TUGAS AKHIR – KM184801

PENENTUAN GARANSI DUA DIMENSI DENGAN MEMPERTIMBANGKAN PEMELIHARAAN PREVENTIF (STUDI KASUS : DEALER TRI JAYA MOTOR PARE)

DIKI ENGGAR SUKMANINGRUM
NRP 06111540000027

Dosen Pembimbing
Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si.MT
Drs. Daryono Budi U, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019

FINAL PROJECT – KM184801

TWO DIMENSIONAL WARRANTY PRICING WITH PREVENTIVE MAINTENANCE CONSIDERING
(Case Study: DEALER TRI JAYA MOTOR PARE)

DIKI ENGGAR SUKMANINGRUM
NRP 06111540000027

Supervisor
Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si.MT
Drs. Daryono Budi U, M.Si

MATHEMATICS DEPARTMENT
Faculty of Mathematics, Computation, and Data Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2019

LEMBAR PENGESAHAN

PENENTUAN GARANSI DUA DIMENSI DENGAN MEMPERTIMBANGKAN PEMELIHARAAN PREVENTIF (STUDI KASUS: DEALER TRI JAYA MOTOR PARE)

TWO DIMENSIONAL WARRANTY PRICING WITH PREVENTIVE MAINTENANCE CONSIDERING (Case Study: DEALER TRI JAYA MOTOR PARE)

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

DIKI ENGGAR SUKMANINGRUM
NRP. 06111540000027

Menyetujui

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. Daryono Budi U, M.Si	Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si., MT.
NIP. 19540817 198103 2 003	NIP. 19710928 199802 2 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika

Dr. Imam Mukhlash, S.Si., MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2019

PENENTUAN GARANSI DUA DIMENSI DENGAN MEMPERTIMBANGKAN PEMELIHARAAN PREVENTIF (STUDI KASUS : DEALER TRI JAYA MOTOR PARE)

Nama	**:**	**Diki Enggar Sukmaningrum**
NRP	**:**	**06111540000027**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Dosen Pembimbing	**:**	**Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si.MT**
		Drs. Daryono Budi U, M.Si

ABSTRAK

Pemeliharaan preventif merupakan kegiatan untuk menjaga keadaan peralatan sebelum peralatan itu rusak atau mencegah timbulnya kerusakan yang tak terduga. Pemeliharaan preventif merupakan inovasi yang baik dilakukan oleh produsen dalam penentuan kebijakan garansi. Pemeliharaan preventif dapat ditentukan dengan menggunakan metode analisis reliabilitas yang dapat digunakan untuk menentukan waktu yang tepat untuk melakukan pemeliharaan preventif. Metode ini bergantung pada distribusi dari data usia pakai produk tersebut. Pada penelitian ini menggunakan 3 kapasitas mesin yang berbeda-beda berdasarkan data yang didapat yaitu 125 CC, 150 CC, dan 250 CC yang mempunyai distribusi berbeda. Untuk 125 CC dan 150 CC berdistribusi Weibull dan 250 CC berdistribusi Eksponensial. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah biaya garansi yang meningkat seiring dengan peningkatan kapasitas mesin. Semakin tinggi kapasitas mesin yang ditawarkan maka biaya garansi yang harus ditanggung oleh dealer semakin besar.

Kata Kunci **:** *Pemeliharaan Preventif, Garansi, Biaya Garansi.*

TWO DIMENSIONAL WARRANTY PRICING WITH PREVENTIVE MAINTENANCE CONSIDERING

(Case Study: DEALER TRI JAYA MOTOR PARE)

Student Name	***: Diki Enggar Sukmaningrum***
NRP	***: 06111540000027***
Department	***: Mathematics ITS***
Supervisors	***: Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si.MT***
	Drs. Daryono Budi U, M.Si

Abstract

Preventive maintenance is carried out with the goal of controlling asset condition by preventing the unexpected damaged. It is a good innovation in determining warranty policies by producers. Preventive maintenance can be determined by using the reliability analysis method that can be used to determine the right time to do preventive maintenance. This method depend on distribution the used-age data product. Using three different machine capacity 125 CC, 150 CC and 250 CC, in this study, the 125 CC and 150 CC machine capacity have Weibull distribution, and 250 CC has Exponential distribution. The result of numerical analysis presented that the higher machine capacity, the bigger warranty cost will be. It means that the higher machine capacity offered, the greater warranty costs that must be borned by the dealer.

Keywords **:** *Preventive Maintenance, Warranty, Warranty cost.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillaahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"PENENTUAN GARANSI DUA DIMENSI DENGAN MEMPERTIMBANGKAN PEMELIHARAAN PREVENTIF (Studi Kasus : DEALER TRI JAYA MOTOR PARE)"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT. selaku Ketua Departemen Matematika FMKSD ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesainya Tugas Akhir ini.
2. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si. selaku Kaprodi Sarjana Matematika FMKSD ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
3. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Sc. dan Ibu Dr. Dra. Mardlijah, MT. selaku Sekretaris Sarjana Matematika FMKSD ITS yang telah memberikan dukungan dan

motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.

4. Bapak Drs. Suharmadi, Dipl.Sc, M.Phil selaku Dosen Wali yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan.
5. Ibu Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si, MT dan Bapak Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini.
6. Bapak Subchan, Ph.D, Ibu Endah Rokhmati M.P., Ph.D, dan Bapak Wawan Hafid S., M.Si, M.Act.Sc selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran.
7. Keluarga Tercinta terutama orang tua penulis Bapak Suprapto dan Ibu Karmiati yang senantiasa dengan ikhlas selalu menyemangati, memberikan kasih sayang, semangat, doa, dan nasehat-nasehat, serta adik penulis Mohammad Malik Fajar yang senantiasa memberikan semangat, dukungan serta doa.
8. Sahabat Rumah Aljabar, Sahabat Goes to Tengah Jawa dan teman-teman angkatan 2015 yang selalu memberikan dukungan, doa, dan motivasi.
9. Seluruh jajaran Dosen dan Staf Departemen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini masih mempunyai banyak kekurangan. Kritik dan saran dari berbagai pihak yang bersifat membangun juga sangat diharapkan sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang.

Surabaya, Juli 2019

Diki Enggar Sukmaningrum

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

$E(P)$	: Ekspektasi Biaya Garansi
C_s	: Biaya Pemeliharaan
$M(u,w)$	: Ekspektasi Jumlah kerusakan
$F(u,w)$	: Fungsi kepadatan kumulatif *(cdf)* gabungan
i	: Urutan sejumlah data waktu antar kerusakan yang disusun dari urutan terkecil
n	: Banyaknya data waktu antar kerusakan
λ	: Parameter Skala dari distribusi Eksponensial
$f(u,w)$	: Fungsi kepadatan peluang *(pdf)* gabungan
θ	: Parameter skala dari distribusi Weibull
β	: Parameter bentuk dari distribusi Weibull
μ	: Parameter distribusi, nilai tengah
σ	: Parameter distribusi, Standart deviasi
$R(u,w)$	: Fungsi Reliabilitas gabungan
$L(\theta;t)$	: Fungsi *Likelihood*
$h(u,w)$	: Fungsi intensitas kerusakan *(hazard)*
C_p	: Biaya pemeliharaan
C_f	: Biaya kerusakan / kegagalan
$\emptyset\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	: Peluang nilai z
D	: Jarak vertikal terjauh antara $F_0(x)$ dan $S(x)$
$S(x)$	: Fungsi peluang kumulatif yang dihitung dari data sampel
$F_0(x)$	: Fungsi distribusi berdasarkan hipotesis
$F(x)$	: Fungsi distribusi yang belum diketahui
u	: Variabel yang menyatakan umur produk
w	: Variabel yang menyatakan penggunaan suatu produk

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah dan batasan masalah untuk mencapai tujuan yang diinginkan dan manfaat yang diperoleh dari penulisan Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Kemajuan teknologi di zaman sekarang ini berkembang sangat pesat seiring dengan perkembangan zaman, misalnya teknologi Transportasi. Transportasi berkembang sangat cepat dengan memberikan model dan tentunya perbedaan kinerja yang ditawarkan. Perkembangan zaman yang sangat cepat membuat persaingan di antara produsen satu dengan produsen lainnya sangat ketat. Setiap perusahaan berupaya untuk menciptakan produk yang berkualitas dengan harga yang terjangkau. Selain itu setiap perusahaan juga berupaya memberikan keuntungan yang dapat menarik minat konsumen, salah satunya yaitu dengan memberikan jaminan garansi.

Garansi didefinisikan sebagai perjanjian kontraktual yang diberikan oleh produsen kepada konsumen, yang menyatakan bahwa produk yang dijual akan berjalan sesuai fungsinya bila digunakan dalam kondisi normal selama masa garansi. Jika produk yang dijual mengalami kerusakan selama masa garansi maka produsen harus melakukan rektifikasi [1]. Manajemen garansi merupakan tantangan yang harus dihadapi oleh setiap produsen saat ini, karena setiap perusahaan tentunya selalu mengupayakan yang terbaik untuk konsumennya. Dengan adanya garansi, maka konsumen akan merasa lebih nyaman dan percaya terhadap produk yang dibelinya sehingga akan terbangun *image* yang baik untuk *brand* dan produsen tersebut.

Berdasarkan dimensi, kebijakan garansi dapat dikelompokkan menjadi garansi satu dimensi dan garansi dua dimensi. Garansi satu dimensi dikarakteristikkan oleh interval satu dimensi, misalnya umur produk. Sedangkan garansi dua dimensi dikarakteristikkan oleh daerah dua dimensi, dimana satu dimensi merepresentasikan umur produk dan dimensi lain merepresentasikan penggunaan produk [7]. Garansi dua dimensi dianggap lebih solutif digunakan karena mencakup keseluruhan perawatan garansi.

Setiap produsen memiliki kebijakan tersendiri dalam menentukan kebijakan perawatan produk garansi yang ditawarkan kepada setiap konsumen. Salah satu kebijakan yang ditawarkan produsen yaitu pemeliharaan preventif. Pemeliharaan preventif merupakan salah satu kebijakan garansi yang digunakan oleh produsen untuk ditawarkan kepada konsumen dengan tujuan untuk mengontrol kemerosotan produk dan mengurangi kemungkinan kegagalan [8]. Selain itu terdapat juga pemeliharaan korektif yaitu pemeliharaan yang lebih fokus pada perbaikan dan peningkatan kondisi sehingga sesuai dengan standart yang dapat diterima. Dari kedua perbedaan tersebut dapat disimpulkan bahwa pemeliharaan preventif lebih solutif digunakan karena dapat meningkatkan kinerja produk tersebut dan menghindari kesalahan yang tidak di inginkan.

Kebijakan garansi yang diberikan oleh suatu perusahaan tentunya membuat ongkos yang harus dikeluarkan oleh konsumen bertambah sehingga ekspetasi ongkos garansi berperan penting terhadap kestabilan keuangan perusahaan. Hal tersebut tentunya membuat penerapan biaya garansi produk menjadi menarik untuk dipelajari dengan tujuan agar produsen mendapat kisaran estimasi ongkos garansi yang tepat.

Penelitian terdahulu sudah pernah dilakukan mengenai model dua dimensi dengan menitikberatkan pada pengaruh tindakan perawatan terhadap biaya garansi, salah satunya penelitian Wang dan Liu. Wang dan Liu [2] mengembangkan strategi perawatan untuk produk dengan menggunakan tiga pendekatan berbeda termasuk pendekatan satu dimensi, pendekatan distribusi kegagalan bivariat dan pendekatan skala komposit. Valeriana, Adhella, dan Titik [4] juga melakukan penelitian yang membahas tentang hal yang diperlukan dalam penentuan biaya garansi dan menghasilkan formulasi ekspetasi biaya garansi dua dimensi. Pada penelitian kali ini dilakukan pengembangan strategi perawatan dan penentuan biaya garansi untuk mengembangkan penelitian terdahulu dengan menambahkan pemeliharaan preventif pada garansi dua dimensi sebagai inovasi baru.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Bagaimana rumusan tentang garansi dua dimensi yang diberikan kepada konsumen ketika menggunakan kebijakan pemeliharaan preventif ?
2. Berapa estimasi biaya garansi ketika produsen mengambil kebijakan garansi dengan menggunakan kebijakan pemeliharaan preventif terhadap setiap produk yang ditawarkan produsen ?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini dibatasi sebagai berikut:

1. Produk yang digunakan diasumsikan produk yang dapat diperbaiki *(repairable product)* .
2. Produk yang telah diperbaiki diasumsikan memiliki kinerja seperti produk baru.
3. Tugas akhir ini menggunakan data penjualan dan servis dari Dealer Tri Jaya Motor Pare dari bulan Januari 2015 sampai dengan bulan Desember 2018.
4. Variabel umur dan penggunaan saling bebas

1.4 Tujuan

Tujuan dalam penulisan Tugas Akhir ini adalah:

1. Mendapatkan rumusan tentang garansi dua dimensi yang diberikan kepada konsumen ketika produsen menetapkan kebijakan pemeliharaan preventif.
2. Mendapatkan estimasi biaya garansi apabila menggunakan kebijakan pemeliharaan preventif terhadap setiap produk yang ditawarkan produsen

1.5 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah dapat memberikan rumusan tentang garansi dua dimensi yang diberikan kepada konsumen dan mengetahui estimasi biaya garansi apabila menggunakan kebijakan pemeliharaan preventif dalam kasus model garansi dua dimensi terhadap setiap produk yang ditawarkan produsen.

1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir

Sistematika penulisan dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. BAB I : PENDAHULUAN
   Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan Tugas Akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan laporan Tugas Akhir.
2. BAB II : DASAR TEORI
   Bab ini menjelaskan tentang penelitian terdahulu, definisi mengenai perawatan *(maintenance)*, jenis-jenis perawatan *(maintenance)*, tentang perawatan pencegahan *(preventive maintenance)*, tentang perawatan korektif *(corrective maintenance)*, garansi, biaya garansi, uji Mann dan *Kolmogorov-Smirnov*, elemen-elemen analisis reliabilitas, fungsi reliabilitas *(reliability function)*, fungsi laju kerusakan *(hazard rate function)*, distribusi Weibull, distribusi eksponensial, *maximum likelihood estimator*, ekspektasi biaya pemeliharaan.
3. BAB III : METODOLOGI PENELITIAN
   Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini. Meliputi studi literatur, pengumpulan data, penentuan distribusi dari data, mendapatkan estimasi parameter, menentukan ekspetasi biaya perawatan dan mendapatkan ekspektasi biaya garansi
4. BAB IV : ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Bab ini menjelaskan tentang analisis dan pembahasan tentang ekspetasi biaya garansi yang harus dikeluarkan dengan mempertimbangkan perawatan pencegahan *(preventive maintenance).*

5. BAB V : PENUTUP

   Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai penelitian terdahulu, definisi perawatan *(maintenance),* jenis-jenis perawatan *(maintenance),* lalu mengenai perawatan pencegahan *(preventive maintenance)*, perawatan korektif *(corrective maintenance),* garansi, biaya garansi, uji *Kolmogorov-Smirnov*, elemen-elemen analisis reliabilitas, fungsi reliabilitas *(reliability function)*, fungsi laju kerusakan (*Hazard rate function*), distribusi Weibull, distribusi eksponensial, *maximum likelihood estimator*, ekspektasi biaya perawatan, distribusi bersama, fungsi padat peluang.

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian sebelumnya dilakukan oleh Yukun Wang, Zixian Liu, Yiliu Liu (2015) [2], dalam jurnal penelitiannya membahas tentang kebijakan garansi. Kebijakan garansi akan berakhir ketika item mencapai batas usia atau total penggunaan melebihi batas yang ditentukan, tergantung yang mana yang lebih dahulu terjadi. Dalam penelitiannya menggunakan tiga pendekatan berbeda yang diusulkan untuk memodelkan kegagalan garansi dua dimensi, antara lain pendekatan satu dimensi, pendekatan distribusi kegagalan bivariat dan pendekatan skala komposit. Untuk strategi pemeliharaannya, produsen menggunakan strategi pemeliharaan yang berkala. Kemudian model matematika diusulkan untuk mendapatkan pencegahan optimal strategi perawatan sehingga dapat meminimalkan total biaya servis garansi yang diharapkan untuk pabrik. Selain itu tujuan yang dilakukan yaitu untuk mengoptimasi jumlah tindakan pemeliharaan preventif dalam garansi dasar dan tambahan garansi. Valeriana L, Adhella Dwi, Titik M (2017) [4], dalam jurnal penelitiannya membahas tentang hal yang diperlukan dalam penentuan biaya garansi yaitu diperlukan keterkaitan antara kerusakan dengan melihat umur dan pemakaian produk, dimana kerusakan diasumsikan berdistribusi Weibull. Penelitian ini menghasilkan formulasi ekspektasi biaya garansi dua dimensi. Selain itu diperoleh hubungan besarnya ekspektasi biaya garansi produk sebanding dengan peningkatan umur dan pemakaian dari produk. Biaya garansi tidak memasukkan biaya penggantian karena komponen yang mahal. Sehingga biaya garansi dihitung berdasarkan biaya dikalikan ekspektasi jumlah kerusakan. Perbedaan penelitian ini adalah ekspektasi kerusakan didapatkan melalui integral lipat dua dari fungsi hazard yaitu kerusakan komponen. Dalam penelitian ini didapatkan pula biaya garansi akan meningkat seiring dengan peningkatan jumlah pemakaian dan umur dari produk yang bersangkutan. Kerusakan item yang digaransi adalah bagian mesin, dengan *subject* kerusakan didominasi *Countermeasure Brake Chamber*.

2.2 Definisi Perawatan *(Maintenance)*

Perawatan merupakan kegiatan yang cukup penting dilakukan dalam managemen operasional. Tujuan perawatan adalah untuk menjaga agar sistem yang ada dapat berjalan sebagaimana mestinya serta mampu mengendalikan biaya baik untuk pencegahan maupun perbaikan jika terjadi kerusakan. Ebeling (1997) mendefinisikan perawatan sebagai probabilitas bahwa komponen atau sistem yang rusak akan diperbaiki ke dalam suatu kondisi tertentu dalam periode waktu tertentu sesuai dengan prosedur yang ditentukan.

Tujuan dilakukan perawatan *(maintenance)* :

1. Memperpanjang kegunaan aset (yaitu setiap bagian dari suatu tempat kerja, bangunan dan isinya).
2. Menjamin ketersediaan optimum peralatan yang dipasang untuk produksi atau jasa untuk mendapatkan laba investasi semaksimal mungkin.
3. Menjamin kesiapan operasional dari seluruh peralatan yang diperlukan dalam keadaan darurat setiap waktu.

Adapun jenis-jenis perawatan (*maintenance*) menurut Wang dan Pham (2016) dapat diklasifikasikan oleh dua kategori utama yaitu yaitu *preventive maintenance dan corrective maintenance.* Perawatan pencegahan *(preventive maintenance)* merupakan tindakan pemeliharaan yang bersifat pencegahan dan terjadwal (misal tiga bulan sekali). Ruang lingkup pekerjaan *Preventive Maintenance* diantaranya adalah inspeksi, pembersihan *(cleaning),* perbaikan kecil, pelumasan dan penyetelan, pembersihan *filter,* pengencangan mur dan baut pada peralatan yang mengalami vibrasi sehingga peralatan atau mesin – mesin selama beroperasi terhindar dari kerusakan. Inspeksi periodik untuk mendeteksi kondisi yang mungkin menyebabkan *breakdown,* produksi terhenti, atau berkurangnya fungsi mesin dikombinasikan dengan pemeliharaan untuk menghilangkan, mengendalikan kondisi tersebut dan mengembalikan mesin ke kondisi semula. Aktifitas *maintenance* dapat dilakukan dengan *Maintenance Plan* [11]. Manfaat *Preventive Maintenance* untuk perusahaan adalah :

a. Perusahaan dapat beroperasi sesuai dengan rencana *(Master Plan)*
b. Menjaga mutu produk yang diberikan kepada konsumen
c. Meminimalkan waktu dan biaya yang hilang akibat kerusakan *(Breakdown)*

d. Menjaga kondisi peralatan dan memperpanjang umur peralatan.

Perawatan korektif *(corrective maintenance)* adalah suatu kegiatan *pemeliharaan* yang dilakukan saat suatu komponen atau sistem tidak berjalan sebagaimana mestinya atau cenderung rusak (*breakdown)* [11]. Pekerjaan perawatan ini dilakukan untuk memperbaiki dan meningkatkan kondisi peralatan sehingga mencapai standart yang dapat diterima. Pekerjaan perawatan yang dapat dilakukan diantaranya adalah melakukan perubahan atau modifikasi rancangan agar peralatan menjadi lebih baik.

2.3 Pengertian Garansi

Garansi adalah kesepakatan kontraktual (*contractual agreement*) antara produsen dan konsumen berkaitan dengan penjualan produk. Dalam kesepakatan ini, produsen diharuskan melakukan perbaikan (rektifikasi) terhadap produk yang mengalami kegagalan dalam periode garansi. Garansi memberikan jaminan bahwa produsen akan melakukan perbaikan jika produk mengalami kegagalan fungsional di dalam masa garansi yang telah ditentukan [7].

Bagi produsen penawaran garansi merupakan salah satu strategi marketing yang cukup handal, yaitu sebagai salah satu alat promosi dan alat proteksi. Bentuk promosi tersebut berupa penawaran garansi yang diharapkan dapat membantu meningkatkan penjualan suatu produk. Sebagai alat proteksi, garansi didesain sedemikian rupa sehingga dapat melindungi perusahaan dari klaim yang tidak layak

Biaya Garansi yaitu setiap pengajuan klaim yang dikarenakan kualitas produk tidak memuaskan atau tidak sesuai yang dipersyaratkan, maka produsen akan mengeluarkan biaya garansi. Jika klaim yang diajukan tidak valid, biaya yang dikeluarkan hanya biaya administrasi. Klaim dikatakan tidak layak jika masa garansinya telah habis *(expired)* atau kegagalan terjadi akibat kesalahan konsumen. Jika klaim yang diajukan valid, ada beberapa biaya tambahan yang harus dikeluarkan produsen. Biaya tambahan tersebut meliputi biaya tenaga kerja dan biaya perbaikan komponen. Untuk kasus *FRW (Free Replacement Warranty)*, produsen menyediakan retrifikasi tanpa adanya biaya retrifikasi yang dipungut dari konsumen.

Secara umum total biaya yang harus dikeluarkan produsen setiap unit penjualan tidak dapat diperkirakan. Hal ini disebabkan kegagalan produk bersifat acak dan cara pemakaian produk oleh masing-masing konsumen berbeda. Biaya garansi sangat penting bagi produsen karena biaya garansi merupakan bagian dari harga jual (dimasukkan ke dalam harga jual), oleh karena itu diperlukan estimasi yang akurat. Biaya garansi merupakan biaya yang ditetapkan produsen untuk menanggung 1 jenis produk dan dalam kurun waktu tertentu sesuai dengan yang ditetapkan oleh produsen.

Ekspektasi biaya garansi dirumuskan dengan [9]:

$$E(P) = C_S M(u, w) \qquad (2.1)$$

Dengan:

$E(P)$	: Ekspektasi biaya garansi
C_s	: Biaya yang harus dikeluarkan perusahaan untuk perbaikan
$M(u,w)$	: Ekspetasi jumlah kerusakan
u	: Variabel yang menyatakan umur Produk
w	: Variabel yang menyatakan penggunaan produk

2.4 Uji Kesesuaian Distribusi

Tahap uji kesesuaian distribusi digunakan untuk mengetahui apakah data tersebut memenuhi kriteria distribusi tertentu. Uji kesesuaian ini membandingkan antara hipotesis nol yang menyatakan bahwa data membentuk distribusi yang akan diuji dan hipotesis alternatif yang menyatakan bahwa data kerusakan tidak membentuk distribusi yang diuji. Uji kesesuaian distribusi atau uji *Goodness of Fit* dilakukan untuk masing-masing distribusi dugaan. Berikut merupakan Uji kesesuaian distribusi atau uji *Goodness of Fit* untuk masing-masing distribusi sebagai berikut :

2.4.1 Uji Kolmogorov-Smirnov

Jika diberikan hipotesis bahwa distribusi X adalah $F(x)$, maka hipotesa untuk uji ini adalah [12]:

$H_0 : F(x) = F_0(x)$ (Data memiliki distribusi teoritis $F_0(x)$)

$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$ (Data tidak mengikuti distribusi teoritis $F_0(x)$)

Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut :

$$D = \sup|S(x) - F_0(x)| \qquad (2.2)$$

Dengan :

D	: Jarak vertikal terjauh antara $F_0(x)$ dan $S(x)$
$S(x)$	: Fungsi peluang kumulatif yang dihitung dari data sampel
$F_0(x)$	: Merupakan fungsi distribusi yang dihipotesiskan
$F(x)$	: Merupakan fungsi distribusi yang belum diketahui

Hipotesis nol diterima jika $D < D_{(1-\alpha,n)}$ dengan α adalah taraf signifikan dan n adalah ukuran sampel. Dengan demikian maka dapat disimpulkan bahwa data mengikuti distribusi teoritis $F_0(x)$. Jika ingin Uji *Kolmogorov-Smirnov* untuk distribusi Lognormal maka dilakukan substitusi :
$t_i = \ln t_i$. Untuk mendapatkan nilai $D_{(1-\alpha,n)}$ dapat dicari menggunakan rumus $D_{(1-\alpha,n)} = \frac{1{,}36}{\sqrt{n}}$.

