1(u) \right) + \mu_X \Delta u h_0(u) \\
 &\quad + o(\Delta u) \\
 &= h_1(u) - \mu_X \Delta u h_1(u) - \Delta u \frac{d}{du} h_1(u) + \mu_X (\Delta u)^2 \\
 &\quad \frac{d}{du} h_1(u) + \mu_X \Delta u h_0(u) + o(\Delta u).
 \end{aligned}$$

dimana bagian $h_1(u - \Delta u)$ dari persamaan tersebut juga didekati menggunakan deret Taylor. Apabila diperhatikan, kedua ruas pada persamaan di atas memiliki $h_1(u)$, sehingga bisa saling menghilangkan dan diperoleh

$$0 = -\mu_X \Delta u h_1(u) - \Delta u \frac{d}{du} h_1(u) + \mu_X (\Delta u)^2 \frac{d}{du} h_1(u) + \mu_X \Delta u h_0(u) + o(\Delta u).$$

Lalu, dengan membagi setiap ruas dengan Δu , akan diperoleh

$$0 = -\mu_X h_1(u) - \frac{d}{du} h_1(u) + \mu_X \Delta u \frac{d}{du} h_1(u) + \mu_X h_0(u). \quad (4.4.20)$$

Untuk $\Delta u \approx 0$, Persamaan 4.4.20 menjadi

$$0 = -\mu_X h_1(u) - \frac{d}{du} h_1(u) + \mu_X h_0(u).$$

Dan apabila kedua ruas dikalikan dengan -1 maka diperoleh hasil sebagai berikut

$$\frac{d}{du} h_1(u) + \mu_X h_1(u) - \mu_X h_0(u) = 0. \quad (4.4.21)$$

Berdasarkan Persamaan 4.4.21, tampak bahwa solusi dari $h_1(u)$ juga mengandung $h_0(u)$. Oleh karena itu, untuk mendapatkan salah satu solusi dari $h_0(u)$ atau $h_1(u)$, akan digunakan Persamaan 4.4.19 dan 4.4.21 untuk $u > \log \mathcal{K}$. Berdasarkan Persamaan 4.4.19, dapat diperoleh nilai $h_1(u)$ sebagai

$$h_1(u) = -\frac{\sigma^2}{2\lambda} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) - \frac{\alpha}{\lambda} \frac{d}{du} h_0(u) + \frac{(\lambda + r)}{\lambda} h_0(u). \quad (4.4.22)$$

Selain itu, dapat diperoleh juga turunan pertama dari $h_1(u)$ terhadap u yaitu

$$\frac{d}{du}h_1(u) = -\frac{\sigma^2}{2\lambda}\frac{d^3}{du^3}h_0(u) - \frac{\alpha}{\lambda}\frac{d^2}{du^2}h_0(u) + \frac{(\lambda+r)}{\lambda}\frac{d}{du}h_0(u). \quad (4.4.23)$$

Melalui substitusi Persamaan 4.4.22 dan 4.4.23 ke Persamaan 4.4.21, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2}\frac{d^3}{du^3}h_0(u) + \left(\alpha + \frac{\sigma^2\mu_X}{2}\right)\frac{d^2}{du^2}h_0(u) + (\alpha\mu_X - r - \lambda) \\ \frac{d}{du}h_0(u) - r\mu_X h_0(u) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Berdasarkan Persamaan 4.4.24, dapat diperoleh solusi dari $h_0(u)$ dengan memisalkan $h_0(u) = e^{\chi u}$ adalah solusi dari Persamaan 4.4.24. Artinya,

$$\frac{d}{du}h_0(u) = \chi e^{\chi u}; \quad (4.4.25)$$

$$\frac{d^2}{du^2}h_0(u) = \chi^2 e^{\chi u}; \text{ dan} \quad (4.4.26)$$

$$\frac{d^3}{du^3}h_0(u) = \chi^3 e^{\chi u}. \quad (4.4.27)$$

harus memenuhi Persamaan 4.4.24. Apabila dilakukan substitusi Persamaan 4.4.25, 4.4.26, dan 4.4.27 pada Persamaan 4.4.24, maka diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sigma^2}{2}\chi^3 e^{\chi u} + \left(\alpha + \frac{\sigma^2\mu_X}{2}\right)\chi^2 e^{\chi u} + (\alpha\mu_X - r - \lambda) \\ &\quad \chi e^{\chi u} - r\mu_X e^{\chi u} \\ &= e^{\chi u} \left[\frac{\sigma^2}{2}\chi^3 + \left(\alpha + \frac{\sigma^2\mu_X}{2}\right)\chi^2 + (\alpha\mu_X - r - \lambda)\chi - r\mu_X \right]. \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

Karena nilai $e^{\chi u} > 0$ artinya

$$\frac{\sigma^2}{2}\chi^3 + \left(\alpha + \frac{\sigma^2\mu_X}{2}\right)\chi^2 + (\alpha\mu_X - r - \lambda)\chi - r\mu_X = 0. \quad (4.4.29)$$

Untuk mendapatkan solusi dari Persamaan 4.4.29 di atas, digunakan lemma tentang persamaan kubik berikut ini.

Lemma 1. *Jika diberikan persamaan kubik berikut*

$$\frac{\sigma^2}{2}x^3 + \left(\alpha + \frac{\sigma^2\mu_X}{2}\right)x^2 + (\alpha\mu_X - r - \lambda)x - r\mu_X,$$

maka persamaan tersebut memiliki tiga solusi yaitu χ_1, χ_2 , dan χ_3 yang memenuhi $\chi_1 < -\mu_X < \chi_2 < 0 < \chi_3$.

Berdasarkan Lemma 1, dapat disimpulkan bahwa Persamaan 4.4.29, memiliki tiga solusi yaitu χ_1, χ_2 , dan χ_3 dengan $\chi_1 < -\mu_X < \chi_2 < 0 < \chi_3$. Sehingga Persamaan 4.4.29 memiliki solusi sebagai

$$h_0(u) = c_1e^{(\chi_1 u)} + c_2e^{(\chi_2 u)} + c_3e^{(\chi_3 u)} \quad (4.4.30)$$

untuk $u > \log \mathcal{K}$. Karena $\chi_1 < -\mu_X < \chi_2 < 0 < \chi_3$, bisa dilihat bahwa χ_1 dan χ_2 bernilai negatif. Sedangkan $\chi_3 > 0$. Artinya, solusi untuk Persamaan 4.4.29 akan berlaku jika dan hanya jika $\chi_3 = 0$. Sehingga, Persamaan 4.4.30 menjadi

$$h_0(u) = c_1e^{(\chi_1 u)} + c_2e^{(\chi_2 u)}. \quad (4.4.31)$$

Nilai $h_0(u)$ pada Persamaan 4.4.31, dapat diperoleh dengan menggunakan syarat batas yang sudah tertera pada Persamaan 4.4.8 (Halaman 45), sehingga Persamaan 4.4.31 menjadi

$$\begin{aligned} h_0(u) &= c_1e^{(\chi_1 u)} + c_2e^{(\chi_2 u)} \\ h_0(\log \mathcal{K}) &= c_1e^{(\chi_1 \log \mathcal{K})} + c_2e^{(\chi_2 \log \mathcal{K})} \\ h_0(\log \mathcal{K}) &= c_1e^{(\log \mathcal{K})^{\chi_1}} + c_2e^{(\log \mathcal{K})^{\chi_2}} \\ h_0(\log \mathcal{K}) &= c_1\mathcal{K}^{\chi_1} + c_2\mathcal{K}^{\chi_2} \\ K - \mathcal{K} &= c_1\mathcal{K}^{\chi_1} + c_2\mathcal{K}^{\chi_2}. \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

Selanjutnya, akan dicari solusi dari $h_1(u)$ dengan menggunakan Persamaan 4.4.19 (Halaman 50) dan syarat batas yang tertera pada Persamaan 4.4.10 (Halaman 45), dimana syarat batas untuk $h_1(u)$ pada $u = \log \mathcal{K}$ diberikan sebagai

$$\begin{aligned} h_1(\log \mathcal{K}) &= \int_0^\infty (K - \mathcal{K}e^{-x}) \mu_X e^{-\mu_X x} dx \\ &= \int_0^\infty K \mu_X e^{-\mu_X x} dx - \int_0^\infty \mathcal{K} e^{-x} \mu_X e^{-\mu_X x} dx. \end{aligned} \quad (4.4.33)$$

Untuk mendapatkan nilai integral di atas, akan dicari hasil integralnya satu per satu. Pertama, akan dicari nilai integral dari

$$\int_0^\infty K \mu_X e^{-\mu_X x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a K \mu_X e^{-\mu_X x} dx. \quad (4.4.34)$$

Apabila

$$\begin{aligned} u &= -\mu_X x \\ du &= -\mu_X dx \end{aligned}$$

dan batas integrasi menjadi

$$\begin{aligned} \text{untuk } x = 0, u &= -\mu_X(0) = 0 \\ \text{untuk } x = a, u &= -\mu_X(a) = -\mu_X a, \end{aligned}$$

maka dengan melakukan substitusi nilai u dan du serta batas integral pada Persamaan 4.4.34 diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K \mu_X e^{-\mu_X x} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a K \mu_X e^{-\mu_X x} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} -K \int_0^{-\mu_X a} e^u du \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} -K [e^u]_0^{-\mu_X a} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} -K [e^{-\mu_X a} - e^0] \\ &= -K[0 - 1] \\ &= K. \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

Selanjutnya, akan dicari nilai dari integral bagian kedua pada Persamaan 4.4.33 yaitu

$$\int_0^{\infty} \mathcal{K} e^{-x} \mu_X e^{-\mu_X x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \mathcal{K} \mu_X \int_0^b e^{-x-\mu_X x} dx. \quad (4.4.36)$$

Jika

$$\begin{aligned} u &= -x - \mu_X x \\ du &= -1 - \mu_X dx \\ dx &= \frac{1}{-1 - \mu_X} du \end{aligned}$$

dan batas integral menjadi

$$\begin{aligned} \text{untuk } x = 0, u &= -(0) - \mu_X(0) = 0 \\ \text{untuk } x = b, u &= -(b) - \mu_X(b) = -b(1 + \mu_X), \end{aligned}$$

maka dengan melakukan substitusi nilai u dan du serta batas integral pada Persamaan 4.4.36 diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathcal{K} e^{-x} \mu_X e^{-\mu_X x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \mathcal{K} \mu_X \int_0^b e^{-x-\mu_X x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{K} \mu_X}{-1 - \mu_X} \int_0^{-b(1+\mu_X)} e^u du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{K} \mu_X}{-1 - \mu_X} [e^u]_0^{-b(1+\mu_X)} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{K} \mu_X}{-1 - \mu_X} [e^{-b(1+\mu_X)} - e^0] \\ &= \frac{\mathcal{K} \mu_X}{-1 - \mu_X} [0 - 1] \\ &= -\frac{\mathcal{K} \mu_X}{-1 - \mu_X} \\ &= -\left[-\frac{\mathcal{K} \mu_X}{1 + \mu_X} \right] \\ &= \frac{\mathcal{K} \mu_X}{1 + \mu_X}. \end{aligned} \quad (4.4.37)$$

Selanjutnya, dengan melakukan substitusi Persamaan 4.4.35 dan Persamaan 4.4.37 pada Persamaan 4.4.33 diperoleh syarat batas untuk $h_1(\log \mathcal{K})$ sebagai

$$h_1(\log \mathcal{K}) = K - \frac{\mathcal{K}\mu_X}{1 + \mu_X}. \quad (4.4.38)$$

Berdasarkan syarat batas pada Persamaan 4.4.38, dapat dicari solusi dari $h_1(u)$ yaitu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) + \alpha \frac{d}{du} h_0(u) - (\lambda + r) h_0(u) \\ &\quad + \lambda h_1(u) \\ -\lambda h_1(u) &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{du^2} h_0(u) + \alpha \frac{d}{du} h_0(u) - (\lambda + r) h_0(u) \\ -\lambda h_1(\log \mathcal{K}) &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{d \log \mathcal{K}^2} h_0(\log \mathcal{K}) + \alpha \frac{d}{d \log \mathcal{K}} h_0(\log \mathcal{K}) \\ &\quad - (\lambda + r) h_0(\log \mathcal{K}). \end{aligned} \quad (4.4.39)$$

Untuk mendapatkan solusi dari Persamaan 4.4.39, akan dicari solusi homogenya terlebih dahulu yaitu

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{d \log \mathcal{K}^2} h_0(\log \mathcal{K}) + \alpha \frac{d}{d \log \mathcal{K}} h_0(\log \mathcal{K}) - (\lambda + r) h_0(\log \mathcal{K}) = 0 \quad (4.4.40)$$

Misalkan, $h_0(\log \mathcal{K}) = e^{\chi \log \mathcal{K}}$ adalah solusi. Artinya,

$$\frac{d}{d \log \mathcal{K}} (h_0(\log \mathcal{K})) = \chi e^{\chi \log \mathcal{K}}; \quad (4.4.41)$$

$$\frac{d^2}{d \log \mathcal{K}^2} (h_0(\log \mathcal{K})) = \chi^2 e^{\chi \log \mathcal{K}} \quad (4.4.42)$$

harus memenuhi Persamaan 4.4.40. Apabila dilakukan substitusi Persamaan 4.4.41 dan 4.4.42 ke dalam Persamaan 4.4.40 akan diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} \chi^2 e^{\chi \log \mathcal{K}} + \alpha \chi e^{\chi \log \mathcal{K}} - (\lambda + r) e^{\chi \log \mathcal{K}} &= 0 \\ e^{\chi \log \mathcal{K}} \left[\frac{\sigma^2}{2} \chi^2 + \alpha \chi - (\lambda + r) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Karena $e^{\chi \log \mathcal{K}} > 0$, artinya

$$\frac{\sigma^2}{2}\chi^2 + \alpha\chi - (\lambda + r) = 0 \quad (4.4.43)$$

dengan Persamaan 4.4.43 memiliki dua solusi yaitu χ_1 dan χ_2 . Sehingga solusi dari Persamaan 4.4.40 adalah

$$\left[\frac{\sigma^2}{2}\chi_1^2 + \alpha\chi - (\lambda + r) \right] c_1 e^{\chi \log \mathcal{K}} + \left[\frac{\sigma^2}{2}\chi_2^2 + \alpha\chi - (\lambda + r) \right] c_2 e^{\chi \log \mathcal{K}}. \quad (4.4.44)$$

Selanjutnya, akan disubstitusikan Persamaan 4.4.44 ke Persamaan 4.4.39 dan diperoleh

$$\begin{aligned} -\lambda h_1(\log \mathcal{K}) &= \left[\frac{\sigma^2}{2}\chi_1^2 + \alpha\chi - (\lambda + r) \right] c_1 e^{\chi \log \mathcal{K}} \\ &\quad + \left[\frac{\sigma^2}{2}\chi_2^2 + \alpha\chi - (\lambda + r) \right] c_2 e^{\chi \log \mathcal{K}} \\ -\lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - K \right) &= \left[\frac{\sigma^2}{2}\chi_1^2 + \alpha\chi - (\lambda + r) \right] c_1 \mathcal{K}^{\chi_1} \\ &\quad \left[\frac{\sigma^2}{2}\chi_2^2 + \alpha\chi - (\lambda + r) \right] c_2 \mathcal{K}^{\chi_2} \\ \lambda \left(K - \frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} \right) &= \left[\frac{\sigma^2}{2}\chi_1^2 + \alpha\chi - (\lambda + r) \right] c_1 \mathcal{K}^{\chi_1} \\ &\quad \left[\frac{\sigma^2}{2}\chi_2^2 + \alpha\chi - (\lambda + r) \right] c_2 \mathcal{K}^{\chi_2}. \quad (4.4.45) \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan dari Persamaan 4.4.32 (Halaman 53) dan 4.4.45, tampak bahwa solusi dari $h_0(u)$ dan $h_1(u)$ masih mengandung nilai c_1 dan c_2 . Oleh karena itu, perlu dicari nilai dari c_1 dan c_2 terlebih dahulu.

