



TUGAS AKHIR - KM184801

**KAJIAN DESAIN KONTROL SISTEM MENGGUNAKAN
METODE H_{∞}**

**HAYU MARTA FEBRIAN
NRP 06111540000100**

Dosen Pembimbing
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019



TUGAS AKHIR - KM184801

**KAJIAN DESAIN KONTROL SISTEM
MENGUNAKAN METODE H_{∞}**

**HAYU MARTA FEBRIAN
NRP 06111540000100**

Dosen Pembimbing :
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019**



FINAL PROJECT - KM184801

***STUDY OF CONTROL SYSTEM DESIGN USING
 H_{∞} METHOD***

**HAYU MARTA FEBRIAN
NRP 06111540000100**

Supervisors :

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

**DEPARTEMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics, Computing, and Data Science
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019**

LEMBAR PENGESAHAN

KAJIAN DESAIN KONTROL SISTEM MENGUNAKAN METODE H_{∞}

STUDY OF CONTROL SYSTEM DESIGN USING H_{∞} METHOD

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

HAYU MARTA FEBRIAN

NRP. 06111540000100

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,



Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

NIP. 19830517 200812 1 003



Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

NIP. 19730930 199702 1 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FMKSD ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT

NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2019

KAJIAN DESAIN KONTROL SISTEM MENGGUNAKAN METODE H_∞

Nama Mahasiswa : Hayu Marta Febrian
NRP : 0611154000100
Departemen : Matematika
Dosen Pembimbing : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

ABSTRAK

Seiring dengan berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi, teori kontrol berkembang sedemikian pesat. Persoalan yang mendasar dari sistem kontrol adalah merancang suatu controller yang mampu menghasilkan *output* dari *plant* (objek yang diatur) sesuai spesifikasi yang diinginkan. Proses desain controller ini semakin kompleks seiring dengan kompleksitas *plant* serta proses yang akan diatur didalamnya, timbul pula persoalan untuk mengatur *plant* yang berkaitan dengan adanya *disturbance* atau gangguan. Perancangan sistem kontrol yang mampu menangani persoalan ini dirujuk sebagai kontrol *robust*. Salah satu teori kontrol yang masuk dalam kelompok kontrol *robust* adalah teori kontrol H_∞ . Penelitian ini membahas bagaimana langkah – langkah dalam melakukan desain kontrol H_∞ , dan implementasi metode pada sebuah sistem. Berdasarkan hasil simulasi dari 2 contoh kasus didapatkan bahwa, level performasi dari sitem tanpa kontrol lebih besar dari level performasi *close loop* sistem, dengan kata lain efek gangguan yang diterima sistem jauh lebih kecil ketika diberi kontrol dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol.

Kata Kunci : *Desain Kontrol, H-infinity, Robust Kontrol*

STUDY OF CONTROL SYSTEM DESIGN USING H_∞ METHOD

Name : Hayu Marta Febrian
Student Number : 06111540000100
Departement : *Mathematics ITS*
Supervisors : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

ABSTRACT

Along with the development of science and technology, control theory has developed so rapidly. The basic problem of control system is designing a controller that is able to produce output according to the desired specifications. Control system design is increasingly complex along with the complexity of the plant and the processes that will be regulated in it, and there is a problem to design a controller for plant with disturbance singal. Control system design that capable to handle this problem is called robust control. One of the control theories included in robust control is the H_∞ control theory. This paper present a simplified step by step procedure for design of H_∞ controller for given sistem and design example to implement the method. Based on the simulation results from several cases showed that performance level of the system without control was greater than performance level of the close loop system, in other word the effect of disturbance for system was much smaller in system with control.

Key Word : Desain Kontrol, Robust Kontrol, H-infinity Kontrol

KATA PENGATAR

Segala puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT karena atas limpahan rahmat serta hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **Kajian Desain Kontrol Sistem Menggunakan Metode H_{∞}** .

Dalam proses pembuatan Tugas Akhir ini, penulis mendapatkan bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku ketua Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan kemudahan pengurusan persyaratan-persyaratan selama penulis menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si dan Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing Tugas Akhir atas segala bimbingan dan motivasi yang diberikan pada penulis.
3. Bapak dan Ibu dosen penguji atas semua saran dan masukan yang telah diberikan.
4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Sc selaku Sekretaris Kaprodi S1 Departemen Matematika juga sebagai koordinator Tugas Akhir yang telah memberi dukungan dan kemudahan pengurusan persyaratan-persyaratan selama penulis menyelesaikan Tugas Akhir ini, serta Mas Ali yang selalu memberikan informasi berkaitan dengan Tugas Akhir.
5. Bapak Alm. Drs. Mohammad Setijo Winarko, M.Si dan Bapak Dr.Drs. Subiono, M.Sc selaku dosen wali penulis yang telah memberikan motivasi dan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.

6. Bapak dan Ibu Dosen serta para Staf Departemen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.
7. Keluarga tercinta terutama Bapak Agung Swasana dan Ibu Wartin, penulis ucapkan banyak terimakasih atas segala doa dan dukungan yang telah diberikan baik secara moril maupun materil, serta MbK Aning, Ambar, Buyung, dan Bima yang telah memberikan doa dan semangat dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
8. Teman-teman penulis Lina, Ayu N, Riko, Dista, Corry, Uyun, Fina, teman-teman seperjuangan 120 dan segenap keluarga DOHMAIN yang saling mendukung dan memotivasi satu sama lain.
9. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang turut membantu dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyusunan Tugas Akhir ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan sebagai bahan perbaikan pada Tugas Akhir ini. Akhir kata, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat membawa manfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Juli 2019

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN JUDUL	iii
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
<i>ABSTRACT</i>	ix
KATA PENGATAR.....	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR SIMBOL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian Terdahulu.....	5
2.2 Landasan Teori	6
2.2.1 Sistem Dinamik Linear	6
2.2.2 Kontrol <i>Robust</i>	6
2.2.3 Norm H^∞	7
2.2.4 H^∞ Kontrol.....	8
BAB III METODE PENELITIAN	11
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN	13
4.1 Metode Kontrol H^∞	13
4.1.1 Kontruksi Sistem Awal (<i>Generalized Plant</i>)	13
4.1.2 Desain Kontrol Sistem	18
4.2 Simulasi dan Analisis Kontrol.....	21

4.2.1 Contoh Kasus 1	22
4.2.2 Contoh Kasus 2	29
BAB V PENUTUP	48
5.1 Kesimpulan.....	49
5.2 Saran	49
DAFTAR PUSTAKA	51
LAMPIRAN 1	53
LAMPIRAN 2	55
LAMPIRAN 3	57
LAMPIRAN 4	59
LAMPIRAN 5	61
LAMPIRAN 6	63
LAMPIRAN 7	65
LAMPIRAN 8	67
BIODATA PENULIS.....	73

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4. 1 <i>Simple Block Diagram</i>	14
Gambar 4. 2 Block Diagram Contoh Kasus 1	22
Gambar 4. 3 <i>Linear Fractional Transformation</i>	23
Gambar 4. 4 Grafik Singular Value dari	28
Gambar 4. 5 Grafik Singular Value dari <i>Tzw</i> (<i>a</i>)	28
Gambar 4. 6 Sistem 2 Massa Pegas dengan Redaman	29
Gambar 4. 7 Block Diagram Contoh Kasus 2	32
Gambar 4. 8 Grafik Singular Value dari	39
Gambar 4. 9 Grafik Singular Value dari <i>Tzw</i> (<i>b</i>)	39
Gambar 4. 10 Grafik Singular Value dari	43
Gambar 4. 11 Grafik Singular Value dari <i>Tzw</i> (<i>c</i>)	43
Gambar 4. 12 Grafik Singular Value dari	47
Gambar 4. 13 Grafik Singular Value dari <i>Tzw</i> (<i>d</i>)	47

DAFTAR SIMBOL

$\dot{x}(t)$: Masukan Sistem Awal
$y(t)$: Keluaran Sistem Awal
A, B, C, D	: Matriks-matriks konstan sistem dengan ukuran bersesuaian
$G(s)$: Fungsi transfer dari sistem : $C(SI - A)^{-1}B$
$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$: Bentuk sederhana dari realisasi <i>state space</i> $C(SI - A)^{-1}B$
$F_\ell(G, K)$: <i>lower LFT</i>
$\bar{\sigma}(A)$: Nilai singular dari A
$\ \cdot\ $: Norm
A^T	: Transpose matriks dari A
A_k, B_k, C_k, D_k	: Matriks <i>state space</i> dari Kontrol H_∞
A_c, B_c, C_c, D_c	: Matriks <i>state space</i> dari <i>Cloose Loop</i>

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang menjadi latar belakang munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini, kemudian dari permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan batasan masalah untuk memperoleh tujuan serta manfaat. Adapun sistematika penulisan tugas akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Seiring dengan berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi, teori kontrol berkembang sedemikian pesat. Perkembangan teori kontrol dipicu oleh perkembangan penelitian dibidang matematika serta tantangan penggunaan dibidang teknologi. Secara historis dikenal dua macam teori kontrol, yaitu teori kontrol klasik dan teori kontrol modern. Teknik kontrol klasik adalah konsep dan teknik kontrol yang berkembang sampai tahun 1950 dan hanya dapat menangani sistem dengan satu masukan satu keluaran. Kontrol modern adalah konsep kontrol yang ada dari tahun 1950 hingga saat ini, era kontrol modern dimulai dari ketersediaan komputer digital yang memungkinkan analisis *time-domain* dari sistem yang kompleks, berdasarkan analisis *time-domain* dan sintesis menggunakan variabel keadaan. Telah dikembangkan teori kontrol modern yang mampu menangani kompleksitas dari *plant* modern serta mampu mengatasi sistem dengan banyak masukan dan banyak keluaran [1].

Persoalan yang mendasar dari sistem kontrol adalah merancang suatu controller yang mampu menghasilkan *output* dari *plant* sesuai spesifikasi yang diinginkan. Proses desain

kontrol ini semakin kompleks seiring dengan kompleksitas *plant* serta proses yang akan diatur didalamnya. Pada kondisi praktis, selalu ada gangguan yang bekerja pada *plant*, baik yang berasal dari dalam maupun luar. Suatu controller harus mampu untuk memperhitungkan setiap gangguan yang akan mempengaruhi *variable output* dari *plant*, maka timbul persoalan untuk mengatur *plant* yang berkaitan dengan adanya gangguan. Perancangan sistem kontrol yang mampu menangani persoalan ini adalah kontrol *robust*.

Teknik kontrol *robust* merupakan suatu metode kontrol yang diterapkan pada *uncertain plant* dengan adanya sinyal gangguan, dan ketidak akuratan parameter *plant*. Masalah utama dalam metode ini adalah mendesain suatu *fixed controller* yang menjamin norma kinerja yang dapat diterima dihadapan ketidakpastian *input* [2]. Beberapa teori kontrol yang masuk dalam kelompok kontrol *robust* adalah H-Infinity (H_∞) kontrol, μ synthesis, dan gap metric. Penelitian H_∞ optimization pada sistem kontrol dimulai pada tahun 1979 oleh Zames yang mengerjakan minimasi ∞ -norm untuk fungsi sensitifitas dari sistem *single input single output* (SISO), H_∞ kontrol sendiri memanfaatkan konsep di Ruang Hardy yang dikembangkan oleh Hardy. Sejak saat itu hasil penelitian yang berkaitan dengan H_∞ mulai berkembang [3].

Penelitian tentang H_∞ pernah dilakukan Anushree Das dan Dr Veena Sharma ditahun 2017 pada jurnal yang berjudul “*Modelling of Uncertainty in Control Systems and Design of A Robust Controller using H_∞ Method*” [4]. Jurnal penelitian ini menyajikan prosedur sistematis pemodelan ketidakpastian, merancang pengontrol menggunakan metode H_∞ dan analisis ketahanannya. Dari hasil simulasi studi kasus sistem suspensi mobil aktif, terlihat bahwa H_∞ mampu memberikan kinerja

nominal yang diinginkan dan merupakan pengontrol yang kuat untuk model yang tidak pasti.

