



TUGAS AKHIR - KM184801

**PENENTUAN HARGA OPSI BASKET TIPE
EROPA BERDASARKAN MODEL
BLACK-SCHOLES**

HAMIDAH QURROTUN NADWAH
NRP 06111440000035

Dosen Pembimbing:
Endah Rokhmati Merdika Putri, Ph.D
Drs. Iis Herisman, M.Sc

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019



FINAL PROJECT - KM184801

**PRICING OF EUROPEAN BASKET OPTION
BASED ON BLACK SCHOLES MODEL**

HAMIDAH QURROTUN NADWAH
NRP 06111440000035

Supervisors:
Endah Rokhmati Merdika Putri, Ph.D
Drs. Iis Herisman, M.Sc

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics, Computations, and Data Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2019

LEMBAR PENGESAHAN
PENENTUAN HARGA OPSI BASKET TIPE
EROPA BERDASARKAN MODEL
BLACK-SCHOLES
*PRICING OF EUROPEAN BASKET OPTION
BASED ON BLACK-SCHOLES MODEL*

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika
pada

Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
HAMIDAH QURROTUN NADWAH
NRP. 06111440000035

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Drs. Iis Herisman, M.Sc
NIP. 19601002 198903 1 002

Dosen Pembimbing I,

Endah Rokhmati Merdika Putri, Ph.D
NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,
Ketua Departemen Matematika
FKSD ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2019



PENENTUAN HARGA OPSI BASKET TIPE EROPA BERDASARKAN MODEL BLACK-SCHOLES

Nama Mahasiswa : Hamidah Qurrotun Nadwah
NRP : 06111440000035
Jurusan : Matematika FMKSD-ITS
Pembimbing : 1. Endah Rokhmati Merdika Putri, Ph.D
2. Drs. Iis Herisman, M.Sc

Abstrak

Opsi merupakan salah satu derivatif keuangan berupa kontrak untuk membeli (call option) atau menjual (put option) sebuah aset dengan harga tertentu pada periode tertentu. Opsi dengan lebih dari satu aset dasar disebut opsi multi-aset. Pada penelitian ini dibahas mengenai perhitungan pada salah satu jenis opsi multi-aset yaitu opsi basket. Penentuan harga opsi bertujuan meminimalisasi resiko dan memaksimalkan keuntungan dalam berinvestasi di pasar modal sehingga penting dilakukan sebelum melakukan kontrak opsi. Harga opsi merupakan suatu kondisi nilai batas pada persamaan diferensial parsial Black-Scholes. Pergerakan harga aset mengikuti gerak Brownian yang merupakan salah satu persamaan diferensial stokastik. Diperoleh solusi analitik dari model persamaan diferensial parsial Black-Scholes untuk menentukan harga opsi basket tipe eropa. Berdasarkan simulasi program dengan software MATLAB, didapatkan bahwa tingkat suku bunga dan volatilitas mempengaruhi harga opsi. Tingkat suku bunga yang semakin tinggi mengakibatkan harga opsi semakin tinggi. Volatilitas yang semakin tinggi mengakibatkan harga opsi semakin tinggi.
Kata-kunci: *harga opsi, opsi basket, model Black-Scholes*

PRICING OF EUROPEAN BASKET OPTION BASED ON BLACK SCHOLES MODEL

Name : Hamidah Qurrotun Nadwah
NRP : 06111440000035
Department : Mathematics FMKSD-ITS
Supervisors : 1. Endah Rokhmati Merdika Putri, Ph.D
2. Drs. Iis Herisman, M.Sc

Abstract

Option is one of the financial derivatives in the form of contracts to buy (call option) or sell (put option) an asset at certain price for a certain period. Option with more than one underlying asset namely multi-asset option. This study discuss the calculation of one type multi-asset option, namely basket option. Pricing options aims to minimize risk and maximize profits in capital market investments so that it is important before making an option contract. Option price is terminal boundary condition in Black-Scholes partial differential equation. Underlying asset price movement is one of stochastic differential equation. Analytical solutions are obtained from Black-Scholes partial differential equation model for pricing european basket option. Based on program simulation using MATLAB software, it was found that volatility and interest rates affected the option. The higher interest rates, resulted the greater option price. The higher volatility, resulted the greater option price.

Keywords: *option pricing, basket option, Black-Scholes model*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarakatuh.
Puji syukur dihadapan Tuhan Yang Maha Esa karena atas anugerah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan dengan baik tugas akhir ini yang berjudul

”PENENTUAN HARGA OPSI BASKET TIPE EROPA BERDASARKAN MODEL BLACK-SCHOLES”

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, MT selaku Ketua Departemen Matematika FMKSD ITS.
2. Ibu Endah Rokhmati M.P., S.Si, MT, Ph.D selaku Dosen Pembimbing I atas segala bimbingan serta motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan tugas akhir sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Sc selaku Dosen Pembimbing II sekaligus koordinator tugas akhir yang memberikan bimbingan sekaligus informasi mengenai tugas akhir.
4. Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si selaku dosen wali yang memberikan arahan akademik selama penulis

menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.

5. Bapak dan Ibu Dosen serta para staf Departemen Matematika yang telah memberikan ilmu selama penulis menempuh pendidikan jenjang S-1.
6. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu. Terima kasih atas doa dan dukungan kepada penulis sampai dengan selesainya pendidikan ini.

Penulis juga menyadari bahwa dalam tugas akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat membawa manfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Juli 2019

Penulis

Special Thank's To

Penyelesaian penulisan tugas akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Mama Khusnun Nadhifah, S.Kom, M.M dan Ayah Wahyudi Widada, M.Ked selaku Orang tua yang selalu memberikan dukungan penuh, doa dan semangat kepada penulis.
2. Ibu Endah R.M.P., P.hD atas kesabaran dan semangatnya dalam membimbing penulis hingga menyelesaikan pendidikan tahap S-1.
3. Muhammad Ghaza, Dinny Zaidan selaku adik penulis, serta Keluarga Ch.Anam yang memberikan dukungan dan semangat mencari ilmu.
4. Kakak Iim, Ekky, Kakak Luluk, Kakak Firdaus, dan Kakak Anisa atas waktu yang disediakan, dan dukungan langsung dalam penulisan Tugas Akhir ini.
5. Kakak Yuliasfa, Nuris, Ruli, dan Dewi yang selalu mendukung penulis untuk selalu bersemangat menyelesaikan pendidikan.
6. Dinah, Fisa, Shelly, dan teman-teman seperjuangan dalam proses penyusunan Tugas Akhir yang memberikan keceriaan dan dukungan pada setiap langkah.
7. Ido, Rosyita, Aficena, Panji, teman-teman HIMASA JEMBER, dan semua pihak yang telah membantu dan mendukung penulis sehingga Tugas Akhir ini dapat selesai dengan baik.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Terdahulu	7
2.2 Opsi	8
2.2.1 Istilah Dasar pada Opsi	9
2.2.2 Keuntungan dari Perdagangan Opsi	10

2.2.3	Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Nilai Opsi	11
2.2.4	Dasar Penentuan Opsi	13
2.3	Opsi Multi-Aset	14
2.4	Opsi Basket	16
2.5	Proses Stokastik	17
2.6	Model Stokastik Opsi Multi-Aset	18
2.7	Gerak Brownian	20
2.7.1	Gerak Brownian standar	22
2.7.2	Gerak Brownian geometrik	22
2.8	Lemma Itô	23
2.9	Persamaan Black Scholes	23
2.10	Quadratic Variation	26
2.11	Persamaan Difusi	30
2.12	Distribusi Normal	31
BAB III	METODE PENELITIAN	33
BAB IV	ANALISA DAN PEMBAHASAN	37
4.1	Pembentukan Model Black-Scholes pada Opsi Multi-Aset	37
4.1.1	Pembentukan Portofolio	37
4.1.2	Penilaian Opsi	38
4.1.3	Penyertaan Dividen dalam Model	39
4.2	Pembentukan Model Black-Scholes pada Opsi Basket	43
4.2.1	Pembentukan Persamaan Difusi	43
4.2.2	Penyelesaian Persamaan Difusi	51
4.3	SIMULASI Program	62
4.3.1	Simulasi payoff pada opsi beli	62
4.3.2	Simulasi payoff pada opsi beli dengan tiga tingkat suku bunga (5%, 10%, 15%)	64

4.3.3	Simulasi payoff pada opsi beli dengan tiga tingkat volatilitas (10%, 20%, 30%)	66
BAB V	PENUTUP	69
5.1	Kesimpulan	69
5.2	Saran	70
	DAFTAR PUSTAKA	71
	LAMPIRAN	75

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Ilustrasi Persamaan Difusi	30
Gambar 3.1 Diagram Alir Metodologi Penelitian . . .	36
Gambar 4.1 <i>Payoff</i> opsi beli dengan dua buah aset dasar	63
Gambar 4.2 Payoff opsi beli dengan tiga tingkat suku bunga	64
Gambar 4.3 <i>Payoff</i> opsi beli dengan tiga tingkat volatilitas	66

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
LAMPIRAN A Listing Program pada <i>payoff</i> opsi beli.	76
LAMPIRAN B Listing Program pada <i>payoff</i> opsi beli dengan pengaruh suku bunga.	78
LAMPIRAN C Listing Program pada <i>payoff</i> opsi beli dengan pengaruh volatilitas.	81
LAMPIRAN D Biodata Penulis	84

DAFTAR SIMBOL

S_1	: Saham ke-1
S_2	: Saham ke-2
S_t	: Saham pada waktu t
ΔS	: Banyaknya saham
K	: Harga kesepakatan
T	: Waktu jatuh tempo
t	: Waktu
C	: Opsi Call
P	: Opsi Put
V	: Harga opsi
$N \sim (0, 1)$: Distribusi Normal
$\phi(\cdot)$: PDF Distribusi Normal
$\Phi(\cdot)$: CDF Distribusi Normal
a	: Korelasi
q	: Dividen
r	: Tingkat suku bunga
τ	: Time to maturity
π	: Portofolio
α_1	: Porsi pada aset ke-1
α_2	: Porsi pada aset ke-2
μ	: Drift
$\hat{\mu}$: Nilai estimasi drift
σ_1	: Volatilitas 1
σ_2	: Volatilitas 2
$\hat{\sigma}$: Nilai estimasi volatilitas
Wt	: Proses Wiener
dt	: Selang waktu

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat penulisan Tugas Akhir.

1.1 Latar Belakang

Derivatif dapat didefinisikan sebagai suatu produk keuangan yang nilainya bergantung pada aset yang mendasarinya (*underlying assets*). Derivatif merupakan salah satu contoh inovasi yang sangat penting dalam perkembangan dunia keuangan. Seiring dengan berkembangnya ekonomi dan integrasi keuangan dunia yang juga disertai dengan volatilitas pasar keuangan yang fluktuatif, maka penggunaan instrumen derivatif dapat berfungsi sebagai alat pengendali resiko. Resiko yang dihadapi para pelaku pasar modal antara lain yaitu resiko kurs, resiko harga saham, tingkat suku bunga, fluktuasi harga komoditas serta hubungan satu sama lain dari resiko-resiko tersebut. Dengan adanya derivatif, memungkinkan para investor pasar modal untuk melindungi diri dari berbagai resiko yang mungkin akan terjadi. Derivatif digunakan oleh manajemen investasi atau manajemen portofolio, perusahaan, dan lembaga keuangan serta investor perorangan untuk mengelola posisi yg mereka miliki terhadap resiko dari pergerakan harga saham, komoditas, atau suku bunga [1].

Terdapat berbagai jenis derivatif, salah satu jenis derivatif yaitu opsi. Opsi atau *option* merupakan suatu jenis kontrak antara dua pihak dimana satu pihak memberi hak

kepada pihak lain untuk menjual atau membeli aset tertentu pada harga dan periode tertentu. Nilai opsi bergantung pada aset yang mendasarinya, yang selanjutnya disebut dengan *underlying asset*. Pada umumnya, opsi standar mempunyai hanya satu *underlying asset*. Opsi yang mempunyai lebih dari satu *underlying asset* disebut dengan opsi multi-aset. Saat ini terdapat banyak jenis opsi multi-aset di pasar keuangan internasional; seperti *rainbow option*, *basket option*, dan *quanto option*. Perbedaan jenis dalam opsi multi-aset bergantung pada fungsi *pay-off* nya. Berbeda dengan opsi standar, *return* atau pengembalian pada opsi multi-aset bergantung pada dua atau lebih aset yang mendasarinya.

Berdasarkan waktu pelaksanaannya, opsi dibedakan menjadi dua yaitu opsi tipe eropa dan opsi tipe amerika. Opsi tipe eropa hanya bisa menggunakan haknya pada saat jatuh tempo. Sedangkan opsi tipe amerika dapat menggunakan haknya kapanpun sebelum kontrak opsi memasuki waktu jatuh tempo [1].

Penetapan harga pada kontrak opsi menjadi sangat penting karena memungkinkan investor untuk mengevaluasi berbagai strategi dengan mempertimbangkan faktor penentu harga opsi. Selain itu, penetapan harga opsi juga bertujuan agar meminimalisasi resiko sekaligus memaksimalkan keuntungan dalam berinvestasi di pasar modal.

Pada penelitian ini dilakukan penetapan harga opsi basket tipe eropa berdasarkan model Black-Scholes. Model Black Scholes merupakan model yang berguna dalam menentukan harga opsi. Model Black-Scholes sangat berguna bagi investor, untuk menilai apakah harga opsi yang terjadi di pasar sudah merupakan harga yang dianggap *fair* bagi opsi tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, disusun suatu rumusan masalah yaitu bagaimana mendapatkan solusi analitik dalam menentukan harga *European Basket Call Option* berdasarkan model Black-Scholes.

1.3 Batasan Masalah

Batasan permasalahan yang digunakan antara lain :

1. Aset dasar pada opsi basket adalah sebanyak dua saham
2. Volatilitas aset diasumsikan konstan
3. Hubungan antara kedua aset diasumsikan konstan
4. Tidak terdapat bea transaksi dan pajak
5. Opsi yang digunakan adalah opsi beli.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penyusunan Tugas Akhir ini adalah untuk mendapatkan solusi analitik dalam menentukan harga *European Basket Call Option* berdasarkan model Black-Scholes.

1.5 Manfaat

Manfaat dari Tugas Akhir ini antara lain :

1. Untuk penulis : Sebagai bahan pembelajaran dan wawasan bidang Matematika Keuangan khususnya dalam menentukan harga opsi basket tipe eropa
2. Untuk mahasiswa dan pembaca lainnya : Sebagai wawasan tambahan di bidang Matematika Keuangan. Juga dapat dijadikan sebagai bahan studi lebih lanjut sehingga dapat menambah referensi ilmu pengetahuan
3. Untuk pelaku pasar modal : Sebagai informasi tambahan bagi investor yang akan berinvestasi dalam pasar modal, khususnya opsi basket.

