



TESIS - KM 185401

**DESAIN SENTRALISASI DAN
DESENTRALISASI KONTROL H_∞ DENGAN
PENDEKATAN LINEAR MATRIX INEQUALITY**

HELISYAH NUR FADHILAH
NRP 06111750010005

DOSEN PEMBIMBING:
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si.
Dr. Fatmawati, M.Si.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2019



THESIS - KM 185401

**CENTRALIZED AND DECENTRALIZED H_∞
CONTROLLER DESIGN WITH LINEAR
MATRIX INEQUALITY**

HELISYAH NUR FADHILAH
NRP 06111750010005

SUPERVISORS:

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si.
Dr. Fatmawati, M.Si.

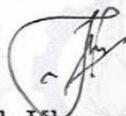
MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTATION AND DATA SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2019

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:
HELISYAH NUR FADHILAH
NRP. 06111750010005

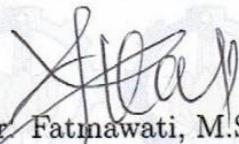
Tanggal Ujian : 29 April 2019
Periode Wisuda : September 2019

Disetujui oleh:



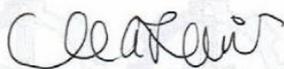
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si.
NIP 19730930 199702 1 001

(Pembimbing I)



Dr. Fatmawati, M.Si.
NIP 19730704 199802 2 001

(Pembimbing II)



Dr. Dra. Mardijah, M.T.
NIP 19670114 199102 2 001

(Penguji)

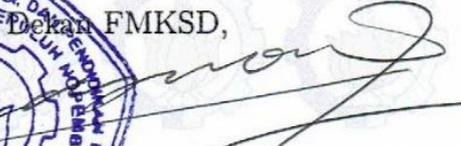


Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si.
NIP 19830517 200812 1 003

(Penguji)



Dean FMKSD,


Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

DESAIN SENTRALISASI DAN DESENTRALISASI KONTROL H_∞ DENGAN PENDEKATAN *LINEAR MATRIX INEQUALITY*

Nama Mahasiswa : Helisyah Nur Fadhilah
NRP : 06111750010005
Pembimbing : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si.
2. Dr. Fatmawati, M.Si.

ABSTRAK

Teori sistem skala besar dikhususkan untuk masalah yang muncul dari kesulitan masalah kontrol pada sistem orde besar. Metode kontrol modern telah menemukan bagaimana cara untuk menyelesaikan masalah kontrol pada sistem orde besar ke dalam sub masalah kontrol, yaitu desain desentralisasi kontrol pada sistem saling berhubungan. Sentralisasi kontrol perlu didapatkan terlebih dahulu sebelum proses untuk mendapatkan desentralisasi kontrol. Sentralisasi kontrol H_∞ dihitung dengan menggunakan pendekatan Linear Matrix Inequality (LMI) dan desentralisasi kontrol H_∞ dihitung menggunakan pendekatan Bilinear Matrix Inequality (BMI). Belum terdapat metode yang dapat menyelesaikan BMI secara langsung, oleh karena itu BMI akan diselesaikan menggunakan double LMI melalui metode homotopi secara efisien. Simulasi pertama pada sistem storey building menunjukkan bahwa sistem dengan sentralisasi kontrol H_∞ memiliki performansi yang cukup bagus. Hal ini ditunjukkan oleh grafik osilasi dimana sistem lup tertutup memiliki puncak yang lebih rendah daripada sistem open lup. Selanjutnya, hasil simulasi desain desentralisasi kontrol H_∞ pada sistem storey building menunjukkan bahwa desentralisasi kontrol H_∞ pada sistem storey building dapat mengatasi gangguan pada sistem dengan $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$.

Key-words: Sentralisasi kontrol, Desentralisasi kontrol, *Linear Matrix Inequality*, *Bilinear Matrix Inequality*, Sistem storey building

CENTRALIZED AND DECENTRALIZED H_∞ CONTROLLER DESIGN WITH LINEAR MATRIX INEQUALITY

Name : Helisyah Nur Fadhilah
NRP : 06111750010005
Supervisors : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si.
2. Dr. Fatmawati, M.Si.

ABSTRACT

Large-scale system theory is devoted to problems that arise from the difficulty of control problems in large-order systems. Modern control methods have found ways to solve control problems in the large-order system into sub-control problems, namely the design of decentralized controls on interconnected systems. Previously, it was necessary to get centralized controller first to get decentralized controller. Centralized H_∞ controller is calculated using the Linear Matrix Inequality (LMI) approach and the decentralized H_∞ controller is calculated using by Bilinear Matrix Inequality (BMI) approach. Because there is no method that can resolve BMI directly, so BMI will be solved using double LMI through the homotopy method efficiently. The first simulation on the storey building system shows that a system with centralized H_∞ controller has a pretty good performance. This is indicated by the oscillation graph where the closed loop system has a lower peak than the open loop system. Furthermore, the simulation results of the decentralized H_∞ controller on the storey building system indicate that of decentralized H_∞ controller on storey building system have quite good performance and show that $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$.

Key-words: Centralized controller, Decentralized controller, Linear Matrix Inequality, Bilinear Matrix Inequality, Storey building systems

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis diberikan suatu kesempatan untuk menyelesaikan tesis yang berjudul

Desain Sentralisasi dan Desentralisasi Kontrol H_∞ dengan Pendekatan *Linear Matrix Inequality*

tesis ini dibuat untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Magister Program Magister Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada pihak-pihak tersebut diantaranya:

1. Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
2. Dekan Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Kepala Departemen Matematika Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
4. Kepala Program Studi Strata-2 Departemen Matematika Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
5. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si. dan Dr. Fatmawati, M.Si. selaku dosen pembimbing dalam penyelesaian tesis ini.
6. Prof. Guisheng Zhai dari SIT yang telah memberikan saran dan ide selama pengerjaan tesis ini.
7. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si. dan Dr. Dra. Mardijah, M.T. selaku dosen penguji dalam penyelesaian tesis ini.
8. Ayah, ibu, kakak, dan adik yang selalu memberikan do'a serta dukungan selama menempuh program studi Strata-2. Semoga selalu sehat dan diberi limpahan rahmat-Nya, aamiin ya robbal'alamiin.
9. Dan semua teman-teman Strata-2 Matematika ITS angkatan 2017 ganjil yang selalu mendukung selama 2 tahun perkuliahan ini.

Penulis menyadari bahwa dalam tesis ini masih terdapat kelemahan dan kekurangan, oleh karena itu penulis sangat terbuka menerima saran dan ide demi kesempurnaan penulisan selanjutnya. Penulis berharap semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, dan semua yang telah dikerjakan ini mendapat ridho dari Allah SWT.

Surabaya, Mei 2019

Helisyah Nur Fadhilah

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Penelitian-Penelitian Terkait	5
2.2 Representasi sistem linier	6
2.2.1 Deskripsi pengontrol	6
2.3 Kontrol H_∞	7
2.4 Linear Matrix Inequality pada kontrol	11
2.5 Bilinier Matrix Inequality	13
2.6 Representasi model <i>storey building</i>	14
BAB 3 METODE PENELITIAN	17
3.1 Sistem awal	17
3.2 Sentralisasi kontrol H_∞	17
3.3 Desentralisasi kontrol H_∞	17
3.4 Tahap Simulasi dan analisa	17
3.5 Penarikan kesimpulan	17
3.6 Diagram Alur Metode Penelitian	17
BAB 4 ANALISIS DAN PEMBAHASAN	19
4.1 Deskripsi sistem lup tertutup	19
4.2 <i>Linear Matrix Inequality</i>	20
4.2.1 Konstruksi kontrol H_∞ dengan pendekatan LMI	21
4.3 Sentralisasi kontrol H_∞	24
4.4 Desentralisasi kontrol H_∞	26

4.5	Metode Homotopi	33
4.6	Algoritma desain desentralisasi kontrol H_∞ secara umum	36
4.7	Studi Kasus Sistem <i>Storey Building</i>	37
4.8	Simulasi	44
4.8.1	Simulasi desain sentralisasi kontrol H_∞	44
4.8.2	Simulasi desain desentralisasi kontrol H_∞	50
4.8.3	Kasus 1	54
4.8.4	Kasus 2	55
4.8.5	Kasus 3	56
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	61
5.1	Kesimpulan	61
5.2	Saran	61
	DAFTAR PUSTAKA	63
	BIODATA PENULIS	66

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Sistem dengan dua input dan dua output. Inputnya adalah gangguan w , dan kontrol u . Outputnya adalah performansi z , dan sinyal output y	6
Gambar 2.2	Hubungan sistem dengan pengontrol	7
Gambar 2.3	Ilustrasi sistem <i>storey building</i> dengan $n = 5$	15
Gambar 3.1	Alur Pengerjaan Penelitian	18
Gambar 4.1	Ilustrasi desentralisasi kontrol	26
Gambar 4.2	Ilustrasi penentuan titik path homotopi	34
Gambar 4.3	Ilustrasi path homotopi dengan $M = 10$	35
Gambar 4.4	Ilustrasi path homotopi setelah mendapatkan solusi yang <i>infeasible</i>	35
Gambar 4.5	Diagram algoritma homotopi	37
Gambar 4.6	Diagram alir desain desentralisasi kontrol H_∞	38
Gambar 4.7	Sistem Multi <i>Mass Damping Spirng</i> pada <i>storey building</i>	39
Gambar 4.8	Sistem <i>storey building</i> pada lantai 1 (a) dan ilustrasi sistem lantai 1 dengan sistem MDS (b)	39
Gambar 4.9	Sistem <i>storey building</i> pada lantai 2 (a) dan ilustrasi sistem lantai 2 dengan sistem MDS (b)	40
Gambar 4.10	Sistem <i>storey building</i> pada lantai 3 (a) dan ilustrasi sistem lantai 3 dengan sistem MDS (b)	40
Gambar 4.11	Sistem <i>storey building</i> pada lantai 4 (a) dan ilustrasi sistem lantai 4 dengan sistem MDS (b)	41
Gambar 4.12	Sistem <i>storey building</i> pada lantai 5 (a) dan ilustrasi sistem lantai 5 dengan sistem MDS (b)	41
Gambar 4.13	Kecepatan relatif pergerakan tanah pada pada lantai 1	47
Gambar 4.14	Kecepatan relatif pergerakan tanah pada pada lantai 2	47
Gambar 4.15	Kecepatan relatif pergerakan tanah pada pada lantai 3	49
Gambar 4.16	Kecepatan relatif pergerakan tanah pada pada lantai 4	49
Gambar 4.17	Kecepatan relatif pergerakan tanah pada pada lantai 5	50

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Bangunan Kajima Shizuoka 5 lantai (Rubio-Massegu, 2012)	42
Tabel 4.2	Nilai eigen sistem awal	45
Tabel 4.3	Nilai eigen sistem dengan kontrol sentralisasi kontrol H_∞	48
Tabel 4.4	Kecepatan relatif dari pergerakan sistem <i>storey building</i> pada $t = [0, 20]$	51
Tabel 4.5	Nilai eigen sistem dengan kontrol desentralisasi H_∞ pada Kasus 4.8.3	55
Tabel 4.6	Nilai eigen sistem dengan kontrol desentralisasi H_∞ pada Kasus 4.8.4	57
Tabel 4.7	Nilai eigen sistem sistem dengan kontrol desentralisasi H_∞ pada Kasus 4.8.5	58
Tabel 4.8	Nilai $\ T_{zw} \ _\infty$ pada tiap kasus	59

BAB 1

PENDAHULUAN

Pada bab ini, dijelaskan mengenai hal-hal yang menjadi latar belakang penelitian. Selain itu, dirumuskan masalah-masalah yang berkaitan tentang topik penelitian beserta batasan-batasan masalahnya. Pada bab ini, ditunjukkan pula tujuan dan manfaat dari penyusunan tesis ini.

1.1 Latar Belakang

Pada fenomena alam, sering kali dijumpai sistem yang mempunyai model dalam bentuk sistem dinamik. Untuk berbagai keperluan perilaku sistem dinamik ini penting untuk diatur atau dikendalikan. Proses untuk menentukan bentuk masukan ke dalam suatu sistem dinamik sehingga diperoleh respon seperti yang diinginkan kita sebut sebagai perancangan sistem kontrol, selanjutnya masukan tersebut dikenal sebagai kontrol.

Secara historis teori kontrol dikelompokkan menjadi dua area yaitu kontrol konvensional dan kontrol modern. Kontrol konvensional mengkover konsep dan teknik yang berkembang sampai tahun 1950, sementara kontrol modern dari tahun 1950 sampai saat ini. Seiring dengan semakin kompleksnya permasalahan yang dihadapi manusia, dimana timbul persoalan untuk mengatur *plant* (objek yang diatur) yang tidak diketahui secara pasti dengan dinamika yang tidak diketahui dan berkaitan pula dengan gangguan (*disturbance*) yang tidak diketahui. Perancangan sistem kontrol yang mampu menangani persoalan ini yang dirujuk sebagai kontrol *robust*. Beberapa teori yang masuk kategori kontrol *robust* adalah kontrol H_∞ , μ synthesis, dan gap metric yang sudah banyak dikembangkan untuk berbagai sistem (Saragih, 2016).

Pada tesis ini akan diberikan formulasi masalah yang berkaitan dengan kontrol H_∞ untuk sistem *linear time-invariant* (LTI). Penelitian optimasi kontrol H_∞ pada sistem kontrol dimulai pada tahun 1979 oleh Zames yang mengerjakan minimisasi norma- ∞ untuk fungsi sensitivitas dari sistem SISO. Konsep yang digunakan dalam kontrol H_∞ memanfaatkan konsep di Ruang Hardy.

Tujuan dari kontrol H_∞ adalah menentukan hukum kontrol umpan-balik yang meminimumkan fungsi transfer sistem lup tertutup dari w ke z dalam norma H_∞ . Norma H_∞ mengklasifikasikan peningkatan energi terbesar yang dapat terjadi antara input dan output dari sistem yang diberikan. Penentuan pengontrol H_∞ yang optimal secara numerik sulit diperoleh (Zhou, 1999). Hal ini berbeda dengan pengontrol H_2 dimana pengontrol optimalnya adalah unik dan dapat diperoleh sebagai solusi dari dua persamaan Ricatti tanpa iterasi (Skogestad, 1996). Dalam prakteknya, pengontrol optimal tidak terlalu

diperlukan, sehingga kepentingan yang lebih praktis sering digunakan konsep suboptimal yaitu diberikan $\gamma > 0$ (Doyle, 1989). Meminimumkan norma H_∞ dari fungsi transfer ekuivalen dengan meminimumkan magnitudo terbesar dari respon frekuensi (Saragih, 2016). Desain kontrol H_∞ disajikan dalam bentuk *Linear Matrix Inequality* (LMI). Penyelesaian kontrol H_∞ pendekatan LMI telah banyak dikaji oleh (Boyd, 1994; Iwasaki, 1994).

Sistem kontrol umpan-balik terdiri dari sensor, pengontrol, dan aktuator. Misalkan pada sistem *storey building*, ketika terjadi gangguan seperti gempa bumi dan angin kencang pada sistem maka sensor akan mengukur dan membaca seberapa besar gangguan tersebut dan mentransmisikan data sensor ke pengontrol. Pengontrol bertugas untuk menghitung kontrol, pada kasus *storey building* adalah kontrol gaya untuk meredam sistem dari gangguan (Jerome, 2002). Data kontrol yang dihitung oleh pengontrol akan ditransmisikan ke aktuator untuk diinputkan ke sistem sehingga sistem dapat dikontrol.

Berdasarkan distribusinya, kontrol dibagi menjadi dua pendekatan yaitu sentralisasi kontrol dan desentralisasi kontrol (Rubio-Massegu, 2012). Sentralisasi kontrol adalah *single* kontrol yang membutuhkan data sensor dari sistem (semua subsistem) dan mentransmisikan data kontrol ke semua aktuator, sentralisasi kontrol memiliki orde kontrol yang sama dengan orde sistem (Ikeda, 1996). Berdasarkan alasan tersebut, sentralisasi kontrol membutuhkan kecepatan transmisi data yang cukup baik sehingga pada sistem dengan ukuran yang besar (*large scale system*), seperti sistem jaringan komunikasi, struktur bangunan, sistem power, dan proses kimia sentralisasi kontrol tidak cukup efisien (Sojoudi, 2009).

Dalam (Bakule, 2008), terdapat beberapa teori yang dikhususkan dalam menyelesaikan masalah yang muncul pada sistem orde besar. Teori tersebut menjawab pertanyaan mendasar yaitu bagaimana mempartisi masalah kontrol pada sistem orde besar ke dalam sub masalah kontrol yang dapat diselesaikan secara independen dan menuliskan bahwa sebagian sistem orde besar tidak dapat dikontrol dengan *single* kontrol secara berkepanjangan. Masalah kontrol pada sistem orde besar akan lebih efisien jika dikontrol oleh beberapa pengontrol yang independen yang mana bekerja secara bersama-sama yang direpresentasikan sebagai desentralisasi kontrol. Dibutuhkan sifat kekokohan kontrol untuk dapat mendesain desentralisasi kontrol (Date, 1993).

Desain desentralisasi kontrol yaitu desain kontrol yang berada pada setiap subsistem dari sistem. Cara kerja desentralisasi kontrol dipengaruhi oleh output yang terdekat saja dan tidak memerlukan data sensor dari semua subsistem. Selain itu, kita dapat mendesain desentralisasi kontrol dengan total orde pengontrol kurang dari orde total sistem. Berdasarkan alasan tersebut, desentralisasi kontrol untuk *large scale system* cukup efisien dalam prakteknya (Iwasaki, 1994; Gahinet, 1994).

Pada (Date, 1993), mengerjakan dua tahap optimal desentralisasi kontrol H_∞ , pertama yaitu dengan mendesain sentralisasi kontrol H_∞ dan kedua adalah memberikan optimasi parameter pada desentralisasi kontrol H_∞ . Ide

pada (Date, 1993), didasari oleh parameterisasi pada *observer* desentralisasi kontrol. Pada (Paz, 1993), mendesain desentralisasi kontrol dengan menetapkan setiap lokal pengontrol bernilai sama dengan sentralisasi kontrol, tetapi tetap menggunakan output dari yang terdekat dan dimensi dari pengontrol sama dengan dimensi dari sistem yang dikontrol. Penulis (Goh, 1994) dan (Liu, 1996) melakukan pendekatan optimasi secara global dengan menggunakan metode "branch dan bound" untuk masalah umum BMI.

Pada tesis ini, permasalahan desentralisasi kontrol H_∞ dituliskan ke dalam masalah *Bilinear Matrix Inequality* (BMI) (Iwasaki, 1994), sentralisasi kontrol H_∞ dan kondisi BMI diperlukan dan cukup untuk keberadaan dari desentralisasi kontrol H_∞ yang terdiri dari sub kontrol dengan dimensi yang spesifik (Zhai, 2001). BMI adalah pertidaksamaan matriks yang mengandung dua variabel yang harus diselesaikan. Akan tetapi dalam prakteknya, belum terdapat metode yang dapat menyelesaikan BMI secara langsung (Goh, 1994) (Fujioka, 1997; Liu, 1996). Dengan demikian, penyelesaian desentralisasi kontrol H_∞ pada tesis ini akan diselesaikan dengan pendekatan *Linear Matrix Inequality* (LMI) yaitu menyelesaikan BMI dengan *double* LMI (Iwasaki, 1994).

Pada (Boyd, 1994; Gahinet, 1994), dikatakan bahwa ide dasar dari metode LMI dalam kontrol adalah untuk menafsirkan masalah kontrol yang diberikan sebagai masalah pemrograman semidefinit (SDP) yaitu, masalah optimisasi dengan objektif linier dan kendala semidefinit positif yang melibatkan matriks simetri yang terkait dalam pencarian solusi sebuah variabel. Bentuk LMI cukup relevan karena berbagai alasan. Pertama, merepresentasikan masalah kontrol dalam bentuk LMI memberikan solusi numerik yang efisien. Berbagai kendala desain dan berbagai spesifikasi dapat dinyatakan sebagai LMI. Setelah dirumuskan dalam LMI, masalah dapat diselesaikan dengan tepat dengan algoritma *convex optimization* yang efisien. Sementara itu, sebagian besar masalah kontrol dengan banyak kendala atau fungsi tujuan tidak memiliki solusi analitik yang cukup jika dituangkan ke dalam persamaan matriks (persamaan Riccati). Akan tetapi, solusi analitik tersebut tetap dapat ditelusuri dalam kerangka LMI (solusi tidak tunggal). Hal tersebut menjadikan desain kontrol dengan pendekatan LMI menjadi alternatif yang cukup efisien karena formulasi LMI memiliki kekuatan utama yaitu kemampuan untuk menggabungkan berbagai kendala atau fungsi tujuan yang *convex* yang dapat diselesaikan secara numerik.

