



TUGAS AKHIR - KM184801

PENERAPAN METODE BOOTSTRAP PADA *ZERO-FAILURE* DATA DALAM PENENTUAN NILAI KEANDALAN (Studi Kasus: Mesin di PT. X)

LIA ZAHROTUN NAFISA
0611144000086

Dosen Pembimbing
Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si, MT

Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019



TUGAS AKHIR - KM184801

**PENERAPAN METODE BOOTSTRAP PADA ZERO-
FAILURE DATA DALAM PENENTUAN NILAI
KEANDALAN (Studi Kasus: Mesin di PT. X)**

**LIA ZAHROTUN NAFISA
0611144000086**

**Dosen Pembimbing
Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si, MT**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019**



FINAL PROJECT - KM184801

***APPLICATION OF BOOTSTRAP METHOD ON
ZERO-FAILURE DATA IN DETERMINING VALUE
OF RELIABILITY (Case Study: Machine at PT. X)***

**LIA ZAHROTUN NAFISA
0611144000086**

**Supervisor
Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si, MT**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics, Computing, and Data Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2019**

LEMBAR PENGESAHAN

PENERAPAN METODE BOOTSTRAP PADA ZERO-FAILURE DATA DALAM PENENTUAN NILAI KEANDALAN

(Studi Kasus: Mesin di PT. X)

APPLICATION OF BOOTSTRAP METHOD ON ZERO-FAILURE DATA IN DETERMINING VALUE OF RELIABILITY

(Case Study: Machine at PT. X)

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika, pada Bidang Studi Matematika Terapan Program Studi S-1 Departemen Matematika Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

LIA ZAHROTUN NAFISA

NRP. 06111440000086

Menyetujui,
Dosen Pembimbing


Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si., MT.

NIP. 19710928-199802 2 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika


Dr. Imam Mukhlash, S.Si., MT.

NIP. 19700831-199403 1 003

Surabaya, Juli 2019

PENERAPAN METODE BOOTSTRAP PADA *ZERO-FAILURE* DATA DALAM PENENTUAN NILAI KEANDALAN (Studi Kasus: Mesin PT. X)

Nama : Lia Zahrotun Nafisa
NRP : 0611144000086
Jurusan : Matematika FMKSD-ITS
Pembimbing : Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si, MT

ABSTRAK

Keandalan suatu mesin menjadi hal yang penting dalam suatu perusahaan. Untuk itu diperlukan uji keandalan pada suatu mesin agar dapat mengetahui seberapa tahan waktu mesin tersebut bekerja dengan baik. Akan tetapi terdapat permasalahan ketika data mesin yang didapat berupa *zero-failure* data yang berukuran kecil sehingga data tersebut sulit untuk dianalisa bahkan tidak bisa diketahui distribusinya. Untuk mengatasi masalah tersebut, diterapkan metode bootstrap pada *zero-failure* data yang ada. Bootstrap adalah metode resampel yang dapat bekerja tanpa asumsi distribusi pada suatu data. Selanjutnya, digunakan estimator densitas kernel Gaussian untuk mendapatkan nilai keandalannya. Studi kasus dilakukan pengambilan data pada komponen mesin di PT. X, yang mana mesin tersebut harus bekerja tanpa henti untuk memenuhi jumlah produksi diperusahaan. Didapatkan nilai keandalan komponen *bearing* mesin Double Planer pada awal waktu pemasangan sampai pada waktu 28 minggu cukup tinggi yaitu 0.8694013. Untuk kerusakan waktu 29 minggu menurun dikarenakan beberapa faktor yaitu faktor kurangnya pelumasan pada bearing, pemasangan bearing yang kurang pas, dan tekstur kayu yang dibentuk.

Kata kunci: Keandalan, *Zero-failure* data, Metode bootstrap, Estimator densitas kernel Gaussian

**APPLICATION OF BOOTSTRAP METHOD ON ZERO-
FAILURE DATA IN DETERMINING VALUE OF
RELIABILITY (Case Study: Machine at PT. X)**

Name : Lia Zahrotun Nafisa
NRP : 0611144000086
Department : *Mathematics*
Supervisor : Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si, MT

ABSTRACT

Reliability of a machine becomes important in a company. For this reason, a reliability test is needed on a machine so that it can determine how long the machine is working properly. But there is a problem when the machine data obtained is in the form of zero-failure data that is small in size so that the data is difficult to analyze and even the distribution cannot be known. To overcome this problem, the bootstrap method applied to existing zero-failure data. Bootstrap is a resampel method that can work without distribution assumptions on a data. Next, a Gaussian kernel density estimator is used to get the reliability value. Case studies carried out data retrieval on machine components at PT. X, where the machine must work nonstop to meet the amount of production in the company. The value of reliability of double planer engine bearings at the beginning of installation time up to 28 weeks is quite high at 0.8694013. For 29 weeks of declining time due to several factors, namely the lack of lubrication in the bearing, the installation of bearings that are less suitable, and the texture of the wood formed.