1.6 Sistematika Penulisan

Secara keseluruhan, Tugas Akhir ini terdiri dari lima bab dan lampiran. Secara garis besar, dalam masing-masing bab dibahas hal-hal berikut :

1. BAB I PENDAHULUAN

Pada BAB I dijelaskan gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi Latar Belakang, Rumusan Masalah, Batasan Masalah, Tujuan, Manfaat, dan Sistematika Penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada BAB II diuraikan tentang teori-teori utama maupun materi penunjang yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir, diantaranya adalah penelitian terdahulu, teori opsi, opsi multi-aset, opsi basket, proses stokastik, model stokastik opsi multi-aset, gerak *Brownian*, lemma Ito, persamaan Black-Scholes, *quadratic variation*, persamaan difusi, dan distribusi normal.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Pada BAB III dideskripsikan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan tersebut adalah studi literatur; pembentukan model umum Black-Scholes pada opsi multi-aset; pembentukan model Black-Scholes pada opsi multi aset jenis opsi basket; simulasi program; penarikan kesimpulan dan penulisan laporan Tugas Akhir.

4. BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada BAB IV dibahas secara rinci mengenai pembentukan model umum Black-Scholes pada opsi multi-aset, dan pembentukan model umum Black-Scholes pada opsi multi-aset jenis opsi basket dengan

menggunakan persamaan diferensial difusi beserta solusi pengerjaannya.

5. BAB V PENUTUP

Pada BAB V berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisa dan pembahasan Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai penelitian terdahulu serta teori-teori penunjang Tugas Akhir, diantaranya yaitu teori opsi, opsi multi-aset, opsi basket, proses stokastik, model stokastik opsi multi-aset, gerak *Brownian*, lemma Ito, persamaan Black-Scholes, *quadratic variation*, persamaan difusi, dan distribusi normal.

2.1 Penelitian Terdahulu

Dalam Tugas Akhir ini, penulis merujuk pada beberapa penelitian sebelumnya yang sesuai dengan topik yang diambil. Rujukan pertama adalah yang digunakan adalah penelitian dari Lishang Jiang pada tahun 2004 dengan judul "*Mathematical Modelling and Methods of Option Pricing*". Pada buku tersebut, Lishang Jiang pada Chapter 7 mendeskripsikan tentang model dan metode penyelesaian dari penetapan harga opsi multi-aset. Dideskripsikan pergerakan harga aset dasar dengan menggunakan model kontinu dari gerak Brownian. Kemudian dibentuk suatu model matematika untuk penentuan harga opsi dengan menggunakan persamaan diferensial parsial Black-Scholes, sehingga didapatkan suatu model harga opsi [2].

Pada rujukan berikutnya yaitu penelitian dari Paul Wilmott pada tahun 2007 dengan judul "*The Mathematics of Financial Derivatives*". Pada buku tersebut, Paul dalam Chapter 6 menjelaskan tentang model Black-Scholes yang merupakan metode yang sering digunakan dalam penetapan harga opsi. [3]

2.2 Opsi

Opsi adalah sebuah kontrak untuk membeli atau menjual sejumlah aset dasar (*underlying assets*) pada tanggal tertentu untuk suatu aset dasar tertentu. Opsi merupakan sebuah derivatif keuangan, atau instrumen keuangan yang diantaranya memungkinkan seseorang untuk melakukan spekulasi berkaitan dengan naik atau turunnya harga dari suatu aset yang mendasari. Aset yang dimaksud dapat berupa saham perusahaan, mata uang, komoditas pertanian, dan sebagainya. Opsi juga didefinisikan sebagai suatu perjanjian antara dua pihak yaitu *writer* sebagai penyusun kontrak opsi yang seringkali adalah sebuah *bank*, dan pemegang opsi (*holder*) sebagai pembeli opsi dengan harga pasar yang telah disepakati (*premium*) [4].

Berdasarkan waktu pelaksanaannya, opsi dapat dibedakan menjadi opsi eropa (*European Options*) dan opsi amerika (*American Options*). Opsi yang hanya dapat dilakukan kontraknya pada saat jatuh tempo disebut dengan opsi eropa. Untuk opsi amerika, kontrak dapat dilakukan kapan saja hingga tanggal jatuh tempo. Kedua jenis opsi ini disebut dengan opsi vanilla (*Vanilla Options*). Selain itu, terdapat opsi dimana *payoff* tidak hanya bergantung pada harga aset selama masa berlaku opsi, disebut dengan *path-dependent option* atau biasa disebut dengan opsi eksotik (*Exotic Option*).

Berdasarkan fungsinya, terdapat dua jenis opsi, yaitu *put* dan *call*. Opsi *put* adalah hak untuk menjual sejumlah aset dasar (*underlying asset*) dengan harga kesepakatan (*strike price*) pada waktu jatuh tempo (*maturity date*). Sedangkan opsi *call*, adalah hak untuk membeli sejumlah aset dasar dengan harga kesepakatan, pada waktu jatuh tempo [5].

Jika S_t adalah harga saham di pasar pada waktu T dan K adalah harga kesepakatan antara penjual dan pemegang opsi, maka keuntungan akibat menggunakan opsi

atau umunya disebut nilai *payoff* untuk kedua jenis opsi diatas diberikan sebagai berikut [6] :

Untuk opsi beli (*Call Option*)

$$C = \max(S_t - K, 0)$$

dan untuk opsi jual (*Put Option*)

$$P = \max(K - S_t, 0).$$

2.2.1 Istilah Dasar pada Opsi

Beberapa istilah-istilah penting yang mendasari perdagangan opsi antara lain [7] :

1. *Underlying Asset*

Opsi yang diperdagangkan dalam pasar opsi hanya tersedia untuk sekuritas-sekuritas yang merupakan aset yang mendasari (*underlying asset*) dan diperdagangkan dalam pasar modal. Contoh-contoh *underlying asset* yaitu komoditas (minyak, gas, emas), saham, mata uang, obligasi. *Underlying asset* yang berupa saham disimbolkan dengan S .

2. *Maturity Date*

Maturity date adalah waktu jatuh tempo atau batas waktu dimana opsi tersebut dapat dilaksanakan atau dieksekusi. Pada saat *maturity date* telah terlewati, opsi dinyatakan telah kadaluarsa atau dengan kata lain tidak dapat dieksekusi. Pada umumnya *maturity date* disimbolkan dengan T .

3. *Payoff*

Payoff adalah keuntungan dari menggunakan (*exercise*) opsi. *Payoff* masih menunjukkan keuntungan kotor dari selisih harga saham di pasar dengan harga penggunaan opsi (*exercise price*).

4. *Strike Price* atau *Exercise Price*

Strike price adalah nilai pembelian atau penjualan yang telah ditentukan untuk *underlying asset* ketika opsi dieksekusi. Nilai tersebut menjadi patokan pada saat jatuh tempo (*maturity date*). Pada umumnya *strike price* disimbolkan dengan K .

5. Dividen

Dividen merupakan bagian dari keuntungan perusahaan yang dibagikan kepada para pemegang saham. Dividen biasanya disimbolkan dengan q .

6. Volatilitas

Volatilitas berarti suatu ukuran yang menunjukkan seberapa besar nilai berfluktuasi dalam suatu periode [8]. Volatilitas atas suatu *underlying asset* merupakan ukuran tingkat ketidakpastian mengenai pergerakan *underlying asset* tersebut di masa yang akan datang. Jika volatilitas semakin meningkat maka akan semakin meningkat juga peluang *undelying asset* untuk mengalami peningkatan atau penurunan terhadap suatu opsi.

7. Aset beresiko dan aset bebas resiko

Aset berisiko adalah aset yang memiliki tingkat keuntungan yang tidak pasti di masa depan. Aset bebas risiko adalah aset yang memiliki tingkat keuntungan yang pasti di masa depan.

8. Premi

Premi merupakan nilai yang harus dibayarkan oleh pembeli opsi kepada penjual opsi.

2.2.2 Keuntungan dari Perdagangan Opsi

Ada beberapa keuntungan dari perdagangan opsi yang dapat diperoleh antara lain [9] :

1. Manajemen Risiko

Opsi *put* dari suatu *underlying asset* yang dimiliki oleh investor dapat digunakan untuk melakukan perlindungan portofolio (*hedging*) terhadap risiko penurunan nilai pasar melalui penundaan penjualan saham yang dimiliki, sehingga dapat menghindari terjadinya risiko kerugian.

2. Memberikan Waktu yang Fleksibel

Pemegang opsi *call* maupun opsi *put* dari sebuah kontrak opsi dapat menentukan apakah akan melaksanakan haknya atau tidak hingga masa jatuh tempo berakhir (*maturity date*).

3. Menyediakan Sarana Spekulasi

Para investor dapat memperkirakan nilai mengalami kenaikan dengan pertimbangan untuk membeli opsi *call* dan pertimbangan membeli opsi *put* jika perkiraan nilai mengalami penurunan. Hal ini dilakukan untuk memperoleh keuntungan.

2.2.3 Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Nilai Opsi

Dalam perdagangan opsi, beberapa faktor yang sangat mempengaruhi nilai sebuah opsi antara lain [10] :

1. Nilai *Strike Price*

Nilai suatu *strike price* dijadikan patokan dalam menentukan nilai opsi. Nilai suatu opsi *put* akan semakin meningkat apabila nilai *strike price*-nya juga meningkat. Begitupun untuk nilai opsi *call* juga akan mengalami peningkatan. Hal ini menunjukkan bahwa nilai *strike price* berbanding lurus dengan nilai opsi *put* dan *call*.

2. Jangka Waktu Jatuh Tempo

Nilai suatu opsi bergantung pada jangka waktu jatuh

tempo opsi tersebut. Pada jenis opsi amerika, kedua macam opsinya yaitu opsi *call* dan opsi *put* menjadi lebih bernilai apabila jangka waktu jatuh temponya semakin meningkat. Dikarenakan opsi amerika dapat dieksekusi sewaktu-waktu sampai batas *maturity date*. Sementara untuk nilai opsi eropa, baik opsi *call* maupun opsi *put* tidak berpengaruh terhadap waktu jatuh tempo (*maturity date*). Hal ini dikarenakan opsi eropa dieksekusi hanya pada saat *maturity date*.

3. Volatilitas

Volatilitas suatu *underlying asset* merupakan tolak ukur tingkat ketidakpastian pergerakan *underlying* tersebut dimasa mendatang. Volatilitas yang semakin meningkat akan mengakibatkan peluang *underlying asset* mengalami peningkatan atau bahkan mengalami penurunan. Semakin besar volatilitas (semakin besar jarak antara naik turunnya nilai *underlying asset*), maka semakin meningkat nilai opsi *call* dan opsi *put*.

4. Tingkat Suku Bunga Bebas Risiko

Nilai suatu opsi juga dipengaruhi oleh tingkat suku bunga bebas risiko. Apabila tingkat suku bunga dalam perekonomian meningkat, maka akan mempengaruhi harapan kenaikan nilai suatu *underlying asset*, misalnya saham. Nilai opsi *call* akan meningkat dengan adanya peningkatan *risk free interest rate*. Dan sebaliknya, nilai opsi *put* akan menurun.

Selain itu, harga opsi juga dipengaruhi oleh kondisi harga aset [7]. Kondisi tersebut meliputi,

1. *At the money*

Kondisi *at the money* pada opsi *call* ataupun opsi *put* yakni apabila harga saham sama dengan harga kesepakatan ($S = K$) pada saat transaksi.

2. *In the money*

Kondisi *in the money* pada opsi *call* yakni apabila harga saham lebih besar dari harga kesepakatan ($S > K$) pada saat transaksi. Dan untuk opsi *put*, yakni apabila harga saham kurang dari harga kesepakatan ($S < K$) pada saat transaksi.

3. *Out of the money*

Kondisi *out of the money* pada opsi *call* yakni apabila harga saham kurang dari harga kesepakatan ($S < K$) pada saat transaksi. Sedangkan untuk opsi *put*, harga saham lebih besar dari harga kesepakatan ($S > K$) pada saat transaksi.

2.2.4 Dasar Penentuan Opsi

Penentuan nilai sebenarnya dari suatu opsi merupakan hal yang penting. Apabila investor dapat menentukan nilai instrinsiknya, maka nilai pasar juga dapat ditentukan. Nilai instrinsik adalah perbedaan antara *strike price* dan nilai pasar dari *underlying asset* pada suatu waktu.

Nilai instrinsik opsi *call* akan positif apabila nilai saham lebih besar dari nilai kesepakatan (*strike price*) atau disebut *in the money*. Selisih antara nilai saham sebenarnya dan *strike price* mempengaruhi besarnya nilai instrinsik. Apabila nilai saham kurang dari *strike price*, sesuai dengan fungsi *payoff* pada opsi yakni $P = \max(S - K, 0)$ maka nilai instrinsik opsi *call* bernilai nol (*out the money*). Sedangkan nilai saham yang besarnya sama dengan *strike price*, maka opsi *call* dikatakan *at the money*. opsi *call* pada saat *out the money* maupun *at the money* akan memiliki nilai instrinsik sebesar nol, karena opsi *call* tersebut tidak menguntungkan jika dilaksanakan [9].

2.3 Opsi Multi-Aset

Opsi yang mempunyai lebih dari satu aset dasar atau *underlying assets* disebut dengan opsi multi-aset. Kontrak opsi adalah suatu derivatif keuangan. Karena itu, harganya bergantung pada pergerakan harga aset dasarnya. Pada opsi multi-aset, pergerakan harga opsi mengikuti suatu persamaan diferensial parabolik multidimensional [2].

Saat ini terdapat berbagai jenis opsi multi-aset di pasar keuangan internasional; beberapa diantaranya yakni *Rainbow Option*, *Basket Option*, dan *Quanto Option*. Perbedaan jenis pada opsi multi-aset bergantung pada fungsi *payoff* nya. Berbeda dengan opsi standar, *return* atau pengembalian pada opsi multi-aset bergantung pada dua atau lebih aset yang mendasarinya. Berikut merupakan jenis-jenis opsi multi-aset yang umum digunakan [11]:

1. Rainbow Option

Opsi pelangi atau *rainbow option* adalah istilah yang digunakan untuk mendeskripsikan derivatif tertentu yang terkait dengan dua atau lebih aset dasar. Opsi pelangi memberikan pemilik opsi berupa hak untuk membeli atau menjual maksimum atau minimum aset dasar sebagai nilai tetap. Terdapat berbagai jenis opsi pelangi, diantaranya adalah jenis berikut. *Maximum Call Option*, *Minimum Call Option*, *Maximum Put Option*, *Minimum Put Option*. Pada *Maximum Call Option*, investor diberikan sebuah hak untuk membeli aset beresiko S_i dengan harga kesepakatan K_i yang telah ditentukan pada tanggal jatuh tempo T . *Payoff* pada *maximum call option* diberikan sebagai berikut

Maximum Call Option

$$f(S_1, \dots, S_n, T) = (\max \{S_1, \dots, S_n\} - K)^+.$$

Dengan mengasumsikan nilai $K_1 = K_2 = \dots = K_n = K$, didapatkan hasil yaitu

Minimum Call Option

$$f(S_1, \dots, S_n, T) = (\min \{S_1, \dots, S_n\} - K)^+$$

Maximum Put Option

$$f(S_1, \dots, S_n, T) = (K - \max\{S_1, \dots, S_n\})^+$$

Minimum Put Option

$$f(S_1, \dots, S_n, T) = (K - \min\{S_1, \dots, S_n\})^+$$

2. Basket Option

Opsi basket atau *basket option* merupakan istilah opsi dalam sebuah keranjang (*basket*) aset. Opsi tersebut merupakan opsi yang *payoff* nya bergantung pada nilai portofolio atau sekumpulan aset. Aset dapat berupa saham, komoditas, indeks, atau sekuritas keuangan lain. Pada umumnya, opsi basket digunakan dalam transaksi mata uang asing. Opsi tersebut dirancang untuk memberikan portofolio manajer dengan meminimumkan biaya dan bertujuan melindungi resiko valuta asing. *Payoff* pada opsi basket adalah

$$f(S_1, \dots, S_n, T) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i - K)^+,$$

dengan keterangan sebagai berikut

α_i : bobot aset i yang ada dalam keranjang aset

S_i : nilai tukar mata uang asing i

K : rata-rata tertimbang pada nilai tukar.

