



TUGAS AKHIR - KM184801

PEMODELAN PROBABILITAS GEMPA BUMI MENGUNAKAN TEORI NILAI EKSTREM

**EVIKA RACHMA YUNIASARI
NRP 0611154000037**

Dosen Pembimbing :
Endah R.M Putri, S.Si, MT, Ph.D
Dra. Laksmi Prita Wardhani, M.Si

Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019



TUGAS AKHIR - SM141501

**PEMODELAN PROBABILITAS GEMPA BUMI
MENGUNAKAN TEORI NILAI EKSTREM**

EVIKA RACHMA YUNIASARI
NRP. 0611154000037

Dosen Pembimbing :
Endah R.M Putri, S.Si, MT, Ph.D
Dra. Laksmi Prita Wardhani, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019



FINAL PROJECT - SM141501

**MODELLING EARTHQUAKE PROBABILITY VIA
EXTREME VALUE THEORY**

EVIKA RACHMA YUNIASARI
NRP 0611154000037

Supervisors :
Endah R.M Putri, S.Si, MT, Ph.D
Dra. Laksmi Prita Wardhani, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics, Computation, and Data Sciences
Sepuluh Nopember Institut of Technology
Surabaya 2019

LEMBAR PENGESAHAN

PEMODELAN PROBABILITAS GEMPA BUMI MENGGUNAKAN
TEORI NILAI EKSTREM

*MODELLING EARTHQUAKE PROBABILITY VIA EXTREME VALUE
THEORY*

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika
Pada Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

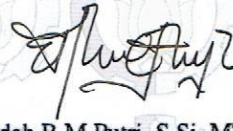
Oleh

EVIKA RACHMA YUNIASARI
NRP. 0611154000037

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,



Dra. Laksmi Prita W, M.Si
NIP. 19611208 198803 2 001

Endah R.M Putri, S.Si, MT, Ph.D
NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FMKSD ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 25 Juli 2019

PEMODELAN PROBABILITAS GEMPA BUMI MENGUNAKAN TEORI NILAI EKSTREM

Nama Mahasiswa : Evika Rachma Yuniasari
NRP : 06111540000037
Departemen : Matematika FMKSD-ITS
Pembimbing : 1. Endah R.M Putri, S.Si, MT, Ph.D
2. Dra. Laksmi Prita Wardhani, M.Si

Abstrak

Salah satu bencana alam yang sering terjadi di Indonesia adalah Gempa Bumi, yang menyebabkan banyak korban jiwa serta dampak yang besar di sektor ekonomi maupun material. Antisipasi risiko yang akan terjadi pada kejadian selanjutnya, diperlukan pengetahuan mengenai probabilitas dari nilai-nilai ekstrem pada gempa bumi berdasarkan data historis gempa bumi. Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui model distribusi dan probabilitas *exceedance* dari data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018. Metode yang digunakan adalah Teori Nilai Ekstrem. Salah satu pendekatan untuk mengidentifikasi nilai ekstrem adalah *Block Maxima* yang mengikuti distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV). Estimasi parameter lokasi, bentuk dan skala didapatkan melalui MLE yang selanjutnya diselesaikan dengan BFGS Quasi-Newton, karena menghasilkan persamaan yang tidak *closed form*. Parameter bentuk yang didapat menghasilkan model distribusi tipe Weibull untuk Data Magnitudo Gempa Bumi. Model distribusi tersebut dapat menentukan peluang terjadinya Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 melalui Probabilitas *Exceedance*.

Kata Kunci : Magnitudo, Teori Nilai Ekstrem, *Generalized Extreme Value*, Probabilitas *Exceedance*.

MODELLING EARTHQUAKE PROBABILITY VIA EXTREME VALUE THEORY

Name : Evika Rachma Yuniasari
NRP : 0611154000037
Department : Matematika FMKSD-ITS
Supervisors : 1. Endah R.M Putri, S.Si, MT, Ph.D
2. Dra. Laksmi Prita Wardhani, M.Si

Abstract

One of the natural disasters that often occurs in Indonesia is the Earthquake, which causes many casualties and a large impact on the economic and material sectors. The anticipation of the risks that will occur in subsequent events, knowledge of the probability of extreme values of earthquakes is needed based on historical earthquake data. This study was conducted to determine the distribution model and the probability of exceedance from extreme data on earthquake magnitude in Indonesia from January 2009 to December 2018. The method used is the Theory of Extreme Value. One approach to identifying extreme values is Block Maxima which follows the Generalized Extreme Value (GEV) distribution. The estimation of location, shape and scale parameters are obtained through MLE which is then solved by BFGS Quasi-Newton because it produces equations that are not closed form. The shape parameter obtained to produce a Weibull type distribution model for Earthquake Magnitude Data. The distribution model can determine the chances of an earthquake in Indonesia in January 2009-December 2018 through the Exceedance Probability.

Keywords : *Magnitude, Extreme Value Theory, Generalized Extreme Value, Exceedance Probability.*

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis bisa menyelesaikan Tugas Akhir yang Berjudul

”PEMODELAN PROBABILITAS GEMPA BUMI MENGUNAKAN TEORI NILAI EKSTREM”

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Kedua orang tua saya Rachmad Yuli Mulyono dan Sri Madiyaningsih yang telah memberikan doa, semangat, motivasi serta kepercayaan sepenuhnya dalam mengerjakan Tugas Akhir.
2. Ibu Endah R.M. Putri, S.Si, MT, Ph.D dan Ibu Dra. Laksmi Prita Wardhani, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Ibu Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes dan Bapak Drs. Iis Herisman, M.Sc selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dalam Tugas Akhir ini.
4. Bapak Dr. Subiono, MS selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.
5. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku Koordinator Tugas Akhir dan Mas Ali yang selalu memberikan informasi mengenai Tugas Akhir.

6. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Kepala Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi hingga Tugas Akhir ini selesai.
7. Bapak dan Ibu dosen Departemen Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada Penulis selama menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.
8. Mas Angga dan Thiesa yang selalu mendoakan, menguatkan, dan mendukung penulis sehingga penulis bisa sampai saat ini.
9. Al Farizi yang selalu memberikan doa, dukungan, semangat, dan fasilitas selama penulis mengerjakan Tugas Akhir.
10. M15-50 yang selalu memberikan semangat lebih khususnya GAP yang selalu memberikan dukungan dan dorongan agar bisa menyelesaikan Tugas Akhir ini.
11. Anak-anak Umik yang saling mendukung dan memotivasi satu sama lain.
12. Seluruh pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Penulis mengucapkan terima kasih yang sangat dalam, atas doa dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan manfaat berbagai pihak.

Surabaya, 24 Juli 2019

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	iii
TITLE PAGE	v
LEMBAR PENGESAHAN	vii
ABSTRAK	ix
ABSTRACT	xi
KATA PENGANTAR	xiii
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Terdahulu	7
2.2 Gempa Bumi	8
2.3 Magnitudo	8

2.4	Teori Nilai Ekstrem	9
2.4.1	Metode <i>Block Maxima</i>	10
2.4.2	Distribusi <i>Generalized Extreme Value</i>	11
2.5	Estimasi Parameter Distribusi <i>Generalized Extreme Value</i>	13
2.6	Interval Kepercayaan	15
2.7	Uji Kesesuaian Distribusi	16
2.8	<i>Mean Excess Function</i>	18
2.9	Probabilitas <i>Exceedance</i>	19
BAB III METODE PENELITIAN		21
3.1	Tahapan Penelitian	21
3.2	Skema Metode Penelitian	25
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN		27
4.1	Identifikasi Nilai Ekstrem	27
4.2	Estimasi Parameter Distribusi GEV	29
4.2.1	Estimasi parameter distribusi GEV dengan $\xi \neq 0$	29
4.2.2	Estimasi parameter distribusi GEV dengan $\xi = 0$	39
4.3	Interval Kepercayaan	43
4.4	Uji Kesesuaian Distribusi	44
4.5	Penentuan Model Distribusi	46
4.6	Probabilitas <i>Exceedance</i>	49
BAB V PENUTUP		51
5.1	Kesimpulan	51
5.2	Saran	51
DAFTAR PUSTAKA		53
LAMPIRAN		55
BIODATA PENULIS		79

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1	Gambar Ilustrasi Pengambilan Data Sampel dengan Metode <i>Block Maxima</i> 11
Gambar 2.2	Grafik <i>Mean Excess Function</i> $e(u)$ pada Beberapa Distribusi Standard 18
Gambar 3.1	Diagram Alir Metode Penelitian 25
Gambar 4.1	Pengambilan Data Magnitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009 27
Gambar 4.2	Pengambilan Data Sampel dengan Metode <i>Block Maxima</i> 28
Gambar 4.3	Histogram Data Ekstrem Magnitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 28
Gambar 4.4	Plot <i>Mean Excess</i> Data Ekstrem Magnitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 48

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1	Estimasi Parameter dan Interval Kepercayaan 95% 44
Tabel 4.2	<i>Mean Excess</i> Data Ekstrem Magnitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 47
Tabel 4.3	Probabilitas <i>Exceedance</i> Data Ekstrem Mag- nitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Jan- uari 2009-Desember 2018 50

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran A	Data Magnitudo di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 55
Lampiran B	Data Ekstrem Magnitudo Maksimum Bulan Januari 2009-Desember 2018. 57
Lampiran C	<i>Listing</i> Estimasi Parameter Distribusi GEV dengan <i>Software R</i> 61
Lampiran D	Tabel Nilai Kritis Uji Kolmogorov Smirnov 63
Lampiran E	Uji Kesesuaian Distribusi Menggunakan Kolmogorov Smirnov 65
Lampiran F	Perhitungan <i>Mean Excess</i> untuk Nilai <i>Threshold</i> 3.9 69
Lampiran G	<i>Listing Plot Sample Mean Excess</i> dengan <i>Software MATLAB</i> 2013a 73
Lampiran H	Efek Besar Kekuatan Gempa Bumi (Magnitudo) Berdasarkan Skala Mercalli 75
Lampiran I	Perhitungan Probabilitas Exceedance Data Ekstrem Magnitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 77

DAFTAR SIMBOL

M_n	:	Skala magnitudo gempa bumi maksimum pada bulan ke- n
$M_{i,n}$:	Order statistik data ekstrem magnitud gempa bumi ke- i dari n pengamatan
d_{mn}	:	data magnitudo gempa bumi ke- m pada bulan ke- n
μ	:	Parameter lokasi (<i>location</i>)
σ	:	Parameter skala (<i>scale</i>)
ξ	:	Parameter bentuk (<i>shape</i>)
$L(\theta)$:	Fungsi <i>likelihood</i> dari estimator θ
$l(\theta)$:	Fungsi log <i>likelihood</i> dari estimator θ
θ_{t+1}	:	Vektor estimasi parameter pada iterasi Newton ke t+1
θ_t	:	Vektor estimasi parameter pada iterasi Newton ke t
$g(\theta_t)$:	Vektor turunan pertama dari fungsi log <i>likelihood</i>
$H(\theta_t)$:	Matriks turunan kedua dari fungsi log <i>likelihood</i> atau matriks Hessian.
α_t	:	Fungsi yang dapat meminimumkan error S_t yang akan terjadi pada iterasi BFGS Quasi-Newton
H_t	:	Matriks simetrik definit positif pada iterasi BFGS Quasi-Newton ke t
H_{t+1}	:	Matriks simetrik definit positif pada iterasi BFGS Quasi-Newton ke t+1
ϵ	:	Error
α	:	Taraf signifikansi estimasi parameter
D_{tabel}	:	Nilai kritis pada Tabel Kolmogorov Smirnov dengan taraf signifikansi α dan n sampel
$z_{\alpha/2}$:	Nilai pada Tabel Normalitas z dengan taraf signifikansi $\alpha/2$
$Var(\theta)$:	Varians dari parameter θ
$Var(\mu)$:	Varians dari parameter μ
$Var(\sigma)$:	Varians dari parameter σ
$Var(\xi)$:	Varians dari parameter ξ
$F_n(x)$:	Fungsi distribusi kumulatif berdasarkan n observasi pengamatan

- $F^*(x)$: Fungsi distribusi kumulatif teoritis
 u : Ambang batas (*threshold*)
 $e(u)$: *Mean excess function*
 $e_n(u)$: *Mean excess function* empiris pada sampel

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan latarbelakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat penulisan Tugas Akhir.

1.1 Latar Belakang Masalah

Bencana alam adalah bencana yang diakibatkan oleh peristiwa atau serangkaian peristiwa yang disebabkan oleh alam. Jenis-jenis bencana alam seperti gempa bumi, tsunami, gunung meletus, banjir, kekeringan, angin topan, dan tanah langsor[1]. Salah satu bencana alam yang sering terjadi di Indonesia adalah gempa bumi, disebabkan letak geografis Indonesia yang berada diantara lempeng Eurasia, Indo-Australia dan Samudra Pasifik yang terdapat banyak aktivitas pergerakan lempeng bumi dan aktivitas gunung berapi yang masih aktif atau runtuhan batuan[2].

Bencana gempa bumi yang terjadi mengakibatkan banyak kehilangan jiwa serta kerugian material yang mempengaruhi sektor ekonomi dan pembangunan. Salah satunya ialah gempa bumi Padang 30 September 2009 berkekuatan 7,9 Skala Richter (SR) kerugiannya mencapai Rp 4,8 trilyun dengan korban tewas 1.195 orang, total rumah rusak sebanyak 271.540 unit. Gempa bumi disertai tsunami di Aceh 2004 menelan korban hampir 300.000 jiwa di Indonesia, Thailand, India, Srilanka, Maldive, dan Afrika[2].

Berdasarkan kejadian-kejadian gempa bumi yang telah terjadi menunjukkan bahwa setiap bencana gempa bumi dapat diidentifikasi skala kekuatan gempa dengan menghitung skala magnitudo. Magnitudo merepresentasikan kekuatan gempa di sumbernya akibat perpindahan yang terjadi pada suatu luasan area. Semakin luas dan semakin besar perpindahannya maka semakin besar pula magnitudonya. Semakin besar magnitudo gempa bumi, maka kemungkinan kerugian yang akan terjadi juga semakin besar. Jadi, dapat disimpulkan bahwa besar kecilnya nilai magnitudo pada bencana gempa bumi menjadi salah satu faktor yang dapat menunjukkan tingkat risiko

dari bencana gempa bumi.

Risiko bencana alam sangat berkaitan dengan kejadian ekstrem karena mempunyai sifat tidak menentu [3]. Gempa bumi merupakan salah satu kejadian ekstrem karena bisa terjadi kapan saja. Oleh karena itu, dibutuhkan tindakan dalam mencegah risiko yang akan terjadi, salah satunya adalah penentuan model distribusi yang dapat menggambarkan kejadian ekstrem pada data magnitudo gempa bumi. Setelah mengetahui model distribusi data tersebut, maka probabilitas dari gempa bumi dari setiap besaran magnitudo dapat diketahui. Salah satu metode untuk menentukan probabilitas nilai-nilai ekstrem adalah Teori Nilai Ekstrem (*Extreme Value Theory*) yang berfokus pada perilaku daerah ekor (*tail*) dari suatu distribusi (Lewis, 2004).