Berdasarkan latar belakang tersebut pada Tugas Akhir ini dilakukan kajian mengenai teori kontrol *robust* metode H_∞ untuk dapat menentukan langkah – langkah dalam melakukan desain kontrol H_∞ pada sebuah sistem. Metode H_∞ kemudian akan diimplementasikan pada suatu contoh sistem.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah disajikan diatas, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian Tugas Akhir ini adalah bagaimana langkah – langkah melakukan desain kontrol sistem dengan menggunakan metode H_∞ .

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam Tugas Akhir ini adalah menggunakan sistem linear time-invariant.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian Tugas Akhir ini adalah untuk menentukan langkah – langkah desain kontrol sistem dengan menggunakan metode H_∞ .

1.5 Manfaat

Adapun manfaat dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Memberikan informasi mengenai desain kontrol sistem menggunakan metode H_∞ .
2. Sebagai *literature* penunjang bagi mahasiswa yang menempuh jenjang sarjana.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini secara keseluruhan terdiri dari lima bab dan lampiran, secara garis besar dalam masing-masing bab dibahas hal-hal sebagai berikut :

1. BAB I PENDAHULUAN

Pada bab I dijelaskan gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab II diuraikan tentang teori-teori utama maupun penunjang yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir, antara lain penelitian terdahulu, sistem dinamik linear, kontrol *robust*, norm H_∞ dan H_∞ kontrol.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab III dijelaskan metode yang digunakan serta tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir ini.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab IV membahas mengenai langkah – langkah dalam melakukan desain kontrol menggunakan metode H_∞ , implementasinya kedalam sebuah contoh sistem dan simulasi serta analisis dari hasil yang diperoleh.

5. BAB V PENUTUP

Pada bab V berisi kesimpulan yang diperoleh dari hasil analisis dan pembahasan Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas tinjauan pustaka yang mendasari penulisan Tugas Akhir serta metode penunjang yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu didalamnya mencakup penelitian yang telah ada dan landasan teori.

2.1 Penelitian Terdahulu

Beberapa penelitian yang sudah ada dan membahas tentang H_∞ kontrol diantaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Ankit Bansal dan Veena Sharma ditahun 2013 pada jurnal yang berjudul “*Design and Analysis of Robust H-Infinity Controller*” [4]. Pada jurnal penelitian ini dibahas langkah – langkah dan prosedur dalam melakukan desain kontrol pada sistem menggunakan metode H_∞ yang diformulasikan dalam bentuk *loop shaping design* dan diimplementasikan pada beberapa contoh sistem sederhana.

Penelitian tentang H_∞ kontrol juga pernah dilakukan oleh Anushree Das dan Dr Veena Sharma ditahun 2017 pada jurnal yang berjudul “*Modelling of Uncertainty in Control Systems and Design of A Robust Controller using H_∞ Method*” [5]. Jurnal penelitian ini menyajikan prosedur sistematis pemodelan ketidakpastian, merancang pengontrol menggunakan metode H_∞ dan analisis ketahanannya. Dari hasil simulasi studi kasus sistem suspensi mobil aktif, terlihat bahwa H_∞ mampu memberikan kinerja nominal yang diinginkan dan merupakan pengontrol yang kuat untuk model yang tidak pasti.

2.2 Landasan Teori

Pada bab ini akan dijelaskan tentang metode – metode penunjang yang digunakan yaitu sistem dinamik linear, kontrol robust, Norm H_∞ serta H_∞ kontrol.

2.2.1 Sistem Dinamik Linear

Sebuah *finite dimensional linear time invariant (FDLTI)* sistem dinamik dideskripsikan oleh persamaan diferensial berikut [6] :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.2)$$

dimana $x(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah *state* sistem, $x(t_0)$ adalah *initial condition* dari sistem, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah *input* sistem dan $y(t) \in \mathbb{R}^p$ adalah *output* dari sistem. Sistem dari persamaan (2.1) dan (2.2) dapat ditulis kembali dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

Matriks transfer yang sesuai dari u ke y didefinisikan sebagai

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

dimana $U(s)$ dan $Y(s)$ adalah transformasi Laplace dari $u(t)$ dan $y(t)$ dengan initial condition $x(0) = 0$. Sehingga diperoleh

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

untuk mempercepat perhitungan yang melibatkan matriks transfer, dapat menggunakan notasi berikut:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = C(sI - A)^{-1}B + D$$

2.2.2 Kontrol Robust

Teknik kontrol *robust* merupakan suatu metode kontrol yang dapat diterapkan pada *uncertain plant* dengan gangguan, dan ketidak akuratan parameter *plant*. Masalah utama dalam metode

ini adalah mendesain suatu *fixed controller* yang dapat bekerja pada norm performansi *plant* dan dapat diterima dihadapan ketidakpastian *input* [2].

Istilah ketidakpastian atau *uncertain plant* mengacu pada perbedaan atau kesalahan antara model dan sistem nyata. Dalam pemodelan suatu sistem, biasanya menggunakan asumsi-asumsi untuk mendapatkan model matematis dari sistem yang sebenarnya dengan adanya asumsi-asumsi ini, model yang dirancang akan mengandung ketidakpastian terhadap model sistem yang sesungguhnya. Kontrol robust merupakan suatu sistem kontrol yang dapat mengantisipasi ketidakpastian model tersebut, serta mampu mengatasi perubahan parameter dan gangguan. [2]

2.2.3 Norm H_∞

∞ -Norm dari suatu fungsi $u(t)$ dapat didefinisikan sebagai berikut [6]

$$\|u(t)\|_\infty = \max_t |u(t)|$$

Sedangkan norm H_∞ untuk sebuah sistem dinamik adalah sebagai berikut :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma} [G(j\omega)]$$

Norm H_∞ juga memiliki beberapa interpretasi lain, salah satunya direpresentasikan dengan suatu nilai maksimum dari perbandingan energi sinyal keluaran ke energi sinyal masukan [6]

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{w(t) \neq 0} \frac{\int_0^\infty z(t)^T z(t) dt}{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}$$

dimana w adalah input, z adalah output dari sistem dan $G(s)$ merupakan fungsi transfer dari z ke w . H_∞ norm dari sinyal output terhadap sinyal gangguan, yaitu suatu kondisi yang menggambarkan seberapa besar tingkat kekokohan (*robustness*)

kontroller yang dirancang terhadap sinyal gangguan yang masuk ke dalam sistem.

2.2.4 H_∞ Kontrol

Misalkan plant yang diperumum (*generalized plant*) yaitu gabungan antara model dinamik dari masalah yang akan dikontrol dengan beberapa fungsi bobot yang berfungsi untuk mengover berbagai gangguan dituliskan dalam bentuk:

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u$$

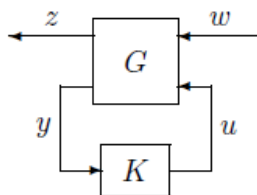
$$z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u$$

$$y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u$$

Adapun tujuan kontrol optimal H_∞ adalah menentukan hukum kontrol umpan balik $u = Ky$ yang meminimumkan fungsi transfer sistem *loop* tertutup dari z ke w dalam ∞ -norm.

H_∞ Optimal Kontrol : mendapat pengontrol K sehingga $\|T_{zw}\|_\infty$ minimum. [6]

Sehingga secara umum, persoalan kontrol H_∞ dapat dinyatakan seperti pada Gambar. 2.1



Gambar 2. 1 Konfigurasi Kontrol Umum untuk H_∞

Gambar *block diagram* diatas merupakan konfigurasi kontrol umum untuk metode H_∞ , dari gambar dapat dilihat bahwa *plant* G memiliki 2 *input* dan 2 *output*, dimana u dan y masing – masing adalah *input* dan *output* dari dalam sistem, sedangkan z

dan w masing – masing adalah *input* dan *ouput* dari luar sistem, dimana

$$u = Ky \quad (2.3)$$

$$y = Gu \quad (2.4)$$

serta dapat dibentuk fungsi transfer dari sistem sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

dari persamaan 2.5 dapat diuraiakan menjadi

$$z = G_{11}w + G_{12}u \quad (2.6)$$

$$y = G_{21}w + G_{22}u \quad (2.7)$$

Subtitusi persamaan 2.3 ke persamaan 2.7 diperoleh

$$\begin{aligned} y &= G_{21}w + G_{22}Ky \\ y - G_{22}K &= G_{21}w \\ ((I - G_{22}K)y &= G_{21}w \\ y &= (I - G_{22}K)^{-1}G_{21}w \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dari subtitusi persamaan 2.3 ke persamaan 2.6 didapatkan

$$z = G_{11}w + G_{12}Ky \quad (2.9)$$

Subtitusi persamaan 2.8 ke persamaan 2.9

$$\begin{aligned} z &= G_{11}w + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}w \\ z &= (G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21})w \\ \frac{z}{w} &= G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \\ T_{zw} &= G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \\ &= F_l(G, K) \end{aligned}$$

T_{zw} merupakan fungsi transfer dari z ke w yang disebut juga dengan *linear fractional transformation (LFT)* yang akan diminimalkan dengan norm- ∞ sesuai dengan definisi dari kontrol optimal H_∞ . Dalam praktiknya, biasanya sulit untuk mendapatkan pengontrol yang optimal untuk masalah H_∞ , serta seringkali secara komputasi dan secara teoritis lebih mudah untuk merancang konsep suboptimal H_∞ , dimana

H_∞ Sub-optimal Kontrol : diberikan $\gamma > 0$ akan ditentukan semua pengontrol $K(s)$, sehingga $\|F_l(G, K)\|_\infty < \gamma$. [6]

Nilai γ tersebut dapat dicari salah satunya dengan metode iterasi biseksi, metode ini dapat digunakan untuk mencari nilai terkecil dari γ_{opt} dimana $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma_{opt}$, dengan harapan dapat memperoleh kontrol (K) yang mendekati kontrol optimal, kontroller berbentuk sistem dinamis serta memiliki jumlah *state* yang sama dengan *generalized plant*, dan realisasi *state-space* dari $K(s)$ adalah

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= A_k x_k + B_k u_k \\ y_k &= C_k x_k + D_k u_k \end{aligned}$$

Kontroller $K(s)$ dapat diterapkan pada sistem awal atau *generalized plant*, sehingga diperoleh *close loop system* dengan kontrol sebagai berikut [7]

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k & B_1 + B_2 D_k D_{12} \\ B_k C_2 & A_k & B_k D_{21} \\ C_1 + D_{12} D_k C_2 & D_{12} C_k & D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \\ w \end{bmatrix}$$

$$T_{zw} = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k & B_1 + B_2 D_k D_{12} \\ B_k C_2 & A_k & B_k D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_k C_2 & D_{12} C_k & D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{array} \right]$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam pengerjaan Tugas Akhir secara rinci. Metode penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan agar Tugas Akhir ini dapat berjalan secara sistematis. Metode penelitian ini terdiri dari lima tahapan antara lain :

1. Studi Literatur

Dalam tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan studi literature dari beberapa buku jurnal, penelitian, paper, maupun artikel di internet mengenai metode desain kontrol H_{∞} .

2. Desain Kontrol Menggunakan H_{∞} .

Tahap ini dilakukan untuk mengkaji mengenai teori kontrol H_{∞} sehingga dapat mengetahui prosedur atau langkah – langkah dalam melakukan desain kontrol sistem menggunakan H_{∞} .

3. Simulasi Hasil dan Analisis

Pada langkah ini dilakukan implementasi metode desain kontrol H_{∞} pada contoh sistem. Akan diambil contoh sistem awal linear kontinu, kemudian dilakukan desain kontrol menggunakan H_{∞} . Kontrol yang diperoleh kemudian akan diterapkan pada sistem awal sehingga diperoleh sistem awal dengan kontrol. Hasil yang telah didapatkan akan dibuat simulasinya untuk selanjutnya dilakukan analisis dari hasil simulasi yang diperoleh.