3. Quanto Option

Opsi quanto atau *quanto option* adalah kontrak yang digunakan sebagai lindung nilai aset asing. Opsi ini merupakan opsi dengan portofolio aset asing yang berfungsi untuk menghindari resiko aset dan nilai tukar yang mendasarinya. Sehingga, *payoff* ditentukan tidak hanya oleh sekuritas asing tetapi juga oleh pergerakan nilai tukar. *Payoff* pada opsi quanto diberikan sebagai berikut

$$f(S_T, X_T, T) = \max(X_T, X_0)(S_T - K)^+$$

$$f(S_T, X_T, T) = (X_T - X_0)^+(S_T - K)^+ + X_0(S_T - K)^+.$$

Bagian paling penting dari perdagangan opsi adalah penentuan harga karena dapat meminimumkan resiko sekaligus memaksimalkan keuntungan saat berinvestasi.

2.4 Opsi Basket

Opsi *Basket* merupakan istilah opsi dengan sebuah keranjang (*basket*) aset. Adalah opsi yang *payoff* nya bergantung pada nilai portofolio atau sekumpulan aset. Aset dapat berupa saham, komoditas, indeks, atau sekuritas keuangan lain. Umumnya, opsi basket digunakan dalam transaksi mata uang asing. Opsi basket dirancang untuk memberikan portofolio manajer dengan meminimumkan biaya dengan tujuan melindungi resiko valuta asing. *Payoff* pada opsi basket adalah [11]

$$f(S_1, \dots, S_n, T) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i - K)^+,$$

dengan keterangan sebagai berikut

α_i : bobot aset ke- i yang ada dalam keranjang aset

S_i : nilai tukar mata uang asing ke- i .

K : rata-rata tertimbang pada nilai tukar.

Opsi basket umumnya digunakan dalam perdagangan dua atau lebih mata uang asing [11]. Opsi basket juga dapat diartikan sebagai opsi portofolio yang merupakan pengembangan dari opsi saham tunggal pada umumnya. Opsi basket digunakan untuk investor yang menginvestasikan dananya pada lebih dari satu aset beresiko. Opsi ini dapat dihitung secara langsung sebagai sebuah portofolio tanpa menghitung opsi pada masing-masing saham. Nilai pada opsi basket akan lebih murah jika dibandingkan pada opsi pada masing-masing saham, sehingga akan lebih menguntungkan membeli opsi basket dibandingkan dengan opsi pada setiap saham [20].

Pada teori portofolio, volatilitas (besaran perubahan harga yang menunjukkan fluktuasi pasar dalam satu periode tertentu) pada opsi basket umumnya bernilai lebih kecil jika dibandingkan dengan masing-masing mata uang. Karena itu, opsi basket mempunyai premi yang lebih kecil dari jumlahan pada masing-masing mata uangnya. Dari formula Black-Scholes *multivariate*, akan didapatkan formula penetapan harga untuk opsi basket [2].

2.5 Proses Stokastik

Proses stokastik merupakan sebuah proses yang acak. Proses stokastik didenisikan sebagai suatu variabel yang berkembang dari waktu ke waktu dengan cara yang acak atau tidak pasti, yaitu perubahan keadaan beberapa sistem dari waktu ke waktu bergantung pada kesempatan [12]. Proses stokastik juga merupakan himpunan variabel acak dalam bentuk $(X(t), t \in T)$, dimana untuk setiap $t \in T$, $X(t)$ adalah variabel acak. Variabel t adalah indeks yang menginterpretasikan waktu dan $X(t)$ adalah *state* dari proses pada saat t .

Proses stokastik merupakan proses diskrit namun juga bisa kontinu. Proses dikatakan proses diskrit jika $t \in T$ terbatas atau bisa dihitung, yaitu jika $T = 0, 1, 2, \dots, n$ menghasilkan proses waktu $X(0), X(1), X(2), \dots, X(n)$. Sebaliknya jika proses stokastik dikatakan kontinu jika $t \in T$ tidak terbatas. Artinya jika $T = [0, 1)$ atau $T = [0; k]$ untuk beberapa nilai k .

Proses stokastik banyak digunakan untuk memodelkan suatu sistem yang dijalankan pada suatu lingkungan yang tidak dapat diduga. Nilai saham yang dipengaruhi pergerakan tingkat suku bunga merupakan salah satu contoh dari proses stokastik, karena pergerakannya cepat serta tidak pasti seiring dengan waktu.

2.6 Model Stokastik Opsi Multi-Aset

Perubahan harga saham yang terjadi di pasar bergerak dengan acak menurut waktu. Perubahan tersebut diasumsikan mengikuti proses wiener yang merupakan suatu gerak *Brownian*, sehingga dapat dikatakan bahwa harga saham mengikuti gerak *Brownian* yang bergantung terhadap waktu. Perubahan harga saham yang mengikuti gerak *Brownian* tersebut dapat diformulasikan ke dalam suatu persamaan diferensial stokastik, dengan solusinya dapat menentukan model *Black-Scholes* [21].

Pergerakan harga pada dua atau lebih aset yang beresiko dapat dideskripsikan sebagai suatu persamaan diferensial stokastik. Suatu opsi dengan dua atau lebih aset dasar disebut dengan opsi multi-aset. Terdapat berbagai jenis opsi multi-aset, dengan masing-masing opsi tersebut dibedakan oleh fungsi *payoff* atau fungsi keuntungannya. Pada penetapan harga opsi multi-aset, mula-mula akan dibentuk suatu model pergerakan harga pada aset dasar. Diberikan sebuah model persamaan diferensial stokastik [2]:

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dW_i, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

dengan keterangan sebagai berikut

S_i : harga dari aset ke- i

μ_i : nilai ekspektasi *rate of return* saham ke- i

σ_i : volatilitas saham ke- i yang merupakan standar deviasi dari *return*

dW_i : gerak *Brownian* atau proses wiener.

Model umum dari persamaan (2.1) dinyatakan dengan $\frac{dS}{S}$ yang dibagi kedalam dua bagian. Bagian pertama yang merupakan bagian deterministik adalah $\mu_i dt$. Notasi μ_i merupakan ukuran dari rata-rata pertumbuhan saham ke- i . Bagian kedua adalah pergerakan saham yang diasumsikan acak (*random*) yakni $\sigma_i dW_i$. Notasi σ_i didefinisikan sebagai volatilitas dari saham yang digunakan untuk mengukur standar deviasi dari *return*. Notasi W_i dari dW_i merupakan gerak *Brownian* [20].

Gerak *Brownian* standar atau disimbolkan dengan $dW_i (i = 1, 2, \dots, n)$, memenuhi :

$$\begin{aligned} E(dW_i) &= 0, \\ \text{Var}(dW_i) &= dt, \\ \text{Cov}(dW_i, dW_j) &= \rho_{ij} dt. (i \neq j) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Definisi 2.1

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]E[X] + E[Y]E[X] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y]. \end{aligned}$$

Dari definisi (2.6) dan persamaan (2.2) maka diperoleh

$$Cov(dW_i, dW_j) = E(dW_i, dW_j), (i \neq j)$$

sehingga harga opsi multi-aset dapat juga dimodelkan seperti persamaan dibawah ini

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} dW_j, (i = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

dengan $dW_i (i = 1, 2, \dots, n)$ merupakan gerak *Brownian* satu dimensi yang memenuhi [2]

$$\begin{aligned} E(dW_i) &= 0, \\ Var(dW_i) &= dt, \\ Cov(dW_i, dW_j) &= 0, (i \neq j). \end{aligned}$$

2.7 Gerak Brownian

Salah satu cara standar untuk memodelkan suatu proses stokastik dari variabel tertentu dalam waktu kontinu yang banyak digunakan adalah dengan proses *Wiener*. Model ini mengambil namanya dari Norbert *Wiener* berdasarkan penelitiannya tentang proses stokastik pada tahun 1923. Gerak *Brownian* atau sering disebut juga dengan proses *Wiener*, merupakan proses *random walk* berskala dengan n memiliki ukuran yang besar. Perubahan nilai saham yang terjadi berlangsung dengan cepat [12]. Berdasarkan faktor tersebut dapat dikatakan bahwa perubahan nilai saham mengikuti suatu gerak *Brownian*, yang diberikan sebagai berikut [2]

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (2.4)$$

dengan

μ : nilai ekspektasi *rate of return* saham

σ : volatilitas

dW_t : gerak *Brownian*.

Gerak brownian merupakan proses stokastik dimana suatu perubahan terjadi dalam waktu yang cukup singkat. *Brownian motion* (B_t, t_0) adalah proses yang memenuhi tiga kondisi yakni [12]:

1. B_t adalah lintasan kontinu dan $B_0 = 0$
2. Untuk $s+t > s$: $B_{t+s} - B_s$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi t .
3. Untuk $s < t$: B_t hanya dipengaruhi oleh B_s .

Suatu nilai k yang tetap sebarang *increment* $Z_k(t) - Z_k(s) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{tk} X_i, 0 < s < t$, mempunyai distribusi yang hanya bergantung pada $t - s$, dari interval waktu $(s, t]$ karena *increment* tersebut hanya bergantung jumlah $k(t - s)$ dari X , yang membangun *increment* tersebut.

Proses *Brownian motion* dengan lintasan sampel kontinu yang stasioner dan mempunyai *increment* identik, independen, dan normal. Jika $t_0 - 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ maka variabel acak $Z_t(i) - Z_t(s) \sim N(0, t_{(i)} - t_{(i-1)})$. Nilai ekspektasi dan variansi dari *Brownian motion* adalah sebagai berikut:

$$E [\Sigma | Z_{tk} - Z_{tk-1} |^2 - (t_k - t_{k-1})] = 0$$

$$\Sigma E [| Z_{tk} - Z_{tk-1} |^2 - (t_k - t_{k-1})] = 0$$

$$Var [\Sigma | Z_{tk} - Z_{tk-1} |^2 - (t_k - t_{k-1})] = 2(t_{k+1} - t_k)^2$$

$$\Sigma Var [| Z_{tk} - Z_{tk-1} |^2 - (t_k - t_{k-1})] = 2(t_{k+1} - t_k)^2$$

$$Var [| Z_{tk} - Z_{tk-1} |^2 - (t_k - t_{k-1})] \approx 0,$$

dengan nilai $(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$, maka mengakibatkan $Var [|Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}|^2 - (t_k - t_{k-1})] \approx 0$. Dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} |Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}|^2 - (t_k - t_{k-1}) &= 0 \\ |Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}|^2 &= (t_k - t_{k-1}) \\ (dZ)^2 &= dt. \end{aligned}$$

2.7.1 Gerak Brownian standar

Jika $\{W(t) | 0 \leq t < \infty\}$ merupakan *Brownian motion* dengan parameter volatilitas adalah σ^2 , maka $\left\{B(t) = \frac{1}{\sigma}W(t), 0 \leq t < \infty\right\}$ adalah suatu *Brownian motion* dengan parameter volatilitas 1. Pada *Brownian motion* standar, jika terdapat suatu variabel $B(t)$ mengikuti proses *Wiener*, maka berlaku 2 sifat, yaitu:

1. Perubahan $\Delta B(t) = Z\sqrt{\Delta t}$, dengan $Z \sim N(0, 1)$.
2. $B(t)$ mengikuti proses Markov. Proses Markov adalah proses stokastik, jika diketahui nilai $B(t)$, maka $B(s+t)$ dengan $s+t > t$ tidak dipengaruhi $B(u)$ dengan $u < t$. Artinya jika diberikan keadaan saat sekarang dan keadaan di waktu lampau, maka keadaan mendatang hanya bergantung pada keadaan waktu sekarang dan tidak bergantung pada waktu lampau.

2.7.2 Gerak Brownian geometrik

Jika $\{B(t), 0\}$ adalah *Brownian motion* dengan *drift* μ dan parameter volatilitas σ , maka proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$, yaitu

$$X(t) = X(0)e^{\mu t + \sigma B(t)}$$

Berdasarkan definisi tersebut diperoleh turunannya

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t).$$

2.8 Lemma Itô

Lemma Itô merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan integral stokastik. Lemma Itô menunjukkan suatu hubungan antara perubahan nilai *derivatives* dengan perubahan nilai opsi. Jika $f(P, t)$, merupakan fungsi kontinu yang dapat diturunkan secara parsial terhadap proses stokastik P dan waktu t , selanjutnya didefinisikan persamaan diferensial stokastik dari variabel P dengan tingkat *drift* $\mu(P, t)$ dan volatilitas $\sigma(P, t)$ yaitu

$$dP = \mu(P, t)dt + \sigma(P, t)dZ$$

maka dengan menggunakan Deret Taylor sebuah fungsi f dari P dan t menjadi [19] :

$$df(P, t) = \left[\mu(P, t) \frac{\partial f(P, t)}{\partial P} + \frac{\partial f(P, t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2(P, t)}{2} \frac{\partial^2 f(P, t)}{\partial P^2} \right] dt + \sigma(P, t) \frac{\partial f(P, t)}{\partial P} dZ. \quad (2.5)$$

2.9 Persamaan Black Scholes

Black-Scholes adalah metode yang dipopulerkan oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973 untuk menentukan harga teoritis *European call option* [7]. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model Black-Scholes adalah [2]:

1. Harga aset dasar mengikuti *Geometric Brownian Motion (GBM)*
2. Tidak terdapat dividen dalam aset dasar
3. Tidak terdapat biaya transaksi atau pajak
4. Tidak terdapat arbitrase.

Model matematika dari penentuan harga opsi dapat diperoleh menggunakan Δ - *hedging*. *Hedging* merupakan mekanisme perlindungan portofolio terhadap resiko penurunan harga pasar sehingga dapat menghindari terjadinya resiko kerugian.