Berdasarkan penjabaran yang telah dijelaskan, maka pada Tugas Akhir ini penulis mengangkat topik "Pemodelan Probabilitas Gempa Bumi Menggunakan Teori Nilai Ekstrem". Pada penelitian ini, penulis akan membuat model distribusi dari data magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018. Kemudian model ini digunakan untuk mendapatkan Probabilitas *Exceedance* yang dapat menunjukkan peluang terjadinya gempa bumi pada setiap besaran magnitudo gempa bumi. Metode yang digunakan adalah *Block Maxima* dengan pendekatan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan, maka terdapat beberapa rumusan permasalahan yang menjadi kajian dalam penulisan Tugas Akhir ini yaitu :

1. Bagaimana mendapatkan model probabilitas gempa bumi dengan menggunakan Teori Nilai Ekstrem?
2. Bagaimana menghitung model probabilitas gempa bumi dengan menggunakan Teori Nilai Ekstrem?

1.3 Batasan Masalah

Agar pembahasan mengenai pemodelan probabilitas gempa bumi tetap terfokus pada latar belakang permasalahan yang dikemukakan maka pada penulisan Tugas Akhir ini diberi batasan permasalahan yaitu :

1. Data yang digunakan adalah data skala Magnitudo gempa bumi maksimum bulanan di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018.
2. Skala magnitudo yang digunakan antara lain adalah magnitudo gelombang permukaan (M_s), magnitudo gelombang badan (M_b), moment magnitudo (M_w), dan magnitudo durasi (M_d) yang disebut sebagai Magnitudo (M).
3. Tidak ada data yang hilang.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan penulisan Tugas Akhir ini adalah :

1. Mendapatkan model probabilitas gempa bumi dengan menggunakan Teori Nilai Ekstrem.
2. Menghitung model probabilitas gempa bumi dengan menggunakan Teori Nilai Ekstrem.

1.5 Manfaat

Tugas Akhir ini memberikan manfaat sebagai berikut :

1. Mendapatkan model distribusi gempa bumi maksimum bulanan di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018.
2. Hasil penelitian ini digunakan untuk menentukan harga obligasi bencana berdasarkan data magnitudo gempa bumi.

1.6 Sistematika Penulisan

Secara garis besar, Tugas Akhir ini terdiri dari lima bab dan lampiran yaitu :

1. BAB I PENDAHULUAN

Pada BAB I dijelaskan gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi Latar Belakang, Rumusan Masalah, Batasan Masalah, Tujuan, Manfaat, dan Sistematika Penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada BAB II diuraikan tentang teori - teori utama maupun materi penunjang yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir, di antaranya adalah Penelitian Terdahulu, Gempa Bumi, Magnitudo, Teori Nilai Ekstrem, Estimasi Parameter Distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV), Interval Kepercayaan, Uji Kesesuaian Distribusi, *Mean Excess Function*, Probabilitas *Exceedance*.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Pada BAB III dideskripsikan tahapan - tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan tersebut adalah Studi Literatur, Pengumpulan Data Magnitudo Gempa Bumi, Identifikasi nilai ekstrem dengan *Block Maxima*, Estimasi Parameter distribusi GEV dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) serta membuat interval kepercayaan 95%, Melakukan Uji Kesesuaian Distribusi, Penentuan Model Distribusi Data, Penentuan Probabilitas *Exceedance*, Penarikan Kesimpulan serta Pemberian Saran, dan Penulisan Laporan Tugas Akhir.

4. BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada BAB IV akan dibahas secara detail mengenai Teori Nilai Ekstrem untuk mendapatkan Model Distribusi dan Probabilitas *Exceedance* dari Data Magnitudo Ekstrem Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018.

5. BAB V KESIMPULAN

Pada BAB V berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisa dan pembahasan Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan teori - teori yang menunjang penulisan Tugas Akhir, antara lain penjelasan mengenai gempa bumi, magnitudo, teori nilai ekstrem, estimasi parameter distribusi GEV, interval kepercayaan, uji kesesuaian distribusi, *mean excess function*, dan probabilitas *exceedance*.

2.1 Penelitian Terdahulu

Penelitian ini dilakukan tidak terlepas dari hasil penelitian-penelitian terdahulu yang pernah dilakukan sebagai bahan perbandingan dan kajian. Beberapa hasil penelitian yang dijadikan kajian tidak terlepas dari topik penelitian yaitu mengenai pemodelan probabilitas terhadap gempa bumi menggunakan Teori Nilai Ekstrem.

Pada tahun 2007, karya penelitian A. A. Zimbidis, dkk [3] berjudul *Modelling Earthquake Risk via Extreme Value Theory and Pricing the Respective Catastrophe Bonds** menerapkan Teori Nilai Ekstrem pada data Magnitudo Lokal maksimum gempa bumi tahunan di Yunani dari tahun 1966 hingga 2005. Pendekatan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) digunakan untuk membuat Model dan Probabilitas *Exceedance* dari distribusi data yang teridentifikasi. A.A. Zimbidis, dkk mengembangkan model ini untuk perhitungan obligasi bencana Gempa Bumi di Yunani.

Pada tahun 2015, J. Shao, dkk [4] juga melakukan penelitian yang menerapkan Teori Nilai Ekstrem pada data gempa bumi berjudul *Catastrophe Risk Bonds with Applications to Earthquakes*. Data yang digunakan yaitu data magnitudo dan kedalaman (*depth*) tahunan pada gempa bumi di California dari tahun 1968 hingga 2011 pada dua daerah, San Fransisco dan Los Angeles. Penelitian ini mengacu pada karya A. A. Zimbidis, dkk yang menggunakan pendekatan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) untuk menghitung risiko obligasi bencana gempa bumi di California.

2.2 Gempa Bumi

Gempa Bumi merupakan pergeseran pada lapisan tanah di bawah permukaan bumi secara tiba-tiba yang menimbulkan getaran disebut dengan gelombang seismik. Gelombang ini meluas ke segala arah menjauhi titik pusat gempa, namun hanya beberapa yang tercatat di *seismograph*, dan beberapa gelombang yang mencapai permukaan bumi dapat bersifat merusak karena disebabkan beberapa faktor yaitu kekuatan sumber gempa bumi, kedalaman permukaan tanah, serta mutu ketahanan bangunan yang dilewati oleh gelombang seismik[5].

Berdasarkan letak geografis Indonesia, terdapat beberapa penyebab terjadinya gempa bumi, yaitu tektonik, vulkanik, runturan, jatuhnya meteor, dan gempa bumi buatan manusia[2]. Gempa bumi tektonik yakni gempa bumi yang diakibatkan oleh pelepasan energi elastis yang terkandung dalam lempeng tektonik. Terdapat pergerakan yang terjadi pada lapisan mantel bumi yang mengakibatkan lempeng tektonik akan menerima energi dari lapisan tersebut. Energi yang diterima dari lapisan mantel tersimpan dalam bentuk energi elastis karena lempeng tektonik merupakan batuan yang bersifat elastis. Gempa bumi vulkanik adalah gempa bumi yang diakibatkan oleh aktivitas gunung api. Pada gunung api mengandung magma pada kantong dibawah gunung, apabila magma mendapat tekanan dan melepaskan energinya secara tiba-tiba maka akan menimbulkan getaran tanah. Aktivitas gempa bumi vulkanik dapat disebabkan oleh aktivitas gempa bumi tektonik. Pergeseran lempeng tektonik pada sesar bumi memicu naiknya magma ke permukaan. Gempa bumi runturan merupakan gempa bumi lokal disebabkan oleh runtuhnya suatu gua di daerah batuan karst atau lokasi pertambangan. Sedangkan gempa bumi jatuhnya meteor terjadi apabila permukaan bumi kejatuhan meteorit atau benda langit.

2.3 Magnitudo

Magnitudo gempa bumi pertama kali diperkenalkan oleh K. Wadati dan C. Richter pada tahun 1930, digunakan sebagai skala

kekuatan relatif gempa bumi untuk pengukuran fase simpangan gelombang[5]. Charles Richter mengemukakan konsep magnitudo dalam Skala Richter. Mulanya, skala Richter digunakan untuk mengukur gempa-gempa yang terjadi di daerah California Selatan saja. Seiring perkembangan jaman, pengukuran gempa bumi yang terjadi di tempat lainnya juga berpatokan pada skala ini termasuk Indonesia. Namun pada April 2017, BMKG menyatakan bahwa Indonesia sudah tidak lagi menggunakan skala SR melainkan skala M (magnitudo), dikarenakan telah ditemukannya berbagai tipe pengukuran magnitudo[6].

Dalam penentuan besaran energi gempa bumi, terdapat beberapa metode yang dapat dipakai dengan meneliti besaran simpangan gelombang. Metode-metode tersebut salah satunya yaitu perambatan gelombang badan(*Body Wave*) di badan bumi yang disebut dengan *Magnitudo Body* (Mb), sedang metode lainnya menggunakan gelombang permukaan yang disebut *Magnitudo Surface* (Ms), selain itu ada yang berdasarkan rentang waktu gempa terjadi (durasi) yang disebut *Magnitudo Durasi* (Md). Kemudian Magnitudo Momen (*moment magnitudo*) (Mw) adalah suatu tipe magnitudo yang menggunakan momen seismik namun tidak bergantung dari besarnya magnitudo permukaan. Sehingga kemungkinan penentuan magnitudo terdapat perbedaan dalam suatu kejadian gempa bumi. Akan tetapi, terdapat hubungan antara Magnitudo yang satu dengan yang lain pada perbedaan magnitudo ini [5].

2.4 Teori Nilai Ekstrem

Teori Nilai Ekstrem merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mempelajari bagaimana perilaku ekor (*tail*) distribusi tersebut. Metode ini berfokus pada perilaku ekor (*tail*) suatu distribusi untuk dapat menentukan probabilitas nilai-nilai ekstremnya (Lewis, 2004). Teori Nilai Ekstrem telah lama diterapkan dalam berbagai ilmu, salah satunya adalah bidang klimatologi ditunjukkan dengan adanya suatu pengamatan yang sangat tinggi dan sangat rendah, yang dapat ditentukan probabilitas baik maksimum maupun minimum dari kejadian ekstrem (*tail distribution*).

Menurut *Central Limit Theorem* (CLT), distribusi normal adalah distribusi limit dari rata-rata sampel. Dalam pemodelan nilai maksimum dari suatu peubah acak, Teori Nilai Ekstrem menyerupai Teori Limit Pusat (*Central Limit Theorem*) dalam memodelkan jumlah peubah acak yang diinginkan. Teorema Fisher-Tippet-Gnekendo [7][8] analog dengan CLT dan menggunakan indeks ekor (*tail*) untuk menyatukan karakterisasi yang mungkin dari fungsi densitas distribusi *extreme value* (Lebaron dan Samantha, 2004).

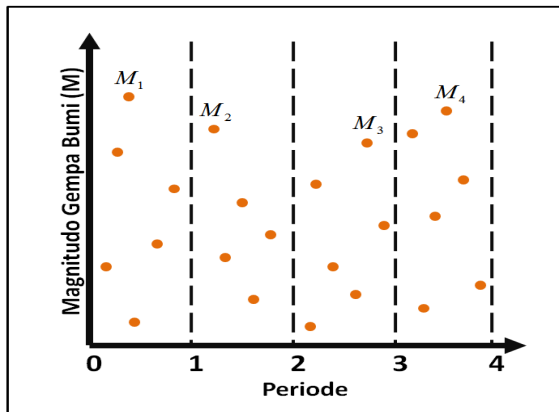
Terdapat dua metode dalam mengidentifikasi nilai ekstrem yaitu mengambil nilai maksimum dalam suatu periode disebut metode *Block Maxima* dan mengambil nilai-nilai yang melewati suatu nilai threshold disebut metode *Peaks Over Threshold*. Metode *Block Maxima* mengacu pada sebaran *Generalized Extreme Value* sedangkan metode *Peak Over Threshold* mengacu pada sebaran *Generalized Pareto*[9].

2.4.1 Metode *Block Maxima*

Pada Tugas Akhir ini menggunakan metode *Block Maxima* untuk mengidentifikasi nilai ekstrem pada data magnitudo gempa bumi. Metode *Block Maxima* adalah salah satu metode yang mengidentifikasi nilai ekstrem berdasarkan nilai maksimum data pengamatan yang dikelompokkan berdasarkan periode tertentu[10]. Metode ini membagi data pengamatan dalam blok-blok pada periode waktu tertentu, misal bulan, triwulan, semester, atau tahun. Setiap blok tersebut akan ditentukan besarnya data pengamatan maksimum yang merupakan nilai ekstrem untuk setiap blok dan digunakan sebagai sampel pada metode *Block Maxima*.

Pada Gambar 2.1 menunjukkan ilustrasi pengambilan sampel dengan metode *Block Maxima*, dimana terdapat data magnitudo gempa bumi dari bulan pertama sampai keempat. Untuk bulan pertama, nilai maksimum adalah M_1 sehingga data yang digunakan sebagai sampel untuk bulan pertama adalah M_1 , untuk bulan kedua, nilai maksimum adalah M_2 sehingga data yang digunakan sebagai sampel untuk bulan kedua adalah M_2 , dan untuk bulan berikutnya pengambilan sampel dilakukan dengan cara yang sama seperti bulan

sebelumnya. Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai maksimum bulan ke- n adalah $M_n = \max(d_{1n}, d_{2n}, \dots, d_{mn})$ dengan m adalah barisan data magnitudo bulan ke- n yang saling bebas.



Gambar 2.1. Gambar Ilustrasi Pengambilan Data Sampel dengan Metode *Block Maxima*

2.4.2 Distribusi *Generalized Extreme Value*

Menurut Teorema Fisher-Tippet-Gnekendo nilai ekstrem pada data yang diidentifikasi menggunakan metode *Block Maxima* mempunyai distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV). Teorema ini analog dengan *Central Limit Theorem* sehingga nilai maksimum M_n memiliki variabel standard berikut

$$M = \frac{M_n - b_n}{a_n}$$

Teorema 2.1. (Fisher-Tippet, Gnedenko)[9]

Jika terdapat rangkaian konstan ($a_n > 0$) dan (b_n) maka

$$P[M \leq x] = P\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right] \rightarrow F(x) \quad n \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

dengan $F(x)$ adalah fungsi distribusi *non-degenerate* yang termasuk dari keluarga distribusi berikut

1. Tipe 1 berdistribusi Gumbel

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)\right), \quad -\infty < x < \infty$$

2. Tipe 2 berdistribusi Frechet

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-b}{a}\right)^{-\alpha}\right), & x > b \\ 0, & x \leq b \end{cases}$$

3. Tipe 3 berdistribusi Weibull

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(-\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)^\alpha\right), & x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

untuk parameter $a > 0, b$ berdasarkan kasus di tipe II dan III, $\alpha > 0$.