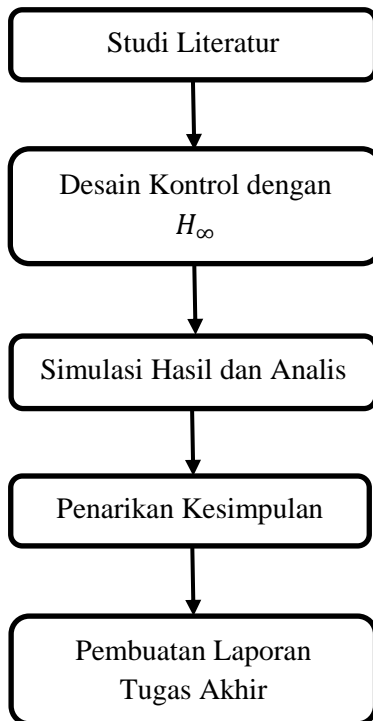
4. Penarikan Kesimpulan

Pada langkah ini, dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil akhir yang diperoleh.

5. Pembuatan Laporan Tugas Akhir

Setelah dapat menjawab permasalahan pada topik Tugas Akhir kemudian dibuat laporan akhir dari pengerjaan Tugas Akhir.

Diagram alir pengerjaan tugas akhir ini ditunjukkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3. 1 Diagram Alir Penelitian

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai desain kontrol sistem menggunakan metode H_∞ . Pembahasan meliputi prosedur atau langkah – langkah dalam melakukan desain kontrol sistem menggunakan metode H_∞ , implementasi metode pada sebuah contoh sistem, serta dilakukan simulasi sistem dan analisis dari hasil simulasi yang diperoleh.

4.1 Metode Kontrol H_∞

Pada subbab ini membahas mengenai langkah – langkah atau prosedur dalam melakukan desain kontrol menggunakan metode H_∞ meliputi pembentukan sistem awal atau *generalized plant* serta desain kontrol sistem.

4.1.1 Kontruksi Sistem Awal (*Generalized Plant*)

Langkah pertama untuk melakukan desain kontrol menggunakan metode H_∞ adalah membentuk *generalized plant* G yang merepresentasikan konfigurasi umum kontrol H_∞ dimana

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

$$u = K(s) y$$

dengan realisasi fungsi transfer dari w ke z dari sistem diatas dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut [6]

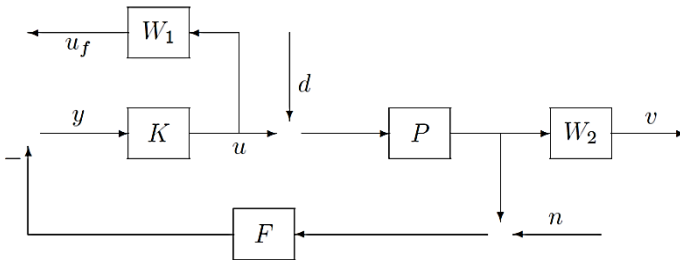
$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$

$G(s)$ merupakan *generalized plant*, pada bentuk *plant* yang sederhana terdapat asumsi bahwa

- i. (A, B_1) terkontrol dan (C_1, A) teramati
- ii. (A, B_2) dapat distabilkan dan (C_2, A) dapat dideteksi
- iii. $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$
- iv. $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

Generalized plant dapat dibentuk dengan menggabungkan semua *plant* termasuk kontrol, *input*, *output* baik dari dalam maupun luar serta beberapa fungsi bobot yang berfungsi untuk mengover berbagai gangguan. Bentuk *generalized plant* akan selalu berbeda satu dengan yang lainnya sesuai dengan konfigurasi dari sistem, gangguan serta fungsi pembobotnya.

Untuk mempermudah penjelasan dalam membentuk *generalized plant* dari sebuah diagram blok, akan ditunjukkan pada contoh sebagai berikut



Gambar 4. 1 Simple Block Diagram

Sebuah sistem umpan balik yang ditunjukkan pada Gambar 4.1 dapat dibentuk menjadi *generalized plant* sesuai Gambar 2.1 dengan input $w = \begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}$ dan output $z = \begin{pmatrix} v \\ u_f \end{pmatrix}$.

Berdasarkan Gambar 4.1. diperoleh

$$v = W_2 P(d + u) \quad (4.1)$$

$$u_f = W_1 u \quad (4.2)$$

$$y = -F(n + P(u + d)) \quad (4.3)$$

kemudian dari persamaan 4.1, 4.2, dan 4.3 didapatkan matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v \\ u_f \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_2 P & 0 & W_2 P \\ 0 & 0 & W_1 \\ -FP & -F & -FP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ n \\ u \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks transfer dari z ke w sebagai berikut

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} W_2 P & 0 & W_2 P \\ 0 & 0 & W_1 \\ \hline -FP & -F & -FP \end{array} \right)$$

Selanjutnya realisasi *state-space* untuk *generalized plant* G dapat dicari berdasarkan realisasi dari masing-masing komponen. Diasumsikan *plant*, P, F, W_1, W_2 memiliki realisasi *state-space* sebagai berikut :

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & 0 \end{array} \right], F = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right]$$

$$W_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & D_u \end{array} \right], W_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_v & B_v \\ \hline C_v & D_v \end{array} \right]$$

Berdasarkan Gambar 3.1 dapat dituliskan persamaan dari setiap *plant* P, F, W_1, W_2 adalah sebagai berikut

i. Realisasi dari *plant* P

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p(d + u) \\ y_p &= C_p x_p\end{aligned}\quad (4.4)$$

ii. Realisasi dari *plant* F

$$\dot{x}_f = A_f x_f + B_f(y_p + n) \quad (4.5)$$

$$-y = C_f x_f + D_f(y_p + n) \quad (4.6)$$

Dengan substitusi persamaan 4.4 ke persamaan 4.5 dan persamaan 4.6, diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= A_f x_f + B_f(C_p x_p + n) \\ -y &= C_f x_f + D_f(C_p x_p + n)\end{aligned}$$

iii. Realisasi dari *plant* W_1

$$\begin{aligned}\dot{x}_u &= A_u x_u + B_u(u) \\ u_f &= C_u x_u + D_u(u)\end{aligned}$$

iv. Realisasi dari *plant* W_2

$$\dot{x}_v = A_v x_v + B_v(y_p) \quad (4.7)$$

$$v = C_v x_v + D_v(y_p) \quad (4.8)$$

Dengan substitusi persamaan 4.4 ke persamaan 4.7 dan persamaan 4.8, diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{x}_v &= A_v x_v + B_v(C_p x_p) \\ v &= C_v x_v + D_v(C_p x_p)\end{aligned}$$

Berdasarkan realisasi dari masing – masing komponen diatas, dapat dibentuk menjadi *state-space* sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_u \\ \dot{x}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 & 0 \\ B_f C_p & A_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_u & 0 \\ B_v C_p & 0 & 0 & A_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_f \\ x_u \\ x_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & 0 & B_p \\ 0 & B_f & 0 \\ 0 & 0 & B_u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_v C_p & 0 & 0 & C_v \\ 0 & 0 & C_u & 0 \\ -D_f C_p & -C_f & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_f \\ x_u \\ x_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_u \\ 0 & -D_f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \\ u \end{bmatrix}$$

karena $w = \begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}$ dan $z = \begin{pmatrix} v \\ u_f \end{pmatrix}$ adalah *input* dan *output* dari luar sistem, sehingga partisi dilakukan berdasarkan asal *input* dan *output* dari dalam / luar sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_u \\ \dot{x}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 & 0 \\ B_f C_p & A_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_u & 0 \\ B_v C_p & 0 & 0 & A_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_f \\ x_u \\ x_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & 0 & B_p \\ 0 & B_f & 0 \\ 0 & 0 & B_u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_v C_p & 0 & 0 & C_v \\ 0 & 0 & C_u & 0 \\ -D_f C_p & -C_f & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_f \\ x_u \\ x_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_u \\ 0 & -D_f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \\ u \end{bmatrix}$$

Maka realisasi *state-space* dari G adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 & 0 \\ B_f C_p & A_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_u & 0 \\ B_v C_p & 0 & 0 & A_v \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & B_f \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ B_u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} D_v D_p & 0 & 0 & C_v \\ 0 & 0 & C_u & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -D_f C_p & -C_f & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = 0, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_u \end{bmatrix}, D_{21} = [0 \quad -D_f], D_{22} = 0$$

4.1.2 Desain Kontrol Sistem

Konsep kontrol *robust* H_∞ merupakan metode kontrol yang memperhatikan kekokohan pada suatu sistem. Suatu sistem dikatakan memiliki sifat *robust* apabila berada pada suatu titik di mana sistem tersebut memiliki kemampuan bertahan terhadap keadaan disekitar titik tersebut. Jadi, suatu sistem kontrol yang *robust* adalah sistem kontrol yang mampu bekerja dengan baik, walaupun terdapat ketidaktepatan dalam pemodelan maupun terhadap gangguan yang tidak diketahui karakteristiknya.

Konsep kontrol *robust* H_∞ dikategorikan sebagai perancangan minimasi yang berdasarkan pada prinsip norm. Dikatakan demikian, karena proses dalam mendapatkan kontrollernya berdasarkan perhitungan minimasi norm.

Mengacu pada konfigurasi kontrol umum untuk H_∞ , masalah kontrol optimal H_∞ adalah untuk mencari suatu controller K yang meminimalkan $\|T_{zw}\|_\infty$ dimana

$$\|T_{zw}\|_\infty = \max_{w(t) \neq 0} \frac{\int_0^\infty z(t)^T z(t) dt}{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}$$

karena sulit untuk mendapatkan pengontrol yang optimal untuk masalah H_∞ , serta secara komputasi dan secara teoritis lebih mudah untuk merancang konsep suboptimal H_∞ , yaitu diberikan $\gamma > 0$ akan ditentukan semua pengontrol $K(s)$, sehingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$. [6]

Nilai γ sendiri dapat dicari dengan melakukan iterasi untuk memperoleh nilai γ terkecil sehingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, untuk konfigurasi kontrol umum seperti pada Gambar 2.1 dengan *generalized plant* sesuai pada subbab 4.1.1 maka terdapat sebuah

kontroller yang dapat diterima sehingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ jika dan hanya jika tiga kondisi berikut terpenuhi [7]

- (i) Terdapat $X \geq 0$ yang merupakan solusi dari *Agebraic Riccati Equation (ARE)*

$$A^T X + XA + C_1^T C_1 + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X = 0$$

$$\text{Sehingga } \text{Re } \lambda_i[A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X] < 0, \forall_i$$

- (ii) Terdapat $Y \geq 0$ sulusi dari *Agebraic Riccati Equation (ARE)*

$$AY + YA^T + B_1 B_1^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y = 0$$

$$\text{Sehingga } \text{Re } \lambda_i[A + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)] < 0, \forall_i$$

- (iii) $\rho(XY) < \gamma^2$ dimana ρ adalah *spectral radius* ($\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$)

ketika kondisi diatas berlaku, salah satu kontroller tersebut adalah[7]

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_k & ZY C_2^T \\ \hline -B_2^T X & 0 \end{array} \right]$$

dimana

$$A_k = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X - B_2 B_2^T X + ZY C_2^T C_2$$

$$Z = (I - \gamma^{-2} YX)^{-1}$$

Kontroller berbentuk sistem dinamis serta memiliki jumlah *state* yang sama dengan *general plant*, dan realisasi *state-space* dari $K(s)$ adalah

$$\dot{x}_k = A_k x_k + B_k u_k \quad (4.9)$$

$$y_k = C_k x_k + D_k u_k \quad (4.10)$$

Dari interkoneksi antara controller dengan *open loop system* maka dapat diketahui bahwa

$$u_k = y \quad (4.11)$$

$$y_k = u \quad (4.12)$$

Sehingga untuk memperoleh *close loop system* dengan kontrol, kontroller $K(s)$ yang telah didapat akan diterapkan pada sistem awal atau *generalized plant*, misalkan sistem awalnya adalah sebagai berikut

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (4.13)$$

$$z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \quad (4.14)$$

$$y = C_2x + D_{21}w \quad (4.15)$$

Substitusi persamaan 4.12 dan persamaan 4.10 ke persamaan 4.13

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ &= Ax + B_1w + B_2(C_kx_k + D_ku_k) \\ &= Ax + B_1w + B_2C_kx_k + B_2D_ku_k \end{aligned} \quad (4.16)$$