2.4.2 Uji Mann untuk Distribusi Weibull

Jika diberikan hipotesis bahwa distribusi T adalah $F(t)$, maka hipotesis untuk uji ini adalah [10] :

Hipotesis :

$$H_0 : T = F(t)$$
$$H_1 : T \neq F(t)$$

Statistik Uji :

$$M = \frac{k_1 \sum_{i=k_1+1}^{n-1} \left[\frac{(\ln t_{i+1} - \ln t_i}{M_i}\right]}{k_2 \sum_{i=1}^{k_1} \left[\frac{(\ln t_{i+1} - \ln t_i)}{M_i}\right]} \qquad (2.3)$$

dengan:

M_i : $Z_{i+1} - Z_i$

Z_i : $\ln\left[-\ln\left(1 - \frac{i-0{,}5}{n+0{,}25}\right)\right]$

M : nilai taksiran pada uji Mann

t_i : waktu kerusakan ke-i

n : banyaknya data waktu antar kerusakan

α : derajat kesalahan atau batas kesalahan maksimal

Kriteria pegujian :

Jika $M < F_{\alpha,v_1,v_2}$ maka H_0 diterima dan H_1 ditolak, dengan:

$$v_1 = 2\left[\frac{n}{2}\right];\ v_2 = 2\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

2.5 Elemen-Elemen Analisis Reliabilitas

Dalam suatu perusahaan atau industri tertentu, biasanya suatu komponen rusak dikarenakan komponen tersebut sudah terlalu lama dipakai, karena komponen yang digunakan mengalami *shock*, kesalahan operasi, atau tidak dipelihara dengan baik. Suatu metode yang khusus mempelajari tentang bagaimana memprediksi dan menaksir distribusi usia pakai suatu komponen atau sistem serta menentukan kapan suatu komponen atau sistem itu diganti atau diperbaiki adalah Metode Reliabilitas [3].

2.5.1 Fungsi Reliabilitas *(Reliability Function)*

Jika terdapat suatu variabel random U, W yang menyatakan waktu suatu komponen rusak (waktu sampai suatu komponen rusak setelah pemakaian) dan $f(u, w)$ menunjukkan *Probability Density Function (PDF)* gabungan dari U, W. Pada umumnya, $f(u, w)$ akan berubah karena perubahan kondisi lingkungan. Jika didefinisikan bahwa reliabilitas suatu komponen adalah probabilitas sukses, artinya probabilitas suatu komponen akan tetap beroperasi dengan baik paling sedikit dalam waktu u, w, maka dapat dituliskan sebagai:

$$R(u, w) = 1 - F(u, w) \qquad (2.4)$$

dengan $F(u, w)$ adalah probabilitas bahwa suatu komponen akan rusak sampai pada waktu u, w. Untuk selanjutnya $F(u, w)$ disebut dengan *Cumulative Density Function (CDF)* gabungan, dengan $R(u, w)$ disebut dengan fungsi reliabilitas *(Reliability Function)* gabungannya. Jadi jika distribusi usia pakai suatu komponen $f(u, w)$ diketahui, maka fungsi reliabilitas secara langsung dapat ditentukan [3].

2.5.2 Fungsi Laju Kerusakan *(Hazard Rate Function)*

Jika suatu komponen mengalami kerusakan pada interval waktu $[t_1, t_2]$, maka kerusakan pada interval itu disebut dengan tingkat kerusakan *(Failure Rate Function).* Apabila $R(u,w)$ adalah fungsi reliabilitas gabungan dan $f(u,w)$ adalah pdf gabungan distribusi usia pakai dan penggunaan suatu komponen, maka fungsi laju kerusakan *(Hazard Rate)* didefinisikan sebagai limit dari tingkat kerusakan pada interval waktu $[t_1, t_2]$, mendekati nol. Dari definisi, maka *Hazard Rate* atau *(Hazard Rate Function* atau lebih sederhananya *Hazard Function)* dituliskan :

$$h(u) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(u) - R(u + \Delta u)}{\Delta t R(t)}$$

$$= \frac{1}{R(u)} \left[-\frac{dR(u)}{du} \right]$$

dengan menyederhanakan persamaan di atas diperoleh :

$$h(u) = \frac{f(u)}{R(u)}$$

dengan $h(u)$ disebut dengan *Hazard Rate*, jika $-\frac{dR(u)}{dt} = f(u)$ adalah pdf distribusi usia pakai komponen. Untuk perumusan laju kerusakan pada distribusi bivariat yaitu sebagai berikut [10} :

$$h(u,w) = \frac{f(u,w)}{R(u,w)} \qquad (2.5)$$

2.6 Distribusi Waktu Kegagalan

Dengan metode parametrik parameter-parameter *reliability* dapat diketahui dan diperkirakan. Dalam memakai metode parametrik, data kegagalan disesuaikan dengan beberapa distribusi probabilistik, seperti *Weibull*, Eksponensial dan lain sebagainya.

Dengan demikian maka dapat ditentukan mengenai keadaan dan sifat mekanisme kerusakan dan hasil dari distribusi dapat lebih siap untuk dianalisa. Untuk menyatakan distribusi kerusakan pertama harus ditentukan distribusi data kemudian mencari parameter yang digunakan dalam analisa.

2.6.1 Distribusi Weibull

Salah satu sifat produk adalah daya hidup yang semakin menurun sehingga akan terjadi kegagalan fungsional. Kegagalan fungsional akan semakin meningkat seiring dengan lamanya penggunaan produk tersebut. Suatu perusahaan akan memberikan garansi apabila terjadi kegagalan fungsional dalam periode tertentu.

Distribusi Weibull sering digunakan dalam pemodelan laju kerusakan yang tidak konstan atau bergantung waktu. Suatu variabel acak kontinu X dikatakan berdistribusi weibull dengan parameter skala yaitu $\theta > 0$, menunjukkan besarnya keragaman data dan parameter bentuk yaitu $\beta > 0$, menunjukkan laju kematian / kerusakan. Distribusi Weibull memiliki fungsi padat peluang sebagai berikut [5] :

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\theta^{\beta}} u^{\beta-1}\, e^{-\left(\frac{u}{\theta}\right)^{\beta}} \\ 0, x\ yang\ lain \end{cases} \qquad (2.6)$$

$$\theta > 0, \qquad \beta > 0, \qquad x > 0$$

Untuk PDF dari distribusi gabungannya yaitu :

$$f(u,w) = \frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}} e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} u^{\beta_1-1} w^{\beta_2-1}$$

Dengan CDF dari distribusi gabungannya yaitu :

$$F(u,w) = \left(1 - e^{-\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} - e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}\right) \tag{2.7}$$

$$u > 0, w > 0$$

2.6.2 Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial memiliki laju kerusakan yang konstan terhadap waktu dan kerusakan yang bersifat acak. Parameter distribusi eksponensial adalah λ. Fungsi kepadatan peluang *(pdf)* gabungan pada waktu u, w dari distribusi Eksponensial, $f(u,w)$, adalah [10] :

$$f(u,w) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 u - \lambda_2 w} \tag{2.8}$$

$$\lambda > 0$$

Sedangkan CDF dari distribusi gabungannya, $F(u,w)$ adalah :

$$F(u,w) = \left(1 - e^{-\lambda_2 w} - e^{-\lambda_1 u} + e^{-\lambda_1 u - \lambda_2 w}\right) \tag{2.9}$$

2.7 Maximum Likelihood Estimator

Salah satu metode dalam penaksir parameter adalah *Maximum Likelihood Estimator (MLE)* yang akan digunakan untuk mengestimasi parameter yang bersesuaian dengan fungsi kegagalan. Prinsip dasar dari MLE adalah menentukan $\widehat{\theta}$ yang memaksimumkan fungsi *Likelihood.*

Misal $L(\theta) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$, $\theta \in \Omega$ adalah fungsi densitas peluang bersama dari $X_1, X_2, \dots . X_n$. Untuk sampel acak $x_1, x_2, \dots, x_n$, nilai $\widehat{\theta}$ pada Ω yang memaksimumkan $L(\theta)$

disebut *Maximum Likelihood Estimator (MLE)* dari θ yang memenuhi :[6].

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \max_{\theta \in \Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n;\ \theta)$$

Maka fungsi *Likelihood*-nya ditunjukkan oleh :

$$L(\hat{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta) \qquad (2.14)$$

Fungsi *Log-Likelihood* dapat ditulis dalam bentuk:

$$l = ln\ L(\hat{\theta}) \qquad (2.15)$$

Nilai parameter θ dapat diperoleh dengan memaksimumkan fungsi kepadatan peluang. Hal tersebut dilakukan dengan metode turunan pertama dari fungsi *Likelihood*-nya terhadap setiap parameternya. Jika Ω merupakan ruang parameter, dan jika $L(\theta)$ terdiferensialkan dan mencapai nilai maksimum pada Ω, maka MLE $\widehat{\theta}$ merupakan penyelesaian dari persamaan maksimum *Likelihood* berikut :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln[L(\hat{\theta})] = 0 \qquad (2.16)$$

2.8 Biaya Pemeliharaan

Ada dua macam pembiayaan pemeliharaan suatu mesin, yaitu : biaya pencegahan *(preventive cost)* dan biaya kerusakan *(failure cost). Preventive cost* merupakan biaya yang timbul karena adanya perawatan mesin yang sudah dijadwalkan. Sedangkan *Failure cost* merupakan biaya yang timbul karena terjadi kerusakan diluar perkiraan yang menyebabkan mesin produksi terhenti waktu produksi sedang berjalan [13].

C_p = Biaya satu siklus pemeliharaan
= (biaya kehilangan + biaya tenaga kerja + biaya pemeliharaan rutin) x rata-rata waktu penggantian kompenen + harga komponen (2.17)

C_f = (Biaya kehilangan + biaya tenaga kerja) x rata-rata waktu penggantian komponen + harga komponen (2.18)

Total biaya perawatan dan penggantian

$$= C_p \times R(t) + C_f \times (1 - R(t)) \tag{2.19}$$

Total biaya optimum pemeliharaan tiap siklus

$$C_s = \frac{C_p \times R(t) + C_f \times (1 - R(t))}{t\,R(t) + M(t)} \tag{2.20}$$

2.9 Fungsi Kepadatan Peluang

Fungsi pada peubah acak kontinu disebut fungsi padat peluang kontinu. Selain fungsi padat peluang ada juga yang disebut sebagai fungsi distribusi kumulatif, yakni fungsi $F(u)$ dari sebuah peubah acak U dengan definisi untuk $F(u) = P(U \leq u)$, untuk setiap $u \in U$ dan U adalah suatu peubah acak, maka fungsi distribusi kumulatif didefinisikan sebagai berikut : jika $f(u)$ merupakan fungsi padat peluang dari U peubah acak kontinu, mka fungsi distribusi kumulatif dari U dapat dinyatakan sebagai [5].

$$F(U) = \int_{-\infty}^{u} f(t)\,dt, \tag{2.21}$$

Untuk $-\infty < x < \infty$

Dengan demikian,

$$f(u) = \frac{d}{du} F(u) \tag{2.22}$$

Misalkan x dan y dua peubah acak, diskrit maupun kontinu, dengan fungsi peluang gabungan $f(u,w)$ dan distribusi marginal masing-masing $f(u)$ dan $f(w)$. Peubah acak u dan w dikatakan bebas statistik jika dan hanya jika, [6]

$$f(u,w) = f(u)f(w) \qquad (2.23)$$

untuk semua $(u,)$ dalam daerah definisinya.

2.10 Ekspektasi Kerusakan pada Garansi Dua Dimensi

Garansi dua dimensi dikarakteristikkan oleh regional segiempat $\Omega \equiv [0,u) \times [0,w)$ dan garansi berakhir ketika produk mencapai umur pada saat u atau pada saat pemakaian mencapai w, yang mana tercapai terlebih dahulu diantara keduanya. Perusahaan harus memperbaiki produk ketika produk mengalami kerusakan pada daerah Ω. Kerusakan garansi berpengaruh terhadap biaya garansi yang dikeluarkan oleh perusahaan. Jika fungsi densitas peluang didefinisikan sebagai berikut [15] : $f_{T|T\geq t}(u) = \frac{f(u)}{R(u)}, u \geq t$, maka ekspektasi jumlah kerusakan dinyatakan berikut,

$$E[T|T \geq t] = \int_t^\infty u f_{T|T\geq t}(u)\, du$$

$$= \int_t^\infty u\, \frac{f(u)}{R(u)}\, du$$

sehingga ekspektasi jumlah kerusakan pada garansi dua dimensi didefinisikan oleh $M(u,w)$ yaitu kerusakan yang terjadi pada daerah $[0,u) \times [0,w)$ dinyatakan sebagai :

$$M(u,w) = \int_0^w \int_0^u uw\, \frac{f(u,w)}{R(u,w)}\, du\, dw$$

$$= \int_{0}^{w} \int_{0}^{u} uw\, h(u,w)\ du\, dw$$

dengan $u = 1$, dan $w = 1$

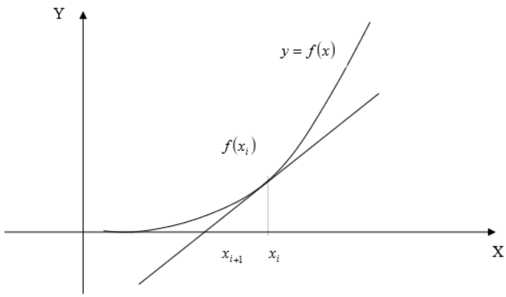
$$M(u,w) = \int_{0}^{w} \int_{0}^{u} h(u,w)\, du\, dw \qquad (2.24)$$

dengan:

$h(u,w)$: fungsi intensitas kerusakan (*hazard*)

2.11 Metode Newton Raphson

Metode Newton Raphson digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan non-linier.



Dari gambar diatas persamaan garis singgung $f(x)$ dengan gradien garis singgung $f'(x_i)$ yang melalui titik $[x_i, f(x_i)]$ adalah $y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$. Garis singgung ini memotong sumbu X di $(x_{i+1}, 0)$ sehingga $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Langkah – langkah Metode Newton-Raphson :

1. Tentukan nilai awal x_0
2. Lakukan iterasi $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ dimana $i = 1,2,3, ...$
3. Iterasi berhenti jika salah satu kriteria dibawah ini terpenuhi :

a. $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$
b. Banyaknya iterasi terlampaui
c. $f(x) < \varepsilon$ dengan ε = bilangan sembarang yang sangat kecil

Persamaan diatas merupakan persamaan untuk mencari Persamaan diferensial (PD). Sedangkan untuk mencari sistem PD akan dijelaskan sebagai berikut :
Misalkan diketahui sistem persamaan non-linier dengan n persamaan dan n variabel yang ditulis dalam bentuk sebagai berikut : [16]

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{gathered} \tag{2.25}$$

Jika diberikan suatu nilai awal yaitu $\bar{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ dan iterasi berhenti ketika $error < 0{,}005$. Penyelesaian untuk iterasi ke-i untuk parameter yang ditaksir sebagai berikut :

$$\begin{gathered} x_1^{(i)} = x_1^{(i-1)} + e_1^{(i-1)} \\ x_2^{(i)} = x_2^{(i-1)} + e_2^{(i-1)} \\ . \\ . \\ . \\ x_n^{(i)} = x_n^{(i-1)} + e_n^{(i-1)} \end{gathered} \tag{2.26}$$

dimana :

$$e_n^{(i-1)} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & -f_1(\bar{x}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & -f_2(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & -f_n(\bar{x}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{vmatrix}} \qquad (2.27)$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah dalam Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

3.1 Jenis dan Sumber Data

Pada penelitian ini, penulis menggunakan beberapa jenis dan sumber data, antara lain:

3.1.1 Jenis Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yaitu data penjualan dan data servis kendaraan bermotor merk Yamaha periode Januari 2015 - Desember 2018 pada Lampiran A.

3.1.2 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini tidak diambil secara langsung dari lapangan. Peneliti mengambil data yang sudah ada (dicatat) oleh bagian administrasi bagian penjualan dan servis Dealer Tri Jaya Motor Pare. Data yang diperoleh adalah data sekunder yaitu data penjualan dan data servis periode Januari 2015 sampai dengan Desember 2018 pada Lampiran A yang didefinisikan sebagai data klaim.

3.2 Tahapan Penelitian

Pada penelitian Tugas Akhir ini akan dilakukan beberapa langkah sebagai berikut :

1. Studi Literatur

   Pada tahap ini akan dilakukan identifikasi masalah mengenai model matematika tentang pemeliharaan preventif suatu produk dengan garansi dua dimensi berdasarkan referensi yang didapat seperti referensi dari jurnal, buku, penelitian tesis, dan media-media lain yang dapat menunjang penelitian.
2. Perumusan Masalah

   Pada tahap ini, setelah referensi-referensi terkumpul dan didapatkan beberapa metode penunjang, dilakukan perumusan masalah yang dibahas pada Tugas Akhir ini.
3. Pengumpulan Data

   Setelah menentukan rumusan masalah tahapan selanjutnya yaitu pengumpulan data. Data yang digunakan merupakan data servis yang terdiri dari data kegagalan yang meliputi waktu kegagalan produk dan usia pakai serta penggunaannya.
4. Uji Distribusi

   Data yang sudah ada selanjutnya di uji distribusinya, karena setiap data memilki distribusi yang berbeda antara data yang satu dengan data yang lainnya. Uji distribusi dengan menggunakan pengujian *Kolmogorov-smirnov* dan dengan bantuan software. Untuk uji manualnya menggunakan uji *Kolmogorov-Smirnov* untuk distribusi Eksponensial dan uji Mann untuk uji distribusi Weibull.
5. Penentuan Fungsi Padat Peluang (PDF)

   Setelah di dapatkan jenis distribusi dari data tersebut selanjutnya menentukan fungsi padat peluang *(Probability Density Function)* dari distribusi tersebut.
6. Estimasi Parameter

   Mengestimasi parameter yang ada pada PDF dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimator* /

MLE. Selanjutnya apabila hasil dari *likelihood*nya merupakan persamaan non linier maka digunakan salah satu metode numerik yaitu menggunakan Newton Raphson.

7. Penentuan Fungsi Reliabilitas
   Setelah menstubstitusi nilai parameter yang diperoleh langkah selanjutnya yaitu menentukan fungsi reliabilitas dengan mengintegralkan fungsi PDF mulai dari t sampai tak hingga. Fungsi PDF akan berbeda-beda tergantung distribusi yang didapatkan.
8. Menentukan Laju Kerusakan / *Failure rate*
   Dengan mengetahui fungsi padat peluang dan fungsi reliabilitasnya, maka langkah selanjutnya yaitu mencari laju kerusakan dengan cara mensubstitusikan PDF dan fungsi reliabilitas kedalam persamaan.
9. Mendapatkan Fungsi Biaya
   Sebelum menentukan estimasi biaya yang harus di tanggung oleh konsumen, langkah awal yang harus di lakukan adalah menentukan C_f *(Cost Of Failure)* dan C_p *(Cost Of Preventive)* dan langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan nilai C_f dan C_p ke dalam persamaan C_s. Untuk mendapatkan estimasi biaya garansi yang harus ditanggung oleh Dealer maka harus mencari terlebih dahulu ekspetasi biaya kerusakan dengan mengintegralkan fungsi kerusakan. Selanjutnya yaitu dengan mensubstitusi nilai parameter-parameter yang didapat sesuai distribusinya kedalam ekspetasi kerusakan tersebut. Estimasi biaya garansi didapat dengan mengalikan ekspetasi kerusakan dengan biaya perawatan. Maka didapat biaya ekspetasi garansi yang harus ditanggung oleh dealer untuk 1 unit kendaraan dengan kapasitas mesin yang berbeda-beda selama masa garansi.

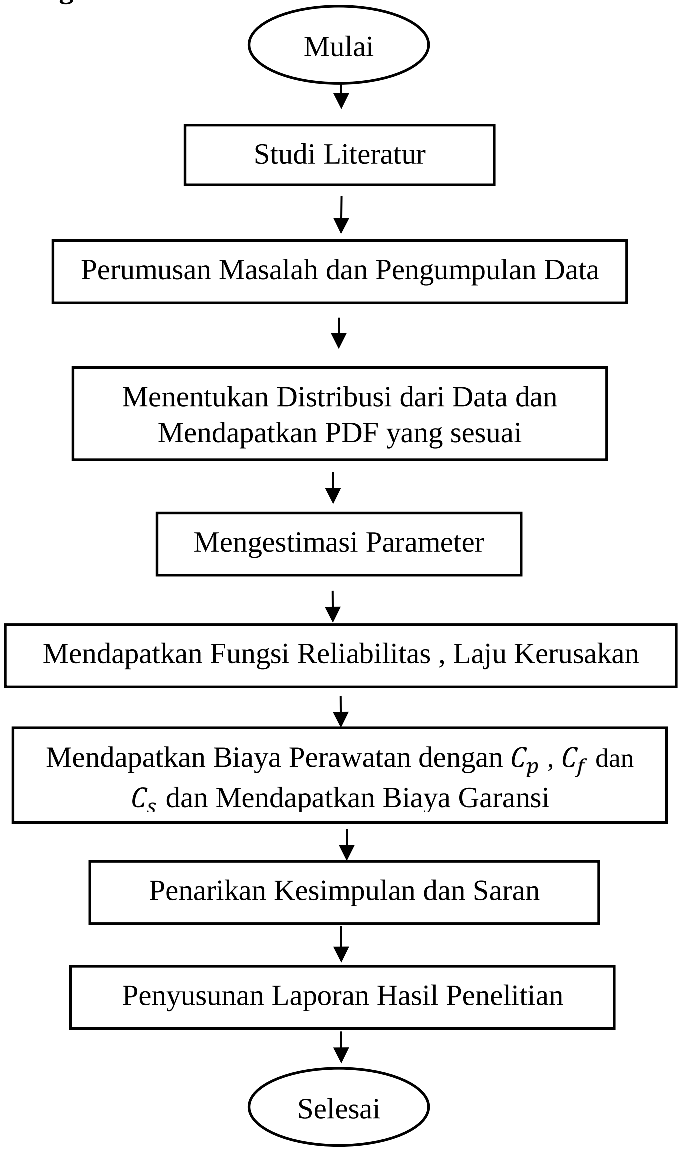
10. Penarikan Kesimpulan dan Saran

    Setelah mendapatkan estimasi biaya maka dapat ditarik kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian selanjutnya agar di dapatkan hasil penelitian yang semakin baik.

11. Penyusunan Laporan Hasil Penelitian

    Pada tahap ini dilakukan penyusunan hasil penelitian berdasarkan hasil analisis dan penelitian yang dilakukan.

3.3 Diagram Alir Penelitian



Gambar 3. 1 Diagram Alir Penelitian

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang dealer Tri Jaya Motor Pare, pengujian kecocokan distribusi kerusakan yang sesuai dengan data , penentuan nilai parameter distribusi, perhitungan nilai reliabilitas, ekspektasi biaya perawatan, dan ekspetasi biaya garansi.

4.1 Dealer Tri Jaya Motor Pare

Dealer Tri Jaya Motor adalah badan usaha yang bergerak di bidang penjualan motor Yamaha yang terletak di Pare, Kediri Jawa Timur. Dealer Tri Jaya mendistribusikan beberapa motor dengan merk dan kapasitas mesin yang berbeda-beda. Dealer Tri Jaya mendistribusikan motor secara kontinu baik untuk motor model terbaru maupun model lama. Dalam tugas akhir ini, menggunakan data penjualan dan data servis yang dapat dilihat pada Lampiran A. Dealer Tri Jaya dalam penjualannya memberikan jaminan Garansi selama 2 tahun yang diberikan kepada setiap konsumen. Garansi yang diberikan yaitu berupa servis gratis selama 4 kali selama masa garansi atau dalam waktu 2 tahun.

Garansi yang diberikan Dealer Tri Jaya tentunya sudah termasuk biaya yang harus dikeluarkan konsumen pada saat pembelian motor tersebut. Permasalahan yang muncul yaitu konsumen tidak mempergunakan garansi tersebut dengan baik, sehingga konsumen akan kembali ketika motor tersebut sudah mengalami kerusakan sehingga menyebabkan bertambahnya biaya yang harus dikeluarkan oleh konsumen. Untuk itu perlu adanya perawatan pencegahan agar motor tersebut tetap terawat. Akan tetapi dengan adanya perawatan secara berkala tentunya akan membuat biaya yang harus dikeluarkan lebih banyak, tetapi umur dari motor tersebut akan bertahan lama. Sehingga dalam tugas akhir ini dibahas mengenai ekspetasi biaya garansi.

4.2 Fungsi Kepadatan Peluang Setiap Distribusi

Perumusan kerusakan untuk garansi dua dimensi pada dasarnya sama dengan perumusan untuk garansi satu dimensi. Akan tetapi, variabel yang digunakan adalah variabel umur (u) dan variabel penggunaan (w).