Penyatuan tiga distribusi nilai ekstrem ke dalam satu distribusi menyederhanakan banyak implementasi statistik. Melalui perkiraan parameter yang relevan, data menentukan sendiri jenis perilaku ekor yang paling tepat dan menghindari penilaian apriori untuk ketiga distribusi nilai tersebut.

Oleh karena itu, $F(x)$ adalah distribusi anggota dari keluarga distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) atau tipe **Von Mises** distribusi Nilai Ekstrem atau distribusi tipe **von Mises-Jenkinson**[11]. Distribusi GEV memiliki *cumulative distribution function* (CDF) sebagai berikut

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right), & \xi \neq 0, 1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right), & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

dengan $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ dan ξ sesuai kasus diatas.

Parameter lokasi μ menyatakan letak titik pemusatan data, keragaman data ditunjukkan pada parameter skala σ dan ξ adalah parameter bentuk yang menyatakan bentuk distribusi data.

Parameter bentuk ξ menentukan perilaku ekor (*tail*) dari distribusi. Bentuk dari distribusi GEV akan mengarah pada distribusi Gumbel untuk $\xi = 0$, distribusi Frechet untuk $\xi > 0$, dan distribusi Weibull untuk $\xi < 0$. Menurut Finkenstadt dan Rootzen (2004), untuk kasus dengan $\xi = 0$ dikatakan bahwa kasus memiliki *medium-tailed*, $\xi > 0$ dikatakan bahwa kasus memiliki *long-tailed*, dan $\xi < 0$ dikatakan bahwa kasus memiliki *short-tailed*.

2.5 Estimasi Parameter Distribusi *Generalized Extreme Value*

Dalam penentuan estimasi parameter untuk Distribusi GEV dapat dilakukan dengan beberapa cara, salah satunya metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Metode MLE merupakan salah satu metode estimasi yang memaksimumkan fungsi *likelihood* untuk mendapatkan estimasi parameternya.

Langkah-langkah dalam menentukan estimasi parameter menggunakan metode MLE sebagai berikut [12]

1. Mengambil n sampel yang saling bebas M_1, M_2, \dots, M_n dari distribusi populasi X dengan *probability density function* $f(M_i; \theta)$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$;
2. Menentukan fungsi *likelihood* yang merupakan fungsi peluang bersama dari sampel M_1, M_2, \dots, M_n

$$L(\theta) = f(M_1; \theta)f(M_2; \theta) \dots f(M_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(M_i; \theta);$$

3. Memaksimumkan fungsi *likelihood* dengan membuat transformasi fungsi *likelihood* ke dalam bentuk logaritma natural (\ln) menjadi fungsi log *likelihood*

$$\ln L(\theta) = l(\theta)$$

4. Mendiferensiasi fungsi log *likelihood* terhadap parameter-parameternya dan menyamakan hasil turunananya dengan nol

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

Apabila hasil persamaan yang diperoleh dari turunan pertama fungsi log *likelihood* terhadap masing-masing parameter tidak *closed form* maka diperlukan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan yang tidak *closed form* adalah metode Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Quasi-Newton, sehingga diperoleh nilai yang dijadikan sebagai taksiran masing-masing parameter.

Metode BFGS Quasi-Newton merupakan perbaikan dari metode Newton. Metode Newton bergerak berdasarkan informasi derivatif dan berasal dari analisis deret Taylor (Luo, Zhong, Tang, Zhou, 2007). Rumus umum untuk metode Newton sebagai berikut [13]

$$\theta_{t+1} = \theta_t - g(\theta_t)H(\theta_t)^{-1} \quad (2.3)$$

dengan,

- θ_{t+1} : vektor estimasi parameter pada iterasi ke t+1
- θ_t : vektor estimasi parameter pada iterasi ke t
- $g(\theta_t)$: vektor turunan pertama dari fungsi log *likelihood*
- $H(\theta_t)$: matriks turunan kedua dari fungsi log *likelihood* atau matriks Hessian.

Dari Persamaan (2.3) dapat dibentuk sebuah metode modifikasi Newton klasik dengan rumus sebagai berikut

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \alpha g(\theta_t)H(\theta_t)^{-1}. \quad (2.4)$$

Pada metode BFGS Quasi-Newton, Matriks Hessian $H(\theta_t)$ diganti dengan matriks Hessian yang *update* yang merupakan matriks definit positif dan mempunyai sifat seperti matriks Hessian yaitu H_t [10]. Rumus umum untuk metode ini adalah sebagai berikut

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \alpha_t S_t \quad (2.5)$$

dengan

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \min \left[f(\theta_t + \alpha_t S_t) \right] \\ S_t &= -g(\theta_t) H_t.\end{aligned}$$

Setelah itu menghitung $\Delta\theta_t = \alpha_t S_t$ dan $\Delta g(\theta_t) = g(\theta_{t+1}) - g(\theta_t)$ sehingga diperoleh Persamaan (2.6) sebagai berikut

$$\begin{aligned}H_{t+1} = H_t + \left(1 + \frac{\Delta g(\theta_t)^T H_t \Delta g(\theta_t)}{\Delta g(\theta_t)^T \Delta \theta_t} \right) \frac{\Delta \theta_t \Delta(\theta_t)^T}{\Delta(\theta_t)^T \Delta g(\theta_t)} \\ - \frac{H_t \Delta g(\theta_t) \Delta(\theta_t)^T + (H_t \Delta g(\theta_t) \Delta(\theta_t)^T)^T}{\Delta g(\theta_t)^T \Delta \theta_t}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Iterasi akan berhenti apabila $\|\theta_{t+1} - \theta_t\| < \epsilon$ dengan ϵ adalah bilangan kecil sekali. Apabila iterasi berhenti akan diperoleh nilai estimasi untuk setiap parameter.

2.6 Interval Kepercayaan

Ketepatan estimasi parameter pada sampel juga dapat diukur dengan menggunakan estimasi interval berdasarkan tingkat keyakinan atau kepercayaan yang dipilih sebesar $(1 - \alpha)100\%$ yang disebut interval kepercayaan (*confidence interval*). Interval kepercayaan menghasilkan estimasi parameter yang representatif terhadap parameternya dibandingkan dengan sistem pendugaan titik [14].

Interval kepercayaan $(1 - \alpha)100\%$ untuk estimasi parameter distribusi GEV dilakukan dengan menggunakan pendekatan normal [12]. Misalkan M_1, M_2, \dots, M_n menjadi sampel dari populasi X dengan pdf $f(M_i; \theta)$ dan $\hat{\theta}$ menjadi MLE dari θ . Jika ukuran n sampel besar, kemudian menggunakan properti asimtotik dari MLE yaitu

$$\frac{\hat{\theta} - E(\hat{\theta})}{\sqrt{Var(\hat{\theta})}} \sim N(0, 1) \quad n \rightarrow \infty$$

Karena ukuran n sampel besar, MLE dari θ *unbiased*, maka

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{Var(\hat{\theta})}} \sim N(0, 1) \quad n \rightarrow \infty$$

Diperoleh $Q = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{Var(\hat{\theta})}}$ sebagai pivot, kemudian akan dibuat pendekatan interval kepercayaan $(1 - \alpha)100\%$ untuk θ sebagai berikut

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Q \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) \\ &= P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{Var(\hat{\theta})}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right). \end{aligned}$$

Jika $Var(\hat{\theta})$ bebas dari θ , maka interval kepercayaan untuk θ adalah

$$\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\theta})} \leq \theta \leq \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\theta})} \quad (2.7)$$

dengan $Var(\hat{\theta})$ merupakan invers dari matriks Hessian yang bernilai negatif [15], dinotasikan berikut

$$Var(\hat{\theta}) = \left[- \left(H(\theta) \right) \right]^{-1}.$$

2.7 Uji Kesesuaian Distribusi

Uji kesesuaian distribusi bertujuan untuk memperoleh model distribusi yang sesuai terhadap data pengamatan yang digunakan dalam sebuah penelitian. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menguji kesesuaian atau *goodness of fit* adalah uji Kolmogorov Smirnov (uji K-S).

Uji Kolmogorov Smirnov adalah suatu uji *goodness of fit* dengan menghitung jarak maksimum antara fungsi distribusi empiris sampel dan fungsi distribusi kumulatif teoritis [16].

Hipotesis:

$$H_0 : F_n(x) = F^*(x)$$

$$H_1 : F_n(x) \neq F^*(x)$$

dengan $F^*(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif teoritis dari distribusi yang diuji dan $F_n(x)$ distribusi frekuensi kumulatif dari sampel (empiris).

Statistik uji:

$$D_{hitung} = \max |F^*(x) - F_n(x)|. \quad (2.8)$$

D_{hitung} dapat diartikan sebagai batas penyimpangan terbesar agar suatu data masih bisa dikategorikan sesuai dengan distribusi yang diuji. Berikut adalah langkah-langkah yang digunakan dalam uji Kolmogorov Smirnov.

1. Diberikan sampel terurut dari yang terkecil ke yang terbesar $M_{1,n}, M_{2,n}, \dots, M_{n,n}$.
2. Menentukan distribusi frekuensi empiris $F_n(M_{i,n})$ dari daftar frekuensi data kumulatif (i) terhadap n pengamatan sesuai persamaan berikut

$$F_n(M_{i,n}) = \frac{i}{n}$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

3. Menentukan fungsi distribusi teoritis $F^*(M_{i,n})$ (dalam penelitian ini distribusi GEV) sesuai dengan parameter bentuk yang diperoleh pada Persamaan (2.2).
4. Menghitung D_{hitung} sesuai pada statistik uji yang ditunjukkan Persamaan (2.8).
5. Menentukan nilai kritis D_{tabel} dengan taraf signifikansi α yang disajikan pada Lampiran D.
6. Penarikan kesimpulan Hipotesis untuk mendapatkan distribusi pada data berdasarkan ketentuan berikut
 - a. Jika nilai D_{hitung} yang diperoleh lebih besar dari nilai kritis D_{tabel} , maka tolak H_0
 - b. Jika nilai D_{hitung} yang diperoleh lebih kecil dari nilai kritis D_{tabel} , maka terima H_0

Apabila H_0 ditolak distribusi frekuensi empiris akan mengikuti distribusi teoritis yang diuji, dan berlaku sebaliknya.

2.8 Mean Excess Function

Dalam menentukan probabilitas pada nilai ekstrem dapat dilihat dari perilaku ekor distribusi tersebut. *Mean Excess Function* (MEF) adalah alat grafis yang banyak digunakan untuk memahami perilaku ekor sampel dari distribusi. MEF menggambarkan perkiraan *overshoot* dari *threshold* ketika pelampauan terjadi.

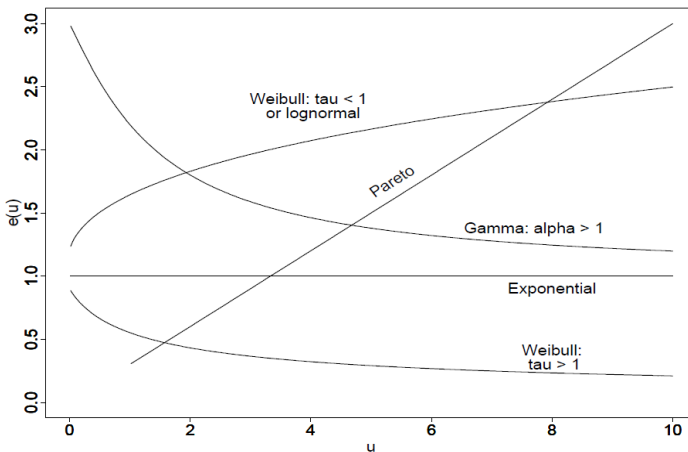
Definisi 2.1. Mean Excess Function [17]

Misal X adalah peubah acak dengan fungsi distribusi F dan titik batas kanan x_F dengan $u \leq x_F$, maka

$$e(u) = E[X - u | X > u] \quad 0 \leq u \leq x_F \quad (2.9)$$

adalah fungsi mean excess dari X .

Kuantitas $e(u)$ merupakan kelebihan rata-rata (*mean excess*) di atas nilai ambang batas (*threshold*) u . Berikut grafik fungsi *mean excess* dari beberapa distribusi standard ditunjukkan pada Gambar 2.2 yang terdapat pada penelitian Coles (2001) [9].



Gambar 2.2. Grafik *Mean Excess Function* $e(u)$ pada Beberapa Distribusi Standard

Diberikan sampel M_1, M_2, \dots, M_n yang diambil dari suatu populasi maka *mean excess* populasinya dapat diestimasi dengan *mean excess* sampel yaitu

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (M_i - u) I_{[M_i > u]}}{\sum_{i=1}^n I_{[M_i > u]}} \quad M_{1,n} \leq u < M_{n,n}. \quad (2.10)$$

Plot *mean excess* sampel merupakan terdiri dari grafik

$$\left[\left(M_{i,n}, e_n(M_{i,n}) \right) : 1 \leq i \leq n - 1 \right]. \quad (2.11)$$

dengan $M_{i,n}$ adalah order statistik M ke i .

Plot *mean excess* adalah alat uji grafis yang banyak digunakan dalam studi risiko, asuransi, dan nilai ekstrem. Salah satu penggunaannya adalah dalam memvalidasi model distribusi GEV untuk distribusi *excess*. Jika plot *mean excess* menunjukkan tren naik, maka ini adalah tanda yang jelas dari perilaku ekor *heavy-tailed*. Data yang didistribusikan secara eksponensial akan memberikan garis horizontal dan data dari distribusi *short-tailed* akan menunjukkan tren menurun pada plot ini[3].

2.9 Probabilitas *Exceedance*

Probabilitas *Exceedance* pada Tugas Akhir ini mengacu pada probabilitas kejadian gempa bumi selama periode waktu tertentu sehingga mencapai atau melampaui besar magnitudo tertentu. Probabilitas *Exceedance* pada distribusi GEV sesuai dengan Teorema 2.1 Fisher-Tippet, Gnedenko yang ditunjukkan sebagai berikut

$$P[M \leq x] = F(x) \quad (2.12)$$

dengan $F(x)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi GEV yang ditentukan berdasarkan nilai parameter bentuk pada data[19].

Peluang terlampaui (*exceedance probability*) dinyatakan dalam rentang interval mengikuti Persamaan (2.12) berikut[12]

$$P(a < M < b) = F(b) - F(a) \quad (2.13)$$

dimana M merupakan magnitudo yang berada diantara interval magnitudo a hingga magnitudo b .