Penentuan Nilai c_1 dan c_2

Nilai dari c_1 dan c_2 dapat diperoleh melalui Persamaan 4.4.32 (Halaman 53) dan Persamaan 4.4.45 menggunakan eliminasi dan substitusi. Misalkan

$$a = \left(\frac{\sigma^2 \chi_1^2}{2} + \alpha \chi_1 - \lambda - r \right)$$

$$b = \left(\frac{\sigma^2 \chi_2^2}{2} + \alpha \chi_2 - \lambda - r \right).$$

Persamaan 4.4.45 menjadi

$$a\mathcal{K}^{\chi_1} c_1 + b\mathcal{K}^{\chi_2} c_2 = \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - K \right). \quad (4.4.46)$$

Apabila Persamaan 4.4.32 dikalikan dengan b pada kedua ruas, diperoleh

$$b\mathcal{K}^{\chi_1} c_1 + b\mathcal{K}^{\chi_2} c_2 = b(K - \mathcal{K}). \quad (4.4.47)$$

Dengan melakukan eliminasi Persamaan 4.4.46 dan 4.4.47, diperoleh

$$(b - a)\mathcal{K}^{\chi_1} c_1 = b(K - \mathcal{K}) - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - k \right)$$

$$c_1 = \frac{b(K - \mathcal{K}) - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - k \right)}{(b - a)\mathcal{K}^{\chi_1}}. \quad (4.4.48)$$

Tinjau pembilang pada Persamaan 4.4.48 yakni

$$b(K - \mathcal{K}) - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - K \right)$$

$$= \left(\frac{\sigma^2 \chi_2^2}{2} + \alpha \chi_2 - \lambda - r \right) (K - \mathcal{K}) - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - \frac{K\mu_X + K}{\mu_X + 1} \right)$$

$$= \frac{\sigma^2 \chi_2^2}{2} K - \frac{\sigma^2 \chi_2^2}{2} \mathcal{K} + \alpha \chi_2 K - \alpha \chi_2 \mathcal{K} - \lambda K + \lambda \mathcal{K} - r K$$

$$+ r \mathcal{K} - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - \frac{K\mu_X}{\mu_X + 1} - \frac{K}{\mu_X + 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
& b(K - \mathcal{K}) - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - K \right) \\
&= \frac{\sigma^2\chi_2^2}{2}K - \frac{\sigma^2\chi_2^2}{2}\mathcal{K} + \alpha\chi_2K - \alpha\chi_2\mathcal{K} - rK + r\mathcal{K} - \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} \\
&\quad + \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} + \frac{K}{\lambda\mu_X + 1} - \lambda K + \lambda\mathcal{K} \\
&= \frac{\sigma^2\chi_2^2}{2}K - \frac{\sigma^2\chi_2^2}{2}\mathcal{K} + \alpha\chi_2K - \alpha\chi_2\mathcal{K} - rK + r\mathcal{K} - \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} \\
&\quad + \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} + \frac{\lambda K}{\mu_X + 1} - \frac{\lambda K(\mu_X + 1)}{\mu_X + 1} + \frac{\lambda\mathcal{K}(\mu_X + 1)}{\mu_X + 1} \\
&= \frac{\sigma^2\chi_2^2}{2}K - \frac{\sigma^2\chi_2^2}{2}\mathcal{K} + \alpha\chi_2K - \alpha\chi_2\mathcal{K} - rK + r\mathcal{K} - \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} \\
&\quad + \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} + \frac{\lambda K}{\mu_X + 1} - \frac{\lambda K\mu_X}{\mu_X + 1} - \frac{\lambda K}{\mu_X} + \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} + \frac{\lambda\mathcal{K}}{\mu_X + 1} \\
&= \left(\frac{\sigma^2\chi_2^2}{2} + \alpha\chi_2 - r \right) (K - \mathcal{K}) + \frac{\lambda}{\mu_X + 1}\mathcal{K}. \tag{4.4.49}
\end{aligned}$$

Serta, tinjau penyebut pada Persamaan 4.4.48 yakni

$$\begin{aligned}
& (b - a)\mathcal{K}^{\chi_1} \\
&= \left(\frac{\sigma^2\chi_2^2}{2} + \alpha\chi_2 - \lambda - r - \frac{\sigma^2\chi_1^2}{2} - \alpha\chi_1 + \lambda + r \right) \mathcal{K}^{\chi_1} \\
&= \left(\frac{\sigma^2}{2}(\chi_2^2 - \chi_1^2) + \alpha(\chi_2 - \chi_1) \right) \mathcal{K}^{\chi_1} \\
&= \left(\frac{\sigma^2}{2}(\chi_2 - \chi_1)(\chi_1 + \chi_2) + \alpha(\chi_2 - \chi_1) \right) \mathcal{K}^{\chi_1} \\
&= \mathcal{K}^{\chi_1}(\chi_2 - \chi_1) \left(\frac{\sigma^2}{2}(\chi_1 + \chi_2) + \alpha \right). \tag{4.4.50}
\end{aligned}$$

Artinya, berdasarkan Persamaan 4.4.49 dan Persamaan 4.4.50, Per-

samaan 4.4.48 menjadi

$$c_1 = \frac{(K - \mathcal{K}) \left(\frac{\sigma^2}{2} \chi_2^2 + \alpha \chi_2 - r \right) + \frac{\lambda}{\mu_X + 1} \mathcal{K}}{\mathcal{K}^{\chi_1} (\chi_2 - \chi_1) \left(\frac{\sigma^2}{2} (\chi_1 + \chi_2) + \alpha \right)}. \quad (4.4.51)$$

Sedangkan untuk mendapatkan nilai c_2 dilakukan dengan cara yang sama yaitu mengalikan Persamaan 4.4.32 (Halaman 53) dengan a pada kedua ruas, diperoleh

$$a\mathcal{K}^{\chi_1} c_1 + a\mathcal{K}^{\chi_2} c_2 = a(K - \mathcal{K}). \quad (4.4.52)$$

Dengan melakukan eliminasi Persamaan 4.4.46 (Halaman 58) dan 4.4.52, diperoleh

$$(a - b)\mathcal{K}^{\chi_1} c_2 = a(K - \mathcal{K}) - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - k \right)$$

$$c_2 = \frac{a(K - \mathcal{K}) - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - k \right)}{(a - b)\mathcal{K}^{\chi_1}}. \quad (4.4.53)$$

Tinjau pembilang pada Persamaan 4.4.53 yakni

$$a(K - \mathcal{K}) - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - K \right)$$

$$= \left(\frac{\sigma^2 \chi_1^2}{2} + \alpha \chi_1 - \lambda - r \right) (K - \mathcal{K}) - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - \frac{K\mu_X + K}{\mu_X + 1} \right)$$

$$= \frac{\sigma^2 \chi_1^2}{2} K - \frac{\sigma^2 \chi_1^2}{2} \mathcal{K} + \alpha \chi_1 K - \alpha \chi_1 \mathcal{K} - \lambda K + \lambda \mathcal{K} - r K$$

$$+ r \mathcal{K} - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - \frac{K\mu_X}{\mu_X + 1} - \frac{K}{\mu_X + 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
& a(K - \mathcal{K}) - \lambda \left(\frac{\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} - K \right) \\
&= \frac{\sigma^2\chi_1^2}{2}K - \frac{\sigma^2\chi_1^2}{2}\mathcal{K} + \alpha\chi_1K - \alpha\chi_1\mathcal{K} - rK + r\mathcal{K} - \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} \\
&\quad + \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} + \frac{K}{\lambda\mu_X + 1} - \lambda K + \lambda\mathcal{K} \\
&= \frac{\sigma^2\chi_1^2}{2}K - \frac{\sigma^2\chi_1^2}{2}\mathcal{K} + \alpha\chi_1K - \alpha\chi_1\mathcal{K} - rK + r\mathcal{K} - \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} \\
&\quad + \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} + \frac{\lambda K}{\mu_X + 1} - \frac{\lambda K(\mu_X + 1)}{\mu_X + 1} + \frac{\lambda\mathcal{K}(\mu_X + 1)}{\mu_X + 1} \\
&= \frac{\sigma^2\chi_1^2}{2}K - \frac{\sigma^2\chi_1^2}{2}\mathcal{K} + \alpha\chi_1K - \alpha\chi_1\mathcal{K} - rK + r\mathcal{K} - \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} \\
&\quad + \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} + \frac{\lambda K}{\mu_X + 1} - \frac{\lambda K\mu_X}{\mu_X + 1} - \frac{\lambda K}{\mu_X} + \frac{\lambda\mathcal{K}\mu_X}{\mu_X + 1} + \frac{\lambda\mathcal{K}}{\mu_X + 1} \\
&= \left(\frac{\sigma^2\chi_1^2}{2} + \alpha\chi_1 - r \right) (K - \mathcal{K}) + \frac{\lambda}{\mu_X + 1}\mathcal{K}. \tag{4.4.54}
\end{aligned}$$

Serta, tinjau penyebut pada Persamaan 4.4.53 yakni

$$\begin{aligned}
& (a - b)\mathcal{K}^{\chi_2} \\
&= \left(\frac{\sigma^2\chi_1^2}{2} + \alpha\chi_1 - \lambda - r - \frac{\sigma^2\chi_2^2}{2} - \alpha\chi_2 + \lambda + r \right) \mathcal{K}^{\chi_2} \\
&= \left(\frac{\sigma^2}{2}(\chi_1^2 - \chi_2^2) + \alpha(\chi_1 - \chi_2) \right) \mathcal{K}^{\chi_2} \\
&= \left(\frac{\sigma^2}{2}(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 + \chi_2) + \alpha(\chi_1 - \chi_2) \right) \mathcal{K}^{\chi_2} \\
&= \mathcal{K}^{\chi_2}(\chi_1 - \chi_2) \left(\frac{\sigma^2}{2}(\chi_1 + \chi_2) + \alpha \right). \tag{4.4.55}
\end{aligned}$$

Artinya, berdasarkan Persamaan 4.4.54 dan Persamaan 4.4.55, Per-

samaan 4.4.53 menjadi

$$c_2 = \frac{(K - \mathcal{K}) \left(\frac{\sigma^2}{2} \chi_1^2 + \alpha \chi_1 - r \right) + \frac{\lambda}{\mu_X + 1} \mathcal{K}}{\mathcal{K} \chi_2 (\chi_1 - \chi_2) \left(\frac{\sigma^2}{2} (\chi_1 + \chi_2) + \alpha \right)}. \quad (4.4.56)$$

Sehingga, berdasarkan Persamaan 4.4.51 dan Persamaan 4.4.56, dapat ditemukan nilai c_1 dan c_2 yang sesuai dengan Teorema 2. Oleh karena itu, untuk $u > \log \mathcal{K}$ dapat ditemukan formula analitis harga opsi put Amerika perpetual sebagai

$$\begin{aligned} P(t) &= h_0(\log S(t)) \\ &= c_1 e^{\chi_1 \log S(t)} + c_2 e^{\chi_2 \log S(t)} \\ &= c_1 e^{\log S(t) \chi_1} + c_2 e^{\log S(t) \chi_2} \\ &= c_1 S(t)^{\chi_1} + c_2 S(t)^{\chi_2}. \end{aligned} \quad (4.4.57)$$

sesuai dengan Teorema 1. ■

Ditinjau dari Teorema 1, apabila $S(t) \leq \mathcal{K}$, maka opsi put Amerika perpetual harus di-*exercise* sesegera mungkin. Sedangkan jika $S(t) > \mathcal{K}$, opsi put Amerika perpetual tidak perlu di-*exercise*.