Dalam beberapa tahun terakhir, teknologi pengendalian struktur bangunan bertingkat (*storey building*) sangat menarik banyak perhatian. Hal itu dilakukan untuk mengurangi respon struktur yaitu, kecepatan, perpindahan, akselerasi, dan gaya di bawah gangguan yang bisa berupa gempa bumi, angin kencang, dan bencana lainnya (Rubio-Massegu, 2012). Sentralisasi kontrol H_∞ dan desentralisasi kontrol H_∞ diimplementasikan pada sistem *storey building* dengan 5 lantai.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang menjadi fokus utama dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana sentralisasi kontrol H_∞ dengan pendekatan *Linear Matrix Inequality* (LMI) ?
2. Bagaimana desentralisasi kontrol H_∞ dengan pendekatan *Linear Matrix Inequality* (LMI)?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Sistem *storey building* yang digunakan merupakan struktur bangunan Kajima Shizouka dengan 5 lantai.
2. Dalam tahap simulasi, digunakan data sekunder dari struktur bangunan Kajima Shizouka.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan sentralisasi kontrol H_∞ dengan pendekatan *Linear Matrix Inequality* (LMI).
2. Mendapatkan desentralisasi kontrol H_∞ dengan pendekatan *Linear Matrix Inequality* (LMI).

1.5 Manfaat Penelitian

Melalui penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat yaitu:

1. Memberikan kontribusi pengetahuan mengenai penerapan sentralisasi kontrol H_∞ dan aplikasinya.
2. Memberikan kontribusi pengetahuan mengenai penerapan desentralisasi kontrol H_∞ dan aplikasinya.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bab ini, dipaparkan mengenai penelitian-penelitian terdahulu yang berkaitan dengan topik penelitian. Selain itu, ditunjukkan beberapa teori-teori yang menjadi landasan penyelesaian masalah yang dikemukakan pada penelitian ini.

2.1 Penelitian-Penelitian Terkait

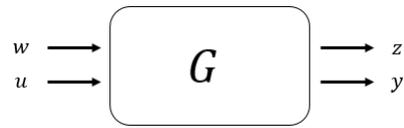
Pada sub bab ini, dipaparkan mengenai penelitian-penelitian yang berkaitan dengan topik penelitian. Penelitian-penelitian tersebut diantaranya berkaitan dengan desentralisasi kontrol H_∞ dengan menggunakan pendekatan LMI untuk *storey building*.

- (a). Pada penelitian yang dilakukan oleh (Zhai, 2001) dalam makalah yang berjudul “*Decentralized H_∞ controller design: a matrix inequality approach using a homotopy method*”, telah dilakukan desentralisasi kontrol untuk masalah yang ada pada *bilinear matrix inequality*(BMI). Diusulkan sebuah algoritma untuk menyelesaikan BMI dengan menggunakan ide dari metode homotopi, dimana matriks koefisien pengontrol berubah bentuk dari matriks penuh yang didefinisikan sebagai pengontrol H_∞ terpusat, matriks blok-diagonal dari dimensi yang diinginkan (spesifik) dideskripsikan sebagai sebuah desentralisasi pengontrol H_∞ . Hasil dari contoh simulasi didapatkan bahwa algoritma homotopi yang diusulkan cukup efisien dalam menyelesaikan desentralisasi pengontrol.
- (b). Pada penelitian yang dilakukan oleh (Fatmawati, 2010) dalam makalah yang berjudul “*Reduksi model dan strategi perancangan pengontrol berorde rendah untuk sistem berdimensi tak hingga*”, telah dilakukan reduksi kontrol H_∞ pada sistem berdimensi tak hingga. Metode reduksi kontrol tersebut telah berhasil diterapkan pada contoh sistem, salah satunya adalah konduksi panas. Hasil dari penelitian ini menyatakan bahwa kontrol tereduksi dapat menstabilkan sistem sampai batas orde yang ditentukan.
- (c). Pada penelitian yang dilakukan oleh (Rubio-Massegu, 2012) dalam makalah yang berjudul “*Decentralized static output feedback H_∞ controller design for buildings under seismic excitation*”, telah dilakukan desentralisasi kontrol untuk bangunan untuk mengantisipasi guncangan gempa. Desentralisasi pengontrol H_∞ dilakukan dengan menggunakan pendekatan LMI dengan parameter-parameter yang tersedia. Penerapan

metodologi yang diusulkan diilustrasikan dengan merancang kontrol H_∞ terpusat dan terdesentralisasi, hasil simulasi menunjukkan bahwa kecepatan-umpan balik H_∞ untuk mengurangi respons seismik dari bangunan lima lantai.

2.2 Representasi sistem linier

Misalkan diberikan sebuah sistem linier dengan vektor *state*, $x \in R^{n_x}$. Vektor input memuat gangguan (*disturbance*), $w \in R^{n_w}$, dan input kontrol, $u \in R^{n_u}$. Vektor output memuat sinyal pengukuran, $y \in R^{n_y}$, dan sinyal performansi, $z \in R^{n_z}$. Sistem dapat diilustrasikan pada Gambar 2.1 berikut:



Gambar 2.1: Sistem dengan dua input dan dua output. Inputnya adalah gangguan w , dan kontrol u . Outputnya adalah performansi z , dan sinyal output y

Dalam realisasi matriks ruang keadaan, sistem linear dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \quad (2.1)$$

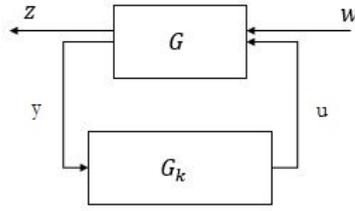
dapat dituliskan kembali Persamaan (2.1) dalam bentuk matriks G sebagai berikut:

$$G : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Dalam tesis ini diasumsikan bahwa $D_{22} = 0$, sehingga dapat dikatakan bahwa sistem merupakan *strictly proper*. Artinya, jika sistem diberikan input sinyal sinusoidal dengan frekuensi yang menaik terus, maka magnitude dari keluaran sistem akan menjadi nol. Untuk kesederhanaan, kami asumsikan bahwa sistem awal dalam bentuk minimal, yaitu, keduanya dapat diamati dan dapat dikontrol.

2.2.1 Deskripsi pengontrol

Hubungan antara pengontrol dengan sistem dapat diilustrasikan pada Gambar 2.2 berikut:



Gambar 2.2: Hubungan sistem dengan pengontrol

Diberikan sebuah pengontrol linier dengan pengukuran sistem y sebagai input dan vektor output adalah kontrol u sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{x}_k &= A_k x_k + B_k y \\ u &= C_k x_k + D_k y \end{cases} \quad (2.3)$$

Dapat dituliskan kembali Persamaan (2.3) dalam bentuk matriks G_k sebagai berikut:

$$G_k : \begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Dengan $x_k \in R^{n_k}$ adalah vektor keadaan dari pengontrol.

2.3 Kontrol H_∞

Misalkan suatu sistem dideskripsikan dengan diagram blok seperti pada Gambar 2.2 dimana sistem G dan pengontrol $G_k(s)$ diasumsikan model-model ruang keadaan. Sistem G dapat distabilkan dan terdeteksi, suatu pengontrol dikatakan dapat diterima (*admissible*) jika sistem dengan kontrol dapat stabil secara internal

Definisi 2.3.1. (Doyle, 1989)

Optimal kontrol H_∞ : Didapatkan semua pengontrol $G_k(s)$, sedemikian sehingga $\|T_{zw}\|_\infty$ adalah minimum.

$\|T_{zw}\|_\infty$ menyatakan fungsi transfer sistem lup tertutup dari w ke z dalam norma H_∞ . Menentukan pengontrol H_∞ yang optimal secara numerik sulit diperoleh, sehingga dalam kepentingan yang lebih praktis sering digunakan konsep suboptimal kontrol H_∞ . Pengontrol suboptimal adalah pengontrol yang sangat dekat dengan norma pengontrol optimal. Dalam prakteknya, pengontrol suboptimal lebih mudah diperoleh dan bahkan memiliki sifat yang lebih baik daripada pengontrol optimalnya (Zhou, 1999).

Definisi 2.3.2. (Doyle, 1989)

Suboptimal kontrol H_∞ : Diberikan $\gamma > 0$, Didapatkan semua pengontrol $G_k(s)$ yang *admissible*, sedemikian sehingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$.

Pada umumnya, pengontrol H_∞ tidak tunggal solusinya untuk sistem Multi Input Multi Output (MIMO), dan sangat kompleks secara teoritis dan numerik. Hal ini berbeda dengan pengontrol H_2 dimana pengontrol optimalnya adalah unik dan dapat diperoleh sebagai solusi dari dua persamaan Ricatti tanpa iterasi.

Masalah sederhana kontrol H_∞

Misalkan diberikan realisasi dari matriks transfer fungsi seperti pada Persamaan (2.2) dengan $D_{22} = 0$. Berikut adalah beberapa asumsi yang digunakan untuk penyederhanaan masalah kontrol H_∞ :

- (i) (A, B_1) terkontrol dan (C_1, A) teramati
- (ii) (A, B_2) terstabilkan dan (C_2, A) terdeteksi
- (iii) $D_{12}^T \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$
- (iv) $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

Diberikan sistem G yang dapat distabilkan dan terdeteksi seperti pada Persamaan (2.2) dan kontrol G_k pada Persamaan (2.4), sehingga dapat dibentuk sistem yang diperumum (*generalized plant*) seperti pada Gambar 2.2. *Generalized plant* dapat dibentuk dengan cara menggabungkan semua subsistem termasuk input internal u , input eksternal w , output pengukuran y dan output performansi z .

Berdasarkan Gambar 2.2 dapat dibentuk *generalized plant* sebagai berikut:

$$u = G_k y \quad (2.5)$$

$$y = Gu \quad (2.6)$$

Terdapat dua macam output dan input yang terdapat pada Gambar 2.2, yaitu output y dan input u . Kedua adalah output z dan input w . Berdasarkan input dan output tersebut, dapat dibentuk fungsi transfer dari *generalized plant* sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Berdasarkan Persamaan (2.7) dapat dicari fungsi transfer sebagai berikut:

$$T_{zw}(s) = G_{11} + G_{12}G_k(I - G_{22}G_k)^{-1}G_{21} \quad (2.8)$$

Berdasarkan Persamaan (2.8), kontrol H_∞ adalah meminimumkan norma dari fungsi transfer dari w ke z yaitu $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ dengan γ adalah bilangan positif.

Norma H_∞

Norma H_∞ dari sistem SISO adalah nilai terbesar dari besar respon frekuensi sistem, sedangkan pada sistem MIMO norma H_∞ didefinisikan sebagai nilai maksimum dari nilai singular matriks fungsi transfer. Diberikan definisi norma H_∞ sebagai berikut:

Definisi 2.3.3. (Doyle, 1989)

Diberikan fungsi transfer dari sistem linier $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ yang stabil, dimana A, B, C, D adalah matriks dari ruang keadaan. Norma H_∞ didefinisikan sebagai

$$\| G(s) \|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(\mathbf{J}\omega)] \quad (2.9)$$

Pada Definisi 2.3.3, $\bar{\sigma}(\cdot)$ adalah nilai singular terbesar. Persamaan (2.9) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\| G(s) \|_\infty = \sup_{\omega} \sqrt{\max_{1 \leq i \leq p} \lambda_i \{G^T(\mathbf{J}\omega)G(\mathbf{J}\omega)\}} \quad (2.10)$$

Notasi "sup" pada Persamaan (2.10) menunjukkan supremum atau batas atas dari fungsi $\sigma_{max}[G(\mathbf{J}\omega)]$, dengan demikian norma H_∞ dari $G(s)$ adalah tidak lebih dari nilai maksimum dari $\bar{\sigma}_{max}[G(\mathbf{J}\omega)]$ atas semua nilai ω dalam interval $(-\infty, \infty)$. Norma H_∞ juga memiliki interpretasi yang bermakna secara fisik. Berdasarkan Gambar 2.1, diketahui bahwa sistem

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (2.11)$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} \quad (2.12)$$

$$\| G \|_\infty = \max_{u(t) \neq 0} \frac{\int_0^\infty y^T(t)y(t)dt}{\int_0^\infty u^T(t)u(t)dt} \quad (2.13)$$

Perlu diingat bahwa ketika sistem digerakkan dengan input sinusoidal pada frekuensi tertentu, maka $\bar{\sigma}_{max}[G(\mathbf{J}\omega)]$ adalah ukuran output terbesar yang mungkin untuk output sinusoidal yang sesuai. Berdasarkan Persamaan (2.13), dapat dikatakan bahwa norma H_∞ adalah peningkatan performansi terbesar yang mungkin atas semua input sinusoidal. Norma H_∞ mengklasifikasikan peningkatan energi terbesar yang dapat terjadi antara input dan output dari sistem yang diberikan.

Lemma 2.3.1. (Zhou, 1999)

Diberikan $\gamma > 0$ dan sistem $G(s)$ sedemikian sehingga $\| G \|_\infty < \gamma$ jika dan hanya jika $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ dan matriks Hamiltonian H_γ tidak memiliki nilai eigen yang imajiner.

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} ABR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

dengan $R = \gamma^2 I - D^T D$

Perlu dicatat bahwa tidak mudah untuk menemukan $\| G \|_\infty$ secara langsung dengan menggunakan teknik realisasi ruang keadaan. Norma H_∞ dapat dihitung dengan *iterative computation* (komputasi berulang) yang dapat dilakukan secara efisien dengan algoritma Biseksi. Diharapkan dengan komputasi berulang ini memberikan hasil yang sesuai dengan Definisi 2.3.3, bahwa dicari nilai $\bar{\sigma}_{max}[G(\mathbf{J}\omega)]$ yang terbesar atas semua titik-titik frekuensi.

Algoritma Biseksi

1. Input batas toleransi TOL . Pilih batas atas γ_u dan batas bawah γ_l sehingga $\gamma_l \leq \| G \|_\infty \leq \gamma_u$.
2. Cek $(\gamma_u - \gamma_l)/\gamma_l < TOL$.
Jika memenuhi maka didapatkan $\| G \|_\infty \approx \frac{1}{2}(\gamma_u + \gamma_l)$.
Jika tidak memenuhi, maka lanjut ke langkah 3.
3. Didefinisikan $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_u + \gamma_l)$, cek apakah $\| G \|_\infty < \gamma$ dengan $\lambda_i(H_\gamma)$.
4. Jika $\lambda_i(H_\gamma) \in \mathbf{JR}$, maka $\gamma_l = \gamma$. Jika sebaliknya, maka $\gamma_u = \gamma$ dan kembali ke langkah 2.

Kontrol H_∞ dengan dua persamaan Riccati

Kontrol H_∞ dapat dihitung dengan menyelesaikan dua persamaan aljabar Riccati (Gahinet, 1994). Persamaan Riccati biasa akan digantikan oleh pertidaksamaan Riccati dan solusi dari pertidaksamaan tersebut digunakan untuk *parametrize* semua suboptimal pengontrol H_∞ . Kontrol H_∞ dibangun dari pasangan matriks simetri (X, Y) yang memenuhi sistem dari dua persamaan Riccati. Dapat didefinisikan matriks Hamiltonian M_γ dengan matriks $D = 0$ adalah

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Norma $\| G \| < \gamma$ jika dan hanya jika M_γ tidak memiliki nilai eigen imajiner dan hal tersebut ekuivalen jika terdapat matriks $X_0 > 0$ sedemikian sehingga

$$A^T X + X A + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \quad (2.16)$$

dan $A + \gamma^{-2}(B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X$ adalah stabil. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa matriks Hamiltonian M_γ berkaitan dengan persamaan aljabar riccati.

Langkah-langkah dalam mendesain kontrol H_∞ dapat dituliskan sebagai berikut:

1. Diberikan $\gamma > 0$.

2. Terdapat $G_k(s)$ yang stabil sehingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}
1. \quad & A^T X + XA + X(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0 \\
& \text{dan } R\lambda_i[A + \gamma^{-2}(B_1B_1^T - B_2B_2^T)X] < 0 \quad \forall_i \\
2. \quad & AY + YA^T + Y(\gamma^{-2}C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y + B_1B_1^T = 0 \\
& \text{dan } R\lambda_i[A + \gamma^{-2}(C_1C_1^T - C_2C_2^T)X] < 0 \quad \forall_i \\
3. \quad & X > 0, \quad Y > 0, \quad \rho(XY) \leq \gamma^{-2}, \text{ dengan } \rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|
\end{aligned} \tag{2.17}$$

3. Berdasarkan solusi (X, Y) dari Persamaan (2.17), maka dapat dihitung kontrol H_∞ sebagai berikut:

$$G_k(s) = \left[\frac{A + (\gamma^2 B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)X - ZY C_2^T C_2}{-B_2^T X} \mid \frac{ZY C_2^T}{0} \right] \tag{2.18}$$

dengan $Z = (I - \gamma^{-2}YX)^{-1}$. Kontrol $G_k(s)$ sering disebut sebagai sentralisasi kontrol H_∞ yang memiliki jumlah *state* kontrol sama dengan *generalized plant*.

4. Substitusi kontrol $G_k(s)$ pada Persamaan (2.8), dan dapat dicari nilai $\|T_{zw}\|_\infty$ dengan menggunakan algoritma Biseksi.

Sebagian besar masalah kontrol dengan banyak kendala atau fungsi tujuan kurang solusi analitik jika dituangkan ke dalam persamaan Riccati seperti pada Persamaan (2.17). Sehingga perlu dilakukan pendekatan yang lebih *flexible* untuk masalah kontrol dengan banyak kendala ataupun masalah kontrol pada sistem berorde tinggi (*large scale system*) (Boyd, 1994).

Pertidaksamaan matriks atau sering disebut dengan *Linear Matrix Inequality* (LMI) memiliki kemampuan kemampuan untuk menggabungkan berbagai kendala atau fungsi tujuan yang *convex* yang dapat diselesaikan secara numerik. Hal tersebut terjadi karena LMI memiliki solusi yang tidak tunggal. Pada tesis ini akan dicari sentralisasi kontrol H_∞ dengan pendekatan LMI.

2.4 Linear Matrix Inequality pada kontrol

Agar sistem kontrol H_∞ yang dirancang bersifat stabil dan memenuhi performansi yang diinginkan, maka dibutuhkan syarat perlu dan syarat cukup. Syarat tersebut dinyatakan dalam bentuk Linier Matrix Inequality (LMI).

Definisi LMI adalah sebagai berikut:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \tag{2.19}$$

dengan $x \in R^m$, $F_i \in R^{n \times n}$ adalah matriks simetri, $F_i, i = 0, 1, \dots, m$ adalah "fixed" dan x adalah variabel yang dicari. Tanda ">" menyatakan definit positif. Matriks $F > 0$ jika dan hanya jika $u^T F u > 0$ untuk semua $u \in R^n$ dan $u \neq 0$. Syarat cukup yang harus dipenuhi oleh matriks definit positif dinyatakan dalam teorema beriku.

Teorema 2.4.1. (Skogestad, 1996)

Suatu matriks Hermitian $F \in M_n$ adalah definit positif jika dan hanya jika nilai eigennya positif

Stabilitas pada sistem kontrol sangat diperlukan, oleh karena itu diperlukan analisis kestabilan agar menjamin bahwa sistem yang di kontrol stabil. Dalam bagian ini akan di jelaskan bagaimana peran LMI dalam menganalisis kestabilan sistem kontrol khususnya kontrol H_∞ . Misalkan diberikan sistem $\dot{x} = Ax(t)$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika terdapat fungsi Lyapunov kuadrat $V(x) = x^T Px$ sebagai berikut:

$$V(x) < 0 \text{ dan } \dot{V}(x) < 0$$

Dua kondisi tersebut dapat diterima jika dan hanya jika terdapat sebuah matriks simetri $P > 0$ seperti berikut:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} \\ &= x^T (A^T P + PA)x < 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Kondisi pada (2.20) adalah ekivalent dengan LMI yang feasible berikut:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -(A^T P + PA) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.21)$$

atau terdapat sebuah $P > 0$ dan

$$A^T P + PA + Q = 0 \text{ dengan } Q > 0$$

Dapat disederhakan masalah pada (2.21) dengan Schur lemma yang dapat mengkonversi kelas pertidaksamaan *convex* nonlinier yang sering muncul pada LMI.

Lemma 2.4.1. (Zhou, 1999)

Schur lemma: Jika terdapat matriks $A = A^T$ dan $C = C^T$, maka kondisi berikut adalah ekivalen.

$$F = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0 \begin{cases} \iff A > 0 \text{ dan } C - B^T A^{-1} B > 0 \\ \iff C > 0 \text{ dan } A - B C^{-1} B^T > 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

$$F = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} < 0 \begin{cases} \iff A < 0 \text{ dan } C - B^T A^{-1} B < 0 \\ \iff C < 0 \text{ dan } A - B C^{-1} B^T < 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

dengan $C - B^T A^{-1} B$ dan $A - B C^{-1} B^T$ disebut sebagai Schur complementss

Bukti: Post-multiply matriks F dengan matriks non-singular M dan pre-multiply matriks F dengan transpose nya M^T sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^T A^{-1}B \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Perlu dicatat bahwa $M^T F M$ memiliki tanda yang sama dengan F jika M adalah non-singular. Misalkan $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^T A^{-1}B \end{bmatrix} < 0$, maka hasil pada (2.25) ekuivalen dengan (2.23).

