



Tugas Akhir - KM184801

**KAJIAN PEMODELAN PENENTUAN HARGA  
OBLIGASI BENCANA UNTUK RISIKO BENCANA  
ALAM DALAM BIDANG PERTANIAN**

AJENG PUSPITANINGRUM  
NRP. 0611154000005

Dosen Pembimbing:  
Endah R.M.Putri, S.Si, MT, Ph.D  
Wawan Hafid S., M.Si, M.Act.Sc

**DEPARTEMEN MATEMATIKA**  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2019





Tugas Akhir - KM184801

**KAJIAN PEMODELAN PENENTUAN HARGA  
OBLIGASI BENCANA UNTUK RISIKO BENCANA  
ALAM DALAM BIDANG PERTANIAN**

AJENG PUSPITANINGRUM  
NRP. 06111540000005

Dosen Pembimbing:  
Endah R.M.Putri, S.Si, MT, Ph.D  
Wawan Hafid S., M.Si, M.Act.Sc

**DEPARTEMEN MATEMATIKA**  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2019





FINAL PROJECT - KM184801

**A STUDY OF PRICING CATASTROPHIC BONDS FOR  
CATASTROPHIC RISK OF AGRICULTURE MODELLING**

AJENG PUSPITANINGRUM  
NRP 0611154000005

Supervisors :  
Endah R.M.Putri, S.Si, MT, Ph.D  
Wawan Hafid S., M.Si, M.Act.Sc

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Mathematics, Computation, and Data Sciences  
Sepuluh Nopember Institut of Technology  
Surabaya 2019



**LEMBAR PENGESAHAN**

**KAJIAN PEMODELAN PENENTUAN HARGA OBLIGASI  
BENCANA UNTUK RISIKO BENCANA ALAM DALAM BIDANG  
PERTANIAN**

***A STUDY OF PRICING CATASTROPHIC BONDS FOR  
CATASTROPHIC RISK OF AGRICULTURE MODELLING***

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika  
Pada Bidang Studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Departemen Matematika  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh

**AJENG PUSPITANINGRUM**

**NRP. 06111540000005**

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,



Wawan Hafid S., M.Si, M.Act.Sc

Endah R.M.Putri, S.Si, MT, Ph.D

NIP. 1992201911068

NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika

FMKSD ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT

NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 25 Juli 2019







# KAJIAN PEMODELAN PENENTUAN HARGA OBLIGASI BENCANA UNTUK RISIKO BENCANA ALAM DALAM BIDANG PERTANIAN

Nama Mahasiswa : Ajeng Puspitaningrum  
NRP : 06111540000005  
Departemen : Matematika FMKSD-ITS  
Pembimbing : 1. Endah R.M.Putri, S.Si, MT, Ph.D  
2. Wawan Hafid S., M.Si, M.Act.Sc

## Abstrak

*Bencana kekeringan menyebabkan sektor pertanian mengalami kerugian yang cukup besar sehingga diperlukan suatu alternatif untuk memindahkan risiko yaitu dengan obligasi bencana. Obligasi bencana merupakan suatu produk sekuritas yang berguna untuk mengelola risiko akibat kerugian dari bencana alam. Pada Tugas Akhir ini, dilakukan penjabaran terhadap model penentuan harga obligasi bencana sehingga ditemukan solusi analitik untuk menentukan harga obligasi bencana. Berdasarkan mekanisme obligasi bencana, proses penjabaran dilakukan terhadap empat komponen model penentuan harga obligasi bencana, antara lain: model pembayaran kupon mengambang, model pembayaran spread tetap, model pembayaran nilai nominal, dan model pembayaran sisa nilai nominal. Simulasi solusi analitik menghasilkan bahwa semakin tinggi tingkat recovery dan tingkat spread kupon, semakin tinggi pula harga obligasi bencana pada saat waktu penerbitan. Berdasarkan periode pembayaran kupon, harga obligasi bencana terhadap tingkat recovery dengan periode quarterly memiliki nilai yang lebih tinggi dibandingkan annually dan semi-annually. Selain itu, harga obligasi bencana terhadap tingkat spread kupon dengan periode pembayaran kupon annually memiliki fluktuasi harga yang lebih tinggi dibandingkan semi-annually dan quarterly.*

**Kata-kunci:** *Kekeringan, Obligasi Bencana, Pertanian, Proses Poisson Non-Homogen*



# A STUDY OF PRICING CATASTROPHIC BONDS FOR CATASTROPHIC RISK OF AGRICULTURE MODELLING

Name : Ajeng Puspitaningrum  
NRP : 06111540000005  
Department : Matematika FMKSD-ITS  
Supervisors : 1. Endah R.M.Putri, S.Si, MT, Ph.D  
2. Wawan Hafid S., M.Si, M.Act.Sc

## Abstract

*The drought has caused huge agricultural losses because the crop production has fallen. Therefore, the catastrophe bond is used as an alternative to transferring the catastrophe risk to the capital market. A catastrophe bond is a securities product in managing the catastrophe risk. In this study, the derivation of the model is used to find the analytical solution for pricing of the catastrophe bond. The catastrophe is assumed to follow a non-homogeneous Poisson process. Based on the catastrophe bond's mechanism, we evaluate each of four model components such as the floating rate payments model, fixed-rate payments model, face value payment, and residual face value payment. The simulation of analytical solution results the higher the recovery rates and also the higher the coupon spread, the higher will be the bond price at issue. Furthermore, based on coupon periodic payment the catastrophe bond's price with quarterly of recovery rate is higher than annually and semi-annually. At last, the catastrophe bond's price with annually coupon payment of spread rate has higher price fluctuation than quarterly and semi-annually coupon payments.*

**Keywords:** *Catastrophe bond, Drought, Non-homogeneous Poisson process, Agricultural*



## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhaanahu Wa Ta'aala yang telah memberikan limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini yang berjudul

### **”KAJIAN PEMODELAN PENENTUAN HARGA OBLIGASI BENCANA UNTUK RISIKO BENCANA ALAM DALAM BIDANG PERTANIAN”**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, MT selaku Kepala Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Ibu Endah R.M.Putri, S.Si, MT, Ph.D dan Bapak Wawan Hafid S., M.Si, M.Act.Sc selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Ibu Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes, Ibu Dra. Farida Agustini Widjajati, MS., dan Ibu Alvida Mustika Rukmi, S.Si, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan semua saran demi perbaikan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku koordinator Tugas Akhir dan Mas Ali yang selalu memberikan informasi mengenai Tugas Akhir.

5. Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. Ayah, Ibu, dan Opal yang selalu mendoakan, menguatkan, dan mendukung penulis sehingga penulis bisa sampai saat ini.
8. Amira, Ami, Widiya, Triana, Ratih, dan Haposan yang selalu memberikan doa, dukungan, semangat, dan fasilitas selama penulis mengerjakan Tugas Akhir.
9. M15-50 yang selalu memberikan semangat lebih khususnya GAP yang selalu memberikan dukungan dan dorongan agar bisa menyelesaikan Tugas Akhir ini.
10. Anak-anak Umik yang saling mendukung dan memotivasi satu sama lain.
11. Venansius Ryan yang membantu dan mengarahkan penulis dalam pengerjaan program MATLAB.
12. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu. Terimakasih telah mendoakan dan mendukung penulis.

Penulis juga menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhir kata, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat membawa manfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Juli 2019

Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> . . . . .	<b>vi</b>
<b>ABSTRAK</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>xi</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	<b>xv</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> . . . . .	<b>xix</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> . . . . .	<b>xxi</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> . . . . .	<b>xxiii</b>
<b>DAFTAR SIMBOL</b> . . . . .	<b>xxv</b>
<b>1 BAB I</b>	
<b>PENDAHULUAN</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3 Batasan Masalah . . . . .	3
1.4 Tujuan . . . . .	4
1.5 Manfaat . . . . .	4
1.6 Sistematika Penulisan . . . . .	5
<b>2 BAB II</b>	
<b>TINJAUAN PUSTAKA</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1 Penelitian Terdahulu . . . . .	7
2.2 Konsep <i>Time Value of Money</i> . . . . .	8
2.3 Arbitrase . . . . .	14

2.4	Obligasi . . . . .	14
2.4.1	Obligasi Tanpa Kupon ( <i>Zero Coupon Bond</i> )	16
2.4.2	Obligasi dengan Kupon ( <i>Coupon Bonds</i> ) .	17
2.5	<i>The Term Structure of Interest Rates</i> . . . . .	18
2.6	Obligasi Bencana . . . . .	19
2.7	Model Penentuan Harga Obligasi Bencana . . . . .	21
2.8	London Interbank Offered Rate (LIBOR) . . . . .	23
2.9	Fungsi Indikator . . . . .	23
2.10	Nilai Ekspektasi ( <i>Expected Value</i> ) . . . . .	24
2.11	Proses Stokastik . . . . .	26
2.11.1	Proses Stokastik Waktu Kontinu . . . . .	26
2.12	Proses Poisson . . . . .	27
2.12.1	Peubah Acak Eksponensial . . . . .	27
2.12.2	Peubah Acak Poisson . . . . .	27
2.13	$\sigma$ -Aljabar . . . . .	30
2.14	Konsep Ukuran . . . . .	31
2.15	Martingale . . . . .	32
<b>3</b>	<b>BAB III</b>	
	<b>METODE PENELITIAN . . . . .</b>	<b>33</b>
3.1	Tahapan Penelitian . . . . .	33
3.2	Skema Metode Penelitian . . . . .	36
<b>4</b>	<b>BAB IV</b>	
	<b>ANALISIS DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>37</b>
4.1	Penjabaran Model Pembayaran Kupon Mengam- bang ( <i>Floating Rate Payment</i> ) . . . . .	37
4.1.1	Penjabaran Model Pembayaran Kupon Per- tama . . . . .	44
4.1.2	Penjabaran Model Pembayaran Sisa Kupon Selanjutnya . . . . .	49
4.2	Penjabaran Model Pembayaran <i>Spread</i> Tetap . . . . .	59
4.3	Penjabaran Model Pembayaran Nilai Nominal pada Obligasi Bencana . . . . .	65



4.4	Penjabaran Model Pembayaran Sisa Nilai Nominal pada Obligasi Bencana . . . . .	69
4.5	Mendapatkan Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana . . . . .	72
4.6	Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana . . . . .	76
4.6.1	Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana Periode Pembayaran Kupon <i>Annually</i> . . . . .	80
4.6.2	Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana Periode Pembayaran Kupon <i>Semi-Annually</i> . . . . .	84
4.6.3	Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana Periode Pembayaran Kupon <i>Quarterly</i> . . . . .	87
4.6.4	Perbandingan Harga Obligasi Bencana dengan Tingkat <i>Recovery</i> untuk Tiap Periode Pembayaran Kupon . . . . .	91
4.6.5	Perbandingan Harga Obligasi Bencana dengan Tingkat <i>Spread</i> Kupon untuk Tiap Periode Pembayaran Kupon . . . . .	92
4.6.6	Program GUI MATLAB Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana . . . . .	93
<b>5</b>	<b>BAB V</b>	
	<b>PENUTUP</b> . . . . .	<b>97</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	97
5.2	Saran . . . . .	98
	<b>DAFTAR PUSTAKA</b> . . . . .	<b>99</b>
	<b>LAMPIRAN</b> . . . . .	<b>103</b>
	<b>BIODATA PENULIS</b> . . . . .	<b>123</b>



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1	Linimasa Konsep <i>Present Value</i> dan <i>Future Value</i> . . . . . 9
Gambar 2.2	Linimasa Pembayaran Bunga Majemuk . 10
Gambar 2.3	Linimasa Pembayaran Kupon Obligasi . 16
Gambar 2.4	Ilustrasi Mekanisme Obligasi Bencana . 20
Gambar 3.1	Diagram Alir Metode Penelitian . . . . . 36
Gambar 4.1	Linimasa Indeks Waktu Model Penentuan Harga Obligasi Bencana . . . . . 38
Gambar 4.2	Linimasa Waktu Acak Terjadinya Bencana Melebihi Waktu Pembayaran Kupon 39
Gambar 4.3	Linimasa Waktu Acak Terjadinya Bencana Kurang dari Waktu Pembayaran Kupon 40
Gambar 4.4	Ilustrasi Periodik Pembayaran Kupon Bunga 40
Gambar 4.5	Ilustrasi Periodik Pembayaran Kupon Kontinu . . . . . 40
Gambar 4.6	Linimasa Pembayaran Kupon Pertama . 45
Gambar 4.7	Linimasa Pembayaran Kupon Obligasi Bencana . . . . . 50
Gambar 4.8	Linimasa Pembayaran <i>Spread</i> Tetap . . . 60
Gambar 4.9	Linimasa Pembayaran Nilai Nominal . . 66
Gambar 4.10	Linimasa Terjadinya Bencana dalam Obligasi Bencana . . . . . 69
Gambar 4.11	Linimasa Pembayaran Kupon . . . . . 70
Gambar 4.12	Linimasa Asumsi $\tau = s$ . . . . . 71
Gambar 4.13	Hasil Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Annually</i> . . 83
Gambar 4.14	Hasil Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Semi-annually</i> 87

Gambar 4.15	Hasil Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Semi-annually</i>	90
Gambar 4.16	Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat <i>Recovery</i> untuk Periode Pembayaran Kupon Berbeda . . . . .	91
Gambar 4.17	Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat <i>Spread</i> untuk Periode Pembayaran Kupon Berbeda . . . . .	92
Gambar 4.18	Tampilan GUI MATLAB Simulasi Penentuan Harga Obligasi Bencana . . . . .	94
Gambar 4.19	Contoh Hasil <i>Running</i> Program GUI MATLAB Periode Pembayaran Kupon <i>Annually</i>	95
Gambar 4.20	Contoh Hasil <i>Running</i> Program GUI MATLAB Periode Pembayaran Kupon <i>Semi-annually</i> . . . . .	95
Gambar 4.21	Contoh Hasil <i>Running</i> Program GUI MATLAB Periode Pembayaran Kupon <i>Quarterly</i>	96

## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1	Indeks Waktu Model Penentuan Harga Obligasi Bencana . . . . . 38
Tabel 4.2	Nilai Parameter Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana . . . . . 78
Tabel 4.3	Tingkat <i>Spot</i> Berdasarkan Waktu Jatuh Tempo 80
Tabel 4.4	Nilai <i>Discount Factor</i> Berdasarkan Waktu Jatuh Tempo untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Annually</i> . . . . . 81
Tabel 4.5	Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat <i>Recovery</i> untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Annually</i> . . . . . 82
Tabel 4.6	Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat <i>Spread</i> Kupon untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Annually</i> . . . . . 83
Tabel 4.7	Nilai <i>Discount Factor</i> Berdasarkan Waktu Jatuh Tempo untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Semi-annually</i> . . . . . 84
Tabel 4.8	Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat <i>Recovery</i> untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Semi-annually</i> . . . . . 86
Tabel 4.9	Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat <i>Spread</i> Kupon untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Semi-annually</i> . . . . . 86
Tabel 4.10	Nilai <i>Discount Factor</i> Berdasarkan Waktu Jatuh Tempo untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Quarterly</i> . . . . . 89
Tabel 4.11	Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat <i>Recovery</i> untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Quarterly</i> . . . . . 89
Tabel 4.12	Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat <i>Spread</i> Kupon untuk Periode Pembayaran Kupon <i>Quarterly</i> . . . . . 90



## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran A	Pembuktian Teorema pada Nilai Ekspetasi ... 103
Lampiran B	Pembuktian Teorema pada Proses Poisson Non-Homogen. .... 107
Lampiran C	Teorema Fundamental Kalkulus Bagian I ... 111
Lampiran D	<i>Listing Code</i> Program MATLAB Solusi Ana- litik Model Penentuan Harga Obligasi Benca- na. .... 113
Lampiran E	<i>Listing Code</i> Program GUI MATLAB Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana. .... 117





## DAFTAR SIMBOL

$t$	: Waktu penerbitan obligasi bencana
$T$	: Waktu jatuh tempo obligasi bencana
$r$	: Tingkat suku bunga
$C$	: Nilai pengembalian ( <i>redemption value</i> )
$n$	: Jumlah frekuensi pembayaran kupon
$j$	: Tingkat imbal hasil ( <i>yield</i> )
$v$	: Faktor diskonto ( <i>discount factor</i> )
$\Delta$	: Periode pembayaran kupon
$k$	: Rentang waktu dari waktu $t$ penerbitan : hingga tanggal pembayaran kupon pertama $t + k$
$K$	: Jumlah pembayaran kupon
$B(t)$	: Harga obligasi bencana pada waktu $t$
$L_t$	: Tingkat forward dari Libor pada waktu $t$
$l_t$	: Tingkat <i>spot</i> dari Libor pada waktu $t$
$\theta$	: Jarak antara tingkat <i>forward</i> dan tingkat <i>spot</i> pada waktu $t + k$
$c$	: Tingkat <i>spread</i> yang diterima oleh para investor
$A$	: Nilai nominal obligasi bencana
$\tau$	: Waktu acak terjadinya bencana
$FV_s$	: Nilai di masa mendatang ( <i>future value</i> ) bunga sederhana
$FV_m$	: Nilai di masa mendatang ( <i>future value</i> ) bunga majemuk
$PV_m$	: Nilai saat ini ( <i>present value</i> ) bunga majemuk
$Y_\tau$	: Sisa nilai nominal yang diterima oleh investor bencana setelah nilai nominal dikurangi oleh sejumlah nilai dari kerugian yang dialami
$p(t, T)$	: Harga obligasi tanpa kupon pada waktu $t$ dengan waktu jatuh tempo $T$
$a_{\overline{n}}$	: Nilai saat ini ( <i>present value</i> ) anuitas akhir



# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang menjadi latar belakang munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini, kemudian dari permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan batasan masalah untuk memperoleh tujuan serta manfaat. Sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

### **1.1 Latar Belakang**

Berdasarkan Undang-Undang Nomor 24 Tahun 2007 tentang penanggulangan bencana, bencana alam didefinisikan sebagai bencana yang diakibatkan oleh peristiwa atau serangkaian peristiwa yang disebabkan oleh alam antara lain berupa gempa bumi, tsunami, gunung meletus, banjir, kekeringan, angin topan dan tanah longsor[1]. Bencana alam merupakan kejadian yang sulit untuk diprediksi dan menimbulkan kerugian yang cukup besar.

Pada Tugas Akhir ini dibahas mengenai bencana kekeringan. Secara umum kekeringan dapat diartikan sebagai kondisi kekurangan air pada suatu wilayah dalam periode waktu cukup panjang akibat kurangnya curah hujan. Sepanjang sejarah kehidupan manusia, kekeringan merupakan masalah yang sangat berpengaruh terhadap ketahanan pangan dan kesejahteraan masyarakat di berbagai belahan dunia. Dari semua sektor, pertanian adalah sektor yang paling parah terdampak kekeringan, karena memiliki hubungan yang signifikan terhadap cuaca atau iklim dan tanaman. Kekeringan pertanian adalah suatu periode di mana terjadi penurunan kelembaban tanah yang menyebabkan kegagalan tanaman tanpa memperhitungkan sumberdaya air permukaan. Kondisi ini menyebabkan sulitnya mendapatkan air untuk irigasi pertanian sehingga mengganggu sistem dan produksi tanaman pertanian karena ketika air tidak ada maka tidak ada satupun tanaman yang hidup, walaupun tanaman tersebut hidup sudah dapat dipastikan tumbuh gagal panen. Bencana kekeringan ini menyebabkan sektor agraris mengalami risiko kerugian yang

cukup besar dikarenakan sejumlah lahan pertanian terancam gagal panen sehingga berdampak terhadap produktivitas hasil tanaman pangan akan terancam menurun jauh dari optimal. Seperti halnya yang terjadi di negara Kenya, sebuah negara yang terletak di Afrika Timur di mana sebagian besar penduduknya bermata pencaharian di sektor agraris. Kenya merupakan sebuah negara tropis, sehingga memiliki dua musim yaitu musim penghujan dan musim kemarau. Bencana kekeringan yang melanda Kenya pada musim kemarau menyebabkan sebagian besar lahan pertanian mengalami gagal panen, khususnya tanaman jagung, tebu, teh dan kacang. Bencana ini menyebabkan produktivitas tanaman pangan menurun drastis sehingga akibatnya berdasarkan data pemerintahan Kenya pada tahun 2010 sekitar 4,7 juta warga Kenya menderita risiko malnutrisi dan kelaparan [2].

Kerugian besar akibat bencana alam khususnya kekeringan mendorong pemerintah dan lembaga sosial akan saling bekerjasama untuk memberikan bantuan demi mengganti kerugian akibat bencana tersebut, namun hal ini hanya menutupi sebagian kecil dari kerugian yang dialami. Oleh karena itu sangat penting untuk menutupi kerugian besar tersebut dengan metode yang lebih baik, salah satunya adalah mengasuransikan risiko atau kerugian yang mungkin dialami oleh seseorang jika terjadi bencana. Pada umumnya perusahaan asuransi memindahkan risiko bencana yang ditanggungnya kepada perusahaan reasuransi. Namun kapasitas dari perusahaan asuransi dan reasuransi tidak mencukupi ketika harus berhadapan dengan risiko bencana. Sehingga ditemukan sebuah gagasan mengapa asuransi tidak dihubungkan dengan instrumen keuangan, seperti opsi, obligasi, dan sebagainya. Ilmuwan berlomba-lomba dalam mengembangkan teorinya sampai pada akhirnya ditemukan bahwa risiko yang ditimbulkan dari bencana alam banyak diminati konsumen jika dihubungkan dengan obligasi. Inilah yang dikenal sebagai *catastrophe bond* (CAT Bond) atau obligasi bencana [3]. Ketika pemerintahan maupun institusi menerbitkan obligasi bencana yang dipicu oleh suatu indeks, obligasi bencana dapat menyalurkan dana ganti rugi kepada para korban berdasarkan kerugian yang diamati.

Obligasi memiliki arti surat hutang jangka menengah-panjang yang dapat dipindahtangankan, yang berisi janji dari pihak yang menerbitkan untuk membayar imbalan berupa bunga atau kupon pada periode tertentu dan melunasi nominal hutang pada waktu yang telah ditentukan kepada pihak pembeli obligasi. Oleh karena itu, obligasi bencana alam dapat diartikan sebagai suatu produk sekuritas yang berguna untuk mengelola risiko akibat kerugian dari bencana alam seperti gempa bumi, badai, tsunami dan sebagainya [4]. Pada kenyataannya, di Indonesia belum terdapat obligasi bencana yang ditawarkan oleh pemerintah maupun perusahaan asuransi dikarenakan Indonesia belum memiliki data yang mencukupi untuk digunakan pemerintah ataupun perusahaan asuransi sebagai acuan dalam menentukan harga obligasi bencana[5]. Pada Tugas Akhir ini dilakukan kajian terkait pemodelan penentuan harga dari obligasi bencana terhadap risiko kegagalan sektor agraris dengan menggunakan *closed-form pricing models* yang dikembangkan oleh Jarrow (2010).

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah dalam Tugas Akhir ini antara lain:

1. Bagaimana mendapatkan solusi analitik untuk menentukan harga obligasi bencana ?
2. Bagaimana analisa hasil simulasi solusi analitik penentuan harga obligasi bencana untuk mengetahui pengaruh tingkat *recovery* dan tingkat *spread* kupon terhadap harga obligasi bencana ?

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini antara lain:

1. Peristiwa kekeringan yang dimaksud adalah apabila curah hujan yang terjadi di daerah yang tertera dalam kontrak obligasi dibawah 50% dari kondisi normal[6].
2. Bencana yang terjadi di daerah yang tertera dalam kontrak obligasi bencana diasumsikan mengikuti proses Poisson non-homogen.
3. Kondisi investasinya adalah tidak ada kesempatan untuk arbitrase (*arbitrage-free*).
4. Model penentuan harga obligasi bencana yang digunakan merupakan model penentuan harga obligasi bencana (CAT Bond) yang telah dikembangkan oleh Jarrow (2010).
5. *Software* yang digunakan dalam simulasi menggunakan *software* MATLAB versi R2017a .
6. Tugas Akhir ini tidak menggunakan data historis curah hujan, data historis bencana kekeringan, dan data kurva obligasi tanpa kupon sebagai inputan terhadap simulasi.

#### 1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan dari Tugas Akhir ini antara lain:

1. Mendapatkan solusi analitik untuk menentukan harga obligasi bencana.
2. Menganalisa hasil simulasi solusi analitik penentuan harga obligasi bencana untuk mengetahui pengaruh tingkat *recovery* dan tingkat *spread* kupon terhadap harga obligasi bencana.

#### 1.5 Manfaat

Tugas Akhir ini memberikan manfaat antara lain:

1. Sebagai suatu bahan studi mengenai penjabaran tentang model penentuan harga obligasi bencana.

2. Sebagai bahan dasar studi kepada penelitian selanjutnya dalam penentuan harga obligasi bencana.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini secara keseluruhan terdiri dari lima bab dan lampiran, secara garis besar dalam masing-masing bab dibahas hal-hal sebagai berikut:

### 1. BAB I PENDAHULUAN

Pada bab I dijelaskan gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

### 2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab II diuraikan tentang teori-teori utama maupun penunjang yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir, antara lain penelitian terdahulu, obligasi, obligasi bencana, London Interbank Offered Rate (LIBOR), nilai ekspektasi, fungsi indikator, konsep *time value of money*, arbitrase, *the term structure of interest rates*, model penentuan harga obligasi bencana, proses stokastik, dan proses Poisson. Teori-teori tersebut digunakan sebagai acuan dalam pengerjaan Tugas Akhir ini.

### 3. BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab III dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan tersebut adalah studi literatur, penjabaran model penentuan harga obligasi bencana, selanjutnya dilakukan simulasi terhadap solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana untuk mengetahui pengaruh tingkat pengembalian (*recovery*) dan tingkat *spread* kupon terhadap harga obligasi bencana. Tahap terakhir adalah penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan.

### 4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab IV membahas tentang penjabaran dari tiap kompo-

nen model penentuan harga obligasi bencana yang meliputi model pembayaran kupon mengambang yang diterima hingga bencana terjadi, model pembayaran tetap *spread* yang diterima hingga sebuah bencana terjadi, model pembayaran nilai nominal jika tidak terjadi bencana, dan model sisa pembayaran nilai nominal jika terjadi bencana. Selanjutnya, akan ditemukan solusi analitik dari hasil penjabaran masing-masing komponen model penentuan harga obligasi bencana. Kemudian, dilakukan simulasi terhadap solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana serta analisis hasil simulasi untuk mengetahui pengaruh tingkat pengembalian (*recovery*) dan tingkat *spread* kupon terhadap harga obligasi bencana.

## 5. BAB V PENUTUP

Pada bab V berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisis dan pembahasan Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.



## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini dijelaskan tentang teori-teori utama maupun penunjang yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir, antara lain obligasi, obligasi bencana, London Interbank Offered Rate (LIBOR), fungsi indikator, konsep *time value of money*, arbitrase, nilai ekspektasi, *the term structure of interest rates*, model penentuan harga obligasi bencana, proses stokastik, dan proses Poisson. Teori-teori tersebut digunakan sebagai acuan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

#### **2.1 Penelitian Terdahulu**

Penulisan dalam Tugas Akhir ini merujuk pada beberapa penelitian-penelitian sebelumnya yang sesuai dengan topik yang diambil. Rujukan pertama yang digunakan adalah penelitian yang dilakukan oleh Robert A. Jarrow pada tahun 2010 dengan judul "*A Simple Robust Model for a Cat Bond Valuation*" [4]. Dalam penelitiannya, dihasilkan *closed form solution* untuk menentukan harga obligasi bencana (*CAT Bond*). Variabel kunci yang diperlukan dalam formula ini antara lain kemungkinan terjadinya bencana pada waktu tertentu serta tingkat persentase kerugian yang dialami apabila bencana terjadi.

Penulis juga mengambil rujukan yang ditulis oleh Lin Sun, Calum G. Turvey, dan Robert A. Jarrow pada tahun 2015 yang berjudul "*Designing Catastrophic Bonds for Catastrophic Risks in Agriculture*" [2]. Pada penelitian tersebut, penentuan harga obligasi bencana (*CAT Bond*) dihasilkan berdasarkan model penentuan harga *CAT Bond* yang dikembangkan Jarrow (2010) yang diterapkan pada beberapa penyebab risiko bencana kekeringan di Kenya. Berdasarkan penelitian tersebut ditemukan bahwa metode penentuan harga yang digunakan memiliki ketahanan dan konsistensi dibawah pengaturan yang berbeda.