4.4.2 Formula Analitis Opsi CatEPut Amerika Perpetual

Pada bagian ini, akan dikonstruksi formula analitis dari opsi CatEPut Amerika perpetual saat total kerugian akibat bencana alam, $L(t)$, melebihi *trigger level*, \mathcal{L} , dengan menganggap τ sebagai waktu *exercise opsi*. Berdasarkan Persamaan 4.4.2 dan Teorema 1, didapatkan bahwa harga opsi CatEPut Amerika perpetual pada saat $t = 0$ adalah

$$CatEPut(0) = \mathbb{E} [e^{-r\tau} P(t)]$$

$$\begin{aligned}
CatEPut(0) &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (K - S(\tau)) \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^2 c_j \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^{\chi_j} \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} K - e^{-r\tau} S(\tau) \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^2 c_j \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^{\chi_j} \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} K \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] - \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} S(\tau) \right. \\
&\quad \left. \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] + \sum_{j=1}^2 c_j \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^{\chi_j} \right. \\
&\quad \left. \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] \\
&= K \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] - \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} S(\tau) \right. \\
&\quad \left. \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] + \sum_{j=1}^2 c_j \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^{\chi_j} \right. \\
&\quad \left. \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right]. \tag{4.4.58}
\end{aligned}$$

Dari Persamaan 4.4.58 perlu dilakukan perhitungan untuk mendapatkan

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} S(\tau)^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] \tag{4.4.59}$$

dengan

$$\mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} = \begin{cases} \mathbb{E} [e^{-r\tau} S(\tau)^m], & \text{untuk } S(\tau) > \mathcal{K} \\ 0, & \text{untuk } S(\tau) \geq \mathcal{K} \end{cases}$$

untuk $m < 0$ karena χ_1 dan $\chi_2 < 0$,

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} S(\tau)^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] \quad (4.4.60)$$

dengan

$$\mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} = \begin{cases} \mathbb{E} [e^{-r\tau} S(\tau)^m], & \text{untuk } S(\tau) \leq \mathcal{K} \\ 0, & \text{untuk } S(\tau) > \mathcal{K} \end{cases}$$

untuk $m > 0$, dan

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] \quad (4.4.61)$$

dengan

$$\mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} = \begin{cases} \mathbb{E} [e^{-r\tau}], & \text{untuk } S(\tau) \leq \mathcal{K} \\ 0, & \text{untuk } S(\tau) > \mathcal{K}. \end{cases}$$

Tiga nilai ekspektasi di atas dapat diperoleh dengan mendefinisikan

$$f(u) = \mathbb{E} [e^{-r\tau} (S(\tau))^u] \quad (4.4.62)$$

untuk u adalah suatu bilangan kompleks. Adapun solusi dari Persamaan 4.4.62 dinyatakan dalam Lemma 2 berikut ini.

Lemma 2. *Diberikan bilangan kompleks u dengan $\frac{\sigma^2}{2}(\text{Re}(u))^2 + \alpha \text{Re}(u) - \lambda - r < 0$ dan $\text{Re}(u) > -\mu_X$. Didapatkan*

$$f(u) = \frac{(S(0))^u \mu_X}{\mu_X + u} \exp \left[\mathcal{L}^{\mu_R} \left(\frac{-\rho u}{a} + \frac{\lambda \mu_X}{b} - 1 \right) \right]$$

dengan

$$a = \mu_X + (1 - \rho)u$$

dan

$$b = (\mu_X + (1 - \rho)u) \left(\lambda + r - \alpha u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} \right).$$

Bukti :

Pembuktian Lemma 2 dilakukan dengan mengonstruksi suatu peubah acak $\{\tilde{X}_n : n = 1, 2, \dots\}$ terlebih dahulu agar proses $\{(R_n, \tilde{X}_n : n = 1, 2, \dots)\}$ memiliki distribusi yang sama dengan $\{(R_n, X_n : n = 1, 2, \dots)\}$ yaitu distribusi bivariat eksponensial Downton.

Didefinisikan peubah acak \tilde{X} dan ζ serta proses $\{\eta_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ dan $\{M(t) : t \geq 0\}$ sehingga

- a. R adalah peubah acak berdistribusi eksponensial dengan parameter μ_R .
- b. ζ adalah peubah acak berdistribusi eksponensial dengan parameter v , dimana

$$v = \frac{\mu_X}{1 - \rho}. \quad (4.4.63)$$

- c. $\{\eta_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ adalah barisan peubah acak yang distribusinya saling independen serta identik dengan distribusi eksponensial berparameter v , dengan nilai v seperti yang tertera pada Persamaan 4.4.63.
- d. $\{M(t) : t \geq 0\}$ adalah proses Poisson dengan intensitas γ , dengan

$$\gamma = \frac{\rho\mu_R}{1 - \rho}. \quad (4.4.64)$$

- e. $R, \zeta, \{\eta_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$, dan $\{M(t) : t \geq 0\}$ saling bebas.

Jika didefinisikan peubah acak \tilde{X} sebagai

$$\tilde{X} = \zeta + \sum_{k=M(\sum_{j=1}^{n-1} R_j)+1}^{M(\sum_{j=1}^n R_j)} \eta_k, \quad (4.4.65)$$

maka (R_n, \tilde{X}_n) berdistribusi eksponensial bivariat Downton dengan parameter μ_R, μ_X , dan ρ [19].

Selanjutnya, Persamaan 4.4.62 dapat diselesaikan dengan menggunakan

$$\begin{aligned} \log S(t) &= \log S(0) + \alpha t + \sigma W(t) - \sum_{n=1}^{N_t} X_n \\ \exp(\log S(t)) &= \exp\left(\log S(0) + \alpha t + \sigma W(t) - \sum_{n=1}^{N_t} X_n\right) \\ S(t) &= \exp\left(\log S(0) + \alpha t + \sigma W(t) - \sum_{n=1}^{N_t} X_n\right) \\ (S(t))^u &= \left[\exp\left(\log S(0) + \alpha t + \sigma W(t) - \sum_{n=1}^{N_t} X_n\right) u\right]. \end{aligned} \quad (4.4.66)$$

Apabila, Persamaan 4.4.66 disubstitusikan ke Persamaan 4.4.62, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(u) &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^u \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \times e^{u(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)} X_k)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau + u(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)} X_k)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau + u(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)} \tilde{X}_k)} \right]. \end{aligned} \quad (4.4.67)$$

Dengan mensubstitusikan nilai \tilde{X} pada Persamaan 4.4.65 ke Per-

samaan 4.4.67 diperoleh

$$\begin{aligned}
 f(u) &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau+u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)} \left(\zeta_k + \sum_{j=1}^{M(\sum_{j=1}^n R_j)} \eta_k \right) \right) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau+u \left(\log S(0) + \sigma\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)} \zeta_k - \sum_{k=1}^{M(\sum_{j=1}^{N(\tau)} R_j)} \eta_k \right) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau+u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)} \zeta_k - \sum_{k=1}^{M(\mathcal{L})} \eta_k - \sum_{k=M(\mathcal{L})+1}^{M(\sum_{j=1}^{N(\tau)} R_j)} \eta_k \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.4.68}$$

Pada Persamaan 4.4.68, akan ditinjau suku terakhir dari bagian eksponensialnya yaitu

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=M(\mathcal{L})+1}^{M(\sum_{j=1}^{N(\tau)} R_j)} \eta_k &= \sum_{k=1}^{M(\sum_{j=1}^{N(\tau)} R_j) - M(\mathcal{L})} \eta_k \\
 &= \sum_{k=1}^{M(\sum_{j=1}^{N(\tau)} R_j - \mathcal{L})} \eta_k \\
 &= \sum_{k=1}^{M(R_1)} \eta_k.
 \end{aligned} \tag{4.4.69}$$

Interpretasi dari Persamaan 4.4.69 adalah pada saat total kerugian bencana alam mencapai *trigger level*, perusahaan asuransi bisa mendapatkan dana untuk menjalankan kembali operasional perusahaan dengan melakukan *exercise* opsi. Sehingga pada kondisi ini, kontrak dari opsi CatEPut sudah berakhir dan opsi menjadi opsi put Amerika perpetual. Ketika opsi menjadi opsi put Amerika perpetual, perusahaan tetap memiliki kewajiban untuk membayarkan klaim akibat bencana kepada pemegang polis. Perusahaan asuransi bisa melakukan *exercise* opsi put Amerika perpetual untuk membayarkan

kewajiban klaim kepada pemegang polis apabila terjadi suatu bencana dengan menjual saham perusahaan asuransinya kepada *writer*.

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan Persamaan 4.4.69 ke Persamaan 4.4.68, diperoleh

$$f(u) = \mathbb{E} \left[e^{-r\tau + u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)} \zeta_k - \sum_{k=1}^{M(\mathcal{L})} \eta_k - \sum_{k=1}^{M(R_1)} \eta_k \right)} \right] \quad (4.4.70)$$

Selain itu karena, $(\tau, W(\tau), \sum_{k=1}^{N(\tau)} \zeta_k, \sum_{k=1}^{\mathcal{L}} \eta_k)$ dan $\sum_{k=M(\mathcal{L})+1}^{M(\sum_{j=1}^{N(\tau)} R_j)} \eta_k$ saling bebas, artinya Persamaan 4.4.70 menjadi

$$\begin{aligned} f(u) &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau + u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)} \zeta_k - \sum_{k=1}^{M(\mathcal{L})} \eta_k \right)} \right] \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[e^{-u \sum_{k=1}^{M(R_1)} \eta_k} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau + u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)-1} \zeta_k - \zeta_{N(\tau)} - \sum_{k=1}^{M(\mathcal{L})} \eta_k \right)} \right] \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[e^{-u \sum_{k=1}^{M(R_1)} \eta_k} \right]. \end{aligned} \quad (4.4.71)$$

Karena $-r\tau + u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)-1} \zeta_k \right)$, $\zeta_{N(\tau)}$, dan $\sum_{k=1}^{M(\mathcal{L})} \eta_k$ saling bebas, Persamaan 4.4.71 menjadi

$$\begin{aligned} f(u) &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau + u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)-1} \zeta_k \right)} \right] \mathbb{E} \left[e^{-u \zeta_{N(\tau)}} \right] \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[e^{-u \sum_{k=1}^{M(\mathcal{L})} \eta_k} \right] \mathbb{E} \left[e^{-u \sum_{k=1}^{M(R_1)} \eta_k} \right]. \end{aligned} \quad (4.4.72)$$

Berdasarkan Persamaan 4.4.72, akan ditinjau nilai ekspektasi

ke-dua dan ke-empat nya yang mana memiliki solusi sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[e^{-u\zeta_{N(\tau)}} \right] \mathbb{E} \left[e^{-u \sum_{k=1}^{M(R_1)} \eta_k} \right] &= \mathbb{E} \left[e^{-u\zeta_1} \right] \mathbb{E} \left[e^{-u \sum_{k=1}^{M(R_1)} \eta_k} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[e^{-u \left(\zeta_1 + \sum_{k=1}^{M(R_1)} \eta_k \right)} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[e^{-u\tilde{X}_1} \right] \\
 &= \frac{\mu_X}{\mu_X + u}. \tag{4.4.73}
 \end{aligned}$$

dengan nilai $\mathbb{E} \left[e^{-u\tilde{X}_1} \right]$ diperoleh melalui transformasi Laplace-Stieltjes. Sedangkan nilai ekspektasi ke-tiga nya adalah

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[e^{-u \sum_{k=1}^{M(\mathcal{L})} \eta_k} \right] &= \mathbb{E} \left[e^{-u\eta_1 - u\eta_2 - \dots - u\eta_{M(\mathcal{L})}} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[e^{-u\eta_1} \times e^{-u\eta_2} \times \dots \times e^{-u\eta_{M(\mathcal{L})}} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{E} \left[e^{-u\eta_1} \right] \right)^{M(\mathcal{L})} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{v}{v+u} \right)^{M(\mathcal{L})} \right] \\
 &= \exp \left(\gamma \mathcal{L} \left(\frac{v}{v+u} - 1 \right) \right) \\
 &= \exp \left(\gamma \mathcal{L} \left(\frac{v}{v+u} - \frac{v+u}{v+u} \right) \right) \\
 &= \exp \left(\gamma \mathcal{L} \left(\frac{-u}{v+u} \right) \right) \\
 &= \exp \left(\frac{-\gamma \mathcal{L} u}{v+u} \right). \tag{4.4.74}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan nilai ekspektasi dari Persamaan 4.4.73 dan 4.4.74 pada Persamaan 4.4.72 diperoleh

$$\begin{aligned}
 f(u) &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau + u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)-1} \zeta_k \right)} \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{\mu_X}{\mu_X + u} \exp \left(\frac{\gamma \mathcal{L} v}{v+u} \right) \right]. \tag{4.4.75}
 \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai dari $f(u)$ pada Persamaan 4.4.75, harus dicari juga nilai ekspektasi dari

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau+u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)-1} \zeta_k \right)} \right]. \quad (4.4.76)$$

Jika $N(\tau) - 1 = n$, untuk $n = 1, 2, \dots$, berdistribusi Poisson dengan parameter $\mu_R \mathcal{L}$ dan τ berdistribusi Erlang dengan parameter λ dan n , untuk $n = 1, 2, \dots$, maka ekspektasi dari fungsi kepadatan peluang τ bersyarat $N(\tau) - 1$ adalah

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[e^{-r\tau+u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)-1} \zeta_k \right)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{-r\tau+u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)-1} \zeta_k \right)} \mid N(\tau) - 1 \right] \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-r\tau+u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)-1} \zeta_k \right)} \right. \\ & \quad \left. \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} e^{-\lambda\tau} d\tau \right] (\mu_R \mathcal{L})^n \frac{e^{-\mu_R \mathcal{L}}}{n!}. \end{aligned} \quad (4.4.77)$$

Untuk mendapatkan solusi dari Persamaan 4.4.77, akan dicari solusi dari bagian integralnya terlebih dahulu yaitu

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-r\tau+u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)-1} \zeta_k \right)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} e^{-\lambda\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{u \log S(0)} e^{-r\tau+u\alpha\tau+\sigma W(\tau)} \times e^{-u \sum_{k=1}^n \zeta_k} \times \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} \\ & \quad e^{-\lambda\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{u \log S(0)} e^{-r\tau+u\alpha\tau+\sigma W(\tau)} \times \left(e^{-u\zeta_1 - u\zeta_2 - \dots - u\zeta_n} \right) \\ & \quad \times \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} \times e^{-\lambda\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{u \log S(0)} e^{-r\tau+u\alpha\tau+\sigma W(\tau)} \times \left(e^{-u\zeta_1} \times e^{-u\zeta_2} \dots \times e^{-u\zeta_n} \right) \\ & \quad \times \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} \times e^{-\lambda\tau} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty e^{-r\tau+u(\log S(0)+\alpha\tau+\sigma W(\tau)-\sum_{k=1}^{N(\tau)-1}\zeta_k)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} e^{-\lambda\tau} d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{u \log S(0)} e^{-r\tau+u\alpha\tau+\sigma W(\tau)} \times \left(e^{-u\zeta_1} \right)^n \times \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} \\
&\quad e^{-\lambda\tau} d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{u \log S(0)} e^{-r\tau+u\alpha\tau+u^2\sigma^2\tau/2} \left(\frac{v}{v+u} \right)^n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} \\
&\quad e^{-\lambda\tau} d\tau \\
&= \int_0^\infty (S(0))^u e^{-r\tau+u\alpha\tau+u^2\sigma^2\tau/2} \left(\frac{v}{v+u} \right)^n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} \\
&\quad e^{-\lambda\tau} d\tau \\
&= (S(0))^u \left(\frac{v}{v+u} \right)^n \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} e^{-r\tau+u\alpha\tau+u^2\sigma^2\tau/2} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&\quad \tau^{n-1} d\tau \\
&= (S(0))^u \left(\frac{v}{v+u} \right)^n \int_0^\infty e^{-\lambda\tau-r\tau+u\alpha\tau+u^2\sigma^2\tau/2} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&\quad \tau^{n-1} d\tau \\
&= (S(0))^u \left(\frac{v}{v+u} \right)^n \int_0^\infty e^{-(\lambda\tau+r\tau-u\alpha\tau-u^2\sigma^2\tau/2)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&\quad \tau^{n-1} d\tau. \tag{4.4.78}
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan hasil dari Persamaan 4.4.78, akan dicari solusi dari bagian integralnya terlebih dahulu yaitu