Lemma 2.4.2. (Zhou, 1999)

Bounded Real Lemma: Untuk sebarang $\gamma > 0$ dengan A adalah Hurwitz dan $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ jika dan hanya jika terdapat matriks P sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.26)$$

Kalikan γ^{-1} dan $P^* = \gamma^{-1}P$ pada (2.26), sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} A^T \gamma^{-1} P + \gamma^{-1} P A + \gamma^{-1} C^T C & \gamma^{-1} P B + \gamma^{-1} C^T D \\ B^T \gamma^{-1} P + \gamma^{-1} D^T C & \gamma^{-1} D^T D - \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

LMI pada (2.27) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} A^T P^* + P^* A + \gamma^{-1} C^T C & P^* B + \gamma^{-1} C^T D \\ B^T P^* + \gamma^{-1} D^T C & \gamma^{-1} D^T D - \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.28)$$

dapat dijabarkan kembali LMI pada (2.29) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \gamma^{-1} I \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0 \quad (2.29)$$

Menghasilkan

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.30)$$

2.5 Bilinier Matrix Inequality

Pada tesis ini, desentralisasi kontrol H_∞ didapatkan dengan mendapatkan solusi yang *feasible* dari Bilinear Matrix Inequality (BMI). Definisi BMI adalah sebagai berikut:

$$F(x, y) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i + \sum_{j=1}^n y_j G_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j H_{ij} > 0 \quad (2.31)$$

dengan G_j dan H_{ij} adalah matriks simetri yang memiliki dimensi yang sama dengan F_i , dan $y \in R^n$. BMI telah banyak dibahas diantaranya pada (Goh,

1994). Sebuah BMI adalah sebuah LMI di x untuk y yang "fixed" dan sebuah LMI di y untuk x yang "fixed". Sulit untuk dapat menyelesaikan permasalahan BMI secara langsung (Fujioka, 1997), sehingga perlu adanya pendekatan LMI untuk dapat mendapatkan solusi dari BMI.

Perlu pendekatan khusus dalam menyelesaikan permasalahan BMI seperti (2.31). Dalam tesis ini digunakan metode homotopi untuk mereduksi masalah BMI kedalam double LMI. Metode homotopi bekerja dari masalah yang mudah menuju ke masalah yang rumit secara bertahap. Dalam kasus ini, metode Homotopi bekerja dengan nilai awal yang didapatkan dari sentralisasi kontrol, kemudian hasil dari sentralisasi kontrol H_∞ tersebut digunakan untuk mendesain desentralisasi kontrol. Sampai saat ini, belum ada metode yang dapat menyelesaikan masalah BMI secara langsung. akan tetapi (Zhai, 2001) mengamati bahwa BMI dapat diperlakukan sebagai double LMI. Diberikan fungsi homotopi sebagai berikut (Zhai, 2001).

$$H(G_D, \tilde{P}, \lambda) = F((1 - \lambda)G_F + \lambda G_D, \tilde{P}) \quad (2.32)$$

dengan G_F adalah sentralisasi kontrol H_∞ dan G_D adalah desentralisasi kontrol H_∞ .

2.6 Representasi model *storey building*

Teknologi kontrol pada struktur bangunan bertingkat *storey building* sangat banyak menyita perhatian pada akhir ini. Kontrol pada sistem *storey building* digunakan untuk mereduksi respons struktural pada bangunan, seperti perpindahan, kecepatan, percepatan, dan gaya di bawah gangguan yang dapat berupa sebagai bencana (misal: gempa bumi dan angin kencang). Sistem *storey building* yang digunakan pada makalah ini dapat diilustrasikan pada Gambar 2.3 (Rubio-Massegu, 2012).

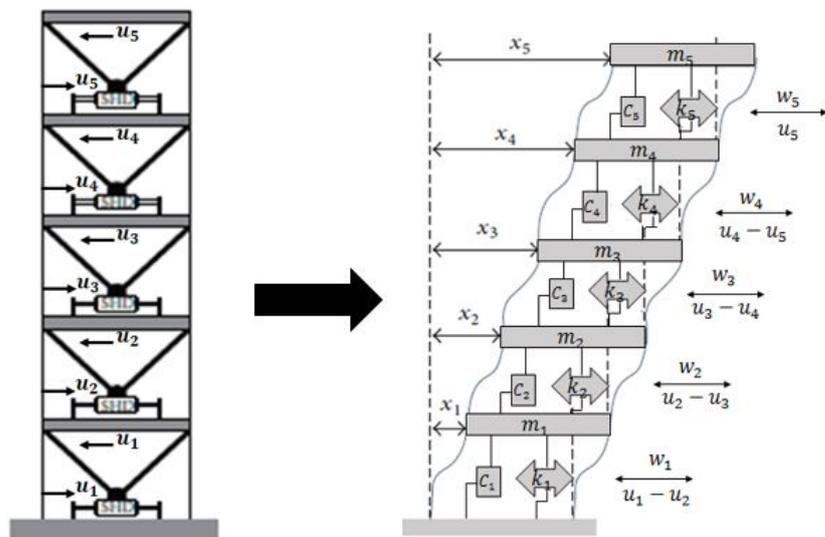
Perpindahan pada sistem *storey building* dapat dirumuskan kedalam persamaan matematika yang berbentuk persamaan diferensial orde dua sebagai berikut:

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = B_0u(t) + Lw(t) \quad (2.33)$$

dengan M , D , dan K masing-masing adalah matriks dari massa, peredam, dan koefisien kekakuan pegas yang bekerja pada sistem. Variabel x menunjukkan vektor perpindahan, u adalah vektor kontrol gaya, dan w adalah vektor yang merepresentasikan gangguan yang mana masing-masing vektor bergantung pada waktu t . Matriks B_0 dan L masing-masing merepresentasikan lokasi dari kontrol gaya dan lokasi gangguan eksternal. Diasumsikan bahwa matriks M memiliki invers, maka Persamaan (2.33) dapat dituliskan kembali sebagai.

$$\ddot{x}(t) + M^{-1}D\dot{x}(t) + M^{-1}Kx(t) = M^{-1}B_0u(t) + M^{-1}Lw(t) \quad (2.34)$$

dengan $x(t)$ merepresentasikan perpindahan pada antar *storey* dan $\dot{x}(t)$ adalah kecepatan relatif antar *storey*.



Gambar 2.3: Ilustrasi sistem *storey building* dengan $n = 5$

BAB 3

METODE PENELITIAN

Metode pengerjaan tesis ini terdiri dari tiga langkah utama, yaitu: tahap sentralisasi kontrol H_∞ , tahap desentralisasi kontrol H_∞ , dan simulasi.

3.1 Sistem awal

Alur pengerjaan tesis ini, diawali dari sistem awal seperti pada Persamaan (2.1). Pada tesis ini digunakan sistem *storey building* 5 lantai dengan data sekunder (Rubio-Massegu, 2012). Untuk mempermudah, sistem awal pada tesis telah dalam bentuk minimal.

3.2 Sentralisasi kontrol H_∞

Pada tahap ini, dicari sentralisasi kontrol H_∞ atau yang biasa dikenal dengan sintesis kontrol H_∞ . Sentralisasi kontrol H_∞ ditemukan dengan bantuan *toolbox* dari MATLAB yaitu **hinflmi**. Selanjutnya, sentralisasi kontrol H_∞ diselesaikan untuk mendapatkan solusi matriks P yang akan digunakan untuk mendapatkan desentralisasi kontrol H_∞ .

3.3 Desentralisasi kontrol H_∞

Sebelum memasuki tahap ini, terdapat tahap peralihan dari sentralisasi kontrol H_∞ ke desentralisasi kontrol H_∞ yaitu penyelesaian *Bilinear Matrix Inequality* (BMI). Berdasarkan hasil (Zhai, 2001), diketahui bahwa belum ada metode yang dapat menyelesaikan BMI secara langsung, sehingga dilakukan pendekatan *Linear Matrix Inequality* (LMI) untuk menyelesaikannya. Dalam tesis ini, digunakan metode homotopi yang akan memanipulasi BMI menjadi *double* LMI. Setelah metode homotopi mencapai titik yang konvergen, maka sub pengontrol dengan dimensi yang spesifik atau desentralisasi kontrol H_∞ didapatkan.

3.4 Tahap Simulasi dan analisa

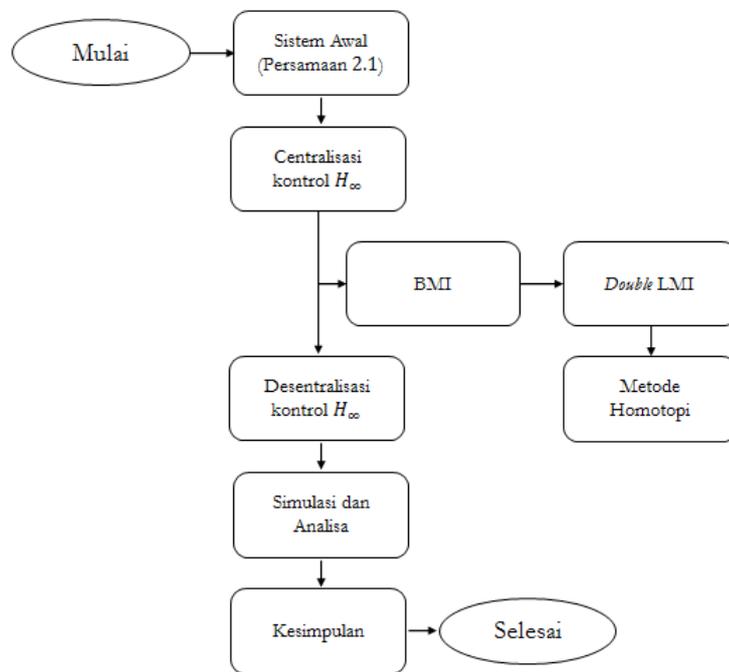
Dilakukan analisa hasil simulasi dari sentralisasi kontrol H_∞ dan desentralisasi kontrol H_∞ berdasarkan grafik performansi dari sistem lup terbuka dan sistem lup tertutup. Selanjutnya, dari grafik performansi dapat ditabelkan data hasil simulasi untuk mempermudah analisa. Simulasi pada tesis ini dilakukan dengan menggunakan *software* MATLAB R2015a.

3.5 Penarikan kesimpulan

Penarikan kesimpulan dilakukan dengan memperhatikan hasil dari simulasi pada tahap sebelumnya.

3.6 Diagram Alur Metode Penelitian

Berdasarkan tahapan-tahapan diatas, dapat disimpulkan bagaimana alur untuk mendapatkan desentralisasi kontrol H_∞ seperti pada pada Gambar 3.1 berikut:



Gambar 3.1: Alur Pengerjaan Penelitian

BAB 4

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan disajikan teorema dasar yang terkait dengan sistem linear dan H_∞ . Diantaranya:

4.1 Deskripsi sistem lup tertutup

Sistem lup tertutup atau sering disebut dengan sistem dengan kontrol didapatkan dengan menerapkan pengontrol pada Persamaan (2.3) ke dalam Persamaan (2.1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_k &= A_k x_k + B_k y \\
 &= A_k x_k + B_k (C_2 x + D_{21} w) \\
 &= A_k x_k + B_k C_2 x + B_k D_{21} w
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 u &= C_k x_k + D_k y \\
 &= C_k x_k + D_k (C_2 x + D_{21} w) \\
 &= C_k x_k + D_k C_2 x + D_k D_{21} w
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

dengan substitusi Persamaan (4.1) dan (4.2) ke dalam Persamaan (2.1), didapatkan persamaan untuk sistem dengan kontrol \dot{x} dengan $x = \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix}$ dan z sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_c &= A x_k + B_1 w + B_2 u \\
 &= A x_k + B_1 w + B_2 (C_k x_k + D_k C_2 x + D_k D_{21} w) \\
 &= A x_k + B_1 w + B_2 C_k x_k + B_2 D_k C_2 x + B_2 D_k D_{21} w \\
 &= (A + B_2 D_k C_2) x + B_2 C_k x_k + (B_1 + B_2 D_k D_{21}) w
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
 z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\
 &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} (C_k x_k + D_k C_2 x + D_k D_{21} w) \\
 &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} C_k x_k + D_{12} D_k C_2 x + D_{12} D_k D_{21} w \\
 &= (C_1 + D_{12} D_k C_2) x + D_{12} C_k x_k + (D_{11} + D_{12} D_k D_{21}) w
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dari Persamaan (4.3) dan Persamaan (4.4), sistem dengan kontrol dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \\ z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k & B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ B_k C_2 & A_k & B_k D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_k C_2 & D_{12} C_k & D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ x_k \\ w \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

dengan mempartisi matrix pada Persamaan (4.5), dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$G_c : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

dengan $x \in R^{n_x + n_k}$.

Dapat dituliskan kembali Persamaan (4.6) sebagai fungsi transfer dari G_c yaitu T_{zw} sebagai berikut:

$$T_{zw}(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c \quad (4.7)$$

4.2 Linear Matrix Inequality

Sistem kontinu yang merupakan sistem dengan kontrol yang stabil pada Persamaan (4.6) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_c x + B_c w \\ z &= C_c x + D_c w \end{cases} \quad (4.8)$$

dengan w adalah input gangguan dan z adalah performansi output. Tujuan dari bagian ini adalah untuk memberikan kriteria untuk menjamin batas atas (*upper bounds*) dari norma H_∞ dari w ke z untuk sistem LTI yaitu untuk menunjukkan bahwa

$$\| z \|_2 < \gamma \| w \|_2$$

atau ekuivalen

$$\| z \|_2 - \gamma \| w \|_2 \iff \int [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt < 0$$

dalam kasus ini, digunakan fungsi biaya sebagai berikut:

$$g(x, w) = \| z \|^2 - \gamma^2 \| w \|^2 = z^T z - \gamma^2 w^T w, \quad (4.9)$$

dan fungsi Lyapunov kuadrat dipilih sebagai berikut:

$$V(x) = x^T P x \quad (4.10)$$

Kestabilan sistem dapat dijamin dengan mengasumsikan bahwa matriks Lyapunov $P > 0$ merupakan matriks yang simetri dan definit positif, sehingga $x^T P x > 0, \forall x \neq 0$. Jika $x(0) = 0$ maka norma L_2 -induced dari w ke z adalah

kurang dari γ jika fungsi Hamiltonian untuk (4.8) dan (4.9) adalah negatif untuk semua x :

$$\begin{aligned}
H &= \dot{V} + g(x, w) \\
&= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + z^T z - \gamma^2 w^T w \\
&= x^T P (A_c x + B_c w) + (A_c x + B_c w)^T P x \\
&\quad + (C_c x + D_c w)^T (C_c x + D_c w) - \gamma^2 w^T w
\end{aligned} \tag{4.11}$$

untuk menjamin $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2$ maka $H < 0$ untuk semua x dan w .

Fungsi Hamiltonian pada Persamaan (4.11) dapat dituliskan kembali ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P A_c + A_c^T P + C_c^T C_c & P B_c + C_c^T D_c \\ B_c^T P + D_c^T C_c & D_c^T D_c - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \tag{4.12}$$

Bentuk matriks pada (4.12) dipenuhi untuk semua yang tidak nol x, w . Hal ini menyatakan bahwa

$$\begin{bmatrix} P A_c + A_c^T P + C_c^T C_c & P B_c + C_c^T D_c \\ B_c^T P + D_c^T C_c & D_c^T D_c - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.13}$$

Pada (4.13) merupakan *Linear Matrix Inequality* (LMI) di P , untuk (A_c, B_c, C_c, D_c) yang telah didefinisikan. Hal ini menyatakan bahwa himpunan dari P yang memenuhi LMI adalah convex. Dengan menerapkan Schur complement pada Lemma 2.4.1 ke dalam (4.13), dapat dituliskan kembali (4.13) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} P A_c + A_c^T P & P B_c \\ B_c^T P & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_c^T \\ D_c^T \end{bmatrix} \gamma^{-1} I \begin{bmatrix} C_c & D_c \end{bmatrix} < 0 \tag{4.14}$$

Dari sini diperoleh

$$\begin{bmatrix} P A_c + A_c^T P & P B_c & C_c^T \\ B_c^T P & -\gamma I & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.15}$$

Pertidaksamaan matriks pada (4.23) adalah linier pada (A_c, B_c, C_c, D_c) untuk P yang diberikan, yang mana dapat disimpulkan bahwa himpunan dari matriks sistem yang memenuhi LMI adalah convex. Hal ini juga di buktikan dengan Bounded Real Lemma pada 2.4.2.

4.2.1 Konstruksi kontrol H_∞ dengan pendekatan LMI

Pada bagian ini, akan dijelaskan lebih detail bagaimana mengkonstruksi kontrol H_∞ dengan pendekatan LMI. Masalah suboptimal pengontrol H_∞

dapat diselesaikan jika dan hanya jika terdapat matriks (R,S) yang simetri dan memenuhi LMI sebagai berikut (Gahinet, 1994):

$$\left[\begin{array}{c|c} \eta_R & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc|c} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ \hline C_1 R & -\gamma I & D_{11} \\ \hline B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \eta_R & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0 \quad (4.16)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \eta_S & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc|c} A^T S + SA & SB_1 & C_1^T \\ \hline B_1^T S & -\gamma I & D_{11}^T \\ \hline C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \eta_S & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0 \quad (4.17)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} R & I \\ \hline I & S \end{array} \right] \geq 0 \quad (4.18)$$

dengan η_R dan η_S masing-masing menunjukkan basis *null - space* dari $[B_2^T, D_{12}^T]$ dan $[C_2, D_{21}]$. Terdapat suboptimal pengontrol H_∞ untuk dimensi k jika dan hanya jika (4.16)-(4.17) dipenuhi untuk beberapa (R,S) sedemikian sehingga

$$\text{Rank}(I - RS) \leq k \quad (4.19)$$

Kontrol H_∞ dapat dikonstruksi berdasarkan solusi dari matriks (R,S) yang berkaitan dengan solusi matriks P pada Lemma 2.4.2. Diberikan matriks $P \in R^{n+k \times n+k}$ sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & * \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & * \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

dengan $R, S \in R^{n \times n}$, $* \in R^{k \times k}$ menunjukkan sebarang submatriks, dan $M, N \in R^{n \times k}$ adalah matriks-matriks yang memiliki *rank* kolom penuh sedemikian sehingga

$$MN^T = I - RS \quad (4.21)$$

Matriks P didapatkan sebagai solusi yang *unique* (tunggal) dari persamaan linier berikut:

$$\begin{bmatrix} S & I \\ N^T & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} I & R \\ 0 & M^T \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Perlu dicatat bahwa Persamaan (4.22) selalu memiliki solusi untuk matriks $S > 0$ dan M yang memiliki *rank* kolom penuh. Cukup jelas, bahwa untuk mengkonstruksi kontrol H_∞ yang *admissible* dibutuhkan solusi matriks (R,S) sehingga didapatkan solusi matriks $P > 0$ dengan Persamaan (4.21) dan Persamaan (4.22). Selanjutnya, tulis kembali matriks P pada pertidaksamaan matriks (4.23) sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc} PA_c + A_c^T P & PB_c & C_c^T \\ \hline B_c^T P & -\gamma I & D_c^T \\ \hline C_c & D_c & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} PA_c + A_c^T P & PB_c & C_c^T \\ B_c^T P & -\gamma I & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}^T < 0 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\
&+ \left[\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + B_2 G_k C_2 & B_1 + B_2 G_k D_{21} \\ C_1 + D_{12} G_k C_2 & D_{11} + D_{12} G_k D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}^T < 0 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} PA + PB_2 G_k C_2 & PB_1 + PB_2 G_k D_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 + D_{12} G_k C_2 & D_{11} + D_{12} G_k D_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}^T < 0 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\
&+ \left[\begin{bmatrix} PA & PB_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & D_{11} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PB_2 & PB_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{12} & 0 \end{bmatrix} G_k \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & D_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \\
&+ \left[\begin{bmatrix} PA & PB_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & D_{11} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PB_2 & PB_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{12} & 0 \end{bmatrix} G_k \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & D_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]^T < 0 \\
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Pada LMI (4.24) hanya variabel G_k yang tidak diketahui, sehingga Dapat dikonstruksi kontrol $G_k = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}$ dengan menyelesaikan LMI pada (4.24).

