



**TUGAS AKHIR - KM184801**

**OPTIMASI PENYEBARAN KOLERA MENGGUNAKAN  
KONTROL SANITASI, KARANTINA, EDUKASI DAN  
KLORINASI**

**DWITA SUCI ANGGRAINI  
NRP 0611144000031**

**Dosen Pembimbing  
Subchan, Ph.D  
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si**

**Departemen Matematika  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2019**



**TUGAS AKHIR - KM184801**

**OPTIMASI PENYEBARAN KOLERA  
MENGUNAKAN KONTROL SANITASI,  
KARANTINA, EDUKASI, DAN KLORINASI**

**DWITA SUCI ANGGRAINI  
NRP 0611144000031**

**Dosen Pembimbing  
Subchan, Ph.D  
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2019**





**FINAL PROJECT - KM184801**

**OPTIMIZATION OF CHOLERA SPREADING USING  
SANITATION, QUARANTINE, EDUCATION, AND  
CHLORINATION CONTROL**

**DWITA SUCI ANGGRAINI  
NRP 0611144000031**

**Supervisors  
Subchan, Ph.D  
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si**

**DEPARTMEN OF MATHEMATICS  
Faculty Of Mathematics, Computation, and Data Science  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2019**



**LEMBAR PENGESAHAN**  
**OPTIMASI PENYEBARAN KOLERA**  
**MENGGUNAKAN KONTROL SANITASI,**  
**KARANTINA, EDUKASI, DAN KLORINASI**

***OPTIMIZATION OF CHOLERA SPREADING USING***  
***SANITATION, QUARANTINE, EDUCATION, AND***  
***CHLORINATION CONTROL***

**TUGAS AKHIR**

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika  
Pada bidang studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Departemen Matematika  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh,  
**DWITA SUCI ANGGRAINI**  
NRP. 06111440000031

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,

  
**Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si**

NIP. 19600527-198701-1-001

  
**Subchan, Ph.D**

NIP. 19710513-199702-1-001

Mengetahui,

**Ketua Departemen Matematika**  
**FMKSD-ITS**

  
**Dr. Imam Mukhlash, S.Si. MT**

NIP. 19700831-199403-1-003

Surabaya, 11 Juli 2019



# OPTIMASI PENYEBARAN KOLERA MENGGUNAKAN KONTROL SANITASI, KARANTINA, EDUKASI, DAN KLORINASI

**Nama** : Dwita Suci Anggraini  
**NRP** : 0611144000031  
**Departemen** : Matematika  
**Dosen Pembimbing** : 1. Subchan, Ph.D  
2. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si

## ABSTRAK

Kolera adalah infeksi diare akut yang disebabkan oleh konsumsi makanan atau air yang terkontaminasi oleh bakteri *Vibrio Cholerae*. Kolera termasuk penyakit menular dan mematikan yang membutuhkan tindakan pencegahan dan pengendalian yang efektif. Dalam penelitian ini dilakukan upaya pencegahan penyebaran kolera dengan merekonstruksi model matematika dengan menambahkan kontrol sanitasi, karantina, edukasi, dan klorinasi pada bakteri. Metode yang digunakan yaitu *Pontryagin Minimum Principle*. Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta menggunakan software MATLAB. Berdasarkan hasil simulasi ditunjukkan bahwa pemberian kontrol dapat meminimumkan jumlah individu terinfeksi kolera dengan gejala ringan pada waktu akhir sebanyak 2 individu dan individu terinfeksi kolera dengan gejala berat pada waktu akhir sebanyak 7 individu serta dapat meminimumkan jumlah konsentrasi bakteri pada waktu akhir sebanyak 517 *cell/ml*.

**Kata kunci:** *Model Dinamika Kolera, Kontrol Optimal, Pontryagin Minimum Principle.*





# OPTIMIZATION OF CHOLERA SPREADING USING SANITATION, QUARANTINE, EDUCATION, AND CHLORINATION CONTROL

**Name of Student** : Dwita Suci Anggraini  
**NRP** : 06111440000031  
**Department** : Mathematics  
**Supervisor** : 1. Subchan, Ph.D  
2. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si

## **ABSTRACT**

*Cholera is a contagious and deadly disease that requires an effective prevention and control actions. In this paper, several efforts are made to prevent the cholera spreading by reconstructing the mathematical model and adding control sanitation, treatment consisted of quarantine and education as well as chlorination on to the bacteria. The Pontryagin Minimum Principle is employed to derive the optimal control solution and solved by Runge-Kutta method. The computational results showed that the control was able to minimize the number of individuals infected by cholera with mild symptoms at the final time as many as 2 individuals and individuals infected by cholera with severe symptoms at the final time as many as 7 individuals as well as minimize the number of bacteria concentrations at the final time as much as 517 cell/ml.*

**Keywords** : *Dynamics of Cholera, Optimal Control, Pontryagin Minimum Principle*



## KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikumWr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'aalamin, segala puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, atas segala rahmat, taufiq dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul "Optimasi Penyebaran Kolera Menggunakan Kontrol Sanitasi, Karantina, Edukasi, Dan Klorinasi" yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini, penulis telah banyak mendapat bantuan serta masukan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT. selaku Ketua Departemen Matematika FMKSD ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesainya Tugas Akhir ini.
2. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, MT. selaku Sekretaris Departemen serta Dosen Wali yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si. selaku Kaprodi Sarjana Matematika FMKSD ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesainya Tugas Akhir ini.
4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Sc. selaku Sekretaris Kaprodi Sarjana Matematika FMKSD ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesainya Tugas Akhir ini.
5. Bapak Subchan, Ph.D dan Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi kepada penulis dalam

mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat selesai dengan baik.

6. Bapak Dr. Drs. Hariyanto, M.Si, Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran demi perbaikan Tugas Akhir.
7. Seluruh Bapak/Ibu dosen dan staf departemen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
8. Bapak, Ibu, Adik dan seluruh keluarga penulis yang senantiasa dengan ikhlas memberikan kasih sayang, semangat, doa, dan nasihat-nasihat yang sungguh berarti kepada penulis.
9. Sahabat penulis Sinta, Okky, Yulianita, Bifa, Dinah, Mida, Marel, Fisa, Zulfa, Itsna, terima kasih karena selalu memberikan semangat, dukungan dan memberikan doa-doa terbaik untuk penulis serta teman-teman lainnya yang tidak bisa disebutkan satu per satu oleh penulis, terima kasih atas dukungan dan doa yang diberikan.
10. Ahmad Maulana Syafi'i dan Siti Maulida Hasanah yang telah membagi ilmunya kepada penulis serta senantiasa memberikan semangat dan dukungan kepada penulis.
11. Seluruh teman-teman angkatan 2014 dan seluruh keluarga besar Matematika ITS terima kasih atas dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Wassalamu'alaikumWr. Wb.

Surabaya, 10 Juli 2019

**Penulis**

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>TITLE PAGE</b> .....	iii
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xv
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xix
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan .....	4
1.5 Manfaat .....	4
1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir .....	4
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Kolera .....	7
2.2 Penelitian Terdahulu .....	8
2.3 Model Sistem Dinamik Penyebaran Penyakit Kolera .....	8
2.4 Kendali Optimal .....	11
2.5 Prinsip Minium Pontryagin .....	12
2.7 Metode Runge-Kutta Orde Empat .....	13
<b>BAB III METODOLOGI PENELITIAN</b>	
3.1 Langkah Pengerjaan .....	15
3.2 Diagram Alur Penelitian .....	17

## **BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

4.1	Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera Dengan Kontrol Optimal.....	19
4.2	Permasalahan Kontrol Optimal .....	23
	4.2.1 Model Sistem Dinamik.....	23
	4.2.2 Fungsi Tujuan.....	23
	4.2.3 Kondisi Batas Sistem .....	24
4.3	Penyelesaian Kontrol Optimal .....	26
4.4	Penyelesaian Numerik dan Simulasi .....	41
	4.4.1 Penyelesaian Numerik Persamaan <i>State</i> .....	43
	4.4.2 Penyelesaian Numerik Persamaan <i>Costate</i> .....	52
4.5	Hasil Simulasi Numerik.....	71
	4.5.1 Laju Perubahan Jumlah Individu dan Bakteri ....	74

## **BAB V PENUTUP**

5.1	Kesimpulan .....	85
5.2	Saran .....	86

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	87
-----------------------------	----

<b>LAMPIRAN</b> .....	89
-----------------------	----

<b>BIODATA PENULIS</b> .....	115
------------------------------	-----

## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1	Variabel pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera..... 21
Tabel 4.2	Parameter pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera..... 22
Tabel 4.3	Nilai Parameter Model..... 72





## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian.....	17
Gambar 4.1 Diagram Kompartemen .....	20
Gambar 4.2 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Individu Rentan .....	74
Gambar 4.3 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Individu Terdidik .....	75
Gambar 4.4 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Individu Terinfeksi dengan Gejala Ringan ...	76
Gambar 4.5 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Individu Terinfeksi dengan Gejala Berat .....	77
Gambar 4.6 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Individu yang Dikarantina.....	78
Gambar 4.7 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Individu Sembuh .....	79
Gambar 4.8 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Bakteri/Konsentrasi Bakteri .....	80
Gambar 4.9 Laju Perubahan Jumlah Populasi dengan Kontrol Optimal .....	81
Gambar 4.10 Laju Perubahan Jumlah Konsentrasi Bakteri dengan Kontrol Optimal.....	81
Gambar 4.11 Tingkat Pemberian Kontrol Optimal Berupa Sanitasi .....	82
Gambar 4.12 Tingkat Pemberian Kontrol Optimal Berupa Karantina .....	82
Gambar 4.13 Tingkat Pemberian Kontrol Optimal Berupa Edukasi .....	83

Gambar 4.14 Tingkat Pemberian Kontrol Optimal Berupa  
Klorinasi..... 83

## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
<b>Lampiran A</b> Source Code Simulasi .....	89



# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

Bab ini membahas latar belakang yang mendasari penulisan. Didalamnya mencakup identifikasi permasalahan pada topik, batasan masalah, tujuan dan manfaat yang diperoleh dari penyusunan penulisan ini. Adapun sistematika penulisan tugas akhir akan diuraikan dibagian akhir bab ini.

### **1.1 Latar Belakang Masalah**

Kolera adalah infeksi diare akut yang disebabkan oleh konsumsi makanan atau air yang terkontaminasi oleh bakteri *Vibrio cholerae* [1]. Bakteri tersebut mengeluarkan enterotoksin pada saluran usus sehingga menimbulkan diare disertai muntah yang akut dan hebat. Akibatnya seseorang dalam waktu hanya beberapa hari akan kehilangan banyak cairan tubuh dan masuk pada kondisi dehidrasi. Kondisi ini dapat menyebabkan kematian bila tidak cepat ditangani [2]. Proses penularan penyakit kolera bisa terjadi melalui mulut, yaitu jika bakteri *Vibrio Cholerae* berhasil masuk lewat mulut dan tertelan, maka bakteri ini cepat terbunuh apabila terkena asam lambung. Namun, jika bakteri *VibrioCholerae* berhasil melewati asam lambung, maka bakteri tersebut berkembang di usus halus [3].

Sekitar 75% orang yang terinfeksi bakteri *Vibrio cholera* tidak mengalami gejala apapun, walaupun bakteri tersebut ada didalam kotoran mereka selama 7-14 hari setelah terinfeksi [1], tetapi saat terjadinya serangan infeksi maka tiba-tiba terjadi diare dan muntah dengan kondisi cukup serius sebagai serangan akut [4]. Sejak tahun 1917, kolera dikenal dengan tujuh pandemi yang penyebarannya mencapai Eropa. Bakteri *Vibrio Cholerae* pertama kali muncul di Sulawesi, Indonesia dan menyebabkan epidemi kolera. Penyakit kolera tersebut kemudian menyebar dengan

cepat ke negara Asia Timur lainnya dan mencapai Bangladesh pada tahun 1963, India pada tahun 1964, dan Uni Soviet, Iran dan Iraq pada tahun 1965-1966 [3].

Dari data GHO, pada tahun 2016 jumlah kasus kolera yang diterbitkan oleh WHO menyatakan bahwa 38 negara melaporkan total 132.121 kasus. Namun secara global, jumlah sebenarnya dari kasus kolera diketahui jauh lebih tinggi. Kolera mewakili perkiraan sekitar 1,4 hingga 4,0 juta kasus dan 21.000 hingga 143.000 kematian per tahun di seluruh dunia. Secara keseluruhan, 54% kasus yang berkaitan dengan kolera telah dilaporkan dari Afrika, 13% dari Asia dan 32% dari Hispaniola [5]. Kolera cepat menyebar di daerah padat penduduk, sanitasi air yang buruk dan kurangnya penyediaan air bersih. Oleh karena itu, penyakit kolera banyak diidentifikasi di negara miskin dan berkembang [6]. Sehingga tidak menutup kemungkinan kolera dapat menyebar di negara Indonesia, untuk itu penting dilakukannya penelitian tentang pengendalian penyebaran penyakit kolera agar dapat meminimumkan kasus penyebaran penyakit kolera.

Tindakan pencegahan dan pengendalian yang efektif dan terbukti untuk kolera tergantung pada penyediaan layanan kesehatan lingkungan yang memadai, seperti meningkatkan akses ke air bersih, sanitasi, ketersediaan vaksin kolera, karantina dan pengobatan [1]. Pemodelan matematika tentang penyebaran penyakit kolera disertai dengan pengendaliannya telah banyak dilakukan dalam penelitian-penelitian terdahulu. Penelitian tentang penyakit kolera sebelumnya telah dikaji oleh Bakhtiar pada tahun 2015 mengenai pendekatan kontrol optimum penyakit menular dengan variabel kontrolnya yaitu peran edukasi dan klorinasi. Selanjutnya Lemos-Paiao dkk melakukan penelitian tahun 2016 mengenai model penyebaran penyakit kolera dengan memberikan kontrol berupa treatment (pengobatan) yang

dilakukan pada populasi orang yang dikarantina. Populasi orang terinfeksi yang dikenai treatment akan dikarantina sehingga terdapat populasi yang dikarantina. Selanjutnya Syafi,i dkk melakukan penelitian pada tahun 2018 mengenai model penyebaran penyakit kolera dengan pemberian kontrol optimal berupa pengobatan dan intervensi melalui perbaikan sanitasi, pemberian edukasi, dan pengobatan karantina.

Merujuk pada penelitian terdahulu yang telah dijelaskan, dalam tugas akhir ini masalah yang dikembangkan yaitu optimasi penyebaran penyakit kolera menggunakan model yang telah dikembangkan oleh Syafi,i dkk pada tahun 2018 dengan menambahkan satu variabel kontrol yaitu pemberian klorin pada bakteri.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, permasalahan yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk kontrol optimal pada model matematika penyebaran penyakit kolera dengan kontrol berupa sanitasi, karantina, edukasi dan klorinasi?
2. Bagaimana interpretasi dari hasil simulasi penerapan kontrol optimal pada model penyebaran penyakit kolera dengan kontrol berupa sanitasi, karantina, edukasi dan klorinasi?

## **1.3 Batasan Masalah**

Berdasarkan rumusan masalah, maka ruang lingkup penelitian dibatasi sebagai berikut:

1. Model matematika yang digunakan pada penelitian ini mengkaji dari penelitian [6] dengan modifikasi penambahan variabel kontrol berupa klorinasi.
2. Upaya kontrol optimal yang diterapkan antara lain perbaikan sanitasi, karantina bagi individu terinfeksi



dengan gejala berat, pemberian edukasi bagi individu rentan dan pemberian klorin pada bakteri.

3. Setiap individu yang sembuh dapat kehilangan kekebalan terhadap penyakit kolera sehingga dapat menjadi rentan kembali

#### **1.4 Tujuan**

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan bentuk kontrol yang optimal dari model matematika penyebaran penyakit kolera dengan menggunakan *Pontryagin Minimum Principle*.
2. Menginterpretasi hasil simulasi penerapan kontrol optimal pada model penyebaran penyakit kolera dengan kontrol berupa sanitasi, karantina, edukasi dan klorinasi

#### **1.5 Manfaat**

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan informasi tentang perilaku penyebaran penyakit kolera dengan perbaikan sanitasi, karantina bagi individu terinfeksi dengan gejala berat, pemberian edukasi pada individu yang rentan dan pemberian klorinasi pada bakteri. Sehingga dapat digunakan dalam pengambilan kebijakan untuk mengatasi penyebaran penyakit kolera.
2. Bagi akademis, penelitian ini dapat digunakan sebagai pembelajaran mengenai penerapan prinsip minimum potryagin dalam memperoleh kontrol optimal dari model dinamika penyebaran penyakit kolera.

## **1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir**

Sistematika penulisan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. **BAB I PENDAHULUAN**  
Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan penulisan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan.
2. **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**  
Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan, serta untuk membantu memahami permasalahan yang akan dibahas.
3. **BAB III METODOLOGI**  
Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan penulisan.
4. **BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**  
Bab ini menjelaskan secara detail mengenai hasil penelitian.
5. **BAB V KESIMPULAN DAN SARAN**  
Bab ini menjelaskan tentang penarikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.



## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan, serta untuk membantu memahami permasalahan yang akan dibahas.

#### **2.1 Kolera**

Sejak tahun 1917 dikenal tujuh pandemik yang penyebarannya mencapai Eropa. Pandemi ke-7 dimulai pada tahun 1961 ketika bakteri *Vibrio Cholerae* pertama kali muncul di Sulawesi, Indonesia yang menyebabkan epidemik kolera. Kemudian penyakit tersebut menyebar dengan cepat ke Negara Asia Timur lainnya dan mencapai Bangladesh pada tahun 1963, India pada tahun 1964, Uni Soviet Iran dan Iraq pada tahun 1965-1966. Kolera adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh *Vibrio Cholerae* [3].

Bakteri *Vibrio Cholerae* dapat masuk ke dalam tubuh melalui makanan atau minuman yang terkontaminasi. Bakteri tersebut mengeluarkan enterotoksin (racun) pada saluran usus sehingga terjadi diare disertai muntah akut. Seseorang yang sudah terinfeksi bakteri *Vibrio Cholerae* dalam beberapa hari akan kehilangan banyak cairan tubuh dan masuk pada kondisi dehidrasi [3].

Jika kondisi dehidrasi tidak segera ditangani, maka berlanjut ke tahap yang lebih serius bahkan dapat menyebabkan kematian. Air berperan utama dalam penularan korea, namun pada epidemik yang besar penularan juga terjadi melalui makanan yang terkontaminasi oleh tinja atau air yang mengandung bakteri, khususnya pada kolera El Tor, yang dapat bertahan selama beberapa bulan di air [3].

Tindakan pencegahan dan pengendalian yang efektif dan terbukti untuk kolera tergantung pada penyediaan layanan kesehatan lingkungan yang memadai, seperti air minum yang aman, peningkatan akses ke sanitasi yang aman dan tindakan kebersihan kesehatan. Ketersediaan vaksin kolera oral

menawarkan harapan untuk pencegahan dan pengendalian kolera, terutama dalam situasi di mana langkah-langkah kesehatan masyarakat konvensional lainnya, seperti meningkatkan akses ke air bersih dan sanitasi, tidak dapat ditingkatkan dengan cepat karena konflik atau faktor lingkungan lainnya [1].

## 2.2 Penelitian Terdahulu

Banyak penelitian yang mengembangkan model dinamika penyebaran penyakit kolera dengan kontrol optimal, diantaranya adalah "*Peran Edukasi dan Klorinasi Dalam Pengendalian Penyakit Menular: Sebuah Pendekatan Kontrol Optimum*" [7]. Peran edukasi dalam penelitian [7] dibagi menjadi dua yaitu edukasi yang bertujuan mengubah perilaku individu rentan dan terinfeksi serta mengubah perilaku individu terinfeksi terhadap perilaku sekitar, sedangkan klorin dalam penelitian ini yaitu penggunaan desinfeksi yang diyakini efektif membunuh bakteri patogen sehingga dapat mengurangi penyebaran bakteri.

Selanjutnya "*An Epidemic Model for Cholera with Optimal Control Treatment*" [8]. Dalam penelitian tersebut membahas tentang model penyebaran penyakit kolera dengan memberikan satu kontrol berupa treatment (pengobatan) yang dilakukan pada populasi orang yang dikarantina dan mengasumsikan bahwa individu terinfeksi yang menjalani perawatan tetap dikarantina selama periode tertentu. Selanjutnya "*Model Penyebaran Penyakit kolera Dengan Pemberian Kontrol Optimal Berupa Pengobatan Dan Intervensi*" [6]. Dalam model [6] digunakan model tipe SEIQR dan subpopulasinya dibagi menjadi enam kelas yaitu subpopulasi individu rentan, subpopulasi terdidik, subpopulasi terinfeksi gejala ringan, subpopulasi gejala berat, subpopulasi yang sedang dalam pengobatan karantina dan subpopulasi yang telah pulih.

## 2.3 Model Sistem Dinamik Penyebaran Penyakit Kolera

Berdasarkan model yang telah dikembangkan pada penelitian [6] model sistem dinamik penyebaran penyakit kolera terbagi

menjadi enam subpopulasi manusia dan satu subpopulasi bakteri *Vibrio Cholerae*. Berikut adalah model sistem dinamik penyebaran penyakit kolera dengan tiga kontrol yaitu  $u_1(t)$  (perbaikan sanitasi),  $u_2(t)$  (pengobatan karantina),  $u_3(t)$  (pemberian edukasi mengenai kolera) [6].

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda + vR(t) + \epsilon E(t) - \mu S(t) - u_3(t)\psi S(t) - (1 - u_1(t))\frac{\beta B(t)}{\kappa + B(t)}S(t) \quad \dots (2.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = u_3(t)\psi S(t) - \epsilon E(t) - \mu E(t) - (1 - u_1(t))\gamma E(t) \quad \dots (2.2)$$

$$\frac{dI_A}{dt} = (1 - u_1(t))p\frac{\beta B(t)}{\kappa + B(t)}S(t) + (1 - u_1(t))p\gamma E(t) - \mu I_A(t) - \alpha_2 I_A(t) \quad \dots (2.3)$$

$$\frac{dI_S}{dt} = (1 - u_1(t))(1 - p)\frac{\beta B(t)}{\kappa + B(t)}S(t) + (1 - u_1(t))(1 - p)\gamma E(t) - \mu I_S(t) - \mu_S I_S(t) - u_2(t)\delta I_S(t), \quad \dots (2.4)$$

$$\frac{dQ}{dt} = u_2(t)\delta I_S(t) - \mu Q(t) - \mu_Q Q(t) - \alpha_1 Q(t), \quad \dots (2.5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha_1 Q(t) + \alpha_2 I_A(t) - \mu R(t) - vR(t), \quad \dots (2.6)$$

$$\frac{dB}{dt} = \eta I_A(t) + \eta I_S(t) - dB(t), \quad \dots (2.7)$$

dengan variabel sebagai berikut :

$S(t)$  : subpopulasi manusia yang rentan terinfeksi kolera pada saat t.

$E(t)$  : subpopulasi manusia yang terdidik terhadap kolera pada saat t.

$I_A(t)$  : subpopulasi manusia yang terinfeksi penyakit kolera dengan gejala ringan pada saat t.

$I_S(t)$  : subpopulasi manusia yang terinfeksi penyakit kolera

dengan gejala berat pada saat  $t$ .

$Q(t)$  : subpopulasi manusia yang sedang dalam pengobatan melalui karantina pada saat  $t$ .

$R(t)$  : subpopulasi manusia yang telah pulih pada saat  $t$ .

$B(t)$  : mencerminkan konsentrasi bakteri pada saat  $t$ .

dan parameter sebagai berikut :

$\Lambda$  : tingkat penambahan individu ke dalam subpopulasi rentan

$\mu$  : tingkat kematian alami

$\beta$  : tingkat konsumsi bakteri melalui sumber yang terkontaminasi

$\kappa$  : setengah saturasi konstan dari subpopulasi bakteri

$\frac{\beta B(t)}{\kappa + B(t)}$  : tingkat perpindahan dari subpopulasi yang rentan menjadi subpopulasi yang terinfeksi kolera, dikarenakan terjadi kontak antara individu yang terinfeksi terhadap sumber yang terkontaminasi.

$\psi$  : tingkat subpopulasi individu rentan yang terdidik

$\epsilon$  : tingkat subpopulasi individu terdidik berhenti mengikuti tindakan pencegahan

$\gamma$  : tingkat subpopulasi terdidik (sangat kecil) mengidap penyakit kolera

$p$  : proporsi subpopulasi individu terinfeksi gejala ringan

$1 - p$  : proporsi subpopulasi individu terinfeksi gejala berat

$\alpha_1$  : tingkat kesembuhan subpopulasi individu yang terinfeksi gejala berat

$\alpha_2$  : tingkat kesembuhan subpopulasi individu yang terinfeksi gejala ringan

$\delta$  : tingkat waktu individu yang dikarantina

- $\mu_S$  : tingkat kematian individu yang terinfeksi gejala berat  
 $\mu_Q$  : tingkat kematian individu yang dikarantina  
 $v$  : tingkat hilangnya kekebalan individu yang pulih sehingga menjadi rentan kembali  
 $\eta$  : tingkat konsentrasi pertumbuhan bakteri karena individu yang terinfeksi melepaskan kembali bakteri *Vibrio Cholerae* ke lingkungan akuatik  
 $d$  : tingkat kematian bakteri yang mengakibatkan konsentrasi bakteri menurun

#### 2.4 Kendali Optimal

Pada umumnya masalah kontrol optimal bertujuan untuk mencari kontrol  $u(t)$  yang akan diproses dalam sistem dinamik dan dapat mengoptimalkan indeks performansi [11]. Adapun masalah formulasi kendali optimal terdiri dari:

1. Mendeskripsikan secara matematis dari model (dalam bentuk variabel *state*).
2. Menentukan fungsi objektif (*performance index*).
3. Menentukan kendala dan kondisi batas yang harus dipenuhi.