Definisi 2.2

Δ -*hedging*: Diberikan opsi V , yang diperjualbelikan sebanyak Δ saham pada aset dasar S di sisi yang berlawanan, sehingga portofolio berikut adalah bebas resiko

$$\pi = V - \Delta S. \quad (2.6)$$

Mula-mula, dibentuk sebuah portofolio

$$\pi = V - \Delta S,$$

dengan Δ menyatakan sejumlah saham pada aset dasar. Selanjutnya, dipilih Δ sedemikian hingga π bebas resiko dalam interval waktu $(t, t + dt)$. Jika portofolio π dimulai dari waktu t , dan Δ berada pada interval waktu $(t, t + dt)$, maka nilai π yang bebas resiko berarti bahwa *return* dari portofolio pada $(t, t + dt)$ adalah

$$\frac{\pi_{t+dt} - \pi_t}{\pi_t} = r dt,$$

berdasarkan definisi persamaan (2.6) maka

$$dV_t - \Delta dS_t = r\pi dt = r(V_t - \Delta S_t) dt. \quad (2.7)$$

Diketahui

$$V_t = V(S_t, t),$$

dengan proses stokastik S_t memenuhi persamaan diferensial stokastik pada persamaan (2.4). Maka dengan formula Ito, persamaan menjadi :

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t. \quad (2.8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.8) ke persamaan (2.7) akan diperoleh

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \mu S \right) dt \\ & + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \sigma S \right) dW_t = r(V - \Delta S) dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pada persamaan (2.9), sisi kanan adalah bebas resiko, artinya koefisien pada bagian random (dW_t) di sisi kiri harus bernilai nol sehingga didapat nilai

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (2.10)$$

Setelah mendapatkan persamaan (2.10), selanjutnya dilakukan substitusi ke persamaan (2.9), sehingga diperoleh persamaan parsial dibawah ini

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.11)$$

Persamaan (2.11) disebut dengan persamaan Black-Scholes yang mendeskripsikan pergerakan harga opsi [2].

Nilai opsi *call* Eropa dapat dihitung dengan menggunakan *risk neutral valuation* yaitu menentukan harga opsi dengan membawanya ke dalam dunia *risk-neutral* atau bebas resiko sehingga berlaku

$$d\pi = r\pi dt. \quad (2.12)$$

Dengan mengasumsikan tingkat pengembalian yang diharapkan adalah *risk free interest rate*, $\mu = r$, kemudian mencari nilai saat ini dari ekspektasi *cash flow* saat jatuh

tempo dengan menggunakan *risk free interest rate*. Nilai opsi saat ini merupakan *expected value* yang didiskon dan dinotasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT} E[\text{payoff}] \\ &= e^{-rT} E[\max(S(T) - K, 0)]. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan *risk neutral valuation*, diperoleh nilai opsi *call* Eropa adalah

$$C = S(0)N[d_1] - Ke^{-rT}N[d_2]$$

dengan,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}T\right)}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}T\right)}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

2.10 Quadratic Variation

Quadratic variation digunakan dalam menganalisa proses stokastik, seperti gerak *Brownian*, dan martingales lain [13]. *Quadratic variation* adalah perluasan dari gagasan tentang variasi total dari suatu fungsi, sehingga mempunyai peranan penting dalam kalkulus stokastik. Diketahui bahwa lintasan pada partikel yang mengikuti pergerakan *Brownian* bersifat kontinu dimana-mana, namun tidak dapat diturunkan dimanapun (tidak *differentiable*) [2].

Definisi 2.3

Misalkan $\pi = t_1, t_2, \dots, t_n$ adalah suatu partisi dari $[0, T]$ dengan $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ dan $\|\Pi\| = \max_{k=0,2,\dots,n-1} (t_{k+1} - t_k)$. *Quadratic Variation* dari fungsi f adalah

$[f, f](T)$, didefinisikan dengan

$$[f, f](T) = \lim_{\|\Pi \rightarrow 0\|} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^2.$$

Dengan penggunaan *mean value theorem*, suatu *Quadratic variation* dari suatu fungsi f yang *differentiable* di selang $[0, T]$ adalah

$$\begin{aligned} [f, f](T) &= \lim_{\|\pi \rightarrow 0\|} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^2 \\ &= \lim_{\|\Pi \rightarrow 0\|} \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_{k+1}^*)|^2 (t_{k+1} - t_k)^2 \\ &\leq \lim_{\|\Pi \rightarrow 0\|} \|\Pi\| \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_{k+1}^*)|^2 (t_{k+1} - t_k) \\ &\leq \lim_{\|\Pi \rightarrow 0\|} \|\Pi\| \int_0^T f'(t)^2 dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Jadi, untuk fungsi yang *differentiable* di selang $[0, T]$, *quadratic variation* adalah $[f, f](T) = 0$. Dengan kata lain, jika terdapat fungsi f dengan *quadratic variation* tidak bernilai 0, maka fungsi tersebut tidak *differentiable*, seperti yang diberikan pada teorema berikut

Teorema 2.1 $[W, W](T) = T$

Bukti

Misalkan $\pi = t_1, t_2, \dots, t_n$ adalah suatu partisi dari $[0, T]$. Selanjutnya apabila $D_k = W(t_{k+1})$ dan didefinisikan bahwa

$Q_\pi = \sum_{k=0}^{n-1} D_k^2$ sehingga $Q_\pi - T = \sum_{k=0}^{n-1} ((D_k^2) - (t_{k+1} - t_k))$. Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{\|\pi \rightarrow 0\|} (Q_\pi - T) = 0$

$$\begin{aligned}
D_k^2 - (t_{k+1} - t_k) &= (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 - (t_{k+1} - t_k) \\
E [D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)] &= E [(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 - (t_{k+1} - t_k)] \\
E [D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)] &= (t_{k+1} - t_k) - (t_{k+1} - t_k) \\
E [D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)] &= 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Dari persamaan (2.13), maka didapat

$$E(Q_\pi - T) = E \left(\sum_{k=0}^{n-1} (D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)) \right) = 0. \tag{2.14}$$

Disamping itu,

$$\begin{aligned}
var [Q_\pi - T] &= \sum_{k=0}^{n-1} var [D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E [D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E [D_k^4 - 2D_k^2(t_{k+1} - t_k) + (t_{k+1} - t_k)^2] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 3(t_{k+1} - t_k)^2 - 2(t_{k+1} - t_k)^2 + (t_{k+1} - t_k)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2(t_{k+1} - t_k)^2
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\leq \|\pi\| \sum_{k=0}^{n-1} 2(t_{k+1} - t_k) \tag{2.16}$$

$$\leq 2\|\pi\|T.$$

Jadi,

$$\lim_{\|\pi \rightarrow 0\|} var(Q_\pi - T) = 0. \tag{2.17}$$

Dari persamaan (2.14) dan persamaan (2.17) dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{\|\pi \rightarrow 0\|} (Q_\pi - T) = 0,$$

sehingga $[W, W](T) = T$.

Hasil ini memperlihatkan bahwa *paths* dari Brownian *Motion* Wt tidak terdiferensiasi. Dari hasil pada persamaan (2.13) dan persamaan (2.15) dapat diketahui bahwa

$$E \left[\{W(t_{k+1}) - W(t_k)\}^2 - (t_{k+1} - t_k) \right] = 0 \quad (2.18)$$

$$\text{var} \left[\{W(t_{k+1}) - W(t_k)\}^2 - (t_{k+1} - t_k) \right] = 2(t_{k+1} - t_k)^2. \quad (2.19)$$

Apabila nilai $(t_{k+1} - t_k)$ sangat kecil, ini berarti bahwa nilai $2(t_{k+1} - t_k)$ juga sangat kecil sehingga persamaan (2.19) menjadi

$$\text{var} \left[\{W(t_{k+1}) - W(t_k)\}^2 - t_{k+1} - t_k \right] \approx 0. \quad (2.20)$$

Dari persamaan (2.18) dan persamaan (2.20) dapat disimpulkan bahwa

$$\{W(t_{k+1}) - W(t_k)\}^2 - t_{k+1} - t_k,$$

atau

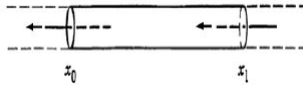
$$\{W(t_{k+1}) - W(t_k)\}^2 = t_{k+1} - t_k,$$

yang dapat dinyatakan dengan [2]

$$dW(t).dW(t) = dt.$$

2.11 Persamaan Difusi

Persamaan difusi dapat diilustrasikan sebagai suatu cairan yang bergerak secara perlahan mengisi sebuah pipa lurus dan sebuah zat pencemar menyebar pada cairan tersebut dengan selang $[x_0, x_1]$ seperti diberikan pada Gambar 2.1. Zat pencemar tersebut bergerak dari konsentrasi tinggi ke konsentrasi rendah.



Gambar 2.1: Ilustrasi Persamaan Difusi

Jika $u(x, t)$ adalah konsentrasi (massa per satuan panjang) dari zat dengan posisi x pada waktu t . Maka massa zat pada selang tersebut diperoleh dari integral konsentrasi $f(x, t)$ yaitu $M = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx$ sehingga,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx. \quad (2.21)$$

Perubahan massa pada selang tersebut juga bergantung pada zat masuk dan zat keluar pada selang tersebut. Pada hukum *Fick* menjelaskan bahwa perubahan massa pada selang $[x_0, x_1]$ terhadap waktu sebanding dengan selisih antara zat masuk dan zat keluar, maka perubahan massa pada selang tersebut adalah

$$\frac{dM}{dt} = k \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, t) - k \frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, t) \quad (2.22)$$

M adalah konstanta massa dari konsentrasi, $u(x, t)$ adalah konsentrasi pada posisi x , waktu t , dan k adalah

konstanta. Berdasarkan persamaan (2.21) dan (2.22), akan didapatkan

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx &= k \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, t) - k \frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, t) \\ \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx &= k \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) dx \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t).\end{aligned}\tag{2.23}$$

Persamaan (2.23) disebut persamaan difusi. Dengan solusi umum untuk Persamaan (2.23) [14], yaitu

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy.\tag{2.24}$$

2.12 Distribusi Normal

Variabel acak X mengikuti suatu distribusi normal dengan *mean* μ dan *varians* σ^2 memiliki fungsi kepadatan peluang atau *Probability Density Function* (PDF) [22]:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2}{2}\right\}\tag{2.25}$$

untuk $-\infty < x < \infty$, dengan $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$ dinotasikan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Jika $Z \sim N(0, 1)$, maka fungsi distribusi kumulatif atau *Cumulative Distribution Function* (CDF) adalah [22]:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(t) dt.\tag{2.26}$$

Adapun fungsi karakteristik untuk distribusi normal adalah [21]:

$$\psi(\xi) = \exp \left\{ i\xi\mu - \frac{\xi^2\sigma^2}{2} \right\}. \quad (2.27)$$

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah pengerjaan Tugas Akhir secara rinci. Tahapan penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan agar Tugas Akhir ini dapat berjalan secara sistematis. Terdapat tahapan penelitian ini antara lain:

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan pencarian dan pengumpulan referensi yang menunjang penelitian. Referensi yang digunakan adalah buku-buku literatur, jurnal ilmiah, Tugas Akhir yang berkaitan dengan permasalahan, maupun artikel dari internet.

2. Pembentukan Model Black-Scholes pada Opsi Multi-Aset

Pada tahap ini dilakukan proses pembentukan model umum Black-Scholes opsi multi-aset dengan langkah-langkah sebagai berikut :

(a) Pembentukan Portofolio

Pada tahap ini dilakukan proses pembentukan portofolio yang merupakan kumpulan dari aset

(b) Penilaian Opsi

Pergerakan portofolio yang didapat dari proses pembentukan portofolio, selanjutnya akan dicari nilai opsinya

(c) Penyertaan Dividen dalam Model

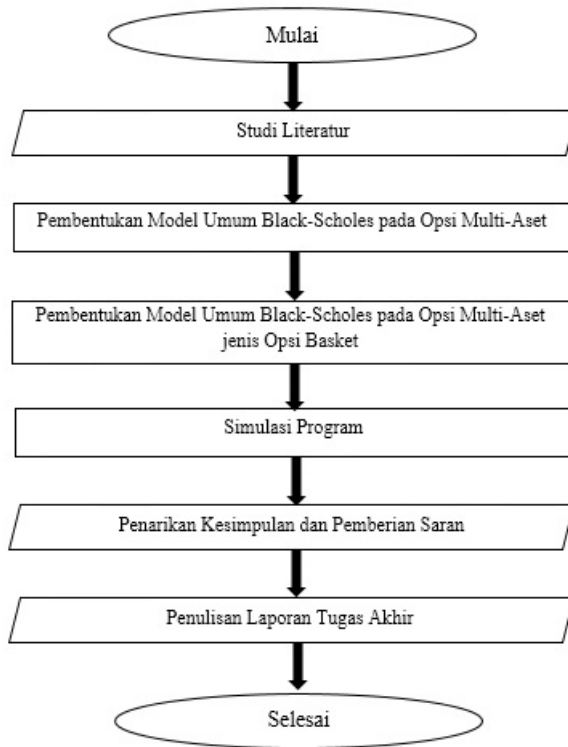
Dilakukan penambahan dividen, yang mana

dividen merupakan pembagian keuntungan antara perusahaan dengan pemegang saham.

3. Pembentukan Model Black-Scholes pada Opsi Basket
Setelah mendapatkan model Black-Scholes opsi multi-aset, selanjutnya dilakukan perhitungan untuk mencari model Black-Scholes untuk opsi multi aset dengan langkah-langkah sebagai berikut :
 - (a) Pembentukan Model diawali dengan model umum Black-Scholes untuk opsi multi-aset yang selanjutnya dilakukan beberapa transformasi sehingga model menjadi bentuk persamaan difusi.
 - (b) Dilakukan penyelesaian model penentuan harga opsi basket, dengan cara penyelesaiannya mengikuti penyelesaian difusi.
4. Simulasi Program
Terdapat tiga simulasi program, diantaranya :
 - (a) Simulasi payoff opsi beli
 - (b) Simulasi payoff opsi beli dengan tingkat suku bunga 5%, 10%, 15% dan volatilitas 20%
 - (c) Simulasi payoff opsi beli dengan volatilitas 10%, 20%, dan 30%.
5. Penarikan Kesimpulan
Setelah mendapatkan model harga opsi multi-aset pada opsi basket tipe eropa, maka selanjutnya dilakukan suatu penarikan kesimpulan dari pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya. Serta diberikan saran sebagai bahan masukan untuk penelitian lebih lanjut.
6. Penulisan Laporan Tugas Akhir
Pada tahap terakhir adalah penulisan Laporan

Tugas Akhir yang meliputi hasil kajian mengenai permasalahan yang dibahas dalam bentuk laporan Tugas Akhir.

Adapun diagram alir yang berisi tahapan-tahapan yang dilakukan pada penelitian Tugas Akhir dapat diberikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1: Diagram Alir Metodologi Penelitian

BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai solusi analitik dari Model Black-Scholes pada opsi basket

4.1 Pembentukan Model Black-Scholes pada Opsi Multi-Aset

Pada tahap ini dilakukan proses Pembentukan Model Umum Black-Scholes pada Opsi Multi-Aset dengan langkah-langkah sebagai berikut :

4.1.1 Pembentukan Portofolio

Portofolio merupakan kumpulan dari aset-aset. Portofolio dikatakan tidak bebas risiko karena tidak terdapat Gerak Brownian, yang mana gerak tersebut menyebabkan terjadinya perubahan harga. Portofolio dikatakan konstan sehingga mempunyai pendapatan yang sama dengan saham pada saham jangka pendek yang bebas risiko. Apabila pendapatan yang diperoleh lebih tinggi dari portofolio ini, maka *arbitrageur* dapat memperoleh keuntungan dengan cara memilih saham bebas risiko dan menggunakan keuntungan dari saham bebas risiko ini untuk membeli portofolio. Tetapi jika pendapatan yang diperoleh lebih kecil maka *arbitrageur* dapat memperoleh keuntungan bebas risiko dengan cara memilih portofolio dan menggunakan keuntungan ini untuk membeli saham bebas risiko.