Keywords: Reliability, Zero-failure data, Bootstrap method, Gaussian kernel density estimator

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul

“PENERAPAN METODE BOOTSTRAP PADA *ZERO-FAILURE* DATA DALAM PENENTUAN NILAI KEANDALAN (Studi Kasus: Mesin di PT. X)”

Sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Kepala Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya tugas akhir ini.
2. Kaprodi S1 Departemen Matematika dan sekretaris prodi S1 yang telah memberikan arahan akademik selama penulis kuliah di Departemen Matematika FMKSD-ITS.
3. Ibu Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si, MT sebagai dosen pembimbing yang telah memberikan motivasi dan pengarahan dalam penyelesaian tugas akhir ini.
4. Ibu Endah Rohmati Merdika Putri, Ph.D sebagai dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis kuliah di Departemen Matematika FMKSD-ITS.
5. Ibu Dra. Farida Agustini Widjajati, MS., Ibu Endah Rohmati Merdika Putri, Ph.D, Ibu Dr. Rinurwati, M.Si sebagai dosen

penguji yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penyelesaian tugas akhir ini.

6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Departemen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. Kedua orang tua, Bapak Agus Salim dan Ibu Siti Maunah serta adik saya Firdias Aulia dan Ulfa Tri Zunaida atas doa yang tidak berhenti setiap harinya, dukungan dan semangat yang luar biasa yang telah diberikan.
8. Teman-taman saya Lita, Meylita, Umroka dan seluruh teman-teman ASHAR FAMILY, AKSIOMA 2014 serta saudara-saudara JMMI INSPIRASI yang saya sayangi yang telah membantu dan memberi semangat setiap harinya.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tugas akhir ini masih mempunyai banyak kekurangan. Kritik dan saran dari berbagai pihak yang bersifat membangun juga sangat diharapkan sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang.

Surabaya, Juli 2019

DAFTAR ISI

	Hal
HALAMAN JUDUL	i
TITLE PAGE	iii
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	5
1.6 Sistematika Penulisan	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Konsep Dasar Statistik	7
2.2 Keandalan	8
2.3 Metode Bootstrap	8
2.3.1 Metode Resampel.....	8
2.3.2 Definisi Bootstrap	9
2.3.3 Resampel Bootstrap	10
2.3.4 Penduga Selang Kepercayaan Bootstrap.....	11
2.3.5 Standar Error Bootstrap	11
2.4 Sifat-Sifat Estimator	12

2.5	Pengertian Densitas Kernel	13
	2.5.1 Estimasi Densitas Kernel	15
	2.5.2 Estimator Densitas Terbaik	16
2.6	Integrasi Numerik.....	17
	2.6.1 Metode Simpson	20

BAB III METODE PENELITIAN

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1	Deskripsi Data Mesin pada PT. X.....	27
4.2	Resampel Data dengan Metode Bootstrap	29
4.3	Estimator Densitas Kernel	30
4.4	Mencari Nilai Keandalan	30
4.5	Selang Kepercayaan Bootstrap	34
4.6	Simulasi Data	34
	4.6.1 Deskripsi Data	34
	4.6.2 Resampel Data dengan Bootstrap.....	35
	4.6.3 Estimator Densitas Kernel pada Data.....	38
	4.6.4 Nilai Keandalan Suatu Mesin.....	39
	4.6.5 Selang Kepercayaan Bootstrap.....	42

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1	Kesimpulan	43
5.2	Saran	43

DAFTAR PUSTAKA	45
-----------------------------	----

LAMPIRAN	47
-----------------------	----

BIODATA PENULIS	69
------------------------------	----

DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 2.1	Deskripsi Bentuk Integral $I = \int_a^b y(x) dx$ 18
Gambar 2.2	(a) Metode Trapezoidal (b) Metode Titik Tengah (c) Metode Simpson 19
Gambar 3.1	Diagram Alir Pengerjaan Tugas Akhir..... 25
Gambar 4.1	Mesin Double Planer..... 27
Gambar 4.2	<i>Bearing</i> pada Mesin Double Planer 28
Gambar 4.3	Plot Nilai Standar Error Pengulangan 100 kali..... 37
Gambar 4.4	Histogram Hasil Resampel Bootstrap 37
Gambar 4.5	Histogram Estimator-Estimasi Bootstrap 38
Gambar 4.6	Plot Estimator Densitas Kernel Gaussian..... 39
Gambar 4.7	Grafik Nilai $F(x)$ pada Data 40
Gambar 4.8	Grafik Nilai $R(x)$ pada Data 40