## 2.2 Konsep *Time Value of Money*

Terdapat aspek yang sangat penting diperlukan dalam analisa transaksi keuangan yaitu *time value of money* atau dalam bahasa Indonesia diartikan sebagai nilai waktu dari uang merupakan sebuah konsep yang menyatakan bahwa nilai uang sekarang akan lebih berharga daripada nilai uang di masa yang akan datang. Sebagai contoh, nilai uang Rp.100 yang diterima saat ini akan lebih berharga atau memiliki nilai yang lebih tinggi dibandingkan dengan Rp.100 yang akan diterima di masa akan datang. Hal tersebut dikarenakan nilai uang akan berubah menurut waktu yang disebabkan oleh banyak faktor yang mempengaruhinya seperti adanya inflasi, perubahan suku bunga, dan lain-lain. Konsep *time value of money* digunakan untuk mengetahui apakah investasi yang dilakukan dapat memberikan keuntungan atau tidak. Untuk menganalisa transaksi keuangan, dibutuhkan pemahaman terhadap bunga (*interest*)[7].

Bunga didefinisikan sebagai pembayaran terhadap pinjaman yang dibayarkan oleh pihak peminjam kepada pihak pemberi pinjaman atas kesempatan meminjam uang selama periode waktu. Sedangkan suku bunga (*interest rate*) adalah jumlah bunga yang harus dibayarkan selama periode waktu. Suku bunga biasanya dinyatakan dalam persentase tahunan. Jika sejumlah  $A$  yang dinamakan sebagai nilai nominal dipinjam di mana nilai nominal tersebut harus dibayarkan pada waktu  $T$  dengan suku bunga  $r$  per satuan waktu  $T$ , maka jumlah yang harus dibayarkan pada waktu  $T$  ialah:

$$A + rA = A(1 + r).$$

Kenaikan investasi dapat ditentukan dengan bunga sederhana (*simple interest*) dan bunga majemuk (*compound interest*). Bunga sederhana (*simple interest*) digunakan ketika mengitung alur transaksi dalam rentang waktu yang pendek.

### **Definisi 2.1.** (*Akumulasi Bunga Sederhana*)[7]

*Akumulasi bunga dari waktu 0 hingga waktu  $T$  dengan tingkat suku bunga  $r$ , dengan waktu  $T$  dalam tahun yaitu*

$$FV_s = 1 + rT \quad (2.1)$$

dengan  $FV_s$  menyatakan nilai akumulasi bunga sederhana pada waktu  $T$  atau menyatakan nilai masa mendatang (*future value*) bunga sederhana.

Persamaan 2.1 menjelaskan bahwa tingkat suku bunga adalah sebesar  $r$  per tahun. Apabila jumlah awal yang diinvestasikan adalah sebesar 1, maka nilai tersebut akan mengalami peningkatan menjadi  $1 + r$  pada akhir tahun. Sedangkan bunga majemuk (*compound interest*) memiliki bunga yang berubah-ubah dengan besar bunga setiap periodenya tidak sama karena yang menjadi dasar dalam perhitungan bunga majemuk ialah jumlah nominal periode sebelumnya ditambah dengan bunga yang diperoleh sekarang. Sehingga dengan tingkat bunga yang sama besarnya bunga yang diperoleh akan semakin besar.

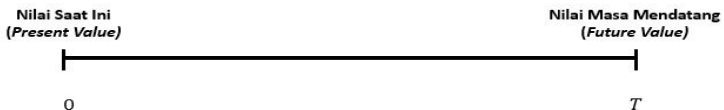
**Definisi 2.2.** (*Akumulasi Bunga Majemuk*)[7]

*Akumulasi bunga dari waktu 0 hingga waktu  $T$  dengan tingkat suku bunga  $r$ , dengan waktu  $T$  dalam tahun yaitu*

$$FV_m = (1 + r)^T \quad (2.2)$$

dengan  $FV_m$  menyatakan nilai akumulasi bunga majemuk pada waktu  $T$  atau menyatakan nilai masa mendatang (*future value*) bunga majemuk.

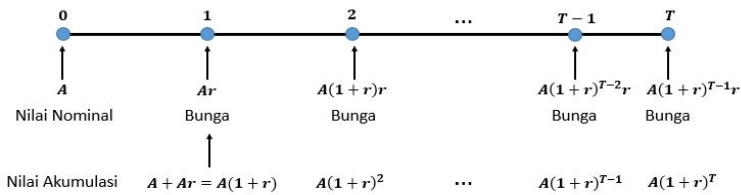
Persamaan 2.2 menjelaskan bahwa jika terdapat sejumlah nilai nominal di masa sekarang, maka nilai tersebut di masa mendatang (*future value*) diperoleh dari nilai nominal ditambah dengan jumlah bunga yang diperoleh selama periode waktu tersebut. Pada Gambar 2.1 ditunjukkan ilustrasi terhadap linimasa (diagram waktu) dari konsep *time value of money* dalam rentang waktu  $[0, T]$ .



**Gambar 2.1.** Linimasa Konsep *Present Value* dan *Future Value*

Untuk menghitung nilai masa mendatang (*future value*) dengan konsep bunga majemuk yakni jika dengan tingkat suku bunga

tahunan sebesar  $r$ , dilakukan deposit sebanyak  $A$  maka akan menghasilkan bunga sebesar  $Ar$  pada tahun tersebut. Sehingga jumlah atau akumulasi bunga yang akan diterima (*future value*) menjadi  $A + Ar = A(1 + r)$ . Jika jumlah bunga tersebut diinvestasikan kembali dan menjadi deposit untuk tahun berikutnya, maka bunga yang diterima pada tahun kedua menjadi  $A(1 + r)r$ , sehingga akumulasi bunga sebesar  $A(1 + r) + A(1 + r)r = A(1 + r)^2$ . Proses tersebut akan berlanjut hingga  $T$  tahun sehingga akumulasi bunga majemuk sebesar  $A(1 + r)^T$ .



**Gambar 2.2.** Linimasa Pembayaran Bunga Majemuk

Pada Gambar 2.2 ditunjukkan linimasa (diagram waktu) akumulasi bunga majemuk. Jumlah akumulasi dari investasi pada waktu  $T$  dengan jumlah nilai awal investasi yaitu  $PV_m$  dengan menggunakan konsep bunga majemuk memiliki nilai akumulasi pada waktu  $T$  adalah:

$$FV_m = PV_m(1 + r)^T \quad (2.3)$$

dengan,

$FV_m$  : Nilai masa mendatang (*future value*) bunga majemuk

$PV_m$  : Nilai saat ini (*present value*) bunga majemuk

Untuk mengetahui besarnya jumlah uang atau nilai uang saat ini berdasarkan hasil di masa mendatang dinamakan *present value*. Diasumsikan jika terdapat sejumlah nilai  $X$  yang akan diinvestasikan pada awal tahun dengan tujuan akan terkumpul sebesar 1 pada akhir tahun dengan suku bunga efektif tahunan  $r$ , maka  $X(1 + r) = 1$  atau  $X = \frac{1}{1+r}$  yang dinamakan faktor diskonto (*discount factor*).

Persamaan 2.3 dapat dinyatakan kembali menjadi:

$$PV_m = \frac{FV_m}{(1+r)^T} = FV_m(1+r)^{-T}.$$

Misalkan waktu setahun dibagi ke dalam  $n$  bagian yang sama panjang, dan pada setiap bagian tersebut diterima pembayaran bunga  $r$  di mana bunga tersebut merupakan bunga majemuk. Sehingga formula untuk menentukan nilai masa mendatang (*future value*) dengan bunga majemuk setelah  $T$  tahun ialah:

$$FV_m = PV_m \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{Tn}. \quad (2.4)$$

dengan  $n$  menyatakan jumlah frekuensi pembayaran bunga.

Dalam rentang waktu antara 0 hingga  $T$ , bunga dibayarkan setiap saat atau membuat waktu antar periode pembayaran semakin pendek dengan menyatakan  $n$  menuju tak hingga. Hal ini yang dinamakan konsep bunga majemuk berkelanjutan (*continous compounding*). Untuk menentukan formula bagi bunga majemuk kontinu dapat dijabarkan dari formula bunga majemuk pada Persamaan 2.4 yaitu:

$$FV_m = PV_m \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{Tn}.$$

Jika  $n$  menuju tak hingga maka dilimitkan sehingga diperoleh:

$$FV_m = \lim_{n \rightarrow \infty} PV_m \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{Tn}.$$

Karena terdapat dua faktor yang berpengaruh untuk menentukan bunga yaitu tingkat suku bunga ( $r$ ) dan waktu ( $T$ ). Misalkan  $u = \frac{r}{n}$  sehingga  $n = \frac{r}{u}$  dengan  $n \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow 0$ . Oleh karena itu, Persamaan 2.4 dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} FV_m &= PV_m \lim_{u \rightarrow 0} \left[ \left(1 + u\right)^{\frac{rT}{u}} \right] \\ FV_m &= PV_m \lim_{u \rightarrow 0} \left[ \left(1 + u\right)^{\frac{1}{u}} \right]^{rT}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Selanjutnya, misalkan  $x = \frac{1}{u}$  dengan  $u \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Persamaan 2.5 dapat dituliskan menjadi:

$$FV_m = PV_m \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^{rT}. \quad (2.6)$$

Misalkan  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$  akan dibuktikan bahwa  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ .

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \\ \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \\ \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \\ \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Apabila  $x$  disubstitusikan secara langsung ke dalam Persamaan 2.7, maka nilainya menjadi tidak terdefinisi sehingga digunakan aturan L'Hospital. Oleh karena itu, Persamaan 2.7 dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{d}{dx} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right)} \right) \\ \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{x} \right)} \left( -x^{-2} \right)}{-x^{-2}} \right) \\ \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \\ \ln y &= 1 \\ e^{\ln y} &= e^1 \\ y &= e \end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh bahwa  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . Sehingga Persamaan 2.6 diperoleh,

$$\begin{aligned} FV_m &= PV_m e^{rT} \\ PV_m &= FV_m e^{-rT}. \end{aligned}$$

**Definisi 2.3.** (*Luas Suatu Daerah dengan Jumlah Riemann*)[14] Misalkan dihitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = f(x)$  pada selang interval  $[a, b]$  dengan membagi menjadi  $n$  interval (menuju tak hingga) diperoleh luas sebenarnya dengan perhitungan:

$$\text{Luas} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

dengan  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .

Diasumsikan bahwa tingkat suku bunga pada Tugas Akhir ini tidak tetap, melainkan berubah terhadap waktu dengan suku bunga merupakan bunga majemuk kontinu. Misalkan waktu pada saat ini adalah 0, dan dimisalkan bahwa tingkat suku bunga didefinisikan sebagai fungsi  $r(t)$ . Untuk mencari nilai saat ini (*present value*) dari pembayaran bunga secara majemuk kontinu tersebut, interval waktu  $[0, T]$  dipartisi ke dalam  $n$  bagian, di mana setiap partisi memiliki panjang yakni  $\Delta t = \frac{T}{n}$  dan memiliki titik partisi yaitu  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ . Oleh karena itu, nilai saat ini (*present value*) dapat didekati dengan jumlahan Riemann sebagai integral sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_0^T r(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n r(t_i) \frac{T}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{n} \sum_{i=1}^n 1 \sum_{i=1}^n r(t_i) \\ &= rT. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, nilai saat ini (*present value*) yang diperoleh dengan konsep bunga majemuk kontinu yaitu,

$$\begin{aligned} PV_m &= FV_m e^{-rT} \\ &= FV_m e^{-\int_0^T r(t) dt}. \end{aligned}$$

### 2.3 Arbitrase

Arbitrase didefinisikan sebagai suatu kegiatan jual beli produk sekuritas secara serentak di pasar yang berbeda dengan tujuan mendapatkan keuntungan dari perbedaan harga yang terjadi. Arbitrase juga dapat diartikan sebagai suatu transaksi keuangan yang memberikan jumlah positif dari investasi berjumlah 0 tanpa risiko. Arbitrase merupakan hal yang jarang dijumpai di dalam pasar, namun apabila terjadi biasanya hanya berlangsung sementara. Kebanyakan model pasar keuangan menggunakan asumsi tidak terjadi arbitrase, dikarenakan untuk mendapatkan keuntungan yang signifikan terhadap perbedaan harga akan memerlukan jumlah investasi yang besar bukan dari perbedaan harga yang kecil dari instrumen keuangan terhadap pasar yang berbeda. Asumsi tidak ada kesempatan arbitrase biasanya menyatakan bahwa dalam transaksi keuangan pihak investor dapat melakukan menjual atau membeli instrumen keuangan pada harga yang sama.

### 2.4 Obligasi

Obligasi merupakan salah satu contoh dari *fixed income security*. *Fixed income security* memiliki arti sebuah produk investasi dengan tingkat pendapatan tetap yaitu memberikan imbal hasil berupa pembayaran tetap secara periodik serta membayarkan kembali nilai nominal pada saat jatuh tempo. Obligasi merupakan suatu surat berharga yang dikeluarkan oleh penerbit (*issuer*) kepada investor (*bondholder*), penerbit akan memberikan kupon yang dibayarkan secara berkala dan membayarkan sejumlah nilai nominal (*principal*) dari pinjaman ketika obligasi tersebut mengalami jatuh



tempo (*maturity date*) yang dinamakan sebagai nilai tebus (*redemption value*).

Di dalam obligasi, investor akan membayar seharga nilai saat ini (*present value*) dari alur pembayaran berdasarkan tingkat imbal hasilnya yang disebut sebagai tingkat imbal hasil (*yield rate*). Tingkat imbal hasil (*yield rate*) digunakan oleh para investor guna menghitung *present value* obligasi terhadap pembayaran kupon obligasi di masa depan [7]. Pada Tugas Akhir ini, digunakan *yield to maturity* yaitu imbal hasil yang diharapkan apabila obligasi dipertahankan hingga mengalami jatuh tempo. Harga beli obligasi ditentukan sebagai nilai saat ini (*present value*) pada waktu pembelian dari serangkaian pembayaran. Berikut merupakan rumusan harga obligasi berdasarkan waktu pembayaran kupon:

$$\text{Harga Obligasi} = C \frac{1}{(1+j)^n} + Ar \left[ \frac{1}{1+j} + \frac{1}{(1+j)^2} + \dots + \frac{1}{(1+j)^n} \right] \quad (2.8)$$

dengan,

$A$  : Nilai nominal obligasi

$r$  : Tingkat kupon

$C$  : Nilai tebus (*redemption value*)

$n$  : Frekuensi pembayaran kupon hingga waktu jatuh tempo

$j$  : Tingkat imbal hasil efektif

Berdasarkan definisi faktor diskonto (*discount factor*) yaitu  $v_j^n = \frac{1}{(1+j)^n}$  dan definisi nilai saat ini (*present value*) untuk anuitas akhir yakni  $a_{\overline{n}|j} = \frac{1-v_j^n}{j}$ . Persamaan 2.8 dapat dituliskan menjadi,

$$\text{Harga Obligasi} = Cv_j^n + Aa_{\overline{n}|j}. \quad (2.9)$$

dengan,

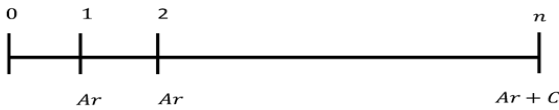
$v_j$  : Faktor diskonto (*discount factor*) dengan tingkat imbal hasil efektif  $j$

$a_{\overline{n}|j}$  : Nilai saat ini (*present value*) terhadap anuitas akhir dengan tingkat imbal hasil efektif  $j$

Apabila diasumsikan bahwa nilai tebus (*redemption value*) memiliki nilai yang sama dengan nilai nominal, maka Persamaan 2.9 menjadi,

$$\text{Harga Obligasi} = Av_j^n + Ara_{\overline{n}|j}$$

Berikut pada Gambar 2.8 ditampilkan linimasa (diagram waktu) pembayaran kupon terkait alur kas obligasi.



**Gambar 2.3.** Linimasa Pembayaran Kupon Obligasi

#### 2.4.1 Obligasi Tanpa Kupon (*Zero Coupon Bond*)

Berdasarkan sistem pembayaran bunga, obligasi dibedakan menjadi obligasi dengan kupon (*coupon bond*) dan obligasi tanpa kupon (*zero coupon bond*). Obligasi tanpa kupon (*zero coupon bond*) adalah obligasi yang tidak memberikan kupon dan memiliki pembayaran tunggal pada saat jatuh tempo. Obligasi tanpa kupon juga biasa disebut sebagai *discount bond*.

##### **Definisi 2.4. (Obligasi Tanpa Kupon) [15]**

*Obligasi tanpa kupon dengan waktu jatuh tempo  $T$  disebut juga sebagai  $T$ -bond, merupakan suatu kontrak yang menjamin sebesar  $I$  dollar bagi pemegang obligasi untuk dapat dibayarkan pada waktu  $T$ . Harga obligasi pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $T$  dinotasikan dengan  $p(t, T)$ .*

Berikut merupakan asumsi-asumsi yang digunakan dalam pasar obligasi yakni:

1. Terdapat pasar tidak dibatasi (*frictionless*) bagi  $T$ -bonds untuk setiap  $T > 0$ .

2. Hubungan  $p(t, t) = 1$  untuk semua  $t$ .
3. Untuk setiap waktu tetap  $t$ , harga obligasi  $p(t, T)$  diferensiabel terhadap waktu jatuh tempo  $T$ .

Harga obligasi  $p(t, T)$  adalah objek stokastik dengan dua variabel yaitu  $t$  dan  $T$  di mana untuk nilai  $t$  tetap,  $p(t, T)$  merupakan fungsi dari  $T$ . Fungsi ini menyatakan harga dengan waktu tetap  $t$  untuk tiap waktu jatuh tempo. Sedangkan untuk nilai tetap  $T$ ,  $p(t, T)$  merupakan fungsi dari  $t$ . Fungsi ini menyatakan harga pada waktu yang berbeda dengan waktu jatuh tempo  $T$  yang tetap.

#### 2.4.2 Obligasi dengan Kupon (*Coupon Bonds*)

Obligasi ini memiliki pembayaran kupon secara periodik kepada investornya. Secara teori, obligasi dengan kupon merupakan kumpulan dari obligasi tanpa kupon. Berdasarkan kupon yang diberikan, obligasi dengan kupon terbagi menjadi obligasi dengan kupon tetap (*fixed coupon bond*) dan obligasi dengan kupon mengambang (*floating coupon bond*)[15].

1. Obligasi dengan kupon tetap (*fixed coupon bond*)  
Obligasi ini memiliki tingkat kupon yang telah ditetapkan dan akan dibayarkan secara periodik. Pada waktu  $t$  ditetapkan sebagai waktu penerbitan obligasi dengan  $t_1, t_2, \dots, T$  sebagai waktu pembayaran kupon. Pada waktu  $t_i, i = 1, 2, \dots, T$  investor akan menerima kupon sebesar  $K$  dan pada waktu  $T$  investor akan menerima nilai nominalnya kembali sebesar  $A$ .
2. Obligasi dengan kupon mengambang (*floating coupon bond*)  
Obligasi ini tidak memiliki tingkat kupon bunga yang tetap melainkan berubah untuk setiap periode pembayaran kupon berdasarkan suatu acuan keuangan (*financial benchmark*) seperti pasar suku bunga yaitu LIBOR. Dalam obligasi dengan kupon mengambang, tingkat kupon (*coupon rate*)  $r_i$  merupakan himpunan dari tingkat LIBOR  $L(t_{i-1}, t_i)$ . Perlu dicatat bahwa  $L(t_{i-1}, t_i)$  telah ditentukan pada waktu  $t_{i-1}$ , namun  $K$  belum akan dibayarkan hingga waktu  $t_i$ . Sedemikian

hingga jumlah pembayaran kupon pada obligasi dengan kupon mengambang memiliki rumusan seperti berikut:

$$K = (t_i - t_{i-1})L(t_{i-1}, t_i)A \quad (2.10)$$

dengan,

$L(t_{i-1}, t_i)$  : Tingkat *forward* untuk waktu  $t_i$

$K$  : Jumlah pembayaran kupon.

## 2.5 The Term Structure of Interest Rates

Hubungan waktu jatuh tempo dan *yield to maturity* obligasi tanpa kupon disebut sebagai *term structure of interest rates* dan grafik yang menjelaskan hal tersebut dinamakan kurva *yield (yield curve)*. *The term structure of interest rates* pada waktu tertentu merupakan himpunan dari tingkat *yield* pada obligasi tanpa kupon untuk semua waktu jatuh tempo. *Yield to maturity* pada obligasi tanpa kupon untuk waktu jatuh tempo  $T$  dinamakan tingkat *spot* atau disebut juga sebagai tingkat obligasi tanpa kupon (*zero-coupon rate*) dinotasikan dengan  $l_T$ [7]. Harga obligasi tanpa kupon pada saat waktu 0 dengan waktu jatuh tempo  $T$  tahun dengan nilai 1 ialah  $\frac{1}{(1+l_T)^T}$  yang disebut juga sebagai *discount factor*. Tingkat *forward* merupakan tingkat suku bunga sebuah investasi yang ditetapkan di masa sekarang untuk dilakukan pada waktu tertentu di masa depan. Tingkat *spot* dapat ditentukan dengan menggunakan teknik *bootstrapping*. Adapun tingkat *forward* dapat ditentukan dengan menggunakan tingkat *spot*, seperti yang ada pada Persamaan 2.11.

$$L(t_{i-1}, t_i) = \frac{(1 + l_{t_i})^{t_i}}{(1 + l_{t_{i-1}})^{t_{i-1}}} - 1 \quad (2.11)$$

dengan,

$l_{t_i}$  : Tingkat *spot* untuk waktu ke- $t_i$

$l_{t_{i-1}}$  : Tingkat *spot* untuk waktu ke- $t_{i-1}$ .

## 2.6 Obligasi Bencana

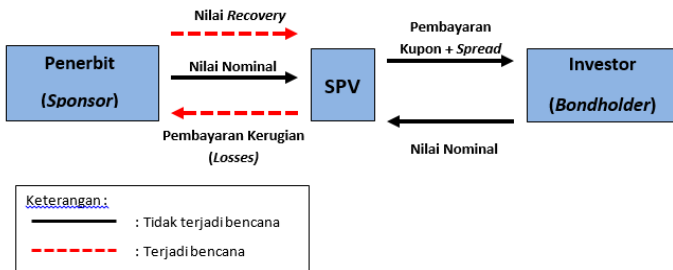
Pada umumnya, obligasi bencana memiliki persamaan dengan obligasi konvensional. Obligasi bencana atau yang biasa dinamakan *CAT Bond* memiliki definisi sebagai produk sekuritas yang dihubungkan dengan asuransi, di mana pemegang obligasi bersedia untuk mengasuransikan alokasi kerugian yang mungkin dialami (dengan nilai nominal dari obligasi) akibat kejadian bencana alam seperti badai, gempa bumi, tsunami, kemarau, dan sebagainya kepada penerbit obligasi. Obligasi bencana memiliki salah satu daya tarik bagi para investor yakni risiko yang ditanggung oleh obligasi bencana tidak memiliki korelasi dengan risiko lainnya seperti risiko pasar, risiko tingkat bunga, dan risiko kredit serta obligasi bencana menawarkan imbal hasil yang cenderung lebih tinggi dibandingkan obligasi lainnya[8].

Umumnya, penerbit obligasi bencana merupakan perusahaan asuransi, perusahaan asuransi, pemerintahan ataupun korporasi. Sama halnya dengan kontrak reasuransi, obligasi bencana memiliki berbagai kelas (*tranches*) yaitu kerugian hanya akan dibayarkan apabila telah melampaui batas bawah tingkat risiko (*attachment point*) dan berada dibawah batas tingkat risiko (*detachment point*) berdasarkan tipe-tipe pemicu (*trigger types*)[4].

Pada Tugas Akhir ini, digunakan pemicu (*trigger*) jenis parametrik di mana obligasi bencana akan terpicu oleh indeks risiko yang berkaitan dengan alam seperti untuk obligasi bencana bagi gempa bumi akan terpicu apabila gempa tersebut memiliki kekuatan lebih dari 7 skala richter, pada obligasi bencana bagi badai memiliki parameter yaitu kecepatan angin, dan bagi obligasi bencana kekeringan memiliki parameter yaitu curah hujan (mm). Pada Tugas Akhir ini, obligasi bencana (*CAT Bond*) akan membayarkan kerugian atau mengalami kegagalan (*default*) apabila parameter memiliki nilai dibawah nilai dari titik picu (*trigger point*) yang telah ditentukan[2]. Umumnya, obligasi bencana (*CAT Bond*) merupakan jenis obligasi suku bunga mengambang atau *floating rate notes* (FRN), di mana obligasi ini memiliki kupon yang perhitungan besaran bunganya mengacu pada suatu indeks pasar uang seperti LIBOR. Obligasi ben-

cana memiliki waktu jatuh tempo (*maturity date*) yang cenderung pendek yaitu antara 1 (satu) hingga 5 (lima) tahun, namun umumnya memiliki jatuh tempo (*maturity*) selama 3 (tiga) tahun.

Terdapat tiga pihak yang terlibat dalam mekanisme obligasi bencana antara lain: sponsor, *Special Purpose Vehicle* (SPV), serta investor (pemegang obligasi). Sponsor berperan sebagai pihak yang mengalihkan risiko bencana ke dalam pasar investasi. SPV merupakan suatu perusahaan yang dibentuk oleh sponsor dengan tujuan khusus dan bersifat sementara, SPV berperan sebagai perantara antara pihak sponsor dan investor yang bertujuan untuk meminimalisir risiko yang terjadi antara kedua belah pihak. Investor memiliki peran sebagai pihak yang membeli obligasi bencana. Obligasi bencana memiliki mekanisme atau cara kerja yang ditampilkan pada Gambar 2.4.



**Gambar 2.4.** Ilustrasi Mekanisme Obligasi Bencana

Berdasarkan Gambar 2.4, pada saat obligasi bencana diterbitkan, pihak investor akan membeli obligasi bencana sejumlah nilai nominal sehingga sebagai imbal baliknya selama masa hidup obligasi bencana investor akan menerima pembayaran kupon mengambang yang dibayarkan secara periodik oleh sponsor berdasarkan tingkat Libor  $\Delta$ -tahun yang biasanya dibayarkan setiap 3 bulan sekali dalam setahun, yang dibayarkan pada tiap akhir periode, ditambah dengan nilai *spread*. Pada umumnya, *spread* yang ditetapkan memiliki nilai yang sama untuk setiap periode pembayaran kupon. Semakin tinggi risiko suatu obligasi semakin tinggi pula nilai *spread*

yang dimilikinya karena investor perlu memperoleh tambahan pendapatan sebagai kompensasi atas pengambilan risiko. Nilai nominal obligasi (*principal*) akan diberikan kembali kepada investor sebagai pemegang obligasi, kecuali suatu bencana alam terjadi. Jika sebuah bencana alam terjadi yang menyebabkan obligasi bencana tersebut terpicu (*triggered*) selama obligasi belum mengalami jatuh tempo, maka alokasi kerugian terkait kejadian tersebut akan dibayarkan oleh pemegang obligasi bencana sesaat setelah kejadian tersebut terjadi. Setelah bencana alam tersebut terjadi, mekanisme obligasi bencana akan terhenti sehingga tidak ada lagi alur kas yang terjadi dengan kata lain penerbit obligasi akan menghentikan pembayaran kupon maupun *spread* kepada pihak investor dan nilai nominal (*principal*) tidak akan dikembalikan seutuhnya kepada investor melainkan akan dipotong untuk mengganti alokasi kerugian (*losses*) akibat bencana tersebut yang dinamakan nilai perolehan kembali (*recovery*). Kerugian dapat diestimasi berdasarkan indeks kerugian yang telah diperhitungkan berdasarkan kejadian tersebut[3].