4.2.1 Fungsi Kepadatan Peluang Distribusi Weibull

Pada persamaan (2.6) dan (2.7) telah diberikan fungsi padat peluang dan fungsi padat peluang kumulatif dari distribusi Weibull dan pada persamaan (2.23) telah dijelaskan apabila u dan w merupakan peubah acak bebas statistik, maka fungsi padat peluang gabungannya yaitu

$$\begin{aligned} f(u,w) &= f(u)\, f(w) \\ &= \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} u^{\beta_1-1}\, e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}\right)\left(\frac{\beta_2}{\theta_2^{\beta_2}} w^{\beta_2-1}\, e^{-\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}\right) \\ &= \frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}} e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}-\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} u^{\beta_1-1} w^{\beta_2-1} \qquad (4.2.1) \end{aligned}$$

Sedangkan untuk fungsi padat peluang kumulatif gabungannya yaitu :

$$\begin{aligned} F(u,w) &= F(u)\, F(w) \\ &= \left(1- e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}\right)\left(1- e^{-\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}\right) \\ &= \left(1 - e^{-\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} - e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}-\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}\right) \quad (4.2.2) \end{aligned}$$

dengan $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$

4.2.2 Fungsi Kepadatan Peluang Distribusi Eksponensial

Pada persamaan (2.10) dan (2.11) telah diberikan fungsi padat peluang dan fungsi padat peluang kumulatif dari distribusi Eksponensial dan pada persamaan (2.23) telah dijelaskan apabila u dan w merupakan peubah acak bebas statistik, maka fungsi padat peluang gabungannya yaitu

$$
\begin{aligned}
f(u,w) &= f(u)\, f(w) \\
&= \left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\right)\left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 w}\right) \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 u - \lambda_2 w} \qquad (4.2.3)
\end{aligned}
$$

Sedangkan untuk fungsi padat peluang kumulatif gabungannya yaitu :

$$
\begin{aligned}
F(u,w) &= F(u)F(w) \\
&= \left(1 - e^{-\lambda_1 u}\right)\left(1 - e^{-\lambda_2 w}\right) \\
&= \left(1 - e^{-\lambda_2 w} - e^{-\lambda_1 u} + e^{-\lambda_1 u - \lambda_2 w}\right) \qquad (4.2.4)
\end{aligned}
$$

4.3 Penentuan Distribusi Data

Penentuan distribusi data merupakan langkah awal untuk menentukan elemen reliabilitas pada suatu komponen mesin. Dalam Tugas akhir ini menggunakan uji distribusi Kolmogorov-Smirnov dan Uji Mann. Pada penelitian ini menggunakan bantuan *Software Easy fit* untuk menentukan distribusi dari data umur maupun data penggunaan.

Berikut merupakan pengujian kesesuaian distribusi pada masing-masing kapasitas mesin :

4.3.1 Distribusi Data Umur menggunakan *Software Easy fit.*

Untuk mengetahui jenis distribusi dari umur setiap produk kendaraan berdasarkan kapasitas mesinnya digunakan *software* pendukung *Easy Fit*, sehingga di dapatkan hasil jenis distribusi setiap CC yang berbeda-beda sebagai berikut :

1. Kapasitas Mesin 125 CC
   Didapatkan hasil pengujian distribusi data umur produk yang dapat dilihat pada Tabel B.1. Dari hasil pengujian jenis distribusi didapatkan hasil bahwa data berdistribusi Weibull.
2. Kapasitas Mesin 150 CC
   Didapatkan hasil pengujian distribusi data umur produk yang dapat dilihat pada Tabel B.3. Dari hasil pengujian jenis distribusi didapatkan hasil bahwa data berdistribusi Weibull.
3. Kapasitas Mesin 250 CC
   Didapatkan hasil pengujian distribusi data umur produk yang dapat dilihat pada Tabel B.5. Dari hasil pengujian jenis distribusi didapatkan hasil bahwa data berdistribusi Eksponensial..

4.3.2 Distribusi Data Penggunaan menggunakan *Software Easy fit*

Untuk mengetahui jenis distribusi dari penggunaan setiap produk kendaraan berdasarkan kapasitas mesinnya digunakan *software* pendukung *Easy Fit*, sehingga di dapatkan hasil jenis distribusi setiap CC yang berbeda-beda sebagai berikut :

1. Kapasitas Mesin 125 CC
   Didapatkan hasil pengujian distribusi data penggunaan produk yang dapat dilihat pada Tabel B.2. Dari hasil pengujian jenis distribusi didapatkan hasil bahwa data berdistribusi Weibull.

2. Kapasitas Mesin 150 CC

   Didapatkan hasil pengujian distribusi data penggunaan produk yang dapat dilihat pada Tabel B.4. Dari hasil pengujian jenis distribusi didapatkan hasil bahwa data berdistribusi Weibull.

3. Kapasitas Mesin 250 CC

   Didapatkan hasil pengujian distribusi data penggunaan produk yang dapat dilihat pada Tabel B.6. Dari hasil pengujian jenis distribusi didapatkan hasil bahwa data berdistribusi Eksponensial.

4.3.3 Uji Distribusi

Tahap selanjutnya adalah melakukan pengujian kesesuaian distribusi dugaan yang terpilih sesuai pada Lampiran B. Pengujian ini dilakukan sesuai dengan distribusi yang sudah didapatkan menggunakan *software Easy Fit.* Data yang digunakan pada tahap uji distribusi adalah waktu klaim pada Lampiran A.

Macam-macam uji kesesuaian distribusi adalah Uji Mann untuk distribusi Weibull, dan Uji Kolmogorov-Smirnov untuk distribusi Eksponensial.

Berikut merupakan pengujian kesesuaian distribusi pada masing-masing data :

1. Uji Distribusi untuk Kapasitas Mesin 125 CC
   a) Untuk data umur kendaraan

      Pada perhitungan data umur untuk kapasitas mesin 125 CC, diperoleh distribusi Weibull. Oleh karena itu, dilakukan uji kesesuaian distribusi dengan Uji Mann. Pengujian pada Uji Mann adalah sebagai berikut :

      Hipotesis :

$$H_0 : T = F(t)$$
$$H_1 : T \neq F(t)$$

Statistik Uji :

Dengan menggunakan persamaan (2.3) diperoleh statistik uji sebagai berikut :

$$M = \frac{418(0 + 0 + \cdots + 0{,}246701)}{417(0 + 0 + \cdots + 0{,}473540 + \cdots)}$$

$$M = 0{,}9428$$

Dengan tabel distribusi F diperoleh :

$$F_{tabel} = F_{0,05\,;\,836;834} = 1{,}1749$$

Kriteria pengujian:

Karena nilai $M < F_{0,05\,;\,836;834}$ maka H_0 diterima sehingga dapat disimpulkan bahwa data umur untuk kapasitas mesin 125 CC terdistribusi Weibull.

Perhitungan uji Mann untuk distribusi Weibull dapat dilihat pada Lampiran C.

b) Untuk data penggunaan kendaraan

Pada perhitungan data penggunaan untuk kapasitas mesin 125 CC, diperoleh distribusi Weibull. Oleh karena itu, dilakukan uji kesesuaian distribusi dengan Uji Mann. Pengujian pada Uji Mann adalah sebagai berikut :

Hipotesis :

$$H_0 : T = F(t)$$

$$H_1 : T \neq F(t)$$

Statistik Uji :

Dengan menggunakan persamaan (2.3) diperoleh statistik uji sebagai berikut :

$$M = \frac{418(0{,}77357 + 0 + \cdots + 0{,}015713)}{417(0{,}003617 + 0{,}021222 + \cdots + 0)}$$

$$M = 1{,}1015$$

Dengan tabel distribusi F diperoleh :

$$F_{tabel} = F_{0,05\,;\,836;834} = 1{,}1749$$

Kriteria pengujian:

Karena nilai $M < F_{0,05\,;\,836;834}$ maka H_0 diterima sehingga dapat disimpulkan bahwa data penggunaan untuk kapasitas mesin 125 CC terdistribusi Weibull.

Perhitungan uji Mann untuk distribusi Weibull dapat dilihat pada Lampiran C.

2. Uji Distribusi untuk Kapasitas Mesin 150 CC
   a) Untuk data umur kendaraan

Pada perhitungan data umur untuk kapasitas mesin 150 CC, diperoleh distribusi Weibull. Oleh karena itu, dilakukan uji kesesuaian distribusi dengan Uji Mann. Pengujian pada Uji Mann adalah sebagai berikut :

Hipotesis :

$$H_0 : T = F(t)$$
$$H_1 : T \neq F(t)$$

Statistik Uji :

dengan menggunakan persamaan (2.3) diperoleh statistik uji sebagai berikut :

$$M = \frac{252(0 + 0 + \cdots + 0{,}328591 + \cdots)}{251(0 + 0 + 0{,}4567 + \cdots)}$$
$$M = 1{,}041$$

dengan tabel distribusi F diperoleh :

$$F_{tabel} = F_{0,05\,;\,504;502} = 1{,}15816$$

Kriteria pengujian:

Karena nilai $M < F_{0,05\,;\,504;502}$ maka H_0 diterima sehingga dapat disimpulkan bahwa data umur untuk kapasitas mesin 150 CC terdistribusi Weibull.

Perhitungan uji Mann untuk distribusi Weibull dapat dilihat pada Lampiran C.

b) Untuk data penggunaan kendaran

Pada perhitungan data penggunaan untuk kapasitas mesin 150 CC, diperoleh distribusi Weibull. Oleh karena itu, dilakukan uji kesesuaian distribusi dengan Uji Mann. Pengujian pada Uji Mann adalah sebagai berikut :

Hipotesis :

$$H_0 : T = F(t)$$
$$H_1 : T \neq F(t)$$

Statistik Uji :

Dengan menggunakan persamaan (2.3) diperoleh statistik uji sebagai berikut :

$$M = \frac{252(0,214099 + \cdots + 0)}{251(0,026802 + \cdots + 0 + \cdots)}$$
$$M = 0,917705$$

Dengan tabel distribusi F diperoleh :

$$F_{tabel} = F_{0,05\,;\,504;502} = 1,15816$$

Kriteria pengujian:

Karena nilai $M < F_{0,05\,;\,504;502}$ maka H_0 diterima sehingga dapat disimpulkan bahwa data penggunaan untuk kapasitas mesin 150 CC terdistribusi Weibull.

Perhitungan uji Mann untuk distribusi Weibull dapat dilihat pada Lampiran C.

3. Uji Distribusi untuk Kapasitas Mesin 250 CC

a) Untuk data umur kendaraan

Pada perhitungan data umur untuk kapasitas mesin 250 CC, diperoleh distribusi Eksponensial. Oleh karena itu, dilakukan uji kesesuaian distribusi dengan Uji *Kolmogorov-Smirnov*. Pengujian pada Uji *Kolmogorov-Smirnov* adalah sebagai berikut :

Hipotesis :

$H_0 : F(x) = F_0(x)$ (Data memiliki distribusi teoritis $F_0(x)$)

$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$ (Data tidak mengikuti distribusi teoritis $F_0(x)$)

Statistik Uji :

Dengan menggunakan persamaan (2.2) diperoleh statistik uji sebagai berikut :

$$D = \sup |S(x) - F_0(x)|$$
$$D = 0{,}1324$$

Dengan tabel distribusi D diperoleh :

$$D_{tabel} = D_{0,95\,;\,72} = 0{,}1603$$

Kriteria pengujian:

Karena nilai $D < D_{0,95\,;\,72}$ maka H_0 diterima sehingga dapat disimpulkan bahwa data umur untuk kapasitas mesin 250 CC terdistribusi eksponensial. Perhitungan uji Kolmogorov-Smirnov untuk distribusi Eksponensial dapat dilihat pada Lampiran C.

b) Untuk data penggunaan kendaraan

Pada perhitungan data penggunaan untuk kapasitas mesin 250 CC, diperoleh distribusi Eksponensial. Oleh karena itu, dilakukan uji kesesuaian distribusi dengan Uji *Kolmogorov-Smirnov*. Pengujian pada Uji *Kolmogorov-Smirnov* adalah sebagai berikut :

Hipotesis :

$H_0 : F(x) = F_0(x)$ (Data memiliki distribusi teoritis $F_0(x)$)

$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$ (Data tidak mengikuti distribusi teoritis $F_0(x)$)

Statistik Uji :

Dengan menggunakan persamaan (2.2) diperoleh statistik uji sebagai berikut :

$$D = \sup |S(x) - F_0(x)|$$
$$D = 0{,}0952$$

Dengan tabel distribusi D diperoleh :

$$D_{tabel} = D_{0,95\,;\,72} = 0{,}1603$$

Kriteria pengujian:

Karena nilai $D < D_{0,95\,;\,72}$ maka H_0 diterima sehingga dapat disimpulkan bahwa data umur untuk kapasitas mesin 250 CC terdistribusi Eksponensial. Perhitungan uji Kolmogorov-Smirnov untuk distribusi Eksponensial dapat dilihat pada Lampiran C.

4.4 Estimasi Parameter Distribusi Kerusakan

Pada tahap ini dilakukan penentuan estimasi parameter distribusi kerusakan berdasarkan data kerusakan masing-masing kapasitas mesin kendaraan bermotor. Estimasi parameter dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Estimation.* Estimasi parameter untuk masing-masing kapasitas kendaraan bermotor adalah sebagai berikut

4.4.1 Estimasi Parameter Distribusi Weibull

Untuk mengestimasi parameter salah satu metode yang digunakan yaitu dengan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Diketahui fungsi padat peluang untuk distribusi Weibull yaitu sebagai berikut :

$$f(u,w) = \frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}} e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} u^{\beta_1 - 1} w^{\beta_2 - 1}$$

berdasarkan fungsi kepadatan peluang distribusi Weibull, diperoleh fungsi *likelihood* sebagai berikut

$$L(\hat{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f_i(u,w)$$

dengan $\hat{\theta} = \theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}} e^{-\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} u_i^{\beta_1 - 1} w_i^{\beta_2 - 1}$$

$$= \left(\frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}}\right)^n exp\left(\sum_{i=1}^{n} - \left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2} \prod_{i=1}^{n} u_i^{\beta_1 - 1} w_i^{\beta_2 - 1}\right)$$

fungsi *ln likelihood* :

$$\ln L\left(\hat{\theta}\right) = \ln\left[\left(\frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}}\right)^n exp\ \left(\sum_{i=1}^{n} - \left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2} - \prod_{i=1}^{n} u_i^{\beta_1 - 1} w_i^{\beta_2 - 1}\right)\right]$$

$$= \ln\left(\frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}}\right)^n + \ln\exp\left(\sum_{i=1}^{n} - \left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)$$

$$+ \ln\sum_{i=1}^{n}(u_i)^{\beta_1 - 1} + \ln\sum_{i=1}^{n}(w_i)^{\beta_2 - 1}$$

$$= n\ln\left(\frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}}\right)^n + \left(\sum_{i=1}^{n} - \left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right) +$$

$$(\beta_1 - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln(u_i) + (\beta_2 - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln(w_i)$$

$$= n(\ln\beta_1 + \ln\beta_2 - \beta_1\ln\theta_1 - \beta_2\ln\theta_2) + (\beta_1 - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln(u_i)$$

$$+(\beta_2 - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln(w_i) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}$$

(4.4.1)

Untuk mendapatkan parameter taksiran $\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2$ maka persamaan (4.4.1) diturunkan terhadap parameter-parameter tersebut kemudian disamadenganankan nol, sehingga

$$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \theta_1} = -n\frac{\beta_1}{\theta_1} + \frac{\beta_1}{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right) = 0 \tag{4.4.2}$$

$$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \theta_2} = -n\frac{\beta_2}{\theta_2} + \frac{\beta_2}{\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right) = 0 \tag{4.4.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \beta_1} &= \frac{n}{\beta_1} - n\ln\theta_1 + \sum_{i=1}^{n}\ln(u_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \beta_2} &= \frac{n}{\beta_2} - n\ln\theta_2 + \sum_{i=1}^{n}\ln(w_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2} ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Persamaan (4.4.2), (4.4.3), (4.4.4), (4.4.5) yang ditaksir menghasilkan persamaan non linear, sehingga untuk mendapatkan nilai parameter menggunakan metode newton raphson.

Misalkan,

$$H_1(\hat{\theta}) = \frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \theta_1}, \quad H_2(\hat{\theta}) = \frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \theta_2}$$
$$H_3(\hat{\theta}) = \frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \beta_1}, \quad H_4(\hat{\theta}) = \frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \beta_2}$$

Berdasarkan definisi (2.26) maka :

$$\theta_1^{(i)} = \theta_1^{(i-1)} + e_1^{(i-1)}$$
$$\theta_2^{(i)} = \theta_2^{(i-1)} + e_2^{(i-1)}$$
$$\beta_1^{(i)} = \beta_1^{(i-1)} + e_3^{(i-1)}$$

$$\beta_2^{(i)} = \beta_2^{(i-1)} + e_4^{(i-1)}$$

Dimana :

$$e_1^{(i-1)} = \frac{\begin{vmatrix} -H_1(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ -H_2(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ -H_3(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ -H_4(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_2}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_3}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_4}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \end{vmatrix}}$$

$$e_2^{(i-1)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & -H_1(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_2}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & -H_2(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_3}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & -H_3(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_4}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & -H_4(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_2}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_3}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_4}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \end{vmatrix}}$$

$$e_3^{(i-1)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & -H_1(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_2}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & -H_2(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_3}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & -H_3(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_4}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & -H_4(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_2}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_3}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_4}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \end{vmatrix}}$$

$$e_4^{(i-1)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & -H_1(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_2}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & -H_2(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_3}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & -H_3(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_4}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & -H_4(\hat{\theta}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_2}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_2}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_3}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \\ \frac{\partial H_4}{\partial \theta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_1}(\hat{\theta}) & \frac{\partial H_4}{\partial \beta_2}(\hat{\theta}) \end{vmatrix}}$$

Dengan nilai setiap matriks errornya tertera pada lampiran D dan dengan menggunakan software *matlab* dengan *source code* pada Lampiran E didapatkan parameter untuk kapasitas mesin 150 CC yaitu $\theta_1 = 0{,}661620$; $\theta_2 =$

$0{,}422155$; $\beta_1 = 0{,}200122$; $\beta_2 = 0{,}182901$. Sedangkan untuk kapasitas mesin 125 CC yaitu $\theta_1 = 0{,}599821$; $\theta_2 = 0{,}311333$; $\beta_1 = 0{,}228202$; $\beta_2 = 0{,}186048$.

4.4.2 Estimasi Parameter Distribusi Eksponensial

Untuk mengestimasi parameter salah satu metode yang digunakan yaitu dengan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Diketahui fungsi padat peluang untuk distribusi eksponensial yaitu sebagai berikut :

$$f(x,y) = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 u - \lambda_2 w}$$

berdasarkan fungsi kepadatan peluang distribusi eksponensial, diperoleh fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$L(\hat{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f_i(u,w)$$

dengan $\hat{\theta} = \lambda_1, \lambda_2$

$$= \prod_{i=1}^{n} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 u - \lambda_2 w}$$

$$= (\lambda_1\lambda_2)^n \exp\left(\sum_{i=1}^{n} -(\lambda_1 u) - (\lambda_2 w)\right)$$

Fungsi *ln likelihood* :

$$\ln L\,(\hat{\theta}) = \ln\left((\lambda_1\lambda_2)^n \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\big(-(\lambda_1 u_i) - (\lambda_2 w_i)\big)\right)\right)$$

$$= \text{n} \ln(\lambda_1\lambda_2) + \ln\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\big(-(\lambda_1 u_i) - (\lambda_2 w_i)\big)\right)$$

$$= n\ln(\lambda_1\lambda_2) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_1 u_i - \sum_{i=1}^{n}\lambda_2 w_i \qquad (4.4.6)$$

Untuk mendapatkan parameter taksiran λ_1, λ_2 maka persamaan (4.4.6) diturunkan terhadap parameter-parameter tersebut kemudian disamadenganakan nol, sehingga

$$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \lambda_1} = \frac{n}{\lambda_1} - \sum_{i=1}^{n} u_i = 0 \qquad (4.4.7)$$

$$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \lambda_2} = \frac{n}{\lambda_2} - \sum_{i=1}^{n} w_i = 0 \qquad (4.4.8)$$

Persamaan (4.4.7) dan (4.4.8) merupakan persamaan *close form* sehingga persamaannya menjadi sebagai berikut :

$$\lambda_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} u_i}$$

$$\lambda_2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Untuk mendapatkan nilai parameter distribusi Eksponensial maka dilakukan substitusi nilai jumlah datanya kedalam persamaan (4.4.7) sehingga didapatkan hasilnya sebagai berikut :

$$\lambda_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} u_i}$$

$$\lambda_1 = \frac{72}{2763}$$

$$\lambda_1 = 0{,}026059$$

Sehingga didapatkan nilai parameter λ_1 yaitu 0,026059. Sedangkan untuk mendapatkan nilai parameter dari λ_2 maka dengan mensubstitusikan nilai ke dalam persamaan (4.4.8) sehingga hasilnya sebagai berikut :

$$\lambda_2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

$$\lambda_2 = \frac{72}{120442}$$

$$\lambda_2 = 0{,}000598$$

Dari substitusi persamaan (4.4.8) didapatkan nilai parameter λ_2 yaitu 0,000598.

4.5 Reliabilitas

Reliabilitas menyatakan peluang mesin untuk dapat beroperasi dalam kurun waktu tertentu. Reliabilitas diartikan sebagai peluang mesin dapat beroperasi selama lebih dari kurun waktu yang ditentukan. Perhitungan reliabilitas untuk masing-masing distribusi kendaraan adalah sebagai berikut :

4.5.1 Reliabilitas Distribusi Weibull

Setelah sebelumnya didapatkan distribusi yang sesuai untuk data waktu dan data penggunaan untuk masing-masing kapasitas mesin tiap CC yang berbeda-beda maka langkah selanjutnya yaitu menentukan elemen reliabilitas pada masing-masing distribusi. Berdasarkan persamaan (2.4) untuk fungsi reliabilitas suatu item dan persamaan (4.2.2) untuk fungsi kepadatan kumulatif distribusi Weibull maka reliabilitas suatu produk dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$R(u,w) = 1 - F(u,w)$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} - e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}\right)$$

$$= e^{-\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} + e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} - e^{-\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} \qquad (4.5.1)$$

4.5.2 Elemen Reliabilitas Distribusi Eksponensial

Reliabilitas mesin yang berdistribusi Eksponensial diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (2.4) untuk fungsi reliabilitas dan persamaan (4.2.4) untuk fungsi kepadatan kumulatif. Sehingga fungsi reliabilitas mesin yang berdistribusi Eksponensial dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$R(u,w) = 1 - F(u,w)$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\lambda_2 w} - e^{-\lambda_1 u} + e^{-\lambda_1 u - \lambda_2 w}\right)$$
$$= e^{-\lambda_1 u} + e^{-\lambda_2 w} - e^{-\lambda_1 u - \lambda_2 w} \qquad (4.5.2)$$

4.6 Laju Kerusakan

Dengan mengetahui fungsi padat probabilitas dan fungsi reliabilitasnya, dapat diketahui laju kerusakan pada kapasitas mesin dengan CC yang berbeda-beda dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan PDF dan reliabilitas kedalam persamaan (2.5). Berdasarkan pada persamaan (4.2.1) dan (4.5.1) untuk distribusi Weibull serta persamaan (4.2.3) dan (4.5.2) maka laju kerusakan dapat dirumuskan sebagai berikut :

4.6.1 Laju Kerusakan Distribusi Weibull

Untuk menentukan ekspektasi kerusakan mesin harus mendapatkan fungsi kerusakan dulu. Untuk distribusi Weibull laju kerusakannya dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$h(x,y) = \frac{f(x,y)}{R(x,y)}$$

dengan memisalkan $u = x$ dan $w = y$, didapatkan persamaan untuk laju kerusakan adalah sebagai berikut :

$$= \frac{\frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}} e^{-\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} x^{\beta_1 - 1} y^{\beta_2 - 1}}{e^{-\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} + e^{-\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} - e^{-\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}}$$

$$= \frac{\frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}} x^{\beta_1 - 1} y^{\beta_2 - 1}}{e^{\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} \left(e^{-\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} + e^{-\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} - e^{-\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}} \; x^{\beta_1-1}y^{\beta_2-1}}{e^{\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} + e^{\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} - e^0}$$

$$h(x,y) = \frac{\frac{\beta_1\beta_2}{\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}} \; x^{\beta_1-1}y^{\beta_2-1}}{e^{\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} + e^{\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} - 1} \qquad (4.6.1)$$

4.6.2 Laju Kerusakan Distribusi Eksponensial

Untuk menentukan ekspektasi kerusakan mesin harus mendapatkan fungsi kerusakan dulu. Untuk distribusi Eksponensial laju kerusakannya dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$h(x,y) = \frac{f(x,y)}{R(x,y)}$$

dengan memisalkan $u = x$ dan $w = y$, didapatkan persamaan untuk laju kerusakan distribusi Eksponensial adalah sebagai berikut :

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}}{e^{-\lambda_1 x} + e^{-\lambda_2 y} - e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}}$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y}\left(e^{-\lambda_1 x} + e^{-\lambda_2 y} - e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}\right)}$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 y} - e^0}$$

$$h(x,y) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{e^{\lambda_1 y} + e^{\lambda_2 y} - 1} \qquad (4.6.2)$$

4.7 Ekspektasi Jumlah Kerusakan

Untuk merumuskan kerusakan pada garansi dua dimensi, maka langkah selanjutnya yang harus dikerjakan yaitu dengan mengintegral laju kerusakan sesuai dengan persamaan (2.24) sehingga di dapatkan persamaan ekspektasi jumlah kerusakan adalah sebagai berikut :