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah Tugas Akhir ini.

3.1 Tahapan Penelitian

Adapun langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir, yaitu sebagai berikut

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan studi referensi mengenai subjek yang dibahas pada Tugas Akhir ini. Referensi yang dipelajari adalah berasal dari jurnal, buku atau literatur yang sesuai dengan topik Tugas Akhir ini, seperti :

- a. Gempa Bumi
- b. Magnitudo
- c. Teori Nilai Ekstrem
- d. Estimasi Parameter Distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV)
- e. Interval Kepercayaan
- f. Uji Kesesuaian Distribusi
- g. *Mean Excess Function*
- h. Probabilitas *Exceedance*

2. Metode Pengumpulan Data

Data yang digunakan pada Tugas Akhir ini berupa data sekunder yaitu data magnitudo gempa bumi di Indonesia selama 10 tahun yaitu pada tahun 2009 hingga 2018. Data tersebut diunduh melalui website repository Badan Meteorologi, Klimatologi, dan Geofisika (BMKG).

3. Metode Analisis Data

Pada tahap ini dilakukan analisis terhadap data magnitudo gempa bumi di Indonesia.

a. Identifikasi nilai ekstrem

Data magnitudo gempa bumi dikelompokkan dalam blok-blok tiap bulan kemudian dipilih magnitudo gempa bumi maksimum pada Januari 2009-Desember 2018 sesuai metode *Block Maxima* yang akan menjadi sampel.

b. Mengkaji Estimasi Parameter

Melakukan estimasi parameter distribusi GEV dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- i. Mengambil n sampel acak, yaitu M_1, M_2, \dots, M_n .
- ii. Memformulasikan fungsi *Probability Density Function* (PDF) untuk distribusi GEV.
- iii. Membuat fungsi *likelihood* dari PDF distribusi GEV
- iv. Membuat ln dari fungsi *likelihood* menjadi fungsi log *likelihood*.
- v. Membuat turunan pertama dari fungsi log *likelihood* terhadap masing-masing parameter, kemudian disama dengankan nol.

Apabila hasil persamaan yang diperoleh dari turunan pertama fungsi log *likelihood* terhadap masing-masing parameter tidak *closed form* maka diperlukan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pada penelitian ini metode numerik yang digunakan adalah metode Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Quasi-Newton dengan langkah-langkah sebagai berikut

- i. Membuat turunan pertama dari fungsi log *likelihood* terhadap masing-masing parameter yang akan dibuat matriks $g(\theta_t)$

$$g(\theta_t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

- ii. Membuat turunan kedua dari fungsi log *likelihood* terhadap kombinasi masing-masing parameter yang akan dibuat matriks Hessian H_t

$$H_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma \partial \mu} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \sigma} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \xi} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma \partial \xi} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi^2} \end{bmatrix}$$

- iii. Melakukan iterasi BFGS Quasi-Newton dengan persamaan berikut

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \alpha_t S_t$$

dengan

$$\alpha_t = \min \left[f(\theta_t + \alpha_t S_t) \right]$$

$$S_t = -g(\theta_t) H_t.$$

- iv. Menghitung perubahan $\Delta \theta_t = \alpha_t S_t$ dan perubahan $\Delta g(\theta_t) = g(\theta_{t+1}) - g(\theta_t)$ sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$H_{t+1} = H_t + \left(1 + \frac{\Delta g(\theta_t)^T H_t \Delta g(\theta_t)}{\Delta g(\theta_t)^T \Delta \theta_t} \right) \frac{\Delta \theta_t \Delta(\theta_t)^T}{\Delta(\theta_t)^T \Delta g(\theta_t)} - \frac{H_t \Delta g(\theta_t) \Delta(\theta_t)^T + (H_t \Delta g(\theta_t) \Delta(\theta_t)^T)^T}{\Delta g(\theta_t)^T \Delta \theta_t}.$$

Iterasi BFGS Quasi-Newton dilakukan sampai memenuhi kondisi $\|\theta_{t+1} - \theta_t\| < \epsilon$ dengan ϵ adalah bilangan kecil sekali. Iterasi Setelah iterasi berhenti akan diperoleh nilai estimasi untuk setiap parameter. Pada penelitian ini, iterasi BFGS Quasi-Newton dilakukan menggunakan software R *library qrmtools*.

Selain itu, akan dibuat interval kepercayaan 95% dengan $\alpha = 5\%$ untuk masing-masing estimasi parameter yang telah diperoleh.

c. Uji kesesuaian distribusi

Melakukan pemeriksaan kesesuaian pola sebaran data magnitudo gempa bumi terhadap pola sebaran teoritis (distribusi GEV) menggunakan uji Kolmogorov Smirnov. Perhitungan nilai D_{hitung} menggunakan Microsoft Excel ditampilkan pada Lampiran E.

d. Penentuan Model Distribusi Data

Setelah mendapatkan nilai parameter bentuk melalui MLE, didapatkan model distribusi dari data magnitudo gempa bumi. Untuk memperkuat analisa dari distribusi data tersebut, diperlukan uji grafis yang dapat menunjukkan perilaku ekor distribusi melalui Plot *Mean Excess*. Uji grafis ini didapatkan menggunakan *software* MATLAB 2013a.

e. Penentuan Probabilitas *Exceedance*

Pada tahap terakhir, akan ditentukan probabilitas (*exceedance*) yang ditentukan melalui model distribusi pada data magnitudo ekstrem yang akan menunjukkan besarnya probabilitas kejadian gempa bumi pada setiap besaran interval magnitudo gempa bumi.

4. Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran

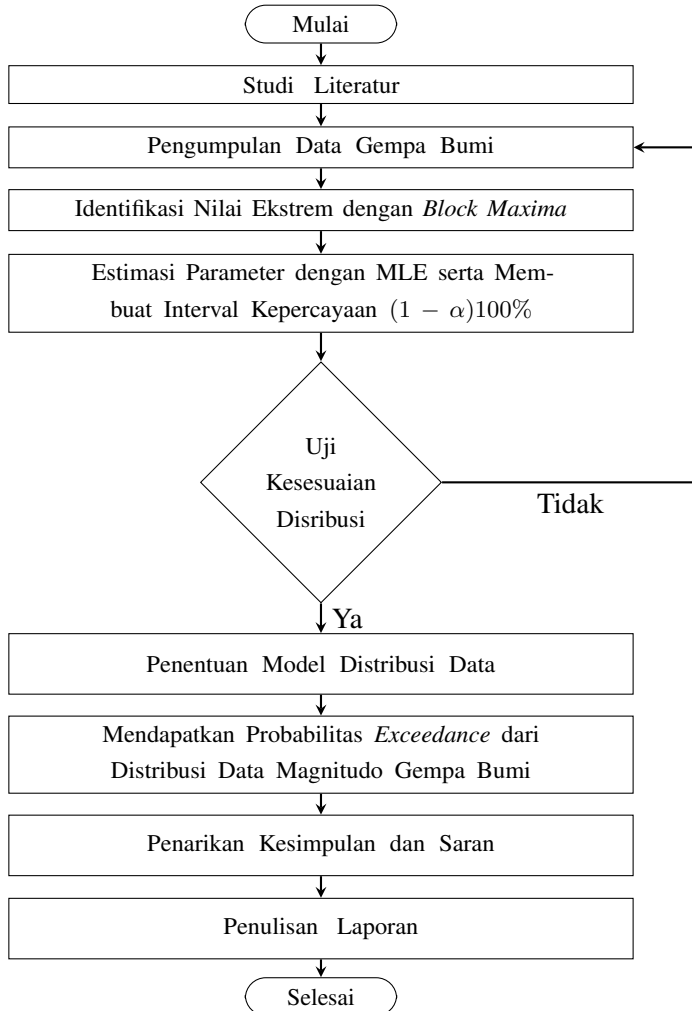
Apabila penentuan probabilitas *exceedance* telah dilakukan maka didapat model distribusi dan probabilitas kejadian ekstrem dari data magnitudo gempa bumi, sehingga dapat ditarik kesimpulan serta pemberian saran agar dapat dilakukan perbaikan dan pengembangan atas Tugas Akhir ini.

5. Penulisan Laporan

Tahap akhir yang dilakukan adalah penulisan Tugas Akhir yang meliputi hasil kajian mengenai permasalahan yang dibahas dalam bentuk laporan Tugas Akhir.

3.2 Skema Metode Penelitian

Secara umum tahapan penelitian yang akan dilakukan dalam Tugas Akhir ini ditunjukkan oleh diagram alir pada Gambar 3.1.



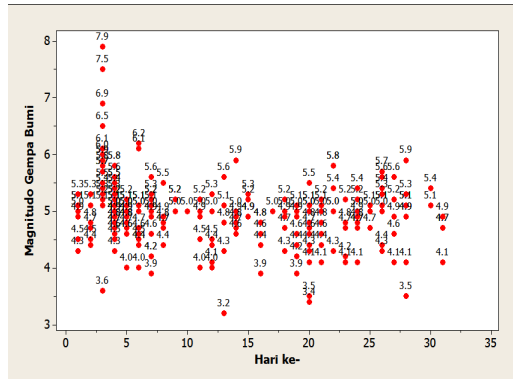
Gambar 3.1. Diagram Alir Metode Penelitian

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 Identifikasi Nilai Ekstrem

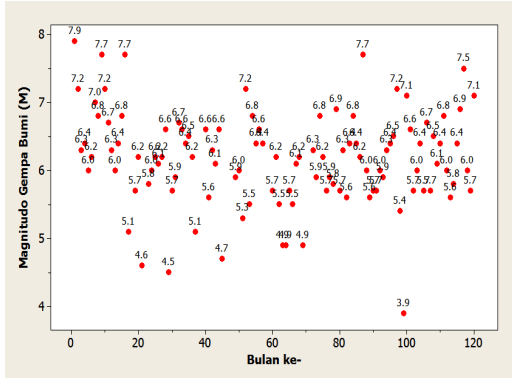
Pada Tugas Akhir ini, nilai ekstrem diidentifikasi menggunakan metode *Block Maxima* dengan pendekatan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV). Menurut metode ini, data magnitudo gempa bumi di Indonesia dibagi dalam blok-blok per bulan dari Januari 2009-Desember 2018 agar sampel yang digunakan cukup untuk pengamatan. Setelah itu, menentukan besarnya data gempa bumi maksimum pada setiap blok dan data tersebut adalah data ekstrem untuk setiap blok yang digunakan sebagai sampel untuk analisis selanjutnya. Sebagai contoh, Gambar 4.1 adalah ilustrasi pengambilan data sampel magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009.



Gambar 4.1. Pengambilan Data Magnitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009

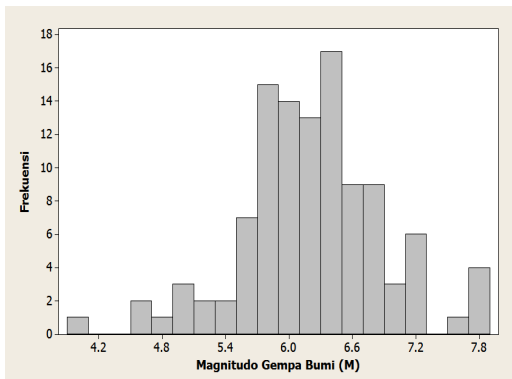
Pada Gambar 4.1 menunjukkan bahwa data ekstrem pada bulan Januari 2009 adalah 7.9 M karena memiliki nilai tertinggi pada bulan ini. Untuk pengambilan data sampel pada bulan-bulan berikutnya dilakukan dengan cara yang sama, yaitu mengambil satu pengamatan yang mempunyai nilai tertinggi atau maksimum pada

setiap bulan. Dengan metode *Block Maxima* diperoleh 109 data ekstrem pada Januari 2009-Desember 2018 yang ditunjukkan pada Gambar 4.2 berikut



Gambar 4.2. Pengambilan Data Sampel dengan Metode *Block Maxima*

Pola dari data ekstrem gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 dapat dilihat melalui histogram yang ditunjukkan pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3. Histogram Data Ekstrem Magnitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018

4.2 Estimasi Parameter Distribusi GEV

Estimasi parameter untuk distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Parameter-parameter dalam distribusi GEV yang tidak diketahui nilainya perlu di estimasi dengan menggunakan MLE. Cara kerja metode ini adalah memaksimumkan fungsi *likelihood* yang merupakan fungsi peluang bersama dari sampel.

Estimasi parameter untuk distribusi GEV bergantung pada kondisi parameter bentuk ξ sesuai pada Persamaan (2.2), yaitu estimasi parameter distribusi GEV untuk $\xi \neq 0$ dan estimasi parameter distribusi GEV untuk $\xi = 0$.

4.2.1 Estimasi parameter distribusi GEV dengan $\xi \neq 0$

Langkah-langkah untuk melakukan estimasi parameter distribusi GEV dengan $\xi \neq 0$ menggunakan metode MLE adalah sebagai berikut

1. Ambil sampel M_1, M_2, \dots, M_n dengan $M_i \sim GEV(\mu, \sigma, \xi)$
2. Fungsi kepadatan peluang (*probability density function*) untuk $M_i \sim GEV(\mu, \sigma, \xi)$ adalah

$$f(M_i; \mu, \sigma, \xi) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \exp\left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad (4.1)$$

dimana $i = 1, 2, 3, \dots, n$

3. Bentuk fungsi *likelihood* yang merupakan fungsi peluang bersama dari Persamaan (4.1) adalah

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma, \xi) &= f(M_1; \mu, \sigma, \xi) f(M_2; \mu, \sigma, \xi) \dots f(M_n; \mu, \sigma, \xi) \\ &= \prod_{i=1}^n f(M_i; \mu, \sigma, \xi) \\ &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \right. \\ &\quad \left. \exp\left(- \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \left[\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \right] \\
&\quad \exp \left[- \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \\
L(\mu, \sigma, \xi) &= (\sigma)^{-n} \left[\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \right] \\
&\quad \exp \left[- \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \quad (4.2)
\end{aligned}$$

4. Memaksimumkan fungsi *likelihood* dengan cara membuat logaritma natural (ln) dari fungsi *likelihood* pada Persamaan (4.2) menjadi fungsi log *likelihood*

$$\begin{aligned}
l(\mu, \sigma, \xi) &= \ln L(\mu, \sigma, \xi) \\
&= -n \ln(\sigma) + \left(-\frac{1}{\xi} - 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}} \\
&= -n \ln(\sigma) - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

5. Menurunkan fungsi log *likelihood* secara parsial terhadap masing-masing parameter yang bersesuaian kemudian disamadengankan nol.