Fungsi objektif (*performance index*) dapat diformulasikan sebagai berikut :

$$J(u(t)) = S(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2.8)$$

dengan kendala:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.9)$$

dan kondisi batas  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  dan  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ ,  $t_0$  dan  $t_f$  masing-masing adalah waktu awal dan akhir.  $S, V$ , dan  $f$  adalah fungsi skalar.



Serta kontrol  $u^*(t)$  merupakan kontrol optimal, jika disubstitusikan ke dalam sistem (2.9) akan memperoleh keadaan yang optimal  $x^*(t)$  dan pada saat yang sama juga dapat mengoptimalkan indeks performansi (2.8).

## 2.5 Prinsip Minimum Pontryagin

Pada proposal Tugas Akhir ini digunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Metode ini digunakan untuk memperoleh penyelesaian kendali optimal yang sesuai dengan tujuan, yaitu meminimumkan fungsi tujuan dimana kendali  $u(t)$  terbatas pada  $u(t) \in \mathcal{U}$ . Hal ini telah dikembangkan oleh L.S. Pontryagin dan rekan kerjanya pada tahun 1950 yang diaplikasikan untuk semua masalah kalkulus variasi. Oleh karena itu, prinsip ini biasa disebut dengan Prinsip Minimum Pontryagin.

Prinsip ini menyatakan secara informal bahwa persamaan Hamiltonian akan diminimumkan sepanjang  $\mathcal{U}$  yang merupakan himpunan kendali yang mungkin. Secara umum langkah-langkah penyelesaian kendali optimal dapat diuraikan sebagai berikut [11]:

1. Bentuk fungsi Pontryaginnya (Hamilton)

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda(t) f(x(t), u(t), t) \quad \dots (2.10)$$

2. Meminimumkan  $H$  terhadap semua vektor kendali  $u(t)$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \dots (2.11)$$

dan diperoleh,

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t) \quad \dots (2.12)$$

3. Gunakan hasil dari langkah (2) ke dalam langkah (1) dan tentukan  $H^*$  yang optimal

$$H^*(\mathbf{x}^*(t), h(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = h(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) \quad \dots (2.13)$$

4. Selesaikan persamaan state dan costate

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = + \left( \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) \text{ dan } \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad \dots (2.14)$$

Dengan kondisi awal  $x_0$  dan kondisi akhir

$$\left[ H^* + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right)_* - \boldsymbol{\lambda}^*(t) \right]_{t_f}' \delta \mathbf{x}_f = 0, \quad \dots (2.15)$$

5. Untuk memperoleh kendali optimal, substitusikan solusi  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$  dari langkah (4) ke dalam ekspresi optimal  $u^*$  kendali pada langkah (2).

## 2.6 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi. Bentuk umum dari metode Runge-Kutta adalah [12],[14],[15]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \dots (2.16)$$

dengan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  adalah tetapan,

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k_2 = hf \left( t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

$$k_3 = hf \left( t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 \right)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3)$$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n}$$

dengan  $h$  adalah panjang interval,  $t_0$  dan  $t_f$  adalah waktu awal dan akhir. Nilai  $k$  menunjukkan hubungan yang berurutan, karena  $k_1$  muncul dalam persamaan untuk menghitung  $k_2$ , dan juga  $k_2$  muncul dalam persamaan untuk menghitung  $k_3$  dan seterusnya.

## **BAB III METODE PENELITIAN**

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir. Dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

### **3.1 Langkah Pengerjaan**

Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

#### **1. Studi Literatur**

Kegiatan ini dilakukan dengan mencari materi penunjang dari buku, jurnal, paper, artikel dan lain sebagainya. Bahan-bahan yang dikaji meliputi kolera, model matematika penyebaran penyakit kolera, teori sistem kendali, Prinsip Minimum Pontryagin, dan metode Runge-Kutta

#### **2. Model Matematika**

Pada tahap ini, model matematika penyakit kolera yang digunakan mengkaji dari penelitian sebelumnya dengan modifikasi penambahan kontrol berupa pemberian klorin dan menentukan fungsi tujuan serta kondisi batas. Sehingga dalam tugas akhir ini total variabel kontrol berjumlah empat antara lain perbaikan sanitasi, karantina, edukasi dan pemberian klorin pada bakteri.

#### **3. Menyelesaikan Masalah Kontrol Optimal**

Pada tahap ini, akan diselesaikan masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Membentuk fungsi Hamilton
2. Menentukan persamaan state dan co-state
3. Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi
4. Menentukan pengendali optimal

## 5. Simulasi

### 4. **Simulasi**

Pada tahap ini, sistem persamaan disimulasikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta dengan software MATLAB untuk melihat perilaku sistem pada grafik yang dihasilkan oleh model penyebaran penyakit kolera sebelum dan setelah diberi kontrol.

### 5. **Analisis Hasil Simulasi**

Pada tahap ini, penulis melakukan analisis terhadap hasil yang diperoleh dari langkah 4.

### 6. **Penarikan Kesimpulan dan Saran**

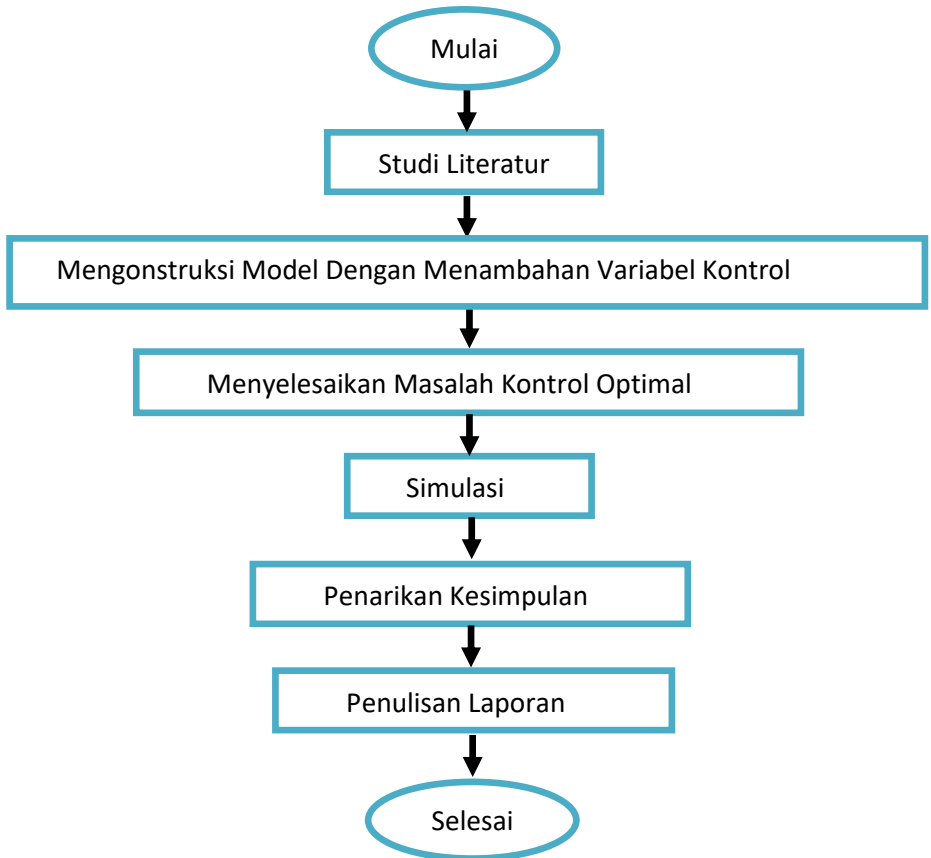
Pada tahap ini, akan ditarik kesimpulan dari penelitian yang telah dikerjakan. Serta member sebuah saran untuk penelitian ini dapat dikembangkan mejadi lebih baik lagi.

### 7. **Penulisan Laporan**

Pada tahap terakhir ini, akan disusun sebuah laporan tentang hasil dari penelitian yang telah dikerjakan secara runtut dan teratur.

### 3.2 Diagram Alur Penelitian

Alur penelitian yang dilakukan dalam Tugas Akhir ini disajikan dalam **Gambar 3.1** berikut ini.



**Gambar 3.1** Diagram Alur Penelitian



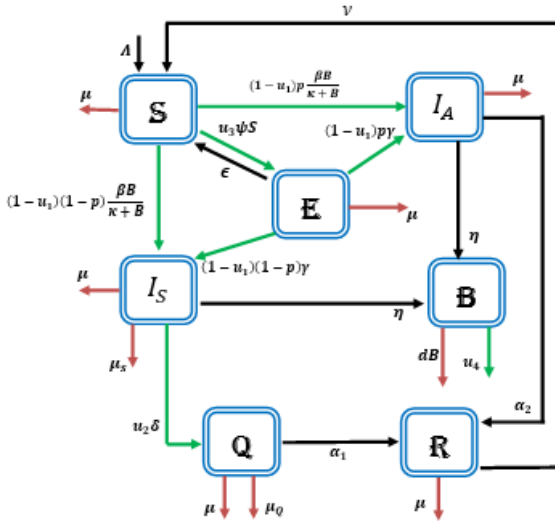
## BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai rekonstruksi model matematika penyebaran penyakit kolera dengan kontrol optimal. Kontrol optimal meliputi perbaikan sanitasi, karantina untuk individu yang terinfeksi gejala berat, edukasi untuk individu rentan, dan pemberian klorin pada bakteri. Selanjutnya, dijelaskan tentang permasalahan kontrol optimal berupa penentuan sistem dinamik, fungsi tujuan serta kondisi batas kemudian diselesaikan menggunakan *Pontryagin Minimum Principle* serta diakhiri dengan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta dan simulasi model menggunakan software Matlab.

### 4.1 Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera dengan Kontrol Optimal

Model matematika yang digunakan pada penelitian ini mengkaji dari penelitian [6] dengan modifikasi penambahan variable control berupa klorinasi ( $u_4$ ) pada bakteri. Model dibangun oleh dua populasi yaitu populasi manusia dan populasi bakteri. Populasi manusia dibagi menjadi enam kelas yaitu subpopulasi individu rentan ( $S(t)$ ), individu terdidik/teredukasi ( $E(t)$ ), individu terinfeksi dengan gejala ringan ( $I_A(t)$ ), individu terinfeksi dengan gejala berat ( $I_S(t)$ ), individu yang dikarantina ( $Q(t)$ ), individu yang sembuh ( $R(t)$ ). Interpretasi model matematika ke dalam diagram kompartemen dapat dilihat pada Gambar 4.1. Tanda panah berwarna hijau menunjukkan adanya upaya pemberian kontrol optimal serta panah berwarna merah menyatakan parameter yang mengakibatkan berkurangnya subpopulasi karena adanya kematian.





Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Kolera

Berdasarkan diagram kompartemen, maka model matematika penyebaran penyakit kolera dapat disajikan dalam sistem Persamaan Diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda + vR + \epsilon E - \mu S - u_3 \psi S - (1 - u_1) \frac{\beta B}{\kappa + B} S \quad \dots (4.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = u_3 \psi S - \epsilon E - \mu E - (1 - u_1) \gamma E \quad \dots (4.2)$$

$$\frac{dI_A}{dt} = (1 - u_1) p \frac{\beta B}{\kappa + B} S + (1 - u_1) p \gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \quad \dots (4.3)$$

$$\frac{dI_S}{dt} = (1 - u_1) (1 - p) \frac{\beta B}{\kappa + B} S + (1 - u_1) (1 - p) \gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - u_2 \delta I_S \quad \dots (4.4)$$

$$\frac{dQ}{dt} = u_2 \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \quad \dots (4.5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - vR \quad \dots (4.6)$$

$$\frac{dB}{dt} = \eta I_A + \eta I_S - dB - u_4 B \quad \dots (4.7)$$

Adapun notasi serta definisi dari variabel dan masing-masing parameter yang digunakan pada model matematika penyebaran penyakit kolera tertera pada tabel di bawah ini:

**Tabel 4.1** Variabel pada Model Matematika Penyebaran Penyakit kolera

Variabel	Keterangan
$S(t)$	Jumlah individu yang rentan terinfeksi penyakit kolera pada waktu $t$
$E(t)$	Jumlah individu yang mengikuti edukasi terhadap penyakit kolera pada waktu $t$
$I_A(t)$	Jumlah individu yang terinfeksi penyakit kolera dengan gejala ringan pada waktu $t$
$I_S(t)$	Jumlah individu yang terinfeksi penyakit kolera dengan gejala berat pada waktu $t$
$Q(t)$	Jumlah individu yang sedang dalam pengobatan melalui karantina pada waktu $t$
$R(t)$	Jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit kolera dan diasumsikan resisten terhadap penyakit pada waktu $t$ ,
$B(t)$	Jumlah bakteri <i>Vibrio Cholerae</i> pada waktu $t$

**Tabel 4.2** Parameter pada Model Matematika Penyebaran Penyakit kolera

Parameter	Keterangan
$\Lambda$	<i>Rate</i> penambahan individu subpopulasi rentan
$\mu$	<i>Rate</i> kematian alami
$\beta$	<i>Rate</i> konsumsi bakteri melalui sumber yang terkontaminasi
$\kappa$	Setengah saturasi konstan dari subpopulasi bakteri
$\frac{\beta B(t)}{\kappa + B(t)}$	<i>Rate</i> transmisi dari subpopulasi rentan menjadi subpopulasi yang terinfeksi kolera
$\psi$	<i>Rate</i> subpopulasi individu rentan yang terdidik
$\epsilon$	<i>Rate</i> subpopulasi individu tereduksi berhenti mengikuti tindakan pencegahan
$\gamma$	<i>Rate</i> subpopulasi terdidik (sangat kecil) mengidap penyakit kolera
$p$	Proporsi subpopulasi individu terinfeksi gejala ringan
$1 - p$	Proporsi subpopulasi individu terinfeksi gejala berat
$\alpha_1$	<i>Rate</i> penyembuhan subpopulasi individu yang terinfeksi gejala berat
$\alpha_2$	<i>Rate</i> penyembuhan subpopulasi individu yang terinfeksi gejala ringan
$\delta$	<i>Rate</i> waktu individu yang dikarantina
$\mu_S$	<i>Rate</i> kematian individu yang terinfeksi gejala berat
$\mu_Q$	<i>Rate</i> kematian individu yang dikarantina
$v$	<i>Rate</i> hilangnya kekebalan individu yang telah pulih sehingga menjadi rentan kembali
$\eta$	<i>Rate</i> peningkatan konsentrasi bakteri karena kontribusi dari individu yang terinfeksi
$d$	<i>Rate</i> kematian bakteri

Karena  $S, E, I_A, I_S, Q$  dan  $R$  merupakan notasi yang menyatakan jumlah individu pada masing-masing subpopulasi, maka diasumsikan  $S, E, I_A, I_S, Q, R \geq 0$ . Selain itu, untuk setiap parameter diasumsikan selalu bernilai positif.

#### 4.4 Permasalahan Kontrol Optimal

Permasalahan kontrol optimal pada penelitian ini diselesaikan menggunakan empat variabel control. Tujuan dari upaya pemberian kontrol optimal ini untuk meminimumkan jumlah populasi manusia terinfeksi dan populasi bakteri serta meminimumkan biaya yang dikeluarkan untuk perbaikan sanitasi, penggunaan klorin, pemberian edukasi dan karantina. Selain itu, dalam bab ini akan dijelaskan mengenai model matematika dari sistem yang dikontrol, fungsi tujuan serta kondisi batas.

##### 4.2.1. Model Sistem Dinamik

Diketahui berdasarkan model sistem dinamik pada penyebaran penyakit kolera dapat dinyatakan secara matematis melalui Persamaan (2.9) sebagai berikut,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

dengan variabel *state* sebagai berikut,

$$\mathbf{x}(t) = (S(t), E(t), I_A(t), I_S(t), Q(t), R(t), B(t))^T,$$

dengan keadaan (*state*) awal  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Sehingga, model sistem dinamik pada penyebaran penyakit kolera dengan kontrol optimal seperti pada Persamaan (4.1) – (4.7).

##### 4.2.2 Fungsi Tujuan

Tujuan dalam permasalahan penelitian ini adalah untuk memperoleh kontrol optimal dengan meminimumkan jumlah populasi manusia terinfeksi dan populasi bakteri serta

meminimumkan biaya yang dikeluarkan untuk perbaikan sanitasi, penggunaan klorin, pemberian edukasi dan karantina. Secara matematis, tujuan kontrol optimal dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi objektif (*performance index*) sebagai berikut

$$\min J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_4 u_1^2(t) + C_5 u_2^2(t) + C_6 u_3^2(t) + C_7 u_4^2(t)] dt \quad \dots (4.8)$$

dengan  $t_0$  adalah waktu awal dan  $t_f$  adalah waktu akhir yang telah ditetapkan, serta  $C_i$  adalah parameter bobot atau koefisien harga yang dikeluarkan pada setiap kontrol selama periode hari, dimana  $C_i > 0$  untuk setiap  $i = 1,2,3,4,5,6,7$ .

### 4.2.3 Kondisi Batas Sistem

Tipe permasalahan kontrol optimal dari penelitian ini yaitu *fixed-final time* ( $t_f$ ) dengan kondisi  $0 < t < t_f$  dan *free-final state* ( $x(t_f)$ ) pada waktu awal ( $x(t_0)$ ) sudah ditetapkan dan *state* pada waktu akhir ( $x(t_f)$ ) tidak ditetapkan. Sehingga, setiap sistem yang ada menggunakan kondisi batas *state* pada kondisi awal sebagai berikut

$$S(t_0) = S_0, E(t_0) = E_0, I_A(t_0) = I_{A_0}, I_S(t_0) = I_{S_0}, \\ Q(t_0) = Q_0, R(t_0) = R_0, B(t_0) = B_0$$

Kondisi batas yang memenuhi pada tipe *fixed-final time* dan *free-final state* yaitu sebagai berikut

$$x(t_0) = x_0, \lambda^*(t_f) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{*t_f},$$

dengan  $x_0 = \{S_0, E_0, I_{A_0}, I_{S_0}, Q_0, R_0, B_0\}$ .

*Fixed-final time* artinya waktu akhir penelitian ini *fixed* atau tidak ada variasi waktu sehingga  $\delta t_f = 0$  dan *free-final state* artinya *state* diwaktu akhir tidak ditentukan berarti terdapat variasi *state* diwaktu akhir sehingga  $\delta x_f \neq 0$ . Oleh sebab itu, Persamaan (2.15) dapat didefinisikan menjadi

$$\left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f} \delta x_f = 0$$

Sehingga, pembuat nolnya adalah  $\left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]'_{t_f}$ .

Selanjutnya, sesuai dengan Persamaan (2.8) fungsi tujuan pada Persamaan (4.8) tidak mengandung Persamaan Meyer. Sehingga, Persamaan Meyer dianggap sama dengan nol dan diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda^*(t_f) &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{*t_f}, \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} 0 \right)_{*t_f}, \\ &= 0, \end{aligned}$$

dengan  $\lambda^*(t_f) = 0$  merupakan kondisi transversalitas. Oleh karena itu, diperoleh *costate* pada waktu akhir ( $\lambda^*(t_f)$ ) sama dengan nol. Jadi setiap sistem yang ada pada persamaa ini diinisialisasikan dengan kondisi batas *costate* pada waktu akhir sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lambda_S^*(t_f) &= 0, \quad \lambda_E^*(t_f) = 0, \quad \lambda_{I_A}^*(t_f) = 0, \quad \lambda_{I_S}^*(t_f) = 0, \\ \lambda_Q^*(t_f) &= 0, \quad \lambda_R^*(t_f) = 0, \quad \lambda_B^*(t_f) = 0 \end{aligned}$$

#### 4.4 Penyelesaian Kontrol Optimal

Berdasarkan penjelasan pada subbab 4.2.1 – 4.2.3, telah diketahui model sistem dinamik pada penyebaran penyakit kolera dengan kontrol optimal, fungsi tujuan serta kondisi batas. Selanjutnya, permasalahan kontrol optimal tersebut dapat diselesaikan dengan beberapa langkah sebagai berikut,

1. Membentuk fungsi Pontryagin

Berdasarkan Persamaan (2.10) permasalahan pada penelitian ini dapat disusun kedalam Persamaan sebagai berikut untuk menentukan  $H^*$  yang optimal,

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \left( C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_4 u_1^2(t) + \right. \\
 & C_5 u_2^2(t) + C_6 u_3^2(t) + C_7 u_4^2(t) \left. \right) + \lambda_S \left( \Lambda + vR + \right. \\
 & \epsilon E - \mu S - u_3 \psi S - (1 - u_1) \frac{\beta B}{\kappa + B} S \left. \right) + \lambda_E \left( u_3 \psi S - \right. \\
 & \epsilon E - \mu E - (1 - u_1) \gamma E \left. \right) + \lambda_{I_A} \left( (1 - u_1) p \frac{\beta B}{\kappa + B} S + \right. \\
 & (1 - u_1) p \gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \left. \right) + \lambda_{I_S} \left( (1 - u_1) (1 - \right. \\
 & p) \frac{\beta B}{\kappa + B} S + (1 - u_1) (1 - p) \gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - \\
 & \left. u_2 \delta I_S \right) + \lambda_Q \left( u_2 \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \right) + \\
 & \lambda_R \left( \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - vR \right) + \lambda_B \left( \eta I_A + \eta I_S - dB - \right. \\
 & \left. u_4 B \right) \quad \dots (4.9)
 \end{aligned}$$

2. Meminimumkan  $H$  terhadap  $u$

Persamaan kontrol optimal dapat diperoleh dengan melakukan penurunan  $H$  terhadap masing-masing variabel kontrol optimal yaitu perbaikan sanitasi ( $u_1$ ), pengobatan melalui karantina ( $u_2$ ), edukasi ( $u_3$ ), dan pemberian klorin ( $u_4$ ). Persamaan  $H$  diturunkan terhadap  $u_1$  yaitu sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u_1} &= 0 \\
C_4 u_1 + \lambda_S \frac{\beta B}{\kappa+B} S + \lambda_E \gamma E - \lambda_{IA} p \frac{\beta B}{\kappa+B} S - \lambda_{IA} p \gamma E - \\
\lambda_{IS} (1-p) \frac{\beta B}{\kappa+B} S - \lambda_{IS} (1-p) \gamma E &= 0 \\
C_4 u_1 &= -\lambda_S \frac{\beta B}{\kappa+B} S - \lambda_E \gamma E + \lambda_{IA} p \frac{\beta B}{\kappa+B} S + \lambda_{IA} p \gamma E + \\
&\quad \lambda_{IS} (1-p) \frac{\beta B}{\kappa+B} S + \lambda_{IS} (1-p) \gamma E \\
u_1^* &= \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa+B} S (p \lambda_{IA} + \lambda_{IS} (1-p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{IA} p + \right. \\
&\quad \left. \lambda_{IS} (1-p) - \lambda_E) \right) \quad \dots (4.10)
\end{aligned}$$

Berikutnya,  $H$  diturunkan terhadap  $u_2$  yaitu sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u_2} &= 0 \\
C_5 u_2 - \lambda_{IS} \delta I_S + \lambda_Q \delta I_S &= 0 \\
u_2^* &= \frac{\delta I_S (\lambda_{IS} - \lambda_Q)}{C_5} \quad \dots (4.11)
\end{aligned}$$

Berikutnya,  $H$  diturunkan terhadap  $u_3$  yaitu sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u_3} &= 0 \\
C_6 u_3 - \lambda_S \psi S + \lambda_E \psi S &= 0 \\
u_3^* &= \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \quad \dots (4.12)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menurunkan  $H$  terhadap  $u_4$  yaitu sebagai berikut,

$$\frac{\partial H}{\partial u_4} = 0$$



$$\begin{aligned}
 C_6 u_4 - \lambda_B B &= 0 \\
 u_4^* &= \frac{\lambda_B B}{C_7} \quad \dots (4.13)
 \end{aligned}$$

Persamaan kontrol optimal yang diperoleh pada Persamaan (4.10 – 4.13) merupakan suatu proporsi, maka didefinisikan  $0.001 \leq u_1 \leq 0.4$ ,  $0 \leq u_2 \leq 1$ ,  $0 \leq u_3 \leq 1$ , dan  $0 \leq u_4 \leq 1$  diperoleh beberapa kemungkinan hasil nilai  $u_1^*$ ,  $u_2^*$ ,  $u_3^*$  dan  $u_4^*$ . diasumsikan

$$\begin{aligned}
 u_1^* &= \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S (p \lambda_{IA} + \lambda_{IS}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{IA} p + \right. \\
 &\quad \left. \lambda_{IS}(1-p) - \lambda_E) \right) \\
 &= z
 \end{aligned}$$

Maka,

$$u_1^* = \begin{cases} z, & \text{jika } 0.001 < z < 0.4 \\ 0.001, & \text{jika } z \leq 0.001 \\ 0.4, & \text{jika } z \geq 0.4 \end{cases}$$

$$u_2^* = \begin{cases} \frac{\delta I_S (\lambda_{IS} - \lambda_Q)}{C_5}, & \text{jika } 0 < \frac{\delta I_S (\lambda_{IS} - \lambda_Q)}{C_5} < 1 \\ 0, & \text{jika } \frac{\delta I_S (\lambda_{IS} - \lambda_Q)}{C_5} \leq 0 \\ 1, & \text{jika } \frac{\delta I_S (\lambda_{IS} - \lambda_Q)}{C_5} \geq 1 \end{cases}$$

$$u_3^* = \begin{cases} \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{C_6}, & \text{jika } 0 < \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} < 1 \\ 0, & \text{jika } \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \leq 0 \\ 1, & \text{jika } \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \geq 1 \end{cases}$$

$$u_4^* = \begin{cases} \frac{\lambda_B B}{C_7}, & \text{jika } 0 < \frac{\lambda_B B}{C_7} < 1 \\ 0, & \text{jika } \frac{\lambda_B B}{C_7} \leq 0 \\ 1, & \text{jika } \frac{\lambda_B B}{C_7} \geq 1 \end{cases}$$