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty e^{-(\lambda\tau+r\tau-u\alpha\tau-u^2\sigma^2\tau/2)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} d\tau \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-(\lambda\tau+r\tau-u\alpha\tau-u^2\sigma^2\tau/2)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} d\tau. \tag{4.4.79}
\end{aligned}$$

Jika dimisalkan

$$a = \lambda\tau + r\tau - u\alpha\tau - \frac{u^2\sigma^2\tau}{2}$$

$$a = \left(\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2\sigma^2}{2} \right) \tau$$

$$\tau = \frac{a}{\left(\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2\sigma^2}{2} \right)}$$

dan

$$da = \lambda + r - u\alpha - \frac{u^2\sigma^2}{2} d\tau$$

$$d\tau = \frac{1}{\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2\sigma^2}{2}} da$$

serta batas integral menjadi

jika $\tau = 0$ maka $a = 0$; dan

jika $\tau = p$ maka $a = \left(\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2\sigma^2}{2} \right) p$

maka dengan mensubstitusikan nilai a , da dan batas integralnya pada Persamaan 4.4.79, diperoleh

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-(\lambda\tau + r\tau - u\alpha\tau - u^2\sigma^2\tau/2)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} d\tau$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\left(\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2\sigma^2}{2} \right) p} e^{-a} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}$$

$$\left(\frac{a}{\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2\sigma^2}{2}} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2\sigma^2}{2}} \right) da$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-(\lambda\tau+r\tau-u\alpha\tau-u^2\sigma^2\tau/2)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} d\tau \\
&= \left(\frac{1}{\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}} \right) \\
& \quad \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\left(\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}\right)^p} a^{n-1} e^{-a} da. \quad (4.4.80)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi fungsi Gamma [26], bagian integral pada Persamaan 4.4.80 menjadi

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty a^{n-1} e^{-a} da = \Gamma(n) \\
& \quad \quad \quad = (n-1)!. \quad (4.4.81)
\end{aligned}$$

Sehingga, apabila Persamaan 4.4.81 disubstitusikan pada Persamaan 4.4.80, diperoleh

$$\begin{aligned}
& \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-(\lambda\tau+r\tau-u\alpha\tau-u^2\sigma^2\tau/2)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\left(\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}\right)^n} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} (n-1)! \\
&= \frac{\lambda^n}{\left(\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}\right)^n} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}} \right)^n. \quad (4.4.82)
\end{aligned}$$

Dari hasil pada Persamaan 4.4.82, artinya Persamaan 4.4.78 menjadi

$$\int_0^\infty e^{-r\tau+u(\log S(0)+\alpha\tau+\sigma W(\tau)-\sum_{k=1}^{N(\tau)-1}\zeta_k)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} e^{-\lambda\tau} d\tau$$

$$= (S(0))^u \left(\frac{\lambda}{\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}} \right)^n \left(\frac{v}{v+u} \right)^n. \quad (4.4.83)$$

Selanjutnya, Persamaan 4.4.83 disubstitusikan kembali ke Persamaan 4.4.77 dan diperoleh

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau+u(\log S(0)+\alpha\tau+\sigma W(\tau)-\sum_{k=1}^{N(\tau)-1}\zeta_k)} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^\infty (S(0))^u \left(\frac{\lambda}{\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}} \right)^n \left(\frac{v}{v+u} \right)^n (\mu_R \mathcal{L})^n$$

$$\frac{e^{-\mu_R \mathcal{L}}}{n!}$$

$$= (S(0))^u \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda \mu_R \mathcal{L}}{\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}} \frac{v}{v+u} \right)^n e^{-\mu_R \mathcal{L}} \quad (4.4.84)$$

Untuk mendapatkan penyelesaian di atas, digunakan definisi deret MacLaurin untuk e^x [27] sehingga, apabila dimisalkan

$$x = \frac{\lambda \mu_R \mathcal{L}}{\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}} \frac{v}{v+u},$$

maka Persamaan 4.4.84 dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[e^{-r\tau+u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)-1} \zeta_k \right)} \right] \\
 &= (S(0))^u \exp \left[\frac{\lambda \mu_R \mathcal{L}}{\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2 \sigma^2}{2}} \frac{v}{v+u} \right] e^{-\mu_R \mathcal{L}} \\
 &= (S(0))^u \exp \left[-\mu_R \mathcal{L} + \frac{\lambda \mu_R \mathcal{L}}{\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2 \sigma^2}{2}} \frac{v}{v+u} \right]. \quad (4.4.85)
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan 4.4.85 (Halaman 75) ke Persamaan 4.4.62 diperoleh

$$\begin{aligned}
 f(u) &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau+u \left(\log S(0) + \alpha\tau + \sigma W(\tau) - \sum_{k=1}^{N(\tau)-1} \zeta_k \right)} \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{\mu_X}{\mu_X + u} \exp \left(\frac{-\gamma \mathcal{L} u}{v+u} \right) \right] \\
 &= (S(0))^u \exp \left[-\mu_R \mathcal{L} + \frac{\lambda \mu_R \mathcal{L}}{\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2 \sigma^2}{2}} \frac{v}{v+u} \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{\mu_X}{\mu_X + u} \exp \left(\frac{-\gamma \mathcal{L} u}{v+u} \right) \right] \\
 &= \frac{(S(0))^u \mu_X}{\mu_X + u} \exp \left[-\mu_R \mathcal{L} + \frac{\lambda \mu_R \mathcal{L}}{\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2 \sigma^2}{2}} \frac{v}{v+u} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\gamma \mathcal{L} u}{v+u} \right]. \quad (4.4.86)
 \end{aligned}$$

Pada suku kedua bagian eksponensial Persamaan 4.4.86 di atas, dilakukan substitusi untuk nilai v , dimana

$$v = \frac{\mu_X}{1 - \rho}$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda\mu_R\mathcal{L}}{\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}}\left(\frac{v}{v+u}\right) &= \frac{\lambda\mu_R\mathcal{L}}{\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}}\times \\
 &\quad \left(\frac{\left(\frac{\mu_X}{1-\rho}\right)}{\left(u+\frac{\mu_X}{1-\rho}\right)}\right) \\
 &= \frac{\lambda\mu_R\mathcal{L}}{\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}} \\
 &\quad \left(\frac{\left(\frac{\mu_X}{1-\rho}\right)}{\left(\frac{u(1-\rho)+\mu_X}{1-\rho}\right)}\right) \\
 &= \frac{\lambda\mu_R\mathcal{L}\mu_X}{\left(\lambda+r-u\alpha-\frac{u^2\sigma^2}{2}\right)} \\
 &\quad \times \frac{1}{(u(1-\rho)+\mu_X)}. \quad (4.4.87)
 \end{aligned}$$

Dan untuk suku ketiga bagian eksponensial Persamaan 4.4.86, juga dilakukan substitusi untuk γ dan v dimana

$$v = \frac{\mu_X}{1-\rho}$$

dan

$$\gamma = \frac{\rho\mu_R\mathcal{L}u}{1-\rho}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\gamma \mathcal{L}u}{u+v} &= \frac{\frac{\rho \mu_R \mathcal{L}u}{1-\rho}}{\frac{\mu_X + u(1-\rho)}{1-\rho}} \\ &= \frac{\rho \mu_R \mathcal{L}u}{\mu_X + u(1-\rho)}. \end{aligned} \quad (4.4.88)$$

Selanjutnya, dilakukan substitusi Persamaan 4.4.87 dan 4.4.88 ke Persamaan 4.4.86 diperoleh

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{(S(0))^u \mu_X}{\mu_X + u} \exp \left[-\mu_R \mathcal{L} + \frac{\lambda \mu_R \mathcal{L} \mu_X}{\left(\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2 \sigma^2}{2} \right) (u(1-\rho) + \mu_X)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho \mu_R \mathcal{L}u}{\mu_X + u(1-\rho)} \right] \\ &= \frac{(S(0))^u \mu_X}{\mu_X + u} \exp \left[\mathcal{L} \mu_R \left(\frac{-\rho u}{a} + \frac{\lambda \mu_X}{b} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

dengan

$$a = \mu_X + u(1-\rho)$$

$$b = \left(\lambda + r - u\alpha - \frac{u^2 \sigma^2}{2} \right) (u(1-\rho) + \mu_X)$$

untuk $\frac{\sigma^2}{2}(\text{Re}(u))^2 + \alpha \text{Re}(u) - \lambda - r < 0$ dan $\text{Re}(u) > -\mu_X$. Sehingga, Lemma 2 terbukti. ■

Selanjutnya, dengan menggunakan Lemma 2, akan dicari nilai ekspektasi dari Persamaan 4.4.60, 4.4.59 dan 4.4.61 yang dinyatakan pada Lemma 3 berikut ini.

Lemma 3. Nilai ekspektasi dari

1. Untuk $m < 0$

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] = \frac{\mathcal{K}^m}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(f(i\xi) \frac{e^{-i\xi \log \mathcal{K}}}{i\xi - m} \right) d\xi.$$

2. Untuk $m > 0$

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] = -\frac{\mathcal{K}^m}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(f(i\xi) \frac{e^{-i\xi \log \mathcal{K}}}{i\xi - m} \right) d\xi.$$

3. Serta

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] &= \frac{1}{2} \exp \left(\frac{\mu_R \mathcal{L} r}{\lambda + r} \right) - \frac{1}{\pi} \\ &\times \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(f(i\xi) \frac{e^{-i\xi \log \mathcal{K}}}{i\xi} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Bukti :

1. Untuk $m < 0$

Didefinisikan

$$g_m(x) = e^{-mx} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{\log S(\tau) > x\}} \right]. \quad (4.4.89)$$

Transformasi Fourier dari $g_m(x)$, $x \in R$ adalah

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_m(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} g_m(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-mx} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{\log S(\tau) > x\}} \right] dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\xi x} e^{-mx} \left(\int_{-\infty}^{\log S(\tau)} e^{-r\tau} (S(\tau))^m f(u) du \right) \right) dx \\
 &= e^{-r\tau} (S(\tau))^m \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\log S(\tau)} e^{i\xi x} e^{-mx} f(u) du \right) dx \\
 &= e^{-r\tau} (S(\tau))^m \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\log S(\tau)} e^{i\xi x} e^{-mx} f(u) dx \right) du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\log S(\tau)} e^{(i\xi - m)x} e^{-r\tau} (S(\tau))^m dx \right) f(u) du \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{\log S(\tau)} e^{(i\xi - m)x} e^{-r\tau} (S(\tau))^m dx \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\log S(\tau)} e^{(i\xi - m)x} (S(\tau))^m dx \right] \tag{4.4.90}
 \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan penyelesaian Persamaan 4.4.90, akan dicari solusi dari bagian integralnya terlebih dahulu yaitu

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\log S(\tau)} e^{(i\xi - m)x} (S(\tau))^m dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\log S(\tau)} e^{(i\xi - m)x} \\
 &\quad \times (S(\tau))^m dx \\
 &= (S(\tau))^m \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\log S(\tau)} \\
 &\quad e^{(i\xi - m)x} dx. \tag{4.4.91}
 \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned}
 u &= e^{(i\xi - m)x} \\
 du &= (i\xi - m) e^{(i\xi - m)x} dx \\
 dx &= \frac{1}{(i\xi - m)u} du
 \end{aligned}$$

dan batas integral menjadi

$$\begin{aligned} \text{jika } x = a & \quad \text{maka } u = e^{(i\xi - m)a} \\ \text{jika } x = \log(S(\tau)) & \quad \text{maka } u = e^{(i\xi - m)\log(S(\tau))}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, dilakukan substitusi nilai u , du , dan batas integral pada Persamaan 4.4.91 diperoleh

$$\begin{aligned} & (S(\tau))^m \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{e^{(i\xi - m)a}}^{(S(\tau))^{(i\xi - m)}} \frac{1}{(i\xi - m)u} u du \\ &= \frac{(S(\tau))^m}{i\xi - m} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left([u]_{e^{(i\xi - m)a}}^{(S(\tau))^{(i\xi - m)}} \right) \\ &= \frac{(S(\tau))^m}{i\xi - m} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[(S(\tau))^{(i\xi - m)} - e^{(i\xi - m)a} \right] \\ &= \frac{(S(\tau))^m}{i\xi - m} \left[S(\tau)^{(i\xi - m)} - 0 \right] \\ &= \frac{(S(\tau))^{i\xi}}{i\xi - m}. \end{aligned} \tag{4.4.92}$$

Hasil dari integral pada Persamaan 4.4.92, disubstitusikan ke Persamaan 4.4.90 dan diperoleh

$$\begin{aligned} \tilde{g}_m(\xi) &= \left(\frac{1}{i\xi - m} \right) \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^{i\xi} \right] \\ &= \frac{f(i\xi)}{i\xi - m}. \end{aligned} \tag{4.4.93}$$

Berdasarkan Persamaan 4.4.89 dan Persamaan 4.4.93, akan dicari

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right]$$

untuk $m < 0$. Jika

$$\begin{aligned} e^{-mx} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{\log S(\tau) > x\}} \right] &= g_m(x) \\ \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{\log S(\tau) > x\}} \right] &= e^{mx} g_m(x), \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{e^{\log S(\tau)} > e^x\}} \right] &= e^{mx} g_m(x) \\ \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) > e^x\}} \right] &= e^{mx} g_m(x).\end{aligned}$$

Sehingga, dengan $x = \log \mathcal{K}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] &= e^{m \log \mathcal{K}} g_m(\log \mathcal{K}) \\ \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] &= \mathcal{K}^m g_m(\log \mathcal{K}) \quad (4.4.94)\end{aligned}$$

dengan $g_m(\log \mathcal{K})$ dicari melalui invers transformasi Fourier dari $\tilde{g}_m(\xi)$ yaitu

$$\begin{aligned}g_m(\log \mathcal{K}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_m(\xi) e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi. \quad (4.4.95)\end{aligned}$$

Selanjutnya, Persamaan 4.4.95 disubstitusikan pada Persamaan 4.4.94 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] &= \mathcal{K}^m \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right) \\ &= \frac{\mathcal{K}^m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \\ &= 2 \times \left[\frac{\mathcal{K}^m}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right] \\ &= \frac{\mathcal{K}^m}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi.\end{aligned}$$

Sehingga, untuk $m < 0$ diperoleh

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] = \frac{\mathcal{K}^m}{\pi} \left(\operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right) \quad (4.4.96)$$

sesuai dengan nilai pada Lemma 3.