Kemudian substitusi persamaan 4.11 dan persamaan 4.15 ke persamaan 4.16

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2C_kx_k + B_2D_ku_k \\ &= Ax + B_1w + B_2C_kx_k + B_2D_ky \\ &= Ax + B_1w + B_2C_kx_k + B_2D_k(C_2x + D_{21}w) \\ &= (A + B_2D_kC_2)x + (B_2C_k)x_k + (B_1 + B_2D_kD_{12})w \end{aligned}$$

Substitusi persamaan 4.11 dan 4.15 ke persamaan 4.9

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= A_kx_k + B_ku_k \\ &= A_kx_k + B_ky \\ &= A_kx_k + B_k(C_2x + D_{21}w) \\ &= A_kx_k + B_kC_2x + B_kD_{21}w \end{aligned}$$

Substitusi persamaan 4.12 dan persamaan 4.10 ke persamaan 4.14

$$\begin{aligned} z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ &= C_1x + D_{11}w + D_{12}y_k \\ &= C_1x + D_{11}w + D_{12}(C_kx_k + D_ku_k) \\ &= C_1x + D_{11}w + D_{12}C_kx_k + D_{12}D_ku_k \end{aligned} \quad (4.17)$$

Kemudian substitusi persamaan 4.11 dan persamaan 4.13 ke persamaan 4.17

$$\begin{aligned}
 z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}C_kx_k + D_{12}D_ku_k \\
 &= C_1x + D_{11}w + D_{12}C_kx_k + D_{12}D_ky \\
 &= C_1x + D_{11}w + D_{12}C_kx_k + D_{12}D_k(C_2x + D_{21}w) \\
 &= (C_1 + D_{12}D_kC_2)x + (D_{12}C_k)x_k + (D_{11} + D_{12}D_kD_{21})w
 \end{aligned}$$

Maka diperoleh *close loop system* sebagai berikut

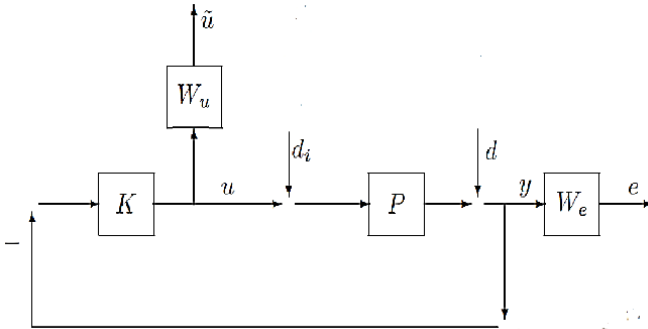
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2D_kC_2 & B_2C_k & B_1 + B_2D_kD_{12} \\ B_kC_2 & A_k & B_kD_{21} \\ C_1 + D_{12}D_kC_2 & D_{12}C_k & D_{11} + D_{12}D_kD_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \\ w \end{bmatrix}$$

$$T_{zw} = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2D_kC_2 & B_2C_k & B_1 + B_2D_kD_{12} \\ B_kC_2 & A_k & B_kD_{21} \\ \hline C_1 + D_{12}D_kC_2 & D_{12}C_k & D_{11} + D_{12}D_kD_{21} \end{array} \right]$$

4.2 Simulasi dan Analisis Kontrol

Pada subbab ini dibahas bagaimana simulasi dan implementasi dari desain kontrol menggunakan metode H_∞ . Diambil contoh sistem awal kemudian dilakukan desain kontrol menggunakan H_∞ . Kontrol yang diperoleh kemudian akan diterapkan pada sistem awal sehingga diperoleh sistem awal dengan kontrol. Sistem awal dan hasil dari desain kontrol yang telah didapatkan akan dibuat simulasinya untuk selanjutnya dilakukan analisis dari hasil simulasi yang diperoleh.

4.2.1 Contoh Kasus 1



Gambar 4. 2 Block Diagram Contoh Kasus 1

Pada contoh kasus ini diambil sistem dengan blok diagram seperti pada Gambar 4.2 dengan

$$P = \frac{50(s+1.4)}{(s+1)(s+2)}, W_e = \frac{2}{s+0.2}, W_u = \frac{s+1}{s+10}$$

Akan dirancang kontroller dimana norm H_∞ dari $w = \begin{bmatrix} d \\ d_i \end{bmatrix}$ ke $z = \begin{bmatrix} e \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$ minimal. Representasi matriks dari fungsi transfer P , W_e , dan W_u adalah

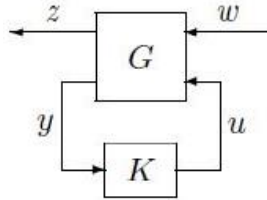
$$P = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 50 & 70 & 0 \end{array} \right]$$

$$W_e = \left[\begin{array}{c|c} -0.2 & 1 \\ \hline 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$W_u = \left[\begin{array}{c|c} -10 & 1 \\ \hline -9 & 1 \end{array} \right]$$

Langkah awal untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan membentuk *generalized plant*. Sama seperti yang telah

dijelaskan pada subbab sebelumnya, mencari G dapat dilakukan dengan mengobservasi kedua *input* dan *output* serta gangguan eksternal dari sistem untuk kemudian diformulasikan sesuai dengan Gambar 4.3 berikut



Gambar 4.3 *Linear Fractional Transformation*

Dari Gambar 4.2 akan dicari bentuk dari T_{zw} , dengan input $w = \begin{bmatrix} d \\ d_i \end{bmatrix}$ dan output $z = \begin{bmatrix} e \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$

$$e = We(d + P(d_i - u)) \quad (4.17)$$

$$\tilde{u} = W_u(-u) \quad (4.18)$$

$$y = d + P(d_i - u) \quad (4.19)$$

dari persamaan 4.17, 4.18, dan 4.19 dapat dibentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e \\ \tilde{u} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_e & W_e P & -W_e P \\ 0 & 0 & -W_u \\ I & P & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ d_i \\ u \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh transfer matriks dari z ke w sebagai berikut

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} W_e & W_e P & -W_e P \\ 0 & 0 & -W_u \\ \hline I & P & -P \end{array} \right)$$

Selanjutnya realisasi *state-space* untuk *generalized plant* G akan dicari berdasarkan realisasi dari masing-masing komponen, dari Gambar 4.2 dapat dituliskan persamaan dari setiap *plant* P, W_e, W_u adalah sebagai berikut

i. Realisasi dari *plant* P

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p (d_i + u) \\ y_p &= C_p x_p\end{aligned}\quad (4.20)$$

ii. y sebagai output dari sistem dapat ditulis sebagai berikut

$$y = y_p + d \quad (4.21)$$

Substitusi persamaan 4.20 ke persamaan 4.21 didapatkan

$$y = C_p x_p + d \quad (4.22)$$

iii. Realisasi *plant* W_e

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= A_e x_e + B_e y \\ e &= C_e x_e\end{aligned}\quad (4.23)$$

Substitusi persamaan 2.20 dan 4.21 ke persamaan 4.23 sehingga diperoleh

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e C_p x_p + B_e d$$

iv. Realisasi *plant* W_u

$$\begin{aligned}\dot{x}_u &= A_u x_u + B_u (u) \\ \tilde{u} &= C_u x_u + D_u (u)\end{aligned}$$

Berdasarkan realisasi dari masing – masing komponen diatas, dapat dibentuk menjadi *state-space* sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{x}_p \\ \dot{x}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_e & B_e C_p & 0 \\ 0 & A_p & 0 \\ 0 & 0 & A_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ x_p \\ x_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_e & 0 & 0 \\ 0 & B_p & B_p \\ 0 & 0 & B_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d_i \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e \\ \tilde{u} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_u \\ 0 & C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ x_p \\ x_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_u \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d_i \\ u \end{bmatrix}$$

karena $w = \begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}$ dan $z = \begin{pmatrix} v \\ u_f \end{pmatrix}$ adalah *input* dan *output* dari luar sistem, sehingga partisi dilakukan berdasarkan asal *input* dan *output* dari dalam / luar sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{x}_p \\ \dot{x}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_e & B_e C_p & 0 \\ 0 & A_p & 0 \\ 0 & 0 & A_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ x_p \\ x_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_e & 0 & 0 \\ 0 & B_p & B_p \\ 0 & 0 & B_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d_i \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e \\ \tilde{u} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_u \\ 0 & C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ x_p \\ x_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_u \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d_i \\ u \end{bmatrix}$$

Maka realisasi *state-space* dari G adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \quad (4.24)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 50 & 70 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}, C_2 = [0 \quad 50 \quad 70 \quad 0]$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_{21} = [1 \quad 0], D_{22} = 0$$

Berdasarkan *generalized plant* seperti pada persamaan 4.24 .dan dengan desain kontrol suboptimal H_∞ diperoleh nilai $\gamma = 0.7849$ dan kontroller sebagai berikut :

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 1.421e-14 & 0 \\ -3.603e+06 & -2.257e+07 & -3.187e+07 & -9.88e+06 \\ -5.746e-18 & 0.05667 & -1.321 & 0 \\ -3.603e+06 & -2.257e+07 & -3.187e+07 & -9.88e+06 \end{bmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 7.746 \\ 7.298 \\ 0.1461 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_k = [-4.651e+05 \quad -2.914e+06 \quad -4.114e+06 \quad -1.276e+06]$$

$$D_k = [0]$$

Dalam bentuk fungsi transfer, kontroller diatas dapat dinyatakan dengan

$$K(s) = \frac{-2.547e07 s^3 - 4.753e08 s^2 - 2.465e09 s - 2.585e09}{s^4 + 3.245e07 s^3 + 7.719e08 s^2 + 1.161e09 s + 2.016e08}$$

Telah diperoleh nilai kontroller K sedemikian hingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ dengan nilai $\gamma = 0.7849$, maka *close loop* sistem dengan kontrol adalah sebagai berikut

$$T_{zw} = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k & B_1 + B_2 D_k D_{12} \\ \hline B_k C_2 & A_k & B_k D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_k C_2 & D_{12} C_k & D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{array} \right] =: \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right]$$

dimana

$$A_c = \begin{bmatrix} -0.2 & 50 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -4.651e+05 & -2.914e+06 & -4.114e+06 & -1.276e+06 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -4.651e+05 & -2.914e+06 & -4.114e+06 & -1.276e+06 \\ 0 & 387.3 & 542.2 & 0 & -0.2 & 0 & 1.421e-14 & 0 \\ 0 & 364.9 & 510.9 & 0 & -3.603e+06 & -2.257e+07 & -3.187e+07 & -9.88e+06 \\ 0 & 7.307 & 10.23 & 0 & -5.746e-18 & 0.05667 & -1.321 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.603e+06 & -2.257e+07 & -3.187e+07 & -9.88e+06 \end{bmatrix}$$

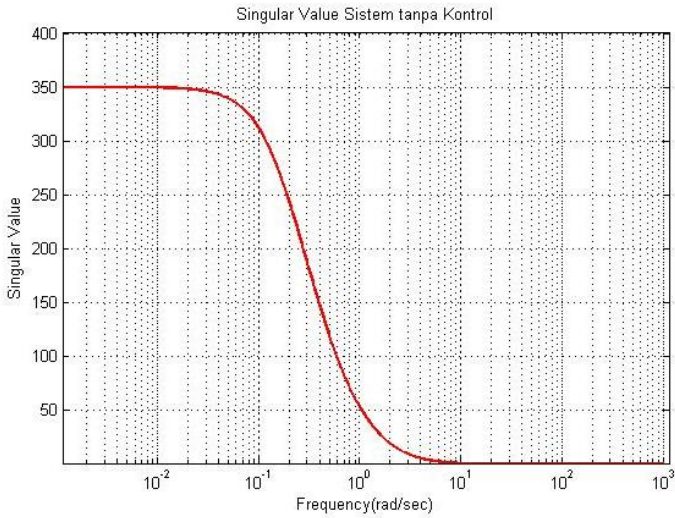
$$B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 7.746 & 0 \\ 7.298 & 0 \\ 0.1461 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -4.651e+05 & -2.914e+06 & -4.114e+06 & -1.276e+06 \end{bmatrix}$$

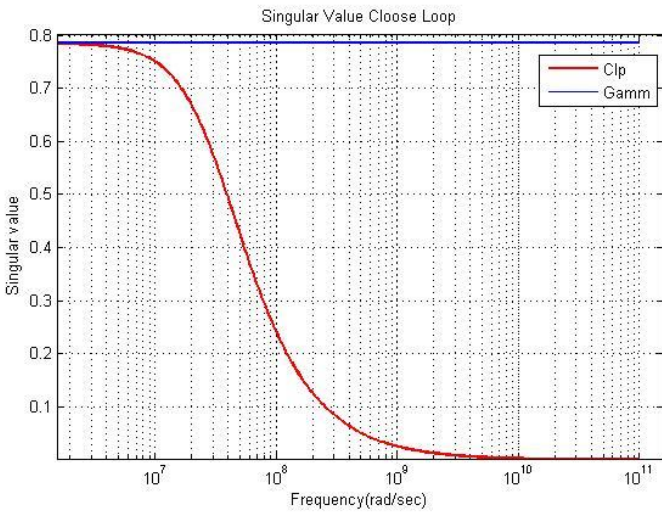
$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\|T_{zw}\|_\infty$ dapat direpresentasikan sebagai rasio terburuk antara performansi terhadap gangguan sistem dimana $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, dengan kata lain nilai γ yang diperoleh menunjukkan level performansi dari sistem dan menggambarkan seberapa besar tingkat kekokohan (*robustness*) controller yang dirancang terhadap sinyal gangguan yang masuk ke dalam sistem, sehingga untuk mengetahui bagaimana pengaruh adanya kontrol untuk membantu mengurangi efek dari gangguan terhadap performa dapat dilihat dari norm H_∞ sistem yang ditunjukkan oleh nilai singularnya.