Portofolio bebas risiko seperti yang disebutkan pada persamaan (2.4) yaitu $d\pi = r\pi dt$, dengan r menyatakan suku bunga bebas risiko. Selanjutnya akan dibentuk sebuah portofolio yang terdiri dari opsi dan sejumlah saham.

Terdapat dua aset dasar yaitu saham, yang bernilai konstan. Pada sub-bab pembentukan portofolio, seperti definisi pada persamaan (2.6) bahwa nilai portofolio didefinisikan sebagai hasil pengurangan nilai opsi dengan jumlah saham.

$$\begin{aligned}\pi &= V - \sum_{i=1}^n \Delta_i S_i \\ &= V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2\end{aligned}\quad (4.1)$$

Terdapat dua buah aset dasar sehingga nilai n adalah 2

$$\pi = V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2$$

dengan pergerakan nilai portofolio yaitu

$$d\pi = dV - \Delta_1 dS_1 - \Delta_2 dS_2.$$

Terdapat pembagian dividen ($qSdt$) sehingga setiap aset dasar yang dimiliki akan dikurangi sejumlah dividen. Maka dari itu, didapat pergerakan portofolio sebagai berikut :

$$d\pi = dV - \Delta_1 dS_1 - q\Delta_1 S_1 dt - \Delta_2 dS_2 - q\Delta_2 S_2 dt. \quad (4.2)$$

4.1.2 Penilaian Opsi

Pada perhitungan selanjutnya, akan dicari nilai dari opsi. Pertama-tama, didefinisikan $\Delta_i = \frac{\partial V_i}{\partial S_i}, \forall_{i=1,2}$ seperti yang tertera pada persamaan (2.10) sehingga persamaan (4.2) menjadi

$$\begin{aligned}d\pi &= dV - \frac{\partial V_1}{\partial S_1} S_1 - \frac{\partial V_2}{\partial S_2} S_2 - q \frac{\partial V_1}{\partial S_1} S_1 dt \\ &\quad - q \frac{\partial V_2}{\partial S_2} S_2 dt.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Misalkan $V(S, t)$ menyatakan nilai opsi pada saat t dengan harga saham adalah $S(t)$. Berdasarkan lemma Ito, apabila

fungsi $f(t, W(t))$ merupakan fungsi dari t yang deterministik, didapat :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial W} dW + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} dW^2. \quad (4.4)$$

Teorema 4.1

Diberikan $V_t = V(S_t, t)$. V terdiferensiasi dengan dua variabel. Jika proses stokastik S_t memenuhi persamaan diferensial stokastik berikut

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t,$$

maka

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(S_t, t) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2(S_t, t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma(S_t, t) \frac{\partial V}{\partial S} dW_t.$$

Sehingga dengan menggunakan teorema diatas, didapatkan:

$$\begin{aligned} dV(S, t) &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS(t)^2 \quad (4.5) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1(t) + \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2(t) + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} dS_1(t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} dS_2(t)^2. \end{aligned}$$

4.1.3 Penyertaan Dividen dalam Model

Perhitungan selanjutnya, akan disertakan dividen dalam model. Jika S mengikuti gerak brown geometri dengan disertai pembagian dividen, maka :

$$dS_i(t) = (\mu - q) S_i dt + \sigma_i S_i dZ(t) \quad (4.6)$$

dengan $i = 1, 2$ maka diperoleh :

$$dS_1(t) = (\mu - q) S_1 dt + \sigma_1 S_1 dZ(t) \quad (4.7)$$

$$dS_2(t) = (\mu - q) S_2 dt + \sigma_2 S_2 dZ(t)$$

kembali ke persamaan (4.5), sehingga persamaan menjadi :

$$\begin{aligned}
 dV(S, t) &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS(t)^2 \\
 &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2 + \\
 &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} dS_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} dS_2^2 \\
 &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} [(\mu - q) S_1 dt + \sigma_1 S_1 dZ(t)] + \\
 &\quad \frac{\partial V}{\partial S_2} [(\mu - q) S_2 dt + \sigma_2 S_2 dZ(t)] + \\
 &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} [(\mu - q) S_1 dt + \sigma_1 S_1 dZ(t)]^2 + \\
 &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} [(\mu - q) S_2 dt + \sigma_2 S_2 dZ(t)]^2 \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema pada Integral Ito [13], diketahui bahwa $dt^2 = 0$, $dt dZ(t) = 0$, dan $[dZ(t)]^2 = dt$ mengakibatkan persamaan (4.8) menjadi

$$\begin{aligned}
 dV(S, t) &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} [(\mu - q) S_1 dt + \sigma_1 S_1 dZ(t)] + \\
 &\quad \frac{\partial V}{\partial S_2} [(\mu - q) S_2 dt + \sigma_2 S_2 dZ(t)] + \\
 &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} [\sigma_1^2 S_1^2 dZ(t)^2] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} [\sigma_2^2 S_2^2 dZ(t)^2] \\
 &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S_1} (\mu - q) S_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} (\mu - q) S_2 \right] dt + \\
 &\quad \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_2^2 \right] dt + \\
 &\quad \left[\frac{\partial V}{\partial S_1} \sigma_1 S_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} \sigma_2 S_2 \right] dZ(t) \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan (4.8) akan disubstitusikan pada persamaan (4.3) yang merupakan pergerakan nilai portofolio

$$\begin{aligned}
 d\pi &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S_1} (\mu - q) S_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} (\mu - q) S_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_1^2 \right] dt \\
 &+ \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_2^2 - q S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} - q S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} \right] dt \\
 &+ \left[\frac{\partial V}{\partial S_1} \sigma_1 S_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} \sigma_2 S_2 \right] dZ(t) \\
 &- \frac{\partial V}{\partial S_1} [(\mu - q) S_1 + \sigma_1 S_1 dZ(t)] \\
 &- \frac{\partial V}{\partial S_2} [(\mu - q) S_2 + \sigma_2 S_2 dZ(t)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d\pi &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_2^2 - q S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} \right] dt \\
 &- q S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Return dari π yang telah diinvestasikan ke aset bebas resiko, dapat dilihat sebagai suatu pertumbuhan dari $r\pi dt$ pada waktu t . Apabila sisi kanan pada persamaan (4.10) lebih besar atau lebih kecil dari $r\pi dt$, akan menimbulkan efek arbitrase. Oleh karena itu, persamaan (4.10) menjadi :

$$\begin{aligned}
 r\pi dt &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_2^2 - q S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} \right] dt \\
 &- q S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Seperti telah disebutkan pada persamaan (4.1) bahwa nilai $\pi = V - \sum_{i=1}^2 \Delta S_i$, berikutnya masing-masing sisi dari persamaan (4.11) dibagi dengan dt . Maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
r \left(V - \sum_{i=1}^2 \Delta S_i \right) &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_i^2} \sigma_i^2 S_i^2 - q S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} \right) \\
r(V - \Delta S_1 - \Delta S_2) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_2^2 \\
&\quad - q S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} - q S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} \\
0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_2^2 \\
&\quad + r \Delta S_1 + r \Delta S_2 - r V_1 - r V_2 \\
&\quad - q S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} - q S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} \\
0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_2^2 \\
&\quad + r \frac{\partial V}{\partial S_1} + r \frac{\partial V}{\partial S_2} - r V_1 - r V_2 \\
&\quad - q S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} - q S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} \\
0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_2^2 \\
&\quad + \frac{\partial V}{\partial S_1} (r - q) S_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} (r - q) S_2 \\
&\quad - r V_1 - r V_2. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.12) dapat ditulis bentuk umumnya yaitu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma_{ij}^2 S_i^2 + \sum_{i=1}^2 (r - q) S_i \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{4.13}$$

Persamaan (4.13) merupakan model Black-Scholes untuk opsi dengan aset lebih dari satu atau disebut opsi multi-aset.

4.2 Pembentukan Model Black-Scholes pada Opsi Basket

Pada pembahasan sebelumnya telah dilakukan pembentukan model sehingga didapat model Black Scholes pada opsi multi-aset. Selanjutnya, dilakukan perhitungan untuk mendapatkan model Black-Scholes pada opsi multi-aset jenis opsi basket.

4.2.1 Pembentukan Persamaan Difusi

Pembentukan model diawali dengan model umum Black-Scholes untuk opsi multi-aset yang dilakukan beberapa transformasi sehingga model menjadi bentuk persamaan difusi. Mula-mula, diberikan Persamaan Black-Scholes untuk opsi multi-aset seperti disebutkan pada persamaan (4.13)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + \sum_{i=1}^n (r - q) S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0$$

Terdapat dua buah aset dasar yang berupa dua buah saham sehingga nilai $n = 2$, dan persamaan menjadi :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + \sum_{i=1}^2 (r - q) S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0$$

Diketahui : $a_{ij} = \sum_{k=1}^m \sigma_{ik} \sigma_{jk}$ dengan nilai $i, j = 1, \dots, n$. Sehingga didapat $S_i = e^{x_i}$. Tahap berikutnya, dilakukan substitusi dan diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_{11}^2 e^{2x_1} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \frac{1}{e^{2x_1}} - \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{1}{e^{2x_1}} \right] + \frac{1}{2} \sigma_{22}^2 e^{2x_2} \\ & \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \frac{1}{e^{2x_2}} - \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{1}{e^{2x_2}} \right] + (r - q) e^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{1}{e^{x_1}} \\ & + (r - q) e^{x_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{1}{e^{x_2}} - rV = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{11}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2}\sigma_{11}^2 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\sigma_{22}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\sigma_{22}^2 \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ + (r - q) \frac{\partial V}{\partial x_1} + (r - q) \frac{\partial V}{\partial x_2} - rV = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{11}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_{22}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\sigma_{11}^2 \frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\sigma_{22}^2 \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ + (r - q) \frac{\partial V}{\partial x_1} + (r - q) \frac{\partial V}{\partial x_2} - rV = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{11}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_{22}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial V}{\partial x_1} \left[-\frac{\sigma_{11}^2}{2} + r - q \right] \\ + \frac{\partial V}{\partial x_2} \left[-\frac{\sigma_{22}^2}{2} + r - q \right] - rV = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dimisalkan bahwa nilai

$$\xi = \sum_{i=1}^2 \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \\ &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_1 \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \left[\frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_1 \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \alpha_1 \left[\frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_1 \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_1^2 \\
&= \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \xi} \alpha_1^2
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial V}{\partial x_2} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_2 \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \left[\frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_2 \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \alpha_2 \left[\frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_2 \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_2^2 \\
&= \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \xi} \alpha_2^2.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Selanjutnya, persamaan (4.15), (4.16), (4.17), (4.18) disubstitusikan ke persamaan (4.14) seperti yang ditunjukkan dibawah ini :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{11}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \alpha_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_{22}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \alpha_2^2 + (r - q - \frac{1}{2}\sigma_{11}^2) \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_1 + (r - q - \frac{1}{2}\sigma_{22}^2) \frac{\partial V}{\partial \xi} \alpha_2 - rV = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \left[\frac{1}{2}\sigma_{11}^2 \alpha_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_{22}^2 \alpha_2^2 \right] + \frac{\partial V}{\partial \xi} \left[\left(r - q - \frac{1}{2}\sigma_{11}^2 \right) \alpha_1 \right. \\ \left. + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma_{22}^2 \right) \alpha_2 \right] - rV = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \left[\frac{1}{2}\sigma_{11}^2 \alpha_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_{22}^2 \alpha_2^2 \right] + \frac{\partial V}{\partial \xi} \left[(r\alpha_1 - q\alpha_1 \right. \\ \left. - \frac{\alpha_1 \sigma_{11}^2}{2}) + \left(r\alpha_2 - q\alpha_2 \right) - \frac{\alpha_2 \sigma_{22}^2}{2} \right] - rV = 0 \quad (4.19) \end{aligned}$$

Payoff pada Opsi Basket yang merupakan rata-rata geometrik pada n -aset dasar, diberikan seperti dibawah ini :

$$payoff = \left(\prod_n^{i=1} S_i^{\alpha_i} - K \right)^+$$

dengan $\sum \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$. Digunakan $i = 2$ sehingga syarat batas menjadi $\sum_{i=1}^2 \alpha_i = 1$. Setelah memasukkan nilai $i = 2$ pada syarat batas, maka persamaan (4.19) menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \left[\frac{1}{2}\sigma_{11}^2 \alpha_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_{22}^2 \alpha_2^2 \right] \\ + \frac{\partial V}{\partial \xi} \left[r - \alpha_1 q - \frac{\alpha_1 \sigma_{11}^2}{2} - \alpha_2 q - \frac{\alpha_2 \sigma_{22}^2}{2} \right] \\ - rV = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

persamaan (4.20) juga dapat ditulis bentuk umumnya yaitu :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \left(r - \hat{q} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \right) \frac{\partial V}{\partial \xi} - rV = 0 \quad (4.21)$$

dengan

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_i \alpha_j,$$

$$\hat{q} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(q + \frac{a_{ii}}{2} \right) - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}.$$

Pada bentuk umum tersebut, akan dimisalkan $D = \hat{q} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}$ sehingga persamaan (4.20) menjadi :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + (r - D) \frac{\partial V}{\partial \xi} - rV = 0$$

Selanjutnya, persamaan akan dikalikan dengan $\frac{2}{\hat{\sigma}^2}$ untuk mendapatkan bentuk yang lebih sederhana

$$\frac{2}{\hat{\sigma}^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + (r - D) \frac{2}{\hat{\sigma}^2} \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{2}{\hat{\sigma}^2} rV = 0$$

Setelah mendapatkan bentuk lebih sederhana, berikutnya dilakukan transformasi selanjutnya yakni $t = T - \frac{2\tau}{\hat{\sigma}^2}$ sehingga didapat :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Hasil dari transformasi diatas adalah sebagai berikut :

$$-\frac{2}{\hat{\sigma}^2} \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\hat{\sigma}^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + (r - D) \frac{2}{\hat{\sigma}^2} \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{2}{\hat{\sigma}^2} rV = 0$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + (r - D) \frac{2}{\hat{\sigma}^2} \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{2}{\hat{\sigma}^2} rV = 0$$

Misalkan $k = \frac{2r}{\hat{\sigma}^2}$, dan $k^* = \frac{(r-D)}{\hat{\sigma}^2}$ maka persamaan (4.22) menjadi :

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + k^* \frac{\partial V}{\partial \xi} - kV = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + k^* \frac{\partial V}{\partial \xi} - kV \quad (4.23)$$

dengan didapatkannya hasil transformasi seperti persamaan (4.23), *terminal condition* dapat diubah menjadi kondisi awal atau *initial condition* sebagai berikut :

$$\max(e^\xi - 1, 0) = V(\xi, \tau)$$

Jika nilai $\tau = 0$, maka *initial condition* nya menjadi $V(\xi, 0) = \max(e^\xi - 1, 0)$.