## 2.7 Model Penentuan Harga Obligasi Bencana

Model penentuan harga obligasi bencana yang digunakan pada Tugas Akhir ini merupakan model yang telah dikembangkan oleh Robert A. Jarrow pada tahun 2010. Pada model ini, harga obligasi bencana dapat ditentukan dengan menggunakan kurva harga dari obligasi tanpa kupon (*zero coupon bond*), kemungkinan terjadinya bencana serta tingkat persentase akibat kerugian yang terjadi. Terdapat asumsi-asumsi yang digunakan pada model ini diantaranya yaitu [4]:

1. Tidak terdapat risiko mitra pengimbang (*counterparty*).
2. Kondisi pasar yang terjadi adalah bebas arbitrase (*arbitrage-free*) untuk tingkat Libor dan obligasi bencana (CAT Bond).
3. Kejadian bencana alam didefinisikan sebagai proses Poisson  $X_t = \mathbb{1}_{\tau \geq t}$ . Proses Poisson tersebut diasumsikan mengikuti distribusi Poisson non-homogen dengan intensitas waktu  $\lambda_t$ .

Dengan mengikuti sifat dari distribusi Poisson non-homogen, didefinisikan dua peluang yang digunakan pada model penentuan harga ini, yaitu:  $\int_a^b \lambda_s e^{-\int_a^b \lambda_t dt} ds$  merupakan peluang dari suatu kejadian bencana alam yang terjadi antara waktu  $a$  dan  $b$ , dan  $e^{-\int_a^b \lambda_t dt}$  merupakan peluang jika tidak ada bencana alam yang terjadi antara waktu  $a$  dan  $b$ .

4. Kerugian yang timbul akibat bencana alam diasumsikan tidak bergantung (bebas) terhadap tingkat Libor.
5. Indeks waktu yang diterapkan terkait indeks waktu pembayaran kupon  $t + k$ ,  $t \in [0, T]$  merepresentasikan tanggal pembayaran kupon pertama kali dan diasumsikan dengan indeks 1. Sedangkan,  $t + k - \Delta$  merepresentasikan tanggal pembayaran kupon terakhir dari obligasi bencana yang diterbitkan sebelumnya terhadap waktu  $t$  dan diasumsikan dengan indeks 0. Waktu  $t + k + \Delta$  merepresentasikan tanggal pembayaran kupon kedua dan diasumsikan dengan indeks 2.

Asumsi diatas dijadikan dasar dalam model penentuan harga obligasi bencana sebagai berikut:

1. Model pembayaran kupon mengambang yang diterima hingga sebuah bencana terjadi

$$E_t \left( A \sum_{s=1}^T L_{s-1} \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right).$$

2. Model pembayaran *spread* tetap yang diterima hingga sebuah bencana terjadi

$$E_t \left( A \sum_{s=1}^T c \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right).$$

3. Model pembayaran nilai nominal (*face value*) jika bencana tidak terjadi

$$E_t \left( A \mathbb{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du} \right).$$



4. Model pembayaran sisa nilai nominal (*residual face value*) jika bencana terjadi

$$E_t \left( Y_\tau \mathbb{1}_{\tau \leq T} e^{-\int_t^\tau l_u du} \right).$$

## 2.8 London Interbank Offered Rate (LIBOR)

London Interbank Offered Rate (LIBOR) merupakan tingkat suku bunga acuan yang ditawarkan untuk meminjamkan dana satu bank dengan bank yang lainnya dalam jangka waktu pendek di seluruh dunia. LIBOR memiliki arti sebagai nilai rata-rata dari tingkat suku bunga yang dihitung berdasarkan taksiran oleh bank-bank global terkemuka seperti Bank of America, Barclays, Citibank, dan bank-bank lainnya setiap hari. LIBOR memiliki tujuh tenor atau waktu jatuh tempo yaitu semalam (*overnight*), 1 minggu, dan 1,2,3,6,12 bulan. Tingkat suku bunga yang paling banyak digunakan adalah tingkat suku bunga USD tiga bulan [9]. Pemberi pinjaman, termasuk bank dan lembaga keuangan lainnya, menggunakan LIBOR sebagai acuan penentu suku bunga untuk berbagai instrumen hutang. LIBOR juga digunakan sebagai patokan untuk hipotek, obligasi pemerintah, pinjaman korporasi.

Karena bencana alam merupakan suatu peristiwa yang tidak dapat diprediksi, maka dibutuhkan suatu fungsi indikator guna merepresentasikan suatu bencana alam terjadi atau tidak.

## 2.9 Fungsi Indikator

Fungsi indikator dari sebuah peristiwa adalah suatu variabel acak yang bernilai 1 jika suatu peristiwa terjadi dan bernilai 0 jika peristiwa tidak terjadi.

### Definisi 2.5. (*Fungsi Indikator*)[10]

Misal  $\Omega$  merupakan ruang sampel dan  $Z \subseteq \Omega$  adalah sebuah kejadian. Fungsi indikator (atau variabel acak indikator) dari kejadian  $Z$ , dinotasikan dengan  $\mathbb{1}_Z$ , merupakan variabel acak yang didefi-

nisikan sebagai berikut:

$$\mathbb{1}_Z(\omega) := \begin{cases} 1 & \omega \in Z \\ 0 & \omega \notin Z. \end{cases}$$

Nilai harapan (*expected value*) dari indikator variabel acak untuk sebuah kejadian merupakan peluang dari kejadian tersebut.

**Teorema 2.1.** *Jika  $\mathbb{1}_Z$  adalah fungsi indikator atau indikator variabel acak dari kejadian  $Z$ , maka*

$$E[\mathbb{1}_Z] = P(Z).$$

Selanjutnya dilakukan pembuktian terhadap Teorema 2.1.

**Bukti:**

$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_Z] &= \sum_{x \in R_{\mathbb{1}_Z}} x P_{\mathbb{1}_Z}(X = x) \\ &= 1P(\mathbb{1}_Z = 1) + 0P(\mathbb{1}_Z = 0) \\ &= P(\mathbb{1}_Z = 1) \\ &= P(Z) \end{aligned}$$

Selanjutnya dibahas mengenai nilai harapan atau nilai ekspektasi (*expected value*), nilai ekspektasi digunakan di dalam proses penjabaran model penentuan harga obligasi bencana.

## 2.10 Nilai Ekspektasi (*Expected Value*)

Nilai ekspektasi juga biasa disebut sebagai rata-rata (*mean*) dari suatu variabel acak  $Z$  dan dinotasikan dengan  $E(Z)$ . Nilai ekspektasi dihitung dengan cara mengalikan setiap kemungkinan kejadian yang terjadi dengan peluang dari setiap kemungkinan kejadian tersebut. Berikut diberikan definisi nilai ekspektasi terhadap variabel acak.

**Definisi 2.6.** (*Nilai Ekspektasi*)[11]

*Misal  $Z$  merupakan suatu variabel acak dengan ruang sampel  $(\Omega)$*

serta fungsi kepadatan peluang (pdf)  $f(z)$ . Nilai mean  $E(Z)$  terhadap variabel acak  $Z$  didefinisikan sebagai

$$E(Z) = \begin{cases} \sum_z z f(z) & \text{jika } Z \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz & \text{jika } Z \text{ kontinu.} \end{cases}$$

Selanjutnya, diberikan teorema-teorema yang berkaitan dalam nilai ekspektasi (*expected value*) yang digunakan di dalam proses penjabaran model penentuan harga obligasi bencana. Adapun pembuktian terhadap teorema-teorema berikut dapat dilihat pada Lampiran A [11].

**Teorema 2.2.** Misal  $Z$  merupakan variabel acak yang berada pada ruang probabilitas  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Jika  $a$  dan  $b$  adalah bilangan real, dan  $Y = aZ + b$ , maka

$$E[Y] = E[aZ + b] = aE[Z] + b.$$

Selanjutnya, diberikan Lemma 2.1 mengenai sifat *additivity of expectation*.

**Lemma 2.1.** Misal  $Z$  dan  $Y$  adalah variabel acak yang berada pada ruang sampel  $(\Omega)$ . Sehingga,

$$E[Z + Y] = E[Z] + E[Y].$$

**Teorema 2.3.** Misal  $Z$  dan  $Y$  merupakan variabel acak yang saling bebas, maka ekspektasi dari dua variabel acak tersebut didefinisikan sebagai

$$E[ZY] = E[Z]E[Y].$$

Selanjutnya, diberikan definisi dari ekspektasi bersyarat.

**Definisi 2.7. (Ekspektasi Bersyarat)[11]**

Jika  $Z$  dan  $Y$  merupakan peubah acak distribusi bersama, maka ekspektasi bersyarat dari  $Z$  diberikan  $Y = y$  didefinisikan sebagai

$$E(Z|Y = y) = \begin{cases} \sum_z z f(z|y) & \text{jika } Z \text{ dan } Y \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} z f(z|y) dz & \text{jika } Z \text{ dan } Y \text{ kontinu.} \end{cases}$$

Kemudian, diberikan teorema mengenai *law of total expectation*.

**Teorema 2.4.** Diberikan  $Z, Y$  merupakan variabel acak sehingga

$$E[Z] = E(E(Z|Y))$$

dengan  $E(Z|Y)$  merupakan ekspektasi bersyarat  $Z$  diberikan  $Y$ .

Setelah itu dibahas sedikit ulasan mengenai proses stokastik, karena proses Poisson merupakan salah satu contoh proses stokastik.

## 2.11 Proses Stokastik

Proses stokastik merupakan model peluang yang menggambarkan perubahan acak dari sebuah sistem terhadap waktu. Proses stokastik  $\{X(t), t \in T\}$  didefinisikan sebagai kumpulan dari suatu variabel acak, dengan  $t$  merepresentasikan waktu, dan  $X(t)$  menyatakan keadaan (*state*) suatu proses pada saat waktu  $t$  [12].

### 2.11.1 Proses Stokastik Waktu Kontinu

Diberikan sebuah sistem yang diamati berubah acak secara kontinu untuk tiap waktu  $t \geq 0$ , dengan  $X(t)$  merupakan keadaan (*state*) dari sistem tersebut pada waktu  $t$ .  $\{X(t); t \geq 0\}$  didefinisikan sebagai proses stokastik waktu kontinu dengan ruang keadaan (*state space*)  $S$ . Berikut ditampilkan ilustrasi dari proses stokastik waktu kontinu.

1. Misalkan sebuah mesin memiliki dua *state* yaitu nyala dan mati.  $X(t)$  adalah *state* dari mesin tersebut pada waktu  $t$ .  $\{X(t); t \geq 0\}$  merupakan proses stokastik waktu kontinu dengan *state space* yaitu  $\{\text{nyala}, \text{mati}\}$ .
2. Misalkan  $X(t)$  menyatakan jumlah pelanggan yang memasuki toko buku selama waktu  $[0, t]$ .  $\{X(t); t \geq 0\}$  merupakan proses stokastik waktu kontinu dengan *state space* yaitu  $\{0, 1, 2, \dots\}$ .

Adapun contoh-contoh dari proses stokastik antara lain proses Bernoulli, proses Poisson, proses Markov dan Martingale.

## 2.12 Proses Poisson

Proses Poisson merupakan salah satu contoh dari proses stokastik. Kedatangan pelanggan dalam sistem antrian, gempa bumi dalam sistem geologi, serta klaim pada perusahaan asuransi merupakan beberapa contoh dari proses Poisson dalam kehidupan sehari-hari. Proses Poisson berkaitan dengan peubah acak eksponensial dan peubah acak Poisson. Oleh karena itu, akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai peubah acak eksponensial dan peubah acak Poisson.

### 2.12.1 Peubah Acak Eksponensial

**Definisi 2.8.** (*Peubah Acak Eksponensial*)[11]

Suatu peubah acak kontinu  $X$  dengan parameter  $\lambda > 0$  dikatakan berdistribusi eksponensial jika memiliki fungsi kepadatan peluang (*probability density function*)

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & \text{untuk } x > 0 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

dengan fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function*) yang bersesuaian dari  $X$  yaitu:

$$F(x; \lambda) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}, x > 0.$$

### 2.12.2 Peubah Acak Poisson

Distribusi Poisson menggambarkan probabilitas pada peristiwa acak (*random*) yang akan terjadi pada interval waktu atau ruang dengan kondisi probabilitas sangat kecil.

**Definisi 2.9.** (*Peubah Acak Poisson*)[11]

Suatu peubah acak diskrit  $X$  dengan parameter  $\lambda$  dikatakan memiliki distribusi Poisson apabila memiliki fungsi massa peluang

$$f(x; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Berdasarkan intensitasnya, proses Poisson dibagi dua, yaitu Poisson homogen jika intensitasnya konstan dan dinotasikan dengan  $\lambda$ , dan Poisson nonhomogen jika intensitasnya berupa fungsi terhadap waktu, dikenal dengan istilah fungsi intensitas dan dinotasikan dengan  $\lambda(t)$ . Selanjutnya, diberikan definisi dari proses Poisson.

**Definisi 2.10. (Proses Poisson)[13]**

Suatu proses menghitung  $\{X(t); t \geq 0\}$  dikatakan sebagai proses Poisson dengan laju (parameter)  $\lambda, \lambda > 0$  jika:

- (i)  $X(0) = 0$ .
- (ii) Proses memiliki kenaikan bebas.
- (iii) Banyaknya kejadian pada sebuah interval yang panjangnya  $t$  berdistribusi Poisson dengan rata-rata  $\lambda t$ . Sehingga, untuk semua  $s, t \geq 0$

$$P(\{X(t+s) - X(s) = n\}) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

dengan  $n = 0, 1, \dots$

**Definisi 2.11. (Proses Poisson)[13]**

Suatu proses menghitung  $\{X(t); t \geq 0\}$  dikatakan sebagai proses Poisson dengan fungsi intensitas  $\lambda$  jika:

- (i)  $X(0)=0$ .
- (ii) Proses memiliki kenaikan bebas dan stasioner.
- (iii)  $P(X(h) \geq 2) = o(h)$ .
- (iv)  $P(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ .

**Definisi 2.12. (Fungsi  $o(h)$ )[13]**

Fungsi atau error dikatakan sebagai  $o(h)$  apabila

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

dengan  $o(h)$  menyatakan fungsi dari  $h$ .

Kemudian, diberikan definisi dari proses Poisson non-homogen.

**Definisi 2.13. (Proses Poisson Non-Homogen)[13]**

Suatu proses menghitung  $\{X(t); t \geq 0\}$  dikatakan sebagai proses Poisson dengan fungsi intensitas  $\lambda(t)$  atau  $\lambda_t$  jika:

- (i)  $X(0)=0$ .
- (ii)  $X(t), t \geq 0$  memiliki kenaikan bebas.
- (iii)  $P(X(t+h) - X(t) \geq 2) = o(h)$ .
- (iv)  $P(X(t+h) - X(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$ .

**Teorema 2.5.** Jika diberikan fungsi nilai rata-rata (*mean value function*)

$$m(t) = \int_0^t \lambda_u du,$$

maka dapat ditunjukkan bahwa,

$$P\{X(t+s) - X(t) = n\} = e^{-(m(t+s)-m(t))} \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!}, n \geq 0 \quad (2.13)$$

dengan  $X(t+s) - X(t)$  berdistribusi Poisson dengan rata-rata  $m(t+s) - m(t)$ .

Pembuktian terhadap Teorema 2.5 ditunjukkan pada Lampiran B.

Berkaitan dengan proses Poisson non-homogen, untuk setiap  $0 \leq s < t$ ,  $X(t) - X(s)$  merupakan proses Poisson dengan fungsi nilai rata-rata (*mean value function*) yaitu:

$$m(t) - m(s) = \int_s^t \lambda_u du. \quad (2.14)$$

### 2.13 $\sigma$ -Aljabar

Pada teori peluang,  $\sigma$ -aljabar diartikan sebagai informasi tentang hasil eksperimen acak. Pertama akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi aljabar selanjutnya definisi  $\sigma$ -aljabar, kejadian dan filtrasi.

**Definisi 2.14. (Aljabar) [16]**

Misalkan  $\Omega$  adalah sebuah himpunan dan  $\mathcal{F}$  merupakan koleksi sub-himpunan dari  $\Omega$ . Suatu aljabar  $\mathcal{F}$  adalah koleksi himpunan  $\mathcal{F}$  dengan sifat-sifat berikut:

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
2. Bila  $A \in \mathcal{F}$  maka  $A^c \in \mathcal{F}$ .
3. Bila  $A, B \in \mathcal{F}$  maka  $A \cup B \in \mathcal{F}$ .

**Definisi 2.15. ( $\sigma$ -aljabar)**

Misal  $\Omega$  adalah sebuah himpunan dan  $\mathcal{F}$  adalah koleksi sub-himpunan dari  $\Omega$ . Koleksi himpunan  $\mathcal{F}$  disebut  $\sigma$ -aljabar pada  $\Omega$  bila  $\mathcal{F}$  adalah aljabar dan bila  $A_1, A_2, \dots$  adalah barisan di  $\mathcal{F}$  maka

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}.$$

**Definisi 2.16. (Kejadian)**

Misalkan  $\Omega$  adalah suatu ruang sampel (sample space), adalah himpunan dari seluruh hasil yang mungkin dari suatu eksperimen acak. Jika  $\mathcal{F}$  adalah himpunan kuasa dari  $\Omega$ , maka setiap anggota dari  $\mathcal{F}$  dinamakan kejadian (event) di mana tiap unsur  $\omega \in \Omega$  disebut dengan titik sampel.

**Definisi 2.17. (Filtrasi)**

Bila  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  adalah keluarga sub- $\sigma$ -aljabar dari  $\mathcal{F}$  dengan sifat  $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$  maka keluarga sub- $\sigma$ -aljabar tersebut dinamakan filtrasi.



## 2.14 Konsep Ukuran

Setelah diperkenalkan konsep  $\sigma$ -aljabar, pada subbab ini akan dibahas mengenai konsep ruang terukur dan ukuran.

### Definisi 2.18. (Ruang Terukur)[16]

$(\Omega, \mathcal{F})$  disebut sebagai ruang terukur (measurable space) apabila  $\Omega$  merupakan suatu himpunan dan  $\mathcal{F}$  adalah  $\sigma$ -aljabar pada  $\Omega$ . Unsur  $F$  disebut sub-himpunan dari  $\Omega$  yang  $\mathcal{F}$ -terukur.

### Definisi 2.19. (Fungsi Himpunan Aditif)

Misal  $\Omega$  adalah suatu himpunan dan  $\mathcal{F}$  adalah  $\sigma$ -aljabar serta  $\mu$  merupakan fungsi himpunan yang memiliki nilai non-negatif

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow (0, \infty].$$

Fungsi  $\mu$  disebut additive bila memenuhi sifat berikut:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Bila  $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$  dan  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  maka  $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ .

### Definisi 2.20. (Fungsi Himpunan Aditif Terhitung)

Fungsi  $\mu$  disebut aditif terhitung bila memenuhi sifat berikut:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Bila  $A_1, A_2, \dots$  adalah barisan di  $\mathcal{F}$  dengan  $A_i \cap A_j = \emptyset$  untuk  $i \neq j$  dan  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$  maka  $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ .

### Definisi 2.21. (Ukuran dan Ruang Ukuran)

Misal  $(\Omega, \mathcal{F})$  adalah suatu terukur. Fungsi  $\mu$  yang didefinisikan dengan

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow (0, \infty].$$

disebut ukuran (measure) pada  $(\Omega, \mathcal{F})$  bila  $\mu$  adalah aditif terhitung dan  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  disebut ruang ukuran.

## 2.15 Martingale

Martingale merupakan salah satu contoh dari proses stokastik. Secara umum, Martingale diartikan sebagai suatu proses stokastik yang harapan kejadian di masa depan hanya bergantung pada informasi di masa sekarang. Sebelumnya, akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi dari proses teradaptasi.

**Definisi 2.22. (Proses Teradaptasi)[16]**

*Proses stokastik  $\{X(t)\}$  teradaptasi oleh  $\{\mathcal{F}(t)\}$  bila  $\{X(t)\}$  terukur untuk  $\forall t \in T$ .*

Sebelum membahas martingale, akan dibahas terlebih dahulu mengenai definisi ukuran peluang dan ruang probabilitas.

**Definisi 2.23. (Ukuran Probabilitas)**

*Ukuran  $P$  disebut ukuran peluang (probability measure) bila  $P$  adalah suatu ukuran pada ruang terukur  $(\Omega, \mathcal{F})$  dan  $P(\Omega) = 1$*

**Definisi 2.24. (Ruang Probabilitas)**

*Suatu ruang probabilitas (probability space)  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  terdiri dari tiga obyek antara lain:*

1. *Suatu ruang sampel (sample space)  $\Omega$ .*
2. *Suatu  $\sigma$ -aljabar  $\mathcal{F}$ .*
3. *Suatu ukuran probabilitas  $P$  di suatu ruang terukur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , yaitu  $P(A)$  terdefinisi  $\forall A \in \mathcal{F}$ .*

**Definisi 2.25. (Martingale)**

*Proses stokastik  $\{X(t), t \geq 0\}$  yang berada pada ruang probabilitas  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  disebut martingale bila memenuhi sifat - sifat berikut ini:*

1.  *$X(t)$  dapat diintegrasikan  $\forall t \in T$ .*
2.  *$\{X(t)\}$  teradaptasi oleh filtrasi  $\{\mathcal{F}(t)\}$ .*
3.  *$E(X(t+1)|\mathcal{F}(t)) = X(t)$ .*

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam pengerjaan Tugas Akhir secara rinci. Metode penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan agar Tugas Akhir ini dapat berjalan secara sistematis.

#### **3.1 Tahapan Penelitian**

Langkah - langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut.

##### **1. Studi Literatur**

Pada tahap ini, hal yang pertama dilakukan adalah identifikasi masalah. Kemudian mencari materi atau sumber pendukung dari permasalahan yang diambil, yaitu pemodelan penentuan harga obligasi bencana (*CAT Bond*) baik dari jurnal ilmiah, buku, artikel dan lain sebagainya.

##### **2. Mengkaji Model Penentuan Harga Obligasi Bencana (*CAT Bond*)**

Pada tahap ini dilakukan kajian atas model penentuan harga obligasi bencana (*CAT Bond*) yang digunakan pada Tugas Akhir ini, di mana model penentuan harga obligasi bencana yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah model yang telah dikembangkan oleh Jarrow (2010). Adapun proses yang dilakukan meliputi penjabaran alur kas (*cash flow*) dari obligasi bencana guna memahami proses mendapatkan model dasar penentuan harga obligasi bencana. Selanjutnya, dilakukan penjabaran terkait masing-masing komponen model penentuan harga obligasi bencana sebagai berikut:

- a. Komponen model pembayaran kupon mengambang (*floating rate payment*) yang diterima hingga sebuah bencana

terjadi yaitu:

$$E_t \left( A \sum_{s=1}^T L_{s-1} \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right).$$

- b. Komponen model pembayaran tetap *spread* yang diterima hingga suatu bencana terjadi yaitu:

$$E_t \left( A \sum_{s=1}^T c \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right).$$

- c. Komponen model pembayaran nilai nominal (*face value*) jika bencana tidak terjadi yaitu:

$$E_t \left( A \mathbb{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du} \right).$$

- d. Komponen model sisa nilai nominal (*residual face value*) jika bencana terjadi yaitu:

$$E_t \left( Y_\tau \mathbb{1}_{\tau \leq T} e^{-\int_t^\tau l_u du} \right).$$

Setelah dilakukan penjabaran terkait komponen model penentuan harga obligasi bencana, ditemukan solusi analitik penentuan harga bagi obligasi bencana dengan cara menjumlahkan dan menyederhanakan seluruh hasil penjabaran komponen model penentuan harga obligasi bencana.

### 3. Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana Menggunakan *Software* MATLAB

Tahap selanjutnya adalah melakukan simulasi terhadap solusi analitik penentuan harga obligasi bencana dengan memisalkan nilai parameter-parameter ke dalam solusi analitik penentuan harga obligasi bencana dengan menggunakan *software* MATLAB versi R2017a. Nilai-nilai parameter yang digunakan mengacu pada jurnal acuan yang berjudul "Designing

*Catastrophic Bonds for Catastrophic Risks in Agriculture*”[2]. Simulasi solusi analitik model penentuan harga bencana dilakukan untuk mengetahui pengaruh dari perubahan nilai tingkat pengembalian *recovery* dan perubahan tingkat *spread* kupon terhadap harga obligasi bencana untuk masing-masing periode pembayaran kupon yaitu *annually*, *semi-annually*, dan *quarterly*. Hasil simulasi solusi analitik model penentuan harga bencana ditampilkan dalam bentuk tabel dan grafik.

#### 4. Analisis Hasil Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana

Pada tahap ini dilakukan analisis terhadap hasil simulasi solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana yang berupa grafik dan tabel untuk mengetahui pengaruh dari perubahan nilai tingkat pengembalian *recovery* dan perubahan tingkat *spread* kupon terhadap harga obligasi bencana untuk masing-masing periode pembayaran kupon yaitu *annually*, *semi-annually*, dan *quarterly*.

#### 5. Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran

Pada tahap ini ditarik kesimpulan berdasarkan penelitian yang dilakukan pada tahap sebelumnya. Kesimpulan ini merupakan ringkasan akhir dari hasil penelitian yang menjawab tujuan penelitian pada Tugas Akhir. Setelah itu diberikan saran untuk penelitian mendatang berupa perbaikan maupun pengembangan dari penelitian yang telah dilakukan.

#### 6. Penyusunan Laporan Tugas Akhir

Pada tahap ini, dilakukan penyusunan laporan Tugas Akhir.

### 3.2 Skema Metode Penelitian

Secara umum tahapan penelitian yang akan dilakukan dalam Tugas Akhir ini ditunjukkan oleh diagram alir sebagai berikut.



**Gambar 3.1.** Diagram Alir Metode Penelitian

## BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang proses mendapatkan solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana (*Cat Bond*). Pembahasan meliputi penjabaran dan mencari nilai ekspektasi dari masing-masing komponen model penentuan harga obligasi bencana, selanjutnya dilakukan analisis hasil simulasi terhadap solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana yang didapatkan dibawah pengaturan parameter yang berbeda.

### 4.1 Penjabaran Model Pembayaran Kupon Mengambang (*Floating Rate Payment*)

Pada Tugas Akhir ini, diasumsikan bahwa obligasi bencana merupakan obligasi dengan kupon mengambang yakni kupon bunga yang dibayarkan didasarkan tingkat suku bunga acuannya LIBOR. Pembayaran kupon mengambang dilakukan secara periodik hingga sebuah bencana kekeringan terjadi. Jika sebuah bencana kekeringan terjadi dan menyebabkan obligasi bencana terpicu sehingga obligasi harus membayarkan kerugian yang dialami akibat bencana tersebut maka sesaat setelah bencana terjadi, pembayaran kupon mengambang juga akan terhenti.

Berikut merupakan model pembayaran kupon mengambang pada obligasi bencana yang diterima hingga sebuah bencana terjadi:

$$E_t \left( A \sum_{s=1}^T L_{s-1} \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right). \quad (4.1)$$

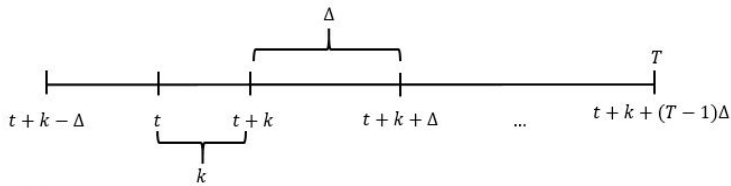
Indeks waktu dari model penentuan harga obligasi bencana yang digunakan diberikan pada Tabel 4.1. Waktu  $t \in [0, T]$  menyatakan waktu penerbitan obligasi bencana, waktu  $t + k$  merepresentasikan waktu pembayaran kupon pertama kali dan diasumsikan indeks 1. Waktu  $t + k - \Delta$  merepresentasikan waktu pembayaran kupon terakhir dari obligasi bencana yang diterbitkan sebelumnya. Waktu  $t + k + \Delta$  merepresentasikan waktu pembayaran kupon kedua yang diasumsikan dengan indeks 2. Notasi  $k$  merepresentasikan

selang waktu setelah  $t$  sampai dengan waktu pembayaran kupon pertama yang dinyatakan dalam tahun. Sedangkan, indeks  $s \in [t, T]$  dinyatakan dengan waktu  $t + k + (s - 1)\Delta$ .

**Tabel 4.1.** Indeks Waktu Model Penentuan Harga Obligasi Bencana

Indeks	Waktu	Pembayaran kupon
0	$t + k - \Delta$	kupon terakhir
1	$t + k$	kupon pertama
2	$t + k + \Delta$	kupon kedua
3	$t + k + 2\Delta$	kupon ketiga
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T$	$t + k + (T - 1)\Delta$	jatuh tempo obligasi

Berikut ditampilkan linimasa (diagram waktu) terhadap indeks waktu model penentuan harga obligasi bencana yang terdapat pada Tabel 4.1.