4.3 Sentralisasi kontrol H_∞

Sentralisasi kontrol H_∞ disebut juga sebagai sintesis H_∞ yang merupakan *single* kontrol. Misalkan diberikan sistem seperti pada Persamaan (2.1) dan diberikan pengontrol dinamik H_∞ untuk sentralisasi kontrol sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{x}_F &= A_F x_F + B_F y \\ u &= C_F x_F + D_F y \end{cases} \quad (4.25)$$

Berdasarkan Persamaan (4.25) sentralisasi kontrol H_∞ dapat dituliskan kembali ke dalam bentuk *single* matriks G_F sebagai berikut:

$$G_F = \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

dengan $A_F \in R^{n_{x_F}}$ memastikan stabilitas internal dan menjamin performansi γ . Batasan performansi didefinisikan sebagai norma H_∞ dari sistem dengan kontrol dari input gangguan w ke performansi output z . Sistem dengan kontrol sentralisasi H_∞ dipenuhi dengan mengaplikasikan pengontrol pada Persamaan (4.25) ke dalam Persamaan (2.1), sehingga dapat dituliskan kembali sistem dengan kontrol sentralisasi H_∞ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2 D_F C_2)x + B_2 C_F x_F + (B_1 + B_2 D_F D_{21})w \\ \dot{x}_F &= B_F C_2 x + A_F x_F + B_F D_{21} w \\ z &= (C_1 + D_{12} D_F C_2)x + D_{12} C_F x_F + (D_{11} + D_{12} D_F D_{21})w \end{aligned} \quad (4.27)$$

Diperkenalkan notasi baru untuk sistem dengan kontrol sentralisasi H_∞ sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} A_C & B_{C1} & B_{C2} \\ C_{C1} & D_{C11} & D_{C12} \\ C_{C2} & D_{C21} & \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|cc} A & 0_{n \times n} & B_1 & 0_{n \times n} & B_2 \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times r} & I_n & 0_{n \times n} \\ \hline C_1 & 0_{n \times n} & D_{11} & 0_{n \times n} & D_{12} \\ \hline 0_{n \times n} & I_n & 0_{n \times n} & & \\ \hline C_2 & 0_{n \times n} & D_{21} & & \end{array} \right] \quad (4.28)$$

dengan mengaplikasikan notasi pada (4.28) dan (4.26) ke dalam Persamaan (4.27), didapatkan bentuk sistem dengan kontrol sentralisasi kontrol H_∞ dalam bentuk kompak sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{x}_C &= (A_C + B_{C2} G_F C_{C2})x_C + (B_{C1} + B_{C2} G_F D_{C21})w \\ z &= (C_{C1} + D_{C12} G_F C_{C2})x_C + (D_{C11} + D_{C12} G_F D_{C21})w \end{cases} \quad (4.29)$$

$$A_{Cl} = A_C + B_{C2} G_F C_{C2}$$

$$B_{Cl} = B_{C1} + B_{C2} G_F D_{C21}$$

$$C_{Cl} = C_{C1} + D_{C12}G_F C_{C2}$$

$$D_{Cl} = D_{C11} + D_{C12}G_F D_{C21}$$

dengan $x_C = [x^T \ x_F^T]^T$. Sistem dengan kontrol dinyatakan stabil secara internal dan memiliki norma H_∞ kurang dari γ jika terdapat sebuah matriks $P = P^T > 0$ seperti pada Lemma 2.4.2 atau ekuivalen,

$$\begin{aligned} F(G_F, P) &= \begin{bmatrix} PA_{Cl} + A_{Cl}^T P & PB_{Cl} & C_{Cl}^T \\ B_{Cl}^T P & -\gamma I & D_{Cl}^T \\ C_{Cl} & D_{Cl} & -\gamma I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{Cl} & B_{Cl} \\ C_{Cl} & D_{Cl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}^T < 0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\ &+ \left[\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_C + B_{C2}G_F C_{C2} & B_{C1} + B_{C2}G_F D_{C21} \\ C_{C1} + D_{C12}G_F C_{C2} & D_{C11} + D_{C12}G_F D_{C21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}^T < 0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} PA_C + PB_{C2}G_F C_{C2} & PB_{C1} + PB_{C2}G_F D_{C21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{C1} + D_{C12}G_F C_{C2} & D_{C11} + D_{C12}G_F D_{C21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}^T < 0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\ &+ \left[\begin{bmatrix} PA_C & PB_{C1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{C1} & D_{C11} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PB_{C2} & PB_{C2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{C12} & D_{C12} & 0 \end{bmatrix} G_F \begin{bmatrix} C_{C2} & 0 & 0 \\ 0 & D_{C21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \\ &+ \left[\begin{bmatrix} PA_C & PB_{C1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{C1} & D_{C11} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PB_{C2} & PB_{C2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{C12} & D_{C12} & 0 \end{bmatrix} G_F \begin{bmatrix} C_{C2} & 0 & 0 \\ 0 & D_{C21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]^T < 0 \end{aligned}$$

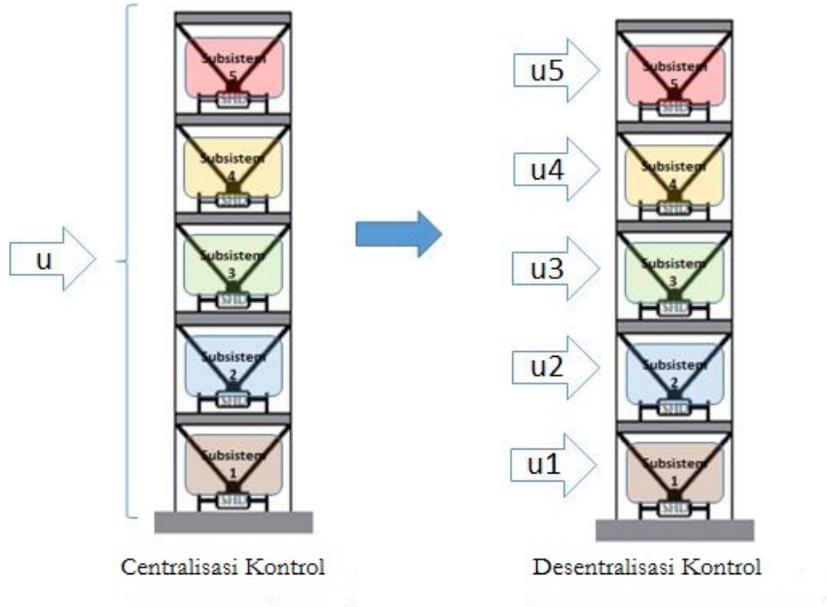
Permasalahan sentralisasi kontrol H_∞ dapat diselesaikan dengan pendekatan *Linear Matrix Inequality* (LMI) sebagai berikut:

$$F(G_F, P) < 0 \quad (4.30)$$

Pertidaksamaan (4.30) merupakan bentuk *Bilinear Matrix Inequality* (BMI). Bagaimanapun, bentuk pada (4.30) merupakan LMI pada P , ketika G_F telah didefinisikan.

4.4 Desentralisasi kontrol H_∞

Desentralisasi kontrol adalah pendekatan kontrol yang sangat efektif diterapkan pada sistem skala besar untuk meminimumkan resiko dan biaya perawatan. Desentralisasi kontrol dapat diilustrasikan pada Gambar 4.1 berikut:



Gambar 4.1: Ilustrasi desentralisasi kontrol

Sebuah N -channel sistem *Linear Time Invariant* (LTI) dideskripsikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + \sum_{i=1}^N B_{2i} u_i \\ z &= C_1 x + D_{11} w + \sum_{i=1}^N D_{12i} u_i \\ y_i &= C_{2i} x + D_{21i} w \end{aligned} \quad (4.31)$$

dengan $x \in R^n$ adalah variabel state, $w \in R^r$ adalah input gangguan, $z \in R^p$ adalah output kontrol, $u_i \in R^{m_i}$ dan $y_i \in R^{q_i}$ adalah input

kontrol dan output pengukuran dari *channel* ke i ($i = 1, 2, \dots, N$). Matriks $A, B_1, B_{2i}, C_1, C_{2i}, D_{11}, D_{12i}, D_{21i}$ adalah konstan dan memiliki ukuran yang bersesuaian, dan diberikan pengontrol dinamik H_∞ untuk desentralisasi kontrol H_∞ pada sistem (4.31) sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i &= \hat{A}_i \hat{x}_i + \hat{B}_i y_i \\ u_i &= \hat{C}_i \hat{x}_i + \hat{D}_i y_i \end{cases} \quad (4.32)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, N$ dan $\hat{x}_i \in R_{\hat{n}_i}$ adalah state dari pengontrol lokal ke- i , \hat{n}_i adalah dimensi desentralisasi kontrol H_∞ yang akan didesain, dan $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i, i = 1, 2, \dots, N$ adalah matriks konstan yang telah ditentukan.

Teorema 4.4.1. (*Zhai, 2001*)

Diberikan $\gamma > 0$ sedemikian sehingga desain desentralisasi kontrol H_∞ pada Persamaan (4.32) untuk sistem (4.31) menghasilkan sistem lup tertutup yang stabil dan $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$.

Substitusi Persamaan (4.32) pada Persamaan (4.31), maka dihasilkan sistem dengan kontrol yang stabil stabil dan $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$. Dilakukan substitusi u_i pada Persamaan (4.32) ke Persamaan (4.31) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + \sum_{i=1}^N B_{2i} (\hat{C}_i \hat{x}_i + \hat{D}_i y_i) \\ z &= C_1 x + D_{11} w + \sum_{i=1}^N D_{12i} \\ y_i &= C_{2i} x + D_{21i} w \end{aligned} \quad (4.33)$$

Selanjutnya untuk \dot{x} pada Persamaan (4.33), dilakukan substitusi y_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + \sum_{i=1}^N B_{2i} (\hat{C}_i \hat{x}_i + \hat{D}_i (C_{2i} x + D_{21i} w)) \\ &= Ax + B_1 w + \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{C}_i \hat{x}_i + \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{D}_i C_{2i} x + \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{D}_i D_{21i} w \\ &= (A + \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{D}_i C_{2i}) x + \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{C}_i \hat{x}_i + (B_1 + \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{D}_i D_{21i}) w \end{aligned} \quad (4.34)$$

Selanjutnya substitusi y_i pada Persamaan (4.31) ke Persamaan (4.32) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i &= \hat{A}_i \hat{x}_i + \hat{B}_i (C_{2i} x + D_{21i} w) \\ &= \hat{B}_i C_{2i} x + \hat{A}_i \hat{x}_i + \hat{B}_i D_{21i} w \end{aligned} \quad (4.35)$$

untuk mendapatkan nilai z , disubsitusikan u_i dan y_i pada Persamaan (4.31) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
z &= C_1x + D_{11}w + \sum_{i=1}^N D_{12i}(\hat{C}_i\hat{x}_i + \hat{D}_iy_i) \\
&= C_1x + D_{11}w + \sum_{i=1}^N D_{12i}(\hat{C}_i\hat{x}_i + \hat{D}_i(C_{2i}x + D_{21i}w)) \\
&= C_1x + D_{11}w + \sum_{i=1}^N D_{12i}\hat{C}_i\hat{x}_i + \sum_{i=1}^N D_{12i}\hat{D}_iC_{2i}x + \sum_{i=1}^N D_{12i}\hat{D}_iD_{21i}w \\
&= (C_1 + \sum_{i=1}^N D_{12i}\hat{D}_iC_{2i})x + \sum_{i=1}^N D_{12i}\hat{C}_i\hat{x}_i + (D_{11} + \sum_{i=1}^N D_{12i}\hat{D}_iD_{21i})w
\end{aligned} \tag{4.36}$$

dari Persamaan (4.34),(4.35), dan (4.36), didapatkan sistem dengan kontrol desentralisasi H_∞ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (A + \sum_{i=1}^N B_{2i}\hat{D}_iC_{2i})x + \sum_{i=1}^N B_{2i}\hat{C}_i\hat{x}_i + (B_1 + \sum_{i=1}^N B_{2i}\hat{D}_iD_{21i})w \\
\dot{\hat{x}}_i &= \hat{B}_iC_{2i}x + \hat{A}_i\hat{x}_i + \hat{B}_iD_{21i}w \\
z &= (C_1 + \sum_{i=1}^N D_{12i}\hat{D}_iC_{2i})x + \sum_{i=1}^N D_{12i}\hat{C}_i\hat{x}_i + (D_{11} + \sum_{i=1}^N D_{12i}\hat{D}_iD_{21i})w
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Berdasarkan Persamaan (4.37) dapat dikelompokkan $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i,$ dan \hat{D}_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= [\hat{x}_1^T \quad \hat{x}_2^T \quad \cdots \quad \hat{x}_N^T]^T \\
\hat{A}_D &= \text{diag}\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \cdots, \hat{A}_N\} \\
\hat{B}_D &= \text{diag}\{\hat{B}_1, \hat{B}_2, \cdots, \hat{B}_N\} \\
\hat{C}_D &= \text{diag}\{\hat{C}_1, \hat{C}_2, \cdots, \hat{C}_N\} \\
\hat{D}_D &= \text{diag}\{\hat{D}_1, \hat{D}_2, \cdots, \hat{D}_N\}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

dapat dijabarkan kembali Persamaan (4.38) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \hat{x} &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_N \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
 \hat{A}_D &= \begin{bmatrix} [\hat{A}_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\hat{A}_2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\ddots] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\hat{A}_N] \end{bmatrix} \\
 \hat{B}_D &= \begin{bmatrix} [\hat{B}_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\hat{B}_2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\ddots] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\hat{B}_N] \end{bmatrix} \\
 \hat{C}_D &= \begin{bmatrix} [\hat{C}_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\hat{C}_2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\ddots] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\hat{C}_N] \end{bmatrix} \\
 \hat{D}_D &= \begin{bmatrix} [\hat{D}_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\hat{D}_2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\ddots] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\hat{D}_N] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

dengan ukuran "nol" yang menyesuaikan, selanjutnya didefinisikan matriks

$$\begin{aligned}
 B_2 &= [B_{21} \quad B_{22} \quad \cdots \quad B_{2N}] \\
 C_2 &= [C_{21}^T \quad C_{22}^T \quad \cdots \quad C_{2N}^T]^T \\
 D_{12} &= [D_{121} \quad D_{122} \quad \cdots \quad D_{12N}] \\
 D_{21} &= [D_{211}^T \quad D_{212}^T \quad \cdots \quad D_{21N}^T]^T
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

dari Persamaan (4.39) dapat dijabarkan bentuk matriksnya yaitu

$$\begin{aligned}
B_2 &= \left[\begin{array}{ccc} [B_{21}] & [B_{22}] & \cdots & [B_{2N}] \end{array} \right] \\
C_2 &= \left[\begin{array}{c} [C_{21}] \\ [C_{22}] \\ \vdots \\ [C_{2N}] \end{array} \right] \\
D_{12} &= \left[\begin{array}{ccc} [D_{121}] & [D_{122}] & \cdots & [D_{12N}] \end{array} \right] \\
D_{21} &= \left[\begin{array}{c} [D_{211}] \\ [D_{212}] \\ \vdots \\ [D_{21N}] \end{array} \right]
\end{aligned}$$

dengan substitusi Persamaan (4.38) dan (4.39) pada Persamaan (4.37), dapat dideskripsikan sistem dengan kontrol untuk desentralisasi kontrol H_∞ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (A + B_2 \hat{D}_D C_2)x + B_2 \hat{C}_D \hat{x} + (B_1 + B_2 \hat{D}_D D_{21})w \\
\dot{\hat{x}} &= \hat{B}_D C_2 x + \hat{A}_D \hat{x} + \hat{B}_D D_{21} w \\
z &= (C_1 + D_{12} \hat{D}_D C_2)x + D_{12} \hat{C}_D \hat{x} + (D_{11} + D_{12} \hat{D}_D D_{21})w
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Lebih lanjut, dapat dituliskan matriks $\hat{A}_D, \hat{B}_D, \hat{C}_D$, dan \hat{D}_D sebagai *single* matriks sebagai berikut

$$G_D = \left[\begin{array}{cc} \hat{A}_D & \hat{B}_D \\ \hat{C}_D & \hat{D}_D \end{array} \right] \tag{4.41}$$

Diperkenalkan notasi sistem dengan kontrol desentralisasi H_∞ sebagai berikut (Zhai, 2001).

$$\left[\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21} & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} A & 0_{n \times \hat{n}} & B_1 & 0_{n \times \hat{n}} & B_2 & \\ 0_{\hat{n} \times n} & 0_{\hat{n} \times \hat{n}} & 0_{\hat{n} \times r} & I_{\hat{n}} & 0_{\hat{n} \times m} & \\ \hline C_1 & 0_{p \times \hat{n}} & D_{11} & 0_{p \times \hat{n}} & D_{12} & \\ \hline 0_{\hat{n} \times n} & I_{\hat{n}} & 0_{\hat{n} \times r} & & & \\ C_2 & 0_{q \times \hat{n}} & D_{21} & & & \end{array} \right] \tag{4.42}$$

dengan $\hat{n} = \sum_{i=1}^N \hat{n}_i, m = \sum_{i=1}^N m_i, q = \sum_{i=1}^N q_i$. Selanjutnya, substitusi Persamaan (4.42) ke dalam Persamaan (4.40), dengan $\tilde{x} = [x^T \quad \hat{x}^T]^T$ didapatkan.

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{cc} A & 0_{n \times \hat{n}} \\ 0_{\hat{n} \times n} & 0_{\hat{n} \times \hat{n}} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0_{n \times \hat{n}} & B_2 \\ I_{\hat{n}} & 0_{\hat{n} \times m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \hat{A}_D & \hat{B}_D \\ \hat{C}_D & \hat{D}_D \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0_{\hat{n} \times n} & I_{\hat{n}} \\ C_2 & 0_{q \times \hat{n}} \end{array} \right] \tilde{x} \\
&\quad + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ 0_{\hat{n} \times r} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0_{n \times \hat{n}} & B_2 \\ I_{\hat{n}} & 0_{\hat{n} \times m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \hat{A}_D & \hat{B}_D \\ \hat{C}_D & \hat{D}_D \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0_{\hat{n} \times r} \\ D_{21} \end{array} \right] w
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.43) didapatkan

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 \hat{D}_D C_2 & B_2 \hat{C}_D \\ \hat{B}_D C_2 & \hat{A}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + B_2 \tilde{D}_D D_{21} \\ \hat{B}_D D_{21} \end{bmatrix} w \quad (4.43)$$

Selanjutnya z akan dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_1 & 0_{p \times \hat{n}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{p \times \hat{n}} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_D & \hat{B}_D \\ \hat{C}_D & \hat{D}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{\hat{n} \times n} & I_{\hat{n}} \\ C_2 & 0_{q \times \hat{n}} \end{bmatrix} \tilde{x} \\ & \begin{bmatrix} D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{p \times \hat{n}} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_D & \hat{B}_D \\ \hat{C}_D & \hat{D}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{\hat{n} \times r} \\ D_{21} \end{bmatrix} w \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.44) didapatkan

$$z = \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} \hat{D}_D C_2 & D_{12} \hat{C}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + (D_{11} + D_{12} \hat{D}_D D_{21}) w \quad (4.44)$$

Berdasarkan Persamaan (4.43) dan (4.44), maka dapat dituliskan kembali sistem dengan kontrol desentralisasi H_∞ dalam bentuk kompak sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= (\tilde{A} + \tilde{B}_2 G_D \tilde{C}_2) \tilde{x} + (\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 G_D \tilde{D}_{21}) w \\ z &= (\tilde{C}_1 + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{C}_2) \tilde{x} + (\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{D}_{21}) w \end{cases} \quad (4.45)$$

$$A_{Cld} = \tilde{A} + \tilde{B}_2 G_D \tilde{C}_2$$

$$B_{Cld} = \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 G_D \tilde{D}_{21}$$

$$C_{Cld} = \tilde{C}_1 + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{C}_2$$

$$D_{Cld} = \tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{D}_{21}$$

dengan $\tilde{x} = [x^T \quad \hat{x}^T]^T$.

Pada pengertian ini, hanya koefisien matriks pengontrol terdesentralisasi G_D yang tidak diketahui, selama semua matriks lainnya diberikan oleh Persamaan (4.45) dan dimensi yang diinginkan (spesifik) dari pengontrol lokal juga ditentukan.