Sehingga, dari beberapa kemungkinan hasil nilai  $u_1^*$ ,  $u_2^*$ ,  $u_3^*$  dan  $u_4^*$  maka nilai pengontrol yang optimal adalah

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S (p\lambda_{I_A} + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \quad \dots (4.14)$$

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \right\}, 1 \right\} \quad \dots (4.15)$$

$$u_3^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\} \quad \dots (4.16)$$

$$u_4^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_B B}{C_7} \right\}, 1 \right\} \quad \dots (4.17)$$

### 3. Menentukan $H^*$ yang optimal

Persamaan kontrol optimal yang diperoleh pada Persamaan (4.14 – 4.17) disubstitusikan kedalam Persamaan (4.9) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} H^* = & \frac{1}{2} \left( C_1 I_S^2(t) + C_2 I_A^2(t) + C_3 B^2(t) + C_4 (u_1^*)^2(t) + \right. \\ & \left. C_5 (u_2^*)^2(t) + C_6 (u_3^*)^2(t) + C_7 (u_4^*)^2(t) \right) + \\ & \lambda_S \left( \Lambda + \nu R + \epsilon E - \mu S - u_3^* \psi S - (1 - u_1^*) \frac{\beta B}{\kappa + B} S \right) + \\ & \lambda_E (u_3^* \psi S - \epsilon E - \mu E - (1 - u_1^*) \gamma E) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{I_A} \left( (1 - u_1^*) p \frac{\beta B}{\kappa + B} S + (1 - u_1^*) p \gamma E - \mu I_A - \right. \\
& \left. \alpha_2 I_A \right) + \lambda_{I_S} \left( (1 - u_1^*) (1 - p) \frac{\beta B}{\kappa + B} S + \right. \\
& \left. (1 - u_1^*) (1 - p) \gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - u_2^* \delta I_S \right) + \\
& \lambda_Q (u_2^* \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q) + \lambda_R (\alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \\
& \mu R - \nu R) + \lambda_B (\eta I_A + \eta I_S - dB - u_4^* B) \quad \dots (4.18)
\end{aligned}$$

#### 4. Membentuk Persamaan *state*

Persamaan *state* dalam kondisi optimal diperoleh dengan cara menurunkan fungsi Pontryagin  $H^*$  yang sudah optimal terhadap  $\lambda$  dapat dinyatakan secara matematis melalui Persamaan (2.14) seperti berikut ini.

$$\dot{x}^*(t) = \left( \frac{\partial H^*}{\partial \lambda} \right) \quad \dots (4.19)$$

Berdasarkan Persamaan (4.19) sehingga diperoleh Persamaan *state* untuk setiap subpopulasi sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\dot{S}^* &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_S} \\
&= \Lambda + \nu R + \epsilon E - \mu S - u_3^* \psi S - (1 - u_1^*) \frac{\beta B}{\kappa + B} S \\
&= \Lambda + \nu R + \epsilon E - \mu S - \left( \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{c_6} \right) \psi S - \left( 1 - \right. \\
& \left. \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S (p \lambda_{I_A} + \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{I_A} p + \right. \right. \\
& \left. \left. \lambda_{I_S} (1 - p) - \lambda_E) \right) \right) \frac{\beta B}{\kappa + B} S
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.10) dan (4.12),  $u_1^*$  dan  $u_3^*$  mempunyai beberapa kemungkinan hasil nilai, maka nilai pengontrol yang optimal seperti pada Persamaan (4.14). sehingga Persamaan *state* subpopulasi individu rentan dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{S}^* = & \Lambda + \nu R + \epsilon E - \mu S - \\ & \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\Psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\} \right) \Psi S - \left( 1 - \right. \\ & \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S (p \lambda_{IA} + \lambda_{IS} (1 - p) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \lambda_S \right) + \gamma E (\lambda_{IA} p + \lambda_{IS} (1 - p) - \lambda_E) \right\} \right\}, 0.4 \right\} \right) \frac{\beta B}{\kappa + B} S \\ & \dots(4.20) \end{aligned}$$

Persamaan *state* subpopulasi individu terdidik dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{E}^* &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_E} \\ &= u_3^* \Psi S - \epsilon E - \mu E - (1 - u_1^*) \gamma E \\ &= \left( \frac{\Psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right) \Psi S - \epsilon E - \mu E - \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S (p \lambda_{IA} + \right. \right. \\ & \left. \left. \lambda_{IS} (1 - p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{IA} p + \lambda_{IS} (1 - p) - \right. \right. \\ & \left. \left. \lambda_E) \right) \right) \gamma E \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.10) dan (4.12),  $u_1^*$  dan  $u_3^*$  mempunyai beberapa kemungkinan hasil nilai, maka nilai

pengontrol yang optimal seperti pada Persamaan (4.14) dan (4.16). sehingga Persamaan state subpopulasi individu terdidik dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{E}^* = & \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\Psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\} \right) \Psi S - \epsilon E - \mu E - \\ & \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S(p\lambda_{I_A} + \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1-p) - \\ & \left. \left. \left. \left. \lambda_E) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) \gamma E \quad \dots (4.21) \end{aligned}$$

Persamaan *state* subpopulasi individu terinfeksi dengan gejala ringan dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{I}_A^* = & \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{I_A}} \\ = & (1 - u_1^*)p \frac{\beta B}{\kappa + B} S + (1 - u_1^*)p\gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \\ = & \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S(p\lambda_{I_A} + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_E) \right) \right) p \frac{\beta B}{\kappa + B} S + \\ & \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S(p\lambda_{I_A} + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_E) \right) \right) p\gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.10),  $u_1^*$  mempunyai beberapa kemungkinan hasil nilai, maka nilai pengontrol yang optimal seperti pada Persamaan (4.14). sehingga

Persamaan *state* subpopulasi individu terinfeksi dengan gejala ringan dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 I_A^* = & \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa+B} S (p\lambda_{I_A} + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S}(1-p) - \\
 & \left. \left. \left. \left. \lambda_E \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) p \frac{\beta B}{\kappa+B} S + \\
 & \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa+B} S (p\lambda_{I_A} + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S}(1-p) - \\
 & \left. \left. \left. \left. \lambda_E \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) p \gamma E - \mu I_A - \alpha_2 I_A \quad \dots(4.22)
 \end{aligned}$$

Persamaan *state* subpopulasi individu terinfeksi dengan gejala berat dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 I_S^* &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{I_S}} \\
 &= (1 - u_1^*)(1-p) \frac{\beta B}{\kappa+B} S + (1 - u_1^*)(1-p) \gamma E - \mu I_S - \\
 & \quad \mu_S I_S - u_2^* \delta I_S \\
 &= \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa+B} S (p\lambda_{I_A} + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \gamma E (\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_E) \right) \right) (1-p) \frac{\beta B}{\kappa+B} S + \\
 & \quad \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa+B} S (p\lambda_{I_A} + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_E)) \Big) (1-p)\gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - \left( \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \right) \delta I_S$$

Berdasarkan Persamaan (4.10) dan (4.11),  $u_1^*$  dan  $u_2^*$  mempunyai beberapa kemungkinan hasil nilai, maka nilai pengontrol yang optimal seperti pada Persamaan (4.14) dan (4.15). Sehingga Persamaan *state* subpopulasi individu terinfeksi dengan gejala berat dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} I_S^* = & \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa+B} S(p\lambda_{I_A} + \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S}(1-p) - \\ & \left. \left. \left. \left. \left. \lambda_E) \right\} \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) (1-p) \frac{\beta B}{\kappa+B} S + \\ & \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa+B} S(p\lambda_{I_A} + \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{I_A} p + \lambda_{I_S}(1-p) - \\ & \left. \left. \left. \left. \left. \lambda_E) \right\} \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) (1-p)\gamma E - \mu I_S - \mu_S I_S - \\ & \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S(\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{C_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta I_S \quad \dots(4.23) \end{aligned}$$

Persamaan *state* subpopulasi individu yang dikarantina dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\dot{Q}^* &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_Q} \\
&= u_2^* \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q \\
&= \left( \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{c_5} \right) \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \alpha_1 Q
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.11),  $u_2^*$  mempunyai beberapa kemungkinan hasil nilai, maka nilai pengontrol yang optimal seperti pada Persamaan (4.15). Sehingga Persamaan state subpopulasi individu yang dikarantina dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\dot{Q}^* &= \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{c_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta I_S - \mu Q - \mu_Q Q - \\
&\quad \alpha_1 Q \quad \dots(4.24)
\end{aligned}$$

Persamaan *state* subpopulasi individu sembuh dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\dot{R}^* &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_R} \\
&= \alpha_1 Q + \alpha_2 I_A - \mu R - vR \quad \dots(4.25)
\end{aligned}$$

Persamaan *state* subpopulasi bakteri dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\dot{B}^* &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_B} \\
&= \eta I_A + \eta I_S - dB - u_4^* B \\
&= \eta I_A + \eta I_S - dB - \left( \frac{\lambda_{BB}}{c_7} \right) B
\end{aligned}$$



Berdasarkan Persamaan (4.13),  $u_4^*$  mempunyai beberapa kemungkinan hasil nilai, maka nilai pengontrol yang optimal seperti pada Persamaan (4.17). sehingga Persamaan state subpopulasi bakteri dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\dot{B}^* = \eta I_A + \eta I_S - dB - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_B B}{c_7} \right\}, 1 \right\} \right) B \quad \dots(4.26)$$

##### 5. Membentuk Persamaan *costate*

Persamaan *costate* dalam kondisi optimal diperoleh dengan cara menurunkan negatif fungsi Pontryagin  $H$  yang sudah optimal terhadap  $\lambda$  dapat dinyatakan secara matematis melalui Persamaan (2.14) seperti berikut ini.

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left( \frac{\partial H^*}{\partial x} \right) \quad \dots(4.27)$$

Berdasarkan Persamaan (4.20) sehingga diperoleh Persamaan *costate* untuk setiap subpopulasi sebagai berikut,

Persamaan *costate* subpopulasi individu rentan dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_S^* &= - \left( \frac{\partial H^*}{\partial S} \right) \\ &= - \left( -\mu \lambda_S - u_3^* \psi \lambda_S - (1 - u_1^*) \frac{\beta B}{\kappa + B} \lambda_S + u_3^* \psi \lambda_E + \right. \\ &\quad \left. (1 - u_1^*) p \frac{\beta B}{\kappa + B} \lambda_{I_A} + (1 - u_1^*) (1 - p) \frac{\beta B}{\kappa + B} \lambda_{I_S} \right) \\ &= \mu \lambda_S + u_3^* \psi \lambda_S + (1 - u_1^*) \beta \frac{B}{\kappa + B} \lambda_S - u_3^* \psi \lambda_E - \\ &\quad (1 - u_1^*) p \frac{\beta B}{\kappa + B} \lambda_{I_A} - (1 - u_1^*) (1 - p) \frac{\beta B}{\kappa + B} \lambda_{I_S} \end{aligned}$$

dengan mensubstitusi  $u_1^*$  dan  $u_3^*$  sesuai dengan Persamaan (4.14) dan (4.16), sehingga untuk  $\lambda_S^*$  dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 \lambda_S^* = & \mu\lambda_S + \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\psi S(\lambda_S - \lambda_E)}{C_6} \right\}, 1 \right\} \right) \psi\lambda_S + \\
 & \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S(p\lambda_{I_A} + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1-p) - \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \lambda_E \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) \psi\lambda_E - \\
 & \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S(p\lambda_{I_A} + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1-p) - \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \lambda_E \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) p \frac{\beta B}{\kappa + B} \lambda_{I_A} - \\
 & \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S(p\lambda_{I_A} + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1-p) - \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \lambda_E \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) (1-p) \frac{\beta B}{\kappa + B} \lambda_{I_S} \\
 & \dots(4.28)
 \end{aligned}$$

Persamaan *costate* subpopulasi individu terdidik dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 \lambda_E^* = & - \left( \frac{\partial H^*}{\partial E} \right) \\
 = & - (\epsilon\lambda_S - \epsilon\lambda_E - \mu\lambda_E - (1 - u_1^*)\gamma\lambda_E + (1 - \\
 & u_1^*)p\gamma\lambda_{I_A} + (1 - u_1^*)(1-p)\gamma\lambda_{I_S})
 \end{aligned}$$

$$= -\epsilon\lambda_S + \epsilon\lambda_E + \mu\lambda_E + (1 - u_1^*)\gamma\lambda_E - (1 - u_1^*)p\gamma\lambda_{I_A} - (1 - u_1^*)(1 - p)\gamma\lambda_{I_S}$$

dengan mensubstitusi  $u_1^*$  sesuai dengan Persamaan (4.14), sehingga untuk  $\dot{\lambda}_E^*$  dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_E^* = & -\epsilon\lambda_S + \epsilon\lambda_E + \mu\lambda_E + \\ & \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S(p\lambda_{I_A} + \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) \gamma\lambda_E - \\ & \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S(p\lambda_{I_A} + \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) p\gamma\lambda_{I_A} - \\ & \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S(p\lambda_{I_A} + \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_E) \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) (1 - p)\gamma\lambda_{I_S} \\ & \dots(4.29) \end{aligned}$$

Persamaan *costate* subpopulasi individu terinfeksi dengan gejala ringan dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\dot{\lambda}_{I_A}^* = - \left( \frac{\partial H^*}{\partial I_A} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -(C_2 I_A - \mu \lambda_{I_A} - \alpha_2 \lambda_{I_A} + \alpha_2 \lambda_R + \eta \lambda_B) \\
&= -C_2 I_A + \mu \lambda_{I_A} + \alpha_2 \lambda_{I_A} - \alpha_2 \lambda_R - \eta \lambda_B \quad \dots(4.30)
\end{aligned}$$

Persamaan *costate* subpopulasi individu terinfeksi dengan gejala berat dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_{I_S}^* &= -\left(\frac{\partial H^*}{\partial I_S}\right) \\
&= -(C_1 I_S - \mu \lambda_{I_S} - \mu_S \lambda_{I_S} - u_2^* \delta \lambda_{I_S} + u_2^* \delta \lambda_Q + \eta \lambda_B) \\
&= -C_1 I_S + \mu \lambda_{I_S} + \mu_S \lambda_{I_S} + u_2^* \delta \lambda_{I_S} - u_2^* \delta \lambda_Q - \eta \lambda_B
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusi  $u_2^*$  sesuai dengan Persamaan (4.15), sehingga untuk  $\dot{\lambda}_{I_S}^*$  dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_{I_S}^* &= \\
&= -C_1 I_S + \mu \lambda_{I_S} + \mu_S \lambda_{I_S} + \\
&\quad \left(\min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{c_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta \lambda_{I_S} - \\
&\quad \left(\min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\delta I_S (\lambda_{I_S} - \lambda_Q)}{c_5} \right\}, 1 \right\} \right) \delta \lambda_Q - \eta \lambda_B \dots(4.31)
\end{aligned}$$

Persamaan *costate* subpopulasi individu yang dikarantina dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_Q^* &= -\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right) \\
&= -(-\mu \lambda_Q - \mu_Q \lambda_Q - \alpha_1 \lambda_Q + \alpha_1 \lambda_R) \\
&= \mu \lambda_Q + \mu_Q \lambda_Q + \alpha_1 \lambda_Q - \alpha_1 \lambda_R \quad \dots(4.32)
\end{aligned}$$

Persamaan *costate* subpopulasi individu yang sembuh dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_R^* &= -\left(\frac{\partial H^*}{\partial R}\right) \\
 &= -(v\lambda_S - \mu\lambda_R - v\lambda_R) \\
 &= -v\lambda_S + \mu\lambda_R + v\lambda_R \quad \dots(4.33)
 \end{aligned}$$

Persamaan *costate* subpopulasi bakteri dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_B^* &= -\left(\frac{\partial H^*}{\partial B}\right) \\
 &= -\left(C_3B + \lambda_S(1 - u_1^*)\frac{\beta S\kappa}{(\kappa+B)^2} + \lambda_{I_A}(1 - u_1^*)\frac{p\beta S\kappa}{(\kappa+B)^2} + \right. \\
 &\quad \left. \lambda_{I_S}(1 - u_1^*)(1 - p)\frac{\beta S\kappa}{(\kappa+B)^2} - d\lambda_B - \lambda_B u_4^*\right) \\
 &= -C_3B - \lambda_S(1 - u_1^*)\frac{\beta S\kappa}{(\kappa+B)^2} - \lambda_{I_A}(1 - u_1^*)\frac{p\beta S\kappa}{(\kappa+B)^2} - \\
 &\quad \lambda_{I_S}(1 - u_1^*)(1 - p)\frac{\beta S\kappa}{(\kappa+B)^2} + d\lambda_B + \lambda_B u_4^*
 \end{aligned}$$

dengan mensubstitusi  $u_1^*$  dan  $u_4^*$  sesuai dengan Persamaan (4.15) dan (4.17), sehingga untuk  $\dot{\lambda}_B^*$  dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_B^* &= -C_3B - \lambda_S \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa+B} S(p\lambda_{I_A} + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. \left. \lambda_{I_S}(1 - p) - \lambda_S \right) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1 - p) - \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. \left. \lambda_E \right) \right\}, 0.4 \right\} \right) \right) \frac{\beta S\kappa}{(\kappa+B)^2} - \\
 &\quad \lambda_{I_A} \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa+B} S(p\lambda_{I_A} + \right. \right. \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1-p) - \\
& \lambda_E))\}, 0.4\}} \left. \right) \frac{p\beta S\kappa}{(\kappa+B)^2} - \\
& \lambda_{I_S} \left( 1 - \left( \min \left\{ \max \left\{ 0.001, \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa+B} S(p\lambda_{I_A} + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \lambda_{I_S}(1-p) - \lambda_S) + \gamma E(\lambda_{I_A}p + \lambda_{I_S}(1-p) - \\
& \lambda_E))\}, 0.4\}} \right) (1-p) \frac{\beta S\kappa}{(\kappa+B)^2} + d\lambda_B + \\
& \left. \left( \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\lambda_B B}{C_7} \right\}, 1 \right\} \right) \lambda_B \right. \\
& \left. \dots(4.34)
\end{aligned}$$

Langkah berikutnya, sistem Persamaan Differensial pada Persamaan (4.20) – (4.26) dan (4.28) – (4.34) diselesaikan secara numerik dengan menggunakan nilai awal yang telah didefinisikan sebelumnya.

#### 4.4 Penyelesaian Numerik dan Simulasi

Penyelesaian masalah pada penelitian ini diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode *Runge-Kutta Orde 4*. Pada Subbab ini menjelaskan mengenai persamaan *state* yang diselesaikan dengan metode *Forward Sweep Runge-Kutta Orde 4* sedangkan untuk persamaan *costate* diselesaikan dengan metode *Backward Sweep Runge-Kutta Orde 4*.

Berdasarkan persamaan *state* pada Persamaan (4.20) – (4.26) dan *costate* pada Persamaan (4.28) – (4.34) serta kondisi stasioner pada Persamaan (4.10) – (4.13), selanjutnya akan ditentukan solusi numerik. Variabel  $S, E, I_A, I_S, Q, R, B, \lambda_S, \lambda_E, \lambda_{I_A}, \lambda_{I_S}, \lambda_Q, \lambda_R, \lambda_B, u_1, u_2, u_3, u_4$  dinyatakan dalam  $S(i), E(i), I_A(i),$

$I_S(i), Q(i), R(i), B(i), \lambda_S(i), \lambda_E(i), \lambda_{I_A}(i), \lambda_{I_S}(i), \lambda_Q(i), \lambda_R(i),$

$\lambda_B(i), u_1(i), u_2(i), u_3(i), u_4(i)$  dengan  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ .

Penyelesaian metode *Forward-Backward Sweep Runge-Kutta Orde 4* adalah sebagai berikut.

**Langkah 1.** Menentukan dugaan awal untuk nilai  $u_1, u_2, u_3$ , dan  $u_4$  sama dengan nol.

**Langkah 2.** Menggunakan nilai awal variabel *state* dan dugaan nilai  $u_1, u_2, u_3$ , dan  $u_4$  untuk menyelesaikan *state* ( $x$ ). Variabel *state* ( $S, E, I_A, I_S, Q, R, B$ ) diselesaikan menggunakan langkah maju dengan nilai awal  $S(0) = S_0, E(0) = E_0, I_A(0) = I_{A_0}, I_S(0) = I_{S_0}, Q(0) = Q_0, R(0) = R_0, B(0) = B_0$ . Nilai awal sudah ditetapkan diawal. Sehingga, diperoleh nilai *state* yang baru sebagai berikut  $S(i+1), E(i+1), I_A(i+1), I_S(i+1), Q(i+1), R(i+1), B(i+1)$ .

**Langkah 3.** Menggunakan nilai akhir *costate*, nilai dugaan awal  $u_1, u_2, u_3$ , dan  $u_4$  serta nilai variabel *state* yang baru yang dapat dilihat pada langkah 2 untuk menyelesaikan *costate* ( $\lambda$ ). Variabel *costate* diselesaikan menggunakan langkah mundur dengan nilai akhir  $\lambda_S(t_f) = \lambda_E(t_f) = \lambda_{I_A}(t_f) = \lambda_{I_S}(t_f) = \lambda_Q(t_f) = \lambda_R(t_f) = \lambda_B(t_f) = 0$ . Jadi, dapat dihitung nilai  $\lambda_S(j-1), \lambda_E(j-1), \lambda_{I_A}(j-1), \lambda_{I_S}(j-1), \lambda_Q(j-1), \lambda_R(j-1), \lambda_B(j-1)$  dengan nilai  $j = N + 2 - i$  dan  $N$  adalah banyaknya langkah.

**Langkah 4.** Perbarui nilai kontrol  $u_1, u_2, u_3$ , dan  $u_4$  menggunakan nilai *state* dan *costate* yang baru

**Langkah 5.** Selanjutnya, cek konvergensi. Jika nilai variabel pada iterasi saat ini dan iterasi sebelumnya sangat kecil maka nilai tersebut dapat dijadikan solusi. Jika tidak demikian maka kembali ke langkah 2.

#### 4.4.1 Penyelesaian Numerik Persamaan *State*

Persamaan *state* pada (4.20) – (4.26) diselesaikan dengan menggunakan metode *Forward Sweep Runge-Kutta Orde 4*, untuk memperoleh nilai *state* dapat dilihat algoritmanya pada Subbab 4.4. Berikut adalah proses perhitungan untuk memperoleh nilai *state*

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) \\
 E_{n+1} &= E_n + \frac{1}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) \\
 I_{A_{n+1}} &= I_{A_n} + \frac{1}{6}(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43}) \\
 I_{S_{n+1}} &= I_{S_n} + \frac{1}{6}(k_{14} + 2k_{24} + 2k_{34} + k_{44}) \quad (4.35) \\
 Q_{n+1} &= Q_n + \frac{1}{6}(k_{15} + 2k_{25} + 2k_{35} + k_{45}) \\
 R_{n+1} &= R_n + \frac{1}{6}(k_{16} + 2k_{26} + 2k_{36} + k_{46}) \\
 B_{n+1} &= B_n + \frac{1}{6}(k_{17} + 2k_{27} + 2k_{37} + k_{47})
 \end{aligned}$$

Keterangan :

$k_{11}$  : nilai kenaikan pada interval awal subpopulasi  $S$

$k_{12}$  : nilai kenaikan pada interval awal subpopulasi  $E$

$k_{13}$  : nilai kenaikan pada interval awal subpopulasi  $I_A$

$k_{14}$  : nilai kenaikan pada interval awal subpopulasi  $I_S$

$k_{15}$  : nilai kenaikan pada interval awal subpopulasi  $Q$



$k_{16}$ : nilai kenaikan pada interval awal subpopulasi  $R$

$k_{17}$ : nilai kenaikan pada interval awal subpopulasi  $B$

$k_{21}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $S$

$k_{22}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $E$

$k_{23}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $I_A$

$k_{24}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $I_S$

$k_{25}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $Q$

$k_{26}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $R$

$k_{27}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $B$

$k_{31}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $S$

$k_{32}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $E$

$k_{33}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $I_A$

$k_{34}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $I_S$

$k_{35}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $Q$

$k_{36}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $R$

$k_{37}$ : nilai kenaikan pada interval titik tengah subpopulasi  $B$

$k_{41}$ : nilai kenaikan pada interval akhir subpopulasi  $S$

$k_{42}$ : nilai kenaikan pada interval akhir subpopulasi  $E$

$k_{43}$ : nilai kenaikan pada interval akhir subpopulasi  $I_A$

$k_{44}$ : nilai kenaikan pada interval akhir subpopulasi  $I_S$

$k_{45}$ : nilai kenaikan pada interval akhir subpopulasi  $Q$

$k_{46}$ : nilai kenaikan pada interval akhir subpopulasi  $R$

$k_{47}$ : nilai kenaikan pada interval akhir subpopulasi  $B$

Untuk memperoleh penyelesaian pada Persamaan (4.35) dilakukan beberapa langkah yaitu mencari nilai  $k_{11} - k_{17}$ ,  $k_{21} - k_{27}$ ,  $k_{31} - k_{37}$ , dan  $k_{41} - k_{47}$  sebagai berikut ini.