- Keterangan :
- $t$  : Waktu penerbitan obligasi bencana
  - $k$  : Rentang waktu antara waktu penerbitan obligasi hingga pembayaran kupon pertama
  - $t + k$  : Waktu pembayaran kupon pertama
  - $t + k - \Delta$  : Waktu pembayaran kupon terakhir pada obligasi bencana yang diterbitkan sebelumnya
  - $\Delta$  : Waktu antar pembayaran kupon
  - $t + k + (T - 1)\Delta$  : Waktu jatuh tempo obligasi bencana

**Gambar 4.1.** Linimasa Indeks Waktu Model Penentuan Harga Obligasi Bencana

Pada Persamaan 4.1, indeks waktu berjalan dari  $s = 1$  hingga  $T$  memiliki arti pembayaran kupon mengambang berjalan dari waktu  $s = 1$  hingga  $T$ . Dengan mengadaptasi formula pembayaran kupon



mengambang pada Persamaan 2.10, sehingga diperoleh:

$$K = \Delta L_{s-1} A. \quad (4.2)$$

Pada Persamaan 4.2, tingkat kupon (*coupon rate*) merupakan himpunan dari tingkat LIBOR  $L_s$ . Perlu dicatat bahwa  $L_s$  telah ditentukan pada waktu  $s - 1$  namun  $K$  belum akan dibayarkan hingga waktu  $s$ . Pembayaran kupon mengambang yang dilakukan pada waktu  $s$  berdasarkan tingkat Libor pada waktu  $s - 1$ .

Selanjutnya, karena obligasi bencana merupakan suatu fenomena yang tidak dapat diprediksi maka diperlukan sebuah fungsi indikator yang terdiri dari dua variabel acak yakni 1 dan 0 guna merepresentasikan terjadinya suatu bencana atau tidak dalam indeks waktu  $s \in [t, T]$ , dengan waktu acak terjadinya bencana dinotasikan dengan  $\tau$ . Sedemikian hingga,

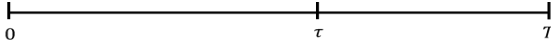
$$\mathbb{1}_{\tau > s} := \begin{cases} 1 & \tau > s \\ 0 & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi indikator di atas, terlihat bahwa jika fungsi bernilai 1, maka  $\tau > s$  terpenuhi yang menyatakan bahwa suatu kejadian bencana kekeringan tidak terjadi dalam indeks waktu  $s \in [t, T]$  dikarenakan waktu acak terjadinya suatu bencana ( $\tau$ ) lebih dari indeks waktu pembayaran kupon. Pada Gambar 4.2 ditunjukkan linimasa (diagram waktu) apabila waktu acak terjadinya bencana melebihi waktu pembayaran kupon.



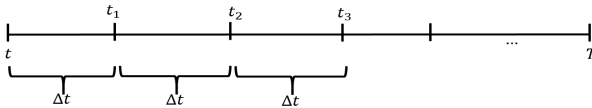
**Gambar 4.2.** Linimasa Waktu Acak Terjadinya Bencana Melebihi Waktu Pembayaran Kupon

Sebaliknya jika fungsi bernilai 0, menyatakan bahwa suatu kejadian bencana kekeringan terjadi dalam indeks waktu  $s \in [t, T]$  karena waktu acak terjadinya suatu bencana ( $\tau$ ) kurang dari indeks waktu pembayaran kupon seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.3.



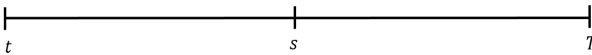
**Gambar 4.3.** Linimasa Waktu Acak Terjadinya Bencana Kurang dari Waktu Pembayaran Kupon

Dalam pasar obligasi bencana ini akan didefinisikan tingkat suku bunga (*interest rates*) seperti berikut, diasumsikan jika alur waktu obligasi dimulai pada saat waktu penerbitan obligasi  $t$  hingga obligasi mengalami jatuh tempo  $T$ . Alur waktu tersebut akan dipartisi menjadi beberapa bagian waktu menjadi  $t_1, t_2, \dots, T$  yang merupakan periodik pembayaran kupon bunga seperti pada Gambar 4.4.



**Gambar 4.4.** Ilustrasi Periodik Pembayaran Kupon Bunga

Apabila selang waktu antar pembayaran dipartisi menjadi bagian yang lebih kecil, maka jarak waktu pembayaran antar kupon bunga akan semakin pendek dan frekuensi pembayaran kupon yang terjadi dalam rentang waktu tersebut menuju tak hingga, hal ini dinamakan sebagai pembayaran kupon secara kontinu.



**Gambar 4.5.** Ilustrasi Periodik Pembayaran Kupon Kontinu

Diasumsikan terdapat titik waktu  $s$  yang merepresentasikan partisi waktu yang sangat kecil tersebut, sehingga terdapat dua titik waktu yaitu  $s$  dan  $T$ , dengan  $t < s < T$  seperti pada Gambar 4.5.

Berdasarkan konsep *time value of money*, jumlah akumulasi dari investasi pada waktu  $s$  ( $FV_m$ ) dengan jumlah nilai awal investasi yaitu  $PV_m$  menggunakan konsep bunga majemuk memiliki nilai

akumulasi pada waktu  $s$  yaitu,

$$FV_m = PV_m(1 + r)^s \quad (4.3)$$

dengan,

$FV_m$  : Nilai di masa mendatang (*future value*) bunga majemuk

$PV_m$  : Nilai saat ini (*present value*) bunga majemuk .

Apabila besarnya jumlah uang atau nilai uang saat ini berdasarkan hasil di masa mendatang diketahui, hal ini dinamakan *present value*. Persamaan 4.3 dapat dinyatakan kembali menjadi:

$$PV_m = \frac{FV_m}{(1 + r)^s} = FV_m(1 + r)^{-s}.$$

Misalkan pada waktu setahun dibagi kedalam  $n$  bagian yang sama panjang dan pada setiap bagian tersebut investor menerima pembayaran bunga  $r$ , bunga yang dibayarkan tersebut merupakan bunga majemuk. Formula untuk menentukan *future value* dengan bunga majemuk setelah  $s$  tahun ialah

$$FV_m = PV_m \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{sn}$$

dengan  $n$  menyatakan jumlah periode pembayaran bunga.

Dalam rentang waktu antara  $t$  hingga  $s$ , bunga dibayarkan setiap saat atau waktu antar periode pembayaran semakin pendek dengan menyatakan  $n$  menuju tak hingga. Hal ini yang dinamakan konsep bunga majemuk berkelanjutan (*continous compounding*). Untuk menentukan formula bagi bunga majemuk kontinu dapat dijabarkan dari formula bunga majemuk. Jika  $n$  menuju tak hingga maka digunakan limit, sehingga menghasilkan:

$$FV_m = \lim_{n \rightarrow \infty} PV_m \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{sn}$$

$$FV_m = PV_m \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}} \right]^{rs}. \quad (4.4)$$

Misalkan  $x = \frac{n}{r}$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Persamaan 4.4 dapat dituliskan menjadi:

$$FV_m = PV_m \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^{rs}. \quad (4.5)$$

Diketahui bahwa  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$  sehingga dari Persamaan 4.5 diperoleh,

$$\begin{aligned} FV_m &= PV_m e^{rs} \\ PV_m &= FV_m e^{-rs}. \end{aligned}$$

Diasumsikan bahwa tingkat suku bunga pada Tugas Akhir ini tidak tetap melainkan berubah terhadap waktu, suku bunga yang digunakan merupakan bunga majemuk kontinu. Misalkan tingkat suku bunga didefinisikan sebagai fungsi  $r(u)$ . Untuk mencari nilai saat ini (*present value*) dari pembayaran bunga secara majemuk kontinu tersebut, interval waktu  $[t, s]$  dipartisi ke dalam  $n$  bagian, di mana setiap partisi memiliki panjang yakni  $\Delta u = \frac{s-t}{n}$  dan memiliki titik partisi yaitu  $t = u_0 < u_1 < \dots < u_n = s$ . Oleh karena itu, nilai saat ini (*present value*) dapat didekati dengan jumlahan Riemann sebagai integral sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_t^s r(u) du &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n r(u_i) \frac{T}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s-t}{n} \sum_{i=1}^n 1 \sum_{i=1}^n r(u_i) \\ &= r(s-t). \end{aligned}$$

Berdasarkan konsep limit pada jumlah Riemann diatas, *present value* dengan konsep bunga majemuk dalam rentang waktu yang sangat kecil diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} PV_m &= FV_m e^{-rs} \\ &= FV_m e^{-\int_t^s r(u) du}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tingkat suku bunga acuan yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah LIBOR. Tingkat *spot* (*spot rate*) pada LIBOR dinotasikan dengan  $l$ . Tingkat *spot* atau yang biasa disebut sebagai tingkat obligasi tanpa kupon (*zero coupon rate*) ini digunakan oleh investor untuk mengukur nilai dari investasi obligasi pada waktu tertentu. Berdasarkan teori, obligasi dengan kupon merupakan kumpulan dari obligasi tanpa kupon sehingga setiap pembayaran atau nilai nominal dapat dilihat sebagai obligasi tanpa kupon yang terpisah. Mengacu pada Persamaan 4.6 serta berdasarkan Definisi 2.4, harga obligasi tanpa kupon pada waktu  $t$  dengan indeks waktu jatuh tempo  $s$  dinotasikan dengan  $p(t, s)$  merupakan fungsi dari waktu  $s$  dengan  $t \leq s$  ialah:

$$p(t, s) = p(s, s)e^{-\int_t^s l_u du}.$$

Dalam Tugas Akhir ini digunakan asumsi tidak ada kesempatan arbitrase (*free-arbitrage*), hal ini menyatakan bahwa dalam transaksi obligasi, nilai yang akan diperoleh sebesar 1 pada saat jatuh tempo  $s$  harus mempunyai nilai yang sama dengan nilai investasi awal. Berdasarkan asumsi dari pasar obligasi, bahwa  $p(t, t) = 1$  untuk semua  $t$ , memiliki arti bahwa pada waktu  $t = s$  sehingga  $p(s, s) = 1$  yang merupakan nilai tebus (*redemption value*) dari obligasi. Oleh karena itu, harga obligasi tanpa kupon pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $s$  ialah:

$$\begin{aligned} p(t, s) &= p(s, s)e^{-\int_t^s l_u du} \\ &= 1e^{-\int_t^s l_u du} \\ &= e^{-\int_t^s l_u du}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Diasumsikan bahwa  $p(t, s)$  yakni harga obligasi tanpa kupon pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $s$  memiliki nilai yang sama dengan nilai harapan dari *present value* terhadap nilai yang diperoleh dimasa depan sehingga Persamaan 4.7 dapat dituliskan menjadi:

$$p(t, s) = E_t(e^{-\int_t^s l_u du}).$$

Selanjutnya, dilakukan penjabaran terhadap model pembayaran kupon mengambang. Diasumsikan berdasarkan fungsi indikator, bahwa tidak ada terjadi bencana antara waktu  $t$  hingga  $t + k$  sehingga pembayaran kupon pertama pasti dilakukan. Akan tetapi, untuk pembayaran kupon setelah waktu  $t + k$ , waktu acak terjadinya bencana dapat terjadi di antara waktu  $t + k$  hingga  $T$ . Mengacu pada asumsi tersebut, pembayaran kupon mengambang dipisah menjadi pembayaran kupon pertama dan sisa pembayaran kupon selanjutnya. Oleh karena itu, Persamaan 4.1 dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$E_t \left( A \sum_{s=1}^T L_{s-1} \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) = E_t \left( AL_0 \Delta \mathbb{1}_{\tau > 1} e^{-\int_t^1 l_u du} \right) + E_t \left( A \sum_{s=2}^T L_{s-1} \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) \quad (4.8)$$

dengan  $E_t \left( AL_0 \Delta \mathbb{1}_{\tau > 1} e^{-\int_t^1 l_u du} \right)$  menyatakan pembayaran kupon pertama dan  $E_t \left( A \sum_{s=2}^T L_{s-1} \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right)$  menyatakan sisa pembayaran kupon selanjutnya.

#### 4.1.1 Penjabaran Model Pembayaran Kupon Pertama

Pada bagian ini, akan dijabarkan model pembayaran kupon pertama yang berada pada suku pertama di ruas kanan pada Persamaan 4.8 yaitu:

$$E_t \left( AL_0 \Delta \mathbb{1}_{\tau > 1} e^{-\int_t^1 l_u du} \right). \quad (4.9)$$

Pada Persamaan 4.9 indeks waktu 0 menunjukkan waktu  $t + k - \Delta$  dan indeks waktu 1 menunjukkan waktu  $t + k$ , sehingga indeks waktu 0 pada Persamaan 4.9 akan digantikan dengan waktu  $t + k - \Delta$  dan indeks waktu 1 akan digantikan dengan waktu  $t + k$ , sehingga dapat ditulis menjadi:

$$E_t \left( AL_{t+k-\Delta} \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k} e^{-\int_t^{t+k} l_u du} \right). \quad (4.10)$$

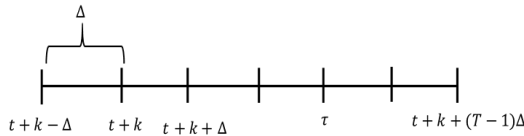
Dengan mengadaptasi formula pembayaran kupon mengam-  
bang pada obligasi konvensional pada Persamaan 4.2 sehingga,

$$K = \Delta L_{t+k-\Delta} A.$$

Perlu diingat, bahwa pembayaran kupon yang dilakukan pada waktu  $t + k$  berdasarkan tingkat kupon pada waktu  $t + k - \Delta$ . Dalam Persamaan 4.10 terdapat tingkat *spot* yaitu  $e^{-\int_t^{t+k} l_u du}$  dalam interval waktu  $t$  hingga  $t + k$ , serta terdapat fungsi indikator yakni  $\mathbb{1}_{\tau > t+k}$  dengan

$$\mathbb{1}_{\tau > t+k} := \begin{cases} 1 & \text{jika } \tau > t + k \\ 0 & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi indikator serta alur waktu diatas, terlihat bahwa jika variabel acak bernilai 1 maka tidak terjadi bencana keke-  
ringan dalam interval waktu  $t$  hingga  $t + k$  dikarenakan waktu acak terjadinya bencana  $\tau$  melebihi interval waktu  $t$  hingga  $t + k$  sehingga pembayaran kupon pertama pasti dilakukan. Berikut ditampilkan linimasa dari pembayaran kupon pertama pada Gambar 4.6.



**Gambar 4.6.** Linimasa Pembayaran Kupon Pertama

Selanjutnya dilakukan penjabaran terhadap model pembayaran kupon pertama. Untuk menjabarkan model pembayaran kupon per-  
tama pada Persamaan 4.10 digunakan persamaan berikut ini [4]:

$$E_t \left( AL_{t+k-\Delta} \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k} e^{-\int_t^{t+k} l_u du} \right) = E_t \left( AL_{t+k-\Delta} \Delta e^{-\int_t^{t+k} l_u du} e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \right), \quad (4.11)$$

Berikutnya, dilakukan pembuktian terhadap Persamaan 4.11.

**Bukti.**

Nilai ekspektasi terhadap fungsi indikator  $\mathbb{1}_{\tau > t+k}$  dicari dengan menggunakan sifat nilai ekspektasi. Oleh karena itu, ruas kiri pada Persamaan 4.11 dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} & E_t \left( AL_{t+k-\Delta} \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k} e^{-\int_t^{t+k} l_u du} \right) \\ &= AL_{t+k-\Delta} \Delta e^{-\int_t^{t+k} l_u du} E_t (\mathbb{1}_{\tau > t+k}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Berdasarkan teori *law of total expectation* pada Teorema 2.4, menyatakan bahwa nilai ekspektasi dari variabel acak sama dengan, jumlah nilai ekspektasi dari variabel acak bersyarat terhadap variabel acak yang kedua [19]. Diberikan ruang peluang terfiltrasi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$  dan variabel keadaan  $X_t$  dengan  $\mathcal{F}_t$  terukur. Misal  $\mathcal{F}_t^X$  menyatakan filtrasi yang terbentuk oleh  $X_t$  [20]. Ruas kanan pada Persamaan 4.12 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & AL_{t+k-\Delta} \Delta e^{-\int_t^{t+k} l_u du} E_t (\mathbb{1}_{\tau > t+k}) \\ &= AL_{t+k-\Delta} \Delta e^{-\int_t^{t+k} l_u du} E_t (E_t (\mathbb{1}_{\tau > t+k} | \mathcal{F}_t^X)) \end{aligned} \quad (4.13)$$

dengan  $X$  adalah  $\mathbb{1}_{\tau > t+k}$  dan  $Y$  adalah  $\mathcal{F}_t^X$ .

Langkah pertama, dicari nilai ekspektasi dari  $E_t (\mathbb{1}_{\tau > t+k} | \mathcal{F}_t^X)$ . Nilai ekspektasi dari fungsi indikator  $\mathbb{1}_{\tau > t+k}$  adalah  $P(\tau > t+k)$ , nilai peluang ketika  $\tau > t+k$  dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan berikut [20]:

$$P(\tau > t+k | \mathcal{F}_t^X) = E_t (\mathbb{1}_{\tau > t+k} | \mathcal{F}_t^X) = e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du}. \quad (4.14)$$

Selanjutnya, dilakukan pembuktian Persamaan 4.14.

**Bukti.**

Nilai ekspektasi dari fungsi indikator  $E_t [\mathbb{1}_{\tau > t+k} | \mathcal{F}_t^X]$  dapat dicari dengan menggunakan definisi dari nilai ekspektasi bersyarat yang



ada pada Definisi 2.7 sedemikian hingga:

$$\begin{aligned}
 E_t[\mathbb{1}_{\tau > t+k} | \mathcal{F}_t^X] &= \sum_{x \in R_{\mathbb{1}_{\tau > t+k}}} xP(X = x | \mathcal{F}_t^X) \\
 &= 1P(\mathbb{1}_{\tau > t+k} = 1 | \mathcal{F}_t^X) + 0P(\mathbb{1}_{\tau > t+k} = 0 | \mathcal{F}_t^X) \\
 &= 1P(\mathbb{1}_{\tau > t+k} = 1 | \mathcal{F}_t^X) \\
 &= P(\tau > t+k | \mathcal{F}_t^X).
 \end{aligned}$$

Dalam Tugas Akhir ini, suatu bencana yang terjadi diasumsikan mengikuti proses Poisson non-homogen. Oleh karena itu, dicari peluang dari proses Poisson non-homogen dengan banyaknya bencana yang terjadi dalam interval waktu  $t$  hingga  $t+k$  yaitu 0 karena  $\tau > t+k$ . Dengan menggunakan Persamaan 2.13 dan Persamaan 2.14 dicari peluang tidak ada bencana kekeringan yang terjadi dengan  $n = 0$  dalam interval waktu  $t$  hingga  $t+k$  adalah:

$$\begin{aligned}
 P\{X(t+k) - X(t) = 0\} &= e^{-(m(t+k)-m(t))} \frac{[m(t+k) - m(t)]^0}{0!} \\
 &= e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \frac{\{\int_t^{t+k} \lambda_u du\}^0}{0!} \\
 &= e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} 1 \\
 &= e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du}.
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, Persamaan 4.14 terbukti.

Selanjutnya, nilai peluang  $\tau > t+k$  yang telah diperoleh pada Persamaan 4.14 disubstitusikan ke dalam Persamaan 4.13 yang menghasilkan:

$$E_t \left( AL_{t+k-\Delta} \Delta e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \right). \quad (4.15)$$

Karena tingkat Libor saling bebas terhadap peristiwa bencana yang terjadi, berdasarkan Teorema 2.2 dan Teorema 2.3, Persamaan

4.15 dapat dituliskan menjadi,

$$\begin{aligned}
 & AL_{t+k-\Delta} \Delta E_t \left( e^{-\int_t^{t+k} l_u du} e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \right) \\
 &= AL_{t+k-\Delta} \Delta E_t \left( e^{-\int_t^{t+k} l_u du} \right) E_t \left( e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \right) \\
 &= AL_{t+k-\Delta} \Delta E_t \left( e^{-\int_t^{t+k} l_u du} \right) e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du}. \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi dari pasar obligasi bahwa  $p(t, t) = 1$  untuk semua  $t$  sehingga untuk  $t = t + k$  berlaku  $p(t + k, t + k) = 1$ . Oleh karena itu, harga obligasi tanpa kupon pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $t + k$  dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}
 p(t, t + k) &= p(t + k, t + k) e^{-\int_t^{t+k} l_u du} \\
 &= 1 e^{-\int_t^{t+k} l_u du} \\
 &= e^{-\int_t^{t+k} l_u du}.
 \end{aligned}$$

Diasumsikan bahwa  $p(t, t + k)$  yakni harga obligasi tanpa kupon pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $t + k$ , memiliki nilai yang sama dengan nilai harapan dari nilai saat ini (*present value*) terhadap nilai yang diperoleh dimasa depan sehingga  $p(t, t + k)$  dapat dituliskan menjadi:

$$p(t, t + k) = E_t(e^{-\int_t^{t+k} l_u du}). \quad (4.17)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan 4.17 disubstitusi ke dalam Persamaan 4.16 diperoleh:

$$\begin{aligned}
 & E_t \left( AL_{t+k-\Delta} \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k} e^{-\int_t^{t+k} l_u du} \right) \\
 &= AL_{t+k-\Delta} \Delta p(t, t + k) e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du}. \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Hasil tersebut menunjukkan penjabaran dan perhitungan nilai ekspektasi terhadap model pembayaran kupon pertama.

### 4.1.2 Penjabaran Model Pembayaran Sisa Kupon Selanjutnya

Langkah selanjutnya adalah melakukan penjabaran dan mencari nilai ekspektasi terhadap model pembayaran sisa kupon selanjutnya yang berada pada suku kedua di ruas kanan pada Persamaan 4.8 yaitu:

$$E_t \left( A \sum_{s=2}^T L_{s-1} \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right). \quad (4.19)$$

Indeks waktu pada Persamaan 4.19 dimulai pada saat  $s = 2$  hingga  $s = T$ , dengan indeks waktu  $s = 2$  menunjukkan waktu  $t + k + \Delta$ . Persamaan 4.19 dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & E_t \left( A \sum_{s=2}^T L_{s-1} \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) \\ &= E_t \left( AL_{t+k} \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k+\Delta} e^{-\int_t^{t+k+\Delta} l_u du} + AL_{t+k+\Delta} \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k+2\Delta} \right. \\ & \quad e^{-\int_t^{t+k+2\Delta} l_u du} + \dots + AL_{t+k+(T-2)\Delta} \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k+(T-1)\Delta} \\ & \quad \left. e^{-\int_t^{t+k+(T-1)\Delta} l_u du} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Berdasarkan sifat nilai harapan dalam Lemma 1, Persamaan 4.20 dapat dituliskan kembali menjadi,

$$\begin{aligned} & E_t \left( A \sum_{s=2}^T L_{s-1} \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) \\ &= E_t \left( AL_{t+k} \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k+\Delta} e^{-\int_t^{t+k+\Delta} l_u du} \right) \\ & \quad + E_t \left( AL_{t+k+\Delta} \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k+2\Delta} e^{-\int_t^{t+k+2\Delta} l_u du} \right) + \dots \\ & \quad + E_t \left( AL_{t+k+(T-2)\Delta} \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k+(T-1)\Delta} e^{-\int_t^{t+k+(T-1)\Delta} l_u du} \right). \end{aligned}$$

Untuk menjabarkan model ini, digunakan dua asumsi yang bertujuan memudahkan proses penjabaran model antara lain:

1. Konversi tingkat *forward* Libor ke *spot* Libor

$$L_t = l_t + \theta \quad (4.21)$$

dengan  $\theta$  merupakan konstanta untuk  $t > t + k$ .

Asumsi ini diterapkan pada waktu setelah pembayaran kupon pertama  $t + k$ .

2. Pendekatan kontinu

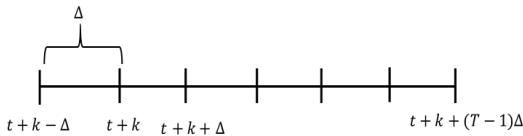
Dikarenakan interval waktu sangat kecil pada pembayaran kupon mengambang, sehingga digunakan pembayaran secara kontinu untuk mendekati pembayaran kupon secara diskrit

$$\begin{aligned} E_t \left( \sum_{s=2}^T l_{s-1} \Delta e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \right) \\ \approx E_t \left( \int_{t+k}^T l_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Langkah selanjutnya, dilakukan pembuktian terhadap Persamaan 4.22.

**Bukti.**

Pada Gambar 4.7 ditunjukkan ilustrasi linimasa (diagram waktu) pembayaran kupon pada obligasi bencana.



**Gambar 4.7.** Linimasa Pembayaran Kupon Obligasi Bencana

Ruas kiri pada Persamaan 4.22 dijabarkan menjadi,

$$\begin{aligned}
 & E_t \left( \sum_{s=2}^T l_{s-1} \Delta e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \right) \\
 &= E_t (l_1 \Delta e^{-\int_t^2 l_u du} e^{-\int_t^2 \lambda_u du} + l_2 \Delta e^{-\int_t^3 l_u du} e^{-\int_t^3 \lambda_u du} + \dots \\
 &+ l_{T-1} \Delta e^{-\int_t^T l_u du} e^{-\int_t^T \lambda_u du}). \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

Indeks waktu dimulai pada  $s = 2$  atau  $t + k + \Delta$  hingga waktu jatuh tempo obligasi  $T$ , sehingga Persamaan 4.23 dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
 & E_t \left( \sum_{s=2}^T l_{s-1} \Delta e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \right) \\
 &= E_t (l_{t+k} \Delta e^{-\int_t^{t+k+\Delta} l_u du} e^{-\int_t^{t+k+\Delta} \lambda_u du} \\
 &+ l_{t+k+\Delta} \Delta e^{-\int_t^{t+k+2\Delta} l_u du} e^{-\int_t^{t+k+2\Delta} \lambda_u du} + \dots \\
 &+ l_{t+k+(T-2)\Delta} \Delta e^{-\int_t^{t+k+(T-1)\Delta} l_u du} e^{-\int_t^{t+k+(T-1)\Delta} \lambda_u du}).
 \end{aligned}$$

Diasumsikan jika  $e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du}$  adalah konstanta karena akan dicari jumlah tingkat *spot* dari setiap pembayaran kupon dari waktu pembayaran kupon pertama hingga waktu jatuh tempo. Dengan menggunakan sifat notasi sigma matematika diperoleh:

$$\begin{aligned}
 & E_t \left( \sum_{s=2}^T l_{s-1} \Delta e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \right) \\
 &= E_t \left( e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \left[ \sum_{s=2}^T l_{s-1} \Delta \right] \right) \\
 &= E_t \left( e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} [l_1 \Delta + l_2 \Delta + \dots + l_{T-1} \Delta] \right).
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan indeks waktu diperoleh,

$$\begin{aligned}
 & E_t \left( \sum_{s=2}^T l_{s-1} \Delta e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \right) \\
 &= E_t (e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} [l_{t+k} \Delta + l_{t+k+\Delta} \Delta + \dots + l_{t+k+(T-2)\Delta} \Delta]).
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan integral sebagai limit dari jumlahan Riemann yaitu,

$$\int_a^b f(s)ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta s$$

dengan,

$$\Delta s = \frac{b-a}{n} = \frac{t+k+(T-1)\Delta - (t+k)}{n}.$$

Sedemikian hingga, diperoleh hasil integral sebagai limit dari jumlahan Riemann terhadap indeks waktu  $s$  pada tingkat *spot* Libor yaitu,

$$\begin{aligned} \int_{t+k}^T l_s ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n l_i \frac{t+k+(T-1)\Delta - (t+k)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(T-1)\Delta}{n} \sum_{i=1}^n 1 \sum_{i=1}^n l_i \\ &= l(T-1)\Delta \end{aligned}$$

dengan  $(T-1)\Delta$  menyatakan indeks waktu pada ruas kiri.