2. Untuk $m > 0$.

Didefinisikan

$$p_m(x) = e^{-mx} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{\log S(\tau) \leq x\}} \right]. \quad (4.4.97)$$

Transformasi Fourier dari $p_m(x)$, $x \in \mathbb{R}$ adalah

$$\begin{aligned} \tilde{p}_m(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} p_m(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-mx} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{\log S(\tau) \leq x\}} \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\xi x} e^{-mx} \left(\int_{\log S(\tau)}^{\infty} e^{-r\tau} (S(\tau))^m f(u) du \right) \right) dx \\ &= e^{-r\tau} (S(\tau))^m \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\log S(\tau)}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-mx} f(u) du \right) dx \\ &= e^{-r\tau} (S(\tau))^m \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\log S(\tau)}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-mx} f(u) dx \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\log S(\tau)}^{\infty} e^{(i\xi - m)x} e^{-r\tau} (S(\tau))^m dx \right) f(u) du \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\log S(\tau)}^{\infty} e^{(i\xi - m)x} e^{-r\tau} (S(\tau))^m dx \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \int_{\log S(\tau)}^{\infty} e^{(i\xi - m)x} (S(\tau))^m dx \right] \end{aligned} \quad (4.4.98)$$

Untuk mendapatkan penyelesaian Persamaan 4.4.98, akan dicari

solusi dari bagian integralnya terlebih dahulu yaitu

$$\begin{aligned} \int_{\log S(\tau)}^{\infty} e^{(i\xi-m)x} (S(\tau))^m dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\log S(\tau)}^a e^{(i\xi-m)x} \\ &\quad \times (S(\tau))^m dx \\ &= (S(\tau))^m \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\log S(\tau)}^{\infty} \\ &\quad e^{(i\xi-m)x} dx. \end{aligned} \quad (4.4.99)$$

Misalkan

$$\begin{aligned} u &= e^{(i\xi-m)x} \\ du &= (i\xi - m)e^{(i\xi-m)x} dx \\ dx &= \frac{1}{(i\xi - m)u} du \end{aligned}$$

dan batas integral menjadi

$$\begin{aligned} \text{jika } x &= a && \text{maka } u = e^{(i\xi-m)a} \\ \text{jika } x &= \log(S(\tau)) && \text{maka } u = e^{(i\xi-m)\log(S(\tau))}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, dilakukan substitusi nilai u , du , dan batas integral pada Persamaan 4.4.99 diperoleh

$$\begin{aligned} (S(\tau))^m \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{(S(\tau))^{(i\xi-m)}}^{e^{(i\xi-m)a}} \frac{1}{(i\xi - m)u} u du \\ &= \frac{(S(\tau))^m}{i\xi - m} \lim_{a \rightarrow \infty} \left([e^u]_{(S(\tau))^{(i\xi-m)}}^{e^{(i\xi-m)a}} \right) \\ &= \frac{(S(\tau))^m}{i\xi - m} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[e^{(i\xi-m)a} - (S(\tau))^{(i\xi-m)} \right] \\ &= \frac{(S(\tau))^m}{i\xi - m} \left[0 - S(\tau)^{(i\xi-m)} \right] \\ &= -\frac{(S(\tau))^{i\xi}}{i\xi - m}. \end{aligned} \quad (4.4.100)$$

Hasil dari integral pada Persamaan 4.4.100, disubstitusikan ke Persamaan 4.4.98 dan diperoleh

$$\begin{aligned}\tilde{p}_m(\xi) &= \left(-\frac{1}{i\xi - m} \right) \mathbb{E} \left[e^{-r\tau(S(\tau))^{i\xi}} \right] \\ &= -\frac{f(i\xi)}{i\xi - m}.\end{aligned}\quad (4.4.101)$$

Berdasarkan Persamaan 4.4.97 dan Persamaan 4.4.101, akan dicari

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau(S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right].$$

untuk $m > 0$. Jika

$$\begin{aligned}e^{-mx} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau(S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{\log S(\tau) \leq x\}} \right] &= p_m(x) \\ \mathbb{E} \left[e^{-r\tau(S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{\log S(\tau) \leq x\}} \right] &= e^{mx} p_m(x),\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[e^{-r\tau(S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{e^{\log S(\tau)} \leq e^x\}} \right] &= e^{mx} p_m(x) \\ \mathbb{E} \left[e^{-r\tau(S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq e^x\}} \right] &= e^{mx} p_m(x).\end{aligned}$$

Sehingga, dengan $x = \log \mathcal{K}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[e^{-r\tau(S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] &= e^{m \log \mathcal{K}} p_m(\log \mathcal{K}) \\ \mathbb{E} \left[e^{-r\tau(S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] &= \mathcal{K}^m p_m(\log \mathcal{K})\end{aligned}\quad (4.4.102)$$

dengan $p_m(\log \mathcal{K})$ dicari melalui invers transformasi Fourier

dari $\tilde{p}_m(\xi)$ yaitu

$$\begin{aligned} p_m(\log \mathcal{K}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_m(\xi) e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi. \end{aligned} \quad (4.4.103)$$

Selanjutnya, Persamaan 4.4.103 disubstitusikan pada Persamaan 4.4.102 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] \\ &= \mathcal{K}^m \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right) \\ &= -\frac{\mathcal{K}^m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \\ &= -2 \times \left[\frac{\mathcal{K}^m}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right] \\ &= -\frac{\mathcal{K}^m}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi. \end{aligned}$$

Sehingga, untuk $m > 0$ diperoleh

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^m \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] = -\frac{\mathcal{K}^m}{\pi} \left(\operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{f(i\xi)}{i\xi - m} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right) \quad (4.4.104)$$

sesuai dengan nilai pada Lemma 3.

3. Untuk nilai ekspektasi berikut

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right], \quad (4.4.105)$$

didefinisikan suatu ukuran peluang $\tilde{\mathbb{P}}$ yang mana

$$d\tilde{\mathbb{P}} = \frac{e^{-r\tau}}{\mathbb{E}[e^{-r\tau}]} d\mathbb{P}. \quad (4.4.106)$$

Sehingga,

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] = \mathbb{E} [e^{-r\tau}] \tilde{\mathbb{P}}(S(\tau) \leq \mathcal{K}). \quad (4.4.107)$$

dengan, $\mathbb{E}[e^{-r\tau}]$ memenuhi Persamaan 4.4.62 untuk $u = 0$. Hal ini berakibat Persamaan 4.4.107 menjadi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] &= f(0) \tilde{\mathbb{P}}(S(\tau) \leq \mathcal{K}) \\ &= f(0) \tilde{\mathbb{P}}(\log(S(\tau)) \leq \log \mathcal{K}). \end{aligned} \quad (4.4.108)$$

Misalkan $\tilde{\mathbb{E}}$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{i\xi \log S(\tau)} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi \log S(\tau)} d\tilde{\mathbb{P}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi \log S(\tau)} \frac{e^{-r\tau}}{\mathbb{E}[e^{-r\tau}]} d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E} \left[e^{i\xi \log S(\tau)} \times \frac{e^{-r\tau}}{\mathbb{E}[e^{-r\tau}]} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(S(\tau))^{i\xi} \times \frac{e^{-r\tau}}{\mathbb{E}[e^{-r\tau}]} \right] \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[e^{-r\tau}]} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^{i\xi} \right] \\ &= \frac{f(i\xi)}{f(0)}. \end{aligned} \quad (4.4.109)$$

Dengan menggunakan invers dari distribusi probabilitas, dihasilkan

$$\tilde{\mathbb{P}}(\log(S(\tau)) \leq \log \mathcal{K}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{f(i\xi)}{f(0)} \frac{e^{-i\xi \log \mathcal{K}}}{i\xi} \right) d\xi. \quad (4.4.110)$$

Selanjutnya, dilakukan substitusi Persamaan 4.4.110 ke Persamaan 4.4.108 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] &= f(0) \tilde{\mathbb{P}}(\log S(\tau) \leq \log \mathcal{K}) \\
 &= f(0) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{f(i\xi)}{f(0)} \frac{e^{-i\xi \log \mathcal{K}}}{i\xi} \right) d\xi \right) \\
 &= \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left(f(i\xi) \frac{e^{-i\xi \log \mathcal{K}}}{i\xi} d\xi \right).
 \end{aligned} \tag{4.4.111}$$

Untuk mendapatkan nilai dari $f(0)$, digunakan Lemma 2 dengan $u = 0$, yaitu

$$f(0) = \frac{(S(0))^0 \mu_X}{\mu_X + 0} \exp \left[\mathcal{L}\mu_R \left(\frac{-\rho(0)}{a} + \frac{\lambda \mu_X}{b} - 1 \right) \right]$$

dengan

$$\begin{aligned}
 a &= \mu_X + (1 - \rho)(0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 b &= \left((\mu_X + (1 - \rho)(0)) \left(\lambda + r - \alpha(0) - \frac{\sigma^2(0)^2}{2} \right) \right) \\
 &= \mu_X (\lambda + r).
 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \frac{\mu_X}{\mu_X} \exp \left[\mathcal{L}\mu_R \left(\frac{\lambda \mu_X}{\mu_X (\lambda + r)} - 1 \right) \right] \\
 &= \frac{\mu_X}{\mu_X} \exp \left[\mathcal{L}\mu_R \left(\frac{\lambda \mu_X}{\mu_X (\lambda + r)} - \frac{\lambda + r}{\lambda + r} \right) \right] \\
 &= \frac{\mu_X}{\mu_X} \exp \left[\mathcal{L}\mu_R \left(-\frac{r}{\lambda + r} \right) \right] \\
 &= \exp \left(-\frac{\mu_R \mathcal{L}r}{\lambda + r} \right).
 \end{aligned} \tag{4.4.112}$$

Substitusikan Persamaan 4.4.112 ke Persamaan 4.4.111 diperoleh

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{\mu_R \mathcal{L} r}{\lambda + r} \right) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(f(i\xi) \frac{e^{-i\xi \log \mathcal{K}}}{i\xi} d\xi \right). \end{aligned} \quad (4.4.113)$$

Berdasarkan Persamaan 4.4.96, 4.4.104, dan 4.4.113, Lemma 3 terbukti. Sehingga, dengan menggunakan Lemma 3, dapat ditentukan formula analitis dari harga opsi CatEPut Amerika perpetual berdasarkan Persamaan 4.4.58 (Halaman 63), yaitu

$$\begin{aligned} \text{CatEPut}(0) &= K \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] - \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} S(\tau) \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 c_j \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^{\chi_j} \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] \\ &= K \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] - \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} S(\tau) \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] \\ &\quad + c_1 \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^{\chi_1} \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] \\ &\quad + c_2 \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^{\chi_2} \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right]. \end{aligned} \quad (4.4.114)$$

Suku pertama dari Persamaan 4.4.114 bisa diperoleh menggunakan Persamaan 4.4.113 yaitu

$$\begin{aligned} K \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] &= K \left[\frac{1}{2} \exp \left(-\frac{\mu_R \mathcal{L} r}{\lambda + r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(f(i\xi) \frac{e^{-i\xi \log \mathcal{K}}}{i\xi} d\xi \right) \right] \\ &= \frac{K}{2} \exp \left(-\frac{\mu_R \mathcal{L} r}{\lambda + r} \right) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{K}{i\xi} \right. \\ &\quad \left. f(i\xi) e^{-i\xi \log \mathcal{K}} \right) d\xi. \end{aligned} \quad (4.4.115)$$

Suku kedua dari Persamaan 4.4.114 bisa diperoleh dengan menggunakan Persamaan 4.4.104 (Halaman 85) dengan $m = 1$ yaitu

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} S(\tau) \mathbf{1}_{\{S(\tau) \leq \mathcal{K}\}} \right] &= -\frac{\mathcal{K}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(f(i\xi) \frac{e^{-i\xi \log \mathcal{K}}}{i\xi - 1} d\xi \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{K}{i\xi - 1} f(i\xi) e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{K}{1 - i\xi} f(i\xi) e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right). \end{aligned} \quad (4.4.116)$$

Suku ketiga dari Persamaan 4.4.114 bisa diperoleh dengan menggunakan Persamaan 4.4.96 (Halaman 82) dimana $m = \chi_1$ yaitu

$$\begin{aligned} c_1 \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^{\chi_1} \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] &= \frac{c_1 \mathcal{K}^{\chi_1}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{f(i\xi)}{i\xi - \chi_1} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 \mathcal{K}^{\chi_1}}{i\xi - \chi_1} f(i\xi) e^{-i\xi \log \mathcal{K}} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 \mathcal{K}^{\chi_1}}{\chi_1 - i\xi} f(i\xi) e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right). \end{aligned} \quad (4.4.117)$$

Dan, suku ketiga dari Persamaan 4.4.114 bisa diperoleh dengan menggunakan Persamaan 4.4.96 (Halaman 82) dimana $m = \chi_2$ yaitu

$$\begin{aligned} c_2 \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (S(\tau))^{\chi_2} \mathbf{1}_{\{S(\tau) > \mathcal{K}\}} \right] &= \frac{c_2 \mathcal{K}^{\chi_2}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{f(i\xi)}{i\xi - \chi_2} e^{-i\xi \log \mathcal{K}} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{c_2 \mathcal{K}^{\chi_2}}{i\xi - \chi_2} f(i\xi) e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{c_2 \mathcal{K}^{\chi_2}}{\chi_2 - i\xi} f(i\xi) e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right) \end{aligned} \quad (4.4.118)$$

Sehingga, dengan melakukan substitusi Persamaan 4.4.115, 4.4.116, 4.4.117, dan 4.4.118 pada Persamaan 4.4.114 diperoleh

$$\begin{aligned} \text{CatEPut}(0) &= \left(\frac{K}{2} \exp \left[-\frac{\mu_R \mathcal{L} r}{\lambda + r} \right] \right) - \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{K}{i\xi} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{K}{i\xi - 1} + \frac{c_1 \mathcal{K}^{\chi_1}}{\chi_1 - i\xi} + \frac{c_2 \mathcal{K}^{\chi_2}}{\chi_2 - i\xi} \right) f(i\xi) e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right). \end{aligned} \quad (4.4.119)$$

dengan $f(i\xi)$ sesuai dengan Lemma 2 untuk $u = i\xi$, serta nilai c_1 dan c_2 sesuai dengan Persamaan 4.4.5 (Halaman 44) dan 4.4.6 (Halaman 44) pada Teorema 1. ■

4.5 Simulasi Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi dari formula analitis opsi CatEPut Amerika perpetual pada Persamaan 4.4.119. Berdasarkan hasil simulasi, akan diamati pengaruh dari beberapa variabel terhadap perilaku harga opsi CatEPut Amerika perpetual. Selain itu, simulasi juga akan dilakukan dengan menggunakan nilai koefisien korelasi (ρ) antara penurunan harga saham perusahaan asuransi dengan total kerugian akibat bencana alam yang berbeda-beda agar dapat diketahui juga pengaruh dari koefisien korelasi tersebut terhadap perilaku harga opsi CatEPut Amerika perpetual. Adapun nilai parameter yang digunakan dalam simulasi harga opsi CatEPut Amerika perpetual diberikan pada Tabel 4.5.1.