Langkah pertama yaitu menentukan  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{13}$ ,  $k_{14}$ ,  $k_{15}$ ,  $k_{16}$ ,  $k_{17}$  dengan memasukkan hasil persamaan differensial pada setiap *state* sebagai berikut

$$\begin{aligned} k_{11} &= f(t_n, S_n, E_n, I_{A_n}, I_{S_n}, Q_n, R_n, B_n) \\ &= \Lambda + \nu R_n + \epsilon E_n - \mu S_n - u_3 \psi S_n - (1 - u_1) \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} S_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{12} &= f(t_n, S_n, E_n, I_{A_n}, I_{S_n}, Q_n, R_n, B_n) \\ &= u_3 \psi S_n - \epsilon E_n - \mu E_n - (1 - u_1) \gamma E_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{13} &= f(t_n, S_n, E_n, I_{A_n}, I_{S_n}, Q_n, R_n, B_n) \\ &= (1 - u_1) p \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} S_n + (1 - u_1) p \gamma E_n - \mu I_{A_n} - \alpha_2 I_{A_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{14} &= f(t_n, S_n, E_n, I_{A_n}, I_{S_n}, Q_n, R_n, B_n) \\ &= (1 - u_1)(1 - p) \frac{\beta B}{\kappa + B} S + (1 - u_1)(1 - p) \gamma E - \mu I_S - \\ &\quad \mu S I_S - u_2 \delta I_S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{15} &= f(t_n, S_n, E_n, I_{A_n}, I_{S_n}, Q_n, R_n, B_n) \\ &= u_2 \delta I_{S_n} - \mu Q_n - \mu_Q Q_n - \alpha_1 Q_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{16} &= f(t_n, S_n, E_n, I_{A_n}, I_{S_n}, Q_n, R_n, B_n) \\
&= \alpha_1 Q_n + \alpha_2 I_{A_n} - \mu R_n - \nu R_n \\
k_{17} &= f(t_n, S_n, E_n, I_{A_n}, I_{S_n}, Q_n, R_n, B_n) \\
&= \eta I_{A_n} + \eta I_{S_n} - dB_n - u_4 B_n
\end{aligned}$$

Langkah berikutnya menentukan  $k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}, k_{25}, k_{26}, k_{27}$  dengan setiap *state* ( $x$ ) diganti  $(x + \frac{1}{2}hk_1)$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
k_{21} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{11}, E_n + \frac{1}{2}hk_{12}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{13}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{15}, R_n + \frac{1}{2}hk_{16}, B_n + \frac{1}{2}hk_{17}\right) \\
&= \Lambda + \nu\left(R_n + \frac{1}{2}hk_{16}\right) + \epsilon\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{12}\right) - \mu\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{11}\right) - \left(\frac{u_{3n} + u_{3n+1}}{2}\right)\Psi\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{11}\right) - \left(1 - \left(\frac{u_{1n} + u_{1n+1}}{2}\right)\right)\frac{\beta\left(B_n + \frac{1}{2}hk_{17}\right)}{\kappa + \left(B_n + \frac{1}{2}hk_{17}\right)}\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{11}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{22} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{11}, E_n + \frac{1}{2}hk_{12}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{13}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{15}, R_n + \frac{1}{2}hk_{16}, B_n + \frac{1}{2}hk_{17}\right) \\
&= \left(\frac{u_{3n} + u_{3n+1}}{2}\right)\Psi\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{11}\right) - \epsilon\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{12}\right) - \mu\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{12}\right) - \left(1 - \left(\frac{u_{1n} + u_{1n+1}}{2}\right)\right)\gamma\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{12}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{23} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{11}, E_n + \frac{1}{2}hk_{12}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{13}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{15}, R_n + \frac{1}{2}hk_{16}, B_n + \frac{1}{2}hk_{17}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \left(\frac{u_{1n} + u_{1n+1}}{2}\right)\right) p \frac{\beta(B_n + \frac{1}{2}hk_{17})}{\kappa + (B_n + \frac{1}{2}hk_{17})} \left(S_n + \frac{1}{2}hk_{11}\right) + \\
&\quad \left(1 - \left(\frac{u_{1n} + u_{1n+1}}{2}\right)\right) p \gamma \left(E_n + \frac{1}{2}hk_{12}\right) - \mu \left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{13}\right) - \alpha_2 \left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{13}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{24} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{11}, E_n + \frac{1}{2}hk_{12}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{13}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{15}, R_n + \frac{1}{2}hk_{16}, B_n + \frac{1}{2}hk_{17}\right) \\
&= \left(1 - \left(\frac{u_{1n} + u_{1n+1}}{2}\right)\right) (1-p) \frac{\beta(B_n + \frac{1}{2}hk_{17})}{\kappa + (B_n + \frac{1}{2}hk_{17})} \left(S_n + \frac{1}{2}hk_{11}\right) + \\
&\quad \left(1 - \left(\frac{u_{1n} + u_{1n+1}}{2}\right)\right) (1-p) \gamma \left(E_n + \frac{1}{2}hk_{12}\right) - \\
&\quad \mu \left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}\right) - \mu_S \left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}\right) - \\
&\quad \left(\frac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}\right) \delta \left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{25} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{11}, E_n + \frac{1}{2}hk_{12}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{13}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{15}, R_n + \frac{1}{2}hk_{16}, B_n + \frac{1}{2}hk_{17}\right) \\
&= \left(\frac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}\right) \delta \left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}\right) - \mu \left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{15}\right) - \\
&\quad \mu_Q \left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{15}\right) - \alpha_1 \left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{15}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{26} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{11}, E_n + \frac{1}{2}hk_{12}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{13}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{15}, R_n + \frac{1}{2}hk_{16}, B_n + \frac{1}{2}hk_{17}\right) \\
&= \alpha_1 \left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{15}\right) + \alpha_2 \left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{13}\right) - \mu \left(R_n + \frac{1}{2}hk_{16}\right) - v \left(R_n + \frac{1}{2}hk_{16}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{27} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{11}, E_n + \frac{1}{2}hk_{12}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{13}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{15}, R_n + \frac{1}{2}hk_{16}, B_n + \frac{1}{2}hk_{17}\right) \\
&= \eta\left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{13}\right) + \eta\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{14}\right) - d\left(B_n + \frac{1}{2}hk_{17}\right) - \\
&\quad \left(\frac{u_{4_n} + u_{4_{n+1}}}{2}\right)\left(B_n + \frac{1}{2}hk_{17}\right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya menentukan  $k_{31}, k_{32}, k_{33}, k_{34}, k_{35}, k_{36}, k_{37}$  dengan setiap *state* ( $x$ ) diganti  $\left(x + \frac{1}{2}hk_2\right)$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
k_{31} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{21}, E_n + \frac{1}{2}hk_{22}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{23}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{25}, R_n + \frac{1}{2}hk_{26}, B_n + \frac{1}{2}hk_{27}\right) \\
&= \Lambda + \nu\left(R_n + \frac{1}{2}hk_{26}\right) + \epsilon\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{22}\right) - \mu\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{21}\right) - \left(\frac{u_{3_n} + u_{3_{n+1}}}{2}\right)\psi\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{21}\right) - \left(1 - \left(\frac{u_{1_n} + u_{1_{n+1}}}{2}\right)\right)\frac{\beta\left(B_n + \frac{1}{2}hk_{27}\right)}{\kappa + \left(B_n + \frac{1}{2}hk_{27}\right)}\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{21}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{32} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{21}, E_n + \frac{1}{2}hk_{22}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{23}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{25}, R_n + \frac{1}{2}hk_{26}, B_n + \frac{1}{2}hk_{27}\right) \\
&= \left(\frac{u_{3_n} + u_{3_{n+1}}}{2}\right)\psi\left(S_n + \frac{1}{2}hk_{21}\right) - \epsilon\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{22}\right) - \mu\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{12}\right) - \left(1 - \left(\frac{u_{1_n} + u_{1_{n+1}}}{2}\right)\right)\gamma\left(E_n + \frac{1}{2}hk_{22}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{33} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{21}, E_n + \frac{1}{2}hk_{22}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{23}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{25}, R_n + \frac{1}{2}hk_{26}, B_n + \frac{1}{2}hk_{27}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \left(\frac{u_{1n} + u_{1n+1}}{2}\right)\right) p \frac{\beta(B_n + \frac{1}{2}hk_{27})}{\kappa + (B_n + \frac{1}{2}hk_{27})} \left(S_n + \frac{1}{2}hk_{21}\right) + \\
&\quad \left(1 - \left(\frac{u_{1n} + u_{1n+1}}{2}\right)\right) p \gamma \left(E_n + \frac{1}{2}hk_{22}\right) - \mu \left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{23}\right) - \alpha_2 \left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{23}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{34} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{21}, E_n + \frac{1}{2}hk_{22}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{23}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{25}, R_n + \frac{1}{2}hk_{26}, B_n + \frac{1}{2}hk_{27}\right) \\
&= \left(1 - \left(\frac{u_{1n} + u_{1n+1}}{2}\right)\right) (1-p) \frac{\beta(B_n + \frac{1}{2}hk_{27})}{\kappa + (B_n + \frac{1}{2}hk_{27})} \left(S_n + \frac{1}{2}hk_{21}\right) + \\
&\quad \left(1 - \left(\frac{u_{1n} + u_{1n+1}}{2}\right)\right) (1-p) \gamma \left(E_n + \frac{1}{2}hk_{22}\right) - \\
&\quad \mu \left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}\right) - \mu_S \left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}\right) - \\
&\quad \left(\frac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}\right) \delta \left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{35} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{21}, E_n + \frac{1}{2}hk_{22}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{23}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{25}, R_n + \frac{1}{2}hk_{26}, B_n + \frac{1}{2}hk_{27}\right) \\
&= \left(\frac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}\right) \delta \left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}\right) - \mu \left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{25}\right) - \\
&\quad \mu_Q \left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{25}\right) - \alpha_1 \left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{25}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{36} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{21}, E_n + \frac{1}{2}hk_{22}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{23}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{25}, R_n + \frac{1}{2}hk_{26}, B_n + \frac{1}{2}hk_{27}\right) \\
&= \alpha_1 \left(Q_n + \frac{1}{2}hk_{25}\right) + \alpha_2 \left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{23}\right) - \mu \left(R_n + \frac{1}{2}hk_{26}\right) - v \left(R_n + \frac{1}{2}hk_{26}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{37} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}hk_{21}, E_n + \frac{1}{2}hk_{22}, I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{23}, I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}, Q_n + \frac{1}{2}hk_{25}, R_n + \frac{1}{2}hk_{26}, B_n + \frac{1}{2}hk_{27}\right) \\
&= \eta\left(I_{A_n} + \frac{1}{2}hk_{23}\right) + \eta\left(I_{S_n} + \frac{1}{2}hk_{24}\right) - d\left(B_n + \frac{1}{2}hk_{27}\right) - \\
&\quad \left(\frac{u_{4_n} + u_{4_{n+1}}}{2}\right)\left(B_n + \frac{1}{2}hk_{27}\right)
\end{aligned}$$

Langkah terakhir yaitu menentukan  $k_{41}, k_{42}, k_{43}, k_{44}, k_{45}, k_{46}, k_{47}$  dengan setiap *state* ( $x$ ) diganti  $(x + hk_3)$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
k_{41} &= f(t_n + h, S_n + hk_{31}, E_n + hk_{32}, I_{A_n} + hk_{33}, I_{S_n} + hk_{34}, Q_n + hk_{35}, R_n + hk_{36}, B_n + hk_{37}) \\
&= \Lambda + v(R_n + hk_{36}) + \epsilon(E_n + hk_{32}) - \mu(S_n + hk_{31}) - \\
&\quad (u_{3_{n+1}})\psi(S_n + hk_{31}) - \\
&\quad \left(1 - (u_{1_{n+1}})\right) \frac{\beta(B_n + hk_{37})}{\kappa + (B_n + hk_{37})} (S_n + hk_{31})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{42} &= f(t_n + h, S_n + hk_{31}, E_n + hk_{32}, I_{A_n} + hk_{33}, I_{S_n} + hk_{34}, Q_n + hk_{35}, R_n + hk_{36}, B_n + hk_{37}) \\
&= (u_{3_{n+1}})\psi(S_n + hk_{31}) - \epsilon(E_n + hk_{32}) - \mu(E_n + hk_{32}) - \\
&\quad \left(1 - (u_{1_{n+1}})\right) \gamma(E_n + hk_{32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{43} &= f(t_n + h, S_n + hk_{31}, E_n + hk_{32}, I_{A_n} + hk_{33}, I_{S_n} + hk_{34}, Q_n + hk_{35}, R_n + hk_{36}, B_n + hk_{37}) \\
&= \left(1 - (u_{1_{n+1}})\right) p \frac{\beta(B_n + hk_{37})}{\kappa + (B_n + hk_{37})} (S_n + hk_{31}) + \left(1 - (u_{1_{n+1}})\right) p \gamma(E_n + hk_{32}) - \mu(I_{A_n} + hk_{33}) - \\
&\quad \alpha_2(I_{A_n} + hk_{33})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{44} &= f(t_n + h, S_n + hk_{31}, E_n + hk_{32}, I_{A_n} + hk_{33}, I_{S_n} + \\
&\quad hk_{34}, Q_n + hk_{35}, R_n + hk_{36}, B_n + hk_{37}) \\
&= \left(1 - (u_{1n+1})\right) (1 - p) \frac{\beta(B_n + hk_{37})}{\kappa + (B_n + hk_{37})} (S_n + hk_{31}) + \\
&\quad \left(1 - (u_{1n+1})\right) (1 - p) \gamma (E_n + hk_{32}) - \mu (I_{S_n} + hk_{34}) - \\
&\quad \mu_S (I_{S_n} + hk_{34}) - (u_{2n+1}) \delta (I_{S_n} + hk_{34})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{45} &= f(t_n + h, S_n + hk_{31}, E_n + hk_{32}, I_{A_n} + hk_{33}, I_{S_n} + \\
&\quad hk_{34}, Q_n + hk_{35}, R_n + hk_{36}, B_n + hk_{37}) \\
&= (u_{2n+1}) \delta (I_{S_n} + hk_{34}) - \mu (Q_n + hk_{35}) - \mu_Q (Q_n + \\
&\quad hk_{35}) - \alpha_1 (Q_n + hk_{35})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{46} &= f(t_n + h, S_n + hk_{31}, E_n + hk_{32}, I_{A_n} + hk_{33}, I_{S_n} + \\
&\quad hk_{34}, Q_n + hk_{35}, R_n + hk_{36}, B_n + hk_{37}) \\
&= \alpha_1 (Q_n + hk_{35}) + \alpha_2 (I_{A_n} + hk_{33}) - \mu (R_n + hk_{36}) - \\
&\quad v (R_n + hk_{36})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{47} &= f(t_n + h, S_n + hk_{31}, E_n + hk_{32}, I_{A_n} + hk_{33}, I_{S_n} + \\
&\quad hk_{34}, Q_n + hk_{35}, R_n + hk_{36}, B_n + hk_{37}) \\
&= \eta (I_{A_n} + hk_{33}) + \eta (I_{S_n} + hk_{34}) - d (B_n + hk_{37}) - \\
&\quad (u_{4n+1}) (B_n + hk_{37})
\end{aligned}$$

Proses perhitungan nilai  $k_{11} - k_{17}$ ,  $k_{21} - k_{27}$ ,  $k_{31} - k_{37}$ , dan  $k_{41} - k_{47}$  telah selesai, sehingga selanjutnya adalah menghitung persamaan nilai *state* yang baru, dapat dilihat pada Persamaan (4.35).



#### 4.4.2 Penyelesaian Numerik *Costate*

Metode *Backward Sweep Runge-Kutta* orde 4 digunakan untuk menyelesaikan persamaan *costate* pada Persamaan (4.28) – (4.34), untuk memperoleh nilai *costate* dapat dilihat algoritmanya pada Subbab 4.4. Berikut adalah proses perhitungan untuk memperoleh nilai *costate*

$$\begin{aligned}
 \lambda_{S_{n-1}} &= \lambda_{S_n} - \frac{1}{6}(k_{18} + 2k_{28} + 2k_{38} + k_{48}) \\
 \lambda_{E_{n-1}} &= \lambda_{E_n} - \frac{1}{6}(k_{19} + 2k_{29} + 2k_{39} + k_{49}) \\
 \lambda_{I_{A_{n-1}}} &= \lambda_{I_{A_n}} - \frac{1}{6}(k_{110} + 2k_{210} + 2k_{310} + k_{410}) \\
 \lambda_{I_{S_{n-1}}} &= \lambda_{I_{S_n}} - \frac{1}{6}(k_{111} + 2k_{211} + 2k_{311} + k_{411}) \quad (4.36) \\
 \lambda_{Q_{n-1}} &= \lambda_{Q_n} - \frac{1}{6}(k_{112} + 2k_{212} + 2k_{312} + k_{412}) \\
 \lambda_{R_{n-1}} &= \lambda_{R_n} - \frac{1}{6}(k_{113} + 2k_{213} + 2k_{313} + k_{413}) \\
 \lambda_{B_{n-1}} &= \lambda_{B_n} - \frac{1}{6}(k_{114} + 2k_{214} + 2k_{314} + k_{414})
 \end{aligned}$$

Keterangan :

$k_{18}$ : nilai penurunan pada interval awal subpopulasi  $S$

$k_{19}$  : nilai penurunan pada interval awal subpopulasi  $E$

$k_{110}$ : nilai penurunan pada interval awal subpopulasi  $I_A$

$k_{111}$ : nilai penurunan pada interval awal subpopulasi  $I_S$

$k_{112}$ : nilai penurunan pada interval awal subpopulasi  $Q$

$k_{113}$ : nilai penurunan pada interval awal subpopulasi  $R$

$k_{114}$ : nilai penurunan pada interval awal subpopulasi  $B$

$k_{28}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $S$

$k_{29}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $E$

$k_{210}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $I_A$

$k_{211}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $I_S$

$k_{212}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $Q$

$k_{213}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $R$

$k_{214}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $B$

$k_{38}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $S$

$k_{39}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $E$

$k_{310}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $I_A$

$k_{311}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $I_S$

$k_{312}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $Q$

$k_{313}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $R$

$k_{314}$ : nilai penurunan pada interval titik tengah subpopulasi  $B$

$k_{48}$ : nilai penurunan pada interval akhir subpopulasi  $S$

$k_{49}$ : nilai penurunan pada interval akhir subpopulasi  $E$

$k_{410}$ : nilai penurunan pada interval akhir subpopulasi  $I_A$

$k_{411}$ : nilai penurunan pada interval akhir subpopulasi  $I_S$

$k_{412}$ : nilai penurunan pada interval akhir subpopulasi  $Q$

$k_{413}$ : nilai penurunan pada interval akhir subpopulasi  $R$

$k_{414}$ : nilai penurunan pada interval akhir subpopulasi  $B$

Penyelesaian pada Persamaan (4.36) diperoleh dengan melakukan beberapa langkah yaitu mencari nilai  $k_{18} - k_{114}$ ,  $k_{28} - k_{214}$ ,  $k_{38} - k_{314}$ , dan  $k_{48} - k_{414}$  sebagai berikut ini.

Langkah pertama yaitu menentukan  $k_{18}$ ,  $k_{19}$ ,  $k_{110}$ ,  $k_{111}$ ,  $k_{112}$ ,  $k_{113}$ ,  $k_{114}$  dengan memasukkan hasil persamaan differensial pada setiap *costate* sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 k_{18} &= f(t_n, \lambda_{S_n}, \lambda_{E_n}, \lambda_{I_{A_n}}, \lambda_{I_{S_n}}, \lambda_{Q_n}, \lambda_{R_n}, \lambda_{B_n}) \\
 &= \mu \lambda_{S_n} + u_3^* \psi \lambda_{S_n} + \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} S_n (p \lambda_{I_{A_n}} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \lambda_{I_{S_n}} (1 - p) - \lambda_{S_n}) + \gamma E_n (\lambda_{I_{A_n}} p + \lambda_{I_{S_n}} (1 - p) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \lambda_{E_n}) \right) \right) \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} \lambda_{S_n} - \left( \frac{\psi S_n (\lambda_{S_n} - \lambda_{E_n})}{C_6} \right) \psi \lambda_{E_n} - \left( 1 - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} S_n (p \lambda_{I_{A_n}} + \lambda_{I_{S_n}} (1 - p) - \lambda_{S_n}) + \gamma E_n (\lambda_{I_{A_n}} p + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \lambda_{I_{S_n}} (1 - p) - \lambda_{E_n}) \right) \right) p \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} \lambda_{I_{A_n}} -
 \end{aligned}$$

$$\left(1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} S_n (p \lambda_{I_{A_n}} + \lambda_{I_{S_n}} (1-p) - \lambda_{S_n}) + \gamma E_n (\lambda_{I_{A_n}} p + \lambda_{I_{S_n}} (1-p) - \lambda_{E_n}) \right)\right) (1-p) \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} \lambda_{I_{S_n}}$$

$$\begin{aligned} k_{19} &= f(t_n, \lambda_{S_n}, \lambda_{E_n}, \lambda_{I_{A_n}}, \lambda_{I_{S_n}}, \lambda_{Q_n}, \lambda_{R_n}, \lambda_{B_n}) \\ &= -\epsilon \lambda_{S_n} + \epsilon \lambda_{E_n} + \mu \lambda_{E_n} + \left(1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} S_n (p \lambda_{I_{A_n}} + \lambda_{I_{S_n}} (1-p) - \lambda_{S_n}) + \gamma E_n (\lambda_{I_{A_n}} p + \lambda_{I_{S_n}} (1-p) - \lambda_{E_n}) \right)\right) \gamma \lambda_{E_n} - \left(1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} S_n (p \lambda_{I_{A_n}} + \lambda_{I_{S_n}} (1-p) - \lambda_{S_n}) + \gamma E_n (\lambda_{I_{A_n}} p + \lambda_{I_{S_n}} (1-p) - \lambda_{E_n}) \right)\right) p \gamma \lambda_{I_{A_n}} - \left(1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} S_n (p \lambda_{I_{A_n}} + \lambda_{I_{S_n}} (1-p) - \lambda_{S_n}) + \gamma E_n (\lambda_{I_{A_n}} p + \lambda_{I_{S_n}} (1-p) - \lambda_{E_n}) \right)\right) (1-p) \gamma \lambda_{I_{S_n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{110} &= f(t_n, \lambda_{S_n}, \lambda_{E_n}, \lambda_{I_{A_n}}, \lambda_{I_{S_n}}, \lambda_{Q_n}, \lambda_{R_n}, \lambda_{B_n}) \\ &= -C_2 I_{A_n} + \mu \lambda_{I_{A_n}} + \alpha_2 \lambda_{I_{A_n}} - \alpha_2 \lambda_{R_n} - \eta \lambda_{B_n} \end{aligned}$$

$$k_{111} = f(t_n, \lambda_{S_n}, \lambda_{E_n}, \lambda_{I_{A_n}}, \lambda_{I_{S_n}}, \lambda_{Q_n}, \lambda_{R_n}, \lambda_{B_n})$$

$$\begin{aligned}
&= -C_1 I_{S_n} + \mu \lambda_{I_{S_n}} + \mu_S \lambda_{I_{S_n}} + \left( \frac{\delta I_{S_n} (\lambda_{I_{S_n}} - \lambda_{Q_n})}{C_5} \right) \delta \lambda_{I_{S_n}} - \\
&\quad \left( \frac{\delta I_{S_n} (\lambda_{I_{S_n}} - \lambda_{Q_n})}{C_5} \right) \delta \lambda_{Q_n} - \eta \lambda_{B_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{112} &= f(t_n, \lambda_{S_n}, \lambda_{E_n}, \lambda_{I_{A_n}}, \lambda_{I_{S_n}}, \lambda_{Q_n}, \lambda_{R_n}, \lambda_{B_n}) \\
&= \mu \lambda_{Q_n} + \mu_Q \lambda_{Q_n} + \alpha_1 \lambda_{Q_n} - \alpha_1 \lambda_{R_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{113} &= f(t_n, \lambda_{S_n}, \lambda_{E_n}, \lambda_{I_{A_n}}, \lambda_{I_{S_n}}, \lambda_{Q_n}, \lambda_{R_n}, \lambda_{B_n}) \\
&= -v \lambda_{S_n} + \mu \lambda_{R_n} + v \lambda_{R_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{114} &= f(t_n, \lambda_{S_n}, \lambda_{E_n}, \lambda_{I_{A_n}}, \lambda_{I_{S_n}}, \lambda_{Q_n}, \lambda_{R_n}, \lambda_{B_n}) \\
&= -C_3 B_n - \lambda_{S_n} \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} S_n (p \lambda_{I_{A_n}} + \lambda_{I_{S_n}} (1 - p) - \lambda_{S_n}) \right) + \gamma E_n (\lambda_{I_{A_n}} p + \lambda_{I_{S_n}} (1 - p) - \lambda_{E_n}) \right) \frac{\beta S_n \kappa}{(\kappa + B_n)^2} - \\
&\quad \lambda_{I_{A_n}} \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} S_n (p \lambda_{I_{A_n}} + \lambda_{I_{S_n}} (1 - p) - \lambda_{S_n}) \right) + \gamma E_n (\lambda_{I_{A_n}} p + \lambda_{I_{S_n}} (1 - p) - \lambda_{E_n}) \right) \frac{p \beta S_n \kappa}{(\kappa + B_n)^2} - \\
&\quad \lambda_{I_{S_n}} \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta B_n}{\kappa + B_n} S_n (p \lambda_{I_{A_n}} + \lambda_{I_{S_n}} (1 - p) - \lambda_{S_n}) \right) + \gamma E_n (\lambda_{I_{A_n}} p + \lambda_{I_{S_n}} (1 - p) - \lambda_{E_n}) \right) \frac{p \beta S_n \kappa}{(\kappa + B_n)^2} -
\end{aligned}$$

$$\gamma E_n \left( \lambda_{I_{A_n}} p + \lambda_{I_{S_n}} (1-p) - \lambda_{E_n} \right) \left( 1 - p \right) \frac{\beta S_n \kappa}{(\kappa + B_n)^2} + d \lambda_{B_n} + \lambda_{B_n} \left( \frac{\lambda_{B_n}}{C_7} \right)$$