Selanjutnya, dilakukan transformasi kembali untuk mendapatkan bentuk persamaan difusi. Akan dilakukan suatu transformasi. Misalkan $V = e^{A\xi + B\tau} u(\xi, \tau)$, maka :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = B e^{A\xi + B\tau} u + e^{A\xi + B\tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = Ae^{A\xi+B\tau}u + e^{A\xi+B\tau}\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial V}{\partial \xi} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[Ae^{A\xi+B\tau}u + e^{A\xi+B\tau}\frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \\ &= A\frac{\partial}{\partial \xi} \left[e^{A\xi+B\tau}u \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[e^{A\xi+B\tau}\frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \\ &= A \left[Ae^{A\xi+B\tau}u + e^{A\xi+B\tau}\frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \\ &\quad + \left[Ae^{A\xi+B\tau}\frac{\partial u}{\partial \xi} + e^{A\xi+B\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right] \\ &= A^2e^{A\xi+B\tau}u + Ae^{A\xi+B\tau}\frac{\partial u}{\partial \xi} + Ae^{A\xi+B\tau}\frac{\partial u}{\partial \xi} \\ &\quad + e^{A\xi+B\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Persamaan (4.23), (4.24), (4.25) disubstitusikan ke persamaan (4.22) sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} Be^{A\xi+B\tau}u + e^{A\xi+B\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau} &= A^2e^{A\xi+B\tau}u + 2Ae^{A\xi+B\tau}\frac{\partial u}{\partial \xi} \\ &\quad + e^{A\xi+B\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + k^*Ae^{A\xi+B\tau}u \\ &\quad + e^{A\xi+B\tau}\frac{\partial u}{\partial \xi} - ke^{A\xi+B\tau}u \end{aligned}$$

$$Bu + \frac{\partial u}{\partial \tau} = A^2u + 2A\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + k^*Au + \frac{\partial u}{\partial \xi} - ku$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial \xi} (2A + k^*) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} (1) + u (A^2 + Ak^* - k - B) \quad (4.27)$$

Jika persamaan (4.27) harus menjadi persamaan difusi, mengakibatkan koefisien pada $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ dan koefisien dari u harus bernilai nol. Artinya:

$$\begin{aligned} -2A - k^* &= 0 \\ A &= -\frac{k^*}{2} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} A^2 + Ak^* - k - B &= 0 \\ A^2 + Ak^* - k &= B \end{aligned} \quad (4.29)$$

dengan mensubstitusikan nilai A yang telah didapat pada persamaan (4.28) ke persamaan (4.29), didapat :

$$B = -\frac{k^{2*}}{4} - k$$

Nilai A dan B yang telah didapatkan kemudian disubstitusikan ke persamaan (4.27), sehingga menghasilkan persamaan difusi seperti dibawah ini :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

dengan $u(\xi, 0) = V e^{\left(\frac{k^*}{2}\right)\xi}$

Seperti sebelumnya, diketahui nilai $V = e^{A\xi + B\tau} u(\xi, \tau)$.

$$V(\xi, \tau) = e^{-\frac{k^*}{2}\xi + \left(-\frac{k^{2*}}{4} - k\right)\tau} u(\xi, \tau) \quad (4.30)$$

Jika $\tau = 0$, maka:

$$\begin{aligned}
 V(\xi, 0) &= e^{-\frac{k^*\xi}{2}} u(\xi, 0) \\
 \max(e^\xi - 1, 0) &= e^{-\frac{k^*\xi}{2}} u(\xi, 0) \\
 u(\xi, 0) &= \max(e^\xi - 1, 0) e^{\frac{k^*\xi}{2}} \\
 u(\xi, 0) &= \max\left(e^\xi e^{\frac{k^*\xi}{2}} - e^{\frac{k^*\xi}{2}}, 0\right) \\
 u(\xi, 0) &= \max\left(e^{\xi + \frac{k^*\xi}{2}} - e^{\frac{k^*\xi}{2}}, 0\right) \\
 u(\xi, 0) &= \max\left(e^{\xi(1 + \frac{k^*}{2}) - \frac{k^*\xi}{2}}, 0\right)
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan difusi $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ dengan kondisi awal adalah $u(\xi, 0) = \max(e^\xi - 1, 0) e^{\frac{k^*\xi}{2}}$.

4.2.2 Penyelesaian Persamaan Difusi

Setelah mendapatkan persamaan diferensial difusi, selanjutnya akan dilakukan solusi penyelesaian model penentuan harga opsi basket dengan cara penyelesaiannya mengikuti penyelesaian persamaan diferensial difusi.

Persamaan diferensial difusi mempunyai bentuk umum sebagai berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, -\infty < \xi < \infty, t > 0 \quad (4.31)$$

$$u(\xi, 0) = \theta(\xi).$$

$u(\xi, 0)$ merupakan sebuah kondisi awal, yaitu pada saat $\tau = 0$ maka $u(\xi, 0)$ bernilai $\theta(\xi)$. Pada $u(\xi, \tau)$ yang merupakan solusi dari persamaan (4.31), berlaku sifat-sifat sebagai berikut [14] :

1. Jika $u(\xi, \tau)$ merupakan solusi dari persamaan (4.31), maka $u(\xi - m, \tau)$ juga merupakan solusi persamaan diferensial difusi.
2. Turunan dari fungsi $u(\xi - m, \tau)$, seperti $u_\tau, u_\xi, u_{\xi\xi}$ juga merupakan solusi persamaan diferensial difusi.
3. Jika u_τ dan u_ξ merupakan solusi, maka $u_\tau + u_\xi$ juga merupakan solusi persamaan diferensial difusi.
4. Integral dari solusi persamaan difusi juga merupakan solusi difusi.
5. Bentuk \sqrt{ax}, at juga merupakan solusi persamaan diferensial difusi, yang disebut dengan dilatasi.

Persamaan Diferensial Parsial memiliki solusi yang unik (tunggal) yang berarti jika terdapat lebih dari satu solusi, maka semua solusi tersebut bernilai sama. [15].

Untuk $u(\xi, \tau)$ adalah solusi persamaan diferensial difusi di persamaan (4.31), misalkan $S(\xi, \tau)$ juga merupakan solusi. Dari sifat-sifat diatas, maka $S(\xi - m, \tau)$ juga merupakan solusi persamaan (4.31).

Berdasarkan sifat pada poin 4 dan sifat ketunggalan solusi persamaan diferensial parsial, diperoleh hubungan $u(\xi, \tau)$ dan $S(\xi, \tau)$ sebagai berikut :

$$u(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi - m, \tau) \theta(m) dm \quad (4.32)$$

Mengacu pada sifat-sifat yang telah disebutkan diatas, persamaan (4.32) menjadi :

$$u(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi - m, \tau) \theta(m) dm. \quad (4.33)$$

Selanjutnya, dimisalkan $Q(\xi, \tau) = G(p)$ dengan nilai $p = \frac{\xi}{\sqrt{4\tau}}$ memenuhi persamaan difusi dengan syarat awal

$$Q(\xi, \tau) = \begin{cases} 1, \xi > 0 \\ 0, \xi < 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

dan persamaan difusi diberikan sebagai berikut

$$Q_\tau = Q_{\xi\xi} \quad (4.35)$$

dengan :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \tau} &= \frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{\partial G}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \tau} \\ &= G' \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\xi}{\sqrt{4\tau}} \right) \\ &= \frac{-pG'}{2\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \xi} &= \frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial G}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \xi} \\ &= G' \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi}{\sqrt{4\tau}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{4\tau}} \right) G' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\sqrt{4\tau}} G' \right) \\ &= \frac{G''}{\sqrt{4\tau}} \frac{1}{\sqrt{4\tau}} \\ &= \frac{G''}{4\tau} \end{aligned}$$

selanjutnya persamaan (4.35) dapat ditulis :

$$\begin{aligned}
 Q_\tau - Q_{\xi\xi} &= \frac{-pG'}{2\tau} - \frac{G''}{4\tau} \\
 0 &= \frac{-pG'}{2\tau} - \frac{G''}{4\tau} \\
 0 &= -\frac{1}{4\tau} [2pG' + G''] \\
 0 &= \frac{dG}{dp} \left[2p + \frac{d}{dp} \right]
 \end{aligned}$$

dan dimisalkan nilai $v = \frac{dG}{dp}$

$$\begin{aligned}
 v \left(2p + \frac{d}{dp} \right) &= 0 \\
 \frac{dv}{dp} &= -2pv \\
 - \int 2dp &= \int \frac{dv}{v} \\
 \ln v &= -p^2 + C_1 \\
 v = \frac{dG}{dp} &= C_1 e^{-p^2} \\
 \int dG &= C_1 \int e^{-p^2} dp \\
 G &= C_1 \int e^{-p^2} dp + C_2
 \end{aligned}$$

setelah mendapatkan nilai G, dari hasil persamaan diatas diketahui bahwa:

$$G(p) = Q(\xi, \tau) = C_1 \int_0^\infty e^{-p^2} dp + C_2. \quad (4.36)$$

$Q(\xi, \tau)$ mempunyai syarat awal yang diberikan pada persamaan (4.34). Dari syarat awal dan persamaan (4.36), maka diperoleh:

1. Untuk nilai $x > 0$

$$Q(\xi, \tau) = C_1 \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp + C_2 = 1 \quad (4.37)$$

dengan menggunakan Fungsi Kepadatan Peluang atau *Probability Density Function* (PDF) dari distribusi normal standar dengan nilai $\sigma^2 = 1$ dan $\mu = 0$ seperti disebutkan pada persamaan (2.25) maka diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dp &= 1 \\ \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

sehingga apabila kembali pada persamaan (4.36), persamaan menjadi :

$$Q(\xi, \tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} C_1 + C_2 = 1 \quad (4.38)$$

2. Untuk nilai $x < 0$

$$Q(\xi, \tau) = C_1 \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp + C_2 = 0 \quad (4.39)$$

$$Q(\xi, \tau) = -C_1 \int_{-\infty}^0 e^{-p^2} dp + C_2 = 0 \quad (4.40)$$

dengan mengeliminasi persamaan (4.39) dan (4.40), diperoleh nilai $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ dan nilai $C_2 = \frac{1}{2}$. Selanjutnya dari nilai C_1 dan C_2 yang telah didapatkan, maka kembali pada persamaan (4.36) :

$$Q(\xi, \tau) = C_1 \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp + C_2 = 1$$

$$Q(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^p e^{-p^2} dp + \frac{1}{2}$$

Persamaan (4.31) dan persamaan (4.35) merupakan persamaan difusi yang serupa, sehingga dengan sifat ketunggalan solusi persamaan diferensial parsial, maka solusi dari $Q(\xi, \tau)$ juga merupakan solusi dari $u(\xi, \tau)$. Selanjutnya, dari sifat pada poin (2) yang telah diberikan, berlaku hubungan $S(\xi, \tau)$ dan $Q(\xi, \tau)$ yakni :

$$\begin{aligned}
 S(\xi, \tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} Q(\xi, \tau) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_0^p e^{-p^2} dp \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial p} \left(\int_0^p e^{-p^2} dp \right) \frac{\partial p}{\partial \tau} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4\tau}} e^{-p^2}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Dilakukan substitusi $S(\xi, \tau)$ pada persamaan (4.32), sehingga persamaan menjadi :

$$u(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-p^2} \theta(m) dm \tag{4.42}$$

kemudian substitusikan syarat awal persamaan (4.31) ke persamaan (4.42). Sehingga didapatkan solusi dari persamaan difusi yang diberikan sebagai berikut

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{4\tau}} u_0(m) dm$$

dengan

$$\begin{aligned}
 u_0(m) &= u(m, 0) \\
 &= \max \left(e^{\xi \left[1 + \frac{k^*}{2} \right]} - e^{\xi \left[\frac{k^*}{2} \right]}, 0 \right)
 \end{aligned}$$

sehingga dengan mensubstitusikan nilai $u_0(m)$, solusi persamaan difusi menjadi

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(e^{\frac{1}{2}[k^*+2]m} - e^{\frac{1}{2}[k^*]m}, 0\right) e^{-\frac{(\xi-m)^2}{4\tau}} dm \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}[k^*+2]m} - e^{\frac{1}{2}[k^*]m}\right) e^{-\frac{(\xi-m)^2}{4\tau}} dm \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} e^{\frac{1}{2}[k^*+2]m} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{4\tau}} dm \\
 &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} e^{\frac{1}{2}[k^*]m} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{4\tau}} dm
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$= I_2 - I_1 \tag{4.44}$$

Untuk memudahkan perhitungan, nilai $u(\xi, \tau)$ pada persamaan (4.44) diatas selanjutnya dibagi menjadi bentuk I_1 dan I_2 . Berikut solusi penyelesaian untuk I_2 ,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} [k^* + 2] m - \frac{(\xi - m)^2}{4\tau} &= \frac{2\tau m (2 + k^*) - (\xi^2 - 2m\xi + m^2)}{4\tau} \\
 &= \frac{-m^2 + 2m\tau (2 + k^*) - \xi^2}{4\tau} \\
 &= \frac{-m^2 + 2m [\tau (2 + k^*)] - \xi^2}{4\tau} \\
 &= \frac{1}{4\tau} \times -[(m - [\tau (2 + k^*) + \xi])^2 \\
 &\quad + [\tau (2 + k^*) + \xi]^2 - \xi^2] \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{m - [\tau (2 + k^*) + \xi]}{\sqrt{2\tau}} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4\tau} \times [\tau^2 [2 + k^*]^2 + 2\xi\tau \\
 &\quad [2 + k^*] + \xi^2 - \xi^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [k^* + 2] m - \frac{(\xi - m)^2}{4\tau} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{m - [\tau(2 + k^*) + \xi]}{\sqrt{2\tau}} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{4} \times [\tau[2 + k^*]^2 \\ &+ 2\xi[2 + k^*]] \end{aligned}$$

Dari nilai diatas, jika sisi kanan persamaan disederhanakan maka akan diperoleh

$$\frac{(\tau(2 + k^*)^2 + 2\xi(2 + k^*))}{4}.$$

Kembali ke nilai I_2 pada persamaan (4.43), maka :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{\frac{[\tau(2+k^*)^2+2\xi(2+k^*)]}{4}} \\ &\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m - [\tau(2+k^*) + \xi]}{\sqrt{2\tau}} \right)^2} dm \end{aligned}$$

Untuk penyederhanaan dalam perhitungan, dimisalkan nilai $z' = \left(\frac{m - [\tau(2+k^*) + \xi]}{\sqrt{2\tau}} \right)$, maka diperoleh nilai I_2 adalah :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{\frac{[\tau(2+k^*)^2+2\xi(2+k^*)]}{4}} \int_{\frac{[\tau(2+k^*)+\xi]}{\sqrt{2\tau}}}^\infty e^{-\frac{z'^2}{2}} \sqrt{2\tau} dz' \\ &= e^{\frac{[\tau(2+k^*)^2+2\xi(2+k^*)]}{4}} \frac{1}{2\pi} \int_{d_2}^\infty e^{-\frac{z'^2}{2}} \sqrt{2\tau} dz' \\ &= e^{\frac{[\tau(2+k^*)^2+2\xi(2+k^*)]}{4}} N(d_2). \end{aligned}$$