Tabel 4.5.1. Daftar Parameter Simulasi Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual

Parameter	Deskripsi	Nilai
K	<i>Strike price</i>	80
S	Harga saham perusahaan asuransi	40
r	Tingkat suku bunga	0.05
λ	Frekuensi bencana alam	0.5
σ	Volatilitas	0.2
\mathcal{L}	<i>Trigger level</i>	5
μ_R	Rata - rata kerugian akibat bencana alam	5
μ_X	Rata - rata penurunan harga saham	5

4.5.1 Pengaruh Harga Saham Perusahaan Asuransi Terhadap Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi dengan menggunakan parameter yang tertera pada Tabel 4.5.1. Namun, simulasi akan di-

lakukan dengan menggunakan beberapa harga saham yang berbeda yaitu 40, 60, 80, dan 100.

Tabel 4.5.2. Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Berdasarkan Perbedaan Harga Saham Perusahaan Asuransi

Koefisien Korelasi	Harga Saham Perusahaan Asuransi ($S(0)$)			
	40	60	80	100
0	4.168102	3.557381	3.131669	2.811714
0.2	4.323357	3.716699	3.289172	2.965098
0.4	4.476765	3.875269	3.446889	3.119469
0.6	4.628435	4.033166	3.604877	3.274877
0.8	4.778463	4.190459	3.763186	3.431371
1	4.926933	4.347206	3.921864	3.588999

Berdasarkan hasil simulasi pada Tabel 4.5.2, jika ditinjau dari segi harga saham perusahaan asuransi, pada saat harga saham perusahaan asuransi lebih rendah dibandingkan dengan *strike price* opsi, maka perusahaan asuransi berada dalam kondisi *out-of-money* (put). Sehingga, perusahaan asuransi harus membayarkan premi yang dalam hal ini adalah harga opsi CatEPut Amerika perpetual lebih tinggi sebagai jaminan agar perusahaan asuransi tersebut bisa mendapatkan *equity fund* yang mencukupi pada saat opsi di-*exercise* untuk menjalankan kembali operasional perusahaan.

4.5.2 Pengaruh Tingkat Suku Bunga Harga Saham Perusahaan Asuransi Terhadap Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual

Simulasi penentuan harga opsi CatEPut Amerika perpetual berdasarkan perbedaan tingkat suku bunga dilakukan dengan menggunakan parameter yang tertera pada Tabel 4.5.1. Namun, simulasi dilakukan dengan menggunakan nilai tingkat suku bunga yang berbeda-beda sebesar 0.04, 0.05, 0.06, dan 0.08.

Berdasarkan hasil simulasi pada Tabel 4.5.3, tampak bahwa harga dari opsi CatEPut Amerika perpetual turun seiring dengan

Tabel 4.5.3. Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Berdasarkan Perbedaan Tingkat Suku Bunga

Koefisien Korelasi	Tingkat Suku Bunga (r)			
	0.04	0.05	0.06	0.08
0	7.218135	4.168102	2.429106	0.851412
0.2	7.40585	4.323357	2.552394	0.923321
0.4	7.591899	4.476765	2.674088	0.994566
0.6	7.776396	4.628435	2.794272	1.065137
0.8	7.959446	4.778463	2.913011	1.13502
1	8.141143	4.926933	3.03036	1.204196

menaiknya tingkat suku bunga. Hal ini dikarenakan, tingkat suku bunga memiliki keterkaitan erat dengan saham dari perusahaan asuransi. Tinggi rendahnya tingkat suku bunga *interest rate* ini yang memengaruhi naik turunnya harga saham. Hubungan di antara tingkat suku bunga berbanding lurus dengan pergerakan harga saham. Semakin naik tingkat suku bunga, maka akan semakin tinggi pula harga saham. Artinya, apabila suku bunga tinggi, perusahaan asuransi akan berada dalam kondisi *in-the-money* (put) dan dirasa memiliki cukup kemampuan untuk mengatasi kerugian akibat tingginya total klaim akibat bencana alam. Sehingga, premi atau harga opsi CatEPut yang dibayarkan rendah dan begitu juga sebaliknya.

4.5.3 Pengaruh Volatilitas Terhadap Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual

Pengaruh volatilitas harga saham perusahaan asuransi terhadap harga opsi CatEPut Amerika perpetual ditunjukkan pada Tabel 4.5.4. Pengamatan pengaruh volatilitas pada harga opsi CatEPut Amerika perpetual dilakukan dengan menggunakan nilai volatilitas sebesar 0.2, 0.4, 0.6, dan 0.8, sedangkan nilai dari parameter yang lain tertera pada Tabel 4.5.1.

Berdasarkan hasil simulasi pada Tabel 4.5.4, apabila ditinjau dari segi volatilitas harga saham perusahaan asuransi, semakin tinggi

Tabel 4.5.4. Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Berdasarkan Perbedaan Volatilitas

Koefisien Korelasi	Volatilitas Harga Saham Perusahaan Asuransi (σ)			
	0.2	0.4	0.6	0.8
0	4.168102	6.714915	7.866151	8.169307
0.2	4.323357	6.790708	7.891827	8.176
0.4	4.476765	6.865363	7.916732	8.182344
0.6	4.628435	6.938854	7.940848	8.18834
0.8	4.778463	7.011153	7.964155	8.193987
1	4.926933	7.082229	7.986637	8.199287

volatilitas dari harga saham perusahaan asuransi, maka semakin tinggi pula premi atau harga opsi CatEPut Amerika perpetual yang harus dibayarkan oleh perusahaan asuransi. Hal ini disebabkan karena semakin tinggi volatilitas harga saham perusahaan asuransi, menandakan bahwa kondisi harga sahamnya tidak stabil. Oleh karena itu, kemampuan perusahaan asuransi mengatasi pengeluaran akibat tingginya jumlah klaim saat terjadi bencana juga semakin tidak pasti karena perusahaan asuransi berisiko tinggi untuk berada di dalam kondisi *out-of-money* (put) sewaktu - waktu.

4.5.4 Pengaruh Frekuensi Bencana Alam Terhadap Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi dengan menggunakan parameter yang tertera pada Tabel 4.5.1. Sedangkan untuk mengamati pengaruh frekuensi bencana alam, akan digunakan nilai sebesar 0.3, 0.5, 1, dan 1.5.

Berdasarkan hasil simulasi pada Tabel 4.5.5, frekuensi bencana alam memiliki keterkaitan dengan intensitas lompatan harga saham. Apabila semakin tinggi frekuensi bencana alam, maka semakin menurun pula harga saham. Hal ini menyebabkan perusahaan asuransi harus membayarkan premi atau harga opsi CatEPut Amerika perpetual lebih tinggi. Hal ini disebabkan karena saat bencana alam se-

Tabel 4.5.5. Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Berdasarkan Perbedaan Frekuensi Bencana Alam

Koefisien Korelasi	Frekuensi Bencana Alam (λ)			
	0.3	0.5	1	1.5
0	0.944576	4.168102	14.7645	23.37996
0.2	1.005303	4.323357	15.0271	23.65569
0.4	1.065255	4.476765	15.28899	23.93243
0.6	1.124417	4.628435	15.55036	24.21031
0.8	1.182773	4.778463	15.81136	24.4895
1	1.240302	4.926933	16.07215	24.77016

makin sering terjadi, perusahaan asuransi memiliki kemungkinan yang lebih tinggi menerima klaim dari pemegang polis dan berkewajiban membayarkan klaim tersebut. Sebagai langkah preventif, perusahaan asuransi harus membayarkan premi yang tinggi pada opsi CatEPut Amerika perpetual untuk mendapatkan jaminan berupa *equity fund* yang mencukupi.

4.5.5 Pengaruh *Trigger Level* Terhadap Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual

Simulasi penentuan harga opsi CatEPut Amerika perpetual berdasarkan perbedaan *trigger level* dilakukan dengan menggunakan parameter yang tertera pada Tabel 4.5.1. Adapun hasil simulasi dengan menggunakan *trigger level* sebesar 5, 10, 15, dan 20 dari harga opsi CatEPut Amerika perpetual tertera pada Tabel 4.5.6.

Pada Tabel 4.5.6, hasil simulasi menunjukkan bahwa apabila *trigger level* yang ada dalam perjanjian kontrak opsi rendah, maka perusahaan asuransi perlu membayar premi atau harga opsi CatEPut Amerika perpetual tinggi. Hal ini disebabkan karena, perusahaan asuransi bisa melakukan *exercise opsi* meskipun kerugian yang dialami oleh perusahaan asuransi akibat tingginya klaim akibat bencana masih terbilang rendah. Begitu juga untuk kondisi sebaliknya, pada saat perusahaan asuransi hanya bisa melakukan *exercise opsi* ketika

Tabel 4.5.6. Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Berdasarkan Perbedaan *Trigger Level*

Koefisien Korelasi	<i>Trigger Level</i> (\mathcal{L})			
	5	10	20	30
0	4.168102	0.411839	0.004155	4.25E-05
0.2	4.323357	0.434823	0.004502	4.7E-05
0.4	4.476765	0.457506	0.004845	5.15E-05
0.6	4.628435	0.47986	0.005182	5.59E-05
0.8	4.778463	0.501857	0.005511	6.01E-05
1	4.926933	0.52347	0.00583	6.42E-05

kerugian yang mereka alami akibat klaim bencana alam sudah sangat tinggi, perusahaan asuransi hanya perlu membayar premi atau harga opsi CatEPut Amerika perpetual dengan biaya rendah. Bahkan pada suatu kondisi tertentu, yaitu pada saat *trigger level* bernilai sangat tinggi, harga opsi CatEPut Amerika perpetual yang harus dibayarkan oleh perusahaan asuransi bisa mendekati nilai 0. Artinya, opsi jenis ini tidak sesuai dengan kemampuan perusahaan asuransi tersebut dalam menganggulangi kerugian akibat tingginya klaim bencana alam. Sehingga, perusahaan asuransi tersebut tidak perlu membayar premi opsi tersebut, atau dengan kata lain tidak perlu membeli opsi CatEPut Amerika perpetual ini dan harus memilih jenis instrumen keuangan yang lain.

Selain itu, apabila ditinjau secara keseluruhan, jika diamati hasil simulasi numerik pada Tabel 4.5.2, 4.5.3, 4.5.4, 4.5.5, dan 4.5.6, tampak bahwa koefisien korelasi antara penurunan harga saham perusahaan asuransi dengan total kerugian akibat bencana alam memiliki pengaruh terhadap harga opsi CatEPut Amerika perpetual. Semakin tinggi koefisien korelasi di antara keduanya, semakin tinggi pula harga dari opsi CatEPut Amerika perpetual. Artinya, apabila semakin besar pengaruh dari total kerugian akibat bencana alam terhadap terhadap penurunan harga saham perusahaan asuransi, maka perusahaan asuransi tersebut memiliki risiko yang tinggi untuk gagal membayarkan klaim kepada pemegang polis asuransinya saat terjadi suatu

bencana alam. Hal ini yang menyebabkan perusahaan asuransi harus membayar premi atau harga opsi CatEPut Amerika perpetual dengan harga yang lebih tinggi.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan, kesimpulan dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Model dari pergerakan harga saham perusahaan asuransi dengan adanya difusi lompatan (*jump difussion*) adalah sebagai berikut.

$$d \log S(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \mathbb{E} \left(e^{-X_n} - 1 \right) \right) dt + \sigma dW(t) - d \sum_{n=1}^{N_t} X_n.$$

dengan r adalah *interest rate*, σ adalah volatilitas harga saham perusahaan asuransi, λ adalah intensitas bencana alam, dan X_n adalah penurunan log harga saham perusahaan asuransi.

2. Model dari total kerugian akibat bencana alam dinyatakan dalam persamaan berikut ini.

$$L(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n.$$

dengan $N(t)$ sebagai proses Poisson dan R_n adalah kerugian yang disebabkan oleh terjadinya bencana alam.