4.7.1 Perumusan Ekspektasi Kerusakan Distribusi Weibull

Untuk mendapatkan ekspektasi kerusakan setiap distribusi yaitu dengan mengintegralkan persamaan laju kerusakan sehingga rumusnya sebagai berikut :

$$M(u,w) = \int_0^w \int_0^u h(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^w \int_0^u \frac{\frac{\beta_1 \beta_2}{\theta_1^{\beta_1} \theta_2^{\beta_2}} \; x^{\beta_1 - 1} y^{\beta_2 - 1}}{e^{\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} + e^{\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} - 1} dx\, dy \qquad (4.7.1)$$

Agar persamaan (4.7.1) menjadi sederhana maka tahap selanjutnya yaitu dengan memisalkannya menjadi :

$j = \frac{x}{\theta_1}$, sehingga $dj = \frac{1}{\theta_1}\, dx$

$m = \frac{y}{\theta_2}$, sehingga $dm = \frac{1}{\theta_2}\, dy$

Sehingga batasnya menjadi :

$x = 0$, sehingga j$= 0$

$x = u$, sehingga j$= \frac{u}{\theta_1}$

$y = 0$, sehingga $m = 0$

$y = w$, sehingga $m = \frac{w}{\theta_2}$

Maka persamaan (4.7.1) menjadi :

$$M(u,w) = \int_0^{\frac{w}{\theta_2}} \int_0^{\frac{u}{\theta_1}} \frac{\beta_1 \beta_2 \; (\theta_1 j)^{\beta_1 - 1} (\theta_2 m)^{\beta_2 - 1} \theta_1 \theta_2}{\theta_1^{\beta_1} \theta_2^{\beta_2} \; e^{(j)^{\beta_1}} + e^{(m)^{\beta_2}} - 1} dj\, dm$$

$$= \int_0^{\frac{w}{\theta_2}} \int_0^{\frac{u}{\theta_1}} \frac{\beta_1\beta_2 \ (\theta_1 j)^{\beta_1-1}(\theta_2 m)^{\beta_2-1}}{\theta_1^{\beta_1-1}\theta_2^{\beta_2-1} \ e^{(j)^{\beta_1}} + e^{(m)^{\beta_2}} - 1} dj \, dm$$

$$= \int_0^{\frac{w}{\theta_2}} \int_0^{\frac{u}{\theta_1}} \frac{\beta_1\beta_2 \ (j)^{\beta_1-1}(m)^{\beta_2-1}}{e^{(j)^{\beta_1}} + e^{(m)^{\beta_2}} - 1} dj \, dm \qquad (4.7.2)$$

Untuk menyederhanakan persamaan (4.7.2) maka dimisalkan sebagai berikut :

$p = j^{\beta_1}$, sehingga $dp = \beta_1 j^{(\beta_1-1)} \, dj$

$$dj = \frac{1}{\beta_1 j^{(\beta_1-1)}} \, dp$$

$s = m^{\beta_2}$, sehingga $ds = \beta_2 m^{(\beta_2-1)} \, dm$

$$dm = \frac{1}{\beta_2 m^{(\beta_2-1)}} \, ds$$

Selanjutnya akan didapatkan batasnya yaitu :

$j = 0$, sehingga $p = 0$

$j = \frac{u}{\theta_1}$, sehingga $p = \left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}$

$m = 0$, sehingga $s = 0$

$m = \frac{w}{\theta_2}$, sehingga $s = \left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}$

Maka persamaan (4.7.2) menjadi :

$$M(u,w) = \int_0^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} \int_0^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} \frac{\beta_1\beta_2 \ (j)^{\beta_1-1}(m)^{\beta_2-1}}{e^p + e^s - 1} \frac{1}{\beta_1 j^{(\beta_1-1)}} \frac{1}{\beta_2 m^{(\beta_2-1)}} \, dp \, ds$$

$$M(u,w) = \int_0^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} \int_0^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} \frac{1}{e^p + e^s - 1}\ dp\, ds \qquad (4.7.3)$$

Untuk mempermudah dalam mengerjakan maka langkah pertama yang dilakukan yaitu mengintegralkan persamaan (4.7.3) terhadap p terlebih dahulu, sehingga :

$$\int \frac{1}{e^p + e^s - 1}\ dp \qquad (4.7.4)$$

Selanjutnya yaitu dengan memisalkan sebagai berikut persamaan (4.7.4), sehingga didapatkan sebagai berikut :

$z = e^p + e^s - 1$, sehingga $e^p = z - e^s + 1$

$dz = e^p\ dp$

$dz = (z - e^s + 1)\ dp$

$$dp = \frac{1}{z - e^s + 1}\ dz$$

Sehingga setelah dilakukan permisalan persamaan (4.7.4) menjadi sebagai berikut :

$$\int \frac{1}{e^p + e^s - 1}\ dp = \int \frac{1}{z} \frac{1}{z - e^s + 1}\ dz$$

$$= \int \frac{1}{z(z - e^s + 1)}\ dz \qquad (4.7.5)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (4.7.5) dilakukan dengan menggunakan Teknik pecah parsial :

$$\frac{1}{z(z - e^s + 1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - e^s + 1}$$

$$1 = A(z - e^s + 1) + Bz$$

$$1 = (A + B)z + A(-e^s + 1)$$

Selanjutnya yaitu disubstitusikan dengan $z = 0$ sehingga di dapatkan :

$A + B = 0,$ jadi $B = -A$

$A(-e^s + 1) = 1$, dengan $A = \frac{1}{1-e^s}$ dan $B = \frac{1}{e^s-1}$

$$\frac{1}{z(z - e^s + 1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - e^s + 1}$$

$$\int \frac{1}{z(z - e^s + 1)}\, dz = \int \frac{\frac{1}{1-e^s}}{z} + \frac{\frac{1}{e^s - 1}}{z - e^s + 1}\, dz$$

$$= \int \frac{\frac{1}{1-e^s}}{z}\, dz + \int \frac{\frac{1}{e^s - 1}}{z - e^s + 1}\, dz$$

$$= \frac{1}{1 - e^s} \ln|z| + \frac{1}{e^s - 1} \ln|z - e^s + 1|$$

$$= \frac{1}{1-e^s} \ln|e^p + e^s - 1| + \frac{1}{e^s-1} \ln|e^p|$$

$$= \frac{-\ln|e^p + e^s - 1|}{e^s - 1} + \frac{\ln|e^p|}{e^s - 1} + C$$

$$\int \frac{1}{e^p+e^s-1}\, dp = \frac{-\ln|e^p+e^s-1|}{e^s-1} + \frac{\ln|e^p|}{e^s-1} + C \qquad (4.7.6)$$

Langkah selanjutnya yaitu dengan mensubstitusikan batas integralnya terhadap p ke dalam persamaan (4.7.4), sehingga persamaannya menjadi :

$$\int_0^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} \frac{1}{e^p + e^s - 1}\, dp$$

$$= \left(\frac{-\ln|e^p + e^s - 1|}{e^s - 1} + \frac{\ln|e^p|}{e^s - 1}\right)_0^{\left(\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)}$$

$$= \left[\frac{-\ln\left| e^{\left(\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)} + e^s - 1 \right|}{e^s - 1} + \frac{ln\left[e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} \right]}{e^s - 1} \right] - \left[-\frac{\ln|e^s|}{e^s - 1} \right]$$

$$= \frac{-\ln\left| e^{\left(\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)} + e^s - 1 \right|}{e^s - 1} + \frac{ln\left| e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} \right|}{e^s - 1} + \frac{\ln|e^s|}{e^s - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{e^s - 1} - \frac{\ln\left| e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^s - 1 \right|}{e^s - 1} + \frac{s}{e^s - 1} \qquad (4.7.7)$$

Setelah mensubstitusikan persamaan (4.7.7) lalu selanjutnya yaitu mensubstitusikan ke dalam persamaan (4.7.3), sehingga persamaannya menjadi :

$$M(u,w) = \int_0^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} \left(\frac{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{e^s - 1} - \frac{\ln\left| e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^s - 1 \right|}{e^s - 1} + \frac{s}{e^s - 1} \right) ds \qquad (4.7.8)$$

Untuk mempermudah pengintegralan pada persamaan (4.7.8) maka langkah awal yaitu dengan menyelesaikan integralnya, sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$M(u,w) = \int \left(\frac{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{e^s - 1} - \frac{\ln\left| e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^s - 1 \right|}{e^s - 1} + \frac{s}{e^s - 1} \right) ds$$

$$M(u,w) = \int \frac{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{e^s - 1} ds - \int \frac{\ln\left| e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^s - 1 \right|}{e^s - 1} ds$$
$$+ \int \frac{s}{e^s - 1} ds \qquad (4.7.9)$$

Pada persamaan (4.7.9) akan dilakukan pengintegralan dengan menyelesaikan masing-masing integralnya. Penyelesaian integral pertama pada persamaan (4.7.9) yaitu :

$$\int \frac{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{e^s - 1} ds = \left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1} \int \frac{1}{e^s - 1} ds$$

Misalkan bahwa, $b = e^s - 1$ sehingga $e^s = b + 1$

$db = e^s ds$

$$ds = \frac{1}{e^s} dt = \frac{1}{b+1} db$$

Sehingga persamaanya menjadi :

$$\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1} \int \frac{1}{e^s - 1} ds = \left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1} \int \frac{1}{b(b+1)} db \qquad (4.7.10)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (4.7.10) dapat diselesaikan dengan Teknik pecah parsial , sehingga :

$$\frac{1}{b(b+1)} = \frac{A}{b} + \frac{B}{t+1}$$

$1 = A(b+1) + Bb$

$1 = (A+B)b + A$

Selanjutnya akan disubstitusikan dengan $b = 0$, sehingga didapatkan :

$A + B = 0$, diperoleh $B = -A$

$$A = 1, B = -1$$

$$\frac{1}{b(b+1)} = \frac{A}{b} + \frac{B}{b+1}$$

$$=\frac{1}{b}-\frac{1}{b-1}$$

Sehingga penyelesaian persamaan (4.7.10) menjadi :

$$\int \frac{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{e^s-1}\,ds=\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\int \frac{1}{b(b+1)}\,db$$

$$=\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\left[\int \frac{1}{b}\,db-\frac{1}{(b+1)}\,db\right]$$

$$=\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\left[(\ln|b|+c)-(\ln|b+1|+c)\right]$$

$$=\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\left(\ln|e^s-1|-\ln|e^s|+c\right)$$

$$=\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\left(\ln|e^s-1|-s+c\right) \qquad (4.7.11)$$

Selanjutnya yaitu menyelesaikan integral kedua pada persamaan (4.7.9), sehingga persamaannya menjadi yaitu :

misalkan, $v=\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}$, sehingga :

$$\int \frac{\ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}+e^s-1\right|}{e^s-1}\,ds$$

$$=\int \frac{\ln|e^v+e^s-1|}{e^s-1}\,ds \qquad (4.7.12)$$

misalkan , $h=e^v+e^s-1$, sehingga

$e^s-1=h-e^v$ atau $e^s=h-e^v+1$

dengan $dh=e^s ds$

$$ds=\frac{1}{e^s}\,dh$$

$$ds=\frac{1}{h-e^v+1}\,dh$$

Sehingga persamaan (4.7.12) menjadi,

$$\int \frac{\ln|e^v+e^s-1|}{h-e^v+1}ds = \int \frac{\ln|h|}{(h-e^v)(h-e^v+1)}dh \qquad (4.7.13)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (4.7.13) menggunakan teknik pecah parsial sehingga menjadi :

$$\frac{1}{(h-e^v)(h-e^v+1)} = \frac{A}{(h-e^v)} + \frac{B}{(h-e^v+1)}$$

$$1 = A\big((h-e^v+1)\big) + B(h-e^v)$$

$$1 = (A+B)h - (A+B)e^v + A$$

selanjutnya mensubstitusikan , dengan $h = 0$:

$$A + B + 0, \text{ didapat } B = -A$$

$$A = 1 \quad \text{didapat} \quad B = -1$$

$$\frac{1}{(h-e^v)(h-e^v+1)} = \frac{1}{(h-e^v)} - \frac{1}{(h-e^v+1)}$$

sehingga persamaan (4.7.13) menjadi :

$$\int \frac{\ln|h|}{(h-e^v)(h-e^v+1)}dh$$

$$= \int \ln|h| \left(\frac{1}{(h-e^v)} - \frac{1}{(h-e^v+1)}\right)dh$$

$$= \int \frac{\ln|h|}{h-e^v}dh - \int \frac{\ln|h|}{h-e^v+1}dh \qquad (4.7.14)$$

Persamaan (4.7.14) dapat diselesaikan dengan mengintegral persamaan pertama terlebih dahulu sehingga :

$$\int \frac{\ln|h|}{h-e^v}dh = dilog\left(\frac{-h+e^v}{e^v}\right) + \ln|h| \ln\left|\frac{-h+e^v}{e^v}\right| + C \qquad (4.7.15)$$

Selanjutnya penyelesaian pada integral kedua pada persamaan (4.7.14), sehingga menjadi :

$$\int \frac{\ln|h|}{h-e^v+1}dh = dilog\left(\frac{h-e^k+1}{1-e^v}\right)$$

$$+\ln|h|\ln\left|\frac{h-e^{v}+1}{1-e^{v}}\right|+C$$

(4.7.16)

sehingga persamaannya menjadi :

$$=dilog\left(\frac{-h+e^{v}}{e^{v}}\right)+\ln|h|\ln\left|\frac{-h+e^{v}}{e^{v}}\right|$$

$$-dilog\left(\frac{h-e^{k}+1}{1-e^{v}}\right)-\ln|h|\ln\left|\frac{h-e^{v}+1}{1-e^{v}}\right|+C$$

(4.7.17)

Dengan mensubstitusikan nilai h dan v kedalam persamaan (4.7.13) maka persamaannya menjadi :

$$\int\frac{\ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}+e^{s}-1\right|}{e^{s}-1}ds=dilog\left(\frac{1-e^{s}}{e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right)$$

$$+\ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}+e^{s}-1\right|\ln\left|\frac{1-e^{s}}{e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right|-dilog\left(\frac{e^{s}}{1-e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right)$$

$$-ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}+e^{s}-1\right|ln\left|\frac{e^{s}}{1-e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right|+C \qquad (4.7.18)$$

Selanjutnya penyelesaian integral ketiga pada persamaan (4.7.9), sehingga menjadi :

$$\int\frac{s}{e^{s}-1}ds$$

misal, $f=e^{s}-1$ sehingga $e^{s}=f+1$

$s=\ln|f+1|$

dengan, $df=e^{s}ds$

$$ds = \frac{1}{e^s} df$$

$$ds = \frac{1}{f+1} df$$

$$\int \frac{s}{e^s - 1} ds = \int \frac{\ln|f+1|}{f(f+1)} df \qquad (4.7.19)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (4.7.19), maka menggunakan teknik pecah parsial sehingga menjadi :

$$\frac{1}{f(f+1)} = \frac{A}{f} + \frac{B}{f+1}$$

$$1 = A(f+1) + Bf$$

$$1 = (A+B)f + A$$

substitusikan $f = 0$ sehingga,

$A + B = 0$, sehingga $B = -A$

$A = 1$, sehingga $B = -1$

$$\frac{1}{f(f+1)} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f+1}$$

sehingga persamaannya menjadi :

$$\int \frac{\ln|f+1|}{f(f+1)} df = \int \ln|f+1| \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f+1}\right) df$$

$$= \int \frac{\ln|f+1|}{f} df - \int \frac{\ln|f+1|}{f+1} df \qquad (4.7.20)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (4.7.20) yaitu dengan mengintegral masing-masing persamaan. Langkah pertama mengintegral persamaan pertama dan didapatkan :

$$\int \frac{\ln|f+1|}{f} df = -dilog\,(f+1) + C \qquad (4.7.21)$$

Selanjutnya menyelesaikan integral kedua, sehingga didapatkan persamaan :

$$\int \frac{\ln|f+1|}{f+1} df \qquad (4.7.22)$$

misalkan, $g = \ln|f+1|$

$$dg = \frac{1}{f+1} df$$

sehingga persamaan (4.7.22) menjadi :

$$\int \frac{\ln|f+1|}{f+1} df = \int g \, dg$$
$$= \frac{1}{2} g^2 + C$$
$$= \frac{1}{2} (\ln|f+1|)^2 + C$$

Selanjutnya didapatkan persamaan yaitu :

$$\int \frac{\ln|f+1|}{f(f+1)} df = -dilog\ (f+1) - \frac{1}{2} (\ln|f+1|)^2 + C \tag{4.7.23}$$

dengan mensubstitusikan nilai f maka didapatkan :

$$\int \frac{s}{e^s - 1} ds = -dilog\ (e)^s - \frac{1}{2} (ln|e^s|^2)$$
$$= -dilog(e^s) - \frac{1}{2} s^2 + C \tag{4.7.24}$$

Dengan mengambil hasil dari persamaan (4.7.11) , (4.7.18), dan (4.8.24) maka didapatkan hasil dari persamaan (4.8.9) yaitu

$$M(u,w) = \int \frac{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{e^s - 1} ds - \int \frac{\ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^s - 1\right|}{e^s - 1} ds$$
$$+ \int \frac{s}{e^s - 1} ds$$

$$= \left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1} (\ln|e^s - 1| - s) - dilog\left(\frac{1 - e^s}{e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right) - dilog(e^s)$$

$$- ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^s - 1\right| ln\left|\frac{1 - e^s}{e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right| + dilog\left(\frac{e^s}{1 - e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right)$$

$$+ ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^s - 1\right| ln\left|\frac{e^s}{1 - e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right| - \frac{1}{2}s^2 + C$$

(4.7.25)

dengan mensubstitusikan batas pada persamaan (4.7.25) persamaannya menjadi :

$$M(u, w) = \int_0^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} \int \frac{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{e^s - 1} ds + \int \frac{s}{e^s - 1}\, ds - \int \frac{\ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^s - 1\right|}{e^s - 1} ds$$

(4.7.26)

$$= \left|\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1} (\ln|e^s - 1| - s) - dilog\left(\frac{1 - e^s}{e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right) - \frac{1}{2}s^2\right.$$

$$\left. + dilog\left(\frac{e^s}{1 - e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right) + ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} + e^s - 1\right| - dilog(e^s)\right|$$

$$-\ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}+e^{s}-1\right|\ln\left|\frac{1-e^{s}}{e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right|ln\left|\frac{e^{s}}{1-e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right|\Bigg|_0^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}$$

Sehingga dengan mensubstitusikan batas pada (4.7.26) sehingga persamaan (4.8.1) menjadi :

$$=\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\left(\ln\left|e^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}-1\right|-\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)+\frac{1}{6}\pi^2-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)^2$$

$$-dilog\left(\frac{1-e^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}}{e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right)+dilog\left(\frac{e^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}}{1-e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right)$$

$$-\ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}+e^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}-1\right|\ln\left|\frac{1-e^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}}{e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right|$$

$$-dilog\left(e^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}\right)-dilog\left(\frac{1}{1-e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right)$$

$$-ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}\right|\ln\left|\frac{1}{1-e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right|$$

$$+\ln\left|e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}+e^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}-1\right|ln\left|\frac{e^{\left(\frac{w}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}}{1-e^{\left(\frac{u}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}}\right| \tag{4.7.27}$$

Maka persamaan (4.7.27) merupakan ekspetasi jumlah kerusakan pada garansi dua dimensi untuk distribusi Weibull.

4.7.2 Perumusan Ekspektasi Kerusakan Distribusi Eksponensial

Untuk mendapatkan ekspektasi kerusakan setiap distribusi yaitu dengan mengintegralkan persamaan laju kerusakan sehingga rumusnya sebagai berikut :

$$\begin{aligned} M(u,w) &= \int_0^w \int_0^u h(x,y)dx\,dy \\ &= \int_0^w \int_0^u \frac{\lambda_1\lambda_2}{e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 y} - 1}\,dx\,dy \end{aligned} \tag{4.7.28}$$

untuk menyederhanakan persamaan (4.7.28) maka dilakukan permisalan yaitu dengan ,

Misalkan :

$g = \lambda_1 x,$ dengan $dg = \lambda_1 dx$

$$dx = \frac{1}{\lambda_1}\,dg$$

$f = \lambda_2 y,$ dengan $df = \lambda_2 dy$

$$dy = \frac{1}{\lambda_2}\,df$$

batas :

$x = 0$, sehingga $g = 0$

$x = u$, sehingga $g = \lambda_1 u$

$y = 0$, sehingga $f = 0$

$y = w$, sehingga $f = \lambda_2 w$

sehingga persamaan (4.7.28) menjadi :

$$M(u,w) = \int_0^{\lambda_2 w} \int_0^{\lambda_1 u} \frac{\lambda_1\lambda_2}{(e^g + e^f - 1)}\,\frac{1}{\lambda_1}\,\frac{1}{\lambda_2}\,dg\,df$$

$$= \int_0^{\lambda_2 w} \int_0^{\lambda_1 u} \frac{1}{(e^g + e^f - 1)} \, dg \, df \qquad (4.7.29)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (4.7.29) langkah awal yang dilakukan yaitu mengintegralkan terhadap g terlebih dahulu, sehingga

$$= \int \frac{1}{(e^g + e^f - 1)} \, dg \qquad (4.7.30)$$

misalkan :

$r = e^g + e^f - 1$, sehingga $e^g = r - e^f + 1$

$$dr = e^g \, dg$$

$$dr = \left(r - e^f + 1\right) dg$$

$$dg = \frac{1}{r - e^f + 1} \, dr$$

sehingga persamaan (4.7.430) menjadi :

$$\int \frac{1}{(e^g + e^f - 1)} \, dg = \int \frac{1}{r} \frac{1}{r - e^f + 1} \, dr$$

$$= \int \frac{1}{r(r - e^f + 1)} \, dr \qquad (4.7.31)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (4.7.31) menggunakan teknik pecahan parsial sebagai berikut :

$$\frac{1}{r(r - e^f + 1)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r - e^f + 1}$$

$$1 = A\left(r - e^f + 1\right) + Br$$

$$1 = (A + B)r + A(-e^f + 1)$$

Untuk memudahkan dalam penyelesaian maka dilakukan substitusi $r = 0$ sehingga didapatkan :

$A + B = 0$, jadi $B = -A$

$A\left(-e^f + 1\right) = 1$ sehingga $A = \frac{1}{1 - e^f}$ dan $B = \frac{1}{e^f - 1}$

$$\frac{1}{r(r - e^f + 1)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r - e^f + 1}$$

$$= \int \frac{1}{r(r-e^f+1)}\, dr$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{1-e^f}}{r} + \frac{\frac{1}{e^f-1}}{(r-e^f+1)} \right) dr$$

$$= \int \frac{\frac{1}{1-e^f}}{r}\, dr + \int \frac{\frac{1}{e^f-1}}{(r-e^f+1)}\, dr$$

$$= \frac{1}{1-e^f} \int \frac{1}{r}\, dr + \frac{1}{e^f-1} \int \frac{1}{r-e^f+1}\, dr$$

$$= \frac{1}{1-e^f} \ln|r| + \frac{1}{e^f-1} \ln|r-e^f+1|$$

$$= \frac{1}{1-e^f} \ln\left|e^g+e^f-1\right| + \frac{1}{e^f-1} \ln|e^g|$$

$$= -\frac{ln\left|e^g+e^f-1\right|}{e^f-1} + \frac{\ln|e^g|}{e^f-1} + \mathrm{C}$$

Sehingga persamaan (4.7.29) menjadi :

$$= \int_0^{\lambda_1 u} \frac{1}{(e^g+e^f-1)}\, dg$$

$$= \left[-\frac{ln\left|e^g+e^f-1\right|}{e^f-1} + \frac{\ln|e^g|}{e^f-1} \right]_0^{\lambda_1 u}$$

$$= \left[\frac{-\ln|e^{\lambda_1 u}+e^f-1}{e^f-1} + \frac{\ln|e^{\lambda_1 u}|}{e^f-1} \right] - \left[-\frac{\ln|e^f|}{e^f-1} \right]$$

$$= \left[\frac{-\ln|e^{\lambda_1 u}+e^f-1}{e^f-1} + \frac{\ln|e^{\lambda_1 u}|}{e^f-1} + \frac{f}{e^f-1} \right] \tag{4.7.32}$$

kemudian substitusikan persamaan (4.7.32) kedalam persamaan (4.7.29) sehingga menjadi :

$$M(u,w) = \int_0^{\lambda_2 w} \left(\frac{\lambda_1 u}{e^f-1} - \frac{\ln|e^{\lambda_1 u}+e^f-1}{e^f-1} + \frac{f}{e^f-1}\right) df \qquad (4.7.33)$$

untuk menyelesaikan persamaan (4.7.33) dilakukan integral terlebih dahulu sehingga :

$$\begin{aligned} M(u,w) &= \int \left(\frac{\lambda_1 u}{e^f-1} - \frac{\ln|e^{\lambda_1 u}+e^f-1}{e^f-1} + \frac{f}{e^f-1}\right) df \\ &= \int \frac{\lambda_1 u}{e^f-1}\, df - \int \frac{\ln|e^{\lambda_1 u}+e^f-1}{e^f-1}\, df \\ &= \int \frac{\lambda_1 u}{e^f-1}\, df - \int \frac{\ln|e^{\lambda_1 u}+e^f-1}{e^f-1}\, df \\ &\quad + \int \frac{f}{e^f-1}\, df \qquad (4.7.34) \end{aligned}$$

untuk menyelesaikan persamaan (4.7.34) maka dilakukan dengan menyelesaikan masing-masing integral. Penyelesaian untuk integral pertama pada persamaan (4.7.34) yaitu sebagai berikut :

$$= \int \frac{\lambda_1 u}{e^f-1}\, df = \lambda_1 u \int \frac{1}{e^f-1}\, df$$

misalkan :