Untuk I_1 , dengan cara yang sama seperti I_2 maka

$$\begin{aligned}
 \frac{k^{*m}}{2} - \frac{(\xi - m)^2}{4\tau} &= \frac{2\tau m [k^*] - (\xi^2 - 2m\xi + m^2)}{4\tau} \\
 &= \frac{-m^2 + 2m [\tau(k^*) + \xi] - \xi^2}{4\tau} \\
 &= \frac{-(m - [\tau(k^*) + \xi])^2 + (\tau(k^*) + \xi)^2 - \xi^2}{4\tau} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{(m - [\tau(k^*) + \xi])}{\sqrt{2\tau}} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{(\tau^2(k^{2*}) + 2\xi\tau k^*)}{4\tau} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{(m - [\tau(k^*) + \xi])}{\sqrt{2\tau}} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{(\tau(k^{2*}) + 2\xi k^*)}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{\left(\frac{\tau(k^{2*}) + 2\xi(k^*)}{4} \right)} \\
 &\quad \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(m - [\tau(k^*) + \xi^2])}{\sqrt{2\pi}} \right)^2} dm
 \end{aligned}$$

Misalkan $z = \frac{m - [\tau(k^*) + \xi]}{\sqrt{2\tau}}$, maka :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{\tau(k^{2*}) + 2\xi(k^*)}{4}} \int_{\frac{[\tau(-k^*) - \xi]}{\sqrt{2\tau}}}^\infty e^{\frac{z^2}{2}} \sqrt{2\pi} dz \\
 &= e^{\frac{\tau(k^{2*}) + 2\xi k^*}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_1}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{2\pi} dz \\
 &= e^{\frac{\tau(k^{2*}) + 2\xi k^*}{4}} N(d_1).
 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai I_1 dan I_2 , sehingga kembali ke persamaan (4.44)

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) &= I_2 - I_1 \\ &= e^{\frac{[\tau(2+k^*)^2+2\xi(2+k^*)]}{4}} N(d_2) \\ &\quad - e^{\frac{\tau(k^{2*})+2\xi k^*}{4}} N(d_1) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Kemudian dilakukan substitusi persamaan (4.45) ke persamaan (4.30),

$$\begin{aligned} V(\xi, \tau) &= e^{-\frac{k^*}{2}\xi + \left(-\frac{k^{2*}}{4} - k\right)\tau} u(\xi, \tau) \\ &= e^{-\frac{k^*}{2}\xi + \left(-\frac{k^{2*}}{4} - k\right)\tau} \\ &\quad \left(e^{\frac{[\tau(2+k^*)^2+2\xi(2+k^*)]}{4}} N(d_2) - e^{\frac{\tau(k^{2*})+2\xi k^*}{4}} N(d_1) \right) \\ &= e^{-\frac{k^*}{2}\xi + \left(-\frac{k^{2*}}{4} - k\right)\tau + \frac{[\tau(2+k^*)^2+2\xi(2+k^*)]}{4}} N(d_2) \\ &\quad - e^{-\frac{k^*}{2}\xi + \left(-\frac{k^{2*}}{4} - k\right)\tau + \frac{\tau(k^{2*})+2\xi k^*}{4}} N(d_1) \\ &= e^{\xi + \tau(k^* - k + 1)} N(d_1) - e^{\tau(-k)} N(d_2). \end{aligned}$$

Setelah dilakukan substitusi, tahap terakhir adalah mencari nilai $V(S, t)$ untuk mendapatkan harga opsi basket tipe eropa

$$\begin{aligned} V(S, t) &= KV(\xi, \tau) \\ &= K \left[e^{\xi + \tau(k^* - k + 1)} N(d_1) - e^{\tau(-k)} N(d_2) \right] \\ &= K e^{\xi} e^{\tau(k^* - k + 1)} N(d_1) - K e^{\tau(-k)} N(d_2) \\ &= S(t) e^{\tau(k^* - k + 1)} N(d_1) - e^{-r(T-t)} KN(d_2) \\ &= S(t) e^{(T-t)[r-D-r+\frac{\sigma^2}{2}]} N(d_1) - e^{-r(T-t)} KN(d_2) \\ &= S(t) e^{-D(T-t)+\tau} N(d_1) - e^{-r(T-t)} KN(d_2) \\ &= e^{-q(T-t)} S(t) N(d_1) - e^{-r(T-t)} KN(d_2), \end{aligned}$$

dengan d_1 dan d_2 adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\xi + \tau(k^*)}{\sqrt{2\tau}} \\
 &= \frac{\xi + \left[(T-t) \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right] \left[\frac{2(r-D)}{\hat{\sigma}^2}\right]}{\sqrt{2 \left((T-t) \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)}} \\
 &= \frac{\xi + (T-t)(r-D)}{\sqrt{(T-t)\hat{\sigma}^2}} \\
 &= \frac{\xi + (T-t)(r - \hat{q} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2})}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{\xi + \tau(k^* + 2)}{\sqrt{2\tau}} \\
 &= \frac{\xi + \left[(T-t) \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right] \left[\frac{2(r-D)}{\hat{\sigma}^2} + 2\right]}{\sqrt{2 \left((T-t) \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)}} \\
 &= \frac{\xi + (T-t)(r-D) + (T-t)\hat{\sigma}^2}{\sqrt{(T-t)\hat{\sigma}^2}} \\
 &= \frac{\xi + (T-t)(r - \hat{q} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + \hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}}
 \end{aligned}$$

Sehingga dari persamaan Black-Scholes pada opsi multi-aset pada sub-bab sebelumnya, didapatkan model harga opsi multi-aset jenis opsi basket tipe eropa adalah sebagai berikut

$$V(S, t) = e^{-q(T-t)}S(t)N(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2) \quad (4.46)$$

dengan nilai d_1 dan d_2 adalah

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\xi + (T - t)(r - \hat{q} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2})}{\hat{\sigma}\sqrt{T - t}}, \\
 d_2 &= \frac{\xi + (T - t)(r - \hat{q} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + \hat{\sigma}^2(T - t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T - t}} \\
 &= d_1 - \sigma\sqrt{T - t}.
 \end{aligned}$$

4.3 SIMULASI Program

Pada tahap ini dilakukan simulasi program pada *Payoff* opsi beli dengan menggunakan software MATLAB. Terdapat tiga simulasi diantaranya simulasi *payoff* opsi beli, *payoff* opsi beli dengan tiga tingkat suku bunga, dan simulasi untuk *payoff* opsi beli dengan tiga tingkat volatilitas.

4.3.1 Simulasi payoff pada opsi beli

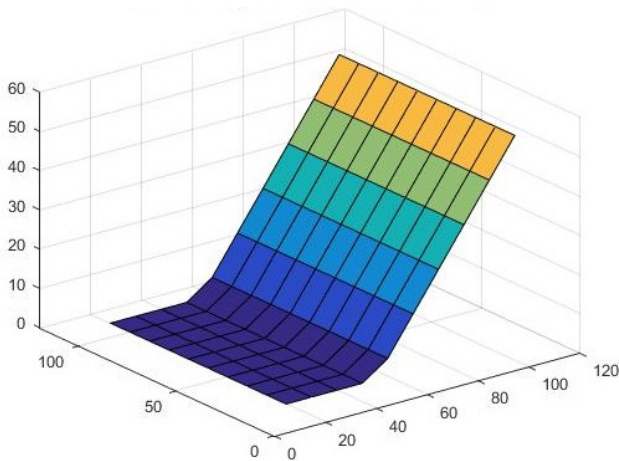
Payoff adalah keuntungan akibat meng-*exercise* atau menggunakan kontrak opsi. Nilai *payoff* masih merupakan keuntungan kotor dari penggunaan opsi (*exercise price*). Profit atau keuntungan bersih diperoleh dari nilai *payoff* dikurangi dengan harga pembelian opsi.

Keuntungan dari opsi beli dapat diperoleh ketika harga saham lebih dari harga opsi, hal ini sesuai dengan formula *payoff* pada opsi beli yaitu

$$Payoff = \max(S - K, 0). \quad (4.47)$$

Pada Gambar 4.1 dibawah ini, sisi horizontal menyatakan aset dasar (S) yaitu sebanyak dua buah saham (S_1 dan S_2). Pada sisi vertikal menyatakan harga opsi (V). Diketahui harga kesepakatan ($K = 55$). Pada saat harga saham adalah 0 sampai dengan 40, harga opsi adalah 0. Hal ini dikarenakan harga saham kurang dari harga kesepakatan ($K = 55$) sehingga nilai *payoff* bernilai nol seperti tertera

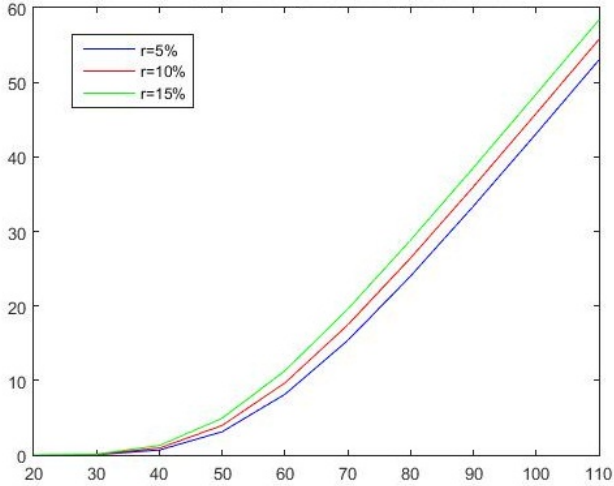
pada persamaan (4.47). Ketika harga saham adalah 60, harga opsi adalah 20. Hal ini disebabkan oleh harga saham lebih besar dari harga kesepakatan (55). Berlaku pula untuk harga saham berikutnya, sehingga grafik mengalami kenaikan. Selanjutnya, nilai *payoff* diperoleh dari selisih harga saham dengan harga kesepakatan.



Gambar 4.1: *Payoff* opsi beli dengan dua buah aset dasar

Dua pihak yang terlibat dalam kontrak opsi adalah pembeli dan penjual opsi. Laba dari pembeli adalah rugi bagi penjual dan berlaku sebaliknya. Pada opsi beli, apabila harga saham lebih besar dari harga kesepakatan kontrak, maka kontrak opsi dapat dilakukan dan mendapatkan keuntungan. Sedangkan apabila harga saham kurang dari atau tidak lebih besar dari harga opsi, maka akan lebih murah membeli saham langsung di pasar dibandingkan menggunakan opsi. Pemegang kontrak tersebut juga dapat memilih untuk tidak menjalankan kontrak, artinya *payoff* bernilai nol.

4.3.2 Simulasi payoff pada opsi beli dengan tiga tingkat suku bunga (5%, 10%, 15%)



Gambar 4.2: Payoff opsi beli dengan tiga tingkat suku bunga

Pada gambar dua dimensi diatas, sisi horizontal menyatakan saham (S) dan sisi vertikal menyatakan harga opsi (V). Berdasarkan hasil simulasi yang ditunjukkan pada Gambar 4.2, diperoleh hasil bahwa :

1. Suku bunga 5%

Pada saat tingkat suku bunga sebesar 5% dengan harga saham sebesar 110, diperoleh bahwa harga opsi adalah 53.003.

2. Suku bunga 10%

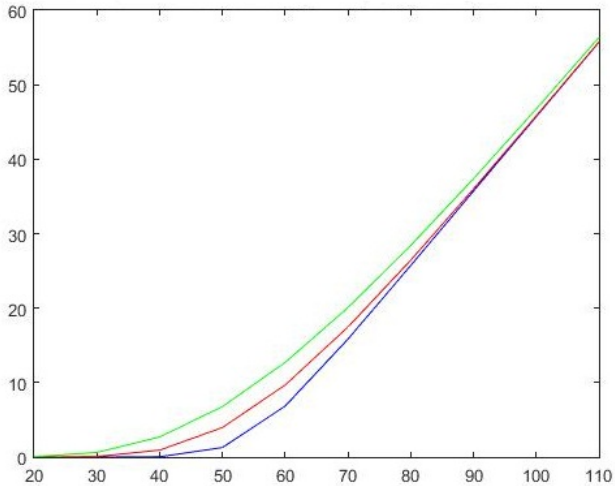
Pada saat tingkat suku bunga sebesar 10% dengan harga saham sebesar 10%, diperoleh bahwa harga opsi adalah 55.7537.

3. Suku bunga 15%

Pada saat tingkat suku bunga sebesar 15% dengan harga saham sebesar 110, diperoleh bahwa harga opsi adalah 58.3820.

Ketika tingkat suku bunga sebesar 5%, 10%, dan 15% dengan harga saham sebesar 110, harga opsi yang diperoleh adalah masing-masing 53.003, 55.7537, dan 58.3820. Hal ini berarti bahwa terdapat pengaruh antara tingkat suku bunga dengan harga opsi. Semakin besar tingkat suku bunga maka harga opsi juga semakin besar.