Turunan pertama $l(\mu, \sigma, \xi)$ pada Persamaan (4.3) terhadap masing-masing parameter digunakan untuk mencari taksiran dari setiap parameter, yaitu μ , σ dan ξ .

a. Turunan pertama fungsi log *likelihood* terhadap parameter μ

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[-n \ln(\sigma) - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right] \\
 &= - \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \\
 &= - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \right] - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \\
 &= \frac{1 + \xi}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \\
 &\quad - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} = 0. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

b. Turunan pertama fungsi log *likelihood* terhadap parameter σ

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[-n \ln(\sigma) - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right] \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \\
 &= - \frac{\partial}{\partial \sigma} [n \ln(\sigma)] - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \\
 &= - \frac{n}{\sigma} + (1 + \xi) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) = 0. \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

- c. Turunan pertama fungsi log *likelihood* terhadap parameter ξ

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-n \ln(\sigma) - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \\
 &= -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[n \ln(\sigma) \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \\
 &= \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \\
 &\quad \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) - \\
 &\quad \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \\
 &\quad \left[\frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \right] = 0. \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.4), (4.5), dan (4.6) dapat diketahui bahwa hasil persamaan turunan pertama dari fungsi log *likelihood* terhadap masing-masing parameter adalah tidak *closed form* sehingga dibutuhkan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut. Pada penelitian ini, metode numerik yang digunakan adalah metode iterasi BFGS Quasi-Newton.

6. Metode Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Quasi-Newton.

Langkah pertama adalah membuat turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap setiap parameter yang akan diestimasi.

a. Turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap parameter μ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu^2} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\left(\frac{1+\xi}{\sigma} \right) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} - \frac{1}{\sigma} \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\left(\frac{1+\xi}{\sigma} \right) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \right] \\
&= \left(\frac{\xi + \xi^2}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-2} \\
&\quad - \left(\frac{1+\xi}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}-2} \quad (4.7)
\end{aligned}$$

b. Turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap parameter σ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma^2} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[-\frac{n}{\sigma} + (1+\xi) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[-\frac{n}{\sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[(1+\xi) \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \right] - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma^2} &= \frac{n}{\sigma^2} + (1 + \xi) \sum_{i=1}^n \left[-2 \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^3} \right) + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right)^2 \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-2} \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left[-2 \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^3} \right) \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} + \right. \\
&\quad \left. 1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right)^2 \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 2} \right] \quad (4.8)
\end{aligned}$$

c. Turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap parameter ξ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \left[-\frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} + \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right] \right] \\
&= -\frac{2}{\xi^3} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) + \frac{1}{\xi^2} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)} \right) + \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)} \right) + \\
&\quad \left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-2} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right)^2 \\
&\quad \left[\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \left[\frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)} \right) \right] \frac{1}{\xi^2} \right] - \frac{2}{\xi^3} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \left(\frac{\left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \left[\frac{1}{\xi^2} \right. \right. \\
& \left. \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)} \right) \right] \\
& \left. \left(-\frac{1}{\xi} \right) \right] + \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right. \\
& \left. \frac{\frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) + \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^2} \right) \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Berikut adalah turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap kombinasi masing-masing parameter.

- a. Turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap parameter μ dan parameter σ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{1 + \xi}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{1 + \xi}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \right) \right] \\
&= \frac{-\left(\frac{1 + \xi}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \xi \left(\frac{1 + \xi}{\sigma} \right) \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^2} \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} - \left(\frac{1 + \xi}{\sigma} \right) \\
&\quad \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 2} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \sigma} &= - \left(\frac{1 + \xi}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \\
&\quad - \left(\frac{\xi + \xi^2}{\sigma} \right) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-2} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} - \left(\frac{1 + \xi}{\sigma} \right) \\
&\quad \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 2} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

b. Turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap parameter μ dan parameter ξ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1 + \xi}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1 + \xi}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} - \left(\frac{1 + \xi}{\sigma} \right) \\
&\quad \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-2} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \\
&\quad - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \left[\frac{1}{\xi^2} \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \right] \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \quad (4.11)
\end{aligned}$$

c. Turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap parameter σ dan parameter ξ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma \partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\frac{n}{\sigma} + (1 + \xi) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)^{-1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{n}{\sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \xi) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right)}{\left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)} \right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \right] \\
&= \left[\frac{\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - (1 + \xi) \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^2} \right] \\
&\quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \\
&\quad \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \left[\frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) - (1 + \xi) \\
&\quad \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-2} \left(\frac{(M_i - \mu)^2}{\sigma^3} \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \\
&\quad \left[\frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.4), (4.5), dan (4.6) dapat dibentuk matriks $g(\theta_t)$ yang elemen-elemennya berisi turunan pertama fungsi log *likelihood* terhadap masing-masing parameter adalah sebagai berikut

$$g(\theta_t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Kemudian matriks H_t yang elemen-elemen diagonal utamanya berisi turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap masing-masing parameter, elemen-elemen yang lain berisi turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap kombinasi masing-masing parameter, dan bersifat simetris pada Persamaan (4.7) sampai (4.12).

$$H_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma \partial \mu} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \sigma} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \xi} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma \partial \xi} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Berikut adalah rumus umum yang digunakan Iterasi BFGS Quasi-Newton.

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \alpha_t S_t \quad (4.15)$$

dengan $\alpha_t = \min \left[f(\theta_t + \alpha_t S_t) \right]$ yang merupakan fungsi yang dapat meminimumkan error yang akan terjadi dan S_t didefinisikan sebagai $S_t = -g(\theta_t)H_t$. Kemudian menghitung perubahan $\Delta \theta_t = \alpha_t S_t$ dan $\Delta g(\theta_t) = g(\theta_{t+1}) - g(\theta_t)$ sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$H_{t+1} = H_t + \left(1 + \frac{\Delta g(\theta_t)^T H_t \Delta g(\theta_t)}{\Delta g(\theta_t)^T \Delta \theta_t} \right) \frac{\Delta \theta_t \Delta (\theta_t)^T}{\Delta (\theta_t)^T \Delta g(\theta_t)} - \frac{H_t \Delta g(\theta_t) \Delta (\theta_t)^T + (H_t \Delta g(\theta_t) \Delta (\theta_t)^T)^T}{\Delta g(\theta_t)^T \Delta \theta_t}. \quad (4.16)$$

Iterasi BFGS Quasi-Newton dilakukan sampai memenuhi kondisi $||\theta_{t+1} - \theta_t|| < \epsilon$ adalah bilangan kecil sekali. Setelah iterasi berhenti akan diperoleh nilai estimasi untuk masing-masing parameter distribusi GEV (μ, σ, ξ) untuk $\xi \neq 0$. Pada penelitian ini, iterasi BFGS Quasi-Newton dilakukan menggunakan software R *library qrmtools*.

4.2.2 Estimasi parameter distribusi GEV dengan $\xi = 0$

Estimasi parameter distribusi GEV selain untuk parameter bentuk tidak sama dengan nol ($\xi \neq 0$), berikut juga akan dibahas mengenai estimasi parameter distribusi GEV untuk $\xi = 0$. Langkah-langkah estimasi parameter distribusi GEV untuk $\xi = 0$ dengan MLE yaitu sebagai berikut

1. Ambil sampel M_1, M_2, \dots, M_n dengan $M_i \sim GEV(\mu, \sigma)$
2. Fungsi kepadatan peluang (*probability density function*) untuk $M_i \sim GEV(\mu, \sigma)$ adalah

$$f(M_i; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \quad (4.17)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, n$

3. Bentuk fungsi *likelihood* yang merupakan fungsi peluang bersama dari Persamaan (4.17) adalah

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma) &= f(M_1; \mu, \sigma) f(M_2; \mu, \sigma) \dots f(M_n; \mu, \sigma) \\ &= \prod_{i=1}^n f(M_i; \mu, \sigma) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \right] \\ &\quad \exp\left[-\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

$$L(\mu, \sigma) = (\sigma)^{-n} \left[\exp \left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right) \right] \exp \left[- \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \quad (4.18)$$

4. Memaksimumkan fungsi *likelihood* dengan cara membuat ln dari fungsi *likelihood* pada Persamaan (4.18)

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma) &= \ln L(\mu, \sigma) \\ &= \ln(\sigma)^{-n} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \\ &= -n \ln(\sigma) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

5. Menurunkan secara parsial terhadap setiap parameter yang bersesuaian kemudian disamadengankan nol.

Turunan pertama fungsi log *likelihood* pada Persamaan (4.19) terhadap setiap parameter digunakan untuk mencari taksiran dari parameter-parameter, yaitu μ dan σ .

- a. Turunan pertama fungsi log *likelihood* terhadap parameter μ

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\mu, \sigma)}{\partial \mu} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[-n \ln(\sigma) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[-n \ln(\sigma) \right] - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

- b. Turunan pertama fungsi log *likelihood* terhadap parameter σ

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[-n \ln(\sigma) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[-n \ln(\sigma) \right] - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \\
 &= -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \\
 &\quad \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Berdasarkan Persamaan (4.20) dan (4.21) menunjukkan bahwa turunan pertama fungsi log *likelihood* terhadap masing-masing parameter menghasilkan bentuk tidak closed form, oleh karena itu digunakan iterasi BFGS Quasi-Newton.

6. Metode Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Quasi-Newton

Langkah pertama adalah membuat turunan kedua ln fungsi *likelihood* terhadap masing-masing parameter dan kombinasi masing-masing parameter.

- a. Turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap parameter μ

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma)}{\partial \mu^2} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\partial l(\mu, \sigma)}{\partial \mu} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \\
 &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

b. Turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap parameter σ

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial l(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[-\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[-\frac{n}{\sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \\
 &= \frac{n}{\sigma^2} - 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^3} \right) + 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^3} \right) \\
 &\quad \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \\
 &\quad \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

c. Turunan kedua fungsi log *likelihood* terhadap parameter μ dan parameter σ

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\partial l(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[-\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[-\frac{n}{\sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} &= -\frac{1}{\sigma^2} - \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left[-1 + \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right. \\
&\quad \left. \exp\left(-\frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya sama seperti estimasi parameter untuk $\xi \neq 0$, yaitu membuat matriks Hessian $H(\theta_t)$ dan $g(\theta_t)$ yang kemudian digunakan untuk iterasi BFGS Quasi-Newton menggunakan *software* R dengan *library* **qrmtools**, sehingga diperoleh nilai estimasi untuk setiap parameter GEV $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ untuk $\xi = 0$.

4.3 Interval Kepercayaan

Setelah memperoleh estimasi parameter sampel dengan menggunakan MLE untuk mengukur ketepatan estimasi tersebut dapat digunakan interval kepercayaan. Pada Tugas Akhir ini, tingkat kepercayaan yang dipilih sebesar 95% dengan tingkat kesalahan pada estimasi sebesar 5%

Interval Kepercayaan 95% untuk estimasi parameter lokasi, skala, dan parameter bentuk pada Persamaan (2.6) yaitu sebagai berikut

$$\hat{\mu} - z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\mu})} \leq \mu \leq \hat{\mu} + z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\mu})} \tag{4.25}$$

$$\hat{\sigma} - z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\sigma})} \leq \sigma \leq \hat{\sigma} + z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\sigma})} \tag{4.26}$$

$$\hat{\xi} - z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\xi})} \leq \xi \leq \hat{\xi} + z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\xi})} \tag{4.27}$$

dengan akar varians masing-masing parameter merupakan *standard error* dari setiap parameter yang diperoleh dari invers matriks Hessian yang bernilai negatif.

Berdasarkan Persamaan (4.25), Persamaan (4.26), dan Persamaan (4.27) interval kepercayaan 95% untuk masing-masing estimasi parameter dengan nilai $z_{\alpha/2} = 1.96$ dan $\alpha = 0.05$ ditunjukkan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Estimasi Parameter dan Interval Kepercayaan 95%

Parameter	Estimasi Parameter	Interval Kepercayaan	Standard Error
Lokasi (μ)	5.9297419	[5.7842; 6.0755]	0.07432
Skala (σ)	0.7180368	[0.6265; 0.8230]	0.04996
Bentuk (ξ)	-0.3043866	[-0.3956; -0.2133]	0.04650

Tabel 4.1 menunjukkan bahwa nilai parameter lokasi (μ) sebesar 5.929297419, nilai parameter skala (σ) yaitu 0.7180368, dan nilai parameter bentuk ξ diperoleh -0.3043866 dengan tingkat kebenaran estimasi sebesar 95% dan tingkat kesalahan estimasi sebesar 5%.

4.4 Uji Kesesuaian Distribusi

Uji kesesuaian distribusi digunakan untuk menguji kesesuaian antara pola sebaran data terhadap pola sebaran teoritis. Uji ini bertujuan untuk mengetahui apakah pola sebaran data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 sesuai terhadap pola sebaran teoritis, dalam hal ini distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) sehingga dilakukan uji kesesuaian distribusi menggunakan Kolmogorov Smirnov dengan α yang digunakan sebesar 5%.

Hipotesis yang diuji dinyatakan sebagai berikut:

H_0 : Data mengikuti distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV).

H_1 : Data tidak mengikuti distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV).

Langkah pertama yang dilakukan untuk mengetahui pola sebaran data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 yaitu mengurutkan 109 data ekstrem magnitudo di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 dari magnitudo terkecil sampai magnitudo paling besar, sehingga $M_{1,109} = 3.9$, $M_{2,109} = 4.5, \dots, M_{109,109} = 7.9$.

Distribusi frekuensi empiris $F_n(M_{i,n})$ untuk masing-masing $M_{i,109}$ dengan $i = 1, 2, \dots, 109$ dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned} F_{109}(M_{1,109}) &= \frac{1}{109} = 0.00917 \\ F_{109}(M_{2,109}) &= \frac{2}{109} = 0.01835 \\ &\vdots \\ F_{109}(M_{109,109}) &= \frac{109}{109} = 1 \end{aligned}$$

dan fungsi distribusi kumulatif $F^*(M_{i,109})$ pada Tugas Akhir ini merupakan persamaan distribusi GEV dengan memasukkan masing-masing nilai parameter, berikut diberikan contoh untuk $M_{1,109} = 3.9$ yaitu

$$F^*(3.9) = \exp\left(-\left(1 + (-0.30438)\left(\frac{3.9 - 5.92974}{0.71803}\right)\right)^{-\left(\frac{1}{-0.30438}\right)}\right) = 0.000458$$

Langkah selanjutnya menghitung nilai D_{hitung} sesuai Persamaan (2.8) yaitu mencari nilai absolut dari selisih antara distribusi frekuensi empiris dan fungsi distribusi kumulatif pada masing-masing magnitudo terurut ($M_{i,109}$), contohnya untuk $M_{1,109} = 3, 9$ diperoleh nilai D_{hitung} berikut

$$|F^*(3, 9) - F_{109}(3, 9)| = |0.000458 - 0.00917| = 0.00871.$$

Dari sekian banyak nilai D_{hitung} pada Lampiran E diperoleh bahwa nilai D_{hitung} maksimum untuk data ekstrem magnitudo gempa bumi adalah 0.088693102.