Sistem dengan kontrol dinyatakan stabil secara internal dan memiliki norma H_∞ dari γ jika terdapat sebuah matriks $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ seperti pada Lemma 2.4.2 atau ekuivalen,

$$\begin{aligned} F(G_D, \tilde{P}) &= \begin{bmatrix} \tilde{P} A_{Cld} + A_{Cld}^T \tilde{P} & \tilde{P} B_{Cld} & C_{Cld}^T \\ B_{Cld}^T \tilde{P} & -\gamma I & D_{Cld}^T \\ C_{Cld} & D_{Cld} & -\gamma I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{Cld} & B_{Cld} \\ C_{Cld} & D_{Cld} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}^T < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} + \tilde{B}_2 G_D \tilde{C}_2 & \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 G_D \tilde{D}_{21} \\ \tilde{C}_1 + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{D}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{A} + \tilde{P} \tilde{B}_2 G_D \tilde{C}_2 & \tilde{P} \tilde{B}_1 + \tilde{P} \tilde{B}_2 G_D \tilde{D}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_1 + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{A} & \tilde{P} \tilde{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{B}_2 & \tilde{P} \tilde{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{12} & 0 \end{bmatrix} G_D \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{A} & \tilde{P} \tilde{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{B}_2 & \tilde{P} \tilde{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{12} & 0 \end{bmatrix} G_D \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T < 0 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{A} + \tilde{P} \tilde{B}_2 G_D \tilde{C}_2 & \tilde{P} \tilde{B}_1 + \tilde{P} \tilde{B}_2 G_D \tilde{D}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_1 + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{A} & \tilde{P} \tilde{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{B}_2 & \tilde{P} \tilde{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{12} & 0 \end{bmatrix} G_D \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{A} & \tilde{P} \tilde{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{B}_2 & \tilde{P} \tilde{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{12} & 0 \end{bmatrix} G_D \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{A} & \tilde{P} \tilde{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P} \tilde{B}_2 & \tilde{P} \tilde{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{12} & 0 \end{bmatrix} G_D \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T < 0
\end{aligned}$$

Sehingga permasalahan desentralisasi kontrol H_∞ dapat diselesaikan dengan *Bilinear Matrix Inequality* (BMI).

$$F(G_D, \tilde{P}) < 0 \quad (4.46)$$

Teorema 4.4.2. (Zhai, 2001)

Sistem pada Persamaan (4.31) dapat distabilkan dengan penurunan tingkat gangguan γ dengan desentralisasi kontrol H_∞ seperti pada Persamaan (4.32) yang terdiri dari \hat{n}_i -dimensional pengontrol lokal, jika dan hanya jika terdapat sebuah matriks G_D seperti pada (4.46) dan sebuah matriks yang definit positif \tilde{P} sedemikian hingga

$$F(G_D, \tilde{P}) < 0$$

Kondisi pada (4.46) untuk sebuah desentralisasi kontrol H_∞ adalah sebuah BMI dengan variabel G_D dan \tilde{P} karena hubungan $\tilde{P}\tilde{B}_2G_D \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21} & 0 \end{bmatrix}$. Teorema 4.4.2 memperlihatkan kesamaan pada kasus sentralisasi kontrol H_∞ pada (4.30) (Gahinet, 1994; Iwasaki, 1994). Desentralisasi kontrol H_∞ memiliki struktur yang berbeda dengan sentralisasi kontrol H_∞ , sehingga desentralisasi kontrol H_∞ memiliki kerumitan yang lebih dibandingkan dengan sentralisasi kontrol H_∞ . Oleh karena itu, dibutuhkan metode yang tepat dan efisien untuk menyelesaikan permasalahan BMI untuk mendapatkan desentralisasi kontrol H_∞ .

4.5 Metode Homotopi

Dalam tesis ini digunakan metode homotopi untuk mereduksi masalah BMI ke dalam double LMI. Metode homotopi bekerja dari masalah yang mudah menuju ke masalah yang rumit secara bertahap. Dalam kasus ini, metode Homotopi bekerja dengan nilai awal yang didapatkan dari sentralisasi kontrol H_∞ (G_F), kemudian hasil dari sentralisasi kontrol H_∞ tersebut digunakan untuk mendesain desentralisasi kontrol H_∞ (G_D). Sampai saat ini, belum ada metode yang dapat menyelesaikan masalah BMI secara langsung. Meskipun pendekatan optimasi secara global dengan menggunakan metode "branch dan bound" untuk masalah umum BMI telah diusulkan (Goh, 1994) (Liu, 1996). Kerumitan dalam komputasi sering menjadi penghalang ketika metode tersebut diaplikasikan untuk menyelesaikan masalah BMI untuk sistem berdimensi besar pada variabel G_D dan \tilde{P} . Walaupun belum ada algoritma yang dapat menemukan solusi pada (4.46) secara langsung, akan tetapi (Zhai, 2001) mengamati bahwa BMI pada (4.46) dapat diperlakukan sebagai double LMI. Hal itu dapat terjadi, jika G_D adalah tetap dan \tilde{P} adalah variabel yang dicari (berlaku sebaliknya). Dengan demikian (4.46) dapat diselesaikan seperti LMI dimana hanya satu variabel yang dicari. LMI mungkin tidak memiliki penyelesaian (*infeasible*), hal tersebut terjadi jika nilai awal untuk G_D atau \tilde{P} tidak tepat. Didefinisikan sebuah nilai real λ dari 0 sampai 1, dan sebuah fungsi homotopi (2.32). Diasumsikan bahwa G_F telah dipenuhi dengan metode yang diusulkan oleh (Iwasaki, 1994) (Gahinet, 1994). Dengan demikian, $(1 - \lambda)G_F + \lambda G_D$ pada (2.32) mendefinisikan sebuah interpolasi homotopi sebuah sentralisasi kontrol H_∞ dan sebuah desentralisasi kontrol H_∞ yang diinginkan. Selanjutnya fungsi homotopi pada (2.32) dapat dipartisi berdasarkan nilai λ sebagai berikut:

$$H(G_D, \tilde{P}, \lambda) = \begin{cases} F(G_F, \tilde{P}), \lambda = 0 \\ F(G_D, \tilde{P}), \lambda = 1 \end{cases} \quad (4.47)$$

Selanjutnya BMI pada (4.46) dapat diperumum kembali sebagai

$$H(G_D, \tilde{P}, \lambda) < 0, \lambda \in [0, 1] \quad (4.48)$$

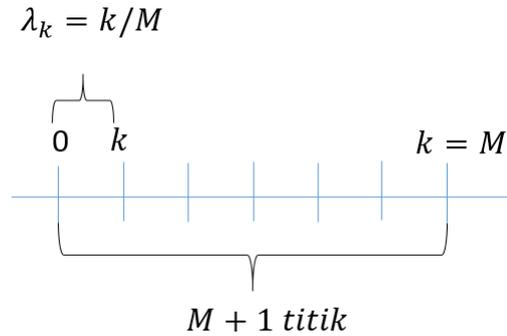
Dalam metode homotopi, dibutuhkan solusi dari (G_D, \tilde{P}) pada (4.48) untuk nilai $\lambda = 0$, yang dinotasikan sebagai (G_{D0}, \tilde{P}_0) .

Karena G_D tidak nampak pada (4.48) untuk nilai $\lambda = 0$, maka diberikan G_D dengan nilai sebarang. Untuk lebih sederhana, dapat dipilih $G_D = 0$, dan nilai awal \tilde{P}_0 dihitung dengan menyelesaikan LMI pada (4.30) yang mana adalah ekuivalen dengan (4.48) untuk nilai $\lambda = 0$. Bentuk tersebut adalah LMI di \tilde{P} ketika G_F sudah didapatkan sebelumnya. Karena LMI pada (4.30) adalah syarat perlu dan syarat cukup untuk sentralisasi kontrol H_∞ , maka dapat ditarik simpulan bahwa \tilde{P}_0 ada. Selanjutnya adalah bagaimana untuk membuat suatu path homotopi yang dapat menghubungkan (G_{D0}, \tilde{P}_0) pada $\lambda = 0$ ke (G_D, \tilde{P}) pada $\lambda = 1$ seperti yang ditunjukkan pada (4.48).

Misalkan diberikan M sebuah bilangan positif dan menghasilkan $(M + 1)$ titik $\lambda_k = k/M$ dan BMI pada (4.48) dapat dituliskan kembali sebagai.

$$H(G_D, \tilde{P}, \lambda_k) < 0 \quad (4.49)$$

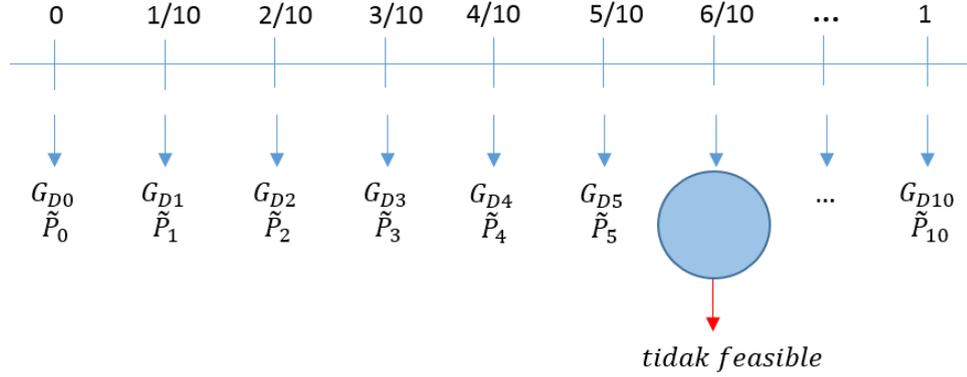
Penentuan banyaknya titik pada path homotopi dapat diilustrasikan pada Gambar 4.2 sebagai berikut:



Gambar 4.2: Ilustrasi penentuan titik path homotopi

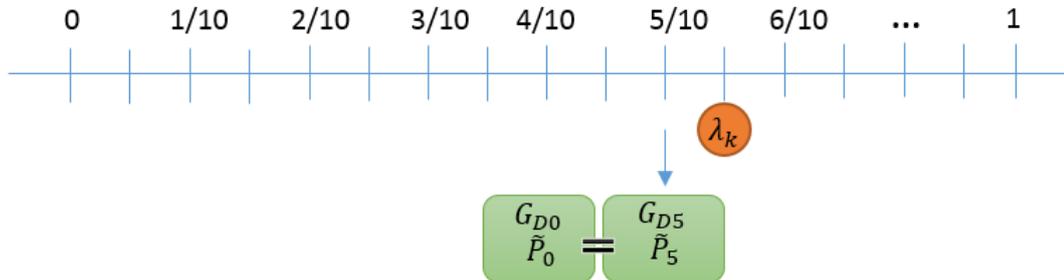
Jika pada titik ke- k (G_D, \tilde{P}) *feasible*, maka dinotasikan solusi yang dipenuhi tersebut dengan (G_{Dk}, \tilde{P}_k) . Selanjutnya, dihitung solusi dari $(G_{D(k+1)}, \tilde{P}_{k+1})$ dari $H(G_D, \tilde{P}, \lambda_{k+1}) < 0$ dengan double LMI yang artinya satu dari dua variabel adalah "fixed" ($G_D = G_{Dk}$ atau $\tilde{P} = \tilde{P}_k$). Jika masalah pada (4.49) *feasible*, sebuah solusi dari BMI pada (4.46) dipenuhi pada $k = M$ atau $\lambda = 1$. Jika hal itu tidak terjadi, maka $H(G_D, \tilde{P}, \lambda_k) < 0$ *infeasible* atau tidak ada penyelesaian untuk k tertentu. Dapat dipertimbangkan titik lain pada interval $[\lambda_k, 1]$ dengan meningkatkan nilai M , dan ulangi kembali prosedur dari solusi (G_{Dk}, \tilde{P}_k) pada $\lambda = \lambda_k$. Penjelasan di atas dapat diilustrasikan pada Gambar 4.3 berikut:

Berdasarkan Gambar 4.3 terlihat bahwa penyelesaian pada titik ke-7 ($k = 6$) *infeasible*, sehingga dapat dibentuk kembali path homotopi yang baru. Path homotopi yang baru dimulai dari titik yang menghasilkan solusi (*feasible*) terakhir, dalam ilustrasi pada Gambar 4.3 dapat diketahui titik



Gambar 4.3: Ilustrasi path homotopi dengan $M = 10$

feasible terakhir adalah titik ke-6 ($k = 5$), sehingga dapat dikatakan bahwa path homotopi yang baru dimulai dari titik ke-6 dengan jarak yang lebih kecil. Artinya pada start path homotopi yang baru ini, digunakan nilai M yang lebih besar, sehingga nilai λ lebih kecil dari sebelumnya. Penjelasan di atas dapat diilustrasikan pada Gambar 4.4 berikut:



Gambar 4.4: Ilustrasi path homotopi setelah mendapatkan solusi yang *infeasible*

Dapat dirumuskan algoritma untuk menghitung desentralisasi kontrol H_∞ dengan metode homotopi sebagai berikut (Zhai, 2001).

- Langkah 1: Hitung G_F dengan menggunakan metode yang ada dan selanjutnya selesaikan LMI pada (4.30) untuk mendapatkan \tilde{P}_0 . Berikan nilai awal M (positif integer), misalkan $M := 2$, dan berikan batas atas dan batas bawah, misalkan $M_{max} := 2^{10}$
- Langkah 2: Diberikan $k := 0, G_{Dk} := 0$, dan $\tilde{P}_k := \tilde{P}_0$
- Langkah 3: Didefinisikan $k := k + 1$ dan $\lambda_k := k/M$. Hitung solusi G_D dari $H(G_D, \tilde{P}_{k-1}, \lambda_k) < 0$. Jika itu *feasible*, diberikan $G_{Dk} := G_D$ dan hitung solusi dari \tilde{P} dari $H(G_D, \tilde{P}_k, \lambda_k) < 0$. Selanjutnya diberikan $\tilde{P}_k := \tilde{P}$

dan dilanjutkan ke Langkah 5. Jika $H(G_D, \tilde{P}_{k-1}, \lambda_k) < 0$ *infeasible*, dilanjutkan ke Langkah 4.

Langkah 4: Hitung solusi \tilde{P} dari $H(G_{D(k-1)}, \tilde{P}, \lambda_k) < 0$. Jika itu *feasible*, diberikan $\tilde{P}_k := \tilde{P}$ dan hitung solusi dari G_D dari $H(G_D, \tilde{P}_k, \lambda_k) < 0$. Selanjutnya, didefinisikan $G_{Dk} := G_D$ dan dilanjutkan ke Langkah 5. Jika $H(G_{D(k-1)}, \tilde{P}, \lambda_k) < 0$ *infeasible*, Langkah $M := 2M$ dan kembali ke Langkah 3. Jika sudah tidak dapat meningkatkan M lagi (melebihi batas M_{max}), dapat disimpulkan bahwa solusi *infeasible* atau algoritma tidak konvergen.

Langkah 5: Jika $k < M$, lanjut ke Langkah 3. Jika $k = M$, maka pasangan (G_{DM}, \tilde{P}_M) dipenuhi dan merupakan solusi dari BMI seperti pada (4.30).

Penjelasan algoritma di atas dapat digambarkan pada diagram alir yang disajikan pada Gambar 4.5

Ketidakkonvergenan pada BMI, dalam kasus ini pada (4.46) dikarenakan algoritma untuk mendapatkan desentralisasi kontrol $H_\infty G_D$ bergantung pada sentralisasi kontrol $H_\infty G_F$ yang mana tidak unique. Dapat dicatat bahwa ketidakkonvergenan pada algoritma untuk beberapa G_F tidak mengindikasikan secara general bahwa masalah desentralisasi kontrol H_∞ tidak memiliki solusi. Pada (Zhai, 2001), telah didiskusikan bagaimana cara untuk mendapatkan titik awal (starting point) yang tepat untuk path homotopi.

4.6 Algoritma desain desentralisasi kontrol H_∞ secara umum

Berdasarkan penjelasan-penjelasan sebelumnya, dapat dituliskan langkah-langkah untuk mendesain desentralisasi kontrol H_∞ secara umum sebagai berikut: flowchart

Langkah 1: Didefinisikan sistem awal seperti pada Persamaan (2.2).

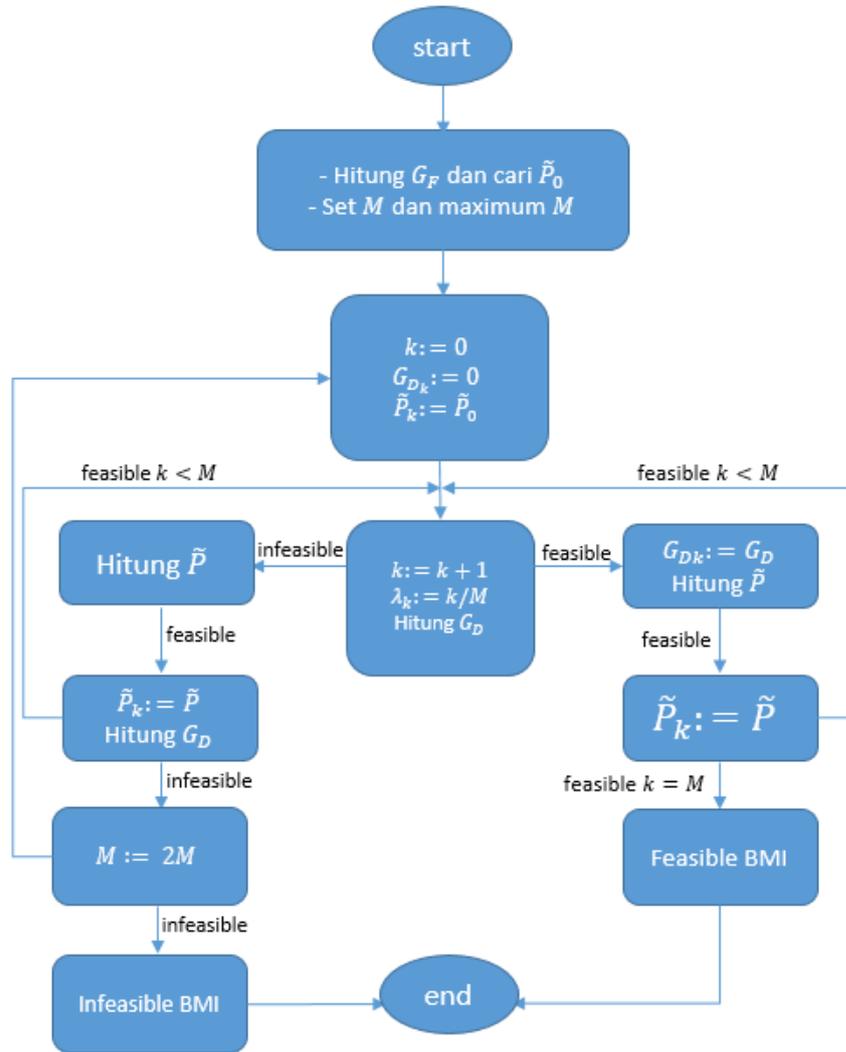
Langkah 2: Dicari sentralisasi kontrol $H_\infty G_F$ dan didapatkan $\|T_{zw}\|_\infty$ untuk sentralisasi kontrol H_∞ .

Langkah 3: Diberikan $\gamma > 0$ yang memenuhi $\gamma > \|T_{zw}\|_\infty$ sentralisasi kontrol H_∞ . Selanjutnya, masuk ke dalam metode homotopi untuk menyelesaikan 2 LMI seperti pada (4.47).

Langkah 4: Jika algoritma berjalan konvergen, maka didapatkan desentralisasi kontrol $H_\infty G_D$ dan didapatkan $\|T_{zw}\|_\infty$ untuk desentralisasi kontrol H_∞ . Cek apakah $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$. Jika iya, maka solusi G_D yang didapatkan pada tahap ini adalah *admissible* untuk sistem *storey building*. Jika tidak, maka kembali ke langkah 3 dengan cara memperbesar nilai γ yang diberikan.

Penjelasan langkah-langkah di atas dapat digambarkan pada diagram alir yang disajikan pada Gambar 4.6 berikut:

Selanjutnya, desain desentralisasi kontrol H_∞ akan diimplementasikan pada sistem *storey building* 5 lantai.



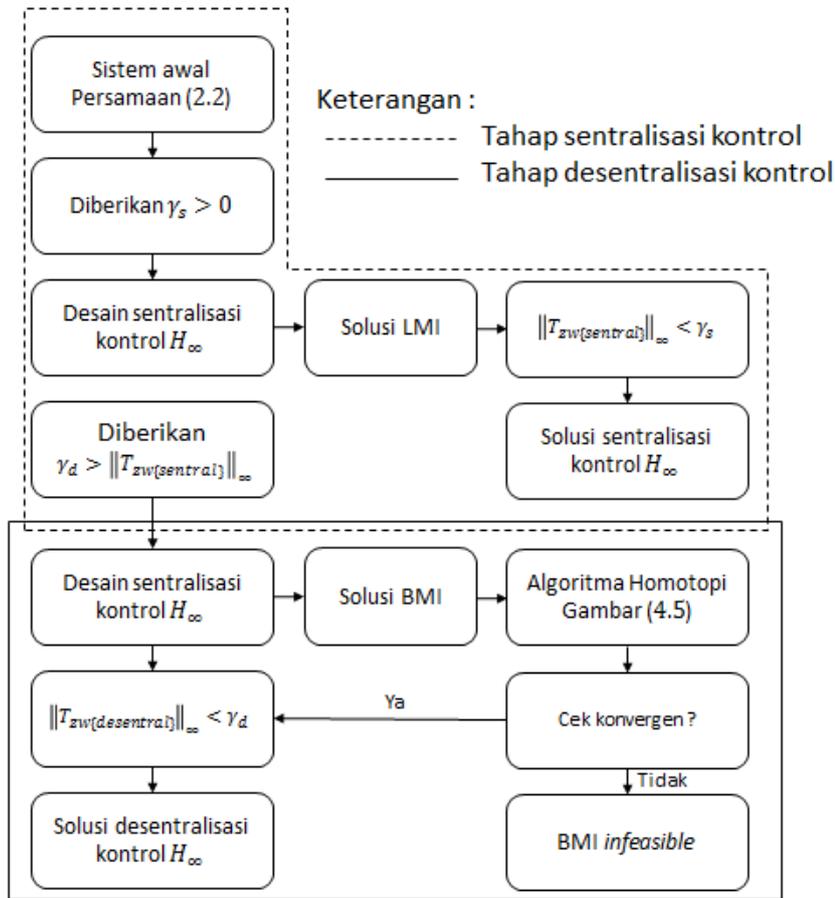
Gambar 4.5: Diagram algoritma homotopi

4.7 Studi Kasus Sistem *Storey Building*

Representasi model *storey building* yang disajikan pada Persamaan (2.33) dapat dibentuk ke dalam realisasi matriks dengan mengadopsi model dari *Mass Damper Spring* (MDS). Dapat diilustrasikan sistem *storey building* pada Gambar 4.7 (Javad, 2015).