Norm H_∞ dari sistem dengan gangguan tanpa adanya kontrol pada contoh diatas adalah $\|G_{withoutkontrol}\|_\infty = 350.1428$, sesuai dengan nilai tertinggi dari grafik nilai singular pada Gambar 4.4, sedangkan untuk *close loop* sistem dengan kontrol ditunjukkan pada Gambar 4.5.



Gambar 4. 4 Grafik Singular Value dari Sistem tanpa Kontrol (a)

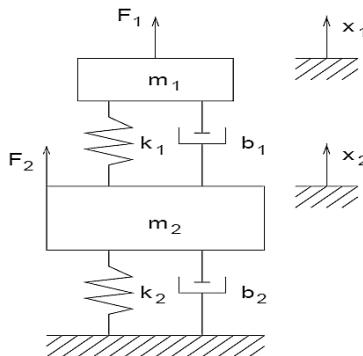


Gambar 4. 5 Grafik Singular Value dari T_{zw} (a)

Gambar 4.5 menunjukkan nilai singular dari *close loop* sitem dengan kontrol, dimana nilai singular maksimumnya tidak pernah lebih besar dari nilai $\gamma = 0.7849$. Hal ini menunjukkan bahwa kontrol yang telah diperoleh sesuai dengan kriteria *sup-optimal* H_∞ dimana $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$. Hal ini juga menunjukkan bahwa dengan adanya kontrol, dapat membantu sistem untuk mengurangi efek dari gangguan terhadap performa dilihat dari perbandingan nilai $\|G_{withoutkontrol}\|_\infty$ yang jauh lebih besar dari nilai γ . Nilai norm H_∞ ini menunjukkan bahwa level performasi dari sitem tanpa kontrol atau efek yang diterima sistem dengan adanya gangguan besar, namun setelah diberi kontrol level performasi sistem turun menjadi 0.7849 , dengan kata lain efek gangguan yang diterima sistem jauh lebih kecil ketika diberi kontrol dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol.

4.2.2 `Contoh Kasus 2

Pada contoh kasus ini diambil sistem dua massa pegas dengan redaman (*two-mass spring damper*) seperti pada Gambar 4.6.



Gambar 4. 6 Sistem 2 Massa Pegas dengan Redaman

dimana :

m_1, m_2 adalah massa benda pertama dan kedua

k_1, k_2 adalah konstanta pegas benda pertama dan kedua

b_1, b_2 adalah konstanta redaman pertama dan kedua

Dengan menerapkan hukum kedua Newton dari Gambar 4.6 diperoleh

Benda 1

$$\sum F = ma$$

$$b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1x_1 + k_2x_2 + F_1 = m_1\ddot{x}_1$$

Benda 2

$$\sum F = ma$$

$$b_1\dot{x}_1 - (b_1 + b_2)\dot{x}_2 + k_1x_1 + (k_1 + k_2)x_2 + F_2 = m_2\ddot{x}_2$$

Didefinisikan $x_3 = \dot{x}_1$ dan $x_4 = \dot{x}_2$, sehingga

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \ddot{x}_1 \\ &= -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{b_1}{m_1}x_3 + \frac{b_1}{m_1}x_4 + \frac{F_1}{m_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \ddot{x}_2 \\ &= \frac{k_1}{m_2}x_1 + \frac{k_1 + k_2}{m_2}x_2 + \frac{b_1}{m_1}x_3 - \frac{b_1 + b_2}{m_2}x_4 + \frac{F_2}{m_2} \end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan persamaan diatas, sistem dinamik dari sistem massa pegas dengan redaman dapat ditulis :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = A_p \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + B_p \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$y = C_p \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + D_p \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

dimana nilai dari masing – masing matriksnya adalah sebagai berikut

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_1} & -\frac{k_1 + k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1 + b_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

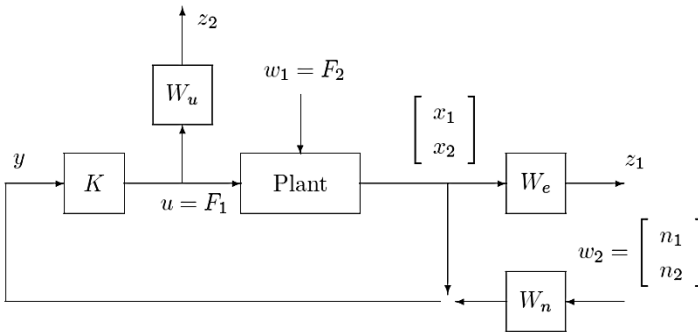
$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_p = 0$$

dengan

$$k_1 = 1, k_2 = 4, b_1 = 0.2, b_2 = 0.1, m_1 = 1, m_2 = 2$$

Bila $F_1 = u$ adalah input untuk kontrol dan $F_2 = w$ adalah gangguan dari luar (*disturbance*) dimana F_1 dapat mengontrol gerakan massa benda 1 dan benda 2 yang diakibatkan oleh gangguan F_2 , maka x_1 dan x_2 menyatakan kedudukan benda pertama dan benda kedua setelah mendapat kontrol.

Dari sistem massa pegas dengan redaman pada Gambar 4.6 dapat dibentuk suatu model kontrol dalam bentuk blok diagram pada Gambar 4.7 berikut



Gambar 4. 7 Block Diagram Contoh Kasus 2

Pada x_1 dan x_2 mendapat gangguan pengukuran sebagai berikut :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + W_n \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

$$W_n = \begin{bmatrix} \frac{0.01(s+10)}{s+100} & 0 \\ 0 & \frac{0.01(s+10)}{s+100} \end{bmatrix}$$

Dilakukan desain kontrol menggunakan H_∞ untuk merancang sebuah kontroller sehingga dapat mengurangi efek dari gangguan F_2 pada posisi x_1 dan x_2 . Permasalahan ini dapat dilihat pada Gambar 4.7 dimana W_e adalah fungsi pembobot performasi (*performa weight*) dan W_u sebagai fungsi pembobot kontrol (*control weight*) dan dipilih :

$$W_e = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$$

$$W_u = \frac{s+5}{s+50}$$

Selanjutnya misalkan $u = F_1$, $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$ sebagai *input* dan $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ sebagai *output* maka masalah ini dapat diformulasikan dalam bentuk LFT seperti pada Gambar 4.3.

$$\begin{aligned} y &= W_n w_2 + P(u + w_1) \\ z_1 &= W_e P(u + w_1) \\ z_2 &= W_u u \end{aligned}$$

dari persamaan diatas dapat dibentuk matriks *state space* :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e P & 0 & W_e P \\ 0 & 0 & W_u \\ P & W_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh bentuk LFT sebagai *generalized plant* adalah sebagai berikut

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|c} W_e P & 0 & W_e P \\ 0 & 0 & W_u \\ \hline P & W_n & P \end{array} \right]$$

Selanjutnya realisasi *state-space* untuk *generalized plant* G akan dicari berdasarkan realisasi dari masing-masing komponen. Berdasarkan Gambar 4.7 masing –masing persamaan dari setiap *plant* P, W_e, W_u dan W_n adalah sebagai berikut

i.) Realisasi dari *plant* P

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p (w_1 + u) \\ y_p &= C_p x_p \end{aligned} \tag{4.25}$$

ii.) Relisasi dari *plant* W_u

$$\begin{aligned}\dot{x}_u &= A_u x_u + B_u u \\ z_2 &= C_u x_u + D_u u\end{aligned}$$

dimana untuk

$$W_u = \frac{s + 5}{s + 50}$$

maka

$$\left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & D_u \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -50 & 1 \\ \hline -45 & 1 \end{array} \right]$$

iii.) Realisasi dari *plant* W_e

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e y_p \quad (4.26)$$

$$z_1 = C_e x_e + D_e y_p \quad (4.27)$$

Substitusi persamaan 4.25 ke persamaan 4.26 dan 4.27

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e C_p x_p$$

$$z_1 = C_e x_e + D_e C_p x_p$$

iv.) Realisasi dari *plant* W_n

$$\dot{x}_n = A_n x_n + B_n w_2$$

$$y_n = C_n x_n + D_n w_2$$

Dimana untuk

$$W_n = \begin{bmatrix} \frac{0.01(s + 10)}{s + 100} & 0 \\ 0 & \frac{0.01(s + 10)}{s + 100} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\left[\begin{array}{c|c} A_n & B_n \\ \hline C_n & D_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -100 & 0 & 0.9487 & 0 \\ 0 & -100 & 0 & 0.9487 \\ \hline -0.9487 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & -0.9487 & 0 & 0.01 \end{array} \right]$$

v.) y sebagai output dari sistem dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} y &= y_n + y_p \\ &= C_n x_n + D_n w_2 + C_p x_p \end{aligned}$$

Dengan memisalkan $x = \begin{bmatrix} x_e \\ x_u \\ x_p \\ x_n \end{bmatrix}$, sehingga berdasarkan realisasi

dari masing – masing komponen diatas, dapat dibentuk *state-space* sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{x}_u \\ \dot{x}_p \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_e & 0 & B_e C_p & 0 \\ 0 & A_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ x_u \\ x_p \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_u \\ B_p & 0 & B_p \\ 0 & B_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_e & 0 & D_e C_p & 0 \\ 0 & C_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_p & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ x_u \\ x_p \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_u \\ 0 & D_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix}$$

karena $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ dan $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ adalah *input* dan *output* dari luar sistem, sehingga partisi dilakukan berdasarkan asal *input* dan *output* dari dalam / luar sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{x}_u \\ \dot{x}_p \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_e & 0 & B_e C_p & 0 \\ 0 & A_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ x_u \\ x_p \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & B_u \\ B_p & 0 & | & B_p \\ 0 & B_n & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_e & 0 & D_e C_p & 0 \\ 0 & C_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_p & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ x_u \\ x_p \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & D_u \\ 0 & D_n & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix}$$

Diperoleh realisasi *state-space* dari G adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u\end{aligned}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} A_e & 0 & B_e C_p & 0 \\ 0 & A_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_p & 0 \\ 0 & B_n \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_u \\ B_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_e & 0 & D_e C_p & 0 \\ 0 & C_u & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = [0 \quad 0 \quad C_p \quad C_n]$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_u \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = [0 \quad D_n], D_{22} = 0$$

Misalkan pada kondisi pertama kita ingin menolak gangguan F_2 hanya pada x_1 sehingga dipilih fungsi pembobot performansi

$$W_e = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \frac{5}{0.5s+1} \text{ dan } W_2 = 0$$

dimana W_1 dalam bentuk matriks *state space* :

$$W_e = \left[\begin{array}{c|c} A_e & B_e \\ \hline C_e & D_e \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 3.1623 & 0 \\ \hline 3.1623 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sehingga diperoleh *generalized plant*