Menurut Tabel nilai kritis D_{tabel} dalam Uji Kolmogorov Smirnov pada Lampiran D dengan $n = 109$ dan $\alpha = 0.05$, diperoleh nilai kritis $D_{tabel} = 0.1293065485$ dan karena 0.088693102 lebih

kecil nilainya dari 0.1293065485 atau $D_{hitung} < D_{tabel}$, sehingga disimpulkan terima H_0 , artinya data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 mengikuti distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV).

4.5 Penentuan Model Distribusi

Dalam analisis nilai ekstrem, parameter bentuk memberi informasi apakah data memiliki ekor berat ($\xi > 0$), berekor ringan ($\xi = 0$) atau bahkan lebih spesifik jika distribusi yang mendasari memiliki titik akhir kanan terbatas ($\xi < 0$) [18].

Pada Tabel 4.1 telah dijelaskan bahwa data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 memiliki nilai parameter bentuk kurang dari nol atau $\xi < 0$ yang menunjukkan bahwa data memiliki tipe Weibull atau distribusi GEV tipe 3. Pernyataan tentang distribusi data tersebut dapat diperkuat dengan melihat perilaku ekor distribusi pada data ekstrem magnitudo melalui plot *sample mean excess*.

Uji grafis plot *sample mean excess* didapatkan menggunakan Persamaan (2.10) dengan nilai *threshold* data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 terurut dari magnitudo paling kecil $M_{1,n}$ sampai magnitudo terbesar $M_{n,n}$, dengan $n = 109$ sedemikian hingga $M_{1,109} = 3.9$, $M_{2,109} = 4.5, \dots, M_{109,109} = 7.9$.

Sebagai contoh, perhitungan *mean excess* untuk nilai *threshold* $M_{1,109} = 3.9$ terdapat pada Lampiran F, sehingga *mean excess* untuk nilai *threshold* $M_{1,109} = 3.9$ ditunjukkan sebagai berikut

$$e_n(3.9) = \frac{\sum_{i=1}^n (M_i - 3.9) I_{[M_i > 3.9]}}{\sum_{i=1}^n I_{[M_i > 3.9]}} = \frac{247.1}{108} = 2.288.$$

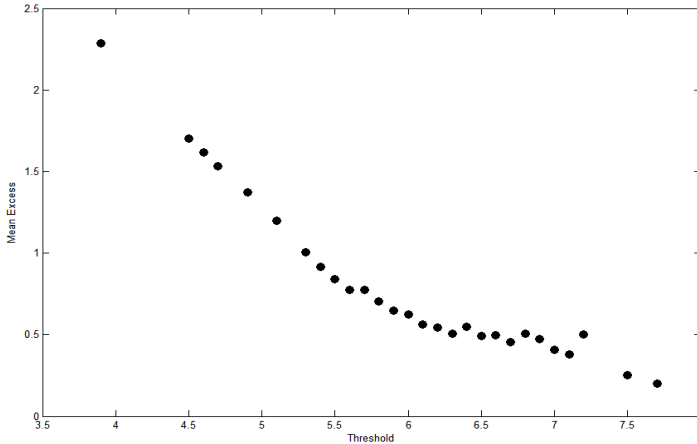
Untuk perhitungan *mean excess* untuk nilai *threshold* pada data ekstrem magnitudo terurut $M_{2,n}$ hingga $M_{n,n}$ dilakukan dengan cara yang sama melalui *software* MATLAB 2013a, sehingga *mean excess* terhadap masing-masing nilai *threshold* ditunjukkan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2. *Mean Excess* Data Ekstrem Magnitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018

No.	<i>Threshold</i> (u)	<i>Mean Excess</i> Sampel ($e_n(u)$)
1	3.9	2.288
2	4.5	1.7037
3	4.6	1.6189
4	4.7	1.5333
5	4.9	1.3725
6	5.1	1.96
7	5.3	1.0061
8	5.4	0.9153
9	5.5	0.8411
10	5.6	0.7736
11	5.7	0.7759
12	5.8	0.7026
13	5.9	0.6451
14	6	0.6242
15	6.1	0.5603
16	6.2	0.5449
17	6.3	0.507
18	6.4	0.5469
19	6.5	0.4931
20	6.6	0.4957
21	6.7	0.455
22	6.8	0.5071
23	6.9	0.475
24	7	0.4091
25	7.1	0.3778
26	7.2	0.5
27	7.5	0.25
28	7.7	0.2
29	7.9	NaN

Dengan memplotkan masing-masing *mean excess* yang telah diperoleh terhadap nilai *threshold* sesuai Persamaan 2.8, maka Gam-

bar 4.4 menunjukkan plot *sample mean excess* untuk data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018.



Gambar 4.4. Plot *Mean Excess* Data Ekstrem Magnitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018

Berdasarkan Gambar 4.4 menunjukkan perubahan setiap titik *mean excess* menurun dari kiri ke kanan yang merupakan perilaku dari distribusi berekor pendek (*short-tailed distribution*), dimana distribusi berekor pendek merupakan distribusi GEV tipe 3 dengan parameter bentuk $\xi < 0$. Model distribusi data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 diperoleh dari CDF distribusi GEV dengan $\xi < 0$ yaitu

$$F(x) = \exp\left(-\left(1 + (-0.304386)\left(\frac{x - 5.929741}{0.718038}\right)\right)^{-\frac{1}{(-0.304386)}}\right). \quad (4.28)$$

Jenis distribusi untuk gempa bumi maksimum bulanan di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 merupakan jenis Weibull atau lebih tepatnya disebut distribusi nilai ekstrem standar dan tidak memiliki kemiripan dengan distribusi standard Weibull yang perilaku ekstremnya sama sekali berbeda.

4.6 Probabilitas *Exceedance*

Setelah mendapatkan model distribusi dari data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 kemudian menentukan probabilitas *exceedance* sesuai dengan Teorema Fisher-Tippet, Gnedenko pada Persamaan (2.12). Perhitungan probabilitas *exceedance* diperoleh melalui Persamaan 4.29.

$$P[M \leq x] = \exp\left(-\left(1 + (-0.3043866)\left(\frac{x - 5.9297419}{0.7180368}\right)\right)^{-\left(\frac{1}{-0.3043866}\right)}\right).$$

Probabilitas *exceedance* dihitung dalam rentang threshold sesuai dengan Persamaan (2.13). Pemilihan skala magnitudo a dan b berdasarkan pada tingkat kerusakan ringan hingga sangat besar. Kerusakan adalah salah satu risiko yang diakibatkan gempa bumi. Risiko ini dinyatakan dalam skala *Modified Mercally Intensity* (MMI) atau disebut juga skala intensitas Mercally [2], selengkapnya terdapat di Lampiran H. Menurut kerusakan yang ditimbulkan maka skala magnitudo yang dipilih lebih dari 4M.

Diberikan contoh untuk menghitung probabilitas *exceedance* antara magnitudo berskala 4M hingga 4.5M, yaitu

$$\begin{aligned} P(4 < M \leq 4.5) &= F(4.5) - F(4) \\ &= \exp\left(-\left(1 + (-0.30438)\left(\frac{4.5 - 5.92974}{0.71803}\right)\right)^{-\left(\frac{1}{-0.30438}\right)}\right) \\ &\quad - \exp\left(-\left(1 + (-0.30438)\left(\frac{4 - 5.92974}{0.7180}\right)\right)^{-\left(\frac{1}{-0.304386}\right)}\right) \\ &= 0.008716183 - 0.000803488 \\ &= 0.007912695 \end{aligned}$$

dapat disimpulkan bahwa probabilitas terjadinya gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-2018 mencapai besaran skala magnitudo antara 4M hingga 4.5M adalah 0.007912695.

Probabilitas *exceedance* untuk data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 ditampilkan pada Tabel 4.3, untuk perhitungan selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran I.

Tabel 4.3. Probabilitas *Exceedance* Data Ekstrem Magnitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018

Rentang Magnitudo	Nilai Probabilitas Exceedance
$P(4 < M \leq 4.5)$	0.007912695
$P(4.5 < M \leq 5)$	0.042123968
$P(5 < M \leq 5.5)$	0.125926314
$P(5.5 < M \leq 6)$	0.227597437
$P(6 < M \leq 6.5)$	0.264034906
$P(6.5 < M \leq 7)$	0.203387778
$P(7 < M \leq 7.5)$	0.101241537
$P(M > 7.5)$	0.026971876

Berdasarkan Tabel 4.3, dapat ditarik kesimpulan bahwa saat skala magnitudo mencapai rentang 6M hingga 6.5M menghasilkan peluang terbesar terjadinya gempa bumi di Indonesia pada Januari 2008-Desember 2018, sehingga kemungkinan risiko dengan kerusakan kuat akan sering terjadi karena memiliki probabilitas *exceedance* terbesar. Selain itu, gempa bumi yang mencapai skala magnitudo yang besar diatas 6.5M wajib diperhatikan tingkat risikonya dengan probabilitas *exceedance* masing-masing.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari analisis dan pembahasan yang dijelaskan pada bab 4 diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 mempunyai masing-masing parameter lokasi μ , skala σ , dan parameter bentuk ξ adalah 5.9297419, 0.7180368, -0.3043866.
2. Data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 memiliki jenis Weibull atau distribusi GEV tipe III yang mempunyai model distribusi berikut

$$F(x) = \exp\left(-\left(1+(-0.3043866)\left(\frac{x - 5.9297419}{0.7180368}\right)\right)^{-\frac{1}{(-0.3043866)}}\right).$$

3. Berdasarkan perhitungan Probabilitas *Exceedance* pada data ekstrem magnitudo gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 diperoleh bahwa peluang terbesar gempa bumi di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018 terjadi pada saat skala magnitudo mencapai rentang 6M hingga 6.5M, sehingga kemungkinan risiko dengan tingkat kerusakan kuat akan sering terjadi.

5.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan di atas, saran yang diberikan sebagai berikut:

1. Untuk penelitian selanjutnya, pembagian blok pada data dapat dilakukan dalam blok per tahun.

2. Data yang digunakan dibagi setiap wilayah di Indonesia agar probabilitas terjadinya gempa lebih spesifik disuatu wilayah tertentu.
3. Untuk penelitian berikutnya, estimasi parameter dapat dilakukan dengan metode lain selain dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), misalnya dengan metode *Probability Weighted Moments* (PWM) serta estimasi Hill.
4. Membuat distribusi multivariat untuk masing-masing variabel karakteristik dasar gempa bumi seperti lokasi, kedalaman, kecepatan dll.
5. Menghitung sekuritas keamanan yang berkaitan dengan risiko bencana seperti obligasi bencana berdasarkan distribusi tipe Weibull dan probabilitas *exceedance* data ekstrem magnitudo gempa di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Republik Indonesia. (2007), Undang-Undang No. 24 Tahun 1992 tentang Penanggulangan Bencana. Sekretariat Negara. Jakarta.
- [2] Sunarjo, dkk. (2012), *Gempa Bumi Indonesia*, Edisi Populer. Jakarta. Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika.
- [3] Zimbidis, A.A, dkk. (2007), *Modeling Earthquake Risk via Extreme Value Theory and Pricing the Respective Catastrophe Bonds**. The Journal of the International Actuarial Association Vol. 37, Hal. 163-183.
- [4] Shao, J, dkk. (2015), *Catastrophe Risk Bonds with Applications to Earthquakes*. Springer, New York.
- [5] Prasetya, T, dkk. (2006), *GEMPA BUMI*. Yogyakarta. GITANAGARI.
- [6] KumparanNEWS. (2017), *BMKG Mengganti Hitungan Kekuatan Gempa dari Richter ke Magnitudo*. <https://kumparan.com/@kumparannews/bmkg-mengganti-hitungan-kekuatan-gempa-dari-richter-ke-magnitudo>. Diakses pada tanggal 11 Februari 2019.
- [7] Fisher R. A. and Tippett L.H.C. (1928), *On the estimation of the frequency distributions of the largest or smallest number of a sample*. Proc Camb Philos Soc 24, Hal 180-190.
- [8] Gnedenko, B.V. (1943), *Sur la distribution limite du terme maximum dume serie aleatoire*. Ann Math 44, Hal 423453.
- [9] Coles, S. (2001), *Improving the analysis of extreme wind speeds with information sharing models*. Notes de Institut Pierre Simon Laplace, 11: 23-34.

- [10] Rahayu, A. (2011), *Estimasi dan Pengujian Distribusi Generalized Extreme Value (GEV) (Studi Kasus : Identifikasi Perubahan Iklim di Jawa)*. Tesis Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya
- [11] Jenkinson, A.F. (1969), *Statistic of Extremes*. Technical Note 98, World Meteorological Organization. Chapter 5, Hal. 183-227.
- [12] Bain, L. J. and Engelhardt. M. (1992), *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Belmont: Duxbury Press.
- [13] Agresti, A. (2002), *Categorical Data Analysis Second Edition*. New Jersey : John Willey and Sons
- [14] Walpole, Ronald E. (1995), *Pengantar Statistika Edisi ke-3*. PT Gramedia Pustaka Utama : Jakarta.
- [15] Newton, H. J. (1999), *Iterative methods for parameter estimation*. Statistics 604. Chapter 4. Hal 29-30.
- [16] W. J. Conover. (1999), *Practical Nonparametric Statistical*. 3rd edition, pp.428-433 (6.1), John Wiley & Sons, Inc. New York.
- [17] Embrechts, P, dkk. (2003), *Modelling Extremal Events*. Germany. Springer, 4th edition.
- [18] Das, B. and Ghosh, S. (2015), *Detecting tail behavior: mean excess plots with condence bounds*. Singapore University of Technology and Design.
- [19] Coles, S. (2004), *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer Series in Statistics, 3rd edition, Great Britain.