3. Struktur korelasi di antara pergerakan harga saham perusahaan asuransi dengan total kejadian bencana alam didapatkan melalui distribusi bersama (*joint distribution*) yaitu distribusi bivariat eksponensial Downton (Downton's BED).
4. Formula analitis dari harga opsi CatEPut Amerika perpetual dinyatakan dalam persamaan berikut ini

$$\begin{aligned} \text{CatEPut}(0) = & \left(\frac{K}{2} \exp \left[-\frac{\mu_R \mathcal{L} r}{\lambda + r} \right] \right) - \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{K}{i\xi} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{K}{i\xi - 1} + \frac{c_1 \mathcal{K}^{\chi_1}}{\chi_1 - i\xi} + \frac{c_2 \mathcal{K}^{\chi_2}}{\chi_2 - i\xi} \right) f(i\xi) e^{-i\xi \log \mathcal{K}} d\xi \right). \end{aligned}$$

dimana $f(i\xi)$ dinyatakan dalam Persamaan 4.4.62 (Halaman 64), c_1 diperoleh dari Persamaan 4.4.5 (Halaman 44), c_2 diperoleh dari Persamaan 4.4.6 (Halaman 44).

5. Secara keseluruhan, hasil simulasi numerik dari opsi CatEPut Amerika perpetual yang dipengaruhi oleh adanya koefisien korelasi di antara penurunan harga saham perusahaan asuransi dengan kerugian yang diakibatkan oleh bencana alam akan semakin naik jika nilai dari koefisien korelasi meningkat.
6. Harga dari opsi CatEPut Amerika perpetual akan semakin naik apabila ditinjau dari semakin meningkatnya volatilitas harga saham perusahaan asuransi dan frekuensi kejadian bencana alam. Namun, harga dari opsi CatEPut Amerika perpetual akan semakin menurun apabila ditinjau dari semakin meningkatnya harga saham perusahaan asuransi, tingkat suku bunga saham perusahaan asuransi, dan *trigger level* yang tercantum di dalam kontrak opsi.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil pembahasan dan kesimpulan, masih ada beberapa hal yang harus ditambahkan dari Tugas Akhir ini yaitu :

1. Penentuan harga dari opsi CatEPut Amerika perpetual dapat dilakukan dengan menggunakan pendekatan lain yaitu melalui bentuk persamaan differensial.
2. Penentuan formula analitis harga opsi CatEPut Amerika perpetual dapat dilakukan dengan menambahkan adanya faktor risiko.
3. Formula analitis harga opsi CatEPut dapat diterapkan pada data aktual harga saham perusahaan asuransi dan kerugian bencana alam.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Badan Nasional Penanggulangan Bencana. (2018). *Data Informasi Bencana Indonesia*. <https://http://bnpb.cloud/dibi/>. Diakses pada 12 Januari 2019 pukul 19.14 WIB.
- [2] Munich Re. (2010). *Re-in-su-rance : A Basic Guide to Facultative and Treaty Reinsurance*. America : Munich Reinsurance America, Inc.
- [3] Jiang, I-Ming, dkk. (2013). *Valuation of Double Trigger Catastrophe Options with Counterparty Risk*. North American Journal of Economics and Finance , 226 – 242.
- [4] Aslan, Zafer, Ivan Damnjanovic, John B. Mander. (2016). *Pricing Catastrophe Equity Put Options: Financial Implications of Engineering Decisions*
- [5] Cox, S.H, Joseph R. Fairchild, Hal W. Pedersen. (2004). *Valuation of Structured Risk Management Products*. Insurance : Mathematics and Economics, 259 – 272.
- [6] Jaimungal, S. Tao Wang. (2005). *Catastrophe Options with Stochastic Interest Rates and Compound Poisson Process*. Insurance : Mathematics and Economics, 272 – 287.
- [7] Lin, X. Sheldon, Tao Wang. (2009). *Pricing Perpetual American Catastrophe Put Options : A Penalty Function Approach*. Insurance : Mathematics and Economics, 287 – 295.
- [8] Kim, H, Bara Kim, Jerim Kim. (2014). *Pricing Perpetual American CatEPut Options when Stock Prices are Correlated with Catastrophe Losses*. Economic Modelling, 15-22.
- [9] Kulkarni, V.G. (2011). *Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic System*. London : Springer.
- [10] Jiang, L. (2005). *Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. : Singapore.

- [11] Hull, J. C. (2009). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Prentice Hall : United States of America.
- [12] Seydel, R.U. (2012). *Tools for Computational Finance*. London : Springer.
- [13] Pliska, S. R. (2001). *Introduction to Mathematical Finance Discrete Time Models*. Massachusetts : Blackwell Publisher Inc.
- [14] Sunarsini. (2011). *Diktat Kuliah Teori Ukuran dan Integral*. Surabaya : Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [15] Tankov, P, Ekaterina Voltchkova. *Jump-Diffusion Model : A Practitioner's Guide*. Paris.
- [16] Willmot, P. (2007). *Frequently Asked Question in Quantitative Finance*. Bicentennial : England.
- [17] Davis, Mark. H. A. (2006). *Mathematical Option Pricing*. Imperial College London : London.
- [18] Nadarajah, S., Samuel Kotz. (2005). *Reliability for Some Bivariate Exponential Distributions*. Journal of The Royal Statistical Society : Series B (Methodological) 32, 408 – 417.
- [19] Kim, B., Jeongsim Kim. (2011). *Representation of Downton's Bivariate Exponential Random Vector and Its Applications*. Statistics and Probability Letters, Vol. 81, 1743 – 1750.
- [20] Epps. T W. (2007). *Pricing Derivative Securities*. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data : Singapore.
- [21] Schiff, Joel L. (1991). *The Laplace Transform : Theory and Applications*. Springer : New Zealand.
- [22] Osaki, S. (1985). *Stochastic System Reliability Modeling*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd : Singapore.

- [23] Gerber, H.U., Bruno Landry. (1998). *On The Discounted Penalty at Ruin in a Jump-Diffusion and The Perpetual Put Option*. Insurance : Mathematics and Economics, 22, 263 – 276.
- [24] Bartle, R.G., Donald R. Sherbert. (2011). *Introduction to Real Analysis 4th Edition*. John Wiley and Sons, Inc. : United States of Amerika.
- [25] Sahoo, P., (2013). *Probability and Mathematical Statistics*. Department of Mathematics University of Louisville : United States of Amerika.
- [26] Sebah, P., Xavier Gourdon. (2002). *Introduction to The Gamma Function*.
- [27] Spiegel, M. R., Seymour Lipschutz, John J. Schiller, Dennis Spellman. (2009). *Complex Variables*. The McGraw-Hill Companies, Inc : United States.

Lampiran A

Pembuktian Lemma Itô

Lemma Itô memiliki peranan penting untuk mendapatkan diferensial fungsi terhadap waktu dari suatu proses stokastik. Berdasarkan proses Itô pada Persamaan 2.4.1 (Halaman 11) yaitu

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW$$

dapat dikonstruksi Lemma Itô seperti pada Persamaan 2.4.2 (Halaman 11).

Misalkan G adalah sebuah fungsi yang kontinu dan memiliki turunan di x . Jika Δx menyatakan perubahan yang sangat kecil dari x , dan ΔG adalah perubahan nilai yang sangat kecil pada G , maka

$$\Delta G \approx \frac{dG}{dx} \Delta x.$$

Dengan kata lain, ΔG adalah nilai pendekatan dari perubahan G terhadap x dikalikan dengan perubahan dari x . Deret Taylor dari ΔG adalah

$$\Delta G = \frac{dG}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2G}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3G}{dx^3} \Delta x^3 + \dots$$

Apabila G adalah fungsi yang kontinu dan memiliki turunan di x dan t , maka analog dengan deret Taylor dari G terhadap x , diperoleh

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t.$$

dan deret Taylor nya adalah

$$\begin{aligned} \Delta G &= \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \end{aligned}$$

Dari proses Itô $dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW$ dengan bentuk diskrit yaitu

$$\begin{aligned}\Delta x &= a(x, t)\Delta t + b(x, t)\Delta z \\ \Delta x &= a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \\ \Delta x &\approx a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t},\end{aligned}$$

nilai Δx^2 pada suku ke-3 deret Taylor untuk fungsi G terhadap x dan t dapat dinyatakan dengan bentuk kuadrat dari bentuk kuadrat proses Itô yakni

$$\Delta x^2 = b^2\epsilon^2\Delta t + a^2\Delta t^2 + 2ab\epsilon\Delta t^{\frac{3}{2}}.$$

Dengan mensubstitusikan bentuk kuadrat proses Itô ke nilai Δx^2 pada suku ke-3 deret Taylor untuk fungsi G terhadap x dan t dapat diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta G &= \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(b^2\epsilon^2\Delta t + a^2\Delta t^2 \\ &\quad + 2ab\epsilon\Delta t^{\frac{3}{2}}) + \frac{\partial^2 G}{\partial x\partial t}\Delta x\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \dots \\ &= \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\epsilon^2\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}a^2\Delta t^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}2ab\epsilon\Delta t^{\frac{3}{2}} + \frac{\partial^2 G}{\partial x\partial t}\Delta x\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \dots.\end{aligned}$$

Pada persamaan di atas, nilai

$$b^2\epsilon^2\Delta t = b^2\Delta t.$$

Hal ini berdasarkan sifat dari proses Wiener [12] yaitu

$$(dW(t))^2 = dt.$$

Selain itu, bagian $o(\Delta t^2)$, $o(\Delta t^{3/2})$ dan seterusnya yang lebih kecil dikatakan mendekati 0 [16]. Sehingga, menghasilkan

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\Delta t.$$

Jika $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta t \rightarrow 0$, maka persamaan di atas menjadi

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt.$$

Karena peubah acak x mengikuti proses Itô yaitu $dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW$, akibatnya dengan mensubstitusikan proses Itô diperoleh

$$\begin{aligned} dG &= \frac{\partial G}{\partial x} (a dt + b dW) + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt \\ &= \frac{\partial G}{\partial x} a dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dW + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dW. \end{aligned}$$

Persamaan tersebut disebut dengan Lemma Itô.

Lampiran B

Fungsi Karakteristik Distribusi Normal

Suatu variabel acak X yang berdistribusi normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ memiliki fungsi karakteristik yang didefinisikan sebagai

$$\mathbb{E} [e^{iuX}] = \exp \left(iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 \right).$$

Bukti :

Sesuai dengan definisi ekspektasi suatu distribusi kontinu,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{iuX}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuX} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuX} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned} y &= x - \mu \\ dy &= dx, \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{iuX}] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(y+\mu)} \cdot e^{-y^2/2\sigma^2} dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} \cdot e^{iu\mu} \cdot e^{-y^2/2\sigma^2} dy \\ &= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy - y^2/2\sigma^2} dy \right] e^{iu\mu} \\ &= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{2\sigma^2 iuy - y^2}{2\sigma^2} \right) dy \right] e^{iu\mu} \\ &= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{-y(y - 2\sigma^2 iu)}{2\sigma^2} \right) dy \right] e^{iu\mu} \\ &= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{-y(y - \sigma^2 iu - \sigma^2 iu)}{2\sigma^2} \right) dy \right] e^{iu\mu}. \end{aligned}$$

Misalkan bahwa

$$p = y - \sigma^2 i u$$

$$dp = dy$$

maka

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{iuX} \right] &= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{-(p + \sigma^2 i u)(p - \sigma^2 i u)}{2\sigma^2} \right) dp \right] e^{iu\mu} \\ &= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{-(p^2 - p i u \sigma^2 + p i u \sigma^2 - i^2 u^2 \sigma^4)}{2\sigma^2} \right) dp \right] e^{iu\mu} \\ &= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{-(p^2 - i^2 u^2 \sigma^4)}{2\sigma^2} \right) dp \right] e^{iu\mu} \\ &= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{p^2}{2\sigma^2} + \frac{i^2 u^2 \sigma^2}{2} \right) dp \right] e^{iu\mu} \\ &= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{p^2}{2\sigma^2} \right) \cdot \exp \left(\frac{i^2 u^2 \sigma^2}{2} \right) dp \right] e^{iu\mu} \\ &= \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{p^2}{2\sigma^2} \right) dp \right] \times e^{i^2 u^2 \sigma^2 / 2} \times e^{iu\mu}. \end{aligned}$$

Solusi dari ekspektasi di atas dapat diperoleh dengan menyelesaikan bagian integralnya terlebih dahulu. Misalkan

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \times \exp \left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp - \left(\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Penyelesaian integral di atas dapat dilakukan dengan menggunakan koordinat kutub. Misalkan

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \\ y &= r \sin\theta \\ |j| &= x^2 + y^2 \\ &= (r \cos\theta)^2 + (r \sin\theta)^2 \\ &= r \end{aligned}$$

diperoleh

$$I^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) r \, dr \, d\theta.$$

Apabila

$$u = \frac{r^2}{2\sigma^2}$$

$$du = \frac{r}{\sigma^2} dr,$$

maka

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \exp(-u) \, du \, d\theta$$

$$= 1.$$

Sehingga, $I = 1$ dan

$$\mathbb{E} [e^{iuX}] = \exp\left(\frac{i^2 u^2 \sigma^2}{2}\right) \times \exp(iu\mu)$$

$$= \exp\left(iu\mu - \frac{u^2 \sigma^2}{2}\right).$$

Lampiran C Pembuktian Lemma 1

Jika diberikan persamaan kubik berikut

$$\frac{\sigma^2}{2}x^3 + \left(\alpha + \frac{\sigma^2\mu_X}{2}\right)x^2 + (\alpha\mu_X - r - \lambda)x - r\mu_X,$$

maka persamaan tersebut memiliki tiga solusi yaitu χ_1, χ_2 , dan χ_3 yang memenuhi $\chi_1 < -\mu_X < \chi_2 < 0 < \chi_3$.

Bukti :

Untuk membuktikan lemma tersebut akan digunakan teorema berikut ini.

Teorema 2. Teorema Nilai Tengah [24]

Misalkan I adalah suatu interval dan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi yang kontinu di I . Jika $a, b \in I$ dan jika $k \in \mathbb{R}$ memenuhi $f(a) < k < f(b)$, maka ada satu titik $c \in I$ di antara a dan b sedemikian hingga $f(c) = k$.