Langkah berikutnya yaitu menentukan  $k_{28}$ ,  $k_{29}$ ,  $k_{210}$ ,  $k_{211}$ ,  $k_{212}$ ,  $k_{213}$ ,  $k_{214}$  dengan setiap *costate* ( $\lambda$ ) diganti  $\left( \lambda - \frac{hk_1}{2} \right)$ . Ada minus berarti bergerak mundur dalam setiap waktu. Berikut adalah nilai perhitungannya.

$$\begin{aligned} k_{28} &= f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{113}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{114}}{2} \right) \\ &= \mu \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2} \right) + \left( \frac{\Psi \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2} \right) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2} \right) \right)}{C_6} \right) \Psi \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2} \right) + \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)}{\kappa + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)} \right) \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2} \right) + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2} \right) \right) + \gamma \left( \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2} \right) \right) \left( \frac{\beta \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)}{\kappa + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)} \right) \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\Psi\left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right)\left(\left(\lambda_{S_n}-\frac{hk_{18}}{2}\right)-\left(\lambda_{E_n}-\frac{hk_{19}}{2}\right)\right)}{C_6} \right) \Psi\left(\lambda_{E_n}-\frac{hk_{19}}{2}\right) - \\
& \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa+\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right) \left(p\left(\lambda_{I_{A_n}}-\frac{hk_{110}}{2}\right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\lambda_{I_{S_n}}-\frac{hk_{111}}{2}\right)(1-p) - \left(\lambda_{S_n}-\frac{hk_{18}}{2}\right)\right) \right) + \\
& \left. \gamma\left(\frac{E_n+E_{n-1}}{2}\right) \left( \left(\lambda_{I_{A_n}}-\frac{hk_{110}}{2}\right)p + \left(\lambda_{I_{S_n}}-\frac{hk_{111}}{2}\right)(1-p) - \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\lambda_{E_n}-\frac{hk_{19}}{2}\right) \right) \right) \right) \left. \right) p \left( \frac{\beta\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa+\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \right) \left(\lambda_{I_{A_n}}-\frac{hk_{110}}{2}\right) - \\
& \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa+\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right) \left(p\left(\lambda_{I_{A_n}}-\frac{hk_{110}}{2}\right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\lambda_{I_{S_n}}-\frac{hk_{111}}{2}\right)(1-p) - \left(\lambda_{S_n}-\frac{hk_{18}}{2}\right)\right) \right) + \\
& \left. \gamma\left(\frac{E_n+E_{n-1}}{2}\right) \left( \left(\lambda_{I_{A_n}}-\frac{hk_{110}}{2}\right)p + \left(\lambda_{I_{S_n}}-\frac{hk_{111}}{2}\right)(1-p) - \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\lambda_{E_n}-\frac{hk_{19}}{2}\right) \right) \right) \right) \left. \right) (1-p) \left( \frac{\beta\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa+\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \right) \left(\lambda_{I_{S_n}}-\frac{hk_{111}}{2}\right) \\
k_{28} &= f\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \right. \\
& \left. \frac{hk_{111}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{113}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{114}}{2} \right) \\
&= -\epsilon\left(\lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2}\right) + \epsilon\left(\lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2}\right) + \mu\lambda_E + \left( 1 - \right. \\
& \left. \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa+\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right) \left(p\left(\lambda_{I_{A_n}}-\frac{hk_{110}}{2}\right) + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{118}}{2} \right) \Big) + \\
& \gamma \left( \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) (1-p) - \right. \\
& \left. \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{119}}{2} \right) \right) \Big) \Big) \gamma \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{119}}{2} \right) - \\
& \left( 1 - \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta \binom{B_n + B_{n-1}}{2}}{\kappa + \binom{B_n + B_{n-1}}{2}} \right) \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2} \right) + \right. \\
& \left. \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{118}}{2} \right) \right) + \\
& \gamma \left( \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) (1-p) - \right. \\
& \left. \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{119}}{2} \right) \right) \Big) \Big) p \gamma \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2} \right) - \\
& \left( 1 - \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta \binom{B_n + B_{n-1}}{2}}{\kappa + \binom{B_n + B_{n-1}}{2}} \right) \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2} \right) + \right. \\
& \left. \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{118}}{2} \right) \right) + \\
& \gamma \left( \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) (1-p) - \right. \\
& \left. \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{119}}{2} \right) \right) \Big) \Big) (1-p) \gamma \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$k_{210} = f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{118}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{119}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{113}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{114}}{2} \right)$$



$$\begin{aligned}
&= -C_2 \left( \frac{I_{A_n} + I_{A_{n-1}}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2} \right) + \alpha_2 \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2} \right) - \alpha_2 \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{113}}{2} \right) - \eta \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{114}}{2} \right) \\
k_{211} &= f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{113}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{114}}{2} \right) \\
&= -C_1 \left( \frac{I_{S_n} + I_{S_{n-1}}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) + \mu_S \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) + \\
&\quad \left( \frac{\delta \left( \frac{I_{S_n} + I_{S_{n-1}}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) - \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2} \right) \right)}{C_5} \right) \delta \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) + \\
&\quad \left( \frac{\delta \left( \frac{I_{S_n} + I_{S_{n-1}}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2} \right) - \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2} \right) \right)}{C_5} \right) \delta \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2} \right) - \eta \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{114}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{212} &= f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{113}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{114}}{2} \right) \\
&= \mu \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2} \right) + \mu_Q \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2} \right) + \alpha_1 \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2} \right) - \alpha_1 \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{113}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{213} &= f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{113}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{114}}{2} \right) \\
&= -v \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{113}}{2} \right) + v \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{113}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{214} &= f\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \right. \\
&\quad \left. \frac{hk_{111}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{112}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{113}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{114}}{2}\right) \\
&= -C_3 \left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right) - \left(\lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2}\right) \\
&\quad \left(1 - \frac{1}{C_4} \left(\frac{\beta \left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa + \left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right)\right) \left(p \left(\lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left(\lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2}\right) (1-p) - \left(\lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2}\right)\right) + \\
&\quad \gamma \left(\frac{E_n+E_{n-1}}{2}\right) \left(\left(\lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}\right) p + \left(\lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2}\right) (1-p) - \left(\lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2}\right)\right) \left. \right) \left. \right) \frac{\beta \left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right) \kappa}{\left(\kappa + \left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)\right)^2} - \lambda_{I_A} \left(1 - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{C_4} \left(\frac{\beta \left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa + \left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right)\right) \left(p \left(\lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left(\lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2}\right) (1-p) - \left(\lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2}\right)\right) + \\
&\quad \gamma \left(\frac{E_n+E_{n-1}}{2}\right) \left(\left(\lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}\right) p + \left(\lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2}\right) (1-p) - \left(\lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2}\right)\right) \left. \right) \left. \right) \frac{p \beta \left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right) \kappa}{\left(\kappa + \left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)\right)^2} - \left(\lambda_{I_{S_n}} - \right. \\
&\quad \left. \frac{hk_{111}}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{C_4} \left(\frac{\beta \left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa + \left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right)\right) \left(p \left(\lambda_{I_{A_n}} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{hk_{110}}{2}\right) + \left(\lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2}\right) (1-p) - \left(\lambda_{S_n} - \frac{hk_{18}}{2}\right)\right) + \\
&\quad \left. \gamma \left(\frac{E_n+E_{n-1}}{2}\right) \left(\left(\lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{110}}{2}\right) p + \left(\lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{111}}{2}\right) (1-p) - \left(\lambda_{E_n} - \frac{hk_{19}}{2}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\psi\left(\frac{S_n+S_{n-1}}{2}\right)\left(\left(\lambda_{S_n}-\frac{hk_{28}}{2}\right)-\left(\lambda_{E_n}-\frac{hk_{29}}{2}\right)\right)}{C_6} \right) \psi\left(\lambda_{E_n}-\frac{hk_{29}}{2}\right) - \\
& \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa+\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \right) \left( \frac{S_n+S_{n-1}}{2} \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2} \right) \right) + \\
& \left. \gamma \left( \frac{E_n+E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1-p) - \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2} \right) \right) \right) \right) p \left( \frac{\beta\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa+\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \right) \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) - \\
& \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa+\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \right) \left( \frac{S_n+S_{n-1}}{2} \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2} \right) \right) + \\
& \left. \gamma \left( \frac{E_n+E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1-p) - \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2} \right) \right) \right) \right) (1-p) \left( \frac{\beta\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa+\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \right) \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) \\
k_{39} &= f\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2}, \right. \\
& \left. \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{213}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{214}}{2} \right) \\
&= -\epsilon \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2} \right) + \epsilon \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2} \right) + \mu \lambda_E + \left( 1 - \right. \\
& \left. \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)}{\kappa+\left(\frac{B_n+B_{n-1}}{2}\right)} \right) \left( \frac{S_n+S_{n-1}}{2} \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2} \right) \Big) + \\
& \gamma \left( \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2} \right) \right) \Big) \Big) \gamma \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2} \right) - \left( 1 - \right. \\
& \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)}{\kappa + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)} \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2} \right) \right) \right) + \\
& \gamma \left( \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2} \right) \right) \Big) \Big) \Big) \Big) \gamma \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) - \\
& \left( 1 - \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)}{\kappa + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)} \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2} \right) \right) \right) + \\
& \gamma \left( \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1-p) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2} \right) \right) \Big) \Big) \Big) \Big) \Big) (1-p) \gamma \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{310} = f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \right. \\
\left. \frac{hk_{211}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{213}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{214}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$= -C_2 \left( \frac{I_{A_n} + I_{A_{n-1}}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) + \alpha_2 \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) - \alpha_2 \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{213}}{2} \right) - \eta \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{214}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} k_{311} &= f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{213}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{214}}{2} \right) \\ &= -C_1 \left( \frac{I_{S_n} + I_{S_{n-1}}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) + \mu_S \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) + \left( \frac{\delta \left( \frac{I_{S_n} + I_{S_{n-1}}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) - \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2} \right) \right)}{C_5} \right) \delta \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) - \left( \frac{\delta \left( \frac{I_{S_n} + I_{S_{n-1}}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) - \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2} \right) \right)}{C_5} \right) \delta \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2} \right) - \eta \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{214}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{312} &= f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{213}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{214}}{2} \right) \\ &= \mu \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2} \right) + \mu_Q \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2} \right) + \alpha_1 \left( \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2} \right) - \alpha_1 \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{213}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$k_{313} = f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{213}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{214}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -v \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2} \right) + \mu \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{213}}{2} \right) + v \left( \lambda_{R_n} - \frac{hk_{213}}{2} \right) \\
k_{314} &= f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2}, \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2}, \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2}, \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2}, \lambda_{Q_n} - \frac{hk_{212}}{2}, \lambda_{R_n} - \frac{hk_{213}}{2}, \lambda_{B_n} - \frac{hk_{214}}{2} \right) \\
&= -C_3 \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2} \right) \\
&\quad \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)}{\kappa + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)} \right) \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1 - p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. \gamma \left( \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1 - p) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2} \right) \right) \right) \left( \frac{\beta \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \kappa}{\left( \kappa + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right) \right)^2} - \lambda_{I_A} \left( 1 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)}{\kappa + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)} \right) \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1 - p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. \left. \gamma \left( \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1 - p) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2} \right) \right) \right) \right) \left( \frac{p \beta \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \kappa}{\left( \kappa + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right) \right)^2} - \left( \lambda_{I_{S_n}} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{hk_{211}}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)}{\kappa + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)} \right) \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \frac{hk_{210}}{2} \right) + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1 - p) - \left( \lambda_{S_n} - \frac{hk_{28}}{2} \right) \right) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma \left( \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \right) \left( \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \frac{hk_{210}}{2} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \frac{hk_{211}}{2} \right) (1 - p) \right) - \left( \lambda_{E_n} - \frac{hk_{29}}{2} \right) \right) \left( 1 - p \right) \frac{\beta \left( \frac{S_n + S_{n-1}}{2} \right) \kappa}{\left( \kappa + \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right) \right)^2} + \\ & d \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{214}}{2} \right) + \left( \lambda_{B_n} - \frac{hk_{214}}{2} \right) \left( \frac{\lambda_B \left( \frac{B_n + B_{n-1}}{2} \right)}{c_7} \right) \end{aligned}$$

Selanjutnya yaitu menentukan  $k_{48}$ ,  $k_{49}$ ,  $k_{410}$ ,  $k_{411}$ ,  $k_{412}$ ,  $k_{413}$ ,  $k_{414}$  dengan setiap *costate* ( $\lambda$ ) diganti ( $\lambda - hk_3$ ). Ada minus berarti bergerak mundur dalam setiap waktu. Berikut adalah nilai perhitungannya.

$$\begin{aligned} k_{48} &= f \left( t_n - h, \lambda_{S_n} - hk_{38}, \lambda_{E_n} - hk_{39}, \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}, \lambda_{I_{S_n}} - \right. \\ & \quad \left. hk_{311}, \lambda_{Q_n} - hk_{312}, \lambda_{R_n} - hk_{313}, \lambda_{B_n} - hk_{314} \right) \\ &= \mu \left( \lambda_{S_n} - hk_{38} \right) + \left( \frac{\Psi(S_{n-1}) \left( (\lambda_{S_n} - hk_{38}) - (\lambda_{E_n} - hk_{39}) \right)}{c_6} \right) \\ & \quad \Psi \left( \lambda_{S_n} - hk_{38} \right) + \left( 1 - \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} (S_{n-1}) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left. hk_{310} \right) + \left( \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311} \right) (1 - p) - \left( \lambda_{S_n} - hk_{38} \right) \right) \right) + \right. \\ & \quad \left. \gamma(E_{n-1}) \left( \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311} \right) (1 - p) - \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left. \left( \lambda_{E_n} - hk_{39} \right) \right) \right) \right) \right) \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} \right) \left( \lambda_{S_n} - hk_{38} \right) - \\ & \quad \left( \frac{\Psi(S_{n-1}) \left( (\lambda_{S_n} - hk_{38}) - (\lambda_{E_n} - hk_{39}) \right)}{c_6} \right) \Psi \left( \lambda_{E_n} - hk_{39} \right) - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left( 1 - \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} (S_{n-1}) \left( p (\lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}) (1 - p) - (\lambda_{S_n} - hk_{38}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \gamma(E_{n-1}) \left( \left( (\lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}) p + (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}) (1 - p) - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (\lambda_{E_n} - hk_{39}) \right) \right) \right) \right) p \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} (\lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}) - \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} (S_{n-1}) \left( p (\lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}) + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{310}) (1 - p) - (\lambda_{S_n} - hk_{38}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \gamma(E_{n-1}) \left( \left( (\lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}) p + (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}) (1 - p) - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (\lambda_{E_n} - hk_{39}) \right) \right) \right) \right) (1 - p) \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{49} &= f(t_n - h, \lambda_{S_n} - hk_{38}, \lambda_{E_n} - hk_{39}, \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}, \lambda_{I_{S_n}} - \\
& \quad hk_{311}, \lambda_{Q_n} - hk_{312}, \lambda_{R_n} - hk_{313}, \lambda_{B_n} - hk_{314}) \\
&= -\epsilon(\lambda_{S_n} - hk_{38}) + \epsilon(\lambda_{E_n} - hk_{39}) + \mu\lambda_E + \left( 1 - \right. \\
& \quad \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} (S_{n-1}) \left( p (\lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}) + (\lambda_{I_{S_n}} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. hk_{311}) (1 - p) - (\lambda_{S_n} - hk_{38}) \right) + \gamma(E_{n-1}) \left( (\lambda_{I_{A_n}} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. hk_{310}) p + (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}) (1 - p) - (\lambda_{E_n} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. hk_{39}) \right) \right) \left. \right) \gamma(\lambda_{E_n} - hk_{39}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( 1 - \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} (S_{n-1}) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310} \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311} \right) (1 - p) - \left( \lambda_{S_n} - hk_{38} \right) \right) + \right. \\
& \left. \gamma(E_{n-1}) \left( \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311} \right) (1 - p) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left( \lambda_{E_n} - hk_{39} \right) \right) \right) \right) \right) p \gamma \left( \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310} \right) - \left( 1 - \right. \\
& \left. \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} (S_{n-1}) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310} \right) + \left( \lambda_{I_{S_n}} - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. hk_{311} \right) (1 - p) - \left( \lambda_{S_n} - hk_{38} \right) \right) + \gamma(E_{n-1}) \left( \left( \lambda_{I_{A_n}} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. hk_{310} \right) p + \left( \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311} \right) (1 - p) - \left( \lambda_{E_n} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. hk_{39} \right) \right) \right) \right) (1 - p) \gamma \left( \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{410} &= f \left( t_n - h, \lambda_{S_n} - hk_{38}, \lambda_{E_n} - hk_{39}, \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}, \right. \\
& \quad \left. \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}, \lambda_{Q_n} - hk_{312}, \lambda_{R_n} - hk_{313}, \lambda_{B_n} - hk_{314} \right) \\
&= -C_2(I_{A_{n-1}}) + \mu \left( \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310} \right) + \alpha_2 \left( \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310} \right) - \\
& \quad \alpha_2 \left( \lambda_{R_n} - hk_{313} \right) - \eta \left( \lambda_{B_n} - hk_{314} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{411} &= f \left( t_n - h, \lambda_{S_n} - hk_{38}, \lambda_{E_n} - hk_{39}, \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}, \right. \\
& \quad \left. \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}, \lambda_{Q_n} - hk_{312}, \lambda_{R_n} - hk_{313}, \lambda_{B_n} - hk_{314} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -C_1(I_{S_{n-1}}) + \mu \left( \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311} \right) + \mu_S \left( \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311} \right) + \\
&\quad \left( \frac{\delta(I_{S_{n-1}}) \left( (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}) - (\lambda_{Q_n} - hk_{312}) \right)}{c_5} \right) \delta \left( \lambda_{I_{S_n}} - \right. \\
&\quad \left. hk_{311} \right) - \left( \frac{\delta(I_{S_{n-1}}) \left( (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}) - (\lambda_{Q_n} - hk_{312}) \right)}{c_5} \right) \delta \left( \lambda_{Q_n} - \right. \\
&\quad \left. hk_{312} \right) - \eta \left( \lambda_{B_n} - hk_{314} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{412} &= f \left( t_n - h, \lambda_{S_n} - hk_{38}, \lambda_{E_n} - hk_{39}, \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}, \right. \\
&\quad \left. \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}, \lambda_{Q_n} - hk_{312}, \lambda_{R_n} - hk_{313}, \lambda_{B_n} - hk_{314} \right) \\
&= \mu \left( \lambda_{Q_n} - hk_{312} \right) + \mu_Q \left( \lambda_{Q_n} - hk_{312} \right) + \alpha_1 \left( \lambda_{Q_n} - \right. \\
&\quad \left. hk_{312} \right) - \alpha_1 \left( \lambda_{R_n} - hk_{313} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{411} &= f \left( t_n - h, \lambda_{S_n} - hk_{38}, \lambda_{E_n} - hk_{39}, \lambda_{I_{A_n}} - \right. \\
&\quad \left. hk_{310}, \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}, \lambda_{Q_n} - hk_{312}, \lambda_{R_n} - hk_{313}, \right. \\
&\quad \left. \lambda_{B_n} - hk_{314} \right) \\
&= -v \left( \lambda_{S_n} - hk_{38} \right) + \mu \left( \lambda_{R_n} - hk_{313} \right) + v \left( \lambda_{R_n} - hk_{313} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{411} &= f \left( t_n - h, \lambda_{S_n} - hk_{38}, \lambda_{E_n} - hk_{39}, \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}, \right. \\
&\quad \left. \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}, \lambda_{Q_n} - hk_{312}, \lambda_{R_n} - hk_{313}, \lambda_{B_n} - hk_{314} \right) \\
&= -C_3(B_{n-1}) - \left( \lambda_{S_n} - hk_{38} \right) \\
&\quad \left( 1 - \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} (S_{n-1}) \right) \left( p \left( \lambda_{I_{A_n}} - hk_{310} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left( \lambda_{I_{S_n}} - hk_{311} \right) (1 - p) - \left( \lambda_{S_n} - hk_{38} \right) \right) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma(E_{n-1}) \left( \left( (\lambda_{I_{A_n}} - hk_{310})p + (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311})(1-p) - \right. \right. \\
& \left. \left. (\lambda_{E_n} - hk_{39}) \right) \right) \frac{\beta(S_{n-1})\kappa}{(\kappa + (B_{n-1}))^2} - \\
& \lambda_{I_A} \left( 1 - \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} (S_{n-1}) \left( p(\lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311})(1-p) - (\lambda_{S_n} - hk_{38}) \right) \right) + \\
& \gamma(E_{n-1}) \left( \left( (\lambda_{I_{A_n}} - hk_{310})p + (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311})(1-p) - \right. \right. \\
& \left. \left. (\lambda_{E_n} - hk_{39}) \right) \right) \frac{p\beta(S_{n-1})\kappa}{(\kappa + (B_{n-1}))^2} - (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311}) \left( 1 - \right. \\
& \left. \frac{1}{C_4} \left( \frac{\beta(B_{n-1})}{\kappa + (B_{n-1})} (S_{n-1}) \left( (\lambda_{I_{A_n}} - hk_{310}) + (\lambda_{I_{S_n}} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. hk_{311})(1-p) - (\lambda_{S_n} - hk_{38}) \right) \right) + \gamma(E_{n-1}) \left( \left( (\lambda_{I_{A_n}} - \right. \right. \\
& \left. \left. hk_{310})p + (\lambda_{I_{S_n}} - hk_{311})(1-p) - (\lambda_{E_n} - \right. \right. \\
& \left. \left. hk_{39}) \right) \right) \left( 1 - p \right) \frac{\beta(S_{n-1})\kappa}{(\kappa + (B_{n-1}))^2} + d(\lambda_{B_n} - hk_{314}) + \\
& (\lambda_{B_n} - hk_{314}) \left( \frac{\lambda_B(B_{n-1})}{C_7} \right)
\end{aligned}$$

Proses perhitungan nilai  $k_{18} - k_{114}$ ,  $k_{28} - k_{214}$ ,  $k_{38} - k_{314}$ , dan  $k_{48} - k_{414}$  telah selesai, sehingga selanjutnya adalah menghitung persamaan nilai *costate* yang baru, dapat dilihat pada Persamaan (4.36).

#### 4.5 Hasil Simulasi Numerik

Langkah selanjutnya dilakukan simulasi numerik pada model penyebaran penyakit kolera dengan kontrol optimal. Pada

subbab ini, dijelaskan mengenai hasil simulasi yang telah dilakukan. Simulasi dilakukan untuk memudahkan pengamatan terhadap perbandingan laju perubahan setiap variabel sebelum dan sesudah diberikan kendali optimal. Berikut adalah nilai parameter yang ditunjukkan pada Tabel 4.3

Tabel 4.3 Nilai Parameter Model

Parameter	Nilai Parameter	Sumber	Parameter	Nilai Parameter	Sumber
$S(0)$	5750	[6]	$\psi$	0.008	[6]
$E(0)$	0	[6]	$\epsilon$	0.003	[6]
$I_A(0)$	1000	[6]	$\gamma$	0.005	[6]
$I_S(0)$	700	[6]	$p$	0.78	[6]
$Q(0)$	0	[6]	$\alpha_1$	0.2	[6]
$R(0)$	0	[6]	$\alpha_2$	0.15	[6]
$B(0)$	275000	[6]	$\delta$	0.05	[8]
$\Lambda$	$\frac{24.4N(0)}{365000}$	[8]	$\mu_S$	0.00127	[6]
$\mu$	$\frac{2.2493}{\times 10^{-5}}$	[8]	$\mu_Q$	0.0001	[8]
$\beta$	0.08	[8]	$v$	$\frac{0.4}{365}$	[8]
$\kappa$	$10^6$	[6]	$\eta$	50	[6]
$d$	$\frac{1}{30}$	[8]	$C_6$	0.5	Asumsi
$t_f$	100 hari	[6]	$C_7$	0.5	Asumsi
$C_1$	1	Asumsi	$u_1$	0.001-0.4	[8]
$C_2$	0.1	Asumsi	$u_2$	0 – 1	[6]
$C_3$	0.5	Asumsi	$u_3$	0 – 1	[6]
$C_4$	0.5	Asumsi	$u_4$	0 – 1	[6]
$C_5$	1	Asumsi			

Berdasarkan pada Tabel 4.3 diketahui bahwa nilai parameter  $C_1$  dan  $C_5$  diasumsikan bernilai lebih besar dibandingkan nilai  $C$  lainnya, dikarenakan dalam proses pengobatan pada individu yang terinfeksi gejala berat dibutuhkan waktu yang lebih lama dan biaya yang lebih besar. Selain itu, nilai  $C_2$  lebih kecil dibandingkan  $C_1$  karena dalam proses penyembuhan pada individu yang terinfeksi gejala ringan lebih cepat dibandingkan dengan individu yang terinfeksi gejala berat. Selanjutnya, dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 4.3 maka dapat dilakukan simulasi numerik. Sistem *state* dan *costate* diselesaikan menggunakan metode *Forward-Backward* Runge-Kutta Orde 4, sedangkan untuk kasus tanpa pemberian kontrol optimal menggunakan metode numerik Runge-Kutta Orde 4.