Berdasarkan Gambar 4.7, diketahui 5 massa (M) saling berhubungan dan di setiap massa dipasang peredam (D) dan pegas (K). Dapat diselidiki model pada masing-masing lantai. Satu lantai memiliki rangkaian yang sama dengan sistem *Mass Damping Spring* (MDS). Sistem *storey building* yang digunakan pada tesis ini didasari oleh struktur 2D *shear-frame* dengan perubahan tanah searah (Yang, 2009).

Kontrol u didefinisikan sebagai kontrol kekuatan antara lantai yang berdekatan. Untuk struktur lima lantai, gaya kontrol positif didefinisikan

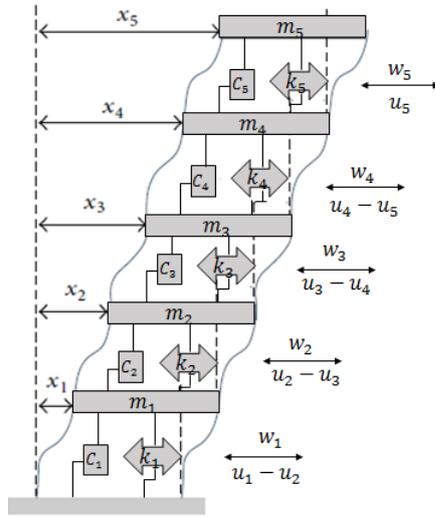


Gambar 4.6: Diagram alir desain desentralisasi kontrol H_∞

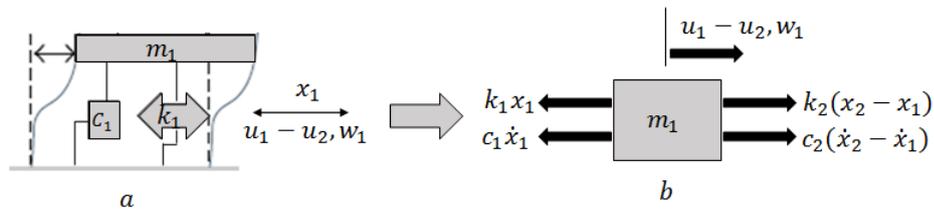
untuk memindahkan lantai (massa) di atas perangkat kontrol ke arah kiri, dan memindahkan lantai (massa) di bawah perangkat kontrol ke arah kanan, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.7. Dapat dijabarkan kontrol gaya pada masing-masing lantai sebagai berikut:

- i. Kontrol gaya pada lantai 1 adalah $u_1 - u_2$.
- ii. Kontrol gaya pada lantai 2 adalah $u_2 - u_3$.
- iii. Kontrol gaya pada lantai 3 adalah $u_3 - u_4$.
- iv. Kontrol gaya pada lantai 4 adalah $u_4 - u_5$.
- v. Kontrol gaya pada lantai 5 adalah u_5 . Hal ini terjadi karena pada lantai 5 (paling atas), kontrol gaya tidak dipengaruhi oleh lantai yang dibawahnya.

Misalkan akan diamati lantai 1, maka dapat digambarkan seperti pada Gambar 4.8 sebagai berikut:



Gambar 4.7: Sistem Multi *Mass Damping Spirng* pada *storey building*



Gambar 4.8: Sistem *storey building* pada lantai 1 (a) dan ilustrasi sistem lantai 1 dengan sistem MDS (b)

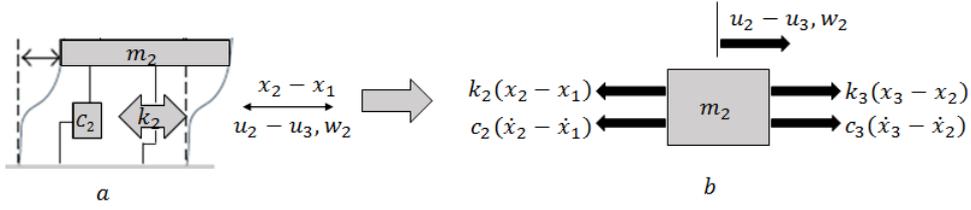
Dengan hukum Newton kedua, dapat diturunkan sebuah persamaan dari Gambar 4.8 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= m_1 \ddot{x}_1 \\
 u_1 - u_2 + w_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 &= m_1 \ddot{x}_1 \\
 u_1 - u_2 + w_1 + k_2x_2 - k_2x_1 + c_2\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 - k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 &= m_1 \ddot{x}_1 \\
 m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 &= u_1 - u_2 + w_1 \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

Untuk lantai 2 dapat disajikan ilustrasi sistem pada Gambar 4.9 berikut:

dengan hukum Newton kedua, dapat diturunkan sebuah persamaan dari Gambar 4.9 sebagai berikut:

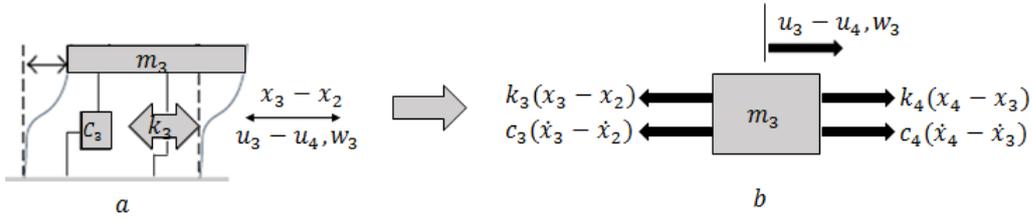
$$\begin{aligned}
 F_2 &= m_2 \ddot{x}_2 \\
 u_2 - u_3 + w_2 + k_3(x_3 - x_2) + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= m_2 \ddot{x}_2
 \end{aligned}$$



Gambar 4.9: Sistem *storey building* pada lantai 2 (a) dan ilustrasi sistem lantai 2 dengan sistem MDS (b)

$$\begin{aligned}
 u_2 - u_3 + w_2 + k_3 x_3 - k_3 x_2 + c_3 \dot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 - k_2 x_2 + k_2 x_1 - c_2 \dot{x}_2 + c_2 \dot{x}_1 &= m_2 \ddot{x}_2 \\
 m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 &= u_2 - u_3 + w_2 \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

Untuk lantai 3 dapat disajikan ilustrasi sistem pada Gambar 4.10 berikut:



Gambar 4.10: Sistem *storey building* pada lantai 3 (a) dan ilustrasi sistem lantai 3 dengan sistem MDS (b)

dengan hukum Newton kedua, dapat diturunkan sebuah persamaan dari Gambar 4.10 sebagai berikut:

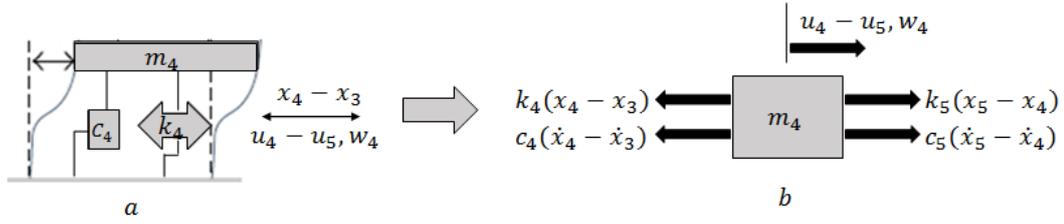
$$\begin{aligned}
 F_3 &= m_3 \ddot{x}_3 \\
 u_3 - u_4 + w_3 + k_4(x_4 - x_3) + c_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - k_3(x_3 - x_2) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= m_3 \ddot{x}_3 \\
 u_3 - u_4 + w_3 + k_4 x_4 - k_4 x_3 + c_4 \dot{x}_4 - c_4 \dot{x}_3 - k_3 x_3 + k_3 x_2 - c_3 \dot{x}_3 + c_3 \dot{x}_2 &= m_3 \ddot{x}_3 \\
 m_3 \ddot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 + (c_3 + c_4) \dot{x}_3 - c_4 \dot{x}_4 - k_3 x_2 + (k_3 + k_4) x_3 - k_4 x_4 &= u_3 - u_4 + w_3 \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

Untuk lantai 4 dapat disajikan ilustrasi sistem pada Gambar 4.11 berikut:

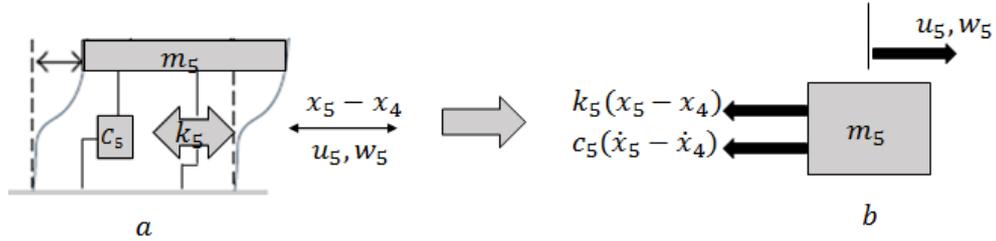
dengan hukum Newton kedua, dapat diturunkan sebuah persamaan dari Gambar 4.11 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 F_4 &= m_4 \ddot{x}_4 \\
 u_4 - u_5 + w_4 + k_5(x_5 - x_4) + c_5(\dot{x}_5 - \dot{x}_4) - k_4(x_4 - x_3) - c_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) &= m_4 \ddot{x}_4 \\
 u_4 - u_5 + w_4 + k_5 x_5 - k_5 x_4 + c_5 \dot{x}_5 - c_5 \dot{x}_4 - k_4 x_4 + k_4 x_3 - c_4 \dot{x}_4 + c_4 \dot{x}_3 &= m_4 \ddot{x}_4 \\
 m_4 \ddot{x}_4 - c_4 \dot{x}_3 + (c_4 + c_5) \dot{x}_4 - c_5 \dot{x}_5 - k_4 x_3 + (k_4 + k_5) x_4 - k_5 x_5 &= u_4 - u_5 + w_4 \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

Untuk lantai 5 dapat disajikan ilustrasi sistem pada Gambar 4.12 berikut:



Gambar 4.11: Sistem *storey building* pada lantai 4 (a) dan ilustrasi sistem lantai 4 dengan sistem MDS (b)



Gambar 4.12: Sistem *storey building* pada lantai 5 (a) dan ilustrasi sistem lantai 5 dengan sistem MDS (b)

dengan hukum Newton kedua, dapat diturunkan sebuah persamaan dari Gambar 4.12 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 F_5 &= m_5 \ddot{x}_5 \\
 u_5 + w_5 - k_5(x_5 - x_4) - c_5(\dot{x}_5 - \dot{x}_4) &= m_5 \ddot{x}_5 \\
 u_5 + w_5 - k_5 x_5 + k_5 x_4 - c_5 \dot{x}_5 + c_5 \dot{x}_4 &= m_5 \ddot{x}_5 \\
 m_5 \ddot{x}_5 - c_5 \dot{x}_4 + c_5 \dot{x}_5 - k_5 x_4 + k_5 x_5 &= u_5 + w_5
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Berdasarkan Persamaan (4.50) - (4.54) dapat dibentuk ke dalam persamaan seperti Persamaan (2.33), dengan M, C , dan K adalah masing-masing matriks dari massa, peredam, dan koefisien kekakuan pegas. Matriks-matriks M, C , dan K dapat dituliskan sebagai berikut:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

$$D = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 + c_5 & -c_5 \\ 0 & 0 & 0 & -c_5 & c_5 \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Diketahui matriks B_0 adalah matriks lokasi dari kontrol gaya dan matriks L adalah vektor yang merepresentasikan letak gangguan, yang dapat dituliskan sebagai berikut (Yang, 2009):

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = -M [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

Masing-masing parameter M, C , dan K disajikan pada Tabel 4.1:

Tabel 4.1: Bangunan Kajima Shizuoka 5 lantai (Rubio-Massegu, 2012)

Lantai ke-	Massa (M)	Lantai yang terhubung	Kekakuan (K)
5	$266,1 \times 10^3 Kg$	4 – 5	$84 \times 10^6 N/m$
4	$204,8 \times 10^3 Kg$	3 – 4	$89 \times 10^6 N/m$
3	$207,0 \times 10^3 Kg$	2 – 3	$99 \times 10^6 N/m$
2	$209,2 \times 10^3 Kg$	1 – 2	$113 \times 10^6 N/m$
1	$215,2 \times 10^3 Kg$	0 – 1	$147 \times 10^6 N/m$

Satuan massa dalam Kg , koefisien peredam dalam Ns/m , dan koefisien kekakuan pegas dalam N/m . Substitusi parameter pada Tabel Tabel 4.1 ke dalam Persamaan (4.55)-(4.57), didapatkan matriks M , D , dan K sebagai berikut:

$$M = 10^3 \times \begin{bmatrix} 215.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 209.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 207.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 204.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 266.1 \end{bmatrix}$$

$$D = 10^3 \times \begin{bmatrix} 650.4 & 231.1 & 0 & 0 & 0 \\ 231.1 & 548.9 & 202.5 & 0 & 0 \\ 0 & 202.5 & 498.6 & 182.0 & 0 \\ 0 & 0 & 182.0 & 466.7 & 171.8 \\ 0 & 0 & 0 & 171.8 & 318.5 \end{bmatrix}$$

$$K = 10^6 \times \begin{bmatrix} 260 & 113 & 0 & 0 & 0 \\ 113 & 212 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 99 & 188 & 89 & 0 \\ 0 & 0 & 89 & 173 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 84 & 84 \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah simulasi, Persamaan (2.33) akan diturunkan menjadi persamaan diferensial orde satu. Misalkan,

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

(4.58)

Diasumsikan M memiliki invers, maka dengan substitusi Persamaan (4.58) ke dalam Persamaan (2.34), didapatkan:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \ddot{x}_1 &= -M^{-1}Kx_1 - M^{-1}Dx_2 + M^{-1}Lw + M^{-1}B_0 \end{aligned}$$

Sehingga dapat dibentuk persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_0 \end{bmatrix} u \quad (4.59)$$

Ukuran matriks yang digunakan pada tahap simulasi adalah berukuran $2n \times 2n$ dengan n adalah total *state*. Dapat dituliskan kembali Persamaan (4.59) sebagai,

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (4.60)$$

dengan $x(t) = [x_1 \quad \dot{x}_1]^T \in R^{2n \times 1}$ adalah vektor *state*, $A \in R^{2n \times 2n}$, $B_1 \in R^{2n \times m_2}$, dan $B_2 \in R^{2n \times m_1}$ masing-masing adalah sistem, kontrol, dan matriks gangguan. Dalam kasus ini n adalah banyaknya *state* $n = 5$, m_1 adalah banyaknya gangguan, dalam hal ini $m_1 = 1$ dan m_2 adalah banyak kontrol, sehingga $m_2 = 5$. Atau lebih jelasnya, Persamaan (4.59) dapat dituliskan sebagai $A, B_1,$ dan B_2 berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} & I_{5 \times 5} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 1} \\ M^{-1}L \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} \\ M^{-1}B_0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Dalam penelitian ini, diasumsikan bahwa perpindahan dan kecepatan antar-lantai dapat diukur. Variabel perpindahan dan kecepatan di x , yang

relatif terhadap tanah, perpindahan antar lantai dan kecepatan pada setiap lantai kemudian dikelompokkan bersama sebagai berikut (Yang, 2009):

$$x(t) = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad (x_2 - x_1) \quad (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad \cdots \quad (x_5 - x_4) \quad (\dot{x}_5 - \dot{x}_4)]^T \quad (4.62)$$

Sedangkan keluaran (*output*) dari sistem *storey building* ini adalah sebagai berikut:

$$y(t) = [\dot{x}_1 \quad (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \quad (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) \quad (\dot{x}_5 - \dot{x}_4)]^T$$

dengan $y(t)$ adalah kecepatan antar lantai ke- n dengan lantai ke $n - 1$. Selanjutnya, didefinisikan C_2 , C_1 , dan D_{12} sebagai berikut (Rubio-Massegu, 2012):

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} I_{10 \times 10} \\ 0_{5 \times 10} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0_{10 \times 5} \\ I_{5 \times 5} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Berdasarkan Persamaan (4.63), (4.64), dan (4.65), dapat diketahui bahwa matriks D_{11} , D_{21} , dan D_{22} adalah matriks nol dengan ukuran yang bersesuaian.

4.8 Simulasi

Dalam simulasi ini akan dicari sentralisasi kontrol H_∞ dan desentralisasi kontrol H_∞ dengan pendekatan LMI.

4.8.1 Simulasi desain sentralisasi kontrol H_∞

Pada bagian ini dilakukan substitusi parameter dari bangunan Kajima Shizuoka 5 lantai pada Tabel 4.1 ke dalam Persamaan (4.61), Sehingga didapatkan matriks A , $B1$, dan $B2$ sebagai berikut:

$$A = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 \\ -1.2082 & 0.5251 & 0 & 0 & 0 & -0.0030 & 0.0011 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5402 & -1.0134 & 0.4732 & 0 & 0 & 0.0011 & -0.0026 & 0.0010 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4783 & -0.9082 & 0.4300 & 0 & 0 & 0.0010 & -0.0024 & 0.0009 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4346 & -0.8447 & 0.4102 & 0 & 0 & 0.0009 & -0.0023 & 0.0008 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3157 & -0.3157 & 0 & 0 & 0 & 0.0006 & -0.0012 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$B1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$B2 = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4647 & -0.4647 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4780 & -0.4780 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4831 & -0.4831 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4883 & -0.4883 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3758 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Matriks $C1, C2$, dan matriks D disajikan pada Persamaan (4.64) - (4.65). Berdasarkan sistem awal dapat dihitung nilai eigen sistem seperti yang disajikan pada Tabel 4.2 sebagai berikut:

Tabel 4.2: Nilai eigen sistem awal

Nilai eigen
-2.1279 +42.5062i
-2.1279 -42.5062i
-1.6324 +36.3896i
-1.6324 -36.3896i
-1.0906 +28.2084i
-1.0906 -28.2084i
-0.5977 +17.7375i
-0.5977 -17.7375i
-0.3167 + 6.3268i
-0.3167 - 6.3268i

Berdasarkan Tabel 4.2 dapat dikastakan bahwa sistem awal sudah memiliki sifat stabil asimtotik dan berdasarkan *rank* dari matriks keterkontrolan dan matriks keteramatan adalah 10, maka dapat disimpulkan bahwa sistem awal dalam simulasi ini memiliki sifat stabil asimtotik dan minimal (terkontrol

dan teramati). Dari sini, tujuan utama untuk memberikan kontrol pada sistem *storey building* ini adalah untuk mempercepat kestabilan apabila terjadi gangguan (misal: gempa bumi dan angin kencang).