$z = e^f - 1$ sehingga $e^f = z + 1$

$$dz = e^f df$$

$$df = \frac{1}{e^f}\, dz = \frac{1}{z+1}\, dz$$

sehingga didapatkan :

$$\lambda_1 u \int \frac{1}{e^f-1}\, df = \lambda_1 u \int \frac{1}{z(z+1)}\, dz \qquad (4.7.35)$$

untuk menyelesaikan persamaan (4.7.35) yaitu menggunakan teknik pecahan parsial :

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1}$$

$$1 = A(z+1) + Bz$$

$$1 = (A+B)z + A$$

untuk memudahkan maka dilakukan substitusi $z = 0$ sehingga didapatkan :

$A + B = 0$, didapat $B = -A$

$A = 1, \quad B = -1$

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{B}{z-1}$$

sehingga penyelesaian pada persamaan (4.7.35) yaitu :

$$= \lambda_1 u \int \frac{1}{z(z+1)}\, dz = \lambda_1 u \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) dz$$

$$= \lambda_1 u \left[\int \frac{1}{z} dz - \int \frac{1}{z+1}\, dz\right]$$

$$= \lambda_1 u[\ln|z| + C] - [\ln|z+1| + C]$$

$$= \lambda_1 u\left[\ln\left|e^f - 1\right| - \ln\left|e^f\right| + C\right]$$

$$= \lambda_1 u\left[\ln\left|e^f - 1\right| - f + C\right] \qquad (4.7.36)$$

Tahap selanjutnya yaitu menyelesaikan integral kedua pada persamaan (4.7.34), sehingga persamaannya sebagai berikut :

misalkan, $k = \lambda_1 u$ maka,

$$\int \frac{\ln|e^{\lambda_1 u} + e^f - 1}{e^f - 1}\, df = \int \frac{\ln|e^k + e^f - 1}{e^f - 1}\, df \qquad (4.7.37)$$

misal :

$h = e^k + e^f - 1$ sehingga $e^f - 1 = h - e^k$

$$dh = e^{f} df$$

$$e^{f} = h - e^{k} + 1$$

$$df = \frac{1}{e^{f}} dh$$

$$df = \frac{1}{h - e^{k} + 1}\ dh$$

sehingga persamaan (4.7.37) menjadi :

$$\int \frac{\ln|e^{k} + e^{f} - 1}{e^{f} - 1}\ df = \int \frac{\ln|h|}{(h - e^{k})(h - e^{k} + 1)}\ dh \tag{4.7.38}$$

untuk menyelesaikan persamaan (4.7.38) menggunakan teknik pecahan parsial sehingga di dapatkan :

$$\frac{1}{(h - e^{k})(h - e^{k} + 1)} = \frac{A}{(h - e^{k})} + \frac{B}{(h - e^{k} + 1)}$$

$$1 = A\left(h - e^{k} + 1\right) + B\left(h - e^{k}\right)$$

$$1 = (A + B)h - (A + B)e^{k} + A$$

untuk mempermudah penyelesaian maka dilakukan substitusi $h = 0$ sehingga didapatkan :

$A + B = 0,$ didapat $B = -A$

$A = 1,$ didapat $B = -1$

$$\frac{1}{(h - e^{k})(h - e^{k} + 1)} = \frac{1}{(h - e^{k})} - \frac{1}{(h - e^{k} + 1)}$$

sehingga persamaan (4.7.38) menjadi :

$$\int \frac{\ln|h|}{(h - e^{k})(h - e^{k} + 1)}\ dh$$

$$= \int \ln|h| \left(\frac{1}{(h - e^{k})} - \frac{1}{(h - e^{k} + 1)}\right) dh$$

$$= \int \frac{\ln|h|}{h-e^k}\, dh - \int \frac{\ln|h|}{h-e^k+1}\, dh \qquad (4.7.39)$$

untuk menyelesaikan persamaan (4.7.39) yaitu dengan menyelesaikan masing-masing integral. Penyelesaian integral pertama pada persamaan (4.7.39) yaitu sebagai berikut :

$$= \int \frac{\ln|h|}{h-e^k}\, dh$$

$$= \int \frac{1}{h-e^k} \ln|h|\, dh$$

selanjutnya dilakukan substitusi $u = \ln|\mathrm{h} - \mathrm{e}^{\mathrm{k}}|$

$$du = \ln\left|h-e^k\right| dh = \frac{1}{h-e^k}\frac{d}{dh}\left(h-e^k\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dh}(h) + \frac{d}{dh}(-e^k)}{h-e^k} = \frac{1}{h-e^k}$$

dengan,

$$du = \frac{1}{h-e^k}$$

$$dh = \left(h-e^k\right)du$$

$h = e^u + e^k$, lalu kembali pada persamaan

$$\int \frac{\ln|h|}{h-e^k}\, dh = \int \frac{\ln|\mathrm{e}^{\mathrm{u}} + e^k|}{h-e^k}\left(h-e^k\right)du$$

$$= \int \ln\left|e^u + e^k\right| du \qquad (4.7.40)$$

untuk menyelesaikan persamaan (4.7.40) menggunakan integral parsial sehingga didapatkan sebagai berikut :

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

$$f = \ln|e^u + e^k| \qquad g' = 1$$

$$\frac{d}{du}\ln\left|e^u + e^k\right| = \frac{1}{e^u+e^k}\frac{d}{du}\left(e^u+e^k\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{du}\ e^u + \frac{d}{du}\ e^k}{e^u + e^k}$$

$$= \frac{e^u}{e^u + e^k}$$

$$f' = \frac{e^u}{e^u + e^k}$$

$$g = u, g' = 1$$

sehingga persamaan (4.7.40) menjadi :

$$\int \ln\left|e^u + e^k\right| du\ = u \ln\left|e^u + e^k\right| - \int \frac{u\ e^u}{e^u + e^k}\ du \tag{4.7.41}$$

selanjutnya menyelesaikan integral $\int f'g = \int \frac{u\ e^u}{e^u+e^k}\ du$

misal :

$v = e^u + e^k$ sehingga $dv = e^u + e^k\ du$

$$dv\ = e^u du$$

$$du = \frac{1}{e^u}\ dv = e^{-u} dv$$

$$\ln v = \ln |e^u + e^k|$$

$$\ln v = (\ln e^u + \ln e^k)$$

$$u = \ln v - \ln e^k$$

$$u = \ln |v - e^k|$$

selanjutnya penyelesaian integralnya, sehingga :

$$\int \frac{u\ e^u}{e^u + e^k}\ du = \int \frac{\ln\left|v - e^k\right| e^u}{e^u + e^k}\ e^{-u}\ dv$$

$$= \int \frac{\ln |v - e^k|}{e^u + e^k}\ dv$$

$$= \int \frac{\ln |v - e^k|}{v}\ dv$$

$$= \int \frac{\ln\left[|v - e^k|\left(\frac{-e^k}{-e^k}\right)\right]}{v}\, dv$$

$$= \int \ln\left[\frac{\frac{(v - e^k)(-e^k)}{-e^k}}{v}\right] dv$$

$$= \int \ln\left[\frac{(-ve^{-k} + 1)(-e^k)}{v}\right] dv$$

$$= \int \ln\left[\frac{(1 - ve^{-k})(-1)(e^k)}{v}\right] dv$$

$$= \int \frac{\ln(1 - e^{-k}v) + \ln(-1) + \ln e^k}{v}\, dv$$

$$= \int \left(\frac{\ln(1 - e^{-k}v) + \ln(-1) + k}{v}\right) dv$$

$$= \int \frac{\ln(1 - e^{-k}v)}{v} dv + \int \frac{\ln(-1) + k}{v}\, dv \qquad (4.7.42)$$

selanjutnya menyelesaikan masing-masing integral pada persamaan (4.7.42), untuk persamaan pertama di integralkan sehingga menjadi berikut ini :

$$= \int \frac{\ln(1 - e^{-k}v)}{v} dv$$

misalkan $w = e^{-k}v$ $\qquad dv = e^{-k}\ \frac{d}{dv} v$

$$= e^{-k}$$

$$dv = e^k dw$$

$$= \int \frac{\ln(1 - e^{-k}v)}{v} dv$$

$$= \int \frac{\ln(1-w)}{\frac{w}{e^{-k}}}\ e^{k} dw$$

$$= \int \frac{\ln(1-w)}{w}\ dw$$

$$= -\int -\frac{\ln(1-w)}{w}\ dw$$

$$= \int -\frac{\ln(1-w)}{w}\ dw$$

diketahui bahwa

$$\int -\frac{\ln(1-w)}{w}\ dw = Li_2(w)$$

merupakan integral spesial (dilogarith). Sehingga penyelesaian dari persamaan tersebut sebagai berikut :

$$= -\int -\frac{\ln(1-w)}{w}\ dw$$

$$= -Li_2(w)$$

pada permisalkan sebelumnya dimisalkan bahwa $w = e^{-k}v$, sehingga persamannya menjadi :

$$= -Li_2\left(e^{-k}v\right)$$

selanjutnya menyelesaikan integral kedua pada persamaan (4.7.42) sebagai berikut :

$$= \int \frac{1}{v}\ dv = \ln|v|$$

sehingga hasil integral dari persamaan (4.7.42) yaitu

$$\int \frac{\ln\left(1-e^{-k}v\right)}{v} dv + (\ln(-1)+k)\ \int \frac{1}{v} dv$$

$$= -Li_2\left(e^{-k}v\right) + (\ln(-1)+k)\ln(v$$

$$= (\ln(-1)+k)\ln(v) - Li_2\left(e^{-k}v\right) \qquad (4.7.43)$$

diketahui pada permisalan sebelumnya bahwa $v = e^u + e^k$ sehingga persamaan (4.7.43) menjadi :

$$= (\ln(-1) + k)\ln\left(e^u + e^k\right) - Li_2\left(e^{-k}\left(e^u + e^k\right)\right)$$

selanjutnya didapatkan hasil dari persamaan (4.7.41) yaitu sebagai berikut :

$$= u\ln\left|e^u + e^k\right| - \int \frac{u\,e^u}{e^u + e^k}\,du$$

$$= Li_2\left(e^{-k}\left(e^u + e^k\right)\right) + u\ln\left|e^u + e^k\right|$$

$$-(\ln(-1) + k)\ln\left(e^u + e^k\right) \qquad (4.7.44)$$

diketahui sebelumnya bahwa terdapat permisalan :

$$u = \ln(h - e^k)$$

$$e^{\ln(h-e^k)} = h - e^k$$

dengan permisalan diatas sehingga persamaan (4.7.44) menjadi sebagai berikut :

$$= \ln|h|\ln\left|h - e^k\right| + Li_2\left(e^{-k}h\right) - (\ln(-1) + k)\ln|h|$$

Sehingga hasil dari integral untuk integral pertama pada persamaan (4.7.39) yaitu :

$$\int \frac{\ln|h|}{h - e^k}\,dh$$

$$= \ln|h|\ln\left|h - e^k\right| + Li_2\left(e^{-k}h\right) - (\ln(-1) + k)\ln|h| + C$$

$$= \ln|h|\left(\ln\left|h - e^k\right|\right) - \ln(-1) - k + Li_2\left(e^{-k}h\right) + C \qquad (4.7.45)$$

Selanjutnya yaitu menyederhanakan persamaan (4.7.45) sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$= \ln|h|\left(\ln\left|h - e^k\right|\right) - \ln(-1) - k$$

$$= \ln|h|\ln\left(\left|h - e^k\right|\right) - \ln(-1) - \ln e^k$$

$$= \ln|h| \ln\left[\frac{|h - e^k|}{(-1)(e^k)}\right]$$
$$= \ln[-e^{-k}|h - e^k|] \ln|h|$$
$$= \ln|\mathrm{h}| \ln[| - e^{-k}h + 1|]$$
$$= \ln\left(\left|e^{-k}h - 1\right|\right) \ln(|h|)$$
$$= \ln(|h|) \ln(|e^{-k}\, h - 1|)$$

sehingga didapatkan hasil untuk persamaan (4.7.45) yaitu sebagai berikut :

$$= \ln|h| \left(\ln\left|h - e^k\right|\right) - \ln(-1) - k + Li_2\left(e^{-k}h\right) + C$$
$$= \ln(|h|) \ln\left(e^{-k}|h - e^k|\right) + Li_2\left(e^{-k}\right) + C \qquad (4.7.46)$$

Selanjutnya penyelesaian integral kedua pada persamaan (4.7.39) yaitu sebagai berikut :

$$= \int \frac{\ln|h|}{h - e^k + 1}\, dh$$
$$= \ln|h| ln \left|\frac{h}{e^k - 1} - 1\right| + Li_2\left(\frac{h}{e^k - 1}\right) + C$$
$$= \ln|h| \ln\left|\frac{h - e^k + 1}{e^k - 1}\right| + Li_2\left(\frac{h}{e^k - 1}\right) + C \qquad (4.7.47)$$

Sehingga dari persamaan (4.7.46) dan (4.7.47) didapatkan hasil integral dari persamaan (4.7.39) sehingga hasilnya sebagai berikut :

$$\int \frac{\ln|h|}{h - e^k}\, dh - \int \frac{\ln|h|}{h - e^k + 1}\, dh$$
$$= \ln(|h|) \ln\left(e^{-k}|h - e^k|\right) + Li_2\left(e^{-k}\right)$$
$$- \ln|h| \ln\left|\frac{h - e^k + 1}{e^k - 1}\right| - Li_2\left(\frac{h}{e^k - 1}\right)$$

sehingga hasil dari integral untuk persamaan kedua pada persamaan (4.7.33) yaitu sebagai berikut :

$$\int \frac{\ln|e^{\lambda_1 u} + e^f - 1}{e^f - 1}\, df$$

$$= \ln(|h|)\ln\left(e^{-k}|h - e^k|\right) + Li_2\left(e^{-k}\right)$$
$$- \ln|h|\ln\left|\frac{h - e^k + 1}{e^k - 1}\right| - Li_2\left(\frac{h}{e^k - 1}\right) + C$$

diketahui sebelumnya bahwa $k = u\lambda_1$, dan $e^f - 1 = h - e^k$

$$h = e^f + e^k - 1$$

sehingga didapatkan hasilnya yaitu sebagai berikut :

$$= ln\left(\left|e^f + e^{u\lambda_1} - 1\right|\right)\ln\left(e^{-u\lambda_1}|e^f - 1|\right)$$
$$+Li_2\left(e^{-u\lambda_1}\left(e^f + e^{u\lambda_1} - 1\right)\right) - Li_2\left(\frac{e^f + e^{u\lambda_1} - 1}{e^{u\lambda_1} - 1}\right)$$
$$- \ln\left(\left|e^f + e^{u\lambda_1} - 1\right|\right)\ln\left(\frac{\left|e^f\right|}{|e^{u\lambda_1} - 1|}\right) + C \tag{4.7.48}$$

Selanjutnya yaitu menyelesaikan integral ketiga pada persamaan (4.8.33) sebagai berikut :

$$\int \frac{f}{e^f - 1}\, df$$

misalkan $b = e^f - 1$ sehingga $e^f = b + 1$

$$f = \ln|b + 1|$$

$$db = e^f df$$

$$df = \frac{1}{e^f} df$$

$$df = \frac{1}{b + 1}\, db$$

$$\int \frac{f}{e^f - 1}\, df = \int \frac{\ln|b + 1|}{b}\frac{1}{b + 1}\, db$$

$$= \int \frac{\ln|b+1|}{b(b+1)}\ db$$

(4.7.49)

untuk menyelesaikan persamaan (4.7.49) maka menggunakan teknik pecahan parsial sebagai berikut :

$$\frac{1}{b(b+1)} = \frac{A}{b} + \frac{B}{b+1}$$

$$1 = A(b+1) + Bb$$

untuk mempermudah maka dilakukan substitusi $b = 0$ sehingga persamaannya sebagai berikut :

$A + B = 0,$

$B = -A$, sehingga $A = 1$ dan $B = -1$

$$\frac{1}{b(b+1)} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b+1}$$

didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$\int \frac{\ln|b+1|}{b(b+1)}\ db = \int \ln|b+1| \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+1}\right) db$$

$$= \int \frac{\ln|b+1|}{b}\ db - \int \frac{\ln|b+1|}{b+1}\ db$$

(4.7.50)

langkah selanjutnya yaitu mengintegral masing-masing dari persamaan (4.7.50) sebagai berikut :

$$\int \frac{\ln|b+1|}{b}\ db$$

misal : $u = b + 1$

$db = du$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{u-1}$$

$$= \int \frac{\ln|u|}{u-1}\ du$$

$$= \int \frac{1}{u-1}\ du$$

$$= \int \frac{1}{u-1} \ln|u| du$$

misalkan : $v = \ln|u-1|$

$du = (u-1)dv$

$u = e^v + 1$

$$= \int \ln|e^v + 1|\ dv$$

selanjutnya yaitu substitusi $w = -e^v$

$dv = -e^{-v} dw$

$$= -\int -\frac{\ln|1-w|}{w}\ dw$$

$= -Li_2(w)$

$= -Li_2(-e^v)$

$= -Li_2\left(-e^{\ln(u-1)}\right)$

$= Li_2(u-1)$

$= Li_2(1-u)$

$= Li_2(1-(b+1))$

$= -Li_2(-b) + C$

Selanjutnya yaitu penyelesaian pada integral kedua sebagai berikut :

$$\int \frac{\ln|b+1|}{b+1}\ db$$

misal , $p = \ln|b+1|$

$$dp = \frac{1}{b+1}\ db$$

penyelesaiannya sebagai berikut :

$$\int \frac{\ln|b+1|}{b+1}\, db = \int p\, dp$$

$$= \frac{1}{2}p^2 + C$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln|b+1|)^2 + C$$

(4.7.51)

sehingga hasil dari persamaan (4.7.50) adalah

$$\int \frac{\ln|b+1|}{b+1}\, db = -Li_2(-b) - \frac{1}{2}(\ln|b+1|)^2 + C$$

Selanjutnya yaitu substitusi nilai b maka :

$$\int \frac{f}{e^f - 1}\, df + C = -Li_2(-b) - \frac{1}{2}(\ln|b+1|)^2 + C$$

$$= -Li_2(-(e^f - 1)) - \frac{1}{2}\left(\ln\left|e^f - 1\right| + 1\right)^2 + C$$

$$= -Li_2\left(-e^f + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\left|e^f\right|^2\right) + C$$

$$= -Li_2\left(1 - e^f\right) - \frac{1}{2}f^2 + C \tag{4.7.52}$$

sehingga dari persamaan (4.7.36), (4.7.48) dan (4.7.52) hasil dari persamaan (4.7.33) sebagai berikut :

$$M(u,w) = \int \frac{\lambda_1 u}{e^f - 1}\, df - \int \frac{\ln|e^{\lambda_1 u} + e^f - 1}{e^f - 1}\, df + \int \frac{f}{e^f - 1}\, df$$

$$= \lambda_1 u\left[\ln\left|e^f - 1\right| - f\right] - Li_2\left(1 - e^f\right) - \frac{1}{2}f^2$$

$$+ Li_2\left(\frac{e^f + e^{u\lambda_1} - 1}{e^{u\lambda_1} - 1}\right) + \ln\left(\left|e^f + e^{u\lambda_1} - 1\right|\right)\ln\left(\frac{\left|e^f\right|}{\left|e^{u\lambda_1} - 1\right|}\right)$$

$$-ln\left(\left|e^{f}+e^{u\lambda_1}-1\right|\right)\ln\left(e^{-u\lambda_1}\left|e^{f}-1\right|\right)$$
$$-Li_2\left(e^{-u\lambda_1}\left(e^{f}+e^{u\lambda_1}-1\right)\right)+C$$

Selanjutnya yaitu memasukkan batas integral sebagai berikut :

$$=\int_0^{w\lambda_2}\left(\frac{\lambda_1 u}{e^{f}-1}-\frac{\ln|e^{\lambda_1 u}+e^{f}-1}{e^{f}-1}+\frac{f}{e^{f}-1}\right)df$$

$$=\left|\left(\lambda_1 u\left[\ln\left|e^{f}-1\right|-f\right]\right)-Li_2\left(1-e^{f}\right)-\frac{1}{2}f^2\right.$$
$$-Li_2\left(e^{-u\lambda_1}\left(e^{f}+e^{u\lambda_1}-1\right)\right)+Li_2\left(\frac{e^{f}+e^{u\lambda_1}-1}{e^{u\lambda_1}-1}\right)$$
$$+\ln\left(\left|e^{f}+e^{u\lambda_1}-1\right|\right)\ln\left(\frac{\left|e^{f}\right|}{\left|e^{u\lambda_1}-1\right|}\right)$$
$$-ln\left(\left|e^{f}+e^{u\lambda_1}-1\right|\right)\ln\left(e^{-u\lambda_1}\left|e^{f}-1\right|\right)\Big|_0^{w\lambda_2}$$

$$=\left[\left(\lambda_1 u\left(\ln\left|e^{w\lambda_2}-1\right|-w\lambda_2\right)+Li_2\left(\frac{e^{w\lambda_2}+e^{u\lambda_1}-1}{e^{u\lambda_1}-1}\right)\right]\right.$$
$$+\left[\frac{1}{6}\pi^2-\ln\left|e^{w\lambda_2}\right|\ln\left|\frac{1}{\left|e^{u\lambda_1}-1\right|}\right|-Li_2\left(\frac{e^{u\lambda_1}}{e^{u\lambda_1}-1}\right)\right]$$
$$-Li_2\left(e^{-u\lambda_1}\left(e^{w\lambda_2}+e^{u\lambda_1}-1\right)\right)$$
$$-Li_2\left(1-e^{w\lambda_2}\right)-\frac{1}{2}(w\lambda_2)^2$$
$$-\ln\left|e^{w\lambda_2}+e^{u\lambda_1}-1\right|\ln\left(e^{-u\lambda_1}\left|e^{w\lambda_2}-1\right|\right)$$
$$+ln\left(\left|e^{w\lambda_2}+e^{u\lambda_1}-1\right|\right)\ln\left(\frac{\left|e^{w\lambda_2}\right|}{\left|e^{u\lambda_1}-1\right|}\right)$$

(4.7.53)

Sehingga persamaan (4.7.53) merupakan persamaan ekspetasi kerusakan pada distribusi Eksponensial.

4.7.3 Ekspektasi Jumlah Kerusakan untuk Kapasitas Mesin 125 CC

Ekspektasi jumlah kerusakan untuk kapasitas mesin 125 CC yaitu berdistribusi Weibull. Sesuai persamaan (4.7.27) yaitu persamaan tentang ekpektasi jumlah kerusakan didapatkan nilai estimasi parameter yaitu $\theta_1 = 0{,}599821$; $\theta_2 = 0{,}311333$; $\beta_1 = 0{,}2228202$; $\beta_2 = 0{,}186048$, sehingga dengan memasukkan parameter kedalam persamaan didapatkan hasil dari ekspetasi jumlah kerusakan sebagai berikut :

Tabel 4. 1 Ekspektasi Untuk Kapasitas Mesin 125 CC

u (thn) / *w*(5000 km)	$0 \leq u \leq 1$	$1 < u \leq 2$
$0 \leq w \leq 1000$	5,173253	5,5904535
$1000 < w \leq 2500$	5,633138	6,643133
$2500 < w \leq 5000$	6,371364	6,82509

Tabel 4.1 tersebut menyajikan nilai ekspektasi jumlah kerusakan di Dealer Tri Jaya Motor Pare yang memberikan jaminan garansi 2 tahun atau 5000 Km. Pada tabel 4.1 disajikan tabel dengan interval nilai *u* antara 1 sampai 2 tahun dengan selang waktu 1 tahun. Untuk besarnya nilai *w* disajikan sesuai penggunaan maksimal yang ditawarkan oleh dealer dalam hal in yaitu 5000 km, dengan selang penggunaan setiap 2500 km. Nilai ekpektasi yang didapatkan yaitu sebesar 6.82509, hal itu berarti dalam kurun waktu selama masa garansi kegagalan yang ditimbulkan adalah sebesar 6,682509. Dari tabel didapatkan bahwa ekspektasi jumlah kerusakan produk mengalami peningkatan yang sebanding dengan jumlah kerusakan.