Tujuan dilakukan simulasi numerik yaitu untuk mengetahui pengaruh efektivitas dari pemberian kontrol optimal pada masing-masing subpopulasi. Hal tersebut ditinjau dari perbandingan jumlah individu sebelum dan setelah pemberian kontrol optimal pada setiap subpopulasi. Berikut adalah hasil simulasi setiap subpopulasi.

#### **4.5.1 Laju Perubahan Jumlah Individu dan Bakteri**

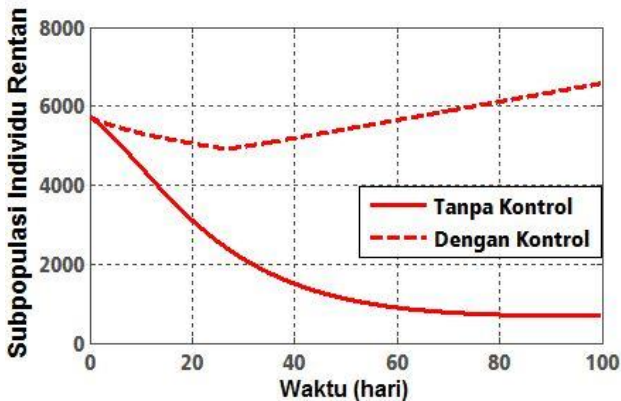
Berikut adalah analisis laju perubahan jumlah individu pada masing-masing subpopulasi dan konsentrasi bakteri dengan dan tanpa kontrol optimal.

##### **1. Laju Perubahan Jumlah Individu Rentan ( $S(t)$ )**

Subpopulasi awal individu rentan berjumlah 5750 individu. Setelah dilakukan simulasi, diperoleh perbandingan antara saat pemberian kontrol optimal dan tanpa pemberian kontrol optimal yang dapat dilihat pada Gambar 4.2. Berdasarkan grafik tersebut diketahui bahwa individu ringan mengalami penurunan pada saat

diberikan kontrol optimal. Jumlah individu ringan dengan waktu akhir tanpa kontrol optimal sebanyak 702 individu sedangkan dengan kontrol optimal jumlah individu pada waktu akhir sebanyak 6574 individu.

Besarnya jumlah individu rentan dengan kendali optimal, disebabkan oleh besarnya pengaruh  $\nu$  yaitu tingkat individu sembuh menjadi rentan kembali serta pengaruh parameter  $\epsilon$ , yaitu tingkat subpopulasi terdidik untuk berhenti melakukan tindakan pencegahan. Berkurangnya jumlah individu yang rentan dengan kendali optimal disebabkan oleh subpopulasi rentan yang diberikan edukasi perpindah ke subpopulasi terdidik. Berikut adalah grafik laju perubahan jumlah individu ringan dengan dan tanpa kontrol optimal.



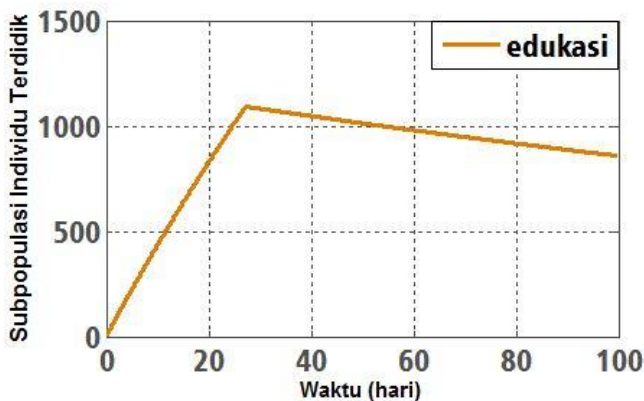
Gambar 4.2 Laju Perubahan Jumlah individu rentan ( $S(t)$ )

Berdasarkan Gambar 4.2, jumlah subpopulasi individu tanpa kendali mengalami penurunan. Hal ini disebabkan subpopulasi rentan berubah menjadi subpopulasi terinfeksi. Penyebaran bakteri *Vibrio Cholerae* cukup cepat dalam dalam subpopulasi

rentan. Dalam hal ini, efektivitas pemberian kontrol kepada individu rentan memberikan pengaruh sebesar 89,32%.

## 2. Laju perubahan Jumlah Individu Terdidik/Tereduksi ( $E(t)$ )

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, diketahui bahwa jumlah individu rentan dengan pemberian kontrol optimal mengalami penurunan. Hal tersebut menyebabkan jumlah subpopulasi individu terdidik mengalami kenaikan dikarenakan jumlah individu yang rentan berubah menjadi individu yang tereduksi. Grafik laju perubahan jumlah individu terdidik dapat dilihat pada Gambar 4.3.



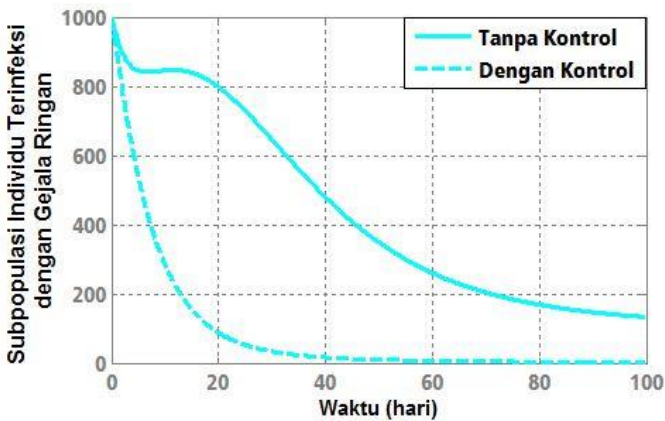
Gambar 4.3 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi individu terdidik ( $E(t)$ )

Berdasarkan Gambar 4.2, jumlah subpopulasi individu rentan menjadi individu terdidik sebanyak 859 individu.



### 3. Laju Perubahan Jumlah Individu Terinfeksi Kolera dengan Gejala Ringan ( $I_A(t)$ )

Subpopulasi awal Individu dengan gejala ringan ( $I_A(t)$ ) berjumlah 1000 individu. Setelah dilakukan simulasi, diperoleh perbandingan antara saat pemberian kontrol optimal dan tanpa pemberian kontrol optimal yang dapat dilihat pada Gambar 4.4. berdasarkan grafik tersebut diketahui bahwa individu  $I_A(t)$  mengalami penurunan pada saat diberikan kontrol optimal. Jumlah individu  $I_A(t)$  dengan waktu akhir tanpa kontrol optimal sebanyak 133 individu sedangkan dengan kontrol optimal jumlah individu pada waktu akhir sebanyak 2 individu.



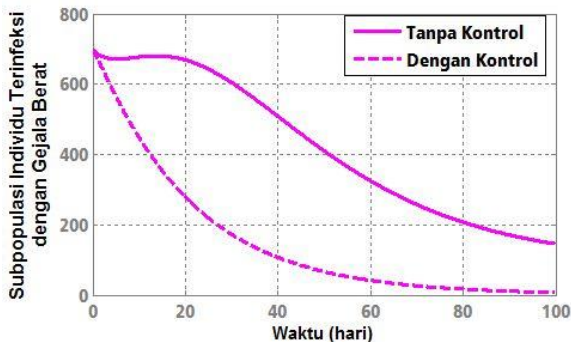
#### 4.4 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Individu Terinfeksi Kolera dengan Gejala Ringan ( $I_A(t)$ )

Berdasarkan Gambar 4.4, jumlah subpopulasi individu terinfeksi kolera dengan gejala ringan tanpa kendali mengalami penurunan. Hal ini disebabkan besarnya pengaruh parameter  $\beta$

yaitu tingkat konsumsi bakteri melalui sumber yang terkontaminasi. Jika nilai  $\beta$  semakin besar, maka jumlah individu tanpa kontrol optimal akan semakin berkurang. Hal ini menyebabkan individu dengan gejala ringan dapat berubah menjadi individu dengan gejala berat apabila individu tidak menyadari gejala yang dialami, sebab kurangnya pengetahuan atau kelengahan individu terdidik. Sehingga, dalam hal ini tingkat efektifitas dari pemberian kontrol pada subpopulasi individu terinfeksi kolera dengan gejala ringan ( $I_A(t)$ ) memberikan pengaruh sebesar 98,50%. Jadi tujuan untuk meminimumkan jumlah individu dengan gejala ringan dapat terpenuhi.

#### 4. Laju Perubahan Jumlah Individu Terinfeksi Kolera dengan Gejala Berat ( $I_S(t)$ )

Subpopulasi awal individu terinfeksi kolera dengan gejala berat ( $I_S(t)$ ) berjumlah 700 individu. Setelah dilakukan simulasi, diperoleh perbandingan antara saat pemberian kontrol optimal dan tanpa pemberian kontrol optimal yang dapat dilihat pada Gambar 4.5.

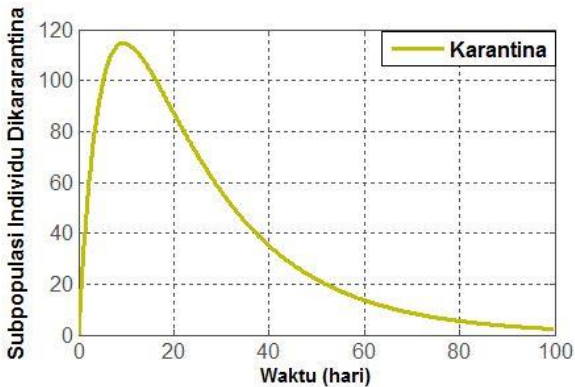


Gambar 4.5 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Individu Terinfeksi Kolera dengan Gejala Berat ( $I_S(t)$ )

Hal ini menunjukkan bahwa tingkat efektivitas pada pemberian kontrol pada subpopulasi individu terinfeksi kolera dengan gejala berat ( $I_S(t)$ ) memberikan memberikan pengaruh sebesar 95,17%. Sehingga, dalam hal ini tujuan untuk meminimumkan jumlah individu yang terinfeksi gejala berat dapat terpenuhi.

#### 5. Laju Perubahan Jumlah Individu yang Dikarantina ( $Q(t)$ )

Karantina diperuntukkan bagi individu yang terinfeksi gejala berat, selama proses tersebut individu akan diberikan pengobatan. Berikut adalah grafik laju perubahan jumlah individu yang dikarantina dengan kontrol optimal berupa pengobatan.



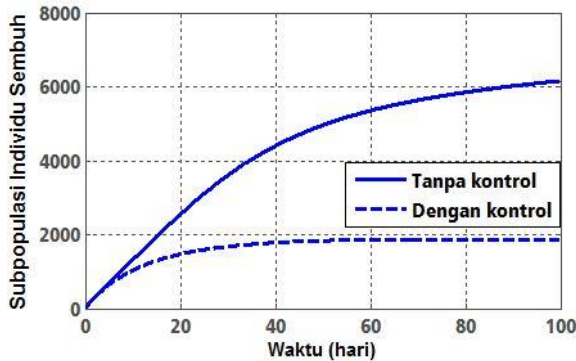
Gambar 4.6 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Individu yang Dikarantina ( $Q(t)$ )

Berdasarkan Gambar 4.6, jumlah subpopulasi individu dikarantina pada waktu akhir  $t = 100$  hari, jumlah individu semakin berkurang menjadi 2 individu. Sehingga, perlakuan karantina kepada subpopulasi individu yang terinfeksi gejala berat

dapat mengurangi penyebaran penyakit dan jumlah subpopulasi yang terinfeksi penyakit kolera.

#### 6. Laju Perubahan Jumlah Individu yang Sembuh ( $R(t)$ )

Perbandingan antara jumlah individu yang sembuh dengan dan tanpa pemberian kontrol optimal dapat dilihat pada Gambar 4.7. Berdasarkan grafik tersebut diketahui bahwa individu rentan mengalami penurunan pada saat diberikan kontrol optimal. Jumlah individu rentan dengan waktu akhir tanpa kontrol optimal sebanyak 6160 sedangkan dengan kontrol optimal jumlah individu pada waktu akhir sebanyak 1855 individu. Hal ini disebabkan oleh pengaruh kontrol optimal yang diberikan, yaitu perbaikan sanitasi, edukasi, karantina dan klorinasi. Berikut adalah grafik laju perubahan jumlah individu yang sembuh.



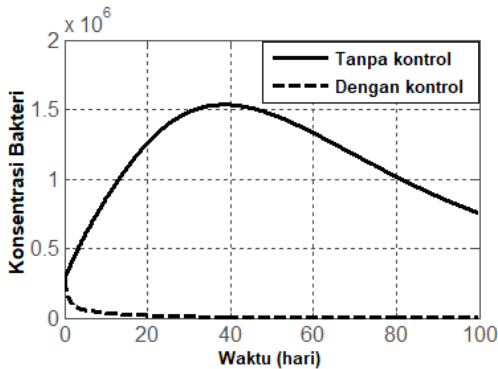
Gambar 4.7 Laju Perubahan Jumlah Subpopulasi Individu yang Sembuh

Perbaikan sanitasi dilakukan untuk mengurangi tingkat penyerapan bakteri yang ditimbulkan oleh individu yang terinfeksi. Sedangkan pemberian edukasi kepada masyarakat

mampu mengurangi jumlah individu rentan dan individu yang terinfeksi penyakit kolera. Selain itu, pengobatan untuk individu gejala berat yang sedang dikarantina berpengaruh terhadap kesembuhan individu. Serta tak lupa dengan adanya pemberian klorinasi dapat menurunkan tingkat konsentrasi bakteri. Sehingga, tingkat efektivitas dari pemberian kontrol pada subpopulasi individu yang sembuh yaitu sebesar 69,87 %

#### 7. Laju Perubahan Tingkat Konsentrasi Bakteri

Tingkat konsentrasi bakteri diwaktu awal yaitu sebesar 275000 *cell/ml*. Setelah dilakukan simulasi, diperoleh perbandingan antara saat pemberian kontrol optimal dan tanpa pemberian kontrol optimal. Berikut adalah grafik laju perubahan tingkat konsentrasi bakteri.

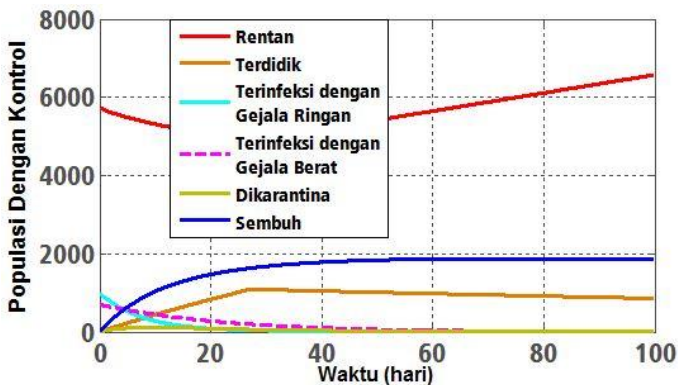


Gambar 4.8 Laju Perubahan Jumlah Konsentrasi Bakteri

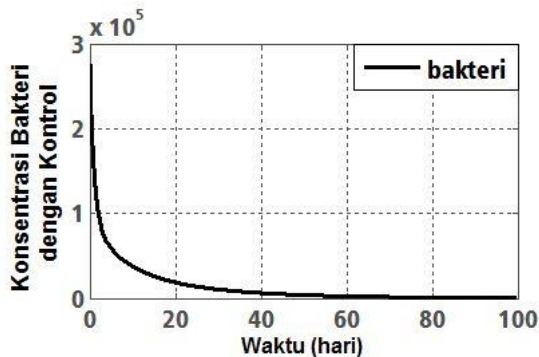
Berdasarkan grafik tersebut diketahui bahwa konsentrasi bakteri mengalami penurunan pada saat diberikan kontrol. Jumlah konsentrasi bakteri dengan waktu akhir tanpa kontrol sebanyak  $7,5 \times 10^5$  sedangkan dengan kontrol jumlah konsentrasi bakteri pada waktu akhir sebanyak 517. Tingkat dari pemberian kontrol

pada bakteri memberikan pengaruh sebesar 99,93%. Sehingga, dalam hal ini tujuan untuk meminimumkan jumlah konsentrasi bakteri dapat terpenuhi.

Grafik gabungan dari laju perubahan jumlah populasi dengan kontrol optimal serta grafik dari laju perubahan konsentrasi bakteri dengan kontrol dapat dilihat pada Gambar 4.9 dan Gambar 4.10 berikut ini

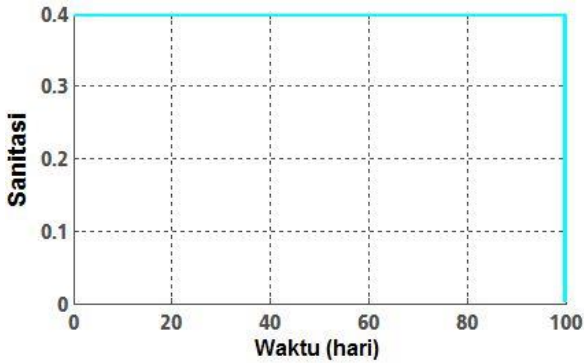


Gambar 4.9 Laju Perubahan Jumlah Populasi Dengan Kontrol Optimal

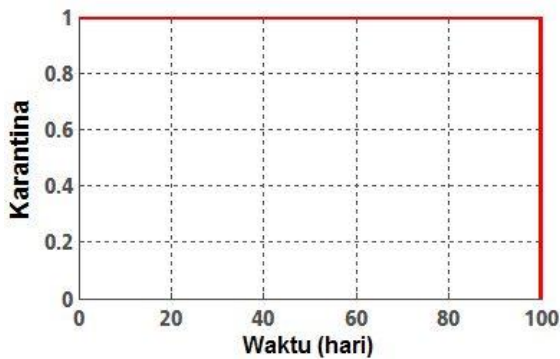


Gambar 4.10 Laju Perubahan Jumlah Konsentrasi Bakteri Dengan Kontrol Optimal

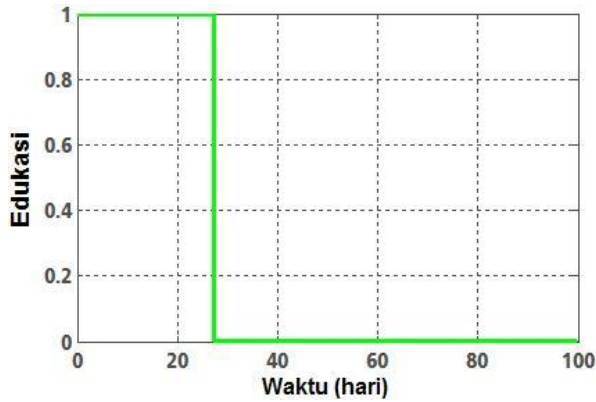
Grafik tingkat pemberian kontrol optimal berupa perbaikan sanitasi, edukasi, pengobatan (karantina) dan klorinasi dapat dilihat pada gambar 4.11 – 4.14.



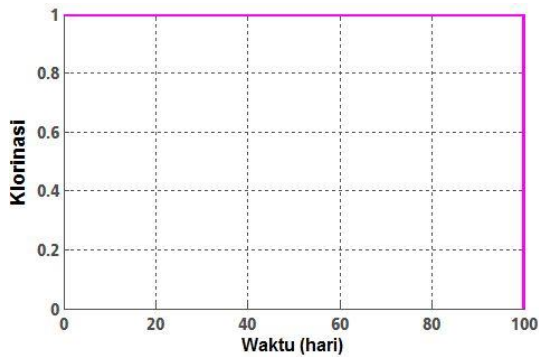
Gambar 4.11 Tingkat Pemberian Kontrol Optimal Berupa Sanitasi



Gambar 4.12 Tingkat Pemberian Kontrol Optimal Berupa Karantina



Gambar 4.13 Tingkat Pemberian Kontrol Optimal Berupa Edukasi



Gambar 4.14 Tingkat Pemberian Kontrol Optimal Berupa Klorinasi

Berdasarkan Gambar 4.11 – 4.14 ditunjukkan bahwa tingkat pemberian kontrol optimal pada individu dan bakteri maksimal, yaitu pada nilai 1 dan untuk pemberian kontrol sanitasi maksimal berada pada nilai 0,4. Hal ini menunjukkan bahwa pada waktu



$t = 100$  hari, pemberian kontrol dapat mempengaruhi secara maksimal.

Hasil akhir pada penelitian ini adalah untuk menunjukkan efek dari kontrol yang diberikan. Berdasarkan hasil yang diperoleh dari simulasi, jika tidak diberikan kontrol maka jumlah individu yang terinfeksi dan jumlah bakteri mengalami peningkatan yang sangat besar pada waktu-waktu tertentu. Pemberian kontrol berdampak pada jumlah populasi yang terinfeksi dan populasi bakteri mengalami pengurangan, sehingga endemik penyakit kolera menjadi tidak besar. Bila dibandingkan dengan penelitian sebelumnya oleh Syafi'i dkk (2018) dengan menggunakan tiga kontrol jumlah individu yang terinfeksi gejala ringan saat  $t = 20$  hari, tanpa adanya kontrol sebanyak 800 individu dan dengan pemberian kontrol berkurang menjadi 504 individu dengan tingkat keefektifan kontrol sebesar 37%. Sedangkan dengan menggunakan empat kontrol jumlah individu yang terinfeksi gejala ringan dapat dilihat pada Gambar 4.13 pada saat  $t = 20$  hari, tanpa adanya kontrol sebanyak 669 individu dan dengan pemberian kontrol berkurang menjadi 280 individu dengan tingkat keefektifan kontrol sebesar 58,14%. Berdasarkan data diatas, diketahui bahwa dengan menambahkan satu variabel kontrol optimal berupa pemberian klorin ternyata mampu mengurangi lebih banyak jumlah individu yang terinfeksi gejala kolera.

## BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dikerjakan serta saran yang diberikan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan dari penelitian terkait kolera, diantaranya

1. Kontrol optimal yang diperoleh dari model matematika penyebaran kolera menggunakan metode *Pontryagin Minimum Principle* dengan kontrol berupa perbaikan sanitasi ( $u_1$ ), pengobatan ( $u_2$ ), edukasi ( $u_3$ ) dan klorinasi ( $u_4$ ) akan optimal jika nilai

$$u_1^* = \frac{1}{c_4} \left( \frac{\beta B}{\kappa + B} S \left( p\lambda_{IA} + \lambda_{IS}(1-p) - \lambda_S \right) + \gamma E (\lambda_{IA} p + \lambda_{IS}(1-p) - \lambda_E) \right)$$

$$u_2^* = \frac{\delta I_S (\lambda_{IS} - \lambda_Q)}{c_5}$$

$$u_3^* = \frac{\psi S (\lambda_S - \lambda_E)}{c_6}$$

$$u_4^* = \frac{\lambda_B B}{c_7}$$

2. Berdasarkan hasil simulasi yang telah dilakukan, ditunjukkan bahwa pemberian kontrol optimal dapat meminimumkan jumlah individu terinfeksi kolera dengan gejala ringan pada waktu akhir sebanyak 2 individu dan individu terinfeksi kolera dengan gejala berat pada waktu akhir sebanyak 7 individu serta dapat meminimumkan jumlah konsentrasi bakteri pada waktu akhir sebanyak 517 *cell/ml*.

## **5.2 Saran**

Pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan melakukan modifikasi upaya kontrol optimal selain yang dijelaskan pada penelitian ini, dengan data aktual yang dapat dijadikan sebagai estimasi parameter. Selain itu, dalam penelitian ini terdapat empat kontrol optimal, sehingga dapat dilakukan pengujian pada setiap kontrol optimal agar dapat membandingkan kontrol yang lebih efektif

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] World Health Organization. (2008). "Prevention and control of cholera outbreaks: WHO policy and recommendations".
- [2] Johnson, L. (2006). "Mathematical Modeling Of Cholera: From Bacterial Life Histories To Human Epidemics". California (US): University of California Santa Cruz Pr.
- [3] Hasanah, S.M. (2019). "Kendali Optimal Pencegahan Penyebaran Penyakit Kolera Dengan *Control Treatment* dan Klorinasi". Tugas Akhir: Balikpapan, Institut Teknologi Kalimantan.
- [4] Anggaraditya, Putu Bagus. Tanpa Tahun. "Menekan Laju Penyebaran Kolera di Asia dengan 3SW (Strerilization, Sewage, Sources, and Water Purification)". ISM, Vol. 3, No. 1, Hal. 83-87.
- [5] URL<[https://www.who.int/gho/epidemic\\_diseases/cholera/cases\\_text/en/](https://www.who.int/gho/epidemic_diseases/cholera/cases_text/en/)> Diakses 24 Januari 2019
- [6] Syafi'i, A.M., Subchan, Irma, F. (2018). "An Epidemic Cholera With Control Treatment and Intervention". Seminar Internasional ICoMPAC.
- [7] Bakhtiar, T. (2015). "Peran Edukasi dan Klorinasi dalam Pengendalian Penyakit Menular: Sebuah Pendekatan Kontrol Optimum". Prosding Semirata: Bogor.
- [8] Lemos-Paiao. A.P. dkk. (2016). " An epidemic model for cholera with optimal kontrol treatment". Journal of Computational and Applied Mathematics. Portugal : University of Aveiro.
- [9] Putra, R.T. dkk. (2015). "Kestabilan Model Epidemi SEIR dengan Laju Insidensi". Poli Rekayasa Vol. 10, Hal. 1858-3709.

- [10]Zulaikha, dkk. (2017). “Kontrol Optimal pada Model Epidemi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar”. Prosiding SI MaNIs, Vol. 1, No.1, Hal. 41-51.
- [11]Naidu, S. D. (2002). “Optimal Control System”. USA : CRC Press LLC.
- [12]Munir, R. (2002). “Metode Numerik”. Bandung: Informatika.
- [13]Subchan and R. Zbikowski. (2009). “Computational optimal control: Tools and practice”. John Wiley and Sons
- [14]Burden, R.L, Faires, D.J, and Burden, A.M. (2016). “Numerical Analysis”. Boston USA: Cengage Learning 10th Edition.
- [15]Lindfield, G and Penny, J. (1995). “Numerical Method Using MATLAB”. Botmin Cornwall: MPG Book Ltd.