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (4.28)$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3.1623 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2.5 & 0.1 & -0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9487 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9487 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 3.1623 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.9487 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.9487 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan *generalize plant* seperti pada Persamaan 4.28 dengan desain kontrol supoptimal H_∞ diperoleh nilai $\gamma = 1.6101$ dengan kontroller sebagai berikut :

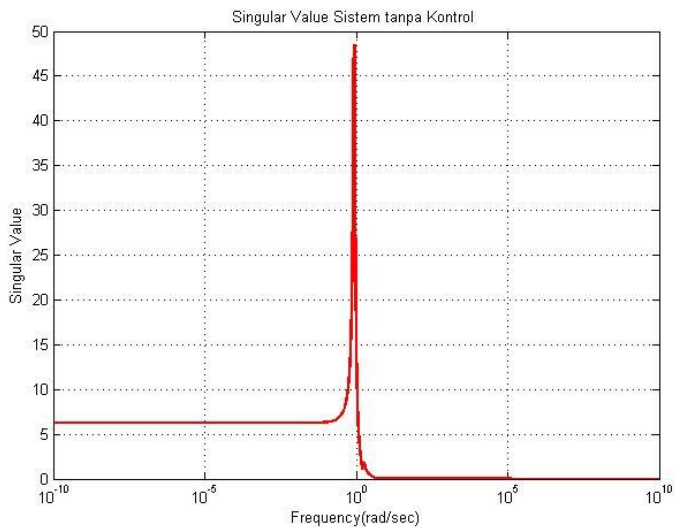
$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= A_k x_k + B_k u_k \\ y_k &= C_k x_k + D_k u_k \end{aligned}$$

Telah diperoleh nilai kontroller K sedemikian hingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ dengan nilai $\gamma = 1.6102$, maka *close loop* dari sistem dengan kontrol adalah sebagai berikut

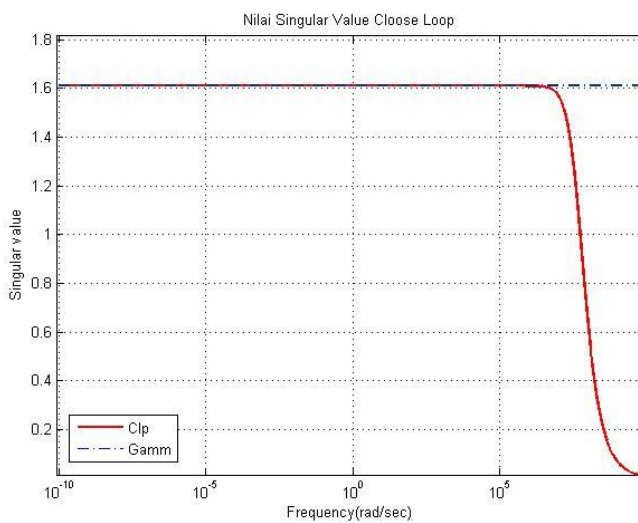
$$T_{zw} = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k & B_1 + B_2 D_k D_{12} \\ \hline B_k C_2 & A_k & B_k D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_k C_2 & D_{12} C_k & D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{array} \right] =: \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$$

Nilai dari masing – masing $[A_k, B_k, C_k, D_k]$ dan $[A_c, B_c, C_c, D_c]$ tertulis pada Lampiran 1 dan Lampiran 2.

H_∞ norm dari close loop sistem, dapat direpresentasikan sebagai suatu kondisi yang menggambarkan seberapa besar tingkat kekokohan (*robustness*) kontroller yang dirancang terhadap sinyal gangguan yang masuk ke dalam sistem, sehingga untuk mengetahui bagaimana pengaruh adanya kontrol untuk membantu mereduksi efek dari gangguan terhadap performa dapat dilihat dari norm H_∞ sistem yang ditunjukkan oleh nilai singularnya. Hal ini dapat dilihat dalam grafik yang disajikan pada Gambar 4.8 dan Gambar 4.9 sebagai berikut



Gambar 4. 8 Grafik Singular Value dari Sistem tanpa Kontrol (b)



Gambar 4. 9 Grafik Singular Value dari T_{zw} (b)

Norm H_∞ dari sistem dengan gangguan tanpa adanya kontrol adalah $\|G_{withoutkontrol}\| = 48.7068$, sesuai dengan nilai tertinggi dari grafik nilai singular pada Gambar 4.8, sedangkan untuk *close loop* sistem dengan kontrol ditunjukkan pada Gambar 4.9.

Pada Gambar 4.9 menunjukkan nilai singular dari *close loop* sitem dengan kontrol, dimana nilai singular maksimumnya tidak pernah lebih besar dari nilai $\gamma = 1.6101$. Hal ini menunjukkan bahwa kontrol yang telah diperoleh sesuai dengan kriteria sup-optimal H_∞ dimana $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$. Hal ini juga menunjukkan bahwa dengan adanya kontrol, dapat membantu sistem untuk mereduksi efek dari gangguan terhadap performa dilihat dari perbandingan nilai $\|G_{withoutkontrol}\|$ yang jauh lebih besar dari nilai γ . Nilai norm H_∞ ini menunjukkan bahwa level performasi dari sitem tanpa kontrol atau efek yang diterima sistem dengan adanya gangguan besar, namun setelah diberi kontrol level performasi sistem turun menjadi 1.6102 , dengan kata lain efek gangguan yang diterima sistem jauh lebih kecil ketika diberi kontrol dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol.

Selanjutnya pada kondisi kedua akan menolak gangguan F_2 hanya pada posisi x_2 sehingga dipilih fungsi pembobot performasi

$$W_e = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$W_1 = 0 \text{ dan } W_2 = \frac{5}{0.5s+1}$$

Dimana W_e dalam bentuk matriks *state space* :

$$W_e = \left[\begin{array}{c|cc} A_e & B_e \\ \hline C_e & D_e \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 3.1623 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 3.1623 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sehingga diperoleh *general plant*

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (4.29)$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 3.1623 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2.5 & 0.1 & -0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9487 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9487 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.1623 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.9487 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.9487 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan *generalize plant* seperti pada Persamaan 4.29 diperoleh nilai $\gamma = 0.5189$ dengan controller sebagai berikut :

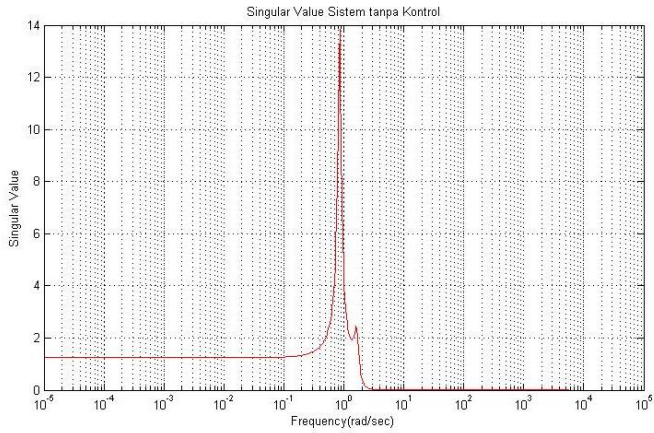
$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= A_k x_k + B_k u_k \\ y_k &= C_k x_k + D_k u_k \end{aligned}$$

Telah diperoleh nilai controller K sedemikian hingga $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$ dengan nilai $\gamma = 0.5189$, maka *close loop* dari sistem dengan kontrol adalah sebagai berikut

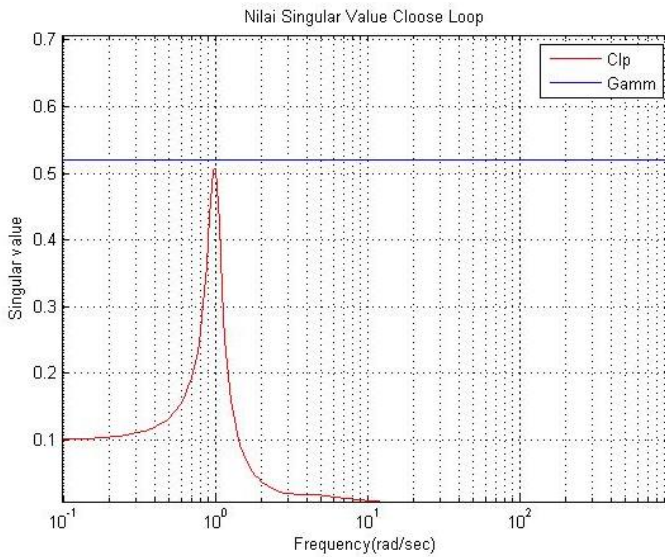
$$T_{zw} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k & B_1 + B_2 D_k D_{12} \\ B_k C_2 & A_k & B_k D_{21} \\ C_1 + D_{12} D_k C_2 & D_{12} C_k & D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$$

Nilai dari masing – masing $[A_k, B_k, C_k, D_k]$ dan $[A_c, B_c, C_c, D_c]$ tertulis pada Lampiran 3 dan Lampiran 4.

Pengaruh adanya kontrol untuk membantu mereduksi efek dari gangguan terhadap performa dapat dilihat dari norm H_{∞} sistem yang ditunjukkan oleh nilai singularnya. Hal ini disajikan dalam grafik pada Gambar 4.10 dan Gambar 4.11 berikut



Gambar 4. 10 Grafik Singular Value dari Sistem tanpa Kontrol (c)



Gambar 4. 11 Grafik Singular Value dari T_{zw} (c)

Norm H_∞ dari sistem dengan gangguan tanpa adanya kontrol adalah $\|G_{withoutkontrol}\| = 13.8764$, sesuai dengan nilai tertinggi dari grafik nilai singular pada Gambar 4.10, sedangkan untuk *close loop* sistem dengan kontrol ditunjukkan pada Gambar 4.11.

Pada Gambar 4.11 menunjukkan nilai singular dari *close loop* sitem dengan kontrol, dimana nilai singular maximumnya tidak pernah lebih besar dari nilai $\gamma = 0.5189$. Hal ini menunjukkan bahwa kontrol yang telah diperoleh sesuai dengan kriteria sup-optimal H_∞ dimana $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$. Hal ini juga menunjukkan bahwa dengan adanya kontrol, dapat membantu sistem untuk mereduksi efek dari gangguan terhadap performa dilihat dari perbandingan nilai $\|G_{withoutkontrol}\|$ yang jauh lebih besar dari nilai γ . Nilai norm H_∞ ini menunjukkan bahwa level performasi dari sitem tanpa kontrol atau efek yang diterima sistem dengan adanya gangguan besar, namun setelah diberi kontrol level performasi sistem turun menjadi 0.5189, dengan kata lain efek gangguan yang diterima sistem jauh lebih kecil ketika diberi kontrol dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol.