4.7.4 Ekspektasi Jumlah Kerusakan untuk Kapasitas Mesin 150 CC

Ekspektasi jumlah kerusakan untuk kapasitas mesin 150 CC yaitu berdistribusi Weibull. Sesuai persamaan (4.7.27) yaitu persamaan tentang ekspektasi jumlah kerusakan didapatkan nilai estimasi parameter yaitu $\theta_1 = 0{,}661620$; $\theta_2 = 0{,}422155$; $\beta_1 = 0{,}200122$; $\beta_2 = 0{,}182901$, sehingga dengan memasukkan parameter kedalam persamaan didapatkan hasil dari ekspetasi jumlah kerusakan sebagai berikut :

Tabel 4. 2 Ekspektasi Untuk Kapasitas Mesin 150 CC

u (thn) / *w*(5000 km)	$0 \le u \le 1$	$1 < u \le 2$
$0 \le w \le 1000$	5,890993	5,95609
$1000 < w \le 2500$	6,589939	6,643133
$2500 < w \le 5000$	7,257212	7,94487

Tabel 4.2 tersebut menyajikan nilai ekspetasi jumlah kerusakan di Dealer Tri Jaya Motor Pare yang memberikan jaminan garansi 2 tahun atau 5000 Km. Pada tabel 4.2 disajikan tabel dengan interval nilai *u* antara 1 sampai 2 tahun dengan selang waktu 1 tahun. Untuk besarnya nilai *w* disajikan sesuai penggunaan maksimal yang ditawarkan oleh dealer dalam hal in yaitu 5000 km, dengan selang penggunaan setiap 2500 km. Nilai ekspektasi yang didapatkan yaitu sebesar 7.94487, hal itu berarti dalam kurun waktu selama masa garansi kegagalan yang ditimbulkan adalah sebesar 7,94487. Dari tabel didapatkan bahwa ekspektasi jumlah kerusakan produk mengalami peningkatan yang sebanding dengan jumlah kerusakan.

4.7.5 Ekspektasi Jumlah Kerusakan untuk Kapasitas Mesin 250 CC

Ekspektasi jumlah kerusakan untuk kapasitas mesin 250 CC yaitu berdistribusi Eksponensial. Sesuai persamaan (4.7.53) yaitu persamaan tentang ekpektasi jumlah kerusakan didapatkan nilai estimasi parameter yaitu $\lambda_1 = 0{,}026059; \lambda_2 = 0{,}0005980$, sehingga dengan memasukkan parameter kedalam persamaan didapatkan hasil dari ekspektasi jumlah kerusakan sebagai berikut :

Tabel 4. 3 Ekspektasi Jumlah Kerusakan kapasitas mesin 250 CC

u (thn) / *w*(5000 km)	$0 \leq u \leq 1$	$1< u \leq 2$
$0 \leq w \leq 1000$	3,80312	3,990141
$1000 < w \leq 2500$	5,204981	5,266771
$2500 < w \leq 5000$	5,700914	6,428412

Tabel 4.3 tersebut menyajikan nilai ekspektasi jumlah kerusakan di Dealer Tri Jaya Motor Pare yang memberikan jaminan garansi 2 tahun atau 5000 Km. Pada tabel 4.3 disajikan tabel dengan interval nilai *u* antara 1 sampai 2 tahun dengan selang waktu 1 tahun. Untuk besarnya nilai *w* disajikan sesuai penggunaan maksimal yang ditawarkan oleh dealer dalam hal in yaitu 5000 km, dengan selang penggunaan setiap 2500 km. Nilai ekspektasi yang didapatkan yaitu sebesar 6.428412, hal itu berarti dalam kurun waktu selama masa garansi kegagalan yang ditimbulkan adalah sebesar 6,428412. Dari tabel didapatkan bahwa ekspektasi jumlah kerusakan produk mengalami peningkatan yang sebanding dengan jumlah kerusakan.

4.8 Biaya Pemeliharaan

Untuk mendapatkan biaya pemeliharaan secara optimum maka diperlukan adanya perencanaan yang bisa meminimumkan biaya perawaatan. Sebelum menentukan biaya optimum maka terlebih dahulu harus menentukan Cf *(Cost Of Failure*) dan Cp *(Cost Of Preventive)* yang ditunjukkan dalam Tabel di bawah ini. Data untuk tabel 4.4 dan tabel 4.5 merupakan data yang di dapat dari Dealer Tri Jaya Motor Pare.

Tabel 4. 4 Cf *(Cost Of Failure*) kapasitas mesin 125 CC dan 150 CC

Biaya Kehilangan	Rp 1.800.000,-
Biaya Tenaga Kerja/hari	Rp 50.000,-
Harga komponen	Rp 600.000,-
Cf	Rp 1.525.000,-

Sedangkan untuk kapasitas mesin 250 CC dapat dilihat di Tabel 4.5 sebagai berikut :

Tabel 4. 5 Cf *(Cost Of Failure*) kapasitas mesin 250 CC

Biaya Kehilangan	Rp 5.500.000,-
Biaya Tenaga Kerja/hari	Rp 50.000,-
Harga komponen	Rp 2.363.000,-
Cf	Rp 7.913.000,-

Pada umumnya Cp *(Cost Of Preventive)* nilainya berkisar 20% dari nilai Cf *(Cost Of Failure*) , sehingga berikut hasil perhitungan untuk nilai Cp ditunjukkan dalam Tabel 4.6 dan Tabel 4.7.

Tabel 4. 6 *(Cost Of Preventive)* kapasitas mesin 125 CC dan 150 CC

Presentase	20%
Cost Of Preventive	Rp 305.000,-

Tabel 4. 7 *(Cost Of Preventive)* kapasitas mesin 250 CC

Presentase	20%
Cost Of Preventive	Rp 1.582.600,-

Setelah didapatkan nilai dari Cf *(Cost Of Failure*) dan Cp *(Cost Of Preventive)* maka mensubstitusikan hasilnya kedalam persamaan (2.20). Sehingga didapatkan nilai minimum untuk kapasitas mesin yang berbeda-beda yang terdapat pada lampiran F. Hasil biaya optimum setiap kapasitas CC secara sekilas dapat dilihat di tabel berikut.

Tabel 4. 8 Biaya Optimum setiap Kapasitas Mesin

Kapasitas Mesin 150 CC	Rp 143.088,-
Kapasitas Mesin 125 CC	Rp 155.688,-
Kapasitas Mesin 250 CC	Rp 217.110,-

Tabel 4.8 merupakan biaya optimum yang harus dikeluarkan oleh dealer untuk 4 kali servis selama garansi.

4.9 Ekspektasi Biaya Garansi

Berdasarkan persamaan (2.1) ekspektasi biaya garansi di nyatakan sebagai : $E(P) = C_s\ M(u, w)$. Dengan C_s merupakan biaya optimum pemeliharaan kendaraan selama 4x servis atau selama masa garansi. Hasil ekspektasi biaya garansi dapat dilihat pada tabel berikut :

A. Untuk kapasitas mesin 125 CC

Hasil ekspektasi biaya garansi untuk 125 CC ditunjukkan dalam Tabel 4.9.

Tabel 4. 9 Ekspektasi Biaya Garansi 125 CC

u (thn) / *w*(5000 km)	$0 \le u \le 1$	$1 < u \le 2$
$0 \le w \le 1000$	805.413	870.366
$1000 < w \le 2500$	877.011	1.034.256
$2500 < w \le 5000$	991.944	1.062.584

Tabel 4.9 menyajikan nilai ekspektasi biaya garansi pada Dealer Tri Jaya Motor Pare yaitu berupa penawaran garansi dengan periode waktu (*u*) sampai 2 tahun dan penggunaan (*w*) 5000 km. Besarnya nilai *u* (waktu) yang disajikan dalam tabel tergantung besarnya periode waktu yang ditawarkan, dalam hal ini yaitu 2 tahun. Untuk waktu yang disajikan yaitu antara 1 sampai 2 tahun masa garansi.

Untuk nilai *w* disajikan dalam tabel tergantung periode penggunaan maksimal yang ditawarkan oleh dealer, untuk dealer Tri Jaya menawarkan yaitu maksimal 5000 km.

Nilai ekspektasi biaya garansi merupakan perkalian antara nilai ekspektasi kerusakan pada tabel (4.2) dengan biaya optimum pemeliharaan pada tabel (4.8) yang berbeda-beda setiap kapasitas mesinnya. Nilai ekspektasi biaya garansi yang ditanggung oleh dealer Tri Jaya Motor Pare dalam masa garansi 2 tahun atau 5000 km untuk kapasitas mesin 125 CC yaitu Rp 1.062.584,00.

B. Untuk kapasitas mesin 150 CC

Hasil ekspektasi biaya garansi untuk 150 CC ditunjukkan dalam Tabel 4.10.

Tabel 4. 10 Ekspektasi Biaya Garansi 150 CC

u (thn) / *w*(5000 km)	$0 \leq u \leq 1$	$1 < u \leq 2$
$0 \leq w \leq 1000$	842.930	852.245
$1000 < w \leq 2500$	942.941	950.552
$2500 < w \leq 5000$	1.038.419	1.136.815

Tabel 4.10 menyajikan nilai ekspetasi biaya garansi pada Dealer Tri Jaya Motor Pare yaitu berupa penawaran garansi dengan periode waktu (*u*) sampai 2 tahun dan penggunaan (*w*) 5000 km. Besarnya nilai *u* (waktu) yang disajikan dalam tabel tergantung besarnya periode waktu yang ditawarkan, dalam hal ini yaitu 2 tahun. Untuk waktu yang disajikan yaitu antara 1 sampai 2 tahun masa garansi. Untuk nilai *w* disajikan dalam tabel tergantung periode penggunaan maksimal yang ditawarkan oleh dealer, untuk dealer Tri Jaya menawarkan yaitu maksimal 5000 km.

Nilai ekspetasi biaya garansi merupakan perkalian antara nilai ekspetasi kerusakan pada tabel (4.1) dengan biaya optimum pemeliharaan pada tabel (4.8) yang berbeda-beda setiap kapasitas mesinnya. Nilai ekspetasi biaya garansi yang ditanggung oleh dealer Tri Jaya Motor Pare dalam masa garansi 2 tahun atau 5000 km untuk kapasitas mesin 150 CC yaitu Rp 1.136.815,-.

C. Untuk kapasitas mesin 250 CC

Hasil ekspektasi biaya garansi untuk 250 CC ditunjukkan dalam Tabel 4.11.

Tabel 4. 11 Ekspektasi Biaya Garansi 250 CC

u (thn) / w(5000 km)	$0 \leq u \leq 1$	$1 < u \leq 2$
$0 \leq w \leq 1000$	825.695	866.299
$1000 < w \leq 2500$	1.130.053	1.143.468
$2500 < w \leq 5000$	1.237.725	1.395.672

Tabel 4.11 menyajikan nilai ekspektasi biaya garansi pada Dealer Tri Jaya Motor Pare yaitu berupa penawaran garansi dengan periode waktu (*u*) sampai 2 tahun dan penggunaan (*w*) 5000 km. Besarnya nilai *u* (waktu) yang disajikan dalam tabel tergantung besarnya periode waktu yang ditawarkan, dalam hal ini yaitu 2 tahun. Untuk waktu yang disajikan yaitu antara 1 sampai 2 tahun masa garansi. Untuk nilai *w* disajikan dalam tabel tergantung periode penggunaan maksimal yang ditawarkan oleh dealer, untuk dealer Tri Jaya menawarkan yaitu maksimal 5000 km.

Nilai ekspektasi biaya garansi merupakan perkalian antara nilai ekspektasi kerusakan pada tabel (4.3) dengan biaya optimum pemeliharaan pada tabel (4.8) yang berbeda-beda setiap kapasitas mesinnya. Nilai ekspektasi biaya garansi yang ditanggung oleh dealer Tri Jaya Motor Pare dalam masa garansi 2 tahun atau 5000 km untuk kapasitas mesin 250 CC yaitu Rp 1.395.672,00.

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini berisi beberapa kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilakukan. Selain itu, pada bab ini juga dimasukkan beberapa saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dalam tugas akhir ini dapat disimpulkan beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Terbentuknya model ekspektasi garansi dua dimensi yaitu sebagai berikut :

$$E(P) = C_s\, M(u, w)$$

Dengan

C_s : merupakan biaya perawatan yang harus dikeluarkan oleh produsen selama masa garansi

Untuk mendapatkan nilai C_s yaitu dengan mendapatkan terlebih dahulu nilai dari C_p dan C_f dari masing-masing motor yang berbeda-beda kapasitasnya. Dengan C_p dan C_f dapat dicari dengan rumusan sebagai berikut :

C_p = Biaya satu siklus pemeliharaan
= (biaya kehilangan + biaya tenaga kerja + biaya pemeliharaan rutin) x rata-rata waktu penggantian kompenen + harga komponen

C_f = (Biaya kehilangan + biaya tenaga kerja) × rata-rata waktu penggantian komponen + harga komponen

2. Nilai estimasi jumlah klaim atau ekspetasi biaya garansi yang harus ditanggung oleh produsen selama masa garansi berbeda-beda sesuai dengan kapasitas mesinnya.

Garansi yang diberikan yaitu selama 2 tahun atau maksimal 5000 km penggunaan. Untuk kapasitas mesin 125 CC biaya garansi yang harus ditanggung oleh dealer yaitu sebesar Rp 1.062.584,00, untuk kapasitas mesin 150 CC dealer harus menanggung biaya garansi yaitu Rp 1.136.815,00, dan untuk kapasitas mesin 250 CC dealer harus menanggung biaya garansi sebesar Rp 1.395.672,00. Biaya garansi akan bertambah seiring dengan bertambahnya tingkat kapasitas mesin suatu motor. Harga yang ditawarkan juag jauh lebih mahal untuk motor yang mempunyai CC tinggi.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil pembahasan dan juga kesimpulan yang telah dilakukan, saran untuk penelitian selanjutnya adalah dengan menggunakan distribusi yang berbeda untuk mendapatkan perbedaan dari ekspetasi biaya garansinya. Selain itu juga bisa dengan melakukan perbandingan biaya ketika produsen menetapkan biaya perawatan *preventive* atau *corrective.* Diharapkan dengan adanya perbandingan dalam penetapan perawatan produsen dapat menerapkan hal tersebut. Sehingga keputusan perawatan yang ditetapkan dealer tidak membuat konsumen menjadi rugi atau keberatan untuk membelinya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Murthy, D. N. P dan Blischke W. R. 2006. **Warranty management and product manufacture**. London: Springer-Verlag.

[2] Wang, Y. Liu, Z. dan Liu, Y. 2015. **Optimal preventive maintenance strategy for repairable items under two-dimensional warranty**. **Reliability Engineering and System Safety.** Vol.142 hal.326-333.

[3] Haryono. 2004. **Perancangan Suku Cadang Berdasarkan Analisis Reliabilitas:Studi Kasus Mesin Boiler Feed Recirculation Pump**. **Proseding Jurusan Statistika ITS**

[4] Lukitosari, V. Adhella Dwi,. dan Mudjiati, T. 2017. **Pemodelan Biaya Garansi Dua Dimensi (Studi Kasus: PT. Indomobil Prima Niaga Sidoarjo)**. **Journal of Mathematics and Its Applications.** Vol.14,No.2 ,hal.157-167.

[5] Bain, L. J. dan Engelhardt, M. 1991. **Introduction to Probability and Mathematical Statistics**. Second Edition. Duxbury Press: California.

[6] Sahoo, P. 2013. **Probability and Mathematical Statistics.** Departement of Mathematics University of Louisville : USA.

[7] Blischke, W. R. dan Murthy D. N. P. 1994. **Warranty Cost Analysis**. Marcel Dekker Inc. New York.

[8] Yukun Wang, *Y. L*. 2018. **Preventive maintenance optimization for repairable products considering two-dimensional warranty and customer satisfaction**. **Risk and Reliability** ,hal.1-14.

[9] Blischke, W. R. Karim, M. R. dan Murthy D. N. P. 2011. **Warranty Data Collection and Analysis**. Springer London Dordrecht Heidelberg, New York.

[10] Ebeling, C. E. 1997. **An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering**. McGraw-Hill: Singapura.

[11] Pham, H. and Wang, H. 2006. **Reliability and Optimal Maintenance**. **Springer Series in Reliability Engineering**. Springer-Verlag: London.

[12] Daniel, W.W. 1989. **Statistik Nonparametrik Terapan**. Gramedia: Jakarta

[13] Yuhelsom, Syam, B., Sinullingga, S., dan Isranuri, I. 2010. **Analisis Reliability dan Avability Mesin Pabrik Kelapa Sawit PT.Perkebunan Nusantara**. *Jurnal Dinamis*, II(6)

[14] Walpole, Ronald E., Myers. Raymond H. 1995. **Ilmu Peluang dan Statistik untuk Insinyur dan Ilmuwan**. Edisi Ke-empat. Bandung: ITB Bandung.

[15] Pham, H. 2006. **Springer Handbook of Engineering Statistics**. Springer London Dordrecht Heidelberg: New York.

[16] Soehardjo. 1985. **Analisa Numerik**. Surabaya: ITS

LAMPIRAN A

Data Klaim Dealer Tri Jaya Motor Pare

Tabel A. 1 Data Klaim Kapasitas Motor 125 CC

No	Tanggal Pembelian	Tanggal Servis	Umur (Hari)	Penggunaan (X Km)
1	11/01/2015	07/02/2015	27	1362
2	04/01/2015	29/01/2015	25	1682
3	29/01/2015	03/03/2015	33	1358
4	03/01/2015	21/01/2015	18	1065
5	27/06/2015	31/07/2015	34	1598
6	07/07/2015	09/08/2015	33	1498
7	02/06/2015	18/06/2015	16	1486
8	20/01/2015	04/02/2015	15	1065
9	22/01/2015	16/02/2015	25	1032
10	11/03/2015	09/04/2015	29	1476
11	15/02/2015	23/03/2015	36	1471
12	22/06/2015	26/07/2015	34	1372
13	09/09/2015	16/10/2015	37	1428
14	17/08/2015	12/09/2015	26	1476
15	10/01/2015	08/02/2015	29	1465
16	08/01/2015	19/02/2015	42	1063
17	12/02/2015	25/02/2015	13	1476
18	14/05/2015	22/06/2015	39	1555
19	07/02/2015	13/03/2015	34	1609
20	12/04/2015	14/05/2015	32	1478
21	25/07/2015	02/09/2015	39	1643
22	09/06/2015	10/07/2015	31	1424
23	31/03/2015	06/05/2015	36	1487

No	Tanggal Pembelian	Tanggal Servis	Umur (Hari)	Penggunaan (X Km)
…				
811	10/07/2018	26/07/2018	16	1573
812	12/07/2018	10/08/2018	29	1823
813	18/07/2018	10/08/2018	23	1698
814	12/06/2018	14/07/2018	32	1596
815	24/07/2018	13/08/2018	20	1748
816	19/07/2018	09/08/2018	21	1278
817	15/07/2018	02/08/2018	18	1332
818	05/11/2017	01/12/2017	26	1572
819	24/07/2018	23/08/2018	30	1675
820	30/07/2018	27/08/2018	28	1599
821	30/07/2018	09/09/2018	41	1581
822	11/08/2018	05/09/2018	25	1082
823	21/08/2018	13/09/2018	23	1472
824	01/09/2018	20/09/2018	19	1856
825	25/08/2018	18/09/2018	24	1468
826	25/08/2018	08/09/2018	14	1509
827	10/09/2018	30/09/2018	20	1498
828	01/09/2018	01/10/2018	30	1676
829	08/09/2018	05/10/2018	27	1732
830	19/08/2018	14/09/2018	26	1487
831	18/09/2018	13/10/2018	25	1739
832	25/09/2018	12/10/2018	17	1472
833	19/09/2018	17/10/2018	28	1487
834	13/10/2018	25/10/2018	12	1591
835	30/09/2018	13/10/2018	13	1282
836	27/09/2018	20/10/2018	23	1062

LAMPIRAN A :

Tabel A. 2 Data Klaim Kapasitas Motor 150 CC

No	Tanggal Pembelian	Tanggal Servis	Umur (Hari)	Penggunaan (X Km)
1	21/04/2015	30/05/2015	39	1547
2	19/02/2015	01/07/2015	132	1632
3	10/01/2015	05/07/2015	176	1652
4	15/02/2015	05/05/2015	79	1747
5	12/01/2015	31/03/2015	78	1742
6	14/01/2015	07/06/2015	144	1797
7	31/01/2015	20/03/2015	48	1732
8	22/02/2015	29/03/2015	35	1590
9	12/01/2015	09/04/2015	87	1742
10	02/04/2015	29/04/2015	27	1587
11	29/01/2015	04/04/2015	65	1642
12	27/01/2015	28/02/2015	32	1762
13	12/02/2015	29/04/2015	76	1698
14	18/01/2015	06/04/2015	78	1759
15	03/03/2015	17/04/2015	45	1746
16	28/01/2015	14/07/2015	167	1572
17	17/02/2015	17/05/2015	89	1757
18	12/02/2015	26/03/2015	42	1432
19	04/03/2015	16/03/2015	12	1652
20	06/05/2015	28/09/2015	145	1692
21	27/04/2015	28/09/2015	154	1896
22	12/02/2015	01/05/2015	78	1497
23	12/02/2015	01/05/2015	78	1682
24	01/02/2015	20/04/2015	78	1465

LAMPIRAN A :

No	Tanggal Pembelian	Tanggal Servis	Umur (Hari)	Penggunaan (X Km)
121	03/05/2015	26/05/2015	23	1673
122	30/04/2015	20/06/2015	51	1255
123	11/06/2015	17/09/2015	98	1722
124	31/05/2015	22/07/2015	52	1644
125	04/06/2015	23/07/2015	49	1298
126	04/06/2015	10/08/2015	67	1612
127	28/05/2015	28/06/2015	31	1054
…				
493	21/04/2018	20/05/2018	29	1797
494	28/04/2018	29/05/2018	31	1683
495	01/05/2018	31/05/2018	30	1532
496	29/05/2018	16/08/2018	79	1209
497	04/06/2018	10/11/2018	159	1786
498	08/07/2018	15/07/2018	7	1365
499	27/06/2018	31/08/2018	65	1532
500	16/07/2018	28/08/2018	43	1609
501	28/07/2018	11/08/2018	14	1362
502	22/07/2018	17/10/2018	87	1742
503	08/09/2018	08/10/2018	30	1798
504	18/09/2018	17/10/2018	29	1523

LAMPIRAN A :

Tabel A. 3 Data Klaim Kapasitas Motor 250 CC

No	Tanggal pembelian	Tanggal Servis	Umur (hari)	Penggunaan (X km)
1	11/02/2017	02/03/2017	19	1666
2	26/12/2016	12/02/2017	48	826
3	01/03/2017	08/03/2017	7	1427
4	08/03/2017	12/04/2017	35	1431
5	14/02/2017	10/03/2017	24	988
6	13/03/2017	29/03/2017	16	2504
7	25/02/2017	07/03/2017	10	1770
8	12/03/2017	25/03/2017	13	829
9	25/03/2017	14/04/2017	20	1325
10	16/03/2017	03/04/2017	18	877
11	11/03/2017	01/04/2017	21	1260
12	22/03/2017	28/05/2017	67	1313
13	30/03/2017	07/05/2017	38	1325
14	23/03/2017	29/03/2017	6	1514
15	05/04/2017	03/05/2017	28	3557
16	29/03/2017	19/04/2017	21	2018
17	02/02/2017	21/02/2017	19	2417
18	17/04/2017	07/07/2017	81	2729
19	15/03/2017	25/03/2017	10	2854
20	13/04/2017	08/07/2017	86	1088
21	26/04/2017	11/07/2017	76	1794
22	22/04/2017	23/05/2017	31	1244
23	01/05/2017	08/05/2017	7	1518
24	31/05/2017	24/08/2017	85	2595

LAMPIRAN A :

No	Tanggal pembelian	Tanggal Servis	Umur (hari)	Penggunaan (X km)
…				
53	09/11/2017	29/01/2018	81	1953
54	24/12/2017	31/12/2017	7	2232
55	11/01/2018	10/02/2018	30	2291
56	21/01/2018	03/03/2018	41	2295
57	02/01/2018	19/03/2018	76	2303
58	17/02/2018	03/05/2018	75	2473
59	06/03/2018	25/04/2018	50	2558
60	20/03/2018	31/03/2018	11	2699
61	19/03/2018	16/06/2018	89	2711
62	11/04/2018	27/04/2018	16	2813
63	12/04/2018	20/04/2018	8	2815
64	21/04/2018	16/07/2018	86	1126
65	28/04/2018	14/05/2018	16	1788
66	01/05/2018	27/07/2018	87	2683
67	29/05/2018	08/06/2018	10	1739
68	04/06/2018	04/08/2018	61	1909
69	08/07/2018	13/07/2018	5	1676
70	27/06/2018	13/07/2018	16	1587
71	16/07/2018	22/07/2018	6	2574
72	28/07/2018	11/08/2018	14	1780

LAMPIRAN B

Uji Distribusi Data dengan *Easy Fit*

1. Kapasitas mesin 125 CC

Tabel B. 1 Uji Distribusi Umur

No	Distribusi	Statistik
1	Weibull	0,04939
2	Normal	0,05012
3	Gen. Extreme value	0,05142
4	Wakeby	0,05421
5	Dagum	0,05475

Tabel B. 2 Uji Distribusi Penggunaan

No	Distribusi	Statistik
1	Weibull	0,04296
2	Wakeby	0,04561
3	Burr	0,04829
4	Gumbel Min	0,04852
5	Gen. Extreme Value	0,05335

2. Kapasitas mesin 150 CC

Tabel B. 3 Uji Distribusi Umur

No	Distribusi	Statistik
1	Weibull	0,0546
2	Dagum	0,05523
3	Gen.Extreme Value	0,0574
4	Burr	0,05995
5	Gen.Logistic	0,06153

Tabel B. 4 Uji Distribusi Penggunaan

No	Distribusi	Statistik
1	Weibull	0,03081
2	Weibull (3P)	0,03142
3	Gen.Extreme Value	0,03161
4	Burr	0,03183
5	Wakeby	0,03227