Kontrol H_∞ didapatkan dengan bantuan *toolbox* **hinflmi** pada MATLAB didapatkan sentralisasi kontrol H_∞ (G_F) sebagai berikut:

$$A_f = 10^7 \times \begin{bmatrix} -0.5310 & -0.0572 & -0.0039 & -0.0858 & 0.1245 & -0.0057 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0480 & 0.2066 \\ -0.0154 & -0.3639 & 0.0973 & -0.1637 & 0.0020 & 0.0005 & -0.0010 & -0.0079 & 0.0025 & -0.0067 \\ 0.0450 & 0.0783 & -0.3093 & -0.1773 & -0.0372 & 0.0004 & -0.0045 & -0.0049 & 0.0085 & 0.0070 \\ -0.1447 & -0.0511 & -0.0489 & -0.1962 & 0.0412 & 0.0002 & 0.0020 & 0.0041 & 0.0060 & 0.0240 \\ 0.0964 & -0.0043 & -0.0376 & -0.0643 & -0.1205 & -0.0066 & 0.0021 & -0.0004 & 0.0439 & 0.1662 \\ -0.0228 & -0.0153 & -0.0041 & -0.0269 & 0.0088 & -0.0001 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0007 & 0.0003 \\ -1.1420 & 3.1220 & -2.5233 & 0.6361 & 0.4845 & -0.0017 & -0.6780 & -0.8715 & 0.0013 & 0.0151 \\ 0.2397 & -1.5663 & 1.9016 & 0.6172 & -0.0541 & -0.0032 & -0.8703 & -1.4707 & -0.0125 & 0.0350 \\ 0.5252 & 0.6664 & 1.5603 & 3.2071 & -0.0849 & -0.0029 & -0.0006 & -0.0160 & -0.0813 & 0.0720 \\ 2.7243 & 0.0417 & -2.1475 & -3.1240 & -1.3301 & 0.0274 & 0.0179 & 0.0379 & 0.0681 & -0.2139 \end{bmatrix}$$

$$B_f = 10^8 \times \begin{bmatrix} -0.0045 & -0.0041 & 0.0194 & 0.0293 & 0.0295 \\ 0.0010 & 0.0054 & 0.0293 & -0.0027 & -0.0062 \\ -0.0002 & 0.0048 & -0.0080 & 0.0175 & -0.0210 \\ 0.0081 & 0.0018 & 0.0113 & 0.0155 & 0.0004 \\ -0.0178 & -0.0267 & -0.0026 & -0.0056 & -0.0167 \\ -0.0004 & -0.0012 & 0.0029 & 0.0027 & -0.0000 \\ -1.8339 & 1.2705 & -0.3282 & 0.2624 & 0.0636 \\ -2.8514 & 1.9705 & 0.1551 & -0.1893 & 0.0723 \\ -0.0429 & -0.0135 & -0.1545 & -0.2607 & 0.2066 \\ 0.2231 & 0.1713 & -0.0185 & 0.0851 & -0.4776 \end{bmatrix}$$

$$C_f = 10^{11} \times \begin{bmatrix} -0.6066 & -0.8052 & 0.6569 & -0.8359 & 0.9093 & 0.0082 & -0.0295 & 0.0400 & -0.3990 & -1.3487 \\ 0.0501 & 1.3101 & 0.0378 & -0.0197 & 1.1170 & 0.0337 & 0.0364 & 0.0391 & -0.5903 & -2.2722 \\ -1.0455 & -0.1824 & -1.3095 & 0.2461 & 0.2985 & -0.0209 & -0.0113 & -0.0794 & 0.0476 & 0.2342 \\ 0.4936 & -0.6884 & 0.1261 & 1.2789 & 0.7869 & 0.0282 & -0.0557 & -0.0436 & -0.4375 & -1.9543 \\ -1.1313 & 0.3578 & 0.9146 & 0.7770 & -0.3782 & -0.0565 & 0.0226 & 0.0291 & 0.4461 & 1.7621 \end{bmatrix}$$

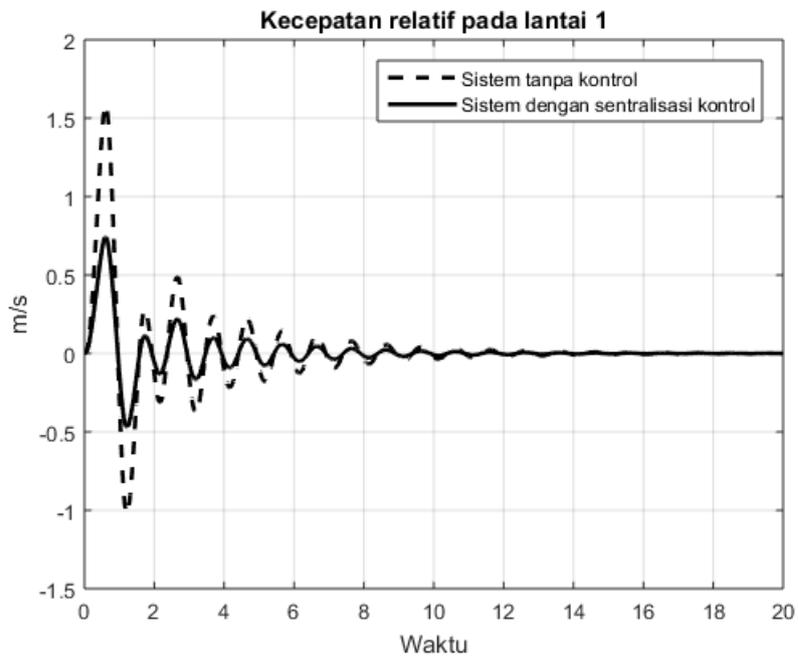
$$D_f = [0_{5 \times 5}]$$

dengan $GF = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right]$, didapatkan sistem dengan kontrol sentralisasi kontrol H_∞ yang memiliki nilai eigen seperti pada Tabel 4.3 sebagai berikut: Berdasarkan Tabel 4.3 dapat disimpulkan bahwa sistem dengan kontrol sentralisasi kontrol H_∞ merupakan sistem yang stabil asimtotik dengan nilai optimal $\gamma = 3.11587$. Dalam simulasi ini diberikan gangguan berupa fungsi sinusoidal sebagai berikut:

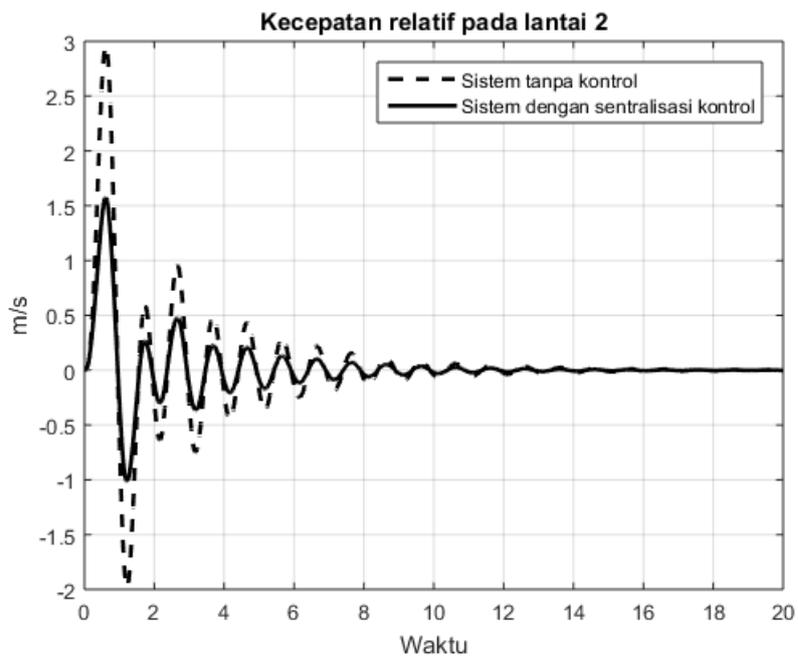
$$w = 10^2 e^{-t} \sin(\pi t) \quad (4.69)$$

Hasil simulasi akan menghasilkan gambaran perforansi dari sistem tanpa kontrol dan sistem dengan sentralisasi kontrol H_∞ (sistem lup tertutup). Performansi yang dimaksud dalam kasus sistem *storey building* ini adalah redaman pada sistem baik tanpa kontrol ataupun sistem lup tertutup dan kestabilan dari sistem sebelum dan sesudah dikontrol. Jika diinputkan gangguan w pada Persamaan (4.69) sedemikian hingga, maka puncak (*peak*) sistem lup tertutup selalu berada di bawah *peak* sistem tanpa kontrol dan kestabilan daripada sistem lup tertutup lebih cepat menuju 0 dibandingkan sistem tanpa kontrol.

Hasil simulasi pada sistem *storey building* untuk masing-masing sub sistem disajikan pada Gambar berikut:



Gambar 4.13: Kecepatan relatif pergerakan tanah pada pada lantai 1



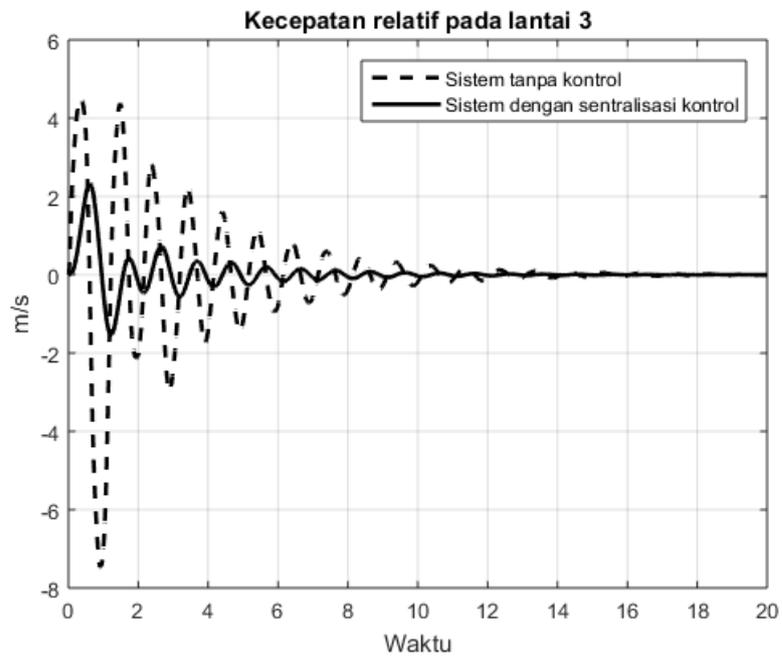
Gambar 4.14: Kecepatan relatif pergerakan tanah pada pada lantai 2

Tabel 4.3: Nilai eigen sistem dengan kontrol sentralisasi kontrol H_∞

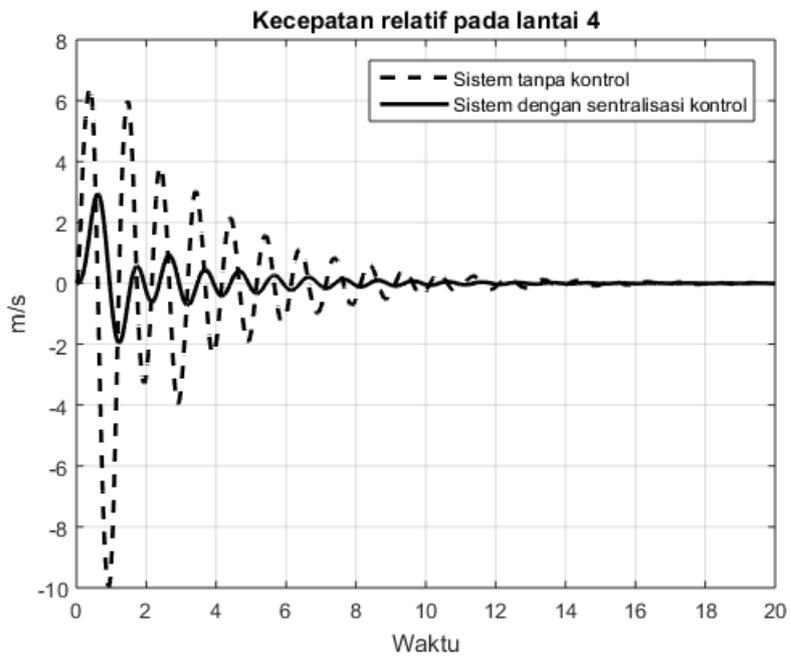
Nilai eigen ($\times 10^6$)
-1.073962884331679 + 0.0000000000000000i
-0.245879155786595 + 0.0000000000000000i
-0.063381077958328 + 0.0000000000000000i
-0.056633793665612 + 0.0000000000000000i
-0.032312041354803 + 0.0000000000000000i
-0.000002197828857 + 0.000042503763760i
-0.000002197828857 - 0.000042503763760i
-0.000001706050876 + 0.000036387390291i
-0.000001706050876 - 0.000036387390291i
-0.000001153661692 + 0.000028206760878i
-0.000001153661692 - 0.000028206760878i
-0.000038501293566 + 0.0000000000000000i
-0.000000641482662 + 0.000017736494533i
-0.000000641482662 - 0.000017736494533i
-0.000013792125696 + 0.000020576548924i
-0.000013792125696 - 0.000020576548924i
-0.000000329652772 + 0.000006326114464i
-0.000000329652772 - 0.000006326114464i
-0.000024408287010 + 0.0000000000000000i
-0.000002064262754 + 0.0000000000000000i

Gambar 4.13-Gambar 4.14 menunjukkan performansi pada sistem *storey building* lantai 1 dan 2. Berdasarkan grafik yang dihasilkan, grafik sistem dengan sentralisasi kontrol H_∞ memiliki *peak* yang cukup rendah dibandingkan dengan grafik sistem tanpa kontrol. Dari sini, berdasarkan Gambar 4.13-Gambar 4.14 dapat disimpulkan bahwa sentralisasi kontrol H_∞ berfungsi cukup baik dalam mengendalikan lantai 1 dan 2.

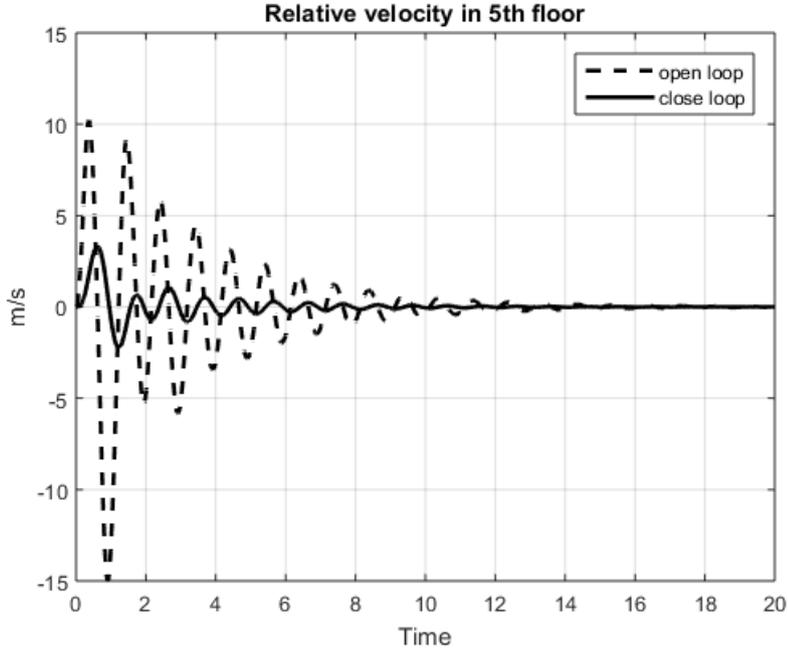
Gambar 4.15-Gambar 4.17 menunjukkan performansi pada sistem *storey building* lantai 3,4, dan 5. Berdasarkan grafik yang dihasilkan, grafik sistem dengan sentralisasi kontrol H_∞ memiliki *peak* yang cukup rendah dibandingkan dengan grafik sistem tanpa kontrol. Dengan demikian, berdasarkan Gambar 4.15-Gambar 4.17 dapat disimpulkan bahwa sentralisasi kontrol H_∞ berfungsi cukup baik dalam mengendalikan lantai 3,4, dan 5. Berdasarkan Gambar 4.13 - Gambar 4.17, dapat disimpulkan bahwa *peak* sistem dengan sentralisasi kontrol H_∞ lebih rendah daripada sistem tanpa kontrol. Hasil tersebut menjawab tujuan sentralisasi kontrol H_∞ pada sistem *storey building*, pada simulasi ini bertujuan untuk mempercepat kestabilan sistem apabila terjadi gangguan pada sistem (karena sistem awal sudah stabil).



Gambar 4.15: Kecepatan relatif pergerakan tanah pada pada lantai 3



Gambar 4.16: Kecepatan relatif pergerakan tanah pada pada lantai 4



Gambar 4.17: Kecepatan relatif pergerakan tanah pada pada lantai 5

Berdasarkan Gambar 4.13 - Gambar 4.17, untuk $t = [0, 20]$ dapat ditabelkan kecepatan relatif pergerakan tanah pada Tabel 4.4 sebagai berikut:

Tulisan tipis menunjukkan hasil dari catatan pergerakan sistem tanpa kontrol pada waktu t , dan tulisan tebal menunjukkan hasil dari catatan pergerakan sistem dengan kontrol sentralisasi kontrol H_∞ pada waktu t . Berdasarkan Tabel 4.4, dapat ditarik kesimpulan bahwa sistem dengan kontrol memiliki performansi yang lebih bagus dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol di hampir semua waktu t , dan dapat disimpulkan bahwa sistem dengan kontrol memiliki performansi yang lebih baik daripada sistem tanpa kontrol.

4.8.2 Simulasi desain desentralisasi kontrol H_∞

Selanjutnya adalah mencari desentralisasi kontrol H_∞ dengan menyelesaikan BMI dengan metode homotopi. Fungsi homotopi pada (2.32) diselesaikan dengan menggunakan *double* LMI, dimana salah satu variabel sudah diketahui atau "fixed". Didefinisikan sentralisasi kontrol H_∞ G_F , maka dapat dicari solusi matriks P dengan LMI. Solusi matriks P yang sudah ada, digunakan untuk mendapatkan solusi desentralisasi kontrol H_∞ G_D dengan menyelesaikan LMI seperti pada (4.46). Berdasarkan Persamaan (4.62), pada kasus sistem *storey building* setiap subsistem (*storey*) memuat *state* perpindahan dan kecepatan relatif $\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$ atau dapat dituliskan bahwa dimensi *state* pada masing-masing lokal pengontrol $n_i = 2$. Total dimensi pengontrol untuk desentralisasi kontrol H_∞ adalah $\hat{n} = \sum_{i=1}^N n_i$ dan total dimensi *state* dari desentralisasi kontrol H_∞ adalah kurang dari

Tabel 4.4: Kecepatan relatif dari pergerakan sistem *storey building* pada $t = [0, 20]$

<i>Storey</i>	$t = 0,5$	$t = 2$	$t = 5$	$t = 9$	$t = 15$	$t = 20$
1	1.9185	-0.1846	-0.1277	-0.0456	-0.0088	-0.0020
	0.9095	-0.0783	-0.0533	-0.0180	-0.0032	-0.0007
2	3.5929	-0.3889	-0.2533	-0.0912	-0.0176	-0.0041
	1.9138	-0.1767	-0.1181	-0.0401	-0.0071	-0.0016
3	2.8370	-1.1466	-0.6657	-0.1538	-0.0170	-0.0023
	2.1016	-0.2789	-0.1813	-0.0618	-0.0110	-0.0024
4	7.1588	-4.2339	-2.2492	-0.5312	-0.0586	-0.0078
	3.5836	-0.3708	-0.2342	-0.0801	-0.0143	-0.0031
5	9.9972	-6.6888	-3.2905	-0.7954	-0.0872	-0.0116
	4.0390	-0.4318	-0.2674	-0.0917	-0.0164	-0.0036

dimensi sentralisasi kontrol H_∞ . Hal tersebut terjadi karena dalam desain desentralisasi kontrol H_∞ dapat di tentukan dimensi *state* pada setiap pengontrol lokal. Misal akan didesain lokal pengontrol $n_i = 1$, artinya bahwa dimensi *state* pada pengontrol lokal adalah satu, yaitu *state* perpindahan $x(t)$.