Pada kondisi ketiga akan menolak gangguan F_2 baik pada x_1 dan x_2 sehingga dipilih fungsi pembobot performasi

$$W_e = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$W_1 = \frac{5}{0.5s+1} \text{ dan } W_2 = \frac{5}{0.5s+1}$$

dimana realisasi matriks state space dari W_e

$$W_e = \left[\begin{array}{cc|cc} A_e & B_e & & \\ \hline C_e & D_e & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 3.162 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3.162 \\ \hline 3.162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.162 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

maka diperoleh *general plant*

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (4.30)$$

dimana

$$A = \left[\begin{array}{cccccccccc} -2 & 0 & 0 & 3.1623 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 3.1623 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2.5 & 0.1 & -0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \end{array} \right]$$

$$B_1 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9487 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9487 \end{array} \right], B_2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$C_1 = \left[\begin{array}{cccccccccc} 3.1623 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.1623 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$C_2 = \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.9487 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.9487 & 0 \end{array} \right]$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan *generalize plant* seperti pada persamaan 4.30 diperoleh nilai $\gamma = 4.3611$ dengan controller sebagai berikut :

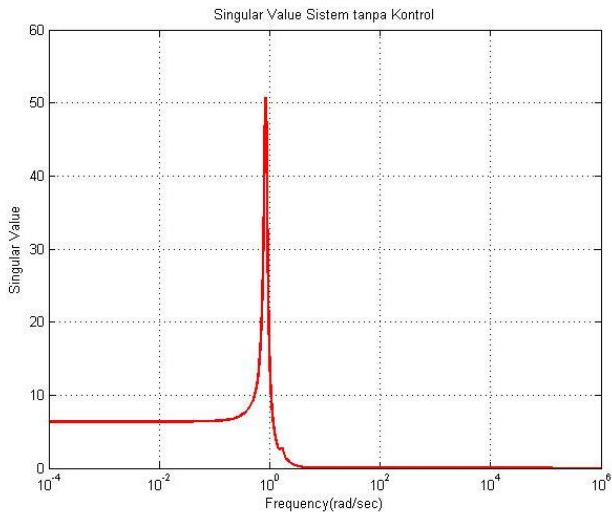
$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= A_k x_k + B_k u_k \\ y_k &= C_k x_k + D_k u_k \end{aligned}$$

Telah diperoleh nilai controller K sedemikian hingga $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$ dengan nilai $\gamma = 4.3611$, maka *close loop* sistem dengan kontrol sebagai berikut

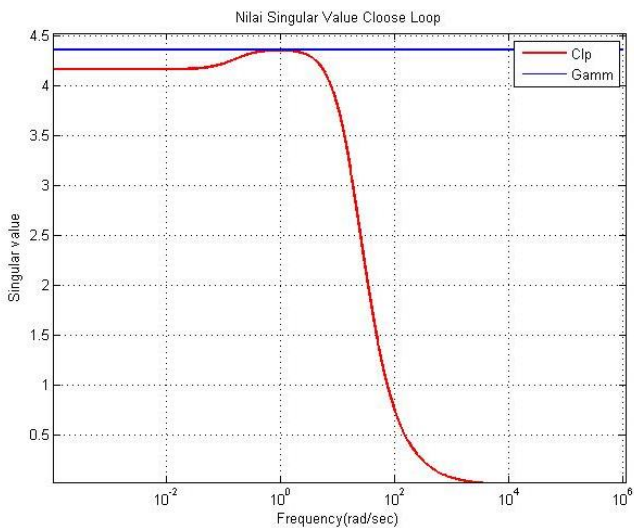
$$T_{zw} = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k & B_1 + B_2 D_k D_{12} \\ \hline B_k C_2 & A_k & B_k D_{21} \\ C_1 + D_{12} D_k C_2 & D_{12} C_k & D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{array} \right] = : \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$$

Nilai dari masing – masing $[A_k, B_k, C_k, D_k]$ dan $[A_c, B_c, C_c, D_c]$ tertulis pada Lampiran 5 dan Lampiran 6.

Pengaruh adanya kontrol untuk membantu mereduksi efek dari gangguan terhadap performa dapat dilihat dari norm H_{∞} sistem yang ditunjukkan oleh nilai singularnya. Hal ini disajikan dalam grafik pada Gambar 4.12 dan Gambar 4.13 berikut



Gambar 4. 12 Grafik Singular Value dari Sistem tanpa Kontrol (d)



Gambar 4. 13 Grafik Singular Value dari T_{zw} (d)

Norm H_∞ dari sistem dengan gangguan tanpa adanya kontrol adalah $\|G_{withoutkontrol}\| = 50.6449$, sesuai dengan nilai tertinggi dari grafik nilai singular pada Gambar 4.12, sedangkan untuk *close loop* sistem dengan kontrol ditunjukkan pada Gambar 4.8.

Pada Gambar 4.13 menunjukkan nilai singular dari *close loop* sitem dengan kontrol, dimana nilai singular maximumnya tidak pernah lebih besar dari nilai $\gamma = 4.3611$. Hal ini menunjukkan bahwa kontrol yang telah diperoleh sesuai dengan kriteria sup-optimal H_∞ dimana $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$. Hal ini juga menunjukkan bahwa dengan adanya kontrol, dapat membantu sistem untuk mereduksi efek dari gangguan terhadap performa dilihat dari perbandingan nilai $\|G_{withoutkontrol}\|$ yang jauh lebih besar dari nilai γ . Nilai norm H_∞ ini menunjukkan bahwa level performasi dari sitem tanpa kontrol atau efek yang diterima sistem dengan adanya gangguan besar, namun setelah diberi kontrol level performasi sistem turun menjadi 4.3611 , dengan kata lain efek gangguan yang diterima sistem jauh lebih kecil ketika diberi kontrol dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol.

BAB V

PENUTUP

Pada bab ini diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa langkah – langkah desain kontrol sistem menggunakan metode H_∞ yaitu membentuk *generalized plant* yang merepresentasikan konfigurasi umum kontrol H_∞ dengan menggabungkan semua *plant*, *input*, *output* baik dari dalam maupun luar serta beberapa fungsi bobot yang mengkover berbagai gangguan. Selanjutnya controller diperoleh sesuai dengan konsep suboptimal H_∞ , dimana didapat pengontrol $K(s)$ sedemikian hingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$.

Hasil simulasi dari 2 contoh kasus diperoleh bahwa, nilai norm H_∞ dari sistem tanpa kontrol atau level performasi dari sitem tanpa kontrol lebih besar dari level performasi *close loop* sistem, dengan kata lain efek gangguan yang diterima sistem jauh lebih kecil ketika diberi kontrol dibandingkan dengan sistem tanpa kontrol.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini hanya dibahas mengenai desain kontrol robust metode H_∞ yang mereduksi gangguan dari luar sistem, untuk selanjutnya dapat dikaji lebih jauh mengenai desain kontrol robust yang dapat mereduksi gangguan yang berasal dari dalam sistem. Selain itu dapat dibahas lebih lanjut untuk pemilihan fungsi pembobot yang digunakan dalam pembentukan *generalized plant*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ogata, K., & Yang, Y. (2002). *Modern control engineering* (Vol. 4). London.
- [2] Paraskevopoulos, P. N.(2017). *Modern Control Engineering*. CRC Press.
- [3] Kwakernaak, H. (1993). Robust Control and H_{∞} -Optimization—Tutorial Paper. *Automatica*, 29(2), 255-273.
- [4] Bansal, A., & Sharma, V. (2013). Design and Analysis of Robust H-infinity Controller. *Control theory and informatics*,3(2), 7-14.
- [5] Das, A., & Sharma, V.(2017), June). Modelling of Uncertainty in Control Systems and Design of a Robust Controller using H_{∞} Method. In *2017 International Conference on Intelligent Computing and Control Systems (ICICCS)* (pp. 1008-1013). IEEE.
- [6] Zhou, K., & Doyle, J. C. (1998). *Essentials of Robust Control* (Vol. 104). Upper Saddle River, NJ: Prentice hall.
- [7] Skogestad, S., & Postlethwaite, I.(2007). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design* (Vol. 2, pp. 359-368). New York: Wiley.

LAMPIRAN 1

Kontrol Suboptimal H_∞

$$A_k = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2.064 & -0.02789 & 0 & 0 & 1.042 & 0.02646 \\ -8.459e+06 & -3.603e+07 & -6.82e+07 & -2.501e+07 & -6.426e+07 & -1.357e+07 & -8.354e-12 & 0 \\ 8.636e-05 & 0 & -8.431 & -0.006093 & 1 & 0 & 7.998 & 0.00578 \\ 1.549e-06 & 0 & -0.03928 & -0.02156 & 0 & 1 & 0.03726 & 0.02046 \\ 0.0007957 & 0 & -98.96 & 1.045 & -0.2 & 0.2 & 92.93 & -0.04278 \\ -4.229e+06 & -1.802e+07 & -3.41e+07 & -1.25e+07 & -3.213e+07 & -6.785e+06 & 0.964 & -0.001877 \\ -0.0003557 & 0 & -67.37 & 0.09966 & 0 & 0 & -36.09 & -0.09455 \\ -9.707e-06 & 0 & 0.06468 & -94.67 & 0 & 0 & -0.06136 & -10.19 \end{bmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 15.34 & 0.3893 \\ 0 & 0 \\ 117.7 & 0.08506 \\ 0.5483 & 0.301 \\ 1367 & -0.6295 \\ 14.18 & -0.02762 \\ 940.4 & -1.391 \\ -0.9029 & 1322 \end{bmatrix}$$

$$C_k = [-6.06e+05 \quad -2.581e+06 \quad -4.886e+06 \quad -1.792e+06 \quad -4.604e+06 \quad -9.721e+05 \quad -5.984e-13 \quad 0]$$

$$D_k = [0 \quad 0]$$

LAMPIRAN 3

Kontrol Suboptimal H_∞

$$A_k = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -0.001935 & 3.139 & 0 & 0 & 0.001836 & 0.02183 \\ -0.8656 & -9.168 & -0.1747 & -2.74 & -0.6394 & -1.395 & 0 & 0 \\ -9.755e-07 & 0 & -8.431 & -0.006093 & 1 & 0 & 7.998 & 0.00578 \\ 7.981e-06 & 0 & -0.03928 & -0.02156 & 0 & 1 & 0.03726 & 0.2046 \\ -2.063e-05 & 0 & -98.96 & 1.045 & -0.2 & 0.2 & 92.93 & -0.04278 \\ -0.4328 & 20.42 & -0.6035 & -3.868 & 0.6803 & -0.8476 & 0.964 & -0.001877 \\ -8.588e-06 & 0 & -67.37 & 0.09966 & 0 & 0 & -36.09 & -0.09455 \\ -8.151e-05 & 0 & 0.06468 & -94.67 & 0 & 0 & -0.06136 & -10.19 \end{bmatrix}$$

□ □ □

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.02701 & 0.3213 \\ 0 & 0 \\ 117.7 & 0.8506 \\ 0.5483 & 0.301 \\ 1367 & -0.6294 \\ 14.18 & -0.02762 \\ 940.4 & -1.1391 \\ -0.9029 & 1322 \end{bmatrix}$$

$$C_k = [-0.06201 \quad 2.925 \quad -0.01252 \quad -0.1963 \quad -0.004581 \quad -0.09994 \quad 0 \quad 0]$$

$$D_k = [0 \quad 0]$$

LAMPIRAN 5

Kontrol Suboptimal H_∞

$$A_k = \begin{bmatrix} 1.196e-07 & -2 & 0 & -0.001935 & 3.139 & 0 & 0.001836 \\ -1.673 & 5.604 & -23.47 & -7.042 & -11.33 & -77.62 & 0 \\ 1.177e-05 & -1.384e-08 & 0 & -8.431 & -0.006093 & 1 & 7.998 \\ 2.112e-07 & 1.132e-07 & 0 & -0.03928 & -0.02156 & 0 & 0.03726 \\ 0.0001085 & -2.926e-07 & 0 & -98.96 & 1.045 & -0.2 & 92.93 \\ -0.8366 & 2.802 & 13.27 & -4.037 & -8.162 & -38.71 & 0.964 \\ -4.848e-05 & -1.218e-07 & 0 & -67.37 & 0.09966 & 0 & -36.09 \\ -1.323e-06 & -1.156e-06 & 0 & 0.06468 & -94.67 & 0 & -0.06136 \end{bmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 15.34 & 0.3893 \\ 0.02701 & 0.3213 \\ 0 & 0 \\ 117.7 & 0.08506 \\ 0.5483 & 0.301 \\ 1367 & -0.6294 \\ 14.18 & -0.02762 \\ 940.4 & -1.391 \\ -0.9029 & 1322 \end{bmatrix}$$

$$C_k = [-0.1199 \quad 0.4014 \quad 1.901 \quad -0.5045 \quad -0.8115 \quad -5.56 \quad -0.5548 \quad 0 \quad 0]$$

$$D_k = [0 \quad 0]$$

LAMPIRAN 7

Source Code Contoh 1

```

%Plant
numP = [50 70];
denP = [1 3 2];
[Ap,Bp,Cp,Dp] = tf2ss(numP,denP);
P1 = ss(Ap,Bp,Cp,Dp);
Ps = tf(P1);

% fungsi bobot We
numWe = [2];
denWe = [1 0.2];
[Ae,Be,Ce,De] = tf2ss(numWe,denWe);
We = ss(Ae,Be,Ce,De);
We1 = pck(Ae,Be,Ce,De);

% fungsi bobot Wu
numWu = [1 1];
denWu = [1 10];
[Au,Bu,Cu,Du] = tf2ss(numWu,denWu);
Wu = ss(Au,Bu,Cu,Du);
Wu1 = pck(Au,Bu,Cu,Du);

%General Plant
n = size(Ap,1);
n1 = size(Ae,1);
n2 = size(Au,1);
[p,q] = size(Dp);
[p1,q1]=size(De);
[p2,q2] = size(Du);

Ag = [Ae,Be*Cp,zeros(n1,n2);
zeros(n,n1),Ap,zeros(n,n1);zeros(n1,n2),zeros(n1
,n),Au];
Bg =
[Be,zeros(n1,n2),zeros(n1,n2);zeros(n,n2),Bp,Bp;
zeros(n1,n2),zeros(n1,n2),Bu];