3. Kapasitas mesin 250 CC

Tabel B. 5 Uji Distribusi Umur

No	Distribusi	Statistik
1	Beta	0,011359
2	Wakeby	0,12621
3	Gen.Pareto	0,12621
4	Johnson SB	0,13004
5	Log-Logistic (3P)	0,13073
6	Exponential	0,13107

Tabel B. 6 Uji Distribusi Penggunaan

No	Distribusi	Statistik
1	Wakeby	0,05042
2	Gen.Pareto	0,05079
3	Gamma	0,0523
4	Pareto 2	0,05269
5	Exponential	0,05306

LAMPIRAN C

Tabel C. 1 Uji Mann untuk penggunaan distribusi Weibull 125 CC

i	ti	ln ti	$\frac{i-0,5}{n+0.25}$	$ln\left(1-\frac{i-0,5}{n+0,25}\right)$	Z_i	M_i	$\frac{ln\,t_{i+1}-ln\,t_i}{M_i}$
1	1004	6,91175	0,000598	-0,000598086	-7,42178	1,099211	0,003617276
2	1008	6,91572	0,001794	-0,001795333	-6,32256	0,511425	0,021222252
3	1019	6,92658	0,00299	-0,002994014	-5,81114	0,337072	0,011622839
4	1023	6,93049	0,004185	-0,004194134	-5,47407	0,251915	0,015491131
5	1027	6,9344	0,005381	-0,005395697	-5,22215	0,201272	0,019313575
6	1031	6,93828	0,006577	-0,006598704	-5,02088	0,167656	0,005782462
7	1032	6,93925	0,007773	-0,007803161	-4,85323	0,143703	0
8	1032	6,93925	0,008969	-0,00900907	-4,70952	0,125766	0,007701002
9	1033	6,94022	0,010164	-0,010216435	-4,58376	0,111829	0,043178392
10	1038	6,94505	0,01136	-0,01142526	-4,47193	0,100687	0,009563535
11	1039	6,94601	0,012556	-0,012635547	-4,37124	0,091576	0,010504911
12	1040	6,94698	0,013752	-0,013847301	-4,27966	0,083987	0,03429663
13	1043	6,94986	0,014948	-0,015060526	-4,19568	0,077567	0,123017278
14	1053	6,9594	0,016143	-0,016275224	-4,11811	0,072065	0,013171616
15	1054	6,96035	0,017339	-0,017491399	-4,04605	0,067298	0
16	1054	6,96035	0,018535	-0,018709055	-3,97875	0,063128	0,060003254
17	1058	6,96414	0,019731	-0,019928196	-3,91562	0,059449	0,063476372
18	1062	6,96791	0,020927	-0,021148824	-3,85617	0,056179	0
19	1062	6,96791	0,022123	-0,022370945	-3,79999	0,053253	0
20	1062	6,96791	0,023318	-0,023594561	-3,74674	0,050621	0,018592792
21	1063	6,96885	0,024514	-0,024819676	-3,69612	0,048239	0,01949245
22	1064	6,96979	0,02571	-0,026046294	-3,64788	0,046074	0
23	1064	6,96979	0,026906	-0,027274418	-3,60181	0,044097	0,021303189
24	1065	6,97073	0,028102	-0,028504052	-3,55771	0,042285	0

LAMPIRAN C :

i	ti	ln ti	$\frac{i-0,5}{n+0.25}$	$ln\left(1-\frac{i-0,5}{n+0,25}\right)$	Z_i	M_i	$\frac{ln\, t_{i+1}-ln\, t_i}{M_i}$
...							
818	1876	7,5369	0,977578	-3,797733859	1,334405	0,014329	0,776892299
819	1897	7,54803	0,978774	-3,852542096	1,348733	0,01494	0,387018896
820	1908	7,55381	0,97997	-3,910529353	1,363673	0,015619	0,70082512
821	1929	7,56476	0,981166	-3,972087246	1,379292	0,01638	0,094873763
822	1932	7,56631	0,982362	-4,037684529	1,395671	0,017238	0,119983389
823	1936	7,56838	0,983558	-4,107888787	1,412909	0,018214	0
824	1936	7,56838	0,984753	-4,18339634	1,431123	0,019336	0,053398583
825	1938	7,56941	0,985949	-4,265074371	1,45046	0,02064	0
826	1938	7,56941	0,987145	-4,354021857	1,4711	0,022177	0,023261004
827	1939	7,56993	0,988341	-4,451660326	1,493277	0,024018	0,021467245
828	1940	7,57044	0,989537	-4,559873911	1,517295	0,026267	0,137121149
829	1947	7,57405	0,990732	-4,681234768	1,543562	0,029084	0
830	1947	7,57405	0,991928	-4,819385107	1,572646	0,032729	0,015688864
831	1948	7,57456	0,993124	-4,979727757	1,605375	0,037649	0,027256234
832	1950	7,57558	0,99432	-5,170782993	1,643024	0,044702	0,045840872
833	1954	7,57763	0,995516	-5,407171771	1,687726	0,055775	0,182579267
834	1974	7,58782	0,996712	-5,7173267	1,743501	0,076086	0,013309398
835	1976	7,58883	0,997907	-6,169311824	1,819587	0,128693	0,015713735
836	1980	7,59085	0,999103	-7,016609684	1,94828	0	

LAMPIRAN C :

Tabel C. 2 Uji Mann untuk umur distribusi Weibull 125 CC

i	ti	ln ti	$\frac{i-0,5}{n+0,25}$	$ln\left(1-\frac{i-0,5}{n+0,25}\right)$	Z_i	M_i	$\frac{ln\, t_{i+1}-ln\, t_i}{M_i}$
1	10	2,302585	0,000598	-0,000598086	-7,42178	1,099211	0
2	10	2,302585	0,001794	-0,001795333	-6,32256	0,511425	0
3	10	2,302585	0,00299	-0,002994014	-5,81114	0,337072	0
4	10	2,302585	0,004185	-0,004194134	-5,47407	0,251915	0
5	10	2,302585	0,005381	-0,005395697	-5,22215	0,201272	0,473540135
6	11	2,397895	0,006577	-0,006598704	-5,02088	0,167656	0
7	11	2,397895	0,007773	-0,007803161	-4,85323	0,143703	0
8	11	2,397895	0,008969	-0,00900907	-4,70952	0,125766	0
9	11	2,397895	0,010164	-0,010216435	-4,58376	0,111829	0
10	11	2,397895	0,01136	-0,01142526	-4,47193	0,100687	0
11	11	2,397895	0,012556	-0,012635547	-4,37124	0,091576	0
12	11	2,397895	0,013752	-0,013847301	-4,27966	0,083987	0
13	11	2,397895	0,014948	-0,015060526	-4,19568	0,077567	0
14	11	2,397895	0,016143	-0,016275224	-4,11811	0,072065	0
15	11	2,397895	0,017339	-0,017491399	-4,04605	0,067298	0
16	11	2,397895	0,018535	-0,018709055	-3,97875	0,063128	0
17	11	2,397895	0,019731	-0,019928196	-3,91562	0,059449	1,463637388
18	12	2,484907	0,020927	-0,021148824	-3,85617	0,056179	0
19	12	2,484907	0,022123	-0,022370945	-3,79999	0,053253	0
20	12	2,484907	0,023318	-0,023594561	-3,74674	0,050621	0
21	12	2,484907	0,024514	-0,024819676	-3,69612	0,048239	0
22	12	2,484907	0,02571	-0,026046294	-3,64788	0,046074	0
23	12	2,484907	0,026906	-0,027274418	-3,60181	0,044097	0
24	12	2,484907	0,028102	-0,028504052	-3,55771	0,042285	0

LAMPIRAN C :

i	ti	ln ti	$\frac{i-0,5}{n+0,25}$	$ln\left(1-\frac{i-0,5}{n+0,25}\right)$	Z_i	M_i	$\frac{ln\,t_{i+1}-ln\,t_i}{M_i}$
…							
820	43	3,7612	0,97997	-3,910529353	1,363673	0,015619	1,471897958
821	44	3,78419	0,981166	-3,972087246	1,379292	0,01638	0
822	44	3,78419	0,982362	-4,037684529	1,395671	0,017238	1,303694148
823	45	3,806662	0,983558	-4,107888787	1,412909	0,018214	1,206689519
824	46	3,828641	0,984753	-4,18339634	1,431123	0,019336	1,11222615
825	47	3,850148	0,985949	-4,265074371	1,45046	0,02064	1,020011503
826	48	3,871201	0,987145	-4,354021857	1,4711	0,022177	7,748978112
827	57	4,043051	0,988341	-4,451660326	1,493277	0,024018	1,435856778
828	59	4,077537	0,989537	-4,559873911	1,517295	0,026267	0,639858194
829	60	4,094345	0,990732	-4,681234768	1,543562	0,029084	0
830	60	4,094345	0,991928	-4,819385107	1,572646	0,032729	0
831	60	4,094345	0,993124	-4,979727757	1,605375	0,037649	0,439038062
832	61	4,110874	0,99432	-5,170782993	1,643024	0,044702	0,363753345
833	62	4,127134	0,995516	-5,407171771	1,687726	0,055775	0
834	62	4,127134	0,996712	-5,7173267	1,743501	0,076086	0
835	62	4,127134	0,997907	-6,169311824	1,819587	0,128693	0,246701329
836	64	4,158883	0,999103	-7,016609684	1,94828	0	0

LAMPIRAN C :

Tabel C. 3 Uji Mann untuk umur distribusi Weibull 150 CC

i	ti	ln ti	$\frac{i-0,5}{n+0,25}$	$ln\left(1-\frac{i-0,5}{n+0,25}\right)$	Z_i	M_i	$\frac{ln\,t_{i+1}-ln\,t_i}{M_i}$
1	6	1,791759	0,0009916	-0,000992064	-6,91572	1,099606	0
2	6	1,791759	0,0029747	-0,002979148	-5,81612	0,51182	0
3	6	1,791759	0,0049579	-0,004970189	-5,3043	0,337469	0,456785049
4	7	1,94591	0,006941	-0,006965202	-4,96683	0,252313	0,529229977
5	8	2,079442	0,0089241	-0,008964203	-4,71452	0,201671	0
6	8	2,079442	0,0109073	-0,010967209	-4,51285	0,168056	0,700857568
7	9	2,197225	0,0128904	-0,012974234	-4,34479	0,144104	0
8	9	2,197225	0,0148736	-0,014985295	-4,20069	0,126168	0,835081032
9	10	2,302585	0,0168567	-0,017000409	-4,07452	0,112232	0
10	10	2,302585	0,0188399	-0,019019592	-3,96229	0,101092	0
11	10	2,302585	0,020823	-0,021042861	-3,86119	0,091982	0
12	10	2,302585	0,0228061	-0,023070231	-3,76921	0,084393	0
13	10	2,302585	0,0247893	-0,02510172	-3,68482	0,077974	1,222326204
14	11	2,397895	0,0267724	-0,027137344	-3,60684	0,072474	0
15	11	2,397895	0,0287556	-0,02917712	-3,53437	0,067708	0
16	11	2,397895	0,0307387	-0,031221066	-3,46666	0,063539	1,369418582
17	12	2,484907	0,0327219	-0,033269197	-3,40312	0,059861	0
18	12	2,484907	0,034705	-0,035321533	-3,34326	0,056592	0
19	12	2,484907	0,0366882	-0,037378089	-3,28667	0,053668	0
20	12	2,484907	0,0386713	-0,039438883	-3,233	0,051036	0
21	12	2,484907	0,0406544	-0,041503932	-3,18197	0,048655	0
22	12	2,484907	0,0426376	-0,043573256	-3,13331	0,046491	0
23	12	2,484907	0,0446207	-0,04564687	-3,08682	0,044516	0
24	12	2,484907	0,0466039	-0,047724792	-3,0423	0,042705	0

LAMPIRAN C :

i	ti	ln ti	$\frac{i-0,5}{n+0,25}$	$ln\left(1-\frac{i-0,5}{n+0,25}\right)$	Z_i	M_i	$\frac{ln\, t_{i+1} - ln\, t_i}{M_i}$
…							
489	167	5,117994	0,9687655	-3,466231812	1,243068	0,018748	2,799801473
490	176	5,170484	0,9707486	-3,531829094	1,261816	0,019683	0
491	176	5,170484	0,9727318	-3,602033353	1,281499	0,020746	0
492	176	5,170484	0,9747149	-3,677540905	1,302244	0,021967	0
493	176	5,170484	0,9766981	-3,759218936	1,324211	0,023386	0
494	176	5,170484	0,9786812	-3,848166422	1,347597	0,025056	0
495	176	5,170484	0,9806644	-3,945804892	1,372653	0,027056	0
496	176	5,170484	0,9826475	-4,054018476	1,399709	0,029497	0
497	176	5,170484	0,9846306	-4,175379333	1,429205	0,032551	0
498	176	5,170484	0,9866138	-4,313529672	1,461757	0,036498	0,309595461
499	178	5,181784	0,9885969	-4,473872322	1,498254	0,041818	0,662456726
500	183	5,209486	0,9905801	-4,664927559	1,540072	0,049432	0,328950561
501	186	5,225747	0,9925632	-4,901316337	1,589504	0,061358	0,087387272
502	187	5,231109	0,9945464	-5,211471265	1,650862	0,083172	0
503	187	5,231109	0,9965295	-5,663456389	1,734034	0,139421	0
504	187	5,231109	0,9985126	-6,510754249	1,873455	-1,87346	2,792224928

LAMPIRAN C :

Tabel C. 4 Uji Mann untuk penggunaan distribusi Weibull 150 CC

i	ti	ln ti	$\frac{i-0,5}{n+0,25}$	$ln\left(1-\frac{i-0,5}{n+0,25}\right)$	Z_i	M_i	$\frac{ln\,t_{i+1}-ln\,t_i}{M_i}$
1	1003	6,910750788	0,000991572	-0,000992064	-6,91572	1,09961	0,02680205
2	1033	6,940222469	0,002974715	-0,002979148	-5,81612	0,51182	0,022565911
3	1045	6,951772164	0,004957858	-0,004970189	-5,3043	0,33747	0,025411433
4	1054	6,960347729	0,006941001	-0,006965202	-4,96683	0,25231	0,029968668
5	1062	6,967909202	0,008924145	-0,008964203	-4,71452	0,20167	0,004666902
6	1063	6,968850378	0,010907288	-0,010967209	-4,51285	0,16806	0,027923148
7	1068	6,97354302	0,012890431	-0,012974234	-4,34479	0,1441	0,045334756
8	1075	6,980075941	0,014873575	-0,014985295	-4,20069	0,12617	0,160567794
9	1097	7,00033446	0,016856718	-0,017000409	-4,07452	0,11223	0,184880139
10	1120	7,021083964	0,018839861	-0,019019592	-3,96229	0,10109	0,079171669
11	1129	7,029087564	0,020823004	-0,021042861	-3,86119	0,09198	0,048041277
12	1134	7,033506484	0,022806148	-0,023070231	-3,76921	0,08439	0,031305924
13	1137	7,036148494	0,024789291	-0,02510172	-3,68482	0,07797	0,056273536
14	1142	7,04053639	0,026772434	-0,027137344	-3,60684	0,07247	0,060279865
15	1147	7,044905117	0,028755578	-0,02917712	-3,53437	0,06771	0,102653821
16	1155	7,051855623	0,030738721	-0,031221066	-3,46666	0,06354	0
17	1155	7,051855623	0,032721864	-0,033269197	-3,40312	0,05986	0,072161765
18	1160	7,056175284	0,034705007	-0,035321533	-3,34326	0,05659	0,015226518
19	1161	7,057036982	0,036688151	-0,037378089	-3,28667	0,05367	0,048085805
20	1164	7,059617628	0,038671294	-0,039438883	-3,233	0,05104	0,03363781
21	1166	7,061334367	0,040654437	-0,041503932	-3,18197	0,04866	0,105488925
22	1172	7,06646697	0,042637581	-0,043573256	-3,13331	0,04649	0,054987642
23	1175	7,069023427	0,044620724	-0,04564687	-3,08682	0,04452	0
24	1175	7,069023427	0,046603867	-0,047724792	-3,0423	0,04271	0,178675205

LAMPIRAN C :

i	ti	ln ti	$\frac{i-0,5}{n+0,25}$	$ln\left(1-\frac{i-0,5}{n+0,25}\right)$	Z_i	M_i	$\frac{ln\,t_{i+1}-ln\,t_i}{M_i}$
…							
490	1963	7,582229194	0,970748637	-3,531829094	1,261816	0,01968	0,180851371
491	1970	7,585788822	0,97273178	-3,602033353	1,281499	0,02075	0,048911775
492	1972	7,586803535	0,974714923	-3,677540905	1,302244	0,02197	0
493	1972	7,586803535	0,976698066	-3,759218936	1,324211	0,02339	0,065003413
494	1975	7,588323677	0,97868121	-3,848166422	1,347597	0,02506	0,040395056
495	1977	7,589335823	0,980664353	-3,945804892	1,372653	0,02706	0,018690703
496	1978	7,589841512	0,982647496	-4,054018476	1,399709	0,0295	0
497	1978	7,589841512	0,98463064	-4,175379333	1,429205	0,03255	0,062062109
498	1982	7,591861715	0,986613783	-4,313529672	1,461757	0,0365	0
499	1982	7,591861715	0,988596926	-4,473872322	1,498254	0,04182	0,060249864
500	1987	7,594381243	0,990580069	-4,664927559	1,540072	0,04943	0,020352128
501	1989	7,595387279	0,992563213	-4,901316337	1,589504	0,06136	0,032742728
502	1993	7,59739632	0,994546356	-5,211471265	1,650862	0,08317	0,018084616
503	1996	7,598900457	0,996529499	-5,663456389	1,734034	0,13942	0
504	1996	7,598900457	0,998512643	-6,510754249	1,873455	-1,8735	-1,441367989

LAMPIRAN C

Tabel C5. Uji Kolmogorov-Smirnov untuk Data Umur Kapasitas Mesin 250 CC

NO	RESI1	RESI1 TERURUT	Fi	Fkum	n	mean	st dev	Fs = Fkum/n	xi-xbar	z=(xi-xbar)/sd	F t (Z tabel)	Fs-Ft	D maks
1	19	5	1	1	72	38,3750	29,1878	0,0139	-33,3750	-1,1435	0,1264	0,1125	0,1324
2	48	6	1	2		38,3750	29,1878	0,0278	-32,3750	-1,1092	0,1337	0,1059	
3	7	6	1	3		38,3750	29,1878	0,0417	-32,3750	-1,1092	0,1337	0,0920	
4	35	6	1	4		38,3750	29,1878	0,0556	-32,3750	-1,1092	0,1337	0,0781	
5	24	7	1	5		38,3750	29,1878	0,0694	-31,3750	-1,0749	0,1412	0,0718	
6	16	7	1	6		38,3750	29,1878	0,0833	-31,3750	-1,0749	0,1412	0,0579	
7	10	7	1	7		38,3750	29,1878	0,0972	-31,3750	-1,0749	0,1412	0,0440	
8	13	7	1	8		38,3750	29,1878	0,1111	-31,3750	-1,0749	0,1412	0,0301	
9	20	8	1	9		38,3750	29,1878	0,1250	-30,3750	-1,0407	0,1490	0,0240	
10	18	9	1	10		38,3750	29,1878	0,1389	-29,3750	-1,0064	0,1571	0,0182	
11	21	10	1	11		38,3750	29,1878	0,1528	-28,3750	-0,9722	0,1655	0,0127	
12	67	10	1	12		38,3750	29,1878	0,1667	-28,3750	-0,9722	0,1655	0,0012	
13	38	10	1	13		38,3750	29,1878	0,1806	-28,3750	-0,9722	0,1655	0,0151	
14	6	11	1	14		38,3750	29,1878	0,1944	-27,3750	-0,9379	0,1742	0,0203	
15	28	11	1	15		38,3750	29,1878	0,2083	-27,3750	-0,9379	0,1742	0,0342	
16	21	13	1	16		38,3750	29,1878	0,2222	-25,3750	-0,8694	0,1923	0,0299	
17	19	13	1	17		38,3750	29,1878	0,2361	-25,3750	-0,8694	0,1923	0,0438	
18	81	13	1	18		38,3750	29,1878	0,2500	-25,3750	-0,8694	0,1923	0,0577	
19	10	14	1	19		38,3750	29,1878	0,2639	-24,3750	-0,8351	0,2018	0,0621	
20	86	16	1	20		38,3750	29,1878	0,2778	-22,3750	-0,7666	0,2217	0,0561	

LAMPIRAN C :

NO	RESI1	RESI1 TERURUT	Fi	Fkum	n	mean	st dev	Fs = Fkum/n	xi-xbar	z=(xi-xbar)/sd	F t (Z tabel)	Fs-Ft	D maks
...													
58	75	75	1	58		38,3750	29,1878	0,8056	36,6250	1,2548	0,8952	0,0897	
59	50	76	1	59		38,3750	29,1878	0,8194	37,6250	1,2891	0,9013	0,0819	
60	11	76	1	60		38,3750	29,1878	0,8333	37,6250	1,2891	0,9013	0,0680	
61	89	77	1	61		38,3750	29,1878	0,8472	38,6250	1,3233	0,9071	0,0599	
62	16	80	1	62		38,3750	29,1878	0,8611	41,6250	1,4261	0,9231	0,0620	
63	8	81	1	63		38,3750	29,1878	0,8750	42,6250	1,4604	0,9279	0,0529	
64	86	81	1	64		38,3750	29,1878	0,8889	42,6250	1,4604	0,9279	0,0390	
65	16	81	1	65		38,3750	29,1878	0,9028	42,6250	1,4604	0,9279	0,0251	
66	87	83	1	66		38,3750	29,1878	0,9167	44,6250	1,5289	0,9369	0,0202	
67	10	85	1	67		38,3750	29,1878	0,9306	46,6250	1,5974	0,9449	0,0144	
68	61	86	1	68		38,3750	29,1878	0,9444	47,6250	1,6317	0,9486	0,0042	
69	5	86	1	69		38,3750	29,1878	0,9583	47,6250	1,6317	0,9486	0,0097	
70	16	86	1	70		38,3750	29,1878	0,9722	47,6250	1,6317	0,9486	0,0236	
71	6	87	1	71		38,3750	29,1878	0,9861	48,6250	1,6659	0,9521	0,0340	
72	14	89	1	72		38,3750	29,1878	1,0000	50,6250	1,7345	0,9586	0,0414	

LAMPIRAN C :

Tabel C6. Uji Kolmogorov-Smirnov untuk Data Penggunaan Kapasitas Mesin 250 CC)

NO	RESI1	RESI1 T	Fi	Fkum	n	mean	st dev	Fs = Fku	xi-xbar	z=(xi-xb	F t (Z tab	Fs-Ft	D maks
1	1666	785	1	1	72	1672,8056	642,6210	0,0139	-887,8056	-1,3815	0,0836	0,0697	0,0952
2	826	826	1	2		1672,8056	642,6210	0,0278	-846,8056	-1,3177	0,0938	0,0660	
3	1427	829	1	3		1672,8056	642,6210	0,0417	-843,8056	-1,3131	0,0946	0,0529	
4	1431	841	1	4		1672,8056	642,6210	0,0556	-831,8056	-1,2944	0,0978	0,0422	
5	988	847	1	5		1672,8056	642,6210	0,0694	-825,8056	-1,2851	0,0994	0,0299	
6	2504	862	1	6		1672,8056	642,6210	0,0833	-810,8056	-1,2617	0,1035	0,0202	
7	1770	877	1	7		1672,8056	642,6210	0,0972	-795,8056	-1,2384	0,1078	0,0106	
8	829	885	1	8		1672,8056	642,6210	0,1111	-787,8056	-1,2259	0,1101	0,0010	
9	1325	893	1	9		1672,8056	642,6210	0,1250	-779,8056	-1,2135	0,1125	0,0125	
10	877	899	1	10		1672,8056	642,6210	0,1389	-773,8056	-1,2041	0,1143	0,0246	
11	1260	921	1	11		1672,8056	642,6210	0,1528	-751,8056	-1,1699	0,1210	0,0318	
12	1313	935	1	12		1672,8056	642,6210	0,1667	-737,8056	-1,1481	0,1255	0,0412	
13	1325	952	1	13		1672,8056	642,6210	0,1806	-720,8056	-1,1217	0,1310	0,0496	
14	1514	988	1	14		1672,8056	642,6210	0,1944	-684,8056	-1,0656	0,1433	0,0512	
15	2855	1004	1	15		1672,8056	642,6210	0,2083	-668,8056	-1,0407	0,1490	0,0593	
16	2018	1088	1	16		1672,8056	642,6210	0,2222	-584,8056	-0,9100	0,1814	0,0408	
17	2417	1121	1	17		1672,8056	642,6210	0,2361	-551,8056	-0,8587	0,1953	0,0409	
18	2729	1126	1	18		1672,8056	642,6210	0,2500	-546,8056	-0,8509	0,1974	0,0526	
19	2854	1166	1	19		1672,8056	642,6210	0,2639	-506,8056	-0,7887	0,2152	0,0487	
20	1088	1168	1	20		1672,8056	642,6210	0,2778	-504,8056	-0,7855	0,2161	0,0617	

LAMPIRAN C :