DAFTAR TABEL

	Hal
Tabel 2.1	Macam-Macam Bentuk Kernel..... 14
Tabel 4.1	Nilai $f(u_j)$ untuk Proses pada Metode Simpson 33
Tabel 4.2	Data Kerusakan Bearing Mesin 35
Tabel 4.3	Resampel Bootstrap dengan Pengulangan M kali 36
Tabel 4.4	Nilai $R(x)$ pada Data <i>Bearing</i> 41

DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
Lampiran A	Bukti Teorema..... 47
Lampiran B	Listing Program Resampel Data Metode Bootstrap 53
Lampiran C	Listing Program Plot Estimasi Fungsi Densitas Kernel Gaussian pada Data 55
Lampiran D	Listing Program Metode Simpson Mencari Nilai $F(x)$ dan $R(x)$ 57
Lampiran E	Data Hasil Resampel Bootstrap ($\hat{\theta}^{*B}$) 61
Lampiran F	Nilai Standar Error Pengulangan Bootstrap (\widehat{se}_B) 65
Lampiran G	Nilai Keandalan dengan Densitas Kerel Lain 67

DAFTAR SIMBOL

S	: Ruang sampel
X	: Variabel random
n	: Ukuran sampel
x_1, x_2, \dots, x_n	: Sampel random berukuran n
$f(x)$: Fungsi densitas probabilitas dari x
$F(x)$: Fungsi distribusi kumulatif dari x
$E(x)$: Nilai harapan dari x
Ω	: Ruang parameter
θ	: Parameter rata-rata
α	: Tingkat kepercayaan
\approx	: Mendekati sama dengan
Σ	: Sigma operator penjumlahan
B	: Jumlah resample bootstrap
M	: Jumlah ulangan resample bootstrap
x_B^*	: Resample bootstrap
$\hat{\theta}^{*j}$: Estimator resample bootstrap
$\hat{\theta}^{*(.)}$: Estimator rata-rata bootstrap
S_B	: Standar deviasi bootstrap
\widehat{se}_B	: Standar error bootstrap
$[\hat{\theta}_{low}]$: Batas bawah selang kepercayaan
$[\hat{\theta}_{up}]$: Batas atas selang kepercayaan
h	: Bandwidth, lebar jendela
$\hat{f}_h(\cdot)$: Estimator densitas kernel dengan lebar jendela h
$o(\cdot)$: <i>Little o</i>
$MSE(\cdot)$: <i>Mean square error</i>
$MISE(\cdot)$: <i>Mean integrated square error</i>

$A - MISE(.)$: *Asymtotic mean integrated square error*
 $K(.)$: Fungsi kernel

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan yang dibahas pada tugas akhir ini, rumusan masalah yang muncul akibat latar belakang, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan yang diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Pelanggan saat ini mempunyai ekspektasi yang tinggi terhadap keandalan suatu produk. Keandalan berhubungan dengan kemampuan suatu produk dalam melakukan fungsinya atau lebih dikenal dalam istilah *reliability*. Sementara bagi perusahaan yang bergerak di bidang industri manufaktur ataupun jasa, tentu harus dapat memberikan perhatian penuh dalam berbagai hal pada kegiatan produksinya untuk memenuhi berbagai ekspektasi yang diberikan oleh pelanggan. Salah satunya adalah dengan menentukan seberapa besar tingkat keandalan mesin produksi. Karena, kualitas atau keandalan dari suatu produk dapat dinilai dari komponen yang menyusun produk tersebut dan bagaimana komponen-komponen tersebut disusun menjadi produk yang baik atau tidak.