Persamaan 4.22 dimulai dari  $s = 2$ . Berdasarkan pemaparan diatas diperoleh pendekatan pembayaran diskrit dengan menggunakan pembayaran kontinu,

$$E_t \left( \int_{t+k}^T l_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \right).$$

Langkah selanjutnya, dilakukan penjabaran terhadap model sisa pembayaran kupon dengan menggunakan dua asumsi diatas,

$$\begin{aligned} E_t \left( A \sum_{s=2}^T L_{s-1} \Delta \mathbf{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) &= A E_t (L_1 \Delta \mathbf{1}_{\tau > 2} e^{-\int_t^2 l_u du} \\ &\quad + L_2 \Delta \mathbf{1}_{\tau > 3} e^{-\int_t^3 l_u du} \\ &\quad + \dots + L_{T-1} \Delta \mathbf{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du}). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Berdasarkan asumsi pertama pada Persamaan 4.21, Persamaan 4.24 dapat dituliskan menjadi,

$$\begin{aligned}
& E_t \left( A \sum_{s=2}^T L_{s-1} \Delta \mathbf{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) \\
&= A E_t \left( (l_1 + \theta) \Delta \mathbf{1}_{\tau > 2} e^{-\int_t^2 l_u du} + (l_2 + \theta) \Delta \mathbf{1}_{\tau > 3} e^{-\int_t^3 l_u du} \right. \\
&\quad \left. + \dots + (l_{T-1} + \theta) \Delta \mathbf{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du} \right) \\
&= A E_t \left( l_1 \Delta \mathbf{1}_{\tau > 2} e^{-\int_t^2 l_u du} + \theta \mathbf{1}_{\tau > 2} e^{-\int_t^2 l_u du} \right. \\
&\quad \left. + l_2 \Delta \mathbf{1}_{\tau > 3} e^{-\int_t^3 l_u du} + \theta \mathbf{1}_{\tau > 3} e^{-\int_t^3 l_u du} \right. \\
&\quad \left. + \dots + l_{T-1} \Delta \mathbf{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du} + \theta \mathbf{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du} \right) \\
&= A \left[ E_t \left( l_1 \Delta \mathbf{1}_{\tau > 2} e^{-\int_t^2 l_u du} + l_2 \Delta \mathbf{1}_{\tau > 3} e^{-\int_t^3 l_u du} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \dots + l_{T-1} \Delta \mathbf{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du} \right) + E_t \left( \theta \mathbf{1}_{\tau > 2} e^{-\int_t^2 l_u du} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \theta \mathbf{1}_{\tau > 3} e^{-\int_t^3 l_u du} + \dots + l_{T-1} \Delta \mathbf{1} + \dots + \theta \mathbf{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du} \right) \right]. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Oleh sebab itu, Persamaan 4.25 dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
E_t \left( \sum_{s=2}^T A L_{s-1} \Delta \mathbf{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) &= E_t \left( A \Delta \sum_{s=2}^T l_{s-1} \mathbf{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) \\
&\quad + E_t \left( A \theta \Delta \sum_{s=2}^T \mathbf{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right). \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Penjabaran suku pertama pada ruas kanan Persamaan 4.26 digunakan Persamaan [4],

$$E_t \left( A \Delta \sum_{s=2}^T l_{s-1} \mathbf{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) = E_t \left( A \Delta \sum_{s=2}^T l_{s-1} e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \right). \tag{4.27}$$

Selanjutnya, dilakukan pembuktian terhadap Persamaan 4.27.

**Bukti.**

Nilai ekspektasi terhadap fungsi indikator  $\mathbb{1}_{\tau > s}$  dicari dengan menggunakan sifat nilai ekspektasi, oleh karena itu ruas kiri pada Persamaan 4.27 dapat dituliskan sebagai berikut,

$$E_t \left( A\Delta \sum_{s=2}^T l_{s-1} \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) = A\Delta \sum_{s=2}^T l_{s-1} e^{-\int_t^s l_u du} E_t (\mathbb{1}_{\tau > s}) \quad (4.28)$$

Berdasarkan teori *law of total expectation* pada Teorema 2.4 yang menyatakan bahwa nilai ekspektasi dari variabel acak sama dengan jumlah nilai ekspektasi dari variabel acak bersyarat terhadap variabel acak yang kedua yakni  $E(E(X|Y)) = E(X)$ . Ruas kanan pada Persamaan 4.28 dapat dituliskan sebagai berikut,

$$A\Delta \sum_{s=2}^T l_{s-1} e^{-\int_t^s l_u du} E_t (\mathbb{1}_{\tau > s}) = A\Delta \sum_{s=2}^T l_{s-1} e^{-\int_t^s l_u du} E_t \left( E_t (\mathbb{1}_{\tau > s} | \mathcal{F}_t^X) \right) \quad (4.29)$$

dengan  $X$  adalah  $\mathbb{1}_{\tau > s}$  dan  $Y$  adalah  $\mathcal{F}_t^X$ .

Kemudian dicari nilai dari  $E_t (\mathbb{1}_{\tau > s} | \mathcal{F}_t^X)$  dengan menggunakan persamaan yakni [20],

$$P(\tau > s | \mathcal{F}_t^X) = E_t(\mathbb{1}_{\tau > s} | \mathcal{F}_t^X) = e^{-\int_t^s \lambda_u du}. \quad (4.30)$$

Selanjutnya, dilakukan pembuktian terhadap Persamaan 4.30.

**Bukti.**

Nilai ekspektasi dari fungsi indikator  $E_t[\mathbb{1}_{\tau > s} | \mathcal{F}_t^X]$  dapat dicari dengan menggunakan definisi dari nilai ekspektasi bersyarat yang ada pada Definisi 2.7 sedemikian hingga:

$$\begin{aligned} E_t[\mathbb{1}_{\tau > s} | \mathcal{F}_t^X] &= \sum_{x \in R_{\mathbb{1}_{\tau > s}}} x P(X = x | \mathcal{F}_t^X) \\ &= 1P(\mathbb{1}_{\tau > s} = 1 | \mathcal{F}_t^X) + 0P(\mathbb{1}_{\tau > s} = 0 | \mathcal{F}_t^X) \\ &= 1P(\mathbb{1}_{\tau > s} = 1 | \mathcal{F}_t^X) \\ &= P(\tau > s | \mathcal{F}_t^X). \end{aligned}$$



$P(\tau > s)$  menyatakan peluang apabila waktu acak terjadinya suatu bencana melebihi waktu pembayaran kupon  $s \in [t, T]$ . Dengan kata lain, tidak terjadi bencana dalam interval waktu tersebut. Karena bencana yang terjadi diasumsikan mengikuti proses Poisson non-homogen, sehingga selanjutnya dicari peluang tidak terjadi bencana mengikuti proses Poisson non-homogen dalam interval waktu  $t$  hingga  $s$  dengan menggunakan Persamaan 2.13 dan Persamaan 2.14,

$$\begin{aligned} P\{X(s) - X(t) = 0\} &= e^{-(m(s)-m(t))} \frac{[m(s) - m(t)]^0}{0!} \\ &= e^{-\int_t^s \lambda_u du} \frac{\{\int_t^s \lambda_u du\}^0}{0!} \\ &= e^{-\int_t^s \lambda_u du}. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, Persamaan 4.30 terbukti.

Kemudian, nilai ekspektasi fungsi indikator tersebut disubstitusikan ke dalam Persamaan 4.29 sehingga dapat membuktikan Persamaan 4.27. Berdasarkan asumsi pendekatan kontinu pada Persamaan 4.22, penjabaran model sisa pembayaran kupon dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\begin{aligned} E_t \left( \sum_{s=2}^T L_{s-1} \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) &= E_t \left( A \int_{t+k}^T l_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \right) \\ &\quad + E_t \left( A \theta \Delta \sum_{s=2}^T \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Untuk memudahkan proses penjabaran, dimisalkan:

$$A \frac{d(e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du})}{ds} = -A(l_s + \lambda_s) e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du}. \tag{4.32}$$

Langkah selanjutnya, membuktikan Persamaan 4.32 berdasarkan Teorema Fundamental Kalkulus I yakni [21].

**Bukti.**

**Teorema 4.1.** *Jika  $f$  kontinu pada  $[a,b]$ , maka fungsi  $g$  didefinisikan dengan*

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b$$

*kontinu pada  $[a,b]$  serta diferensiabel pada  $(a,b)$ , sehingga  $g'(x) = f(x)$ .*

Pembuktian terhadap Teorema 4.1 terdapat pada Lampiran C.

Berdasarkan Teorema 4.1, Persamaan 4.32 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A \frac{d}{ds} \left[ e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \right] = A \frac{d}{ds} \left[ e^{-\int_t^s (l_u + \lambda_u) du} \right].$$

Misal  $f(s) = -\int_t^s (l_u + \lambda_u) du$ ,

$$\begin{aligned} A \frac{d}{ds} \left[ e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \right] &= A \frac{d}{ds} \left[ e^{f(s)} \right] \\ &= A f'(s) e^{f(s)}. \end{aligned}$$

Mengacu pada Teorema 4.1 dapat dicari  $f'(s)$  yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( -\int_t^s (l_u + \lambda_u) du \right) &= -f(s) \\ &= -(l_s + \lambda_s) \end{aligned}$$

di mana  $f(u) = (l_u + \lambda_u)$ .

Sedemikian hingga terbukti bahwa,

$$\begin{aligned} A \frac{d}{ds} \left[ e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \right] &= -A(l_s + \lambda_s) e^{-\int_t^s (l_u + \lambda_u) du} \\ &= -A(l_s + \lambda_s) e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du}. \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk memperoleh hasil penjabaran suku pertama di ruas kanan pada Persamaan 4.31, masing-masing ruas pada Persamaan 4.32 diintegrasikan terhadap  $s$  sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 & - A \int_{t+k}^T (l_s + \lambda_s) e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \\
 & = A \int_{t+k}^T \frac{d(e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du})}{ds} ds \\
 & = A \left( e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \Big|_{t+k}^T \right) \\
 & = A \left( e^{-\int_t^T l_u du} e^{-\int_t^T \lambda_u du} - e^{-\int_t^{t+k} l_u du} e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \right).
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Sedemikian hingga Persamaan 4.33 dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}
 & A \left( - \int_{t+k}^T l_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds - \int_{t+k}^T \lambda_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \right) \\
 & = A \left( e^{-\int_t^T l_u du} e^{-\int_t^T \lambda_u du} - e^{-\int_t^{t+k} l_u du} e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \right).
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Suku kedua pada Persamaan 4.34 di sisi kiri dipindah ke sisi kanan sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
 -A \int_{t+k}^T l_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds & = A \left( e^{-\int_t^T l_u du} e^{-\int_t^T \lambda_u du} \right) \\
 & \quad - A \left( e^{-\int_t^{t+k} l_u du} e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \right) \\
 & \quad + A \int_{t+k}^T \lambda_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Kemudian setiap suku baik di sisi kanan maupun sisi kiri pada Per-

samaan 4.35 dikalikan dengan (-1), menghasilkan:

$$\begin{aligned}
 A \int_{t+k}^T l_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds &= -A \left( e^{-\int_t^T l_u du} e^{-\int_t^T \lambda_u du} \right) \\
 &+ A \left( e^{-\int_t^{t+k} l_u du} e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \right) \\
 &- A \int_{t+k}^T \lambda_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Nilai ekspektasi terhadap Persamaan 4.36 dapat ditulis menjadi,

$$\begin{aligned}
 E_t \left( A \int_{t+k}^T l_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \right) \\
 = AE_t \left( e^{-\int_t^{t+k} l_u du} e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} - e^{-\int_t^T l_u du} e^{-\int_t^T \lambda_u du} \right) \\
 - \int_{t+k}^T \lambda_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Berdasarkan sifat nilai ekspektasi  $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$ , Persamaan 4.37 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 E_t \left( A \int_{t+k}^T l_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \right) \\
 = AE_t \left( e^{-\int_t^{t+k} l_u du} e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \right) - AE_t \left( e^{-\int_t^T l_u du} e^{-\int_t^T \lambda_u du} \right) \\
 - AE_t \left( \int_{t+k}^T \lambda_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \right) \\
 = Ap(t, t+k) e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} - Ap(t, T) e^{-\int_t^T \lambda_u du} \\
 - A \int_{t+k}^T p(t, s) \lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Selanjutnya dicari nilai ekspektasi terhadap penjabaran suku

kedua di sebelah kanan pada Persamaan 4.31 yaitu:

$$\begin{aligned}
& E_t \left( A\theta\Delta \sum_{s=2}^T \mathbb{1}_{\tau>s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) \\
&= E_t(A\theta\Delta \mathbb{1}_{\tau>2} e^{-\int_t^2 l_u du} + A\theta\Delta \mathbb{1}_{\tau>3} e^{-\int_t^3 l_u du} + \dots \\
&\quad + A\theta\Delta \mathbb{1}_{\tau>T} e^{-\int_t^T l_u du}) \\
&= E_t(A\theta\Delta \mathbb{1}_{\tau>2} e^{-\int_t^2 l_u du}) + E_t(A\theta\Delta \mathbb{1}_{\tau>3} e^{-\int_t^3 l_u du}) + \dots \\
&\quad + E_t(A\theta\Delta \mathbb{1}_{\tau>T} e^{-\int_t^T l_u du}) \\
&= A\theta\Delta p(t, 2) e^{-\int_t^2 \lambda_u du} + A\theta\Delta p(t, 3) e^{-\int_t^3 \lambda_u du} + \dots \\
&\quad + A\theta\Delta p(t, T) e^{-\int_t^T \lambda_u du} \\
&= A\theta\Delta \sum_{s=2}^T p(t, s) e^{-\int_t^s \lambda_u du}. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Setelah dilakukan proses penjabaran diperoleh nilai harapan (ekspektasi) terhadap hasil penjabaran model sisa pembayaran kupon mengambang yang diterima dengan menjumlahkan Persamaan 4.38 dan 4.39 yaitu,

$$\begin{aligned}
& E_t \left( A \sum_{s=2}^T L_{s-1} \Delta \mathbb{1}_{\tau>s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) \\
&= Ap(t, t+k) e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} - Ap(t, T) e^{-\int_t^T \lambda_u du} \\
&\quad - A \int_{t+k}^T p(t, s) \lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds + A\theta\Delta \sum_{s=2}^T p(t, s) e^{-\int_t^s \lambda_u du}. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

## 4.2 Penjabaran Model Pembayaran *Spread* Tetap

Selain pembayaran kupon mengambang, obligasi bencana juga membayarkan *spread* tetap kepada pihak investor yang artinya tingkat *spread* yang dibayarkan secara periodik adalah tetap. Di

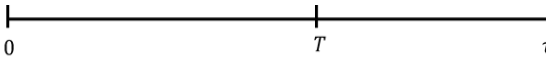
dalam model tersebut tingkat *spread* dinotasikan dengan  $c$ . Pembayaran *spread* dilakukan secara periodik dalam interval waktu  $s$  hingga  $T$  dengan catatan bencana kekeringan tidak terjadi selama kurun waktu tersebut. Berikut merupakan model pembayaran tetap *spread* pada obligasi bencana:

$$E_t \left( A \sum_{s=1}^T c \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right). \quad (4.41)$$

Pada model pembayaran *spread* terdapat tingkat spot (*spot rate*) yaitu  $e^{-\int_t^s l_u du}$  dan fungsi indikator yaitu:

$$\mathbb{1}_{\tau > s} := \begin{cases} 1 & \text{jika } \tau > s \\ 0 & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases}$$

Sama halnya fungsi indikator dalam model pembayaran kupon mengambang, fungsi bernilai 1 maka  $\tau > s$  terpenuhi yang menyatakan bahwa suatu kejadian bencana kekeringan tidak terjadi dalam indeks waktu  $s \in [t, T]$  karena waktu acak terjadinya suatu bencana ( $\tau$ ) lebih dari indeks waktu pembayaran *spread* tetap. Pada Gambar 4.8 ditampilkan linimasa (diagram waktu) pembayaran *spread* tetap untuk  $\tau > T$ . Sedangkan fungsi bernilai 0 menyatakan bahwa suatu kejadian bencana kekeringan terjadi dalam indeks waktu  $s \in [t, T]$  karena waktu acak terjadinya suatu bencana ( $\tau$ ) kurang dari indeks waktu pembayaran *spread* tetap.



**Gambar 4.8.** Linimasa Pembayaran *Spread* Tetap

Selanjutnya dilakukan penjabaran terhadap model pembayaran *spread*

tetap pada Persamaan 4.41,

$$\begin{aligned}
 E_t \left( A \sum_{s=1}^T c \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) &= E_t (Ac \Delta \mathbb{1}_{\tau > 1} e^{-\int_t^1 l_u du} \\
 &\quad + Ac \Delta \mathbb{1}_{\tau > 2} e^{-\int_t^2 l_u du} + \dots \\
 &\quad + Ac \Delta \mathbb{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du}).
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Berdasarkan Tabel 4.1, indeks waktu 1 menunjukkan waktu  $t+k$ , indeks waktu 2 menunjukkan waktu  $t+k+\Delta$ , dan seterusnya. Sedemikian hingga Persamaan 4.42 dapat dituliskan:

$$\begin{aligned}
 E_t \left( A \sum_{s=1}^T c \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) \\
 &= E_t (Ac \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k} e^{-\int_t^{t+k} l_u du} + Ac \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k+\Delta} e^{-\int_t^{t+k+\Delta} l_u du} + \dots \\
 &\quad + Ac \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k+(T-1)\Delta} e^{-\int_t^{t+k+(T-1)\Delta} l_u du}).
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Karena banyaknya kejadian antar waktu saling bebas sehingga dengan menggunakan sifat nilai harapan pada Lemma 1, Persamaan 4.43 menjadi:

$$\begin{aligned}
 E_t \left( A \sum_{s=1}^T c \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) \\
 &= E_t (Ac \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k} e^{-\int_t^{t+k} l_u du}) + E_t (Ac \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k+\Delta} e^{-\int_t^{t+k+\Delta} l_u du}) \\
 &\quad + \dots + E_t (Ac \Delta \mathbb{1}_{\tau > t+k+(T-1)\Delta} e^{-\int_t^{t+k+(T-1)\Delta} l_u du}).
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Berdasarkan sifat nilai harapan  $E[cf(X)] = cE[f(X)]$ , dengan  $c$  adalah konstanta, Persamaan 4.44 dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
 E_t \left( A \sum_{s=1}^T c \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) \\
 &= Ac \Delta e^{-\int_t^{t+k} l_u du} E_t(\mathbb{1}_{\tau > t+k}) + Ac \Delta e^{-\int_t^{t+k+\Delta} l_u du} E_t(\mathbb{1}_{\tau > t+k+\Delta}) \\
 &\quad + \dots + Ac \Delta e^{-\int_t^{t+k+(T-1)\Delta} l_u du} E_t(\mathbb{1}_{\tau > t+k+(T-1)\Delta}).
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Langkah selanjutnya yakni mencari nilai ekspektasi terhadap penjabaran model pembayaran tetap *spread* diawali dengan mencari nilai ekspektasi suku pertama di sebelah kanan pada Persamaan 4.45, suku kedua, dan seterusnya. Pada suku pertama dari Persamaan 4.45, indeks waktu berada di antara  $t$  hingga  $t+k$  yaitu waktu pembayaran kupon pertama. Suku pertama dari Persamaan 4.45 menyatakan pembayaran tetap *spread* pada pembayaran kupon pertama yaitu:

$$Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k} l_u du} E_t(\mathbb{1}_{\tau > t+k}). \quad (4.46)$$

Nilai ekspektasi pada Persamaan 4.46 dicari dengan menggunakan persamaan [4]:

$$Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k} l_u du} E_t(\mathbb{1}_{\tau > t+k}) = E_t \left( Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k} l_u du} e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \right). \quad (4.47)$$

Selanjutnya, dilakukan pembuktian terhadap Persamaan 4.47.

### Bukti.

Mengacu pada teori *law of total expectation* pada Teorema 2.4, ruas kiri Persamaan 4.46 dapat dituliskan menjadi:

$$Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k} l_u du} E_t(\mathbb{1}_{\tau > t+k}) = Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k} l_u du} E_t(E_t(\mathbb{1}_{\tau > t+k} | \mathcal{F}_t^X)). \quad (4.48)$$

dengan  $X$  adalah  $\mathbb{1}_{\tau > t+k}$  dan  $Y$  adalah  $\mathcal{F}_t^X$ .

Langkah pertama, dicari nilai ekspektasi dari  $E_t(\mathbb{1}_{\tau > t+k} | \mathcal{F}_t^X)$ . Nilai ekspektasi dari fungsi indikator  $\mathbb{1}_{\tau > t+k}$  adalah  $P(\tau > t+k)$ , dengan nilai peluang ketika  $\tau > t+k$  dapat ditentukan dengan menggunakan Persamaan 4.14 yakni[20]:

$$P(\tau > t+k | \mathcal{F}_t^X) = E_t(\mathbb{1}_{\tau > t+k} | \mathcal{F}_t^X) = e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du}.$$

### Bukti.

Nilai ekspektasi dari fungsi indikator  $E_t[\mathbb{1}_{\tau > t+k} | \mathcal{F}_t^X]$  dapat dicari



dengan menggunakan definisi dari nilai ekspektasi bersyarat yang ada pada Definisi 2.7 sedemikian hingga:

$$\begin{aligned}
 E_t[\mathbb{1}_{\tau > t+k} | \mathcal{F}_t^X] &= \sum_{x \in R_{\mathbb{1}_{\tau > t+k}}} x P(X = x | \mathcal{F}_t^X) \\
 &= 1P(\mathbb{1}_{\tau > t+k} = 1 | \mathcal{F}_t^X) + 0P(\mathbb{1}_{\tau > t+k} = 0 | \mathcal{F}_t^X) \\
 &= 1P(\mathbb{1}_{\tau > t+k} = 1 | \mathcal{F}_t^X) \\
 &= P(\tau > t+k | \mathcal{F}_t^X).
 \end{aligned}$$

Peluang dari proses Poisson non-homogen dengan banyaknya bencana yang terjadi dalam interval waktu  $t$  hingga  $t+k$  yaitu 0 karena  $\tau > t+k$ . Dengan menggunakan Persamaan 2.13 dan 2.14 dicari peluang tidak ada bencana kekeringan yang terjadi dengan  $n = 0$  dalam interval waktu  $t$  hingga  $t+k$  adalah:

$$\begin{aligned}
 P\{X(t+k) - X(t) = 0\} &= e^{-(m(t+k)-m(t))} \frac{[m(t+k) - m(t)]^0}{0!} \\
 &= e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \frac{\{\int_t^{t+k} \lambda_u du\}^0}{0!} \\
 &= e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} 1 \\
 &= e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du}.
 \end{aligned}$$

Nilai ekspektasi fungsi indikator  $\mathbb{1}_{\tau > t+k}$  disubstitusikan ke dalam Persamaan 4.48 sehingga Persamaan 4.47 terbukti. Karena tingkat Libor dan bencana merupakan dua hal yang saling bebas (independen). Oleh karena itu sesuai dengan sifat nilai ekspektasi, ruas kanan Persamaan 4.47 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 &Ac\Delta E_t \left( e^{-\int_t^{t+k} l_u du} e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \right) \\
 &= Ac\Delta E_t(e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du}) E_t(e^{-\int_t^{t+k} l_u du}) \\
 &= Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} E_t(e^{-\int_t^{t+k} l_u du}). \tag{4.49}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi dari pasar obligasi bahwa  $p(t, t) = 1$  untuk semua  $t$  sehingga untuk  $t = t+k$  berlaku  $p(t+k, t+k) = 1$ .

Harga obligasi pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $t + k$  ialah:

$$\begin{aligned} p(t, t + k) &= p(t + k, t + k)e^{-\int_t^{t+k} l_u du} \\ &= 1e^{-\int_t^{t+k} l_u du} \\ &= e^{-\int_t^{t+k} l_u du}. \end{aligned}$$

Diasumsikan bahwa  $p(t, t + k)$  yakni harga obligasi tanpa kupon pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $t + k$ , memiliki nilai yang sama dengan nilai harapan dari nilai saat ini (*present value*) terhadap nilai yang diperoleh dimasa depan sehingga  $p(t, t + k)$  dapat dituliskan menjadi:

$$p(t, t + k) = E_t(e^{-\int_t^{t+k} l_u du}). \quad (4.50)$$

Langkah selanjutnya, dilakukan substitusi terhadap Persamaan 4.50 ke dalam Persamaan 4.49, menghasilkan:

$$\begin{aligned} Ac\Delta E_t(\mathbf{1}_{\tau > t+k} e^{-\int_t^{t+k} l_u du}) &= Ac\Delta E_t(\mathbf{1}_{\tau > t+k}) E_t(e^{-\int_t^{t+k} l_u du}) \\ &= Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} e^{-\int_t^{t+k} l_u du}. \end{aligned}$$

Dengan melakukan proses yang sama pada suku kedua dan seterusnya hingga  $s = T$  dalam Persamaan 4.45 diperoleh,

$$\begin{aligned} E_t \left( A \sum_{s=1}^T c\Delta \mathbf{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) &= Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} p(t, t + k) \\ &\quad + Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k+\Delta} \lambda_u du} p(t, t + k + \Delta) \\ &\quad + \dots + Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k+(T-1)\Delta} \lambda_u du} \\ &\quad p(t, t + k + (T - 1)\Delta). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Dengan mengubah waktu  $t+k, t+k+\Delta, \dots, t+k+(T-1)\Delta$  menjadi indeks waktu  $1, 2, \dots, T$ . Persamaan 4.51 dapat ditulis

menjadi:

$$\begin{aligned}
 E_t \left( A \sum_{s=1}^T c \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) \\
 &= Ac \Delta e^{-\int_t^1 \lambda_u du} p(t, 1) + Ac \Delta e^{-\int_t^2 \lambda_u du} p(t, 2) + \dots \\
 &\quad + Ac \Delta e^{-\int_t^T \lambda_u du} p(t, T) \\
 &= Ac \Delta \sum_{s=1}^T e^{-\int_t^s \lambda_u du} p(t, s).
 \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran diatas ekspektasi terhadap penjabaran model pembayaran *spread* tetap ialah:

$$E_t \left( A \sum_{s=1}^T c \Delta \mathbb{1}_{\tau > s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) = Ac \Delta \sum_{s=1}^T e^{-\int_t^s \lambda_u du} p(t, s). \quad (4.52)$$

### 4.3 Penjabaran Model Pembayaran Nilai Nominal pada Obligasi Bencana

Dalam mekanisme obligasi bencana telah dijelaskan bahwasanya pada saat obligasi bencana mengalami jatuh tempo, nilai nominal (*face value*) yang telah diberikan oleh pihak investor kepada pihak penerbit obligasi akan dikembalikan sepenuhnya kepada pihak investor dengan syarat tidak terjadi bencana selama masa hidup obligasi bencana tersebut. Dalam Tugas Akhir ini model pembayaran nilai nominal dituliskan sebagai berikut:

$$E_t \left( A \mathbb{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du} \right) \quad (4.53)$$

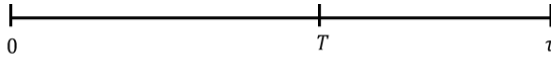
dengan  $A$  menyatakan nilai nominal dari obligasi bencana.

Pada Persamaan 4.53 terdapat tingkat *spot* dalam rentang waktu  $t$  hingga  $T$  yaitu  $e^{-\int_t^T l_u du}$  serta terdapat fungsi indikator dari bencana yang terjadi dalam rentang waktu penerbitan obligasi

bencana  $t$  hingga obligasi bencana mengalami jatuh tempo  $T$  yaitu:

$$\mathbb{1}_{\tau > T} := \begin{cases} 1 & \text{jika } \tau > T \\ 0 & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases}$$

Pada Gambar 4.9 ditampilkan linimasa (diagram waktu) terkait pembayaran nilai nominal jika tidak terjadi bencana, terlihat bahwa waktu acak terjadinya suatu bencana  $\tau$  lebih dari waktu jatuh tempo obligasi  $T$ , sehingga dapat disimpulkan tidak terjadi bencana selama masa hidup obligasi. Karena dalam mekanisme obligasi bencana, pembayaran nilai nominal hanya dilakukan sekali maka dari itu tidak dilakukan penjabaran melainkan langsung mencari nilai ekspektasi dari model pembayaran nilai nominal.



**Gambar 4.9.** Linimasa Pembayaran Nilai Nominal

Berdasarkan pembuktian pada Persamaan 4.30 sehingga diperoleh  $E_t(\mathbb{1}_{\tau > T} | \mathcal{F}_t^X) = P(\tau > T | \mathcal{F}_t^X) = e^{-\int_t^T \lambda_u du}$  [4]. Dengan demikian, Persamaan 4.53 dapat dituliskan kembali menjadi:

$$E_t \left( A \mathbb{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du} \right) = E_t \left( A e^{-\int_t^T \lambda_u du} e^{-\int_t^T l_u du} \right). \quad (4.54)$$

Selanjutnya, Persamaan 4.54 akan dibuktikan.