NO	RESI1	RESI1 T	Fi	Fkum	n	mean	st dev	Fs = Fku	xi-xbar	z=(xi-xb	F t (Z tab	Fs-Ft	D maks
...													
53	1953	2018	1	53		1672,8056	642,6210	0,7361	345,1944	0,5372	0,7044	0,0317	
54	2232	2232	1	54		1672,8056	642,6210	0,7500	559,1944	0,8702	0,8079	0,0579	
55	2291	2291	1	55		1672,8056	642,6210	0,7639	618,1944	0,9620	0,8320	0,0681	
56	2295	2295	1	56		1672,8056	642,6210	0,7778	622,1944	0,9682	0,8335	0,0558	
57	2303	2303	1	57		1672,8056	642,6210	0,7917	630,1944	0,9807	0,8366	0,0450	
58	2473	2417	1	58		1672,8056	642,6210	0,8056	744,1944	1,1581	0,8766	0,0710	
59	2558	2473	1	59		1672,8056	642,6210	0,8194	800,1944	1,2452	0,8935	0,0740	
60	2699	2504	1	60		1672,8056	642,6210	0,8333	831,1944	1,2934	0,9021	0,0687	
61	2711	2558	1	61		1672,8056	642,6210	0,8472	885,1944	1,3775	0,9158	0,0686	
62	2813	2574	1	62		1672,8056	642,6210	0,8611	901,1944	1,4024	0,9196	0,0585	
63	2815	2595	1	63		1672,8056	642,6210	0,8750	922,1944	1,4351	0,9244	0,0494	
64	1126	2671	1	64		1672,8056	642,6210	0,8889	998,1944	1,5533	0,9398	0,0509	
65	1788	2683	1	65		1672,8056	642,6210	0,9028	1010,1944	1,5720	0,9420	0,0392	
66	2683	2699	1	66		1672,8056	642,6210	0,9167	1026,1944	1,5969	0,9449	0,0282	
67	1739	2711	1	67		1672,8056	642,6210	0,9306	1038,1944	1,6156	0,9469	0,0163	
68	1909	2729	1	68		1672,8056	642,6210	0,9444	1056,1944	1,6436	0,9499	0,0054	
69	1676	2813	1	69		1672,8056	642,6210	0,9583	1140,1944	1,7743	0,9620	0,0037	
70	1587	2815	1	70		1672,8056	642,6210	0,9722	1142,1944	1,7774	0,9622	0,0100	
71	2574	2854	1	71		1672,8056	642,6210	0,9861	1181,1944	1,8381	0,9670	0,0191	
72	1780	2855	1	72		1672,8056	642,6210	1,0000	1182,1944	1,8396	0,9671	0,0329	

LAMPIRAN D

Estimasi Parameter Distribusi Weibull

Estimasi Parameter dengan menggunakan Metode *Maximum Likelihood Estimation*

A. Fungsi *ln likelihood* diturunkan terhadap parameter θ_1

misalkan, $H_1(\hat{\theta}) = \frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \theta_1}$

$$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(n(\ln \beta_1 + \ln \beta_2 - \beta_1 \ln \theta_1 - \beta_2 \ln \theta_2)) + \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left((\beta_1 - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln u_i + (\beta_2 - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln w_i\right) - \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right) = 0$$

$$-n\frac{\beta_1}{\theta_1} - \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right) = 0$$

$$-n\frac{\beta_1}{\theta_1} - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{u_i}{\theta_1^2}\right)\right) = 0$$

$$-n\frac{\beta_1}{\theta_1} + \beta_1\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1 - 1} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1^2}\right)\right) = 0$$

$$-n\frac{\beta_1}{\theta_1} + \beta_1\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\theta_1}{u_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1^2}\right)\right) = 0$$

$$-n\frac{\beta_1}{\theta_1} + \beta_1\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{1}{\theta_1}\right)\right) = 0$$

$$-n\frac{\beta_1}{\theta_1} + \frac{\beta_1}{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \theta_1} = -n\frac{\beta_1}{\theta_1} + \frac{\beta_1}{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right) = 0$$

B. Fungsi *ln likelihood* diturunkan terhadap parameter θ_2

misalkan, $H_2(\hat{\theta}) = \frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \theta_2}$

$$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial \theta_2} = 0$$

$\frac{\partial}{\partial\theta_2}(n(\ln\beta_1+\ln\beta_2-\beta_1\ln\theta_1-\beta_2\ln\theta_2))+\frac{\partial}{\partial\theta_2}\ ((\beta_1-1)\sum_{i=1}^{n}\ln u_i+(\beta_2-1)\sum_{i=1}^{n}\ln w_i)-\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)=0$

$-n\frac{\beta_1}{\theta_1}+\beta_2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_1-1}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{w_i}{\theta_2^2}\right)\right)=0$

$-n\frac{\beta_2}{\theta_2}+\beta_2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\left(\frac{\theta_2}{w_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2^2}\right)\right)=0$

$-n\frac{\beta_2}{\theta_2}+\beta_2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\left(\frac{1}{\theta_2}\right)\right)=0$

$-n\frac{\beta_2}{\theta_2}+\frac{\beta_2}{\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)=0$

$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial\theta_2}=-n\frac{\beta_2}{\theta_2}+\frac{\beta_2}{\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)=0$

C. Fungsi *ln likelihood* diturunkan terhadap parameter β_1 misalkan, $H_3(\hat{\theta})=\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial\beta_1}$

$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial\beta_1}=0$

$\frac{\partial}{\partial\beta_1}(n(\ln\beta_1+\ln\beta_2-\beta_1\ln\theta_1-\beta_2\ln\theta_2))+\frac{\partial}{\partial\beta_1}\ ((\beta_1-1)\sum_{i=1}^{n}\ln u_i+(\beta_2-1)\sum_{i=1}^{n}\ln w_i)-\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)=0$

$\frac{n}{\beta_1}-n\, ln\theta_1+\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left((\beta_1-1)\sum_{i=1}^{n}\ln u_i\right)-\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)=0$

$\frac{n}{\beta_1}-n\ln\theta_1+\sum_{i=1}^{n}\ln u_i-\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)=0$

$\frac{n}{\beta_1}-n\ln\theta_1+\sum_{i=1}^{n}\ln u_i-\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(e^{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}\right)=0$

$\frac{n}{\beta_1} - n \ln \theta_1 + \sum_{i=1}^{n} \ln u_i \ -$
$\left(e^{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}\right) \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right) \beta_1\right) = 0$
$\frac{n}{\beta_1} - n \ln \theta_1 +$
$\sum_{i=1}^{n} \ln u_i - \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right) . \frac{\partial}{\partial \beta_1} \ (\beta_1) \ . e^{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} \ = 0$

$$\frac{n}{\beta_1} - n \ln \theta_1 + \sum_{i=1}^{n} \ln u_i - 1 \ \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right) e^{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}} \ = 0$$

$\frac{n}{\beta_1} - n \ln \theta_1 + \ \sum_{i=1}^{n} \ln u_i - \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} = 0$
$\frac{n}{\beta_1} - n \ln \theta_1 + \ \sum_{i=1}^{n} \ln u_i - \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right] = 0$
$\frac{\partial lnL(\widehat{\theta})}{\partial \beta_1} = \ \frac{n}{\beta_1} - n \ln \theta_1 + \ \sum_{i=1}^{n} \ln u_i -$
$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right] = 0$

D. Fungsi *ln likelihood* diturunkan terhadap parameter β_2 misalkan, $H_4(\hat{\theta}) = \frac{\partial lnL(\widehat{\theta})}{\partial \beta_2}$
$\frac{\partial lnL(\widehat{\theta})}{\partial \beta_2} = 0$
$\frac{\partial}{\partial \beta_2}(n(\ln \beta_1 + \ln \beta_2 - \beta_1 \ln \theta_1 - \beta_2 \ln \theta_2)) + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \ ((\beta_1 - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln u_i + (\beta_2 - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln w_i) - \ \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right) = 0$
$\frac{n}{\beta_2} - n \ ln\theta_2 + \frac{\partial}{\partial \beta_1}\left((\beta_2 - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln w_i\right) -$
$\frac{\partial}{\partial \beta_2}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right) = 0$
$\frac{n}{\beta_2} - n \ln \theta_2 + \sum_{i=1}^{n} \ln w_i - \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right) = 0$

$$\frac{n}{\beta_2} - n\ln\theta_2 + \sum_{i=1}^{n}\ln w_i - \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(e^{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}\right) = 0$$

$$\frac{n}{\beta_2} - n\ln\theta_2 + \sum_{i=1}^{n}\ln w_i - \left(e^{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\beta_2\right) = 0$$

$$\frac{n}{\beta_2} - n\ln\theta_2 + \sum_{i=1}^{n}\ln w_i - \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right).\frac{\partial}{\partial\beta_2}\ (\beta_2)\ .\, e^{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} = 0$$

$$\frac{n}{\beta_2} - n\ln\theta_2 + \sum_{i=1}^{n}\ln w_i - 1\ \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\ e^{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}} = 0$$

$$\frac{n}{\beta_2} - n\ln\theta_2 + \sum_{i=1}^{n}\ln w_i - \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right).\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2} = 0$$

$$\frac{n}{\beta_2} - n\ln\theta_2 + \sum_{i=1}^{n}\ln w_i - \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2} ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial\beta_2} = \frac{n}{\beta_2} - n\ln\theta_2 + \sum_{i=1}^{n}\ln w_i - \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2} ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\right] = 0$$

E. Turunan Kedua Parameter θ_1

$$\frac{\partial^2 ln\, L(\hat{\theta})}{\partial\theta_1^2} = \frac{\partial}{\partial\theta_1}\frac{\ln L(\hat{\theta})}{\partial\theta_1}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(-n\ \frac{\beta_1}{\theta_1} + \frac{\beta_1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(-n\ (\beta_1(\theta_1)^{-1})\right) + \frac{\partial}{\partial\theta_1}\frac{\beta_1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}$$

$$= -n\left(\frac{-\beta_1}{\theta_1^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{\beta_1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)$$

$$= n\left(\frac{\beta_1}{\theta_1^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\frac{\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{\theta_1}\right]$$

$$= n\left(\frac{\beta_1}{\theta_1^2}\right) + \beta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{\theta_1}\right]$$

$$= n\left(\frac{\beta_1}{\theta_1^2}\right) + \frac{\beta_1\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)\right)\theta_1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\theta_1}{\theta_1^2}$$

$$= n\left(\frac{\beta_1}{\theta_1^2}\right) + \frac{\left(\beta_1\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1-1}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{u_i}{\theta_1^2}\right).\theta_1\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}1\right)\right)}{\theta_1^2}$$

$$= n\left(\frac{\beta_1}{\theta_1^2}\right) + \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{u_i}{\theta_1^2}\right)\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1-1}.\theta_1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right]\beta_1}{\theta_1^2}$$

$$= n\left(\frac{\beta_1}{\theta_1^2}\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_i\beta_1}{\theta_1}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1-1} - \left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right]\beta_1}{\theta_1^2}$$

$$= n\left(\frac{\beta_1}{\theta_1^2}\right) - \frac{\beta_1^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{\theta_1^2} - \frac{\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{\theta_1^2}$$

$$= -\beta_1\left(\frac{(\beta_1+1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - n}{\theta_1^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\theta})}{\partial\theta_1^2} = -\beta_1\left(\frac{(\beta_1+1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} - n}{\theta_1^2}\right)$$

F. Turunan Kedua Parameter θ_2

$$\frac{\partial^2 \ln L(\hat{\theta})}{\partial\theta_2^2} = \frac{\partial}{\partial\theta_2}\frac{\ln L(\hat{\theta})}{\partial\theta_2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(-n\,\frac{\beta_2}{\theta_2} + \frac{\beta_2}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(-n\left(\beta_2(\theta_2)^{-1}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial\theta_2}\frac{\beta_2}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}$$

$$= -n\left(\frac{-\beta_2}{\theta_2^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\frac{\beta_2}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)$$

$$= n\left(\frac{\beta_2}{\theta_2^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta_2}\left[\frac{\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}{\theta_2}\right]$$

$$= n\left(\frac{\beta_2}{\theta_2^2}\right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}{\theta_2}\right]$$

$$= n\left(\frac{\beta_2}{\theta_2^2}\right) + \frac{\beta_2\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)\right)\theta_2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\theta_2}{\theta_2^2}$$

$$= n\left(\frac{\beta_2}{\theta_2^2}\right) + \frac{\left(\beta_2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2-1}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{w_i}{\theta_2^2}\right).\theta_2\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}1\right)\right)}{\theta_2^2}$$

$$= n\left(\frac{\beta_2}{\theta_2^2}\right) + \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{w_i}{\theta_2^2}\right)\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2-1}.\theta_2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right]\beta_2}{\theta_2^2}$$

$$= n\left(\frac{\beta_2}{\theta_2^2}\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{w_i\beta_2}{\theta_2}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2-1} - \left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right]\beta_2}{\theta_2^2}$$

$$= n\left(\frac{\beta_2}{\theta_2^2}\right) - \frac{\beta_2^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}{\theta_2^2} - \frac{\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}{\theta_2^2}$$

$$= -\beta_2\left(\frac{(\beta_2+1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2} - n}{\theta_2^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 lnL(\widehat{\theta})}{\partial\theta_2^2} = -\beta_2\left(\frac{(\beta_2+1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2} - n}{\theta_2^2}\right)$$

G. Turunan Kedua Parameter β_1

$$\frac{\partial^2 lnL(\widehat{\theta})}{\partial\beta_1^2} = \frac{\partial}{\partial\beta_1}\frac{\ln L(\widehat{\theta})}{\partial\beta_1}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{n}{\beta_1} - n\ln\theta_1 + \sum_{i=1}^{n}\ln u_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}.\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\beta_1}\frac{n}{\beta_1}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial\beta_1}n\ln\theta_1\right) + \left(\frac{\partial}{\partial\beta_1}\sum_{i=1}^{n}\ln u_i\right) -$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\beta_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)\right)$$

$$= -\frac{n}{\beta_1^2} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)\right) +$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)$$

$$-\frac{n}{\beta_1^2}+\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\ \frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)$$
$$=-\frac{n}{\beta_1^2}+\ \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)$$
$$=-\frac{n}{\beta_1^2}+\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\ln^2\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)$$
$$=-\frac{n}{\beta_1^2}+\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\ln^2\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\ln^2\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)-\frac{n}{\beta_1^2}$$
$$\frac{\partial^2 lnL(\hat{\theta})}{\partial\beta_1^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\ln^2\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)-\frac{n}{\beta_1^2}$$

H. Turunan Kedua Parameter β_2

$$\frac{\partial^2 lnL(\hat{\theta})}{\partial\beta_2^2}=\frac{\partial}{\partial\beta_2}\frac{\ln L(\hat{\theta})}{\partial\beta_2}$$
$$=\ \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{n}{\beta_2}-n\ln\theta_2+\sum_{i=1}^{n}\ln w_i-\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}.\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\right)\right)$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial\beta_2}\frac{n}{\beta_2}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial\beta_2}n\ln\theta_2\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\beta_2}\sum_{i=1}^{n}\ln w_i\right)-$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\beta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\right)\right)$$
$$=-\frac{n}{\beta_2^2}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)\right)+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\frac{\partial}{\partial\beta_2}\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\right)$$
$$=-\frac{n}{\beta_2^2}+\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\ \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)$$
$$=-\frac{n}{\beta_2^2}+\ \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)$$
$$=-\frac{n}{\beta_2^2}+\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\ln^2\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\right)$$
$$=-\frac{n}{\beta_2^2}+\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\ln^2\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\ln^2\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\right)-\frac{n}{\beta_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 lnL(\hat{\theta})}{\partial \beta_2^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{w_i}{\theta_2} \right)^{\beta_2} \ln^2 \left(\frac{w_i}{\theta_2} \right) \right) - \frac{n}{\beta_2^2}$$

I. $H_1(\hat{\theta})$ diturunkan terhadap parameter θ_2

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\theta})}{\partial \theta_2\, \partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_2} \frac{\ln L(\hat{\theta})}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(-n \frac{\beta_1}{\theta_1} + \frac{\beta_1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} \right)$$

$$= 0$$

J. $H_1(\hat{\theta})$ diturunkan terhadap parameter β_1

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\theta})}{\partial \beta_1\, \partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \beta_1} \frac{\ln L(\hat{\theta})}{\partial \theta_1}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(-n \frac{\beta_1}{\theta_1} + \frac{\beta_1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} \right)$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial \beta_1} n\ \frac{\beta_1}{\theta_1} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \beta_1}\ \ \frac{\beta_1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} \right)$$

$$= -\frac{n}{\theta_1} \frac{\partial}{\partial \beta_1}\ \beta_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{\beta_1}{\theta_1} \right) \right) +$$

$$\left(\frac{\beta_1}{\theta_1} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} \right)$$

$$= -\frac{n}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{\beta_1}{\theta_1} \right) \sum_{i=1}^{n} \left(\ln \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right) \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} \right)$$

$$= -\frac{n}{\theta_1} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1}}{\theta_1} + \frac{\beta_1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{n} \left(ln \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right) \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} \right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1}}{\theta_1} + \frac{\beta_1}{\theta_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\ln \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right) \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} \right) - \frac{n}{\theta_1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \left(ln \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right) \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} \right) - n}{\theta_1}$$

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\theta})}{\partial \beta_1\, \partial \theta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} \ln \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right) \beta_1 \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\theta_1} \right)^{\beta_1} - n}{\theta_1}$$

K. $H_1(\hat{\theta})$ diturunkan terhadap parameter β_2

$$\frac{\partial \ln L\, \hat{\theta}}{\partial \beta_2\, \partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \beta_2} \frac{\ln L(\hat{\theta})}{\partial \theta_1}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(-n\frac{\beta_1}{\theta_1}+\frac{\beta_1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)$$
$$=0$$

L. $H_2(\hat{\theta})$ diturunkan terhadap parameter β_1

$$\frac{\partial \ln L\,\hat{\theta}}{\partial\beta_1\,\partial\theta_2}=\frac{\partial}{\partial\beta_1}\frac{\ln L(\hat{\theta})}{\partial\theta_2}$$
$$=\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(-n\frac{\beta_2}{\theta_2}+\frac{\beta_2}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)$$
$$=0$$

M. $H_2(\hat{\theta})$ diturunkan terhadap parameter β_2

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\theta})}{\partial\beta_2\,\partial\theta_2}=\frac{\partial}{\partial\beta_2}\frac{\ln L(\hat{\theta})}{\partial\theta_2}$$
$$=\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(-n\frac{\beta_2}{\theta_2}+\frac{\beta_2}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)$$
$$=-\frac{n}{\theta_2}\frac{\partial}{\partial\beta_2}\beta_2+\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{\beta_2}{\theta_2}\right)\right)+$$
$$\left(\frac{\beta_2}{\theta_2}\frac{\partial}{\partial\beta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)$$
$$=-\frac{n}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}+\left(\frac{\beta_2}{\theta_2}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{w_i}{\theta_y}\right)\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)$$
$$=-\frac{n}{\theta_2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}{\theta_2}+\frac{\beta_2}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}}{\theta_2}+\frac{\beta_2}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)-\frac{n}{\theta_2}$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}+\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right)-n}{\theta_2}$$
$$\frac{\partial \ln L(\hat{\theta})}{\partial\beta_2\,\partial\theta_2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\ln\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)\beta_2\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\theta_2}\right)^{\beta_2}-n}{\theta_2}$$

N. $H_3(\hat{\theta})$ diturunkan terhadap parameter θ_1

$$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial\theta_1\,\partial\beta_1} = \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{n}{\beta_1} - n\ln\theta_1 + \sum_{i=1}^{n}\ln u_i - \right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} .\ ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\frac{n}{\beta_1}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1} n\ln\theta_1\right) + \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sum_{i=1}^{n}\ln u_i\right) -$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} .\ \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)$$

$$= 0 - \frac{n}{\theta_1} + 0 - \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)\right)$$

$$= -\frac{n}{\theta_1} - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right) +$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)$$

$$= -\frac{n}{\theta_1} - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\frac{1}{\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1-1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)$$

$$= -\frac{n}{\theta_1} - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\theta_1}{u_i}\right) u_i\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1)^{-1} + \right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1-1}\sum_{i=1}^{n} u_i\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1)^{-1}\right)$$

$$= -\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}}{\theta_1} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\beta_1\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1}\right)}{\theta_1}$$

O. $H_3(\hat{\theta})$ diturunkan terhadap parameter β_2

$$\frac{\partial lnL(\hat{\theta})}{\partial\beta_2\,\partial\beta_1} = \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{n}{\beta_1} - n\ln\theta_1 + \sum_{i=1}^{n}\ln u_i - \right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)^{\beta_1} .\ ln\left(\frac{u_i}{\theta_1}\right)\right)\right) = 0$$

LAMPIRAN E

Source Code Estimasi Parameter

```
close all
clc

U=xlsread('umur125.xlsx','A1:A836');
W=xlsread('guna125.xlsx','A1:A836');
n=length(U);
t1=0.57;
t2=0.54;
b1=0.34;
b2=0.32;



eror1=1;
eror2=1;
eror3=1;
eror4=1;
i=0;

while(eror1>0.05||eror2>0.05||eror3>0.05||eror
4>0.05)
SIGMA1=sum((U/t1).^b1);
SIGMA2=sum((W/t2).^b2);
SIGMA3=sum(log(U));
SIGMA4=sum(log(U/t1));
SIGMA5=sum(log(W));
SIGMA6=sum(log(W/t2));

g1=-n*b1/t1+b1/t1*SIGMA1;
g1t1=-b1/t1^2*((b1+1)*SIGMA1-n);
g1t2=0;
g1b1=1/t1*(sum((U/t1).^b1.*log(U/t1))*b1+SIGMA
1-n);
g1b2=0;

g2=-n*b2/t2+b2/t2*SIGMA2;
g2t1=0;
```

```
g2t2=-b2/t2^2*((b2+1)*SIGMA2-n);
g2b1=0;
g2b2=1/t2*(SIGMA2+b2*sum((W/t2).^b2.*log(W/t2)
)-n);

g3=n/b1-n*log(t1)+SIGMA3-
sum(((U/t1).^b1).*log(U/t1));
g3t1=g1b1;
g3t2=0;
g3b1=-sum(log(U/t1).*log(U/t1).*(U/t1).^b1)-
n/b1^2;
g3b2=0;

g4=n/b2-n*log(t2)+SIGMA5-
sum(((W/t2).^b2).*log(W/t2));
g4t1=0;
g4t2=g2b2;
g4b1=0;
g4b2=-sum(log(W/t2).*log(W/t2).*(W/t2).^b2)-
n/b2^2;

et1=[-g1 g1t2 g1b1 g1b2;
    -g2 g2t2 g2b1 g2b2;
    -g3 g3t2 g3b1 g3b2;
    -g4 g4t2 g4b1 g4b2];

et2=[g1t1 -g1 g1b1 g1b2;
    g2t1 -g2 g2b1 g2b2;
    g3t1 -g3 g3b1 g3b2;
    g4t1 -g4 g4b1 g4b2];

eb1=[g1t1 g1t2 -g1 g1b2;
    g2t1 g2t2 -g2 g2b2;
    g3t1 g3t2 -g3 g3b2;
    g4t1 g4t2 -g4 g4b2];

eb2=[g1t1 g1t2 g1b1 -g1;
    g2t1 g2t2 g2b1 -g2;
    g3t1 g3t2 g3b1 -g3;
```

```
    g4t1 g4t2 g4b1 -g4];

e=[g1t1 g1t2 g1b1 g1b2;
    g2t1 g2t2 g2b1 g2b2;
    g3t1 g3t2 g3b1 g3b2;
    g4t1 g4t2 g4b1 g4b2];

eror1=det(et1)/det(e);
eror2=det(et2)/det(e);
eror3=det(eb1)/det(e);
eror4=det(eb2)/det(e);

t1=t1+eror1;
t2=t2+eror2;
b1=b1+eror3;
b2=b2+eror4;

i=i+1;
fprintf('\t%d\t\t%f\t\t%f\t\t%f\t\t%f\t\t%f\t\
t%f\t\t%f\t\t%f\n',i,eror1,eror2,eror3,eror4,t
1,t2,b1,b2)

end
```

BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama lengkap Diki Enggar Sukmaningrum, lahir di Madiun pada tanggal 19 September 1997. Penulis berasal dari Kabupaten Madiun, bertempat tinggal di Desa Klumpit Rt 06 Rw 02 Kecamatan Sawahan Kabupaten Madiun. Pendidikan formal yang pernah ditempuh yaitu SDN Klumpit, SMPN 13 Madiun, dan SMAN 1 Madiun. Kemudian, penulis melanjutkan studi di departemen Matematika ITS, dengan bidang minat Matematika Terapan. Dalam bidang minat ini penulis mulai mengenal Bahasa pemrograman diantaranya adalah Minitab, *Easyfit*, MATLAB, dan java. Semasa menempuh jenjang Pendidikan S-1, penulis juga aktif dalam kegiatan non-akademis diantaranya aktif di organisasi kemahasiswaan Matematika ITS sebagai Staff di Enterpreneur Department selama 2 kepengurusan. Penulis juga mengikuti kepanitiaan acara besar yang ada di ITS seperti OMITS, Semarak Ibnu Muklah. Selama penulisan Tugas Akhir ini penulis tidak lepas dari kekurangan, untuk itu penulis mengharapkan kritik, saran dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini yang dapat dikirimkan melalui *email* ke *dikienggar190997@gmail.com.*