Dilihat dari fungsinya, yaitu menghasilkan produk, peranan mesin produksi sangat penting sehingga diharapkan tidak mengalami kegagalan saat kegiatan produksi berlangsung. Mesin produksi yang mengalami masalah, dapat mengganggu jalannya produksi dan mungkin saja dapat membahayakan keselamatan jiwa dari operator produksi yang terlibat maupun pengguna produk yang dihasilkan. Sehingga harus selalu dipersiapkan segala sesuatunya teliti dan berdasarkan standar persyaratan yang

telah ditentukan oleh perusahaan agar tingkat keandalan mesin sesuai dengan yang diharapkan. Ketika keandalan suatu mesin rendah, maka produk yang dihasilkan juga akan rendah, baik dari sisi kualitas maupun kuantitas, sehingga akan mempengaruhi keuntungan dari suatu perusahaan tersebut. Selain itu juga, dengan mengetahui tingkat keandalan suatu mesin, dapat ditentukan pemeliharaan yang tepat sehingga keandalan suatu mesin dapat meningkat. Untuk mengetahui keandalan, Arina F dkk. menentukan keandalan suatu mesin menggunakan *Reliability Block Diagram* (RBD) [1].

Dalam melakukan proses pengambilan data waktu kerusakan mesin di lapangan, sering kali dihadapkan dengan data yang sampelnya kecil, seperti *zero-failure* data. Data dikatakan kecil apabila $n < 30$ dan dikatakan besar apabila $n \geq 30$. Menurut teori statistik, semakin besar ukuran sampel semakin kuat pula hasil estimasinya. *Zero-failure* data adalah sebuah data yang dalam percobaannya tanpa mengalami kegagalan atau memiliki kegagalan yang kecil. Dimana ketika data itu kecil, akan mengalami kesulitan dalam menganalisis terutama untuk menentukan distribusi atau estimasi parameternya. Dalam penelitian Jiang P dkk. menyatakan bahwa estimasi *zero-failure* data yang ada, diperkirakan peluang kegagalannya berupa distribusi Weibull [2]. Sedangkan, peluang distribusi suatu data ada yang berupa distribusi Eksponensial, distribusi Log-normal, distribusi Gamma. Oleh karena itu, digunakan pendekatan nonparametrik yang tidak membutuhkan asumsi parameter.

Salah satu metode yang bisa digunakan adalah metode bootstrap. Metode yang digunakan untuk meresampel data kecil dan menentukan estimasi parameternya. Dalam penelitian Kurniawan A, metode bootstrap digunakan untuk pemodelan

fungsi tahan hidup suatu individu, namun dalam penelitian tersebut distribusi dari data penderita kanker dapat diketahui [3]. Metode bootstrap digunakan karena data penderita kanker yang diambil merupakan data sampel tersensor *type* III, dimana penyensoran sampel merupakan salah satu cara untuk mengatasi sulitnya mengamati lama tahan hidup seluruh sampel dalam waktu yang ditentukan. Dalam penelitian Solih A, metode bootstrap digunakan untuk estimasi *confidence interval* (CI) untuk analisis data sampel terbatas [4].

Untuk pendekatan nonparametriknya, menurut Sunandi dan Malau, dapat dicari melalui estimasi densitas. Estimasi densitas yang sudah dikenal adalah histogram dan densitas kernel. Densitas kernel merupakan pengembangan dari histogram. Histogram mempunyai beberapa kelemahan yaitu bentuknya dipengaruhi oleh pemilihan titik awal dan lebar interval kelas. Dengan titik awal yang berbeda akan didapat bentuk histogram yang berbeda, begitu pula dengan bentuk kelas yang berbeda. Juga karena histogram mempunyai bentuk yang tidak kontinu pada batas kelas, sedangkan fungsi densitas yang sebenarnya fungsi yang kontinu. Oleh karena itu digunakan estimator densitas kernel yang memberikan suatu fungsi yang kontinu [5]. Menurut Hansen, secara umum kernel Epanechnikov dan Gaussian sering digunakan dalam melakukan pendekatan nonparametrik [6].

Oleh karena itu, dalam tugas akhir ini, ditentukan nilai keandalan mesin pada PT. X menggunakan metode bootstrap untuk resampel dan estimasi parameter serta estimator densitas kernel Gaussian untuk menentukan nilai keandalannya. Karena densitas kernel Gaussian lebih mudah serta tidak memerlukan syarat dalam penggunaannya.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menghitung hasil estimasi parameter pada *zero-failure* data menggunakan metode bootstrap?
2. Bagaimana nilai keandalan pada *zero-failure* data dengan metode bootstrap?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Data yang diambil merupakan data kerusakan mesin dalam kurun waktu 5 tahun terakhir yaitu data tahun 2013-2017.
2. Parameter bootstrap yang digunakan adalah parameter rata-rata.
3. Jumlah resampel bootstrap adalah 1000 resampel dan akan menjadi data baru untuk mencari nilai keandalan.
4. Jumlah pengulangan resampel yang digunakan adalah 100 kali.
5. Densitas kernel yang digunakan adalah fungsi densitas kernel Gaussian.