Lampiran A
Data Magnitudo di Indonesia pada Januari 2009-Desember 2018

Daerah	Latitude	Longitude	Tanggal	Waktu	Magnitudo	Kedalaman
Laut Banda	6.89S	130.23 E	01-01-09	03:45:02	5.1	98
Minahassa Peninsula, Sulawesi	0.77 N	121.22 E	01-01-09	05:27:20	4.9	10
Minahassa Peninsula, Sulawesi	1.47 N	122.12 E	01-01-09	08:42:12	4.5	10
Minahassa Peninsula, Sulawesi	1.42 N	121.99 E	01-01-09	10:35:35	5	10
Southern Sumatra	4.42 S	101.07 E	01-01-09	16:57:53	5.3	10
Southern Sumatra	4.37 S	101.12 E	01-01-09	18:37:24	5.1	10
Laut Seram	2.46 S	126.87 E	02-01-09	01:45:51	4.3	10
Sulawesi	2.07 S	120.99 E	02-01-09	02:52:16	4.5	10
Laut Bali	6.51 S	114.27 E	02-01-09	07:54:28	4.4	643
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:

Lampiran A (Lanjutan)

Daerah	Latitude	Longitude	Tanggal	Waktu	Magnitudo	Kedalaman
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
Sulawesi	2.9 S	119.44 E	31-12-18	21:49:10	2.4	15
Minahassa Peninsula, Sulawesi	0.11 S	119.76 E	31-12-18	21:58:57	2.4	10
Halmahera	1.47 N	127.52 E	31-12-18	22:02:15	4.3	10
Daerah Sumba	9.32 S	119.68 E	31-12-18	22:06:02	3.6	193
Minahassa Peninsula, Sulawesi	0.13 S	122.78 E	31-12-18	22:13:24	2.6	54
Sumbawa Selatan	10.34 S	116.38 E	31-12-18	23:07:05	3.9	14
Pulau Talaud	3.08 N	126.57 E	31-12-18	23:09:27	5.1	10
Sulawesi	2.92 S	119.5 E	31-12-18	23:19:49	2.7	10
Daerah Timor	9.49 S	124.65 E	31-12-18	23:41:59	3.4	10
Northern Sumatra	2.09 N	98.99 E	31-12-18	23:48:52	3.7	10

Lampiran B
Data Ekstrem Magnitudo Maksimum Bulan Januari
2009-Desember 2018

No.	Bulan	Tahun	Magnitudo (M)
1	Januari	2009	7.9
2	Februari	2009	7.2
3	Maret	2009	6.3
4	April	2009	6.4
5	Mei	2009	6
6	Juni	2009	6.2
7	Juli	2009	7
8	Agustus	2009	6.8
9	September	2009	7.7
10	Oktober	2009	7.2
11	November	2009	6.7
12	Desember	2009	6.3
13	Januari	2010	6
14	Februari	2010	6.4
15	Maret	2010	6.8
16	April	2010	7.7
17	Mei	2010	5.1
18	Juli	2010	5.7
19	Agustus	2010	6.2
20	September	2010	4.6
21	November	2010	5.8
22	Desember	2010	6
23	Januari	2011	6.2
24	Februari	2011	6.1
25	Maret	2011	6.2
26	April	2011	6.6
27	Mei	2011	4.5
28	Juni	2011	5.7
29	Juli	2011	5.9
30	Agustus	2011	6.7

Lampiran B (Lanjutan)

No.	Bulan	Tahun	Magnitudo (M)
31	September	2011	6.6
32	Oktober	2011	6.4
33	November	2011	6.5
34	Desember	2011	6.2
35	Januari	2012	5.1
36	April	2012	6.6
37	Mei	2012	5.6
38	Juni	2012	6.3
39	Juli	2012	6.1
40	Agustus	2012	6.6
41	September	2012	4.7
42	Januari	2013	5.9
43	Februari	2013	6
44	Maret	2013	5.3
45	April	2013	7.2
46	Mei	2013	5.5
47	Juni	2013	6.8
48	Juli	2013	6.4
49	Agustus	2013	6.6
50	September	2013	6.4
51	Desember	2013	5.7
52	Januari	2014	6.2
53	Februari	2014	5.5
54	Maret	2014	4.9
55	April	2014	4.9
56	Mei	2014	5.7
57	Juni	2014	5.5
58	Juli	2014	6.1
59	Agustus	2014	6.2
60	September	2014	4.9
61	Desember	2014	6.3
62	Januari	2015	5.9

Lampiran B (Lanjutan)

No.	Bulan	Tahun	Magnitudo (M)
63	Februari	2015	6.8
64	Maret	2015	6.2
65	April	2015	5.7
66	Mei	2015	5.9
67	Juni	2015	5.8
68	Juli	2015	6.9
69	Agustus	2015	5.7
70	September	2015	6.3
71	Oktober	2015	5.6
72	November	2015	6.4
73	Desember	2015	6.8
74	Januari	2016	6.4
75	Februari	2016	6.2
76	Maret	2016	7.7
77	April	2016	6
78	Mei	2016	5.6
79	Juni	2016	5.7
80	Juli	2016	5.7
81	Agustus	2016	6
82	September	2016	5.9
83	Oktober	2016	6.3
84	November	2016	6.4
85	Desember	2016	6.5
86	Januari	2017	7.2
87	Februari	2017	5.4
88	Maret	2017	3.9
89	April	2017	7.1
90	Mei	2017	6.6
91	Juni	2017	5.7
92	Juli	2017	6
93	Agustus	2017	6.4
94	September	2017	5.7

Lampiran B (Lanjutan)

No.	Bulan	Tahun	Magnitudo (M)
95	Oktober	2017	6.7
96	November	2017	5.7
97	Desmber	2017	6.5
98	Januari	2018	6.1
99	Februari	2018	6.4
100	Maret	2018	6.8
101	April	2018	6
102	Mei	2018	5.6
103	Juni	2018	5.8
104	Juli	2018	6.4
105	Agustus	2018	6.9
106	September	2018	7.5
107	Oktober	2018	6
108	November	2018	5.7
109	Desember	2018	7.1

Lampiran C

Listing Estimasi Parameter Distribusi GEV dengan *Software R*

```

1 Attaching package:  qrmtools
2
3 The following object is masked from package:
   timeSeries :
4
5 returns
6
7 ## Mencari parameter distribusi GEV pada data ekstrem
   magnitudo gempa bumi dengan kasus nilai xi=0.
8
9 ## Memasukkan data pada program
10 library(readxl)
11 max <- read_excel("ev/Tugas Akhir/data gempa/data
   gempa repo/max.xlsx", sheet = "satu", range = "a1
   :a109", col_names = FALSE)
12 data<-c(max$var)
13
14 ## Inisiasi nilai awal setiap parameter
15 scale.init <- sqrt(6 * var(data)) / pi #inisial awal
   parameter sigma
16 loc.init <- mean(data) - scale.init*0.5772157 #inisial
   awal parameter mu
17 init <- c(0, loc.init, scale.init) #inisial awal
   parameter xi, mu, sigma
18
19 ## Estimasi parameter dengan MLE
20 fit.hy. <- fit_GEV_MLE(data, init = init) #maximum
   likelihood estimator
21 stopifnot(fit.hy.$convergence == 0) #terkonvergen
22 fit.hy.$par[["shape"]] # => menunjukkan estimasi
   parameter bentuk
23
24 ## Estimasi parameter dengan BFGS
25 fit_GEV_MLE(data, init = init, method = "BFGS") # ~=
   estimasi menggunakan BFGS
26
27 ##Mencari parameter distribusi GEV dengan kasus
   nilai awal parameter xi kecil tapi tidak nol
28 fit_GEV_MLE(data, init = c(.Machine$double.eps
   ^{0.25}, init[2:3])) #nilai awal xi =0.0001220703

```


Lampiran D
Tabel Nilai Kritis Uji Kolmogorov Smirnov

n	$\alpha = 0,20$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,02$	$\alpha = 0,01$
1	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	0,684	0,776	0,842	0,900	0,929
3	0,565	0,636	0,708	0,785	0,829
4	0,493	0,565	0,624	0,689	0,734
5	0,447	0,509	0,563	0,627	0,669
6	0,410	0,468	0,519	0,577	0,617
7	0,381	0,436	0,483	0,538	0,576
8	0,359	0,410	0,454	0,507	0,542
9	0,339	0,387	0,430	0,480	0,513
10	0,323	0,369	0,409	0,457	0,486
11	0,308	0,352	0,391	0,437	0,468
12	0,296	0,338	0,375	0,419	0,449
13	0,285	0,325	0,361	0,404	0,432
14	0,275	0,314	0,349	0,390	0,418
15	0,266	0,304	0,338	0,377	0,404
16	0,258	0,295	0,327	0,366	0,392
17	0,250	0,286	0,318	0,355	0,381
18	0,244	0,279	0,309	0,346	0,371
19	0,237	0,271	0,301	0,337	0,361
20	0,232	0,265	0,294	0,329	0,352
21	0,226	0,259	0,287	0,321	0,344
22	0,221	0,253	0,281	0,314	0,337
23	0,216	0,247	0,275	0,307	0,330
24	0,212	0,242	0,269	0,301	0,323
25	0,208	0,238	0,264	0,295	0,317
26	0,204	0,233	0,259	0,290	0,311
27	0,200	0,229	0,254	0,284	0,305
28	0,197	0,225	0,250	0,279	0,300
29	0,193	0,221	0,246	0,275	0,295
30	0,190	0,218	0,242	0,270	0,290
35	0,177	0,202	0,224	0,251	0,269

Lampiran D (Lanjutan)

n	$\alpha = 0,20$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,02$	$\alpha = 0,01$
40	0,165	0,189	0,210	0,235	0,252
45	0,156	0,179	0,198	0,222	0,238
50	0,148	0,170	0,188	0,211	0,226
55	0,142	0,162	0,180	0,201	0,216
60	0,136	0,155	0,172	0,193	0,207
65	0,131	0,149	0,166	0,185	0,199
70	0,126	0,144	0,160	0,179	0,192
75	0,122	0,139	0,154	0,173	0,185
80	0,118	0,135	0,150	0,167	0,179
85	0,114	0,131	0,145	0,162	0,174
90	0,111	0,127	0,141	0,158	0,169
95	0,108	0,124	0,137	0,154	0,165
100	0,106	0,121	0,134	0,150	0,161

Pendekatan

n	$1,07/\sqrt{n}$	$1,22/\sqrt{n}$	$1,35/\sqrt{n}$	$1,52/\sqrt{n}$	$1,63/\sqrt{n}$
200	0,076	0,086	0,096	0,107	0,115

Lampiran E
Uji Kesesuaian Distribusi Menggunakan Kolmogorov Smirnov

$M_{i,n}$	i	$F_n(M_{i,n})$	$F^*(M_{i,n})$	$ F^*(M_{i,n}) - F_n(M_{i,n}) $
3.9	1	0.00917	0.00045868	0.008715632
4.5	2	0.01835	0.008716183	0.009632441
4.6	3	0.02752	0.012989754	0.014533181
4.7	4	0.03670	0.018900202	0.017797046
4.9	5	0.04587	0.03736048	0.00851108
4.9	6	0.05505	0.03736048	0.017685392
4.9	7	0.06422	0.03736048	0.026859703
5.1	8	0.07339	0.067767244	0.005627251
5.1	9	0.08257	0.067767244	0.014801563
5.3	10	0.09174	0.113526261	0.021783141
5.4	11	0.10092	0.142905639	0.041988208
5.5	12	0.11009	0.176766466	0.066674723
5.5	13	0.11927	0.176766466	0.057500411
5.5	14	0.12844	0.176766466	0.048326099
5.6	15	0.13761	0.21502276	0.077408081
5.6	16	0.14679	0.21502276	0.068233769
5.6	17	0.15596	0.21502276	0.059059457
5.6	18	0.16514	0.21502276	0.049885145
5.7	19	0.17431	0.257416367	0.083104441
5.7	20	0.18349	0.257416367	0.073930129
5.7	21	0.19266	0.257416367	0.064755817
5.7	22	0.20183	0.257416367	0.055581505
5.7	23	0.21101	0.257416367	0.046407193
5.7	24	0.22018	0.257416367	0.037232881
5.7	25	0.22936	0.257416367	0.028058569
5.7	26	0.23853	0.257416367	0.018884257
5.7	27	0.24771	0.257416367	0.009709945
5.7	28	0.25688	0.257416367	0.000535633
5.7	29	0.26606	0.257416367	0.008638679
5.7	30	0.27523	0.257416367	0.017812991

Lampiran E (Lanjutan)

$M_{i,n}$	i	$F_n(M_{i,n})$	$F^*(M_{i,n})$	$ F^*(M_{i,n}) - F_n(M_{i,n}) $
5.8	31	0.28440	0.303518156	0.019114486
5.8	32	0.29358	0.303518156	0.009940174
5.8	33	0.30275	0.303518156	0.000765862
5.9	34	0.31193	0.352741037	0.040814431
5.9	35	0.32110	0.352741037	0.031640119
5.9	36	0.33028	0.352741037	0.022465807
5.9	37	0.33945	0.352741037	0.013291496
5.9	38	0.34862	0.352741037	0.004117184
6	39	0.35780	0.404363904	0.046565738
6	40	0.36697	0.404363904	0.037391426
6	41	0.37615	0.404363904	0.028217115
6	42	0.38532	0.404363904	0.019042803
6	43	0.39450	0.404363904	0.009868491
6	44	0.40367	0.404363904	0.000694179
6	45	0.41284	0.404363904	0.008480133
6	46	0.42202	0.404363904	0.017654445
6	47	0.43119	0.404363904	0.026828757
6.1	48	0.44037	0.457564489	0.017197517
6.1	49	0.44954	0.457564489	0.008023205
6.1	50	0.45872	0.457564489	0.001151107
6.1	51	0.46789	0.457564489	0.010325419
6.2	52	0.47706	0.511458374	0.034394153
6.2	53	0.48624	0.511458374	0.025219841
6.2	54	0.49541	0.511458374	0.01604553
6.2	55	0.50459	0.511458374	0.006871218
6.2	56	0.51376	0.511458374	0.002303094
6.2	57	0.52294	0.511458374	0.011477406
6.2	58	0.53211	0.511458374	0.020651718
6.2	59	0.54128	0.511458374	0.02982603
6.2	60	0.55046	0.511458374	0.039000342
6.3	61	0.55963	0.565140926	0.005507899
6.3	62	0.56881	0.565140926	0.003666413
6.3	63	0.57798	0.565140926	0.012840725

Lampiran E (Lanjutan)