4.3.3 Simulasi payoff pada opsi beli dengan tiga tingkat volatilitas (10%, 20%, 30%)



Gambar 4.3: *Payoff* opsi beli dengan tiga tingkat volatilitas

Pada gambar dua dimensi diatas, sisi horizontal menyatakan saham (S) dan sisi vertikal menyatakan harga opsi (V). Berdasarkan hasil simulasi yang ditunjukkan pada Gambar 4.3, diperoleh hasil bahwa :

1. Volatilitas 10%

Pada saat tingkat volatilitas sebesar 10% dengan harga saham adalah 110, diperoleh hasil bahwa harga opsi adalah 55.7098

2. Volatilitas 20%

Pada saat tingkat volatilitas sebesar 20% dengan harga saham adalah 110, diperoleh hasil bahwa harga opsi adalah 55.7537

3. Volatilitas 30%

Pada saat tingkat volatilitas sebesar 30% dengan harga saham adalah 110, diperoleh hasil bahwa harga opsi adalah 56.3525

Ketika tingkat volatilitas sebesar 10%, 20%, dan 30% dengan harga saham sebesar masing-masing 110, diperoleh harga opsi sebesar 55.7098, 55.7537, 56.3525. Hal ini berarti bahwa terdapat pengaruh yang relatif kecil antara tingkat volatilitas dengan harga opsi. Semakin besar tingkat volatilitas, maka harga opsi juga semakin besar.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari tugas akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Model harga opsi basket tipe eropa untuk *call option* atau opsi beli diberikan sebagai berikut :

$$V(S, t) = e^{-q(T-t)}S(t)N(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

dengan

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\xi + (T-t)(r - \hat{q} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2})}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}} \\d_2 &= \frac{\xi + (T-t)(r - \hat{q} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + \hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}} \\&= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\end{aligned}$$

2. Berdasarkan simulasi dengan tiga tingkat suku bunga, dapat disimpulkan bahwa tingkat kenaikan suku bunga berpengaruh pada nilai opsi. Semakin besar suku bunga, maka nilai *call option* juga semakin tinggi.
3. Berdasarkan simulasi dengan tiga tingkat volatilitas, dapat disimpulkan bahwa semakin tinggi tingkat volatilitas maka harga saham juga semakin tinggi.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang diberikan untuk penelitian selanjutnya yaitu menentukan harga opsi basket tipe eropa dengan kondisi lognormalitas lemah. Kondisi tersebut mempunyai beberapa asumsi. Dengan opsi yang digunakan adalah *Compound Exchange Option*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Salim, Lani (2003). **Option and Warrant**. Jakarta: PT Elex Media Komputindo.
- [2] Jiang, Lishang (2004). **Mathematical Modelling and methods of Option Pricing**. China: Higher Education Press.
- [3] Willmott, Paul. (2007). **The Mathematics Of Financial Derivatives**. USA: Press Syndicate of the University of Cambridge.
- [4] Rudiger, S. (2002). **Tools for Computational Finance**. Koln: Springer.
- [5] Bodie, K.M. (2005). **Investments International Sixth Edition**. Ney York: Mc.Graw-Hill.
- [6] Seydel, U.R.. (2006). **Tools for Computational Finance**. Koln: Springer.
- [7] Hull, J. C. (2009). **Option Futures and Other Derivatives**, 8th Edition. New Jersey: Prentice-Hall.
- [8] Lo, MS. (2003). **Generalized autoregressive conditional hetercedasticity time series model [tesis]**. Burnaby (CA): Simon Fraser University.
- [9] Irma Liyonita, Selvi. (2015). **Aplikasi Metode Crank-Nicolson untuk Menentukan Harga European Call Option Pada Model Heston**. Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

- [10] Halim, Abdul. (2005). **Analisis Investasi**. Jakarta: Salemba Empat.
- [11] Ding (2009). **The pricing of Multi-assets using Monte Carlo Method**. China: Sciencedirect.
- [12] Affanti, I.R. (2012). **Prediksi Harga Saham Menggunakan Geometric Brownian Motion**. Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [13] Syamsudin, M. **Catatan Kuliah Matematika Keuangan**. Institut Teknologi Bandung.
- [14] Straus, Walter A. **Partial Differential Equations: An Introduction**. USA: John Wiley and Sons.
- [15] Kersale, Evy (2003) **Analytic Solution of Partial Diferential Equation..** University of Leeds, UK.
- [16] Prahmana, Rully Charitas. Sumardi. (2008) **Penentuan Harga Opsi untuk Model Black-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga Crank-Nicholson**. KNM XIV IndoMS, Universitas Sriwijaya.
- [17] Oud, M. AAA. (2014). **The Dynamics of Oil Prices and Valuation of Oil Derivatives**. University of Wollongong. Australia
- [18] Tandelilin, Eduardus. (2001). **Analisis Investasi dan Manajemen Portofolio**. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.
- [19] Wan, H. (2002). **Pricing american style basket option by implied binomial tree**. In Working Paper; Haas School of Business: Berkeley, CA, USA.

- [20] Susanti, Desi, dan Devianto, Dodi. (2014). **Penurunan Model Black Scholes dengan Persamaan Diferensial Stokastik untuk Opsi Tipe Eropa**. Padang: Universitas Andalas.
- [21] Epps, T.W. (2007). **Pricing Derivative Securities. Second Edition**. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., British.
- [22] Bain, L.J. (1992). **Introduction to Probability and Mathematical Statistics. Second Edition**. Duxbury Press, An Imprint of Wadsworth Publishing Company, Belmont, California.

LAMPIRAN

LAMPIRAN A

Listing Program pada *Payoff* Opsi Beli

```

%--PENENTUAN HARGA OPSI BASKET TIPE EROPA BERDASARKAN ---
-----MODEL BLACK-SCHOLES-----

clc;
clear all;
S1 = 100; % Value of the underlying
S2 = 100; % Value of the underlying
E = 60; % Strike (exercise price)
r = 0.05; % Risk free interest rate
sigma1 = 0.2; % Volatility 1
sigma2 = 0.2; % Volatility 2
alfal = 0.5;
alfa2 = 0.5;
rho = 0.1;
T = 1; % Time to expiry

S1max = 150;
S2max = 150;
N = 30;
M = 75;
S = [S1max S2max]; % Value of the underlying asset
nS= length(S);
S1mesh= [20 30 40 50 60 70 80 90 100 110];
S2mesh= [20 30 40 50 60 70 80 90 100 110];
Sigma= [sigma1 sqrt(sigma1*sigma2);
sqrt(sigma1*sigma2) sigma2]; % Volatility
a=zeros(nS);
for i= 1:nS
    for j= 1:nS
        for k= 1:nS
            a(i,j)=a(i,j)+sigma(i,k)*sigma(j,k);
        end
    end
end
end

```

LAMPIRAN A (LANJUTAN)

```

alpha=[alfa1 alfa2];
t=0:T/M:T;
sigmah2=0;
for i=1:nS
    for j=1:nS
        sigmah2=sigmah2+a(i,j)*alpha(i)*alpha(j);
    end
    qh=0;
for i=1:nS
    qh=qh+alpha(i)*a(i,i)/2;
end
    qh=qh-0.5*sigmah2;

% Analytic Solution
for i=1:length(S1mesh)
    for j=1:length(S1mesh)
        tau(j)=T-t(j);

d1 = (log((S1mesh(i)^alpha(1))*(S2mesh(i)^alpha(2))/E)+
    (r-qh+0.5*sigmah2)*(tau(j)))/
    sqrt(sigmah2*(tau(j)))
d2 = d1-sqrt(sigmah2*(tau(j)))

V(i,j)=exp(-qh*(tau(j)))*(S1mesh(i)^alpha(1))*
    (S2mesh(i)^alpha(2))*normcdf(d1)-
    exp(-r*(tau(j)))*E*normcdf(d2);
    end
end
a = linspace(0,10,10)
b = linspace(0,10,10)
[A B] = meshgrid(a,b)
analyticsprice=interp1(S1mesh,V,A);

figure(1)
nn = 1:10

% plot(S1mesh,V,'r',S1mesh,V,'b')
surf(S1mesh,S1mesh,V)
xlabel('Stock Price I')
ylabel('Stock Price II')
zlabel('Option Value')
grid on
title('Grafik Call Option dengan dua buah aset dasar')

```

LAMPIRAN B

Listing Program pada *Payoff* Opsi Beli dengan Pengaruh Suku Bunga

```

clc;
clear all;
S1 = 100; % Value of the underlying
S2 = 100; % Value of the underlying
E = 60; % Strike (exercise price)
r = 0.05; % Risk free interest rate
sigma1 = 0.2; % Volatility 1
sigma2 = 0.2; % Volatility 2
alfal = 0.5;
alfa2 = 0.5;
rho = 0.1;
T = 1; % Time to expiry

S1max = 150;
S2max = 150;
N = 30;
M = 75;
S = [S1max S2max]; % Value of the underlying asset
nS= length(S);
S1mesh= [20 30 40 50 60 70 80 90 100 110];
S2mesh= [20 30 40 50 60 70 80 90 100 110];
sigma= [sigma1 sqrt(sigma1*sigma2);
sqrt(sigma1*sigma2) sigma2]; % Volatility
a=zeros(nS);
for i= 1:nS
    for j= 1:nS
        for k= 1:nS
            a(i,j)=a(i,j)+sigma(i,k)*sigma(j,k);
        end
    end
end
alpha=[alfal alfa2];
t=0:T/M:T;
sigmah2=0;
for i=1:nS
    for j=1:nS
        sigmah2=sigmah2+a(i,j)*alpha(i)*alpha(j);
    end
end
qh=0;
for i=1:nS
    qh=qh+alpha(i)*a(i,i)/2;
end
qh=qh-0.5*sigmah2;

```

LAMPIRAN B (LANJUTAN)

```

% Analytic Solution
for i=1:length(SImesh)
    for j=1:length(SImesh)
        tau(j)=T-t(j);

d1 = (log((SImesh(i)^alpha(1))*(S2mesh(i)^alpha(2))/E) +
        (r-qh+0.5*sigmah2)*(tau(j)))/
        sqrt(sigmah2*(tau(j)))
d2 = d1-sqrt(sigmah2*(tau(j)))

V(i,j)=exp(-qh*(tau(j)))*(SImesh(i)^alpha(1))*
        (S2mesh(i)^alpha(2))*normcdf(d1)-
        exp(-r*(tau(j)))*E*normcdf(d2);
    end
end

a = linspace(0,10,10)
b = linspace(0,10,10)
[A B] = meshgrid(a,b)
analyticprice=interp1(SImesh,V,A);

figure(1)
nn = 1:10

plot(SImesh,V,'r',SImesh,V,'b')
xlabel('Stock Price')
ylabel('Option Value')
grid on
title('Grafik Call Option dengan tiga tingkat suku
bunga')

%KONDISI 1
%untuk r_1
Vr_1 =
[0.000238;0.0458749575728086;0.669458968092200;3.1256777
5883715;8.14823302467824;15.3736881307255;24.00470811358
39;33.3826616314439;43.1147044453929;53.0030300431909];
[vr_1 vr_11] = meshgrid(Vr_1,Vr_1)

```

LAMPIRAN B (LANJUTAN)

```
%untuk r_2
Vr_2 =
[0.000478041833826627;0.0738390575767501;0.9347197136392
31;3.96410644323519;9.67606783498717;17.4548141526292;26
.4335307972843;35.9990868504878;45.8230189006807;55.7536
620481641];
[vr_2 vr_22] = meshgrid(Vr_2,Vr_2)

%untuk r_3
Vr_3 =
[0.000933361115400518;0.115817372579779;1.27564300216753
;4.93129110133909;11.3115406490872;19.5745597823863;28.8
318132181292;38.5363890090381;48.4238434127428;58.381964
2778191];
[vr_3 vr_33] = meshgrid(Vr_3,Vr_3)

figure(3)
plot(Slmesh, Vr_1, 'b', Slmesh, Vr_2, 'r', Slmesh, Vr_3,
'g')
grid on
legend ('r=5%', 'r=10%', 'r=15%')
```


LAMPIRAN C

Listing Program pada *Payoff* Opsi Beli dengan Pengaruh Volatilitas

```

clc;
clear all;
S1 = 100;    % Value of the underlying
S2 = 100;    % Value of the underlying
E = 60;      % Strike (exercise price)
r = 0.05;    % Risk free interest rate
sigma1 = 0.2; % Volatility 1
sigma2 = 0.2; % Volatility 2
alfa1 = 0.5;
alfa2 = 0.5;
rho = 0.1;
T = 1;      % Time to expiry

S1max = 150;
S2max = 150;
N = 30;
M = 75;
S = [S1max S2max]; % Value of the underlying asset
nS = length(S);
S1mesh = [20 30 40 50 60 70 80 90 100 110];
S2mesh = [20 30 40 50 60 70 80 90 100 110];
sigma = [sigma1 sqrt(sigma1*sigma2);
sqrt(sigma1*sigma2) sigma2]; % Volatility
a=zeros(nS);
for i= 1:nS
    for j= 1:nS
        for k= 1:nS
            a(i,j)=a(i,j)+sigma(i,k)*sigma(j,k);
        end
    end
end
alpha=[alfa1 alfa2];
t=0:T/M:T;
sigmah2=0;
for i=1:nS
    for j=1:nS
        sigmah2=sigmah2+a(i,j)*alpha(i)*alpha(j);
    end
end
qh=0;
for i=1:nS
    qh=qh+alpha(i)*a(i,i)/2;
end
qh=qh-0.5*sigmah2;

```

LAMPIRAN C (LANJUTAN)

```

% Analytic Solution
for i=1:length(SImesh)
    for j=1:length(SImesh)
        tau(j)=T-t(j);

d1 = (log((SImesh(i)^alpha(1))*(S2mesh(i)^alpha(2))/E)+
      (r-qh+0.5*sigmah2)*(tau(j)))/
      sqrt(sigmah2*(tau(j)))
d2 = d1-sqrt(sigmah2*(tau(j)))

V(i,j)=exp(-qh*(tau(j)))*(SImesh(i)^alpha(1))*
      (S2mesh(i)^alpha(2))*normcdf(d1)-
      exp(-r*(tau(j)))*E*normcdf(d2);
    end
end

a = linspace(0,10,10)
b = linspace(0,10,10)
[A B] = meshgrid(a,b)
analyticsprice=interp1(SImesh,V,A);

figure(1)
nn = 1:10

plot(SImesh,V,'r',SImesh,V,'b')
xlabel('Stock Price')
ylabel('Option Value')
grid on
title('Grafik Call Option dengan tiga tingkat
volatilitas')

%KONDISI 2
%untuk sigmal
Vsigma_1 = [5.23286224607520e-13;1.69095472962383e-
05;0.0359959515717884;1.27767128639682;6.84756889901556;1
5.8348788879356;25.7183614864351;35.7101832847423;45.7097
721406127;55.7097555225932];

```

LAMPIRAN C (LANJUTAN)

```
%untuk sigma2
Vsigma_2 =
[0.000478041833826627;0.0738390575767501;0.93471971363923
1;3.96410644323519;9.67606783498717;17.4548141526292;26.4
335307972843;35.9990868504878;45.8230189006807;55.7536620
481641];

%untuk sigma3
Vsigma_3 =
[0.0428815384930816;0.620571078191555;2.69569793321663;6.
77687352657636;12.7162411531681;20.0750864572053;28.40998
99412573;37.3777389083681;46.7426335695738;56.35251248276
56]

figure(2)
plot(Slmesh, Vsigma_1, 'b',Slmesh, Vsigma_2, 'r', Slmesh
, Vsigma_3, 'g')

legend('sigma=10%', 'sigma=20%', 'sigma=30%')
```

LAMPIRAN D

Biodata Penulis



Hamidah Qurrotun Nadwah, lahir di Jombang pada 29 Juni 1997. Pada tahun 2014 penulis melanjutkan pendidikan di Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data, Departemen Matematika dengan bidang minat Riset Operasi & Pengolahan Data. Selama di bangku perkuliahan, penulis aktif di Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) ITS sebagai BSO Badan Koordinasi Pemandu

ITS yang bergerak di bidang pelatihan keterampilan manajemen individu, manajemen event, manajemen organisasi, dan manajemen massa. Penulis juga aktif di Paduan Suara Mahasiswa ITS sebagai *External Affair Team*. Pada tahun 2017 penulis diamanahi sebagai Koordinator Komisi Materi LKMM PRA-TD FMIPA ITS dan Koordinator Pemandu LKMM-TD HIMATIKA ITS. Selain aktif berorganisasi, penulis juga aktif dalam berbagai kepanitiaan; seperti Sie acara Olimpiade Matematika ITS (OMITS) 2015 & 2016, Penanggung Jawab OMITS Regional Jember 2015, Sie acara Meet The Expert BEM ITS, Sie Acara pada Standardisasi PP LKMM dan LKMM Pra-TD BEM ITS, dll dan merupakan Pemandu aktif LKMM.

Demikian data diri mengenai penulis. Apabila terdapat kritik dan saran mengenai Tugas Akhir ini, dapat dikirimkan melalui email haquna29@gmail.com. Terimakasih.