## LAMPIRAN

### Lampiran A. Source Code Simulasi

```
%nilai variabel costate
```

```
w1=0;
```

```
w2=0;
```

```
w3=0;
```

```
w4=0;
```

```
w5=0;
```

```
w6=0;
```

```
w7=0;
```

```
%variabel u
```

```
u1 = zeros(1,N+1);
```

```
u2 = zeros(1,N+1);
```

```
u3 = zeros(1,N+1);
```

```
u4 = zeros(1,N+1);
```

```
%variabel state
```

```
S= zeros(1,N+1);
```

```
E= zeros(1,N+1);
```

```
Ia= zeros(1,N+1);
```

```
Is= zeros(1,N+1);
```

```
Q= zeros(1,N+1);
```

```
R= zeros(1,N+1);
```

```
B= zeros(1,N+1);
```

```
t(1)=a;
```

```
t1(1)=a;
```

```
S(1) = S0;
```

```
E(1) = E0;
```

```
Ia(1) = Ia0;
```

```
Is(1) = Is0;
```

```
Q(1) = Q0;
```

```
R(1) = R0;
```

```
B(1) = B0;
```

```
S1(1) = S0;
```

```
Ia1(1) = Ia0;
```

```
Is1(1) = Is0;
```

```
R1(1) = R0;
```

```
B1(1) = B0;
```

```
% variabel costate
```

```
lambdaS = zeros(1,N+1);
```

```
lambdaE = zeros(1,N+1);
```

```
lambdaIA = zeros(1,N+1);
```

```
lambdaIS = zeros(1,N+1);
```

```
lambdaQ = zeros(1,N+1);
```

```
lambdaR = zeros(1,N+1);
```

```
lambdaB = zeros(1,N+1);
```

```
lambdaS(N+1) = w1;
```

```
lambdaE(N+1) = w2;
```

```
lambdaIA(N+1) = w3;
```

```
lambdaIS(N+1) = w4;
```

```
lambdaQ(N+1) = w5;
```

```
lambdaR(N+1) = w6;
```

```
lambdaB(N+1) = w7;
```

```
%Persamaan State
```

```
fS =
```

```
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u1,u2,u3,u4,lambdaS,lambdaE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambdaB) A+v*R+epsilen*E-miu*S-u3*psi*S-(1-u1)*beta*S*(B/(k+B));
```

```
fE =
```

```
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u1,u2,u3,u4,lambdaS,lambdaE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambdaB) u3*psi*S-epsilen*E-miu*E-(1-u1)*gamma*E;
```

```

fIa =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u1, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lambdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
(1-u1)*p*beta*S*(B/(k+B))+(1-u1)*p*gamma*E-miu*Ia-alpha2*Ia;
fIs =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u1, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lambdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
(1-u1)*(1-p)*beta*S*(B/(k+B))+(1-u1)*(1-p)*gamma*E-miu*Is-mius*Is-u2*delta*Is;
fQ =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u1, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lambdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
u2*delta*Is-miu*Q-miuq*Q-alpha1*Q;
fR =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u1, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lambdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
alpha1*Q+alpha2*Ia-miu*R-v*R;
fB =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u1, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lambdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
eta*Ia+eta*Is-d*B-u4*B;

```

### %Persamaan Costate

```

fLS =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u1, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lambdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
-1*(-lambdaS*miu-lambdaS*u3*psi-lambdaS*(1-u1)*beta*(B/(k+B))+lambdaE*u3*psi+lambdaIA*(1-u1)*p*beta*(B/(k+B))+lambdaIS*(1-u1)*(1-p)*beta*(B/(k+B)));
fLE =
@(t, S, E, Ia, Is, Q, R, B, u1, u2, u3, u4, lambdaS, lambdaE, lambdaIA, lambdaIS, lambdaQ, lambdaR, lambdaB)
-1*(lambdaS*epsilen-lambdaE*epsilen-

```



```

lambdaE*miu-lambdaE*(1-
u1)*gamma+lambdaIA*(1-
u1)*p*gamma+lambdaIS*(1-u1)*(1-p)*gamma);
fLIA =
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u1,u2,u3,u4,lambdaS,lamb
daE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambda
B) -1*(C2*Ia-lambdaIA*miu-
lambdaIA*alpha2+lambdaR*alpha2+lambdaB*eta);
fLIS =
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u1,u2,u3,u4,lambdaS,lamb
daE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambda
B) -1*(C1*Is-lambdaIS*miu-lambdaIS*mius-
lambdaIS*u2*delta+lambdaQ*u2*delta+lambdaB*e
ta);
fLQ =
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u1,u2,u3,u4,lambdaS,lamb
daE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambda
B) -1*(-lambdaQ*miu-lambdaQ*miuq-
lambdaQ*alpha1+lambdaR*alpha1);
fLR =
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u1,u2,u3,u4,lambdaS,lamb
daE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambda
B) -1*(lambdaS*v-lambdaR*miu-lambdaR*v);
fLB =
@(t,S,E,Ia,Is,Q,R,B,u1,u2,u3,u4,lambdaS,lamb
daE,lambdaIA,lambdaIS,lambdaQ,lambdaR,lambda
B) -1*(C3*B+lambdaS*(1-
u1)*beta*S*(k/((k+B)^2))+lambdaIA*(1-
u1)*p*beta*S*(k/((k+B)^2))+lambdaIS*(1-
u1)*(1-p)*beta*S*(k/((k+B)^2))-lambdaB*d-
lambdaB*u4);

```

**%Persamaan tanpa Kontrol**

```

fS1 = @(t1,S1,Ia1,Is1,R1,B1) A+v*R1-
miu*S1-beta*S1*(B1/(k+B1));

```

```

fIa1 = @(t1,S1,Ia1,Is1,R1,B1)
p*beta*S1*(B1/(k+B1))-miu*Ia1-alpha2*Ia1;
fIs1 = @(t1,S1,Ia1,Is1,R1,B1) (1-
p)*beta*S1*(B1/(k+B1))-miu*Is1-mius*Is1-
delta*Is1;
fR1 = @(t1,S1,Ia1,Is1,R1,B1) alpha2*Ia1-
miu*R1-v*R1;
fB1 = @(t1,S1,Ia1,Is1,R1,B1)
eta*Ia1+eta*Is1-d*B1;

```

```
while(test < 0)
```

```

    oldu1 = u1;
    oldu2 = u2;
    oldu3 = u3;
    oldu4 = u4;
    oldS = S;
    oldE = E;
    oldIa = Ia;
    oldIs = Is;
    oldQ = Q;
    oldR = R;
    oldB = B;

```

```

    oldlambdaS = lambdaS;
    oldlambdaE = lambdaE;
    oldlambdaIA = lambdaIA;
    oldlambdaIS = lambdaIS;
    oldlambdaQ = lambdaQ;
    oldlambdaR = lambdaR;
    oldlambdaB = lambdaB;

```

```
%---Representasi metode Runge-Kutta---%
```

```
%persamaan tanpa kontrol
```

```
    for i = 1:N
```

```
        t1(i+1) = t1(i)+h;
```

$k1S1=fS1(t1(i), S1(i), Ia1(i), Is1(i), R1(i), B1(i));$

$k1Ia1=fIa1(t1(i), S1(i), Ia1(i), Is1(i), R1(i), B1(i));$

$k1Is1=fIs1(t1(i), S1(i), Ia1(i), Is1(i), R1(i), B1(i));$

$k1R1=fR1(t1(i), S1(i), Ia1(i), Is1(i), R1(i), B1(i));$

$k1B1=fB1(t1(i), S1(i), Ia1(i), Is1(i), R1(i), B1(i));$

$k2S1=fS1(t1(i)+h/2, S1(i)+h2*k1S1, Ia1(i)+h2*k1Ia1, Is1(i)+h2*k1Is1, R1(i)+h2*k1R1, B1(i)+h2*k1B1);$

$k2Ia1=fIa1(t1(i)+h/2, S1(i)+h2*k1S1, Ia1(i)+h2*k1Ia1, Is1(i)+h2*k1Is1, R1(i)+h2*k1R1, B1(i)+h2*k1B1);$

$k2Is1=fIs1(t1(i)+h/2, S1(i)+h2*k1S1, Ia1(i)+h2*k1Ia1, Is1(i)+h2*k1Is1, R1(i)+h2*k1R1, B1(i)+h2*k1B1);$

$k2R1=fR1(t1(i)+h/2, S1(i)+h2*k1S1, Ia1(i)+h2*k1Ia1, Is1(i)+h2*k1Is1, R1(i)+h2*k1R1, B1(i)+h2*k1B1);$

$k2B1=fB1(t1(i)+h/2, S1(i)+h2*k1S1, Ia1(i)+h2*k1Ia1, Is1(i)+h2*k1Is1, R1(i)+h2*k1R1, B1(i)+h2*k1B1);$

$$k3S1=fS1(t1(i)+h/2,S1(i)+h2*k2S1,Ia1(i)+h2*k2Ia1,Is1(i)+h2*k2Is1,R1(i)+h2*k2R1,B1(i)+h2*k2B1);$$

$$k3Ia1=fIa1(t1(i)+h/2,S1(i)+h2*k2S1,Ia1(i)+h2*k2Ia1,Is1(i)+h2*k2Is1,R1(i)+h2*k2R1,B1(i)+h2*k2B1);$$

$$k3Is1=fIs1(t1(i)+h/2,S1(i)+h2*k2S1,Ia1(i)+h2*k2Ia1,Is1(i)+h2*k2Is1,R1(i)+h2*k2R1,B1(i)+h2*k2B1);$$

$$k3R1=fR1(t1(i)+h/2,S1(i)+h2*k2S1,Ia1(i)+h2*k2Ia1,Is1(i)+h2*k2Is1,R1(i)+h2*k2R1,B1(i)+h2*k2B1);$$

$$k3B1=fB1(t1(i)+h/2,S1(i)+h2*k2S1,Ia1(i)+h2*k2Ia1,Is1(i)+h2*k2Is1,R1(i)+h2*k2R1,B1(i)+h2*k2B1);$$

$$k4S1=fS1(t1(i)+h,S1(i)+h*k3S1,Ia1(i)+h*k3Ia1,Is1(i)+h*k3Is1,R1(i)+h*k3R1,B1(i)+h*k3B1);$$

$$k4Ia1=fIa1(t1(i)+h,S1(i)+h*k3S1,Ia1(i)+h*k3Ia1,Is1(i)+h*k3Is1,R1(i)+h*k3R1,B1(i)+h*k3B1);$$

$$k4Is1=fIs1(t1(i)+h,S1(i)+h*k3S1,Ia1(i)+h*k3Ia1,Is1(i)+h*k3Is1,R1(i)+h*k3R1,B1(i)+h*k3B1);$$

$$k4R1=fR1(t1(i)+h,S1(i)+h*k3S1,Ia1(i)+h*k3Ia1,Is1(i)+h*k3Is1,R1(i)+h*k3R1,B1(i)+h*k3B1);$$

```
k4B1=fB1(t1(i)+h,S1(i)+h*k3S1,Ia1(i)+h*k3Ia1
,Is1(i)+h*k3Is1,R1(i)+h*k3R1,B1(i)+h*k3B1);
```

```
%nilai persamaan tanpa kontrol yang baru
```

```
    S1(i+1) = S1(i) +
(h/6)*(k1S1+2*k2S1+2*k3S1+k4S1);
    Ia1(i+1) = Ia1(i) +
(h/6)*(k1Ia1+2*k2Ia1+2*k3Ia1+k4Ia1);
    Is1(i+1) = Is1(i) +
(h/6)*(k1Is1+2*k2Is1+2*k3Is1+k4Is1);
    R1(i+1) = R1(i) +
(h/6)*(k1R1+2*k2R1+2*k3R1+k4R1);
    B1(i+1) = B1(i) +
(h/6)*(k1B1+2*k2B1+2*k3B1+k4B1);
```

```
end
```

```
%persamaan state
```

```
for i = 1:N
    t(i+1) = t(i)+h;
```

```
k1S=fS(t(i),S(i),E(i),Ia(i),Is(i),Q(i),R(i),
B(i),u1(i),u2(i),u3(i),u4(i),lambdaS(i),lamb
daE(i),lambdaIA(i),lambdaIS(i),lambdaQ(i),la
mbdaR(i),lambdaB(i));
```

```
k1E=fE(t(i),S(i),E(i),Ia(i),Is(i),Q(i),R(i),
B(i),u1(i),u2(i),u3(i),u4(i),lambdaS(i),lamb
daE(i),lambdaIA(i),lambdaIS(i),lambdaQ(i),la
mbdaR(i),lambdaB(i));
```

```
k1Ia=fIa(t(i),S(i),E(i),Ia(i),Is(i),Q(i),R(i)
),B(i),u1(i),u2(i),u3(i),u4(i),lambdaS(i),la
mbdaE(i),lambdaIA(i),lambdaIS(i),lambdaQ(i),
lambdaR(i),lambdaB(i));
```

```
k1Is=fIs(t(i),S(i),E(i),Ia(i),Is(i),Q(i),R(i),
),B(i),u1(i),u2(i),u3(i),u4(i),lambdaS(i),la
mbdaE(i),lambdaIA(i),lambdaIS(i),lambdaQ(i),
lambdaR(i),lambdaB(i));
```

```
k1Q=fQ(t(i),S(i),E(i),Ia(i),Is(i),Q(i),R(i),
),B(i),u1(i),u2(i),u3(i),u4(i),lambdaS(i),lamb
daE(i),lambdaIA(i),lambdaIS(i),lambdaQ(i),la
mbdaR(i),lambdaB(i));
```

```
k1R=fR(t(i),S(i),E(i),Ia(i),Is(i),Q(i),R(i),
),B(i),u1(i),u2(i),u3(i),u4(i),lambdaS(i),lamb
daE(i),lambdaIA(i),lambdaIS(i),lambdaQ(i),la
mbdaR(i),lambdaB(i));
```

```
k1B=fB(t(i),S(i),E(i),Ia(i),Is(i),Q(i),R(i),
),B(i),u1(i),u2(i),u3(i),u4(i),lambdaS(i),lamb
daE(i),lambdaIA(i),lambdaIS(i),lambdaQ(i),la
mbdaR(i),lambdaB(i));
```

```
k2S=fS(t(i)+h/2,S(i)+h2*k1S,E(i)+h2*k1E,Ia(i)
)+h2*k1Ia,Is(i)+h2*k1Is,Q(i)+h2*k1Q,R(i)+h2*
k1R,B(i)+h2*k1B,0.5*(u1(i)+
u1(i+1)),0.5*(u2(i)+ u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+
u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+
lambdaB(i+1)));
```

$$\begin{aligned}
k2E = & fE(t(i) + h/2, S(i) + h^2 * k1S, E(i) + h^2 * k1E, Ia(i) \\
& ) + h^2 * k1Ia, Is(i) + h^2 * k1Is, Q(i) + h^2 * k1Q, R(i) + h^2 * \\
& k1R, B(i) + h^2 * k1B, 0.5 * (u1(i) + \\
& u1(i+1)), 0.5 * (u2(i) + u2(i+1)), 0.5 * (u3(i) + \\
& u3(i+1)), 0.5 * (u4(i) + \\
& u4(i+1)), 0.5 * (\lambda S(i) + \\
& \lambda S(i+1)), 0.5 * (\lambda E(i) + \\
& \lambda E(i+1)), 0.5 * (\lambda IA(i) + \\
& \lambda IA(i+1)), 0.5 * (\lambda IS(i) + \\
& \lambda IS(i+1)), 0.5 * (\lambda Q(i) + \\
& \lambda Q(i+1)), 0.5 * (\lambda R(i) + \\
& \lambda R(i+1)), 0.5 * (\lambda B(i) + \\
& \lambda B(i+1)));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k2Ia = & fIa(t(i) + h/2, S(i) + h^2 * k1S, E(i) + h^2 * k1E, Ia \\
& (i) + h^2 * k1Ia, Is(i) + h^2 * k1Is, Q(i) + h^2 * k1Q, R(i) + h \\
& 2 * k1R, B(i) + h^2 * k1B, 0.5 * (u1(i) + \\
& u1(i+1)), 0.5 * (u2(i) + u2(i+1)), 0.5 * (u3(i) + \\
& u3(i+1)), 0.5 * (u4(i) + \\
& u4(i+1)), 0.5 * (\lambda S(i) + \\
& \lambda S(i+1)), 0.5 * (\lambda E(i) + \\
& \lambda E(i+1)), 0.5 * (\lambda IA(i) + \\
& \lambda IA(i+1)), 0.5 * (\lambda IS(i) + \\
& \lambda IS(i+1)), 0.5 * (\lambda Q(i) + \\
& \lambda Q(i+1)), 0.5 * (\lambda R(i) + \\
& \lambda R(i+1)), 0.5 * (\lambda B(i) + \\
& \lambda B(i+1)));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k2Is = & fIs(t(i) + h/2, S(i) + h^2 * k1S, E(i) + h^2 * k1E, Ia \\
& (i) + h^2 * k1Ia, Is(i) + h^2 * k1Is, Q(i) + h^2 * k1Q, R(i) + h \\
& 2 * k1R, B(i) + h^2 * k1B, 0.5 * (u1(i) + \\
& u1(i+1)), 0.5 * (u2(i) + u2(i+1)), 0.5 * (u3(i) + \\
& u3(i+1)), 0.5 * (u4(i) + \\
& u4(i+1)), 0.5 * (\lambda S(i) + \\
& \lambda S(i+1)), 0.5 * (\lambda E(i) +
\end{aligned}$$

```

lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+
lambdaB(i+1)));

```

```

k2Q=fQ(t(i)+h/2,S(i)+h2*k1S,E(i)+h2*k1E,Ia(i)
)+h2*k1Ia,Is(i)+h2*k1Is,Q(i)+h2*k1Q,R(i)+h2*
k1R,B(i)+h2*k1B,0.5*(u1(i)+
u1(i+1)),0.5*(u2(i)+ u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+
u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+
lambdaB(i+1)));

```

```

k2R=fR(t(i)+h/2,S(i)+h2*k1S,E(i)+h2*k1E,Ia(i)
)+h2*k1Ia,Is(i)+h2*k1Is,Q(i)+h2*k1Q,R(i)+h2*
k1R,B(i)+h2*k1B,0.5*(u1(i)+
u1(i+1)),0.5*(u2(i)+ u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+
u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+
lambdaB(i+1)));

```

```

k2B=fB(t(i)+h/2,S(i)+h2*k1S,E(i)+h2*k1E,Ia(i)

```



```

) + h2 * k1Ia, Is(i) + h2 * k1Is, Q(i) + h2 * k1Q, R(i) + h2 *
k1R, B(i) + h2 * k1B, 0.5 * (u1(i) +
u1(i+1)), 0.5 * (u2(i) + u2(i+1)), 0.5 * (u3(i) +
u3(i+1)), 0.5 * (u4(i) +
u4(i+1)), 0.5 * (lambdaS(i) +
lambdaS(i+1)), 0.5 * (lambdaE(i) +
lambdaE(i+1)), 0.5 * (lambdaIA(i) +
lambdaIA(i+1)), 0.5 * (lambdaIS(i) +
lambdaIS(i+1)), 0.5 * (lambdaQ(i) +
lambdaQ(i+1)), 0.5 * (lambdaR(i) +
lambdaR(i+1)), 0.5 * (lambdaB(i) +
lambdaB(i+1));

```

```

k3S = fS(t(i) + h/2, S(i) + h2 * k2S, E(i) + h2 * k2E, Ia(i)
) + h2 * k2Ia, Is(i) + h2 * k2Is, Q(i) + h2 * k2Q, R(i) + h2 *
k2R, B(i) + h2 * k2B, 0.5 * (u1(i) +
u1(i+1)), 0.5 * (u2(i) + u2(i+1)), 0.5 * (u3(i) +
u3(i+1)), 0.5 * (u4(i) +
u4(i+1)), 0.5 * (lambdaS(i) +
lambdaS(i+1)), 0.5 * (lambdaE(i) +
lambdaE(i+1)), 0.5 * (lambdaIA(i) +
lambdaIA(i+1)), 0.5 * (lambdaIS(i) +
lambdaIS(i+1)), 0.5 * (lambdaQ(i) +
lambdaQ(i+1)), 0.5 * (lambdaR(i) +
lambdaR(i+1)), 0.5 * (lambdaB(i) +
lambdaB(i+1));

```

```

k3E = fE(t(i) + h/2, S(i) + h2 * k2S, E(i) + h2 * k2E, Ia(i)
) + h2 * k2Ia, Is(i) + h2 * k2Is, Q(i) + h2 * k2Q, R(i) + h2 *
k2R, B(i) + h2 * k2B, 0.5 * (u1(i) +
u1(i+1)), 0.5 * (u2(i) + u2(i+1)), 0.5 * (u3(i) +
u3(i+1)), 0.5 * (u4(i) +
u4(i+1)), 0.5 * (lambdaS(i) +
lambdaS(i+1)), 0.5 * (lambdaE(i) +
lambdaE(i+1)), 0.5 * (lambdaIA(i) +

```

```

lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+
lambdaB(i+1)));

```

```

k3Ia=fIa(t(i)+h/2,S(i)+h2*k2S,E(i)+h2*k2E,Ia
(i)+h2*k2Ia,Is(i)+h2*k2Is,Q(i)+h2*k2Q,R(i)+h
2*k2R,B(i)+h2*k2B,0.5*(u1(i)+
u1(i+1)),0.5*(u2(i)+ u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+
u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+
lambdaB(i+1)));

```

```

k3Is=fIs(t(i)+h/2,S(i)+h2*k2S,E(i)+h2*k2E,Ia
(i)+h2*k2Ia,Is(i)+h2*k2Is,Q(i)+h2*k2Q,R(i)+h
2*k2R,B(i)+h2*k2B,0.5*(u1(i)+
u1(i+1)),0.5*(u2(i)+ u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+
u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+
lambdaB(i+1)));

```

```

k3Q=fQ(t(i)+h/2,S(i)+h2*k2S,E(i)+h2*k2E,Ia(i)
)+h2*k2Ia,Is(i)+h2*k2Is,Q(i)+h2*k2Q,R(i)+h2*

```

```

k2R,B(i)+h2*k2B,0.5*(u1(i)+
u1(i+1)),0.5*(u2(i)+ u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+
u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+
lambdaB(i+1)));

```

```

k3R=fR(t(i)+h/2,S(i)+h2*k2S,E(i)+h2*k2E,Ia(i)
)+h2*k2Ia,Is(i)+h2*k2Is,Q(i)+h2*k2Q,R(i)+h2*
k2R,B(i)+h2*k2B,0.5*(u1(i)+
u1(i+1)),0.5*(u2(i)+ u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+
u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+
lambdaQ(i+1)),0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)),0.5*(lambdaB(i)+
lambdaB(i+1)));

```

```

k3B=fB(t(i)+h/2,S(i)+h2*k2S,E(i)+h2*k2E,Ia(i)
)+h2*k2Ia,Is(i)+h2*k2Is,Q(i)+h2*k2Q,R(i)+h2*
k2R,B(i)+h2*k2B,0.5*(u1(i)+
u1(i+1)),0.5*(u2(i)+ u2(i+1)),0.5*(u3(i)+
u3(i+1)),0.5*(u4(i)+
u4(i+1)),0.5*(lambdaS(i)+
lambdaS(i+1)),0.5*(lambdaE(i)+
lambdaE(i+1)),0.5*(lambdaIA(i)+
lambdaIA(i+1)),0.5*(lambdaIS(i)+
lambdaIS(i+1)),0.5*(lambdaQ(i)+