$M_{i,n}$	i	$F_n(M_{i,n})$	$F^*(M_{i,n})$	$ F^*(M_{i,n}) - F_n(M_{i,n}) $
6.3	64	0.58716	0.565140926	0.022015037
6.3	65	0.59633	0.565140926	0.031189349
6.3	66	0.60550	0.565140926	0.040363661
6.4	67	0.61468	0.617728916	0.003050017
6.4	68	0.62385	0.617728916	0.006124295
6.4	69	0.63303	0.617728916	0.015298606
6.4	70	0.64220	0.617728916	0.024472918
6.4	71	0.65138	0.617728916	0.03364723
6.4	72	0.66055	0.617728916	0.042821542
6.4	73	0.66972	0.617728916	0.051995854
6.4	74	0.67890	0.617728916	0.061170166
6.4	75	0.68807	0.617728916	0.070344478
6.4	76	0.69725	0.617728916	0.07951879
6.4	77	0.70642	0.617728916	0.088693102
6.5	78	0.71560	0.668398809	0.047197521
6.5	79	0.72477	0.668398809	0.056371833
6.5	80	0.73394	0.668398809	0.065546145
6.6	81	0.74312	0.71641933	0.026699936
6.6	82	0.75229	0.71641933	0.035874248
6.6	83	0.76147	0.71641933	0.04504856
6.6	84	0.77064	0.71641933	0.054222872
6.6	85	0.77982	0.71641933	0.063397184
6.6	86	0.78899	0.71641933	0.072571496
6.7	87	0.79817	0.76117661	0.036988527
6.7	88	0.80734	0.76117661	0.046162839
6.7	89	0.81651	0.76117661	0.055337151
6.8	90	0.82569	0.802191026	0.023497047
6.8	91	0.83486	0.802191026	0.032671359
6.8	92	0.84404	0.802191026	0.041845671
6.8	93	0.85321	0.802191026	0.051019983
6.8	94	0.86239	0.802191026	0.060194295
6.8	95	0.87156	0.802191026	0.069368607
6.9	96	0.88073	0.839125611	0.041608334

Lampiran E (Lanjutan)

$M_{i,n}$	i	$F_n(M_{i,n})$	$F^*(M_{i,n})$	$ F^*(M_{i,n}) - F_n(M_{i,n}) $
6.9	97	0.88991	0.839125611	0.050782646
7	98	0.89908	0.871786587	0.027295982
7.1	99	0.90826	0.900117057	0.008139824
7.1	100	0.91743	0.900117057	0.017314136
7.2	101	0.92661	0.924185222	0.002420283
7.2	102	0.93578	0.924185222	0.011594595
7.2	103	0.94495	0.924185222	0.020768907
7.2	104	0.95413	0.924185222	0.029943219
7.5	105	0.96330	0.973028124	0.009725372
7.7	106	0.97248	0.98959415	0.017117086
7.7	107	0.98165	0.98959415	0.007942774
7.7	108	0.99083	0.98959415	0.001231538
7.9	109	1.00000	0.997328831	0.002671169
$D_{hitung} =$				0.088693102

Keterangan :

- n : 109
 $M_{i,n}$: Magnitudo terurut dari terkecil hingga terbesar
 i : Frekuensi data kumulatif
 $F_n(M_{i,n})$: Fungsi distribusi empiris terhadap n pengamatan
 $F^*(M_{i,n})$: Fungsi distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV)

Lampiran F
Perhitungan Mean Excess untuk Nilai Threshold 3.9

No.	Magnitudo (M_i)	$M_i - 3.9$	$I_{[M_i > u]}$
1	7.9	4	1
2	7.2	3.3	1
3	6.3	2.4	1
4	6.4	2.5	1
5	6	2.1	1
6	6.2	2.3	1
7	7	3.1	1
8	6.8	2.9	1
9	7.7	3.8	1
10	7.2	3.3	1
11	6.7	2.8	1
12	6.3	2.4	1
13	6	2.1	1
14	6.4	2.5	1
15	6.8	2.9	1
16	7.7	3.8	1
17	5.1	1.2	1
18	5.7	1.8	1
19	6.2	2.3	1
20	4.6	0.7	1
21	5.8	1.9	1
22	6	2.1	1
23	6.2	2.3	1
24	6.1	2.2	1
25	6.2	2.3	1
26	6.6	2.7	1
27	4.5	0.6	1
28	5.7	1.8	1
29	5.9	2	1
30	6.7	2.8	1
31	6.6	2.7	1

Lampiran F (Lanjutan)

No.	Magnitudo (M_i)	$M_i - 3.9$	$I_{[M_i > u]}$
32	6.4	2.5	1
33	6.5	2.6	1
34	6.2	2.3	1
35	5.1	1.2	1
36	6.6	2.7	1
37	5.6	1.7	1
38	6.3	2.4	1
39	6.1	2.2	1
40	6.6	2.7	1
41	4.7	0.8	1
42	5.9	2	1
43	6	2.1	1
44	5.3	1.4	1
45	7.2	3.3	1
46	5.5	1.6	1
47	6.8	2.9	1
48	6.4	2.5	1
49	6.6	2.7	1
50	6.4	2.5	1
51	5.7	1.8	1
52	6.2	2.3	1
53	5.5	1.6	1
54	4.9	1	1
55	4.9	1	1
56	5.7	1.8	1
57	5.5	1.6	1
58	6.1	2.2	1
59	6.2	2.3	1
60	4.9	1	1
61	6.3	2.4	1
62	5.9	2	1
63	6.8	2.9	1
64	6.2	2.3	1

Lampiran F (Lanjutan)

No.	Magnitudo (M_i)	$M_i - 3.9$	$I_{[M_i > u]}$
65	5.7	1.8	1
66	5.9	2	1
67	5.8	1.9	1
68	6.9	3	1
69	5.7	1.8	1
70	6.3	2.4	1
71	5.6	1.7	1
72	6.4	2.5	1
73	6.8	2.9	1
74	6.4	2.5	1
75	6.2	2.3	1
76	7.7	3.8	1
77	6	2.1	1
78	5.6	1.7	1
79	5.7	1.8	1
80	5.7	1.8	1
81	6	2.1	1
82	5.9	2	1
83	6.3	2.4	1
84	6.4	2.5	1
85	6.5	2.6	1
86	7.2	3.3	1
87	5.4	1.5	1
88	3.9	0	0
89	7.1	3.2	1
90	6.6	2.7	1
91	5.7	1.8	1
92	6	2.1	1
93	6.4	2.5	1
94	5.7	1.8	1
95	6.7	2.8	1
96	5.7	1.8	1
97	6.5	2.6	1

Lampiran F (Lanjutan)

No.	Magnitudo (M_i)	$M_i - 3.9$	$I_{[M_i > u]}$
98	6.1	2.2	1
99	6.4	2.5	1
100	6.8	2.9	1
101	6	2.1	1
102	5.6	1.7	1
103	5.8	1.9	1
104	6.4	2.5	1
105	6.9	3	1
106	7.5	3.6	1
107	6	2.1	1
108	5.7	1.8	1
109	7.1	3.2	1

Lampiran G

Listing Plot Sample Mean Excess dengan Software MATLAB 2013a

```

1 clear;
2 clc;
3
4 [filename, pathname] = uigetfile({'*.xlsx'}, 'File
   Selector');
5 fullpathname = strcat(pathname, filename);
6 Xi = xlsread(fullpathname, 'mean excess', 'A2:A110');
7 Xu = unique(Xi);
8 Ea = zeros(length(Xi),1);
9 Ep = zeros(length(Xi),1);
10 Threshold = zeros(length(Xu),1);
11 Mean_Excess = zeros(length(Xu),1);
12 N = 1:length(Xu);
13
14 for j=1:length(Xu)
15     for i=1:length(Xi)
16         if Xi(i) > Xu(j)
17             Ea(i) = Xi(i)-Xu(j);
18             Ep(i) = 1;
19         else
20             Ea(i) = 0;
21             Ep(i) = 0;
22         end
23     end
24     Threshold(j) = Xu(j);
25     Mean_Excess(j) = sum(Ea)/sum(Ep);
26 end
27
28 set(gcf, 'Name', 'Sample Mean Excess Plot', '
   NumberTitle', 'Off')
29 set(gcf, 'color', 'w')
30 drawnow;
31
32 f = figure(1);
33 v = subplot(1,3,1);
34 set(v, 'xtick', []);
35 set(v, 'ytick', []);
36 set(gca, 'XColor', 'w', 'YColor', 'w')

```

Lampiran G (Lanjutan)

```

1 i = subplot(1,3,3);
2 set(i,'xtick',[0]);
3 set(i,'ytick',[0]);
4 set(gca, 'XColor','w','YColor','w')
5
6 a = subplot(1,3,2);
7 pos = get(a,'Position');
8 un = get(a,'Units');
9 title ('Detail Value of Sample Mean Excess');
10 set(a,'xtick',[0]);
11 set(a,'ytick',[0]);
12 set(gca, 'XColor','w','YColor','w')
13 vars = {'Threshold' 'Mean Excess'};
14 uit = uitable (f,'Data',[Threshold Mean_Excess],...
15 'ColumnName',vars,'Units',un,'Position',pos);
16
17 figure(2);
18 set(gcf, 'color' , 'w')
19 plot(Threshold,Mean_Excess,'ko', 'MarkerSize',8,...
20 'MarkerEdgeColor', 'black', 'MarkerFaceColor',....
21 [0,0,0] );
22 title('Plot of Sample Mean Excess');
23 xlabel ('Threshold');
24 ylabel ('Mean Excess');

```

Lampiran H
Efek Besar Kekuatan Gempa Bumi (Magnitudo) Berdasarkan Skala Mercalli

Magnitudo	Deskripsi	Skala Mercalli	Rata-rata Efek Gempa Bumi
1.0-1.9	Tak Terasa	I	Tidak ada gempa bumi yang dideteksi oleh seismograf Gempa dirasakan oleh beberapa orang saja dan tidak berdampak pada bangunan. Manusia dapat merasakan gempa, tetapi jarang mengakibatkan kerusakan. Getaran dapat terasa di dalam bangunan. Getaran terasa di dalam ruangan dan menimbulkan suara. Getaran dapat dirasakan wilayah sekitar. Biasanya menimbulkan kerusakan ringan dan membuat beberapa benda jatuh. Gempa dapat menimbulkan kerusakan pada a bangunan dengan konstruksi buruk. Sebaliknya, gempa tidak dapat menimbulkan kerusakan. Dirasakan siapa saja. Kerusakan timbul pada beberapa bangunan dengan konstruksi baik, tetapi bangunan tahan gempa tidak akan terpengaruh banyak. BANGunan dengan konstruksi buruk akan menimbulkan kerusakan. Gempa terasa hingga ratusan kilometer dari pusat gempa.
2.0-2.9	Kecil	I-II	
3.0-3.9	Kecil	III-IV	
4.0-4.9	Ringan	IV-VI	
5.0-5.9	Sedang	VI-VIII	
6.0-6.9	Kuat	VIII-X	

Lampiran H (Lanjutan)

Magnitudo	Deskripsi	Skala Mercalli	Rata-rata Efek Gempa Bumi
7.0-7.9	Besar	X atau lebih	Kerusakan berapak pada sebagian besar gedung, dan bangunan dengan konstruksi baik juga terkena dampak dari gempa. Getaran terasa hingga 250 km dari titik pusat gempa.
8.0-8.9	Sangat Besar	X atau lebih	Sebagian besar (lebih banyak lagi) gedung hancur. Kerusakan dan getaran terjadi dalam wilayah yang luas.
≥ 9.0	Sangat Besar	X atau lebih	Kerusakan sangat parah dan seluruh bangunan hancur. Kerusakan dan getaran terjadi dalam wilayah lebih luas lagi. Permukaan tanah mengalami perubahan secara permanen.

Sumber : "Earthquake Facts and Statistics" (<http://earthquake.usgs.gov/earthquake/eqarchives/year/eqstats.php>).
United States Geological Survey. 29 November 2019. Diakses pada tanggal 6 Juli 2019.

Lampiran I
Perhitungan Probabilitas *Exceedance* Data Ekstrem
Magnitudo Gempa Bumi di Indonesia pada Januari
2009-Desember 2018

$$\begin{aligned}
 P(4 < M \leq 4.5) &= F(4.5) - F(4) \\
 &= e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{4.5 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) - e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{4 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\
 &= 0.008716183 - 0.000803488 \\
 &= 0.007912695
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(4.5 < M \leq 5) &= F(5) - F(4.5) \\
 &= e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{5 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) - e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{4.5 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\
 &= 0.050840152 - 0.008716183 \\
 &= 0.042123968
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(5 < M \leq 5.5) &= F(5.5) - F(5) \\
 &= e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{5.5 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) - e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{5 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\
 &= 0.176766466 - 0.050840152 \\
 &= 0.125926314
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(5.5 < M \leq 6) &= F(6) - F(5.5) \\
 &= e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{6 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) - e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{5.5 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\
 &= 0.404363904 - 0.176766466 \\
 &= 0.227597437
 \end{aligned}$$

Lampiran I (Lanjutan)

$$\begin{aligned}
 P(6 < M \leq 6.5) &= F(6.5) - F(6) \\
 &= e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{6.5 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) - e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{6 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\
 &= 0.668398809 - 0.404363904 \\
 &= 0.264034906
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(6.5 < M \leq 7) &= F(7) - F(6.5) \\
 &= e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{7 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) - e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{6.5 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\
 &= 0.871786587 - 0.668398809 \\
 &= 0.203387778
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(7 < M \leq 7.5) &= F(7.5) - F(7) \\
 &= e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{7.5 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) - e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{7 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\
 &= 0.973028124 - 0.871786587 \\
 &= 0.101241537
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(M > 7.5) &= 1 - P(M < 7.5) \\
 &= 1 - F(7.5) \\
 &= 1 - e \left(- \left(1 + \xi \cdot \frac{7.5 - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\
 &= 1 - e \left(- \left(1 + -0.3043866 \cdot \frac{7.5 - (5.9297219)}{0.7180368} \right)^{-\frac{1}{-0.3043866}} \right) \\
 &= 1 - 0.973028124 \\
 &= 0.026971876
 \end{aligned}$$

BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Evika Rachma Yuniasari, lahir di Surabaya pada tanggal 25 Juni 1997. Jenjang pendidikan formal yang ditempuh yaitu SDN Sawunggaling VIII (2003-2009), SMP Negeri 3 Surabaya (2009-2012), SMA Negeri 1 Surabaya (2012-2015). Pada tahun 2015, penulis diterima Departemen Matematika di ITS melalui jalur SNMPTN untuk menempuh pendidikan S1 selama empat tahun. Di Jurusan Matematika ITS penulis mengambil bidang minat Riset Operasi dan Pengolahan Data (ROPD).

Selama menempuh kuliah, penulis juga aktif dalam beberapa kegiatan kepanitiaan dan organisasi, yaitu HIMATIKA ITS sebagai Staff Departemen External Affair periode 2016/2017 dan Sekretaris Departemen External Affair periode 2017/2018, BEM FMIPA ITS 2016/2017 sebagai Staff of Big Event, Sie. Acara Olimpiade Matematika ITS 2017 dan 2018, Penanggung Jawab OMITS 2017 regional Solo, serta Penanggung Jawab OMITS 2018 regional Solo. Selain itu, penulis juga menjadi tentor private. Penulis juga mengikuti Kerja Praktek di Direktorat Jenderal Pengelolaan Pembiayaan dan Risiko, Kementerian Keuangan Republik Indonesia.

Jika ingin memberi saran, kritik, dan diskusi mengenai laporan Tugas Akhir ini, bisa menghubungi melalui email evikarachma@gmail.com. Semoga bermanfaat.