Misalkan, Persamaan kubik di atas adalah fungsi yang kontinu pada interval I yaitu

$$g(x) = \frac{\sigma^2}{2}x^3 + \left(\alpha + \frac{\sigma^2\mu_X}{2}\right)x^2 + (\alpha\mu_X - r - \lambda)x - r\mu_X.$$

Jika diambil sebarang titik $-\mu_X \in I$ dan $0 \in I$ maka

$$\begin{aligned} g(-\mu_X) &= \frac{\sigma^2}{2}(-\mu_X)^3 + \left(\alpha + \frac{\sigma^2\mu_X}{2}\right)(-\mu_X)^2 \\ &\quad + (\alpha\mu_X - r - \lambda)(-\mu_X) - r\mu_X \\ &= -\frac{\sigma^2\mu_X^3}{2} + \alpha\mu_X^2 + \frac{\sigma^2\mu_X^3}{2} - \alpha\mu_X^2 + r\mu_X + \lambda\mu_X \\ &\quad - r\mu_X \\ &= \lambda\mu_X \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}g(0) &= \frac{\sigma^2}{2}(0)^3 + \left(\alpha + \frac{\sigma^2\mu_X}{2}\right)(0)^2 + (\alpha\mu_X - r - \lambda)(0) - r\mu_X \\ &= -r\mu_X.\end{aligned}$$

Karena $g(-\mu_X) > 0$ dan $g(0) < 0$ artinya $g(0) < g(-\mu_X)$. Jika χ_1, χ_2 , dan χ_3 adalah solusi dari $g(x)$, maka berdasarkan teorema nilai tengah, terdapat satu titik di I sedemikian hingga $\chi_1 < -\mu_X < \chi_2 < 0 < \chi_3$.

Lampiran D

Script MATLAB Fungsi Penentuan Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual

```

1  function [CatEPut] = CatEPutSim(S,K,r,vol,trigger,
    lamb,mu_R,mu_X,rho_1);
2
3  %Menghitung Nilai (Stopping Time)
4  T = (K*r)/(r+(((vol^2)/2)+(lamb/(mu_X + 1)^2)) );
5
6  %Menghitung Alpha
7  a = r - ((vol^2)/2) + (lamb / (mu_X + 1) ) ;
8
9  %Menghitung Nilai chi_1 dan chi_2
10 syms x ;
11 solve((((vol^2)/2)*(x^3)) + ((a + (((vol^2)*mu_X)/2))
    *x^2) + (((a*mu_X)-r-lamb)*x) - (r*mu_X)) ;
12 double(ans) ;
13
14 ans = sort(ans) ;
15 chi_1 = ans(1);
16 chi_2 = ans(2);
17
18 %Menghitung Nilai C_1 dan C_2
19 C_1 = ((K - T)*((((vol^2)/2)*((chi_2)^2)) + (a*chi_2)
    - r)+((lamb/(mu_X+1))*T)...
20 /((T^chi_1)*(chi_2 - chi_1)*((((vol^2)/2)*(chi_1+
    chi_2))+a)) ;
21
22 C_2 = ((K - T)*((((vol^2)/2)*((chi_1)^2)) + (a*chi_1)
    - r)+((lamb/(mu_X+1))*T)...
23 /((T^chi_2)*(chi_1 - chi_2)*((((vol^2)/2)*(chi_1+
    chi_2))+a)) ;
24
25 Cat = (K/2)*exp((-1)*mu_R*trigger*r)/(lamb+r));
26
27 %Integral pertama
28 calc_1 = @(u) (K ./ (u.*i)).* (((S.^(u.*i)).*mu_X)
    ./(mu_X + (u.*i))).*exp((trigger.*mu_R).*((( (-1)
    .*rho_1)).*(u.*i))./(mu_X + ((1 - rho_1).*(u.*i)))
    )+((lamb.*mu_X)./(mu_X + ((1 - rho_1).*(u.*i))).*(
    lamb + r - (a.*(u.*i))- ((vol.^2)/2)).*(u.*i).^2)

```

```

    )))))-1))) .* (exp((-1) .* (u.*i) .* log(T)));
29
30 result_1 = integral(calc_1, 0, Inf);
31 this_1 = real(result_1);
32
33 %Integral kedua
34 calc_2 = @(u) (T ./ (1-(u.*i))) .* (((S.^(u.*i)).*mu_X
    )./(mu_X + (u.*i))) .* exp((trigger.*mu_R) .* ((((-1)
    ).*(rho_1)).*(u.*i))./(mu_X + ((1 - rho_1).*(u.*i)))
    ) + ((lamb.*mu_X) ./ ((mu_X + ((1 - rho_1).*(u.*i))).*(
    lamb + r - (a.*(u.*i)) - ((vol.^2) ./ 2) .* ((u.*i).^2)
    )))))-1))) .* (exp((-1) .* (u.*i) .* log(T)));
35
36 result_2 = integral(calc_2, 0, Inf);
37 this_2 = real(result_2);
38
39 %Integral ketiga
40 calc_3 = @(u) ((C_1.*(T.^(chi_1)))./(chi_1 - (u.*i)))
    .* (((S.^(u.*i)).*mu_X) ./ (mu_X + (u.*i))) .* exp((
    trigger.*mu_R) .* ((((-1) .* (rho_1)).*(u.*i))./(mu_X
    + ((1 - rho_1).*(u.*i)))) + ((lamb.*mu_X) ./ ((mu_X +
    ((1 - rho_1).*(u.*i))).*(lamb + r - (a.*(u.*i)) -
    ((vol.^2) ./ 2) .* ((u.*i).^2)))))-1))) .* (exp((-1) .* (u
    .*i) .* log(T)));
41
42 result_3 = integral(calc_3, 0, Inf);
43 this_3 = real(result_3);
44
45 %Integral keempat
46 calc_4 = @(u) ((C_2.*(T.^(chi_2)))./(chi_2 - (u.*i)))
    .* (((S.^(u.*i)).*mu_X) ./ (mu_X + (u.*i))) .* exp((
    trigger.*mu_R) .* ((((-1) .* (rho_1)).*(u.*i))./(mu_X
    + ((1 - rho_1).*(u.*i)))) + ((lamb.*mu_X) ./ ((mu_X +
    ((1 - rho_1).*(u.*i))).*(lamb + r - (a.*(u.*i)) -
    ((vol.^2) ./ 2) .* ((u.*i).^2)))))-1))) .* (exp((-1) .* (u
    .*i) .* log(T)));
47
48 result_4 = integral(calc_4, 0, Inf);
49 this_4 = real(result_4);
50
51 result_of_integral = this_1 + this_2 + this_3 +
    this_4;
52 CatEPut = Cat - ((1/pi)*result_of_integral

```

```
53     );  
54     end
```


Lampiran E
Script MATLAB Penentuan Harga Opsi CatEPut Amerika
Perpetual Berdasarkan Perbedaan Harga Saham Perusahaan
Asuransi

```
1
2  %% Inisiasi Parameter
3  S      = [40 60 80 100] ;
4  K      = 80 ;
5  r      = 0.05 ;
6  vol    = 0.2 ;
7  trigger = 5 ;
8  lamb   = 0.5 ;
9  mu_R   = 1/0.2 ;
10 mu_X   = 1/0.2 ;
11 rho_1  = [0:0.2:1];
12
13
14 % RESULT_TABLE1 = [];
15 for indexRho = 1:length(rho_1)
16 for indexS = 1:length(S)
17 RESULT_TABLE1(indexRho,indexS) = CatEPutSim(S(indexS)
18     ,K,r,vol,trigger,lamb,mu_R,mu_X,rho_1(indexRho));
19 clc;
20 end
21 end
22 RESULT_TABLE1
23
```


Lampiran F
Script MATLAB Penentuan Harga Opsi CatEPut Amerika
Perpetual Berdasarkan Perbedaan Volatility Harga Saham
Perusahaan Asuransi

```
1
2 % Inisiasi Parameter
3 S      = 40 ;
4 K      = 80 ;
5 r      = 0.05 ;
6 vol    = [0.2:0.2:0.8] ;
7 trigger = 5 ;
8 lamb   = 0.5 ;
9 mu_R   = 1/0.2 ;
10 mu_X   = 1/0.2 ;
11 rho_1  = [0:0.2:1];
12
13 RESULT_TABLE2 = [];
14 for indexRho = 1:length(rho_1)
15 for indexVol = 1:length(vol)
16 RESULT_TABLE2(indexRho,indexVol) = CatEPutSim(S,K,r,
17     vol(indexVol),trigger,lamb,mu_R,mu_X,rho_1(indexRho
18     ));
19 end
20 end
21 RESULT_TABLE2
```


Lampiran G
Script MATLAB Penentuan Harga Opsi CatEPut Amerika
Perpetual Berdasarkan Perbedaan Frekuensi Bencana Alam

```
1
2 % Inisiasi Parameter
3 S           = 40 ;
4 K           = 80 ;
5 r           = 0.05 ;
6 vol         = 0.2 ;
7 trigger     = 5 ;
8 lamb        = [0.3 0.5 1 1.5] ;
9 mu_R        = 1/0.2 ;
10 mu_X        = 1/0.2 ;
11 rho_1       = [0:0.2:1];
12
13 RESULT_TABLE3 = [];
14 for indexRho = 1:length(rho_1)
15 for indexLamb = 1:length(lamb)
16 RESULT_TABLE3(indexRho,indexLamb) = CatePutSim(S,K,r,
17     vol,trigger,lamb(indexLamb),mu_R,mu_X,rho_1(
18     indexRho));
19
20 RESULT_TABLE3
21
```


Lampiran H

Script MATLAB Penentuan Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual Berdasarkan Perbedaan Tingkat Suku Bunga

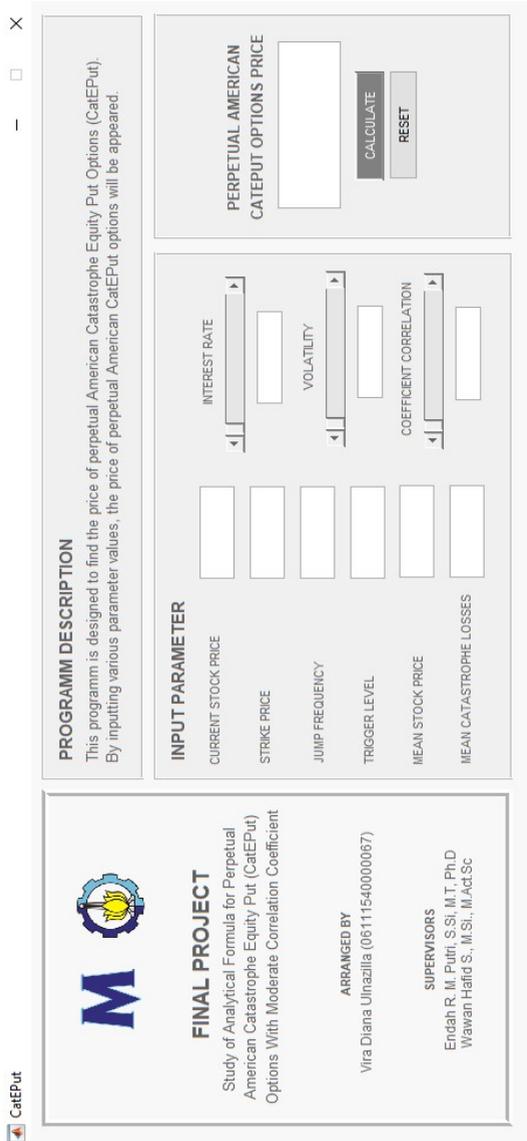
```
1
2 %% Inisiasi Parameter
3 S      = 40 ;
4 K      = 80 ;
5 r      = [0.04 0.05 0.06 0.08];
6 vol    = 0.2 ;
7 trigger = 5 ;
8 lamb   = 0.5 ;
9 mu_R   = 1/0.2 ;
10 mu_X   = 1/0.2 ;
11 rho_1  = [0:0.2:1];
12
13 RESULT_TABLE5 = [];
14 for indexRho = 1:length(rho_1)
15 for index_r = 1:length(r)
16 RESULT_TABLE5(indexRho,index_r) = CatEPutSim(S,K,r(
    index_r),vol,trigger,lamb,mu_R,mu_X,rho_1(indexRho)
    );
17 clc;
18 end
19 end
20 RESULT_TABLE5
21
```


Lampiran I
Script MATLAB Penentuan Harga Opsi CatEPut Amerika
Perpetual Berdasarkan Perbedaan *Trigger Level*

```
1
2 %% Inisiasi Parameter
3 S           = 40 ;
4 K           = 80 ;
5 r           = 0.05;
6 vol        = 0.2 ;
7 trigger     = [5 10 20 30] ;
8 lamb       = 0.5 ;
9 mu_R       = 1/0.2 ;
10 mu_X      = 1/0.2 ;
11 rho_1     = [0:0.2:1];
12
13 RESULT_TABLE5 = [];
14 for indexRho = 1:length(rho_1)
15 for index_tr = 1:length(trigger)
16 RESULT_TABLE6(indexRho,index_tr) = CatePutSim(S,K,r,
17     vol,trigger(index_tr),lamb,mu_R,mu_X,rho_1(indexRho
18     ));
19 clc;
20 end
21 end
22 RESULT_TABLE6
```


Lampiran J

Graphical User Interface MATLAB Simulasi Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual



Gambar J-1. GUI Simulasi Harga Opsi CatEPut Amerika Perpetual

BIODATA PENULIS



Vira Diana Ulnazilla atau yang biasa dipanggil Vira dilahirkan di Banyuwangi, 9 November 1996 dan merupakan anak tunggal. Penulis telah menempuh pendidikan di TK Kosgoro I, Banyuwangi (2001-2003), SD Negeri 6 Kebaman, Banyuwangi (2003-2009), SMP Negeri I Srono, Banyuwangi (2009-2012), SMA Negeri 2 Genteng, Banyuwangi (2012-2015). Penulis melanjutkan

studi S1 dengan mengikuti seleksi jalur SBMPTN dan diterima di Departemen Matematika, Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data (FMKSD), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS), Surabaya pada tahun 2015 dengan NRP 06111540000067.

Penulis mengambil bidang minat Riset Operasi dan Pengolahan Data (ROPD) di Departemen Matematika, FMKSD, ITS. Selama menempuh studi di ITS Surabaya, penulis aktif menjadi staf *Applied Science Department*, Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) ITS, 1st *Secretary* Olimpiade Matematika ITS, Kepala Divisi Pelatihan BEM FMKSD ITS, Pengajar Tangguh ITS Mengajar, dan Pemandu FMKSD ITS. Selain itu, penulis juga aktif dalam divisi *Media and External Relation* di organisasi kepemudaan AIESEC Surabaya.

Jika ada saran, kritik maupun diskusi yang ingin disampaikan kepada penulis mengenai Tugas Akhir ini, silakan menghubungi penulis melalui *email* viradiana09@gma-il.com.