```

```
lambdaQ(i+1)), 0.5*(lambdaR(i)+
lambdaR(i+1)), 0.5*(lambdaB(i)+
lambdaB(i+1))));
```

```
k4S=fS(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*
k3Ia, Is(i)+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)
+h*k3B, u1(i+1), u2(i+1), u3(i+1), u4(i+1), lambda
aS(i+1), lambdaE(i+1), lambdaIA(i+1), lambdaIS(
i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1), lambdaB(i+1))
;
```

```
k4E=fE(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*
k3Ia, Is(i)+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)
+h*k3B, u1(i+1), u2(i+1), u3(i+1), u4(i+1), lambda
aS(i+1), lambdaE(i+1), lambdaIA(i+1), lambdaIS(
i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1), lambdaB(i+1))
;
```

```
k4Ia=fIa(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+
h*k3Ia, Is(i)+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(
i)+h*k3B, u1(i+1), u2(i+1), u3(i+1), u4(i+1), lam
bdaS(i+1), lambdaE(i+1), lambdaIA(i+1), lambdaI
S(i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1), lambdaB(i+1
)));
```

```
k4Is=fIs(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+
h*k3Ia, Is(i)+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(
i)+h*k3B, u1(i+1), u2(i+1), u3(i+1), u4(i+1), lam
bdaS(i+1), lambdaE(i+1), lambdaIA(i+1), lambdaI
S(i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1), lambdaB(i+1
)));
```

```
k4Q=fQ(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*
k3Ia, Is(i)+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)
+h*k3B, u1(i+1), u2(i+1), u3(i+1), u4(i+1), lambda
```

```
aS(i+1), lambdaE(i+1), lambdaIA(i+1), lambdaIS(i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1), lambdaB(i+1))
;
```

```
k4R=fR(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*k3Ia, Is(i)+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)+h*k3B, u1(i+1), u2(i+1), u3(i+1), u4(i+1), lambdaS(i+1), lambdaE(i+1), lambdaIA(i+1), lambdaIS(i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1), lambdaB(i+1))
;
```

```
k4B=fB(t(i)+h, S(i)+h*k3S, E(i)+h*k3E, Ia(i)+h*k3Ia, Is(i)+h*k3Is, Q(i)+h*k3Q, R(i)+h*k3R, B(i)+h*k3B, u1(i+1), u2(i+1), u3(i+1), u4(i+1), lambdaS(i+1), lambdaE(i+1), lambdaIA(i+1), lambdaIS(i+1), lambdaQ(i+1), lambdaR(i+1), lambdaB(i+1))
;
```

```
%nilai state yang baru
```

```
S(i+1) = S(i) + (h/6) * (k1S+2*k2S+2*k3S+k4S);
E(i+1) = E(i) + (h/6) * (k1E+2*k2E+2*k3E+k4E);
Ia(i+1)= Ia(i) +
        (h/6) * (k1Ia+2*k2Ia+2*k3Ia+k4Ia);
Is(i+1)= Is(i) +
        (h/6) * (k1Is+2*k2Is+2*k3Is+k4Is);
Q(i+1) = Q(i) + (h/6) * (k1Q+2*k2Q+2*k3Q+k4Q);
R(i+1) = R(i) + (h/6) * (k1R+2*k2R+2*k3R+k4R);
B(i+1) = B(i) + (h/6) * (k1B+2*k2B+2*k3B+k4B);
end
```

```
%persamaan costate
```

```
for i = 1:N
    j = N + 2 - i;
k1LS =
fLS(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u1(j), u2(j), u3(j), u4(j), lambdaS(j), lambdaE
```

```
(j), lambdaIA(j), lambdaIS(j), lambdaQ(j), lambdaR(j), lambdaB(j));
```

```
k1LE =
```

```
fLE(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u1(j), u2(j), u3(j), u4(j), lambdaS(j), lambdaE(j), lambdaIA(j), lambdaIS(j), lambdaQ(j), lambdaR(j), lambdaB(j));
```

```
k1LIA =
```

```
fLIA(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u1(j), u2(j), u3(j), u4(j), lambdaS(j), lambdaE(j), lambdaIA(j), lambdaIS(j), lambdaQ(j), lambdaR(j), lambdaB(j));
```

```
k1LIS =
```

```
fLIS(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u1(j), u2(j), u3(j), u4(j), lambdaS(j), lambdaE(j), lambdaIA(j), lambdaIS(j), lambdaQ(j), lambdaR(j), lambdaB(j));
```

```
k1LQ =
```

```
fLQ(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u1(j), u2(j), u3(j), u4(j), lambdaS(j), lambdaE(j), lambdaIA(j), lambdaIS(j), lambdaQ(j), lambdaR(j), lambdaB(j));
```

```
k1LR =
```

```
fLR(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u1(j), u2(j), u3(j), u4(j), lambdaS(j), lambdaE(j), lambdaIA(j), lambdaIS(j), lambdaQ(j), lambdaR(j), lambdaB(j));
```

```
k1LB =
```

```
fLB(t(j), S(j), E(j), Ia(j), Is(j), Q(j), R(j), B(j), u1(j), u2(j), u3(j), u4(j), lambdaS(j), lambdaE(j), lambdaIA(j), lambdaIS(j), lambdaQ(j), lambdaR(j), lambdaB(j));
```

```
k2LS = fLS(t(j)+h/2, 0.5*(S(j)+S(j-1)), 0.5*(E(j)+E(j-1)), 0.5*(Ia(j)+Ia(j-1)), 0.5*(Is(j)+Is(j-1)), 0.5*(Q(j)+Q(j-
```

```

1) , 0.5*(R(j)+R(j-1)) , 0.5*(B(j)+B(j-
1) ) , 0.5*(u1(j)+u1(j-1)) , 0.5*(u2(j)+u2(j-
1) ) , 0.5*(u3(j)+u3(j-1)) , 0.5*(u4(j)+u4(j-
1) ) , (lambdaS(j) - h2*k1LS) , (lambdaE(j) -
h2*k1LE) , (lambdaIA(j) -
h2*k1LIA) , (lambdaIS(j) -
h2*k1LIS) , (lambdaQ(j) - h2*k1LQ) , (lambdaR(j) -
h2*k1LR) , (lambdaB(j) - h2*k1LB) );
k2LE = fLE(t(j)+h/2, 0.5*(S(j)+S(j-
1) ) , 0.5*(E(j)+E(j-1)) , 0.5*(Ia(j)+Ia(j-
1) ) , 0.5*(Is(j)+Is(j-1)) , 0.5*(Q(j)+Q(j-
1) ) , 0.5*(R(j)+R(j-1)) , 0.5*(B(j)+B(j-
1) ) , 0.5*(u1(j)+u1(j-1)) , 0.5*(u2(j)+u2(j-
1) ) , 0.5*(u3(j)+u3(j-1)) , 0.5*(u4(j)+u4(j-
1) ) , (lambdaS(j) - h2*k1LS) , (lambdaE(j) -
h2*k1LE) , (lambdaIA(j) -
h2*k1LIA) , (lambdaIS(j) -
h2*k1LIS) , (lambdaQ(j) - h2*k1LQ) , (lambdaR(j) -
h2*k1LR) , (lambdaB(j) - h2*k1LB) );
k2LIA = fLIA(t(j)+h/2, 0.5*(S(j)+S(j-
1) ) , 0.5*(E(j)+E(j-1)) , 0.5*(Ia(j)+Ia(j-
1) ) , 0.5*(Is(j)+Is(j-1)) , 0.5*(Q(j)+Q(j-
1) ) , 0.5*(R(j)+R(j-1)) , 0.5*(B(j)+B(j-
1) ) , 0.5*(u1(j)+u1(j-1)) , 0.5*(u2(j)+u2(j-
1) ) , 0.5*(u3(j)+u3(j-1)) , 0.5*(u4(j)+u4(j-
1) ) , (lambdaS(j) - h2*k1LS) , (lambdaE(j) -
h2*k1LE) , (lambdaIA(j) -
h2*k1LIA) , (lambdaIS(j) -
h2*k1LIS) , (lambdaQ(j) - h2*k1LQ) , (lambdaR(j) -
h2*k1LR) , (lambdaB(j) - h2*k1LB) );
k2LIS = fLIS(t(j)+h/2, 0.5*(S(j)+S(j-
1) ) , 0.5*(E(j)+E(j-1)) , 0.5*(Ia(j)+Ia(j-
1) ) , 0.5*(Is(j)+Is(j-1)) , 0.5*(Q(j)+Q(j-
1) ) , 0.5*(R(j)+R(j-1)) , 0.5*(B(j)+B(j-
1) ) , 0.5*(u1(j)+u1(j-1)) , 0.5*(u2(j)+u2(j-
1) ) , 0.5*(u3(j)+u3(j-1)) , 0.5*(u4(j)+u4(j-
1) ) , 0.5*(u3(j)+u3(j-1)) , 0.5*(u4(j)+u4(j-

```

$1)), (\lambda_S(j) - h^2 k_{1LS}), (\lambda_E(j) - h^2 k_{1LE}), (\lambda_{IA}(j) - h^2 k_{1LIA}), (\lambda_{IS}(j) - h^2 k_{1LIS}), (\lambda_Q(j) - h^2 k_{1LQ}), (\lambda_R(j) - h^2 k_{1LR}), (\lambda_B(j) - h^2 k_{1LB});$   
 $k_{2LQ} = f_{LQ}(t(j) + h/2, 0.5 * (S(j) + S(j-1)), 0.5 * (E(j) + E(j-1)), 0.5 * (I_a(j) + I_a(j-1)), 0.5 * (I_s(j) + I_s(j-1)), 0.5 * (Q(j) + Q(j-1)), 0.5 * (R(j) + R(j-1)), 0.5 * (B(j) + B(j-1)), 0.5 * (u_1(j) + u_1(j-1)), 0.5 * (u_2(j) + u_2(j-1)), 0.5 * (u_3(j) + u_3(j-1)), 0.5 * (u_4(j) + u_4(j-1)), (\lambda_S(j) - h^2 k_{1LS}), (\lambda_E(j) - h^2 k_{1LE}), (\lambda_{IA}(j) - h^2 k_{1LIA}), (\lambda_{IS}(j) - h^2 k_{1LIS}), (\lambda_Q(j) - h^2 k_{1LQ}), (\lambda_R(j) - h^2 k_{1LR}), (\lambda_B(j) - h^2 k_{1LB});$   
 $k_{2LR} = f_{LR}(t(j) + h/2, 0.5 * (S(j) + S(j-1)), 0.5 * (E(j) + E(j-1)), 0.5 * (I_a(j) + I_a(j-1)), 0.5 * (I_s(j) + I_s(j-1)), 0.5 * (Q(j) + Q(j-1)), 0.5 * (R(j) + R(j-1)), 0.5 * (B(j) + B(j-1)), 0.5 * (u_1(j) + u_1(j-1)), 0.5 * (u_2(j) + u_2(j-1)), 0.5 * (u_3(j) + u_3(j-1)), 0.5 * (u_4(j) + u_4(j-1)), (\lambda_S(j) - h^2 k_{1LS}), (\lambda_E(j) - h^2 k_{1LE}), (\lambda_{IA}(j) - h^2 k_{1LIA}), (\lambda_{IS}(j) - h^2 k_{1LIS}), (\lambda_Q(j) - h^2 k_{1LQ}), (\lambda_R(j) - h^2 k_{1LR}), (\lambda_B(j) - h^2 k_{1LB});$   
 $k_{2LB} = f_{LB}(t(j) + h/2, 0.5 * (S(j) + S(j-1)), 0.5 * (E(j) + E(j-1)), 0.5 * (I_a(j) + I_a(j-1)), 0.5 * (I_s(j) + I_s(j-1)), 0.5 * (Q(j) + Q(j-1)), 0.5 * (R(j) + R(j-1)), 0.5 * (B(j) + B(j-1)), 0.5 * (u_1(j) + u_1(j-1)), 0.5 * (u_2(j) + u_2(j-1)), 0.5 * (u_3(j) + u_3(j-1)), 0.5 * (u_4(j) + u_4(j-1)), (\lambda_S(j) - h^2 k_{1LS}), (\lambda_E(j) - h^2 k_{1LE}), (\lambda_{IA}(j) - h^2 k_{1LIA}), (\lambda_{IS}(j) -$



$h2*k1LIS), (\lambda_Q(j) - h2*k1LQ), (\lambda_R(j) - h2*k1LR), (\lambda_B(j) - h2*k1LB));$

$k3LS = fLS(t(j)+h/2, 0.5*(S(j)+S(j-1)), 0.5*(E(j)+E(j-1)), 0.5*(Ia(j)+Ia(j-1)), 0.5*(Is(j)+Is(j-1)), 0.5*(Q(j)+Q(j-1)), 0.5*(R(j)+R(j-1)), 0.5*(B(j)+B(j-1)), 0.5*(u1(j)+u1(j-1)), 0.5*(u2(j)+u2(j-1)), 0.5*(u3(j)+u3(j-1)), 0.5*(u4(j)+u4(j-1)), (\lambda_S(j) - h2*k2LS), (\lambda_E(j) - h2*k2LE), (\lambda_{IA}(j) - h2*k2LIA), (\lambda_{IS}(j) - h2*k2LIS), (\lambda_Q(j) - h2*k2LQ), (\lambda_R(j) - h2*k2LR), (\lambda_B(j) - h2*k2LB));$

$k3LE = fLE(t(j)+h/2, 0.5*(S(j)+S(j-1)), 0.5*(E(j)+E(j-1)), 0.5*(Ia(j)+Ia(j-1)), 0.5*(Is(j)+Is(j-1)), 0.5*(Q(j)+Q(j-1)), 0.5*(R(j)+R(j-1)), 0.5*(B(j)+B(j-1)), 0.5*(u1(j)+u1(j-1)), 0.5*(u2(j)+u2(j-1)), 0.5*(u3(j)+u3(j-1)), 0.5*(u4(j)+u4(j-1)), (\lambda_S(j) - h2*k2LS), (\lambda_E(j) - h2*k2LE), (\lambda_{IA}(j) - h2*k2LIA), (\lambda_{IS}(j) - h2*k2LIS), (\lambda_Q(j) - h2*k2LQ), (\lambda_R(j) - h2*k2LR), (\lambda_B(j) - h2*k2LB));$

$k3LIA = fLIA(t(j)+h/2, 0.5*(S(j)+S(j-1)), 0.5*(E(j)+E(j-1)), 0.5*(Ia(j)+Ia(j-1)), 0.5*(Is(j)+Is(j-1)), 0.5*(Q(j)+Q(j-1)), 0.5*(R(j)+R(j-1)), 0.5*(B(j)+B(j-1)), 0.5*(u1(j)+u1(j-1)), 0.5*(u2(j)+u2(j-1)), 0.5*(u3(j)+u3(j-1)), 0.5*(u4(j)+u4(j-1)), (\lambda_S(j) - h2*k2LS), (\lambda_E(j) - h2*k2LE), (\lambda_{IA}(j) - h2*k2LIA), (\lambda_{IS}(j) - h2*k2LIS), (\lambda_Q(j) - h2*k2LQ), (\lambda_R(j) - h2*k2LR), (\lambda_B(j) - h2*k2LB));$

```

k3LIS = fLIS(t(j)+h/2,0.5*(S(j)+S(j-
1)),0.5*(E(j)+E(j-1)),0.5*(Ia(j)+Ia(j-
1)),0.5*(Is(j)+Is(j-1)),0.5*(Q(j)+Q(j-
1)),0.5*(R(j)+R(j-1)),0.5*(B(j)+B(j-
1)),0.5*(u1(j)+u1(j-1)),0.5*(u2(j)+u2(j-
1)),0.5*(u3(j)+u3(j-1)),0.5*(u4(j)+u4(j-
1)),(lambdaS(j)- h2*k2LS),(lambdaE(j)-
h2*k2LE),(lambdaIA(j)-
h2*k2LIA),(lambdaIS(j)-
h2*k2LIS),(lambdaQ(j)- h2*k2LQ),(lambdaR(j)-
h2*k2LR),(lambdaB(j)- h2*k2LB));
k3LQ = fLQ(t(j)+h/2,0.5*(S(j)+S(j-
1)),0.5*(E(j)+E(j-1)),0.5*(Ia(j)+Ia(j-
1)),0.5*(Is(j)+Is(j-1)),0.5*(Q(j)+Q(j-
1)),0.5*(R(j)+R(j-1)),0.5*(B(j)+B(j-
1)),0.5*(u1(j)+u1(j-1)),0.5*(u2(j)+u2(j-
1)),0.5*(u3(j)+u3(j-1)),0.5*(u4(j)+u4(j-
1)),(lambdaS(j)- h2*k2LS),(lambdaE(j)-
h2*k2LE),(lambdaIA(j)-
h2*k2LIA),(lambdaIS(j)-
h2*k2LIS),(lambdaQ(j)- h2*k2LQ),(lambdaR(j)-
h2*k2LR),(lambdaB(j)- h2*k2LB));
      k3LR =fLR(t(j)+h/2,0.5*(S(j)+S(j-
1)),0.5*(E(j)+E(j-1)),0.5*(Ia(j)+Ia(j-
1)),0.5*(Is(j)+Is(j-1)),0.5*(Q(j)+Q(j-
1)),0.5*(R(j)+R(j-1)),0.5*(B(j)+B(j-
1)),0.5*(u1(j)+u1(j-1)),0.5*(u2(j)+u2(j-
1)),0.5*(u3(j)+u3(j-1)),0.5*(u4(j)+u4(j-
1)),(lambdaS(j)- h2*k2LS),(lambdaE(j)-
h2*k2LE),(lambdaIA(j)-
h2*k2LIA),(lambdaIS(j)-
h2*k2LIS),(lambdaQ(j)- h2*k2LQ),(lambdaR(j)-
h2*k2LR),(lambdaB(j)- h2*k2LB));
      k3LB =fLB(t(j)+h/2,0.5*(S(j)+S(j-
1)),0.5*(E(j)+E(j-1)),0.5*(Ia(j)+Ia(j-
1)),0.5*(Is(j)+Is(j-1)),0.5*(Q(j)+Q(j-

```

$1) , 0.5 * (R(j) + R(j-1)) , 0.5 * (B(j) + B(j-1)) , 0.5 * (u1(j) + u1(j-1)) , 0.5 * (u2(j) + u2(j-1)) , 0.5 * (u3(j) + u3(j-1)) , 0.5 * (u4(j) + u4(j-1)) , (\lambda_S(j) - h^2 * k_{2LS}) , (\lambda_E(j) - h^2 * k_{2LE}) , (\lambda_{IA}(j) - h^2 * k_{2LIA}) , (\lambda_{IS}(j) - h^2 * k_{2LIS}) , (\lambda_Q(j) - h^2 * k_{2LQ}) , (\lambda_R(j) - h^2 * k_{2LR}) , (\lambda_B(j) - h^2 * k_{2LB}) ;$

$k_{4LS} = f_{LS}(t(j) + h, S(j-1), E(j-1), I_a(j-1), I_s(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u1(j-1), u2(j-1), u3(j-1), u4(j-1), (\lambda_S(j) - h * k_{3LS}), (\lambda_E(j) - h * k_{3LE}), (\lambda_{IA}(j) - h * k_{3LIA}), (\lambda_{IS}(j) - h * k_{3LIS}), (\lambda_Q(j) - h * k_{3LQ}), (\lambda_R(j) - h * k_{3LR}), (\lambda_B(j) - h * k_{3LB})) ;$

$k_{4LE} = f_{LE}(t(j) + h, S(j-1), E(j-1), I_a(j-1), I_s(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u1(j-1), u2(j-1), u3(j-1), u4(j-1), (\lambda_S(j) - h * k_{3LS}), (\lambda_E(j) - h * k_{3LE}), (\lambda_{IA}(j) - h * k_{3LIA}), (\lambda_{IS}(j) - h * k_{3LIS}), (\lambda_Q(j) - h * k_{3LQ}), (\lambda_R(j) - h * k_{3LR}), (\lambda_B(j) - h * k_{3LB})) ;$

$k_{4LIA} = f_{LIA}(t(j) + h, S(j-1), E(j-1), I_a(j-1), I_s(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u1(j-1), u2(j-1), u3(j-1), u4(j-1), (\lambda_S(j) - h * k_{3LS}), (\lambda_E(j) - h * k_{3LE}), (\lambda_{IA}(j) - h * k_{3LIA}), (\lambda_{IS}(j) - h * k_{3LIS}), (\lambda_Q(j) - h * k_{3LQ}), (\lambda_R(j) - h * k_{3LR}), (\lambda_B(j) - h * k_{3LB})) ;$

$k_{4LIS} = f_{LIS}(t(j) + h, S(j-1), E(j-1), I_a(j-1), I_s(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u1(j-1), u2(j-1), u3(j-1), u4(j-1), (\lambda_S(j) - h * k_{3LS}), (\lambda_E(j) - h * k_{3LE}), (\lambda_{IA}(j) - h * k_{3LIA}), (\lambda_{IS}(j) - h * k_{3LIS}), (\lambda_Q(j) -$

```

h*k3LQ), (lambdaR(j) - h*k3LR), (lambdaB(j) -
h*k3LB));
k4LQ = fLQ(t(j)+h, S(j-1), E(j-1), Ia(j-
1), Is(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u1(j-
1), u2(j-1), u3(j-1), u4(j-1), (lambdaS(j) -
h*k3LS), (lambdaE(j) - h*k3LE), (lambdaIA(j) -
h*k3LIA), (lambdaIS(j) - h*k3LIS), (lambdaQ(j) -
h*k3LQ), (lambdaR(j) - h*k3LR), (lambdaB(j) -
h*k3LB));
k4LR = fLR(t(j)+h, S(j-1), E(j-1), Ia(j-
1), Is(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u1(j-
1), u2(j-1), u3(j-1), u4(j-1), (lambdaS(j) -
h*k3LS), (lambdaE(j) - h*k3LE), (lambdaIA(j) -
h*k3LIA), (lambdaIS(j) - h*k3LIS), (lambdaQ(j) -
h*k3LQ), (lambdaR(j) - h*k3LR), (lambdaB(j) -
h*k3LB));
k4LB = fLB(t(j)+h, S(j-1), E(j-1), Ia(j-
1), Is(j-1), Q(j-1), R(j-1), B(j-1), u1(j-
1), u2(j-1), u3(j-1), u4(j-1), (lambdaS(j) -
h*k3LS), (lambdaE(j) - h*k3LE), (lambdaIA(j) -
h*k3LIA), (lambdaIS(j) - h*k3LIS), (lambdaQ(j) -
h*k3LQ), (lambdaR(j) - h*k3LR), (lambdaB(j) -
h*k3LB));

%nilai costate yang baru
lambdaS(j-1) = lambdaS(j) - (h/6)*(k1LS +
2*k2LS + 2*k3LS + k4LS);
lambdaE(j-1) = lambdaE(j) - (h/6)*(k1LE +
2*k2LE + 2*k3LE + k4LE);
lambdaIA(j-1) = lambdaIA(j) - (h/6)*(k1LIA +
2*k2LIA + 2*k3LIA + k4LIA);
lambdaIS(j-1) = lambdaIS(j) - (h/6)*(k1LIS +
2*k2LIS + 2*k3LIS + k4LIS);
lambdaQ(j-1) = lambdaQ(j) - (h/6)*(k1LQ +
2*k2LQ + 2*k3LQ + k4LQ);

```

```

lambdaR(j-1) = lambdaR(j) - (h/6)*(k1LR +
2*k2LR + 2*k3LR + k4LR);
lambdaB(j-1) = lambdaB(j) - (h/6)*(k1LB +
2*k2LB + 2*k3LB + k4LB);
    end

%representasi dari u dengan menggunakan
nilai baru
temp111 = (-
1/C4)*(beta.*lambdaS.*B.*S./(k+B)+lambdaE.*g
amma.*E-lambdaIA.*p.*beta.*B.*S./(k+B)-
lambdaIA.*p.*gamma.*E-lambdaIS.*(1-
p).*beta.*B.*S./(k+B)-lambdaIS.*(1-
p).*gamma.*E);%persamaan kontrol 1

    u11 = max(u1min,min(temp111,u1max));
    u1 = 0.5*(u11 + oldu1);

temp21 = (1/C5)*(delta*lambdaIS.*Is-
delta*lambdaQ.*Is);%persamaan kontrol 2
    u21 = max(u2min,min(temp21,u2max));
    u2 = 0.5*(u21 + oldu2);

temp31 = (1/C6)*(psi*lambdaS.*S-
psi*lambdaE.*S);%persamaan kontrol 3
    u31 = max(u3min,min(temp31,u3max));
    u3 = 0.5*(u31 + oldu3);

temp41 = (1/C7)*(lambdaB.*B);%persamaan
kontrol 4
    u41 = max(u4min,min(temp41,u4max));
    u4 = 0.5*(u41 + oldu4);

%uji konvergensi
    temp1 = del*sum(abs(u1)) - sum(abs(oldu1
- u1));

```

```

    temp2 = del*sum(abs(u2)) - sum(abs(oldu2
- u2));
        .
        .
    temp12 = del*sum(abs(lambdaS)) -
sum(abs(olddlambdas - lambdaS));
        .
        .
    temp18 = del*sum(abs(lambdaB)) -
sum(abs(olddlambdasB - lambdaB));

    test = min(temp1, min(temp2,
min(temp3,min(temp4,. .))));

%cetak grafik
y(1,:) = t;
y(2,:) = S;
y(3,:) = E;
y(4,:) = Ia;
y(5,:) = Is;
y(6,:) = Q;
y(7,:) = R;
y(8,:) = B;
y(9,:) = lambdaS;
y(10,:) = lambdaE;
y(11,:) = lambdaIA;
y(12,:) = lambdaIS;
y(13,:) = lambdaQ;
y(14,:) = lambdaR;
y(15,:) = lambdaB;
y(16,:) = u1;
y(17,:) = u2;
y(18,:) = u3;
y(19,:) = u4;

```



## BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Dwita Suci Anggraini dan dilahirkan di Bojonegoro tanggal 23 Januari 1996 dari pasangan Tamat Singgih dan Wiwik Setyo Utami. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Penulis bertempat tinggal di Dsn. Dukuan Ds. Gajah, Kec. Baureno, Kab. Bojonegoro. Pendidikan formal yang telah ditempuh penulis yaitu TK Al WARDAH XV Babat-Lamongan, SD-NU Al-Falah Baureno-Bojonegoro, Mts. Al-Falah Baureno-Bojonegoro, dan SMA Negeri 1 Babat. Saat ini, penulis sedang menempuh pendidikan S1 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan bidang minat Matematika Terapan.

Selama kuliah, pada tahun 2015-2016 penulis menjadi Otak Kanan Staff Musik di UKM Teater Tiyang Alit ITS. Pada tahun 2016-2017 penulis menjadi Lurah (Ketua) di UKM Teater Tiyang Alit ITS. Penulis juga aktif di Lembaga Dakwah Jurusan Ibnu Muqhlah Matematika ITS. Pada tahun 2016-2017 penulis menjadi Staff Keputrian Ibnu Muqhlah Matematika ITS. Pada tahun 2017 penulis melakukan kerja praktek di Kantor Wilayah BRI Surabaya Jawa Timur. Serta pada tahun 2016-2019 penulis menjadi Pengajar di Lembaga Bimbingan Belajar EINSTEIN. Demikian biodata penulis. Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai laporan Tugas Akhir ini, dapat dikirimkan melalui email [dwita.sucia@gmail.com](mailto:dwita.sucia@gmail.com). Terima kasih.