Contoh Kasus

Misal akan di desain desentralisasi kontrol pada sistem *storey building* dengan $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$, $n_5 = 1$ atau dapat dituliskan bahwa $\hat{n} = 6$ dan $\hat{n} < n$. Pengontrol dinamik untuk desentralisasi kontrol H_∞ seperti pada Persamaan (4.32) dan substitusi y (Persamaan (4.31)) ke dalam desentralisasi kontrol H_∞ , sehingga didapatkan desentralisasi kontrol H_∞ untuk $\hat{n} = 6$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}_D \hat{x} + \hat{B}_D C_2 x + \hat{B}_D D_{21} w \\ u &= \hat{C}_D \hat{x} + \hat{D}_D C_2 x + \hat{D}_D D_{21} w\end{aligned}\tag{4.70}$$

karena $D_{21} = 0$, maka Persamaan (4.70) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}_D \hat{x} + \hat{B}_D C_2 x \\ u &= \hat{C}_D \hat{x} + \hat{D}_D C_2 x\end{aligned}\tag{4.71}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \left[\begin{array}{c} [x_1 \quad \dot{x}_1]^T \\ [(x_2 - x_1)]^T \\ [(x_3 - x_2)]^T \\ [(x_4 - x_3)]^T \\ [(x_5 - x_4)]^T \end{array} \right]^T \\
\hat{A}_D &= \text{diag}\{\hat{A}_{1(2 \times 2)}, \hat{A}_{2(1 \times 1)}, \hat{A}_{3(1 \times 1)}, \hat{A}_{4(1 \times 1)}, \hat{A}_{5(1 \times 1)}\} \\
\hat{B}_D &= \text{diag}\{\hat{B}_{1(2 \times 1)}, \hat{B}_{2(1 \times 1)}, \hat{B}_{3(1 \times 1)}, \hat{B}_{4(1 \times 1)}, \hat{B}_{5(1 \times 1)}\} \\
\hat{C}_D &= \text{diag}\{\hat{C}_{1(1 \times 2)}, \hat{C}_{2(1 \times 1)}, \hat{C}_{3(1 \times 1)}, \hat{C}_{4(1 \times 1)}, \hat{C}_{5(1 \times 1)}\} \\
\hat{D}_D &= \text{diag}\{\hat{D}_{1(1 \times 1)}, \hat{D}_{2(1 \times 1)}, \hat{D}_{3(1 \times 1)}, \hat{D}_{4(1 \times 1)}, \hat{D}_{5(1 \times 1)}\}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

diberikan matriks C_{21} , C_{22} , C_{23} , C_{24} , dan C_{25} adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
C_{21} &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \\
C_{22} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
C_{23} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
C_{24} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \\
C_{25} &= [0 \quad 0 \quad 1]
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Lokal pengontrol pada subsistem 1

Diberikan pengontrol dinamik desentralisasi kontrol H_∞ dengan $n_1 = 2$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{A}_1 \hat{x} + \hat{B}_1 C_{21} x \\
u_1 &= \hat{C}_1 \hat{x} + \hat{D}_1 C_{21} x
\end{aligned} \tag{4.74}$$

dengan x pada Persmaan (4.62) dan subsitusi matriks pada Persamaan (4.72) dan (4.73) maka Persamaan (4.74) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{1(11)} & \hat{A}_{1(12)} \\ \hat{A}_{1(21)} & \hat{A}_{1(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{1(11)} \\ \hat{B}_{1(21)} \end{bmatrix} \dot{x}_1 \\
u_1 &= \begin{bmatrix} \hat{C}_{1(11)} & \hat{C}_{1(12)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D}_{1(11)} \end{bmatrix} \dot{x}_1
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Lokal pengontrol pada subsistem 2

Diberikan pengontrol dinamik desentralisasi kontrol H_∞ dengan $n_2 = 1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_2 &= \hat{A}_2 \hat{x} + \hat{B}_2 C_{22} x \\
u_2 &= \hat{C}_2 \hat{x} + \hat{D}_2 C_{22} x
\end{aligned} \tag{4.76}$$

dengan x pada Persmaan (4.62) dan subsitusi matriks pada Persamaan (4.72) dan (4.73) maka Persamaan (4.76) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_2 &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{2(11)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{2(11)} \end{bmatrix} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\
u_2 &= \begin{bmatrix} \hat{C}_{2(11)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D}_{2(11)} \end{bmatrix} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Lokal pengontrol pada subsistem 3

Diberikan pengontrol dinamik desentralisasi kontrol H_∞ dengan $n_3 = 1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_3 &= \hat{A}_3\hat{x} + \hat{B}_3C_{23}x \\ u_3 &= \hat{C}_3\hat{x} + \hat{D}_3C_{23}x\end{aligned}\quad (4.78)$$

dengan x pada Persmaan (4.62) dan substitusi matriks pada Persamaan (4.72) dan (4.73) maka Persamaan (4.78) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_3 &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{3(11)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{3(11)} \end{bmatrix} (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \\ u_3 &= \begin{bmatrix} \hat{C}_{3(11)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D}_{3(11)} \end{bmatrix} (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)\end{aligned}\quad (4.79)$$

Lokal pengontrol pada subsistem 4

Diberikan pengontrol dinamik desentralisasi kontrol H_∞ dengan $n_4 = 1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_4 &= \hat{A}_4\hat{x} + \hat{B}_4C_{24}x \\ u_4 &= \hat{C}_4\hat{x} + \hat{D}_4C_{24}x\end{aligned}\quad (4.80)$$

dengan x pada Persmaan (4.62) dan substitusi matriks pada Persamaan (4.72) dan (4.73) maka Persamaan (4.80) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_4 &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{4(11)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 - x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{4(11)} \end{bmatrix} (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) \\ u_4 &= \begin{bmatrix} \hat{C}_{4(11)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 - x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D}_{4(11)} \end{bmatrix} (\dot{x}_4 - \dot{x}_3)\end{aligned}\quad (4.81)$$

Lokal pengontrol pada subsistem 5

Diberikan pengontrol dinamik desentralisasi kontrol H_∞ dengan $n_5 = 1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_5 &= \hat{A}_5\hat{x} + \hat{B}_5C_{25}x \\ u_5 &= \hat{C}_5\hat{x} + \hat{D}_5C_{25}x\end{aligned}\quad (4.82)$$

dengan x pada Persmaan (4.62) dan substitusi matriks pada Persamaan (4.72) dan (4.73) maka Persamaan (4.82) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_5 &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{5(11)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 - x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{5(11)} \end{bmatrix} (\dot{x}_5 - \dot{x}_4) \\ u_5 &= \begin{bmatrix} \hat{C}_{5(11)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 - x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D}_{5(11)} \end{bmatrix} (\dot{x}_5 - \dot{x}_4)\end{aligned}\quad (4.83)$$

Berdasarkan hasil contoh kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa pengontrol H_∞ yang terdesentralisasi memiliki *state* perpindahan dan kecepatan relatif $\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$ pada masing-masing subsistem. Hal tersebut terjadi dikarenakan pada desain desentralisasi kontrol H_∞ tidak ada pemotongan *state* dan desentralisasi kontrol H_∞ bekerja berdasarkan output dari subsistem yang terdekat.

Dapat didesain desentralisasi kontrol dengan orde $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 < 10$. Berdasarkan hasil simulasi pada sentralisasi kontrol H_∞ , didapatkan nilai $\|T_{zw}\|_\infty = 3.11587$, sehingga diberikan nilai γ yang lebih besar yaitu $\gamma = 4$. Pembentukan dimensi dari *state* pengontrol dipenuhi apabila algoritman homotopi konvergen.

4.8.3 Kasus 1

Pada kasus 4.8.3, akan dicari desentralisasi kontrol H_∞ untuk $n_1 = n_3 = n_4 = n_5 = 2$ dan $n_2 = 1$. Berdasarkan perhitungan komputasi dengan MATLAB, didapatkan desentralisasi kontrol H_∞ untuk kasus 4.8.3 sebagai berikut:

$$\hat{A}_D = \begin{bmatrix} 5.0817 & 180.2839 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.2496 & -46.3354 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6456 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6326 & -4.0952 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2239 & -8.6146 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21.8803 & 37.6787 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7771 & -8.1812 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.5518 & 39.3244 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15.1029 & -57.8993 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$\hat{B}_D = \begin{bmatrix} 48.3564 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20.7739 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7454 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1409 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2503 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1289 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2047 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7.2334 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14.2144 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$\hat{C}_D = \begin{bmatrix} 1.6500 & 0.0325 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0498 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0266 & -0.0925 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2465 & 0.0013 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0159 & -1.7754 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$\hat{D}_D = \begin{bmatrix} -0.3503 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0528 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0714 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.8458 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10.0012 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

dengan desentralisasi kontrol H_∞ pada Persamaan (4.84)-(4.87), didapatkan sistem dengan kontrol desentralisasi H_∞ yang memiliki nilai eigen sebagai berikut:

Berdasarkan Tabel 4.5, dapat disimpulkan bahwa sistem dengan desentralisasi kontrol H_∞ adalah stabil asimtotik. Dari sistem dengan kontrol pada Kasus 4.8.3, didapatkan nilai $\|T_{zw}\|_\infty = 3.17894$.

Tabel 4.5: Nilai eigen sistem dengan kontrol desentralisasi H_∞ pada Kasus 4.8.3

Nilai eigen
-2.1279 +42.5062i
-2.1279 -42.5062i
-47.2575 + 0.0000i
-1.6324 +36.3896i
-1.6324 -36.3896i
-36.6072 + 0.0000i
-1.0906 +28.2084i
-1.0906 -28.2084i
-28.7869 + 0.0000i
-0.5977 +17.7375i
-0.5977 -17.7375i
-8.7279 + 0.0000i
-0.3167 + 6.3268i
-0.3167 - 6.3268i
-4.6465 + 0.0000i
-2.0900 + 0.0000i
-0.5193 + 0.0000i
-1.2746 + 0.0000i
-0.6456 + 0.0000i

4.8.4 Kasus 2

Pada kasus 4.8.4, akan dicari desentralisasi kontrol H_∞ untuk $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$ dan $n_5 = 1$. Berdasarkan perhitungan komputasi dengan MATLAB, didapatkan desentralisasi kontrol H_∞ untuk kasus 4.8.5 sebagai berikut:

$$\hat{A}_D = \begin{bmatrix} 18.4565 & -7.4900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 274.6103 & -108.3116 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.0596 & -24.0053 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13.6472 & -39.7644 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -36.5563 & 84.6773 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.7842 & -181.0903 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -298.5852 & 237.2129 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 304.1239 & -241.8215 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5200 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

$$\hat{B}_D = \begin{bmatrix} 0.7059 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 80.9361 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6.1870 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.8789 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18.9308 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -31.7737 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16.3528 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15.3811 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6920 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

$$\hat{C}_D = \begin{bmatrix} -2.3558 & -11.2308 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0012 & -0.1401 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1182 & -0.3718 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0311 & 0.0102 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1909 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

$$\hat{D}_D = \begin{bmatrix} -0.1664 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0854 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0925 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.4949 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17.8939 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

dengan desentralisasi kontrol H_∞ pada Persamaan (4.88)-(4.91), didapatkan sistem dengan kontrol dengan desentralisasi kontrol H_∞ yang memiliki nilai eigen sebagai berikut:

Berdasarkan Tabel 4.6, dapat disimpulkan bahwa sistem dengan desentralisasi kontrol H_∞ adalah stabil asimtotik. Berdasarkan sistem sistem dengan kontrol pada Kasus 4.8.4, didapatkan nilai $\|T_{zw}\|_\infty = 3.17892$.

4.8.5 Kasus 3

Pada kasus 4.8.5, akan dicari desentralisasi kontrol H_∞ untuk $n_1 = n_5 = 2$ dan $n_2 = n_3 = n_4 = 1$. Berdasarkan perhitungan komputasi dengan MATLAB, didapatkan desentralisasi kontrol H_∞ untuk kasus 4.8.5 sebagai berikut:

$$\hat{A}_D = \begin{bmatrix} 0.0073 & 0.2577 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0021 & -0.0636 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0018 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0027 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0031 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0699 & 0.0322 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0159 & -0.0182 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Tabel 4.6: Nilai eigen sistem dengan kontrol desentralisasi H_∞ pada Kasus 4.8.4

Nilai eigen ($\times 10^2$)
-5.4029 + 0.0000i
-1.7944 + 0.0000i
-0.8921 + 0.0000i
-0.0213 + 0.4251i
-0.0213 - 0.4251i
-0.0163 + 0.3639i
-0.0163 - 0.3639i
-0.0109 + 0.2821i
-0.0109 - 0.2821i
-0.3821 + 0.0000i
-0.3090 + 0.0000i
-0.0060 + 0.1774i
-0.0060 - 0.1774i
-0.0032 + 0.0633i
-0.0032 - 0.0633i
-0.0280 + 0.0000i
-0.0065 + 0.0000i
-0.0012 + 0.0000i
-0.0152 + 0.0000i

$$\hat{B}_D = \begin{bmatrix} 4.3739 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0771 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0009 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0024 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0012 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2985 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2008 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

$$\hat{C}_D = \begin{bmatrix} 0.3735 & -0.0860 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0117 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0142 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0735 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8738 & 0.9151 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

$$\hat{D}_D = \begin{bmatrix} 0.0129 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0337 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1491 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0408 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1167 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

dengan desentralisasi kontrol H_∞ pada Persamaan (4.92)-(4.95), didapatkan sistem dengan kontrol desentralisasi H_∞ yang memiliki nilai eigen sebagai berikut:

Tabel 4.7: Nilai eigen sistem sistem dengan kontrol desentralisasi H_∞ pada Kasus 4.8.5

Nilai eigen
-78.3597 + 0.0000i
-54.9319 + 0.0000i
-2.1272 +42.5065i
-2.1272 -42.5065i
-1.6307 +36.3885i
-1.6307 -36.3885i
-1.0872 +28.2057i
-1.0872 -28.2057i
-0.5944 +17.7349i
-0.5944 -17.7349i
-0.3157 + 6.3261i
-0.3157 - 6.3261i
-9.6878 + 0.0000i
-2.6622 + 0.0000i
-3.0907 + 0.0000i
-1.4073 + 0.0000i
-1.8173 + 0.0000i

Berdasarkan Tabel 4.7, dapat disimpulkan bahwa sistem dengan desentralisasi kontrol H_∞ adalah stabil asimtotik. Berdasarkan sistem dengan kontrol pada Kasus 4.8.5, didapatkan nilai $\|T_{zw}\|_\infty = 3.19405$.

Berdasarkan nilai $\|T_{zw}\|_\infty$ pada sentralisasi kontrol H_∞ dan kasus 4.8.3-4.8.5, dapat ditabelkan nilai $\|T_{zw}\|_\infty$ pada setiap kasus seperti pada Tabel 4.8 berikut:

Algoritma homotopi konvergen pada $M \leq 64$ dengan bantuan *toolbox LMI* pada MATLAB. Nilai $\|T_{zw}\|_\infty$ sentralisasi kontrol H_∞ digunakan sebagai penentu nilai awal γ untuk mencari desentralisasi kontrol H_∞ . Berdasarkan hasil simulasi pada sentralisasi kontrol H_∞ , dipilih $\gamma = 4$ untuk nilai awal pada LMI untuk mendapatkan solusi matriks \hat{P} atau G_D pada metode homotopi.

Tabel 4.8: Nilai $\| T_{zw} \|_{\infty}$ pada tiap kasus

Kontrol H_{∞}	Dimensi <i>state</i>	Nilai $\ T_{zw} \ _{\infty}$
sentralisasi	$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 2$	3.11587
Desentralisasi	$n_1 = n_3 = n_4 = n_5 = 2, n_2 = 1$	3.17894
	$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2, n_5 = 1$	3.17892
	$n_1 = n_5 = 2$ dan $n_2 = n_3 = n_4 = 1$	3.19405

Berdasarkan Tabel 4.8 dapat disimpulkan bahwa performansi dari 3 kasus desentralisasi kontrol H_{∞} kurang dari 4, artinya desentralisasi kontrol H_{∞} dapat mengatasi gangguan pada sistem dengan cukup baik. Akan tetapi, hasil dari desentralisasi kontrol H_{∞} tidak cukup baik daripada sentralisasi kontrol H_{∞} . Hasil tersebut cukup beralasan seperti pada (Zhai, 2001), disebutkan bahwa desentralisasi kontrol H_{∞} tidak dapat mencapai performansi yang lebih seperti yang dicapai oleh sentralisasi kontrol H_{∞} dikarenakan sentralisasi kontrol memiliki informasi yang lebih lengkap dibandingkan dengan desentralisasi kontrol. Meskipun begitu, dalam prakteknya pada sistem berskala besar, desentralisasi kontrol H_{∞} sangat diperlukan karena desentralisasi kontrol pada sistem skala besar lebih efisien (Ikeda, 1996).

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

Penarikan kesimpulan didasarkan pada analisis hasil simulasi, sedangkan saran ditujukan untuk perbaikan penelitian dan pengerjaan penelitian selanjutnya berupa pengembangan ide atau pengembangan metode.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan bab sebelumnya, didapatkan beberapa kesimpulan yang menjawab rumusan masalah sebagai berikut:

1. Didapatkan sentralisasi kontrol H_∞ dengan bantuan *toolbox hinflmi* dengan nilai kemampuan sistem dalam mengatasi gangguan yaitu sebesar $\| T_{zw} \|_\infty = 3.11587$. Berdasarkan performansi sistem dengan kontrol sentralisasi kontrol H_∞ pada sistem *storey building* 5 lantai, didapatkan hasil bahwa sistem dengan kontrol memiliki performansi yang lebih baik daripada sistem tanpa kontrol pada sebagian besar waktu t . Hal tersebut ditunjukkan oleh grafik osilasi dimana sistem dengan sentralisasi kontrol H_∞ memiliki puncak yang lebih rendah daripada sistem tanpa kontrol.
2. Berdasarkan hasil sentralisasi kontrol H_∞ , dapat dicari desentralisasi kontrol H_∞ pada sistem *storey building* 5 lantai dengan metode homotopi. Metode homotopi adalah representasi dari *double* LMI. Diberikan nilai awal $\gamma = 4$, didapatkan desentralisasi kontrol H_∞ dengan orde yang spesifik $n_{desentralisasi} < n_{sentralisasi}$ dengan nilai $\| T_{zw} \|_\infty kasus1 = 3.17894$, $\| T_{zw} \|_\infty kasus2 = 3.17892$, dan $\| T_{zw} \|_\infty kasus3 = 3.19405$. Hasil simulasi menyatakan bahwa performansi γ dari 3 kasus desentralisasi kontrol H_∞ kurang dari 4, artinya desentralisasi kontrol H_∞ dapat mengatasi gangguan pada sistem dengan cukup baik.

5.2 Saran

Berdasarkan pengerjaan dan hasil pada tesis ini, dapat dirumuskan saran untuk penelitian selanjutnya. Perlu adanya modifikasi dari fungsi homotopi dan BMI sehingga dapat meminimalisir ketidakkonvergenan pada algoritma dalam mendapatkan desentralisasi kontrol H_∞ .

DAFTAR PUSTAKA

- Bakule, L., (2008), *Decentralized control: An overview*, Annual Reviews in Control. Vol 32, 87-98.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. , (1994), *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, Philadelphia, PA.
- Date, R. A., and Chow, J. H., (1993), *A parametrization approach to optimal H_2 and H_∞ decentralized control problems*, Automatica. Vol 29, 457-463.
- Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P., and Francis, B. A., (1989), *State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol AC-34, 831-847.
- Fatmawati, (2010), *Reduksi model dan strategi perancangan pengontrol berorde rendah untuk sistem berdimensi tak hingga*, Disertasi, Institut Teknologi Bandung, Bandung-Indonesia.
- Fu, M., and Luo, Z. Q., (1997), *Computational complexity of a problem arising in fixed order output feedback design*, Systems and Control Letters. Vol 30, 209-215.
- Fujioka, H., and Hoshijima, K., (1997), *Bounds for the BMI eigenvalue problem: A good lower bound and a cheap upper bound*, Transactions of the SICE. Vol 33, 616-621.
- Gahinet, P., and Apkarian, P., (1994), *A linear matrix inequality approach to H_∞ control*, International Journal of Robust and Nonlinear Control. Vol 4, 421-448.
- Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A., and Chilali, M., (1994), *The LMI control toolbox*, 33rd IEEE conference on decision and control, 2038-2041.
- Goh, K. C., Safonov, M. G., and Papavassilopoulos, G. P., (1994), *A global optimization approach for the BMI problem*, 33rd IEEE conference on decision and control. 2009-2014.
- Ikeda, M., Zhai, G., and Fujisaki, Y., (1996), *Decentralized H_∞ controller design for large-scale systems: A matrix inequality approach using a homotopy method*, 35th IEEE conference on decision and control. 1-6.
- Iwasaki, T., and Skelton, R. E., (1994), *All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas*, Automatica. Vol 30, 1307-1317.

- Javad, M., and Alaeddin, M., (2015), *Synchronized control for five-story building under earthquake loads*, Journal of applied mathematics . Vol 2015, 1-8.
- Jerome, P. L., and Kincho, H. L., (2001), *Decentralized control techniques for large-scale civil structural systems*, 20th International Modal Analysis Conference (IMAC XX), Los Angeles, CA, USA.
- Liu, S. M., and Papavassilopoulos, G. P., (1996), *Numerical experience with parallel algorithms for solving the BMI problem*, 13th IFAC World Congress D. 387-392.
- Paz, R. A., (1993), *Decentralized H_∞ control*, 1993 American control conference. 2381-2384.
- Richter, S., and DeCarlo, R., (1984), *A homotopy method for eigenvalue assignment using decentralized state feedback*, IEEE Transactions on Automatic Control. Vol AC-29, 148-158.
- Saragih, R., Joelianto, E., and Naiborhu, J., (2016), *Robust H_∞ Control for Bilinear Systems Using the Dynamic Takagi-Sugeno Fuzzy Models Based on Linear Matrix Inequalities*, International Journal of Control and Automation. Vol 9, 7-22.
- Rubio-Massegu, J., Palacios-Quinonero, F., and Rossell, J.M., (2012), *Decentralized static output feedback H_∞ controller design for buildings under seismic excitation*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol 41, 1199-1205.
- Skogestad, S., and Poslethwaite, I., (2005), *Multivariable feedback control: analysis and design*, New York: Wiley.
- Sojoudi, S., and Aghdam A.G., (2009), *Overlapping control systems with optimal information exchange*, Automatica. Vol 45, 1176-1181.
- Yang, W., Jerome, P. L., and Koncho, H.,L. (2009), *Decentralized H_∞ controller design for large-scale civil structures*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol 38, 377-401.
- Zhai, G., Ikeda, M., and Fujisaki, Y., (2001), *Decentralized H_∞ controller design: a matrix inequality approach using a homotopy method*, Automatica. Vol 37, 565-572.
- Zhou, K., and Doyle, J.C., (1999), *Essentials of robust control*, New Jersey: Prentice Hall.

BIODATA PENULIS



Penulis Penulis bernama Helisyah Nur Fadhillah, biasa dipanggil Helisyah. Penulis dilahirkan di Gresik, 7 Januari 1995. Penulis merupakan putri kedua dari pasangan Nurul Huda dan Mufarochah. Penulis menempuh pendidikan formal SDN Kawisanyar (2001-2007), SMPN 2 Gresik (2007-2010), dan SMAN 1 Manyar Gresik (2010-2013). Kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya (2013-2017) dan jenjang S2 di Departemen Matematika ITS Surabaya (2017-2019). Di Departemen Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan dan pada jenjang S2 penulis fokus pada masalah kontrol dan aplikasinya.

Informasi lebih lanjut mengenai Tesis ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: *helisyah07@gmail.com*