**Bukti.**

Dengan menggunakan sifat nilai ekspektasi akan dicari nilai ekspektasi dari  $\mathbb{1}_{\tau > T}$ , sedemikian hingga ruas kiri Persamaan 4.54 dapat dituliskan kembali menjadi:

$$E_t \left( A \mathbb{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du} \right) = e^{-\int_t^T l_u du} A E_t (\mathbb{1}_{\tau > T}). \quad (4.55)$$

Berdasarkan teori *law of total expectation* pada Teorema 2.4 dengan  $E(E(X|Y)) = E(X)$ , ruas kanan Persamaan 4.55 dapat dituliskan kembali menjadi:

$$e^{-\int_t^T l_u du} A E_t (\mathbb{1}_{\tau > T}) = e^{-\int_t^T l_u du} A E_t (E_t (\mathbb{1}_{\tau > T} | \mathcal{F}_t^X)) \quad (4.56)$$

dengan  $X$  adalah  $\mathbb{1}_{\tau > T}$  dan  $Y$  adalah  $\mathcal{F}_t^X$ .

Langkah pertama, dicari nilai ekspektasi dari  $E_t(\mathbb{1}_{\tau > T} | \mathcal{F}_t^X)$ . Nilai ekspektasi dari fungsi indikator  $\mathbb{1}_{\tau > T}$  adalah  $P(\tau > T)$ , dengan nilai peluang ketika  $\tau > T$  dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan berikut[20]:

$$P(\tau > T | \mathcal{F}_t^X) = E_t(\mathbb{1}_{\tau > T} | \mathcal{F}_t^X) = e^{-\int_t^T \lambda_u du}. \quad (4.57)$$

Selanjutnya, dilakukan pembuktian terhadap Persamaan 4.57.

### Bukti.

Nilai ekspektasi dari fungsi indikator  $E_t[\mathbb{1}_{\tau > T} | \mathcal{F}_t^X]$  dapat dicari dengan menggunakan definisi dari nilai ekspektasi bersyarat yang ada pada Definisi 2.7 sedemikian hingga:

$$\begin{aligned} E_t[\mathbb{1}_{\tau > T} | \mathcal{F}_t^X] &= \sum_{x \in R_{\mathbb{1}_{\tau > T}}} xP(X = x | \mathcal{F}_t^X) \\ &= 1P(\mathbb{1}_{\tau > T} = 1 | \mathcal{F}_t^X) + 0P(\mathbb{1}_{\tau > T} = 0 | \mathcal{F}_t^X) \\ &= P(\tau > T | \mathcal{F}_t^X). \end{aligned}$$

Dalam Tugas Akhir ini, suatu bencana yang terjadi diasumsikan mengikuti proses Poisson non-homogen. Dengan menggunakan Persamaan 2.13 dan 2.14 dicari peluang tidak ada bencana kekeringan yang terjadi dengan  $n = 0$  dalam interval waktu  $t$  hingga  $T$  adalah:

$$\begin{aligned} P\{X(T) - X(t) = 0\} &= e^{-(m(T)-m(t))} \frac{[m(T) - m(t)]^0}{0!} \\ &= e^{-\int_t^T \lambda_u du} \frac{\{\int_t^T \lambda_u du\}^0}{0!} \\ &= e^{-\int_t^T \lambda_u du}. \end{aligned}$$

Berdasarkan pemaparan diatas, Persamaan 4.57 terbukti.

Selanjutnya, nilai peluang  $\tau > T$  yang telah diperoleh pada Persamaan 4.57 disubstitusikan ke dalam Persamaan 4.56 sehingga Persamaan 4.54 terbukti.

$$E_t \left( A e^{-\int_t^T \lambda_u du} e^{-\int_t^T \lambda_u du} \right)$$

Karena proses tingkat Libor saling bebas terhadap kejadian bencana sehingga menghasilkan,

$$\begin{aligned} E_t \left( A e^{-\int_t^T l_u du} e^{-\int_t^T \lambda_u du} \right) &= A \left( E_t \left( e^{-\int_t^T \lambda_u du} \right) E_t \left( e^{-\int_t^T l_u du} \right) \right) \\ &= A e^{-\int_t^T \lambda_u du} E_t \left( e^{-\int_t^T l_u du} \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Selanjutnya, berdasarkan asumsi dari pasar obligasi bahwa  $p(t, t) = 1$  untuk semua  $t$  sehingga untuk  $t = T$  berlaku  $p(T, T) = 1$ . Oleh karena itu, harga obligasi pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $T$  dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} p(t, T) &= p(T, T) e^{-\int_t^T l_u du} \\ &= 1 e^{-\int_t^T l_u du} \\ &= e^{-\int_t^T l_u du}. \end{aligned}$$

Diasumsikan bahwa  $p(t, T)$  merupakan harga obligasi tanpa kupon pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $T$ , memiliki nilai yang sama dengan nilai harapan dari nilai saat ini (*present value*) terhadap nilai yang diperoleh dimasa depan sehingga harga obligasi tanpa kupon dengan waktu jatuh tempo  $T$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$p(t, T) = E_t(e^{-\int_t^T l_u du}).$$

Setelah nilai ekspektasi terhadap tingkat *spot* (*spot rate*) didapatkan, selanjutnya nilai ekspektasi tersebut disubstitusikan ke dalam Persamaan 4.58 sedemikian hingga diperoleh penjabaran terhadap model pembayaran nilai nominal,

$$\begin{aligned} E_t \left( A \mathbb{1}_{\tau > T} e^{-\int_t^T l_u du} \right) &= A e^{-\int_t^T \lambda_u du} e^{-\int_t^T l_u du} \\ &= A e^{-\int_t^T \lambda_u du} p(t, T). \end{aligned} \quad (4.59)$$

#### 4.4 Penjabaran Model Pembayaran Sisa Nilai Nominal pada Obligasi Bencana

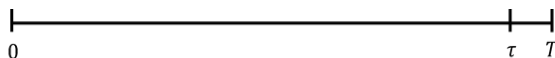
Berdasarkan mekanisme obligasi bencana, apabila suatu bencana terjadi selama masa hidup obligasi, maka obligasi bencana akan membayarkan nilai kerugian yang dialami akibat bencana tersebut. Nilai kerugian tersebut diperoleh dari pembayaran nilai nominal yang telah dibayarkan oleh pihak pemegang obligasi pada saat obligasi bencana diterbitkan. Ketika obligasi bencana mengalami jatuh tempo, sisa nilai nominal yang dinotasikan dengan  $Y_\tau$  akan dibayarkan oleh pihak penerbit kepada investor. Berikut merupakan model pembayaran sisa nilai nominal:

$$E_t \left( Y_\tau \mathbb{1}_{\tau \leq T} e^{-\int_t^\tau l_u du} \right). \quad (4.60)$$

Fungsi indikator pada Persamaan 4.60 memiliki definisi,

$$\mathbb{1}_{\tau \leq T} := \begin{cases} 1 & \text{jika } \tau \leq T \\ 0 & \tau > T. \end{cases}$$

Fungsi indikator  $\mathbb{1}_{\tau \leq T}$  memiliki arti bahwa pembayaran sisa nilai nominal terjadi apabila waktu acak terjadinya bencana kurang dari waktu jatuh tempo obligasi.



**Gambar 4.10.** Linimasa Terjadinya Bencana dalam Obligasi Bencana

Selanjutnya, Persamaan 4.60 dilakukan penjabaran. Untuk menjabarkan model digunakan persamaan yaitu [20],

$$E_t \left( Y_\tau \mathbb{1}_{\tau \leq T} e^{-\int_t^\tau l_u du} \right) = E_t \left( \int_t^T Y_s \lambda_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \right). \quad (4.61)$$

#### Bukti

Pada Persamaan 4.61, diasumsikan waktu acak terjadinya suatu bencana  $\tau$  tepat pada saat waktu pembayaran kupon  $s$  sehingga indeks

waktu dalam fungsi indikator menjadi  $\tau = s \leq T$ . Berdasarkan diagram waktu (linimasa) terjadinya bencana pada Gambar 4.10, pembayaran sisa nilai nominal dapat dilakukan apabila suatu bencana terjadi selama masa hidup obligasi yakni pada saat  $\tau \leq T$ .

Tetapi, apabila pembayaran sisa nilai nominal tersebut dilihat berdasarkan diagram waktu (linimasa) pembayaran kupon pada Gambar 4.11, pembayaran sisa nilai nominal hanya akan dibayarkan apabila waktu acak terjadinya bencana terjadi tepat pada saat waktu pembayaran kupon  $s$  sehingga indeks waktu  $\tau = s \leq T$  dapat dituliskan menjadi  $\tau = s$ .

Pada Gambar 4.11 ditampilkan diagram waktu (linimasa) terkait waktu pembayaran kupon.



**Gambar 4.11.** Linimasa Pembayaran Kupon

Oleh karena itu, ruas kiri pada Persamaan 4.61 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E_t \left( Y_s \mathbb{1}_{\tau=s} e^{-\int_t^s l_u du} \right). \quad (4.62)$$

Fungsi indikator pada Persamaan 4.62 memiliki definisi,

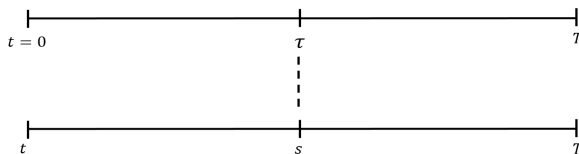
$$\mathbb{1}_{\tau=s} := \begin{cases} 1, & \text{jika } \tau = s \\ 0, & \text{jika } \tau \neq s \end{cases}$$

sehingga ketika fungsi indikator  $\mathbb{1}_{\tau=s} = 1$  memiliki arti bahwa pembayaran sisa nilai dilakukan jika waktu acak terjadinya bencana sama dengan waktu pembayaran kupon. Sedangkan, ketika fungsi indikator  $\mathbb{1}_{\tau=s} = 0$  memiliki arti bahwa pembayaran sisa nilai nominal tidak akan dibayarkan ketika waktu acak terjadinya bencana tidak sama dengan waktu pembayaran kupon.

Adapun asumsi waktu acak terjadinya bencana  $\tau$  tepat pada saat waktu pembayaran kupon  $s$  sehingga  $\tau = s$  ditunjukkan pada Gambar 4.12. Mengacu pada Gambar 4.12 terlihat bahwa sisa nilai nominal hanya akan dibayarkan ketika bencana terjadi tepat pada



saat waktu pembayaran kupon.



**Gambar 4.12.** Linimasa Asumsi  $\tau = s$

Mengacu pada [20] didefinisikan persamaan seperti berikut:

$$E_t \left( Y_s \mathbb{1}_{\tau=s} e^{-\int_t^s l_u du} \right) = E_t \left( \int_t^T Y_s e^{-\int_t^s l_u du} E_t \left( \mathbb{1}_{\tau=s} | \mathcal{F}_t^X \right) ds \right). \quad (4.63)$$

Pertama, dicari nilai ekspektasi dari fungsi indikator bersyarat filtrasi pada Persamaan 4.63 yakni  $E_t \left( \mathbb{1}_{\tau=s} | \mathcal{F}_t^X \right)$ . Diketahui bahwa nilai ekspektasi dari  $\mathbb{1}_{\tau=s}$  merupakan  $P(\tau = s)$  sehingga dicari nilai peluang dari  $\tau = s$  yang merupakan peluang terjadinya bencana selama masa hidup obligasi bencana berdistribusi proses Poisson non-homogen dengan menggunakan persamaan yaitu [20]:

$$P(\tau \in [s, s + dt] | \mathcal{F}_\tau^X) = \frac{dP(\tau \leq T | \mathcal{F}_\tau^X)}{ds} = \lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du}.$$

Selanjutnya, nilai ekspektasi  $E_t \left( \mathbb{1}_{\tau=s} | \mathcal{F}_t^X \right) = \lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du}$  disubstitusikan ke dalam Persamaan 4.63 sedemikian hingga menjadi:

$$E_t \left( Y_\tau \mathbb{1}_{\tau \leq T} e^{-\int_t^\tau l_u du} \right) = E_t \left( \int_t^T Y_s \lambda_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \right).$$

Oleh karena itu, Persamaan 4.61 terbukti.

Selanjutnya, dicari nilai ekspektasi terhadap ruas kanan pada Persamaan 4.61 yakni:

$$E_t \left( \int_t^T Y_s \lambda_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \right). \quad (4.64)$$

Diketahui bahwa pembayaran sisa nilai nominal bebas terhadap proses tingkat Libor. Nilai ekspektasi dari Persamaan 4.64 yaitu:

$$\begin{aligned} & E_t \left( \int_t^T Y_s \lambda_s e^{-\int_t^s l_u du} e^{-\int_t^T \lambda_s ds} ds \right) \\ &= \int_t^T \lambda_s e^{-\int_t^T \lambda_s ds} ds \left( E_t \left( e^{-\int_t^s l_u du} \right) E_t(Y_s) \right). \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi dari pasar obligasi bahwa  $p(t, t) = 1$  untuk semua  $t$ , sehingga untuk  $t = s$  berlaku  $p(s, s) = 1$ . Oleh karena itu, harga obligasi pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $s$  dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} p(t, s) &= p(s, s) e^{-\int_t^s l_u du} \\ &= e^{-\int_t^s l_u du}. \end{aligned}$$

Diasumsikan bahwa  $p(t, s)$  yakni harga obligasi tanpa kupon pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $s$ , memiliki nilai yang sama dengan nilai harapan dari nilai saat ini (*present value*) terhadap nilai yang diperoleh dimasa depan sehingga  $p(t, s)$  dapat dituliskan menjadi:

$$p(t, s) = E_t(e^{-\int_t^s l_u du}).$$

Berdasarkan pemaparan diatas, hasil penjabaran model sisa nilai nominal diperoleh sebagai berikut,

$$E_t \left( Y_\tau \mathbb{1}_{\tau \leq T} e^{-\int_t^\tau l_u du} \right) = \int_t^T E_t(Y_s) \lambda_s p(t, s) e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds. \quad (4.65)$$

#### 4.5 Mendapatkan Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana

Setelah dilakukan penjabaran dan dicari nilai ekspektasi terhadap masing-masing komponen model penentuan harga obligasi bencana, selanjutnya nilai ekspektasi dari penjabaran tiap komponen model yaitu dilakukan penjumlahan sehingga ditemukan solusi

analitik untuk menentukan harga obligasi bencana. Nilai ekspektasi pada Persamaan 4.18, 4.40, 4.52, 4.59, dan 4.65 dijumlahkan dan dilakukan penyederhanaan sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 B(t) &= AL_{t+k-\Delta} \Delta p(t, t+k) e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} + Ap(t, t+k) e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \\
 &\quad - Ap(t, T) e^{-\int_t^T \lambda_u du} - A \int_{t+k}^T p(t, s) \lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \\
 &\quad + A\theta \Delta \sum_{s=2}^T p(t, s) e^{-\int_t^s \lambda_u du} + Ac\Delta \sum_{s=1}^T e^{-\int_t^s \lambda_u du} p(t, s) \\
 &\quad + Ae^{-\int_t^T \lambda_u du} p(t, T) + \int_t^T p(t, s) E_t(Y_s) \lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \quad (4.66)
 \end{aligned}$$

dengan  $B(t)$  menyatakan harga obligasi bencana pada waktu  $t$ .

Kemudian suku ke-enam pada Persamaan 4.66 dijabarkan menghasilkan:

$$\begin{aligned}
 Ac\Delta \sum_{s=1}^T e^{-\int_t^s \lambda_u du} p(t, s) &= Ac\Delta e^{-\int_t^1 \lambda_u du} p(t, 1) \\
 &\quad + Ac\Delta \sum_{s=2}^T e^{-\int_t^s \lambda_u du} p(t, s). \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

Karena indeks waktu 1 menyatakan waktu  $t+k$  sehingga Persamaan 4.67 dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\begin{aligned}
 Ac\Delta \sum_{s=1}^T e^{-\int_t^s \lambda_u du} p(t, s) &= Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} p(t, t+k) \\
 &\quad + Ac\Delta \sum_{s=2}^T e^{-\int_t^s \lambda_u du} p(t, s). \quad (4.68)
 \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya Persamaan 4.68 disubsitusikan ke dalam

Persamaan 4.66 menghasilkan,

$$\begin{aligned}
B(t) &= AL_{t+k-\Delta}\Delta p(t, t+k)e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} + Ap(t, t+k)e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \\
&\quad - Ap(t, T)e^{-\int_t^T \lambda_u du} - A \int_{t+k}^T p(t, s)\lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \\
&\quad + A\theta\Delta \sum_{s=2}^T p(t, s)e^{-\int_t^s \lambda_u du} + Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} p(t, t+k) \\
&\quad + Ac\Delta \sum_{s=2}^T e^{-\int_t^s \lambda_u du} p(t, s) + Ae^{-\int_t^T \lambda_u du} p(t, T) \\
&\quad + \int_t^T p(t, s)E_t(Y_s)\lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds. \tag{4.69}
\end{aligned}$$

Suku terakhir pada Persamaan 4.69 dijabarkan dengan menggunakan sifat integral  $\int_a^p f(x)dx + \int_b^p f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$  menjadi:

$$\begin{aligned}
\int_t^T p(t, s)E_t(Y_s)\lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds &= \int_{t+k}^T p(t, s)E_t(Y_s)\lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \\
&\quad + \int_t^{t+k} p(t, s)E_t(Y_s)\lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds. \tag{4.70}
\end{aligned}$$

Berikutnya melakukan substitusi Persamaan 4.70 ke dalam Persamaan 4.69 yaitu:

$$\begin{aligned}
B(t) &= AL_{t+k-\Delta}\Delta p(t, t+k)e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} + Ap(t, t+k)e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \\
&\quad - Ap(t, T)e^{-\int_t^T \lambda_u du} - A \int_{t+k}^T p(t, s)\lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \\
&\quad + A\theta\Delta \sum_{s=2}^T p(t, s)e^{-\int_t^s \lambda_u du} + Ac\Delta e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} p(t, t+k) \\
&\quad + Ac\Delta \sum_{s=2}^T e^{-\int_t^s \lambda_u du} p(t, s) + Ae^{-\int_t^T \lambda_u du} p(t, T) \\
&\quad + \int_{t+k}^T p(t, s)E_t(Y_s)\lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds + \int_t^{t+k} p(t, s)E_t(Y_s)\lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds. \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Berdasarkan sifat asosiatif, Persamaan 4.71 dapat dituliskan kembali sehingga ditemukan solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana yakni:

$$\begin{aligned}
 B(t) = & A [L_{t+k-\Delta} + c] \Delta p(t, t+k) e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} + A p(t, t+k) e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \\
 & + \int_t^{t+k} p(t, s) E_t(Y_s) \lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds + A [c + \theta] \Delta \sum_{s=2}^T p(t, s) e^{-\int_t^s \lambda_u du} \\
 & - \int_{t+k}^T [A - E_t(Y_s)] p(t, s) \lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \quad (4.72)
 \end{aligned}$$

dengan,

- $B(t)$  : Harga obligasi bencana pada waktu  $t$   
 $A$  : Nilai nominal  
 $L_{t+k-\Delta}$  : Tingkat *forward* pada  $t+k-\Delta$   
 $c$  : Tingkat *spread* kupon  
 $\Delta$  : Periode pembayaran kupon  
 $E_t(Y_s)$  : Nilai *recovery*  
 $\theta$  : Jarak antara tingkat *forward* dan tingkat *spot* pada  $t+k$   
 $p(t, s)$  : Harga obligasi tanpa kupon pada waktu  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $s$   
 $\lambda_s$  : Intensitas terjadinya bencana kekeringan pada waktu  $s$ .

Masing-masing suku pada Persamaan 4.72 yaitu solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana dapat dijelaskan sebagai berikut:

1. Suku pertama menyatakan *present value* dari pembayaran kupon pertama obligasi bencana disertai tingkat *forward* Libor dan *spread*,  $A [L_{t+k-\Delta} + c] \Delta p(t, t+k)$ , dikalikan dengan nilai peluang tidak terjadi bencana  $e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du}$ .
2. Suku kedua menyatakan harga obligasi kupon mengambang atau *floating rate note* pada waktu  $t+k$  yaitu *present value*

obligasi kupon mengambang yang memiliki nilai nominal  $A$  yaitu  $Ap(t, t+k)$ , dikali dengan nilai peluang tidak terjadi bencana  $e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du}$ .

3. Suku ketiga menyatakan jika suatu bencana terjadi pada waktu sebelum pembayaran kupon pertama yaitu  $t+k$  maka nilai perolehan kembali (*recovery*) pada obligasi kupon mengambang yaitu nilai perolehan kembali terhadap nilai nominal (*discounted recovery of principal*)  $Ap(t, s)E_t(Y_s)$ , dikalikan dengan peluang terjadi bencana dalam kurun waktu antara  $t$  dan  $t+k$ .
4. Suku keempat menyatakan pembayaran tetap setelah pembayaran kupon pertama, terdiri dari *spread* dan *shift*, dikali dengan peluang apabila tidak terjadi bencana dalam kurun waktu tersebut  $e^{-\int_t^s \lambda_u du}$ .
5. Suku terakhir menyatakan kerugian yang diharapkan (*expected losses*) setelah pembayaran kupon pertama, yang merupakan selisih antara nilai nominal dan nilai perolehan kembali (*recovery*), dikali dengan nilai peluang apabila suatu bencana terjadi dalam rentang waktu  $t+k$  dan  $T$ .

#### 4.6 Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana

Proses simulasi solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana membutuhkan data historis curah hujan, data historis bencana kekeringan, serta data kurva obligasi tanpa kupon (*zero-coupon curve*). Untuk menentukan intensitas terjadinya bencana kekeringan  $\lambda_s$  serta tingkat *recovery*  $E_t(Y_s)$  pada saat terjadi bencana dibutuhkan data historis curah hujan dan data historis bencana kekeringan. Data historis curah hujan digunakan untuk mengetahui curah hujan (milimeter) yang terjadi selama masa hidup obligasi bencana di masa yang mendatang. Adapun data historis bencana kekeringan digunakan untuk menentukan tingkat *trigger* (milimeter)

suatu bencana kekeringan sehingga dapat ditentukan intensitas bencana kekeringan yang terjadi atau banyaknya bencana kekeringan yang terjadi. Pada Tugas Akhir ini, intensitas terjadinya bencana kekeringan diasumsikan *martingale* dengan nilai harapan dari intensitas bencana kekeringan dinotasikan dengan  $\lambda_s$  di masa mendatang bersyarat tersedianya informasi mengenai intensitas bencana kekeringan pada saat ini sama dengan intensitas bencana kekeringan pada saat ini. Data *zero-coupon curve* merupakan data kurva *yield* yang memetakan tingkat *spot* terhadap waktu jatuh tempo yang berbeda. Tingkat *spot* (%), tingkat *forward* (%), serta jarak antara tingkat *spot* dan tingkat *forward* pada waktu pembayaran kupon pertama yang dinotasikan oleh  $\theta$  (%) dapat diperoleh dari data *zero-coupon curve*. Tetapi, karena data yang dibutuhkan tersebut tidak dapat diperoleh, sehingga dilakukan simulasi solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana berdasarkan panduan yang berada pada jurnal "*Designing Catastrophic Bonds for Catastrophic Risks in Agriculture*" [2].

Pada Tugas Akhir ini, penulis hanya melakukan kajian secara teoritis terhadap model penentuan harga obligasi bencana sehingga dalam simulasi ini, dicoba beberapa nilai parameter terhadap solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana pada Persamaan 4.72 untuk mengetahui pengaruh dari perubahan tingkat *recovery* dan tingkat *spread* kupon terhadap harga obligasi bencana. Simulasi dilakukan dengan menggunakan *software* MATLAB R2017a, adapun *listing* program MATLAB dapat dilihat pada Lampiran D. Setelah dilakukan simulasi, dilakukan analisis terhadap hasil simulasi yang telah diperoleh.

Diasumsikan bahwa obligasi bencana memiliki waktu jatuh tempo selama 3 (tiga) tahun yang diterbitkan pada 4 Maret 2016 dan mengalami jatuh tempo pada 4 Maret 2019. Berdasarkan Tabel 4.2 diketahui bahwa nilai nominal obligasi bencana yang diberikan sebesar \$1000. Tingkat *spread* sebesar 4% per tahun yang harus dibayarkan kepada investor. Tingkat pengembalian (*recovery*) yaitu 50% terhadap nilai nominal. Diasumsikan nilai tingkat *forward* LIBOR pada waktu  $t + k - \Delta$  yaitu  $L_{t+k-\Delta} = 0.4\%$ . Simulasi

dilakukan terhadap periodik pembayaran kupon untuk periode *annually* dengan nilai  $\Delta = 1$ , *semi-annually* dengan nilai  $\Delta = \frac{1}{2}$  dan *quarterly* dengan nilai  $\Delta = \frac{1}{4}$ . Jarak antara tingkat *forward* dan tingkat *spot* tepatnya pada 4 Juni 2016 yang merupakan waktu pembayaran kupon pertama dinotasikan dengan  $\theta$  memiliki nilai sebesar 0.4%.

**Tabel 4.2.** Nilai Parameter Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana

Parameter	Deskripsi	Nilai
$t$	Waktu penerbitan CAT Bond	4 Maret 2016
$T$	Waktu jatuh tempo CAT Bond	4 Maret 2019
$\Delta$	Periode pembayaran kupon	$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$
$\theta$	Jarak antara tingkat <i>forward</i> dan tingkat <i>spot</i> pada $t + k$	0.011%
$L_{t+k-\Delta}$	Tingkat <i>forward</i> pada $t + k - \Delta$	0.4%
$c$	Tingkat <i>spread</i>	4%
$A$	Nilai nominal	\$1000
$E(Y_\tau)/A$	Nilai pengembalian ( <i>recovery</i> )	50%

Nilai parameter pada Tabel 4.2 digunakan terhadap simulasi solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana untuk mengetahui pengaruh perubahan tingkat pengembalian (*recovery*) terhadap harga obligasi bencana. Namun, untuk nilai parameter tingkat pengembalian digunakan nilai pengembalian (*recovery*) yang berbeda yakni dalam rentang 0% hingga 100% terhadap nilai nominal dengan kenaikan sebesar 10%[2]. Nilai pengembalian sebesar 0% memiliki arti bahwa penerbit obligasi bencana tidak memberikan nilai pengembalian kepada investor apabila bencana kekeringan terjadi selama masa hidup obligasi bencana. Sedangkan, nilai pengembalian sebesar 100% memiliki arti bahwa penerbit obligasi bencana memberikan nilai pengembalian sebesar nilai nominal kepada investor apabila bencana kekeringan terjadi selama masa hidup obligasi bencana.

Adapun simulasi solusi analitik model penentuan harga obli-



gasi bencana untuk mengetahui pengaruh perubahan tingkat *spread* kupon terhadap obligasi bencana menggunakan tingkat *spread* kupon yang berbeda dalam rentang 0% hingga 9% dengan kenaikan sebesar 1%[2]. Diketahui bahwa jumlah kupon mengambang yang diberikan oleh penerbit obligasi bencana kepada investor merupakan penjumlahan antara tingkat *forward* Libor dengan tingkat *spread* kupon tetap, dengan tingkat *spread* kupon memiliki nilai yang lebih rendah dibandingkan dengan tingkat *forward* Libor.

Tingkat *spot* digunakan untuk mendapatkan nilai *discount factors* yang dinotasikan dengan  $p(t, s)$ . Tingkat *spot* dinyatakan dalam persentase atau persen (%). Nilai *discount factors* dihitung dengan menggunakan rumus yaitu:

$$p(t, s) = \frac{1}{\left[1 + \frac{l_s}{n}\right]^{ns}} \quad (4.73)$$

dengan,

$l_s$  : Tingkat *spot* dengan waktu jatuh tempo  $s$

$n$  : Frekuensi pembayaran kupon.

Berkaitan dengan hal tersebut, untuk menentukan nilai *discount factors* perlu mengasumsikan terlebih dahulu tingkat *spot* beserta frekuensi pembayaran kupon berdasarkan waktu jatuh temponya (dalam tahun) seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.3. Tabel 4.3 menunjukkan tingkat *spot* untuk waktu jatuh tempo obligasi bencana selama tiga tahun.