```

```
Cg = [Ce, zeros(n1, n), 0; 0, zeros(n1, n), Cu; 0, Cp, 0];
Dg = [0 0 0; 0 0 Du; 1 0 0];
```

```
G = ss(Ag, Bg, Cg, Dg);
```

```
%Kontrol H-infinity
```

```
G = pck(Ag, Bg, Cg, Dg);
```

```
[K, Cl, gamm] = hinfsyn(G, 1, 1, 0, 10, 0.0001);
```

```
%-----Singular Value Test-----
```

```
figure(1)
```

```
omega = logspace(6, 10, 100);
```

```
clp_g1 = frsp(Cl, omega);
```

```
vplot('liv, lm', vsvd
```

```
(clp_g1), vsvd(frsp(gamm, omega)));
```

```
title('Singular Value Cloose Loop')
```

```
xlabel('Frequency(rad/sec)')
```

```
ylabel('Singular value')
```

```
legend('Clp', 'Gamm')
```

```
grid
```

```
hold on
```

```
A = [-0.2 50 70 0; 0 -3 -2 0; 0 1 0 0; 0 0 0 -10];
```

```
B = [1 0; 0 1; 0 0; 0 0];
```

```
C = [2 0 0 0; 0 0 0 -9];
```

```
D = [0 0; 0 0];
```

```
Gwc = pck(A, B, C, D);
```

```
Gwcl = ss(A, B, C, D);
```

```
norm(Gwcl, 'Inf')
```

```
figure(2)
```

```
omega = logspace(-3, 3, 1600);
```

```
clp_g2 = frsp(Gwc, omega);
```

```
vplot('liv, lm', vsvd (clp_g2));
```

```
title('Singular Value Sistem tanpa Kontrol')
```

```
xlabel('Frequency(rad/sec)')
```

```
ylabel('Singular Value')
```

```
grid
```

LAMPIRAN 8

Source Code Contoh 2

```

%Plant dari mass-spring-damper
k1 = 1; k2 =4;
b1 =0.2; b2 =0.1;
m1=1; m2 =2;

Ap = [0 0 1 0; 0 0 0 1;
      -k1/m1 k1/m1 -b1/m1 b1/m1;
      k1/m2 -(k1+k2)/m2 b1/m2 -(b1+b2)/m2];
Bp1 = [0;0;1/m1;0];
Bp2 = [0;0;0;1/m2];
Cp = [1 0 0 0;0 1 0 0];
Dp = [0 0;0 0];

P = ss(Ap, [Bp1 Bp2], Cp, Dp);

% Fungsi Bobot Wn
wn11 = nd2sys([0.01 0.1], [1 100]);
wn12 =0;
wn21 =0;
wn22 = nd2sys([0.01 0.1], [1 100]);
Wn = sbs(abv(wn11, wn21), abv(wn12, wn22));
[An, Bn, Cn, Dn] = unpck(Wn);

%Fungsi Bobot Wu
numWu = [1 5];
denWu = [1 50];
[Au, Bu, Cu, Du]=tf2ss(numWu, denWu);
Wu = pck(Au, Bu, Cu, Du);

```

```

%=====
%Kondisi W2 =0
%=====

%Fungsi Bobot We
we11= nd2sys(5, [0.5,1]);
we12 = 0;
we21 = 0;
we22= 0;
We = sbs(abv(we11,we21),abv(we12,we22));
[Ae,Be,Ce,De] = unpck(We);

%%General Plant
Ag = [Ae,0,Be*Cp,zeros(1,2);
      0,Au,zeros(1,4),zeros(1,2);
      zeros(4,1),zeros(4,1),Ap,zeros(4,2);
      zeros(2,1),zeros(2,1),zeros(2,4),An];
B1 = [0,zeros(1,2);zeros(1,1),zeros(1,2);
      Bp1 zeros(4,2);zeros(2,1),Bn];
B2 = [zeros(1,1);Bu;Bp2;zeros(2,1)];
C1 = [Ce,zeros(2,1),De*Cp,zeros(2,2);
      0,Cu,zeros(1,4),zeros(1,2)];
C2 = [zeros(2,1),zeros(2,1),Cp,Cn];
D11 = [zeros(2,2) zeros(2,1);
       zeros(1,2) zeros(1,1)];
D12 = [zeros(2,1);Du];
D21 = [zeros(2,1) Dn];
D22 = [zeros(2,1)];

%
G = pck(Ag,[B1 B2],[C1;C2],[D11 D12;D21 D22]);
[K,Cl,gamm] = hinfsyn(G,2,1,0,10,0.0001);

figure(1)
P = pck(Ap,[Bp1 Bp2],Cp,Dp);
omega = logspace(6,12,100);
clp_g = frsp(Cl,omega);
vplot('liv,lm',vsvd
      (clp_g),vsvd(frsp(gamm,omega)));
title('Nilai Singular Value Cloose Loop')

```

```

xlabel('Frequency(rad/sec)')
ylabel('Singular value')
legend('Clp','Gamm')
grid

hold on
Awc=Ag;
Bwc =B1;
Cwc = C1;
Dwc = D11;
Gwc = pck(Awc,Bwc,Cwc,Dwc);
Gwc1 = ss(Awc,Bwc,Cwc,Dwc);
norm(Gwc1,'Inf')
figure(2)
omega = logspace(-5,5,1600);
clp_g2 = frsp(Gwc,omega);
vplot('liv,lm',vsvd(clp_g2));
title('Singular Value Sistem tanpa Kontrol')
xlabel('Frequency(rad/sec)')
ylabel('Singular Value')
grid

%=====
% Kondisi W1 =0
%=====
%Fungsi Bobot We
we22= nd2sys(5,[0.5,1]);
we12 = 0;
we21 = 0;
we11= 0;
We = sbs(abv(we11,we21),abv(we12,we22));
[Ae,Be,Ce,De] = unpck(We);

%%General Plant
Ag =[Ae,0,Be*Cp,zeros(1,2);
    0,Au,zeros(1,4),zeros(1,2);
    zeros(4,1),zeros(4,1),Ap,zeros(4,2);
    zeros(2,1),zeros(2,1),zeros(2,4),An];
B1 =[0,zeros(1,2);zeros(1,1),zeros(1,2);

```



```

    Bp1 = zeros(4,2); zeros(2,1), Bn];
    B2 = [zeros(1,1); Bu; Bp2; zeros(2,1)];
    C1 = [Ce, zeros(2,1), De*Cp, zeros(2,2);
          0, Cu, zeros(1,4), zeros(1,2)];
    C2 = [zeros(2,1), zeros(2,1), Cp, Cn];
    D11 = [zeros(2,2) zeros(2,1);
           zeros(1,2) zeros(1,1)];
    D12 = [zeros(2,1); Du];
    D21 = [zeros(2,1) Dn];
    D22 = [zeros(2,1)];
%
G = pck(Ag, [B1 B2], [C1;C2], [D11 D12;D21 D22]);
[K,C1,gamm] = hinfsyn(G,2,1,0,10,0.001);

```

```

figure(2)
P = pck(Ap, [Bp1 Bp2], Cp, Dp);
omega = logspace(-1,3,200);
clp_g = frsp(C1,omega);
vplot('liv,lm', vsvd
      (clp_g), vsvd(frsp(gamm,omega)));
title('Nilai Singular Value Cloose Loop')
xlabel('Frequency(rad/sec)')
ylabel('Singular value')
legend('Clp','Gamm')
grid

```

```

Awc=Ag;
Bwc =B1;
Cwc = C1;
Dwc = D11;
Gwc = pck(Awc,Bwc,Cwc,Dwc);
Gwc1 = ss(Awc,Bwc,Cwc,Dwc);
norm(Gwc1,'Inf')
figure(4)
omega = logspace(-5,5,800);
clp_g2 = frsp(Gwc,omega);
vplot('liv,lm', vsvd (clp_g2));
title('Singular Value Sistem tanpa Kontrol')
xlabel('Frequency(rad/sec)')
ylabel('Singular Value')

```

```

grid
%=====
% Kondisi W1=W2
%=====
we11= nd2sys(5,[0.5,1]);
we12 = 0;
we21 = 0;
we22= nd2sys(5,[0.5,1]);
We = sbs(abv(we11,we21),abv(we12,we22));
[Ae,Be,Ce,De] = unpck(We);

%General Plant
Ag3 =[Ae,zeros(2,1),Be*Cp,zeros(2,2);
      zeros(1,2),Au,zeros(1,4),zeros(1,2);
      zeros(4,2),zeros(4,1),Ap,zeros(4,2);
      zeros(2,2),zeros(2,1),zeros(2,4),An];
B1=[zeros(2,1),zeros(2,2);
    zeros(1,1),zeros(1,2);
    Bp1,zeros(4,2);
    zeros(2,1),Bn];
B2=[zeros(2,1);Bu;Bp2;zeros(2,1)];
C1 =[Ce,zeros(2,1),zeros(2,4),zeros(2,2);
     zeros(1,2),Cu,zeros(1,4),zeros(1,2)];
C2 = [zeros(2,2),zeros(2,1),Cp,Cn];
D11 =[zeros(2,1),zeros(2,2);0,zeros(1,2)];
D12 =[zeros(2,1);Du];
D21 =[zeros(2,1),Dn];
D22 =[zeros(2,1)];

G = pck(Ag3,[B1 B2],[C1;C2],[D11 D12;D21 D22]);
[K,Cl,gamm] = hinfsyn(G,2,1,0,10,0.0001);

figure(3)
P = pck(Ap,[Bp1 Bp2],Cp,Dp);
omega = logspace(0,5,200);
clp_g = frsp(Cl,omega);
vplot('liv,lm',vsvd
      (clp_g),vsvd(frsp(gamm,omega)));
title('Nilai Singular Value Cloose Loop')
xlabel('Frequency(rad/sec)')

```

```
ylabel('Singular value')
legend('Clp','Gamm')
grid

hold on

Awc=Ag3;
Bwc =B1;
Cwc = C1;
Dwc = D11;
Gwc = pck(Awc,Bwc,Cwc,Dwc);
Gwc1 = ss(Awc,Bwc,Cwc,Dwc);
norm(Gwc1,'Inf')
figure(6)
omega = logspace(-5,6,1600);
clp_g2 = frsp(Gwc,omega);
vplot('liv,lm',svd(clp_g2));
title('Singular Value Sistem tanpa Kontrol')
xlabel('Frequency(rad/sec)')
ylabel('Singular Value')
grid
```

BIODATA PENULIS



Hayu Marta Febrian atau biasa disapa Hayu lahir di Blitar, 11 Februari 1997. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai TK Darmawanita Bendo II, SDN Bendo 1, SMP Negeri 1 Srengat dan SMA Negeri 1 Blitar, kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Departemen Matematika ITS Surabaya pada tahun 2015, disini penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan.

Selama kuliah, penulis aktif di organisasi tingkat jurusan dan fakultas yakni HIMATIKA ITS dan BEM FMIPA ITS. Pada tahun 2016-2017 penulis menjadi anggota aktif HIMATIKA ITS sebagai Staff Departemen *Social Development* (SOCDEV) serta aktif sebagai Staff Departemen RESDEV (*Research Development*) BEM FMIPA ITS dan tahun 2017-2018 penulis tetap aktif di HIMATIKA ITS sebagai Kepala Divisi Pengajaran Departemen *Community Service*. Selain itu penulis juga aktif dalam komunitas sosial di luar kampus yaitu komunitas 1000 Guru Surabaya. Demikian biodata tentang penulis. Jika ingin memberikan saran, kritik, dan informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini, dapat melalui email hayumartha@gmail.com.