Asumsi nilai tingkat *spot* pada Tabel 4.3 mengikuti acuan data kurva obligasi tanpa kupon (*zero-coupon curve*), diketahui bahwa tingkat *spot* pada tiap waktu jatuh tempo yang berbeda memiliki nilai yang tidak sama [22]. Simulasi solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana untuk periode pembayaran kupon *annually* memiliki arti pembayaran kupon diberikan oleh penerbit kepada pemegang obligasi sekali dalam setahun menggunakan tingkat *spot* untuk waktu jatuh tempo 1, 2, dan 3 tahun berdasarkan Tabel 4.3. Sedangkan untuk periode pembayaran kupon *semi-annually* yaitu pembayaran kupon diberikan oleh penerbit kepada pemegang obligasi dua kali dalam setahun. Mengacu pada asumsi waktu jatuh

tempo obligasi bencana selama 3 tahun, pembayaran kupon dilakukan sebanyak 6 (kali) selama masa hidup obligasi bencana tersebut.

**Tabel 4.3.** Tingkat *Spot* Berdasarkan Waktu Jatuh Tempo

Jatuh Tempo(tahun)	Waktu	$l_s(\%)$
0.25	$t + k$	6.24
0.5	$t + k + \Delta$	6.70
0.75	$t + k + 2\Delta$	6.78
1	$t + k + 3\Delta$	7.14
1.25	$t + k + 4\Delta$	7.10
1.5	$t + k + 5\Delta$	7.43
1.75	$t + k + 6\Delta$	7.70
2	$t + k + 7\Delta$	8.29
2.25	$t + k + 8\Delta$	8.73
2.5	$t + k + 9\Delta$	8.94
2.75	$t + k + 10\Delta$	8.51
3	$t + k + 11\Delta$	8.79

Sehingga berdasarkan Tabel 4.3 digunakan tingkat *spot* untuk waktu jatuh tempo 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5 dan 3 tahun. Adapun untuk periode pembayaran kupon *quarterly* yakni pembayaran kupon diberikan oleh penerbit kepada pemegang obligasi empat kali dalam setahun. Pembayaran kupon untuk periode pembayaran kupon *quarterly* dilakukan sebanyak 12 (dua belas) kali selama masa hidup obligasi bencana tersebut. Tingkat *spot* untuk periode pembayaran kupon *quarterly* ditunjukkan pada Tabel 4.3 .

#### 4.6.1 Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana Periode Pembayaran Kupon *Annually*

Pada bagian ini, simulasi dilakukan terhadap model penentuan harga obligasi bencana dengan periode pembayaran kupon secara *annually*. Mengacu pada rumus yang berada di Persamaan 4.73 dicari nilai *discount factors* untuk masing-masing waktu jatuh

tempo yaitu,

$$p(t, t+k) = \frac{1}{\left[1 + \frac{0.0714}{1}\right]^{1*1}} = 0.9333$$

$$p(t, t+k+\Delta) = \frac{1}{\left[1 + \frac{0.0829}{1}\right]^{2*1}} = 0.8527$$

$$p(t, t+k+2\Delta) = \frac{1}{\left[1 + \frac{0.0879}{1}\right]^{3*1}} = 0.7766.$$

Hasil perhitungan *discount factors* ditampilkan pada Tabel 4.4.

**Tabel 4.4.** Nilai *Discount Factor* Berdasarkan Waktu Jatuh Tempo untuk Periode Pembayaran Kupon *Annually*

Waktu	$p(t, s)$
$t+k$	0.9333
$t+k+\Delta$	0.8527
$t+k+2\Delta$	0.7766

Proses Poisson non-homogen diterapkan pada intensitas terjadinya bencana kekeringan dimulai pada saat obligasi bencana diterbitkan  $t$  hingga waktu jatuh tempo obligasi bencana  $T$ . Di-  
asumsikan rata-rata intensitas terjadinya bencana kekeringan untuk periode pembayaran kupon *annually* yaitu,

1. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t \leq s \leq t+k$ .
2. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t+k \leq s \leq t+k+\Delta$ .
3. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t+k+\Delta \leq s \leq t+k+2\Delta$ .

Intensitas terjadinya bencana kekeringan berdistribusi proses Poisson non-homogen dengan fungsi intensitas  $\lambda_s$ , dapat dituliskan

sebagai berikut:

$$\lambda_s := \begin{cases} 1, & t \leq s \leq t + k \\ 1, & t + k \leq s \leq t + k + \Delta \\ 1, & t + k + \Delta \leq s \leq t + k + 2\Delta. \end{cases}$$

Langkah selanjutnya, memasukkan nilai parameter-parameter serta asumsi fungsi intensitas serta nilai *discount factors* ke dalam solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana pada Persamaan 4.72 untuk periode pembayaran kupon *annually*.

**Tabel 4.5.** Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Recovery* untuk Periode Pembayaran Kupon *Annually*

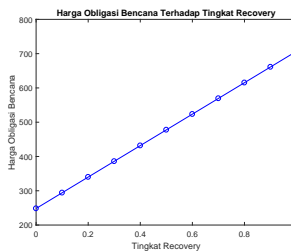
$E_t(Y_\tau)/A$	$B(t)$
0%	248.2478
10%	294.1220
20%	339.9962
30%	385.8704
40%	431.7447
50%	477.6189
60%	523.4931
70%	569.3674
80%	615.2416
90%	661.1158
100%	706.9900

Pada analisis hasil simulasi pertama seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.5. Tingkat pengembalian (*recovery rate*) dinyatakan sebagai persentase dari nilai nominal. Hasil simulasi harga obligasi bencana terhadap tingkat pengembalian (*recovery rate*) pada periode pembayaran kupon *annually* menunjukkan bahwa harga obligasi bencana dengan periode pembayaran kupon *annually* mengalami peningkatan yang cukup signifikan ketika tingkat *recovery* naik *recovery*, begitu juga sebaliknya. Berikutnya, harga obligasi bencana alam disimulasikan terhadap perubahan tingkat *spread* kupon

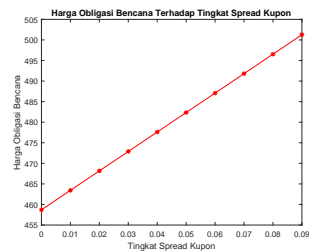
seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.6. Menurut Tabel 4.6 menunjukkan bahwa harga obligasi bencana mengalami peningkatan seiring tingkat *spread* kupon yang juga meningkat. Hasil simulasi pada Tabel 4.5 dan Tabel 4.6 ditampilkan pada Gambar 4.13.

**Tabel 4.6.** Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Spread* Kupon untuk Periode Pembayaran Kupon *Annually*

$c$	$B(t)$
0%	458.7003
1%	463.4299
2%	468.1596
3%	472.8892
4%	477.6189
5%	482.3496
6%	487.0782
7%	491.8079
8%	496.5375
9%	501.2672



(a) Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Recovery*



(b) Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Spread*

**Gambar 4.13.** Hasil Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana untuk Periode Pembayaran Kupon *Annually*

#### 4.6.2 Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana Periode Pembayaran Kupon *Semi-Annually*

Simulasi dilakukan terhadap harga obligasi bencana dengan periode pembayaran kupon *semi-annually*. Nilai *discount factors* untuk masing-masing waktu jatuh tempo pada periode *semi-annually* yaitu,

$$p(t, t + k) = \frac{1}{\left[1 + \frac{0.0670}{2}\right]^{0.5*2}} = 0.9675$$

$$p(t, t + k + \Delta) = \frac{1}{\left[1 + \frac{0.0714}{2}\right]^{1*2}} = 0.9322$$

$$p(t, t + k + 2\Delta) = \frac{1}{\left[1 + \frac{0.0743}{2}\right]^{1.5*2}} = 0.8963$$

$$p(t, t + k + 3\Delta) = \frac{1}{\left[1 + \frac{0.0829}{2}\right]^{2*2}} = 0.8500$$

$$p(t, t + k + 4\Delta) = \frac{1}{\left[1 + \frac{0.0894}{2}\right]^{2.5*2}} = 0.8036$$

$$p(t, t + k + 5\Delta) = \frac{1}{\left[1 + \frac{0.0879}{2}\right]^{3*2}} = 0.7725$$

Hasil perhitungan *discount factors* untuk periode pembayaran kupon *semi-annually* ditampilkan pada Tabel 4.7.

**Tabel 4.7.** Nilai *Discount Factor* Berdasarkan Waktu Jatuh Tempo untuk Periode Pembayaran Kupon *Semi-annually*

Waktu	$p(t, s)$
$t + k$	0.9697
$t + k + \Delta$	0.9322
$t + k + 2\Delta$	0.8963
$t + k + 3\Delta$	0.8500
$t + k + 4\Delta$	0.8076
$t + k + 5\Delta$	0.7725

Dalam hal ini, diasumsikan rata-rata intensitas terjadinya bencana kekeringan per bulan mengikuti proses Poisson non-homogen

untuk periode pembayaran kupon *semi-annually* yaitu,

1. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t \leq s \leq t + k$ .
2. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t + k \leq s \leq t + k + \Delta$ .
3. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 0 kejadian per bulan pada saat  $t + k + \Delta \leq s \leq t + k + 2\Delta$ .
4. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 0 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 2\Delta \leq s \leq t + k + 3\Delta$ .
5. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 0 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 3\Delta \leq s \leq t + k + 4\Delta$ .
6. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 4\Delta \leq s \leq t + k + 5\Delta$ .

Intensitas terjadinya bencana kekeringan berdistribusi proses Poisson non-homogen dengan fungsi intensitas  $\lambda_s$ , dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\lambda_s := \begin{cases} 1, & t \leq s \leq t + k \\ 1, & t + k \leq s \leq t + k + \Delta \\ 0, & t + k + \Delta \leq s \leq t + k + 2\Delta \\ 0, & t + k + 2\Delta \leq s \leq t + k + 3\Delta \\ 0, & t + k + 3\Delta \leq s \leq t + k + 4\Delta \\ 1, & t + k + 4\Delta \leq s \leq t + k + 5\Delta. \end{cases}$$

Hasil simulasi seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.8, menunjukkan bahwa harga obligasi bencana dengan periode pembayaran kupon *semi-annually* mengalami peningkatan yang cukup signifikan ketika tingkat *recovery* naik.

**Tabel 4.8.** Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Recovery* untuk Periode Pembayaran Kupon *Semi-annually*

$E_t(Y_T)/A$	$B(t)$
0%	241.3157
10%	289.6062
20%	337.8967
30%	386.1872
40%	437.4777
50%	482.7682
60%	531.0588
70%	579.3493
80%	627.6398
90%	675.9303
100%	724.2208

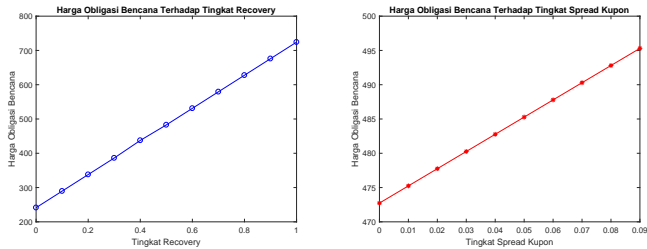
Harga obligasi bencana dengan periode pembayaran kupon *semi-annually* akan meningkat seiring dengan tingkat *spread* kupon yang mengalami peningkatan, begitu juga sebaliknya seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.9.

**Tabel 4.9.** Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Spread* Kupon untuk Periode Pembayaran Kupon *Semi-annually*

$c$	$B(t)$
0%	472.7343
1%	475.2427
2%	477.7512
3%	480.2597
4%	482.7682
5%	485.2767
6%	487.7852
7%	490.2937
8%	492.8022
9%	495.3017



Hasil simulasi pada Tabel 4.8 dan Tabel 4.9 ditampilkan dalam bentuk grafik pada Gambar 4.14.



(a) Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Recovery* (b) Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Spread*

**Gambar 4.14.** Hasil Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana untuk Periode Pembayaran Kupon *Semi-annually*

#### 4.6.3 Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana Periode Pembayaran Kupon *Quarterly*

Pada bagian ini, simulasi dilakukan terhadap obligasi bencana dengan pembayaran kupon secara *quarterly*. Diasumsikan rata-rata intensitas terjadinya bencana kekeringan untuk periode pembayaran kupon *quarterly* seperti berikut:

1. Rata-rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t \leq s \leq t + k$ .
2. Rata-rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t + k \leq s \leq t + k + \Delta$ .
3. Rata-rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 0 kejadian per bulan pada saat  $t + k + \Delta \leq s \leq t + k + 2\Delta$ .

4. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 0 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 2\Delta \leq s \leq t + k + 3\Delta$ .
5. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 0 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 3\Delta \leq s \leq t + k + 4\Delta$ .
6. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 4\Delta \leq s \leq t + k + 5\Delta$ .
7. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 0 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 5\Delta \leq s \leq t + k + 6\Delta$ .
8. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 6\Delta \leq s \leq t + k + 7\Delta$ .
9. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 7\Delta \leq s \leq t + k + 8\Delta$ .
10. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 0 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 8\Delta \leq s \leq t + k + 9\Delta$ .
11. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 9\Delta \leq s \leq t + k + 10\Delta$ .
12. Rata- rata intensitas terjadinya bencana kekeringan adalah sebanyak 1 kejadian per bulan pada saat  $t + k + 10\Delta \leq s \leq t + k + 11\Delta$ .

Mengacu pada Persamaan 4.73, nilai *discount factors* untuk periode pembayaran kupon *quarterly* ditunjukkan pada Tabel 4.10.

**Tabel 4.10.** Nilai *Discount Factor* Berdasarkan Waktu Jatuh Tempo untuk Periode Pembayaran Kupon *Quarterly*

Waktu	$p(t, s)$
$t + k$	0.9846
$t + k + \Delta$	0.9673
$t + k + 2\Delta$	0.9510
$t + k + 3\Delta$	0.9323
$t + k + 4\Delta$	0.9163
$t + k + 5\Delta$	0.8961
$t + k + 6\Delta$	0.8759
$t + k + 7\Delta$	0.8499
$t + k + 8\Delta$	0.8248
$t + k + 9\Delta$	0.8030
$t + k + 10\Delta$	0.7949
$t + k + 11\Delta$	0.7724

Hasil simulasi seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.11 menunjukkan bahwa jika tingkat *recovery* mengalami kenaikan maka harga obligasi bencana juga akan semakin meningkat.

**Tabel 4.11.** Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Recovery* untuk Periode Pembayaran Kupon *Quarterly*

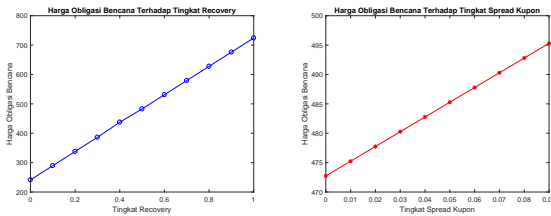
$E_t(Y_\tau)/A$	$B(t)$
0%	236.7874
10%	286.1013
20%	335.4152
30%	384.7291
40%	434.0430
50%	483.3569
60%	532.6708
70%	581.9847
80%	631.2985
90%	680.6124
100%	729.9263

Menurut Tabel 4.12 semakin tinggi tingkat *spread* kupon maka harga obligasi bencana juga akan semakin tinggi.

**Tabel 4.12.** Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Spread* Kupon untuk untuk Periode Pembayaran Kupon *Quarterly*

$c$	$B(t)$
0%	478.2251
1%	479.5081
2%	480.7910
3%	482.0739
4%	483.3569
5%	484.6398
6%	485.9228
7%	487.2057
8%	488.4086
9%	489.7716

Hasil simulasi solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana terhadap tingkat *recovery* dan tingkat *spread* kupon yang terdapat pada Tabel 4.11 dan Tabel 4.12 ditampilkan dalam bentuk grafik pada Gambar 4.15.

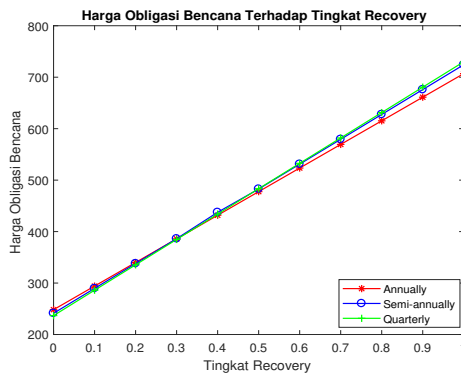


(a) Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Recovery* (b) Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Spread*

**Gambar 4.15.** Hasil Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana untuk Periode Pembayaran Kupon *Semi-annually*

#### 4.6.4 Perbandingan Harga Obligasi Bencana dengan Tingkat *Recovery* untuk Tiap Periode Pembayaran Kupon

Pada bagian ini, hasil simulasi harga obligasi bencana terhadap tingkat pengembalian (*recovery*) yang berbeda untuk masing-masing periode pembayaran kupon dibandingkan satu sama lain untuk melihat perbandingan harga obligasi bencana pada setiap periode pembayaran kupon seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.16.



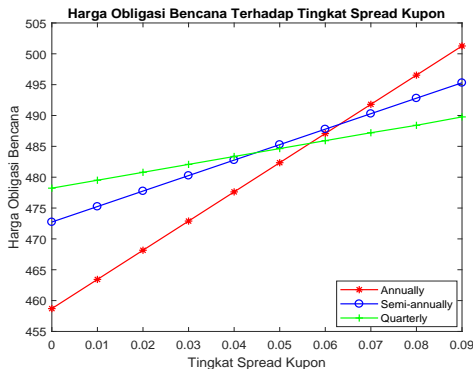
**Gambar 4.16.** Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Recovery* untuk Periode Pembayaran Kupon Berbeda

Gambar 4.16 menunjukkan bahwa kenaikan tingkat *recovery* menyebabkan harga obligasi bencana mengalami peningkatan, begitu juga sebaliknya. Hal ini terjadi dikarenakan jika tingkat *recovery* mengalami kenaikan, maka tingkat kerugian (*expected losses*) yang mungkin terjadi juga akan semakin kecil sehingga menarik perhatian para investor untuk berinvestasi pada obligasi bencana [2]. Pada Gambar 4.16 juga menunjukkan bahwa harga obligasi bencana untuk periode pembayaran kupon *quarterly* memiliki nilai yang lebih tinggi dibandingkan harga obligasi bencana dengan periode pembayaran *annually* dan *semi-annually*. Hal ini disebabkan karena rentang waktu antar pembayaran kupon pada periode pembayaran kupon *annually* lebih lama dibandingkan periode *quarterly* dan

*semi-annually* sehingga kurang menarik bagi para investor yang menyebabkan harga obligasi bencana cenderung rendah.

#### 4.6.5 Perbandingan Harga Obligasi Bencana dengan Tingkat *Spread* Kupon untuk Tiap Periode Pembayaran Kupon

Hasil simulasi harga obligasi bencana terhadap tingkat *spread* kupon juga dibandingkan untuk tiap periode pembayaran kupon seperti yang terdapat pada Gambar 4.17. Pada Tugas Akhir ini, obligasi bencana diasumsikan merupakan obligasi dengan tingkat kupon mengambang. Tingkat kupon yang diberikan kepada investor terdiri dari tingkat suku bunga acuan LIBOR ditambah dengan tingkat *spread* kupon. Harga obligasi suku bunga mengambang cenderung stabil terhadap perubahan tingkat suku bunga dibandingkan dengan obligasi pembayaran tetap [23]. Obligasi suku bunga mengambang memiliki sensitifitas yang cukup tinggi terhadap perubahan tingkat *spread* kupon. Tingkat *spread* kupon pada obligasi konvensional mencerminkan kekhawatiran investor terhadap risiko kredit yang mungkin dialami.



**Gambar 4.17.** Harga Obligasi Bencana Terhadap Tingkat *Spread* untuk Periode Pembayaran Kupon Berbeda

Pada obligasi bencana diasumsikan tidak terdapat risiko mitra pengimbang (*counterparty risk*) yaitu penerbit tidak akan mengalami

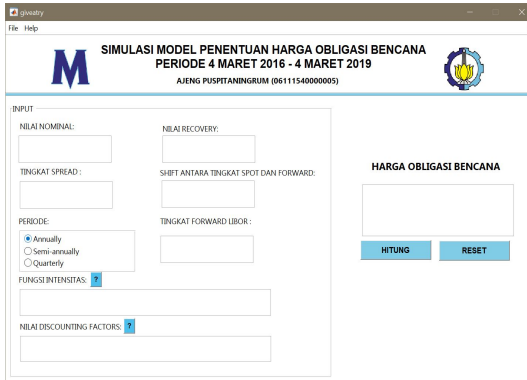
risiko gagal bayar. Tingkat *spread* di dalam obligasi bencana diartikan sebagai kupon tambahan atas risiko yang mungkin dialami oleh investor akibat kerugian bencana alam. Obligasi bencana biasanya menawarkan tingkat *spread* yang tinggi karena proses stokastik terkait bencana alam karena bencana alam memiliki sifat yang tidak dapat diprediksi [24]. Oleh karena itu, dengan kenaikan tingkat *spread* pada obligasi bencana seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.17 untuk semua periode pembayaran kupon, akan menarik perhatian para investor sehingga harga obligasi bencana juga akan mengalami kenaikan [2].

Pada obligasi dengan suku bunga mengambang dikenal istilah *spread duration*. *Spread duration* adalah estimasi seberapa besar harga suatu obligasi akan mengalami perubahan ketika tingkat *spread* kupon pada obligasi tersebut berubah. Di dalam *spread duration* berlaku prinsip yaitu semakin rendah frekuensi pembayaran kupon dalam setahun, maka nilai *spread duration* akan semakin tinggi dan jika nilai *spread duration* semakin tinggi, maka sensitifitas harga obligasi akan semakin besar atau dengan kata lain obligasi akan memiliki fluktuasi harga obligasi yang tinggi [23]. Hal tersebut terlihat pada Gambar 4.17 yakni harga obligasi dengan periode pembayaran kupon *annually* memiliki fluktuasi harga yang tinggi terhadap perubahan tingkat *spread* kupon dibandingkan harga obligasi dengan dengan periode pembayaran kupon *semi-annually* dan *quarterly*.

#### **4.6.6 Program GUI MATLAB Simulasi Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana**

Pada bagian ini ditampilkan program GUI MATLAB simulasi penentuan harga obligasi bencana dalam rentang waktu 4 Maret 2016 hingga 4 Maret 2019 dapat dilihat pada Gambar 4.18, dengan input parameter nilai nominal (*face value*), tingkat *spread*, tingkat *forward* Libor pada saat  $t + k - \Delta$ , *shift*, nilai pengembalian (*recovery*), serta periode pembayaran kupon. Program ini juga membutuhkan inputan berupa fungsi intensitas terjadinya bencana kekeringan serta nilai *discount factor* dengan banyaknya kedua in-

putan yakni fungsi intensitas serta nilai *discount factors* disesuaikan dengan banyaknya pembayaran kupon pada obligasi bencana yang dilakukan selama masa hidup obligasi bencana. *Listing* program GUI MATLAB dapat dilihat pada Lampiran E.



**Gambar 4.18.** Tampilan GUI MATLAB Simulasi Penentuan Harga Obligasi Bencana

Berikut ditampilkan contoh hasil *running* program GUI MATLAB simulasi model penentuan harga obligasi bencana untuk periode pembayaran kupon *annually*, *semi-annually*, dan *quarterly*:

1. Untuk periode pembayaran kupon *annually*, nilai parameter diasumsikan sebagai berikut:  $A = 10000$ ,  $\theta = 0.0065$ ,  $E = 9000$ ,  $L_{t+k-\Delta} = 0.0011$ ,  $c = 0.04$ ,  $\lambda_s = [1, 1, 1]$ ,  $p(t, s) = [0.987, 0.975, 0.765]$

Mengacu pada nilai parameter tersebut, menghasilkan harga obligasi bencana terhadap periode pembayaran kupon *annually* sebesar 7152.23 seperti yang terlihat pada Gambar 4.19.



The screenshot shows a MATLAB GUI window titled "SIMULASI MODEL PENENTUAN HARGA OBLIGASI BENCANA PERIODE 4 MARET 2016 - 4 MARET 2019". The interface is divided into an "INPUT" section and a "HARGA OBLIGASI BENCANA" section. In the "INPUT" section, the following values are entered: NILAI NOMINAL: 10000, NILAI RECOVERY: 9000, TINGKAT SPREAD: 0.04, SHIFT ANTARA TINGKAT SPOT DAN FORWARD: 0.0085, PERIODE:  Annually,  Semi-annually,  Quarterly, FUNGSI INTENSITAS: 1 1 1, and NILAI DISCOUNTING FACTORS: 0.987 0.975 0.765. The "HARGA OBLIGASI BENCANA" section displays the calculated price of 7152.23. There are "HITUNG" and "RESET" buttons.

**Gambar 4.19.** Contoh Hasil *Running* Program GUI MATLAB Periode Pembayaran Kupon *Annually*

- Untuk periode pembayaran kupon *semi-annually*, nilai parameter diasumsikan sebagai berikut:  $A = 10000$ ,  $c = 0.06$ ,  $\theta = 0.005$ ,  $E = 9000$ ,  $L_{t+k-\Delta} = 0.0011$ ,  $\lambda_s = [1, 1, 1, 2, 1, 1]$   $p(t, s) = [0.987, 0.975, 0.765, 0.650, 0.540, 0.450]$ .

The screenshot shows the same MATLAB GUI window as in Gambar 4.19, but with the "PERIODE" radio button for "Semi-annually" selected. The "NILAI DISCOUNTING FACTORS" are now entered as 0.987 0.975 0.765 0.650 0.540 0.450. The "HARGA OBLIGASI BENCANA" section displays the calculated price of 7093.52. The "HITUNG" and "RESET" buttons are still present.

**Gambar 4.20.** Contoh Hasil *Running* Program GUI MATLAB Periode Pembayaran Kupon *Semi-annually*

Berdasarkan nilai parameter tersebut, menghasilkan harga obligasi bencana terhadap periode pembayaran *semi-annually*

sebesar 7093.52 seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.20.

- Untuk periode pembayaran kupon *quarterly*, diasumsikan nilai parameter sebagai berikut:  $A = 10000$ ,  $c = 0.09$ ,  $\theta = 0.005$ ,  $L_{t+k-\Delta} = 0.0004$ ,  $E = 9000$ ,  $\lambda_s = [1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1]$ ,  $p(t, s) = [0.987, 0.975, 0.965, 0.950, 0.940, 0.850, 0.787, 0.675, 0.565, 0.550, 0.440, 0.350]$ .

The screenshot shows a MATLAB GUI window titled "SIMULASI MODEL PENENTUAN HARGA OBLIGASI BENCANA PERIODE 4 MARET 2016 - 4 MARET 2019". The window contains several input fields and a calculated output field. The input fields are organized into two columns under the heading "INPUT".

Parameter	Value
NILAI NOMINAL	10000
NILAI RECOVERY	9000
TINGKAT SPREAD	0.00
SHIFT ANTARA TINGKAT SPOT DAN FORWARD	0.005
PERIODE	Quarterly (selected)
TINGKAT FORWARD LIBOR	0.0004
FUNGSI INTENSITAS	1 1 1 2 1 1 1 1 2 1 1
NILAI DISCOUNTING FACTORS	0.987 0.975 0.965 0.950 0.940 0.850 0.787 0.675 0.565 0.550 0.440 0.350

On the right side, under the heading "HARGA OBLIGASI BENCANA", the calculated price is displayed as 7051.63. Below this field are two buttons: "HITUNG" and "RESET".

**Gambar 4.21.** Contoh Hasil *Running* Program GUI MATLAB Periode Pembayaran Kupon *Quarterly*

Berdasarkan nilai parameter tersebut, menghasilkan harga obligasi bencana untuk periode pembayaran kupon *quarterly* sebesar 7051.63 seperti yang ditampilkan pada Gambar 4.21.

## BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, kesimpulan dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana untuk risiko bencana alam dalam sektor bidang pertanian dapat diperoleh seperti pada persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
 B(t) = & A [L_{t+k-\Delta} + c] \Delta p(t, t+k) e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \\
 & + A p(t, t+k) e^{-\int_t^{t+k} \lambda_u du} \\
 & + \int_t^{t+k} p(t, s) E_t(Y_s) \lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds \\
 & + A [c + \theta] \Delta \sum_{s=2}^T p(t, s) e^{-\int_t^s \lambda_u du} \\
 & - \int_{t+k}^T [A - E_t(Y_S)] p(t, s) E_t(Y_s) \lambda_s e^{-\int_t^s \lambda_u du} ds.
 \end{aligned}$$

2. Hasil simulasi solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana untuk mengetahui pengaruh tingkat *recovery* dan tingkat *spread* kupon terhadap harga obligasi bencana menghasilkan:
  - a. Perubahan pada tingkat *recovery* obligasi bencana memberikan dampak yang signifikan terhadap harga obligasi bencana dibandingkan dengan perubahan pada tingkat *spread* kupon obligasi bencana, apabila tingkat *recovery* semakin tinggi, maka harga obligasi bencana juga akan semakin tinggi. Hal tersebut juga berlaku untuk tingkat *spread* kupon.

- b. Harga obligasi bencana terhadap tingkat *recovery* dengan periode pembayaran kupon *quarterly* memiliki nilai yang lebih tinggi dibandingkan dengan obligasi bencana dengan periode pembayaran kupon *annually* dan *semi-annually*.
- c. Harga obligasi bencana dengan tingkat *spread* kupon untuk periode pembayaran kupon *annually* memiliki fluktuasi harga yang lebih tinggi dibandingkan dengan periode pembayaran kupon *semi-annually* dan *quarterly*.

## 5.2 Saran

Saran dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Pada penelitian selanjutnya, solusi analitik model penentuan harga obligasi bencana yang telah diperoleh, diharapkan dapat diimplementasikan ke dalam studi kasus suatu bencana kekeringan yang terjadi.
2. Pada penelitian selanjutnya, diperlukan simulasi lebih lanjut mengenai pengaruh perubahan tingkat pemicu (*trigger*) bencana kekeringan, waktu jatuh tempo yang berbeda serta terhadap nilai-nilai parameter lainnya terhadap harga obligasi bencana.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Republik Indonesia. (2007). "Undang-Undang No. 24 Tahun 2007 tentang Penanggulangan Bencana". <https://www.bnpb.go.id>. Diakses pada 15 Januari 2019 pukul 10.25 WIB.
- [2] Sun, L., C. G. Turvey, dan R. A. Jarrow. (2015). "Designing Catastrophic Bonds for Catastrophic Risks in Agriculture: Macro Hedging long and Short Rains in Kenya". **Agriculture Finance Review**, 75(1), pp. 47-62. Tersedia di: <https://doi.org/10.1108/AFR-02-2015-0010>.
- [3] Cummins, J.D. (2008). "Cat Bonds and Other Risk Linked Securities: State of The Market and Recent Development". **Risk Management and Insurance Review**, 11(1), pp. 23-47. Tersedia di: <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1057401>.
- [4] Jarrow, R.A. (2010). "A Simple Robust Model for CAT bond Valuation". **Finance Research Letters**, 7(2), pp.72-79. Tersedia di: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2010.02.005>.
- [5] Merdeka. (2018). <https://www.merdeka.com/uang/penerbitan-obligasi-bencana-alam-dibahas-di-pertemuan-tahunan-imf-world-bank.html>. Diakses pada diperoleh pada 19 Januari 2019 pukul 06.43 WIB.
- [6] Adiningsih, Erna Sri. (2014). "Tinjauan Metode Deteksi Parameter Kekeringan Berbasis Data Penginderaan Jauh". Jakarta: Pusat Teknologi dan Data Penginderaan Jauh, Lembaga Penerbangan dan Antariksa Nasional (LAPAN).
- [7] Broverman, Samuel.A. (2010). **Mathematics of Investment and Credit Fifth Edition**. Winsted : ACTEX Publications, Inc.
- [8] Cox, Samuel., H.W. Pedersen. (2000). "Catastrophe risk bonds". **North American Actua-**

- arial Journal**, 4(4), pp. 56-82. Tersedia di: <https://doi.org/10.1080/10920277.2000.10595938>.
- [9] Investopedia. (2019). <https://www.investopedia.com>. Diakses pada 19 Januari 2019 pukul 17.35 WIB.
- [10] Statlec. (2019). <https://www.statlect.com/fundamentals-of-probability/indicator-functions>. Diakses pada 29 April 2019 pukul 15.30 WIB.
- [11] Bain, Lee J. dan Max Engelhardt. (1992). **Introduction to Probability and Mathematical**. Second Edition. California : Duxbury Press.
- [12] Kulkarni, V. G. (2011). **Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems**. New York:Springer. Tersedia di:<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1772-0>.
- [13] Ross, Sheldon.M. (1996). **Stochastic Processes Second Edition**. Canada : John Willey & Son Inc.
- [14] Konsep Matematika. (2019). <https://www.konsep-matematika.com/2016/03/jumlah-riemann-pada-integral.html> . Diakses pada 29 April 2019 pukul 13.30 WIB.
- [15] Björk, T. (2005). **Arbitrage Theory in Continuous Time**. London: Oxford University Press.
- [16] Syamsuddin, M. **Catatan Kuliah Matematika Keuangan, Institut Teknologi Bandung**.
- [17] Shreve, Steven E., (2004). **Stochastic Calculus for Fianance II**. New York: Springer.
- [18] Lando, David. (1998). "On Cox Processes and Credit Risky Securities". **Review of Derivatives Research**, 2(2), pp. 99-120. Tersedia di: <https://doi.org/10.1007/BF01531332>.

- [19] Expectation and Variance. 2019. <https://www.stat.auckland.ac.nz>. Diakses pada 29 April 2019 pukul 10.30 WIB.
- [20] Jarrow, R.A. (2010). **Continuous-Time Asset Pricing Theory: A Martingale-Based Approach**. USA : Springer.
- [21] Stewart, James. (2012). **Calculus. Seventh Edition**. USA: Cengage.
- [22] Zero-Coupon Yield Curve. 2019. <http://www.thaibma.or.th/EN/Market/YieldCurve/Zero>. Diakses pada 1 Juli 2019 pukul 20.30 WIB.
- [23] Choudhry, Moorad., Michele Lizzio. (2015). **Advanced Fixed Income Analysis 2nd Edition**. London: Butterworth-Heinemann.
- [24] Zangue, Jaurés Ngouffo. (2016). **Evaluating Catastrophic Risk and CAT Bonds Pricing Methods**. Thesis Master Degree. Department of Economics, Econometrics and Financial Markets, Ca'Foscari University of Venice. Italy.





## Lampiran A

### Pembuktian Teorema pada Nilai Ekspektasi

**Teorema.** Misal  $Z$  merupakan variabel acak yang berada pada ruang probabilitas  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  dengan pdf  $f(z)$ . Jika  $a$  dan  $b$  adalah bilangan real, dan  $Y = aZ + b$ , maka

$$E[Y] = E[aZ + b] = aE[Z] + b.$$

**Bukti.**

$$E[Y] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}).$$

Karena  $Y$  dan  $Z$  adalah fungsi yang memetakan dari  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $Y = aZ + b$  untuk setiap  $\omega \in \Omega$ ,  $Y(\omega) = aZ(\omega) + b$ . Hal ini menyatakan bahwa,

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{\omega \in \Omega} (aZ(\omega) + b)P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} aZ(\omega)P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} bP(\{\omega\}) \end{aligned}$$

$a$  dan  $b$  adalah konstansta, sehingga

$$\begin{aligned} E[Y] &= a \left( \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega)P(\{\omega\}) \right) + b \left( \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \right) \\ &= aE[Z] + b. \end{aligned}$$

**Lemma.** Misal  $Z$  dan  $Y$  adalah variabel acak yang berada pada ruang probabilitas  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Sehingga,

$$E[Z + Y] = E[Z] + E[Y].$$

**Bukti.**

Misal  $W = Z+Y$  dengan  $W, Y, Z$  merupakan fungsi yang memetakan

### Lampiran A (Lanjutan)

dari  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sehingga untuk setiap  $\omega \in \Omega$ ,  $W(\omega) = Z(\omega) + Y(\omega)$ ,

$$E[W] = \sum_{\omega \in \Omega} W(\omega)P(\{\omega\}) = \left( \sum_{\omega \in \Omega} (Z(\omega) + Y(\omega))P(\{\omega\}) \right)$$

$$\begin{aligned} E[W] &= \sum_{\omega \in \Omega} (Z(\omega) + Y(\omega))P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega)P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}) \\ &= E[Z] + E[Y]. \end{aligned}$$

**Teorema.** Misal  $Z$  dan  $Y$  merupakan variabel acak yang saling bebas, maka ekspektasi dari dua variabel acak tersebut didefinisikan sebagai

$$E[ZY] = E[Z]E[Y].$$

#### Bukti.

Berdasarkan definisi awal nilai ekspektasi yakni,

$$\begin{aligned} E[ZY] &= \sum_z \sum_y zyP(Z = z, Y = y) \\ &= \sum_z \sum_y zyP(Z = z)P(Y = y) \\ &= \left( \sum_z zP(Z = z) \right) \left( \sum_y yP(Y = y) \right) \\ &= E[Z]E[Y]. \end{aligned}$$

**Teorema.** Diberikan  $Z, Y$  merupakan variabel acak sehingga

$$E[Z] = E(E(Z|Y))$$

dengan  $E(Z|Y)$  merupakan ekspektasi bersyarat  $Z$  diberikan  $Y$ .

**Lampiran A (Lanjutan)****Bukti.**

$$\begin{aligned} E(E(Z|Y)) &= E \left[ \sum_z z P(Z = z|Y) \right] \\ &= \sum_y \left[ \sum_z z P(Z = z|Y = y) \right] P(Y = y) \\ &= \sum_z z \sum_y P(Z = z|Y = y) P(Y = y) \\ &= \sum_z z \sum_y P(Z, Y) \\ &= \sum_z z P(Z = z) \\ &= E[Z]. \end{aligned}$$



## Lampiran B

### Pembuktian Teorema pada Proses Poisson Non-Homogen

**Teorema.** Jika diberikan fungsi nilai rata-rata (*mean value function*)

$$m(t) = \int_0^t \lambda_u du,$$

maka dapat ditunjukkan bahwa,

$$P\{X(t+s) - X(t) = n\} = e^{-(m(t+s)-m(t))} \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!}, n \geq 0$$

dengan  $X(t+s) - X(t)$  berdistribusi Poisson dengan rata-rata  $m(t+s) - m(t)$ .

#### **Bukti.**

Dengan menggunakan definisi  $P_n(s) = P\{X(t+s) - X(t) = n\}$ .

$$\begin{aligned} P_0(s+h) &= P\{X(t+s+h) - X(t) = 0\} \\ &= P\{X(t, t+s) = 0, X(t+s, t+s+h) = 0\}. \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi proses Poisson memiliki kenaikan bebas diperoleh,

$$\begin{aligned} P_0(s+h) &= P\{X(t, t+s) = 0\} \cdot P\{X(t+s, t+s+h) = 0\} \\ &= P_0(s) \cdot P\{X(t+s, t+s+h) = 0\} \\ &= P_0(s) [1 - \lambda(t+s)h + o(h)] \end{aligned}$$

$$P_0(s+h) - P_0(s) = -\lambda(t+s)P_0(s) + o(h)P_0(s)$$

$$\frac{P_0(s+h) - P_0(s)}{h} = -\frac{\lambda(t+s)P_0(s)}{h} + \frac{o(h)P_0(s)}{h}.$$

Selanjutnya, dilimitkan  $h \rightarrow 0$  sehingga menghasilkan:

$$P_0'(s) = -\lambda(t+s)P_0(s)$$

$$\frac{P_0'(s)}{P_0(s)} = -\lambda(t+s)$$

$$\ln P_0(s) = \int_0^s \lambda(t+u) ds.$$

### Lampiran B (Lanjutan)

Oleh karena itu,

$$P_0(s) = Ce^{-m(t+s)}.$$

Misal  $P_0(0) = 1$ ,

$$1 = Ce^{-m(t+s)}$$

$$C = e^{m(t)}.$$

Sehingga diperoleh:

$$P_0(s) = e^{-(m(t+s)-m(t))}.$$

Selanjutnya, dibuktikan untuk  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} P_n(s+h) &= P\{X(t+s+h) = n\} \\ &= P\{X(t+s) = n, X(t+s+h) - X(t+s) = n\} \\ &= P\{X(t+s) = n, X(t+s+h) - X(t+s) = 0\} \\ &\quad + P\{X(t+s) = n-1, X(t+s+h) - X(t+s) = 1\} \\ &\quad + P\{X(t+s) = n, X(t+s+h) - X(t+s) \geq 2\} \\ &= P\{X(t+s) - X(t) = n\} \cdot P\{X(t+s+h) - X(t+s) = 0\} \\ &\quad + P\{X(t+s) - X(t) = n-1\} \cdot P\{X(t+s+h) - X(t+s) = 1\} \\ &\quad + P\{X(t+s) - X(t) = n\} \cdot P\{X(t+s+h) - X(t+s) \geq 2\}. \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat (iii) dan (iv) pada Definisi 2.13 menghasilkan:

$$P_n(s+h) = P_n(s) [1 - \lambda(t+s)h + o(h)] + P_{n-1}(s) [\lambda(t+s)h + o(h)]$$

$$\begin{aligned} \frac{P_n(s+h) - P_n(s)}{h} &= -P_n(s)\lambda(t+s) + \frac{P_n(s)o(h)}{h} + P_{n-1}(s)\lambda(t+s) \\ &\quad + \frac{P_{n-1}(s)o(h)}{h} + \frac{o(h)}{h}. \end{aligned}$$

Kemudian, masing-masing ruas dilimitkan untuk  $h \rightarrow 0$ ,

$$P'_n(s) = -P_n(s)\lambda(t+s) + P_{n-1}(s)\lambda(t+s)$$

$$P'_n(s) + P_n(s)\lambda(t+s) = P_{n-1}(s)\lambda(t+s)$$

$$e^{m(t+s)} [P'_n(s) + P_n(s)\lambda(t+s)] = P_{n-1}(s)\lambda(t+s)e^{m(t+s)}$$

$$\frac{d}{ds} \left[ e^{m(t+s)} P_n(s) \right] = P_{n-1}(s)\lambda(t+s)e^{m(t+s)}.$$

## Lampiran B (Lanjutan)

Untuk menunjukkan Persamaan 2.13 benar, akan digunakan induksi secara matematis. Asumsikan benar untuk  $n - 1$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \left[ e^{m(t+s)} P_n(s) \right] &= e^{-(m(t+s)-m(t))} \frac{[m(t+s) - m(t)]^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ &\quad \lambda(t+s).e^{m(t+s)} \\ &= \lambda(t+s).e^{m(t)} \frac{[m(t+s) - m(t)]^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ e^{m(t+s)} P_n(s) &= e^{m(t)} \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!} + C.\end{aligned}$$

Misal  $P_0(0) = 1$ ,

$$P_n(s) = e^{-(m(t+s)-m(t))} \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!}.$$





## Lampiran C

### Teorema Fundamental Kalkulus Bagian I

Jika  $f$  kontinu pada  $[a, b]$ , maka fungsi  $g$  didefinisikan dengan

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b$$

kontinu pada  $[a, b]$  serta diferensiabel pada  $(a, b)$ , sehingga  $g'(x) = f(x)$ .

#### **Bukti.**

Jika  $x$  dan  $x + h$  berada pada  $(a, b)$ , maka

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \left( \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt \right) - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

untuk  $h \neq 0$ , sedemikian hingga

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Diasumsikan bahwa  $h > 0$ . Diketahui  $f$  kontinu pada  $[x, x+h]$ . Berdasarkan Teorema Nilai Ekstrim menyatakan bahwa terdapat  $u$  dan  $v$  pada  $[x, x+h]$  yakni  $f(u) = m$  dan  $f(v) = M$ , dengan  $m$  dan  $M$  merupakan nilai absolut minimum dan maksimum dari  $f$  pada  $[x, x+h]$ . Berdasarkan sifat dari integral diperoleh,

$$\begin{aligned} mh &\leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq Mh \\ f(u)h &\leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v)h. \end{aligned}$$

### Lampiran C (Lanjutan)

Mengacu bahwa  $h > 0$  sehingga,

$$f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v)$$

$$f(u) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(v).$$

Misalkan jika  $h \rightarrow 0$  maka  $u \rightarrow x$  dan  $v \rightarrow x$  karena  $u$  dan  $v$  berada di antara  $x$  dan  $x+h$  sedemikian hingga,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x) \text{ dan } \lim_{h \rightarrow 0} f(v) = \lim_{v \rightarrow x} f(v) = f(x).$$

Diketahui bahwa  $f$  kontinu pada  $x$ . Oleh karena itu,

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

atau dapat dituliskan dengan,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

**Lampiran D**  
***Listing Code Program MATLAB Solusi Analitik Model***  
**Penentuan Harga Obligasi Bencana**

```

1  %% Inputan
2
3  %%Nilai Recovery
4  E = 500;
5
6  %%Waktu Penerbitan Obligasi
7  t = 0;
8
9  %%Tingkat Forward pada Waktu t+k-Delta
10 L0 = 0.004;
11
12  %%Nilai Nominal Obligasi Bencana
13  A = 1000;
14
15  %%Shift antara Tingkat Forward dan Tingkat Spot
    pada t+k
16  theta = 0.00011;
17
18  %%Tingkat Spread Obligasi Bencana
19  c = 0.04;
20
21  %%Frekuensi Pembayaran Kupon dalam Setahun
22  delta = 0.25;
23
24  %%Nilai discount Factors Antara Waktu Penerbitan
    Obligasi Hingga Jatuh Tempo
25  p = [0.9846; 0.9673; 0.9510; 0.9323; 0.9163; 0.8961;
    0.8759; 0.8499; 0.8248; 0.8030; 0.7949; 0.7724];
26
27  %%Intensitas proses terjadinya bencana
28  lambda_S = [ 1; 1; 0; 0; ; 1 ;1; 1; 1; 0; 1; 1 ];
29
30

```

## Lampiran D (Lanjutan)

```

1  %% Present value dari pembayaran kupon pertama
   obligasi bencana
2
3  lambda = lambda_S(1);
4  nilai  = int(lambda,s,0,1);
5  a      = A*(L0+c)*delta*p(1)*exp(-nilai);
6
7  %% Harga obligasi kupon mengambang pada waktu t+k
8
9  lambda = lambda_S(1);
10 nilai  = int(lambda,s,0,1);
11 b      = A*p(1)*exp(-nilai);
12
13
14 %% Nilai recovery jika terjadi bencana sebelum t+k
15
16 lambda = lambda_S(1);
17 n = int(lambda,s,0,1);
18 d = p(1)*E*exp(-n)*int(lambda,s,0,1);
19
20
21 %% Kerugian yang terjadi apabila terjadi bencana
   setelah pembayaran kupon pertama
22
23 e = 0;
24 n = 0;
25 for u = 2:length(p)
26 lambda = lambda_S(u);
27 for i   = 1:u
28 lm     = lambda_S(i);
29 nilai_lambda = int(lm,s,i-1,i);
30 n      = n + nilai_lambda;
31 end
32 e = e + (A-E)*p(u)*exp(-n)*int(lambda,s,u-1,u);
33 end
34

```

## Lampiran D (Lanjutan)

```
1 Kerugian yang terjadi apabila terjadi bencana
   setelah pembayaran kupon pertama
2 f = 0;
3 n = 0;
4 for u = 2:length(p)
5     for i = 1:u
6         lm = lambda_S(i);
7         nilai_lambda = int(lm,s,i-1,i);
8         n = n + nilai_lambda;
9     end
10    f = f + A*(theta+c)*delta* exp(-n)*p(u);
11    end
12
13    %% Nilai harga obligasi bencana
14    nilai_obligasi = double(a)+ double(b)+ double (d)-
   double(e)+ double(f)
15
```



## Lampiran E

### Listing Code Program GUI MATLAB Solusi Analitik Model Penentuan Harga Obligasi Bencana

#### Button Hitung

```

1  %Mengambil nilai dari radio button
2  tahun      = get(handles.button_tahun,'value');
3  setengah  = get(handles.button_setengah,'value');
4  perempat  = get(handles.button_seperempat,'value');
5
6  %Untuk kondisi annually
7  if tahun==1
8  syms s
9  lambda_S = cell2mat( textscan( get(handles.edit1,'
   String'), '%d' ) );
10 p        = cell2mat( textscan( get(handles.edit3,'
   String'), '%d' ) );
11
12 if length(lambda_S)==length(p)
13 A        = str2num(get(handles.edit4,'String'));
14 c        = str2num(get(handles.edit5,'String'));
15 delta    = 1;
16 L0       = str2num(get(handles.edit6,'String'));
17 theta    = str2num(get(handles.edit7,'String'));
18 E        = str2num(get(handles.edit8,'String'));
19
20 % Present value dari pembayaran kupon pertama
   obligasi bencana
21
22 lambda   = lambda_S(1);
23 nilai    = int(lambda,s,0,1);
24 a        = A*(L0+c)*delta*p(1)*exp(-nilai);
25
26 % Harga obligasi kupon mengambang pada waktu t+k
27
28 lambda   = lambda_S(1);
29 nilai    = int(lambda,s,0,1);
30 b        = A*p(1)*exp(-nilai);
31
32

```

## Lampiran E (Lanjutan)

```

1  %% Nilai recovery jika terjadi bencana sebelum t+k
2
3  lambda = lambda_S(1);
4  n = int(lambda,s,0,1);
5  d = p(1)*E*exp(-n)*int(lambda,s,0,1);
6
7
8  %% Kerugian yang terjadi apabila terjadi bencana
   setelah pembayaran kupon pertama
9
10 e = 0;
11 n = 0;
12 for u = 2:length(p)
13     lambda = lambda_S(u);
14     for i = 1:u
15         lm = lambda_S(i);
16         nilai_lambda = int(lm,s,i-1,i);
17         n = n + nilai_lambda;
18     end
19     e = e + (A-E)*p(u)*exp(-n)*int(lambda,s,u-1,u);
20 end
21
22 %% Pembayaran tetap setelah pembayaran kupon pertama
23
24 f = 0;
25 n = 0;
26 for u = 2:length(p)
27     for i = 1:u
28         lm = lambda_S(i);
29         nilai_lambda = int(lm,s,i-1,i);
30         n = n + nilai_lambda;
31     end
32     f = f + A*(theta+c)*delta* exp(-n)*p(u);
33 end
34
35 %% Nilai harga obligasi bencana
36
37 nilai_obligasi = double(a)+ double(b)+ double(d)-
   double(e)+ double(f)
38 set(handles.edit2,'String',nilai_obligasi);
39

```



## Lampiran E (Lanjutan)

```

1  %Untuk kondisi semi-annually
2  elseif setengah==1
3  syms s
4  lambda_r = cell2mat( textscan( get(handles.edit1,'
   String'), '%d' ) );
5  lambda_S = subs(lambda_r);
6  p        = cell2mat( textscan( get(handles.edit3,'
   String'), '%d' ) );
7
8  if length(lambda_S)==length(p)
9  A        = str2double(get(handles.edit4,'String'));
10 c        = str2double(get(handles.edit5,'String'));
11 delta    = 0.25;
12 L0       = str2double(get(handles.edit6,'String'));
13 theta    = str2double(get(handles.edit7,'String'));
14 E        = str2double(get(handles.edit8,'String'));
15
16 %% Present value dari pembayaran kupon pertama
   obligasi bencana
17
18 lambda = lambda_S(1);
19 nilai  = int(lambda,s,0,1);
20 a      = A*(L0+c)*delta*p(1)*exp(-nilai);
21
22 %% Harga obligasi kupon mengambang pada waktu t+k
23
24 lambda = lambda_S(1);
25 nilai  = int(lambda,s,0,1);
26 b      = A*p(1)*exp(-nilai);
27
28 %% Nilai recovery jika terjadi bencana sebelum t+k
29
30 lambda = lambda_S(1);
31 n      = int(lambda,s,0,1);
32 d      = p(1)*E*exp(-n)*int(lambda,s,0,1);
33
34

```

## Lampiran E (Lanjutan)

```

1  %Untuk kondisi quarterly
2  else
3  syms s
4  lambda_r = cell2mat( textscan( get(handles.edit1,'
      String'), '%d' ) );
5  lambda_S = subs(lambda_r);
6  p        = cell2mat( textscan( get(handles.edit3,'
      String'), '%d' ) );
7
8  if length(lambda_S)==length(p)
9      A      = str2double(get(handles.edit4,'String'));
10     c      = str2double(get(handles.edit5,'String'));
11     delta  = 0.25;
12     L0     = str2double(get(handles.edit6,'String'));
13     theta  = str2double(get(handles.edit7,'String'));
14     E      = str2double(get(handles.edit8,'String'));
15
16     %% Present value dari pembayaran kupon pertama
      obligasi bencana
17
18     lambda = lambda_S(1);
19     nilai  = int(lambda,s,0,1);
20     a      = A*(L0+c)*delta*p(1)*exp(-nilai);
21
22     %% Harga obligasi kupon mengambang pada waktu t+k
23
24     lambda = lambda_S(1);
25     nilai  = int(lambda,s,0,1);
26     b      = A*p(1)*exp(-nilai);
27
28
29     %% Nilai recovery jika terjadi bencana sebelum t+k
30
31     lambda = lambda_S(1);
32     n = int(lambda,s,0,1);
33     d = p(1)*E*exp(-n)*int(lambda,s,0,1);
34
35

```

## Lampiran E (Lanjutan)

```

1
2 % Kerugian yang terjadi apabila terjadi bencana
  setelah pembayaran kupon pertama
3 e = 0;
4 n = 0;
5 for u = 2:length(p)
6 lambda = lambda_S(u);
7 for i = 1:u
8 lm = lambda_S(i);
9 nilai_lambda = int(lm,s,i-1,i);
10 n = n + nilai_lambda;
11 end
12 e = e + (A-E)*p(u)*exp(-n)*int(lambda,s,u-1,u);
13 end
14
15 %% Pembayaran tetap setelah pembayaran kupon pertama
16 f = 0;
17 n = 0;
18 for u = 2:length(p)
19 for i = 1:u
20 lm = lambda_S(i);
21 nilai_lambda = int(lm,s,i-1,i);
22 n = n + nilai_lambda;
23 end
24 f = f + A*(theta+c)*delta* exp(-n)*p(u);
25 end
26
27 %% Nilai harga obligasi bencana
28 nilai_obligasi = double(a)+ double(b)+ double (d)-
  double(e)+ double(f);
29 set(handles.edit2, 'String', nilai_obligasi);
30 else
31 warndlg('Pastikan banyak fungsi intensitas dan nilai
  discount factor sama')
32 end
33

```

## Lampiran E (Lanjutan)

### **Button Reset**

```
1 % --- Executes on button press in pushbutton2.
2 function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata,
   handles)
3 % hObject    handle to pushbutton2 (see GCBO)
4 % eventdata  reserved - to be defined in a future
   version of matlab
5 % handles    structure with handles and user data (
   see GUIDATA)
6 set(handles.edit4,'string','')
7 set(handles.edit5,'string','')
8 set(handles.edit6,'string','')
9 set(handles.edit7,'string','')
10 set(handles.edit8,'string','')
11 set(handles.edit1,'string','')
12 set(handles.edit2,'string','')
13 set(handles.edit3,'string','')
14
```

## BIODATA PENULIS



Penulis bernama Ajeng Puspitaningrum, lahir di Balikpapan, 2 Juni 1997. Jenjang pendidikan formal yang ditempuh oleh penulis dimulai dari TK Negeri Pembina (2002-2004), SDN 003 Balikpapan Selatan (2004-2009), SMP Negeri 1 Balikpapan (2009-2012), SMA Negeri 1 Balikpapan (2012-2015). Setelah lulus dari SMAN 1 Balikpapan penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Departemen Matematika ITS pada tahun 2015-sekarang melalui jalur SNMPTN dengan NRP 06111540000005. Di Departemen Matematika ITS penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di HIMATIKA ITS sebagai staf Departemen Media dan Informasi (2017-2018). Kemudian juga aktif sebagai staff Departemen Big Event Lembaga Dakwah Jurusan Ibnu Muqhlah Matematika ITS (2017-2018). Selain itu, penulis juga aktif dalam berbagai acara kemahasiswaan yaitu OMITS, dan dalam pelatihan kemahasiswaan seperti LKMM Pra-TD, LKMM TD.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditunjukkan ke penulis melalui email: *ajengpngrm@gmail.com*.