1.4 Tujuan

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah, tujuan dari tugas akhir ini sebagai berikut:

1. Mendapatkan hasil estimasi parameter pada *zero-failure* data menggunakan metode bootstrap.
2. Mendapatkan nilai keandalan pada *zero-failure* data menggunakan metode bootstrap.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan informasi tentang penerapan metode bootstrap pada *zero-failure* data.
2. Memberikan informasi terkait keandalan pada *zero-failure* data.
3. Dapat digunakan sebagai acuan perusahaan dan penelitian berikutnya untuk mengetahui keandalan suatu mesin yang merupakan *zero-failure* data.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk memberikan gambaran mengenai keseluruhan isi tugas akhir ini, maka dikemukakan sistematika penulisan tugas akhir ini sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN
Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan hasil tugas akhir.
2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
Pada bab ini dijelaskan tentang teori-teori dasar statistik yang mendukung tugas akhir ini, sifat-sifat estimator, pengertian keandalan, metode bootstrap, estimasi parameter bootstrap, fungsi densitas serta densitas kernel Gaussian
3. BAB III METODE PENELITIAN
Bab ini menjelaskan tentang tahapan-tahapan dalam proses menyelesaikan masalah dan mencapai tujuan tugas akhir.
4. BAB IV PEMBAHASAN
Bab ini menjelaskan mengenai proses yang dilakukan untuk mencari nilai keandalan dimulai dari resampel bootstrap,

mencari estimator bootstrap, menentukan estimator densitas kernel sehingga mendapatkan nilai keandalannya yang disertai simulasi pada data suatu mesin di PT X.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai konsep dasar statistik, nilai keandalan, metode resampel bootstrap, fungsi densitas kernel dan integrasi numerik.

2.1 Konsep Dasar Statistik

Ada beberapa konsep dasar statistik yang menunjang materi dalam penulisan tugas akhir ini. Konsep dasar yang diperlukan adalah pengertian variabel random, fungsi densitas probabilitas, fungsi distribusi kumulatif, nilai harapan dan varian [7].

Definisi 2.1.1 *Ruang sampel, dinotasikan S adalah himpunan dari semua kejadian yang mungkin dalam suatu eksperimen.*

Definisi 2.1.2 *Variabel Random X adalah fungsi yang memetakan setiap hasil yang mungkin e pada ruang sampel S dengan suatu bilangan real x , sedemikian hingga $X(e) = x$.*

Salah satu variabel random adalah random kontinu. Perilaku variabel random kontinu dapat digambarkan melalui fungsi densitas probabilitas dan fungsi distribusi kumulatifnya.

Definisi 2.1.3 *Variabel random X disebut variabel random kontinu jika terdapat fungsi $f(x)$ yang merupakan fungsi densitas probabilitas dari X , sehingga fungsi distribusi kumulatifnya dapat dinyatakan dengan*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (2.1)$$

Sesuatu yang perlu diketahui dari suatu distribusi variabel random adalah pusat (*central*) distribusi yang didefinisikan sebagai nilai harapan dan varian.

Definisi 2.1.4 Jika X suatu variabel random kontinu dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai harapan dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (2.2)$$

Dan varian dari variabel random adalah

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] \quad (2.3)$$

2.2 Keandalan

Keandalan adalah probabilitas suatu komponen atau sistem akan bekerja sesuai dengan fungsinya ketika dioperasikan selama periode waktu tertentu [8]. Keandalan didasarkan pada teori probabilistik dalam teori statistik, yang tujuan utamanya adalah mampu diandalkan untuk bekerja sesuai dengan fungsinya dengan suatu kemungkinan sukses dalam periode tertentu yang ditentukan.

Jika diberikan t adalah waktu kerusakan, maka fungsi keandalannya ($R(t)$) adalah sebagai berikut [8]:

$$R(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t) \text{ untuk } t > 0 \quad (2.4)$$

2.3 Metode Bootstrap

Ada beberapa teori yang menunjang dalam metode bootstrap ini yaitu metode resampel, definisi bootstrap, resampel bootstrap, estimator bootstrap, dan selang kepercayaan bootstrap.

2.3.1 Metode Resampel

Metode resampel adalah metode yang mengambil dua atau lebih contoh berulang dari data contoh. Metode resampel adalah sebuah metode nonparametrik dari statistik inferensia. Dengan kata lain, metode resampel tidak menggunakan tabel distribusi

(misalnya, tabel distribusi normal) untuk menghitung perkiraan nilai peluang p . Resampel termasuk kasus pemilihan acak dengan pengulangan contoh dari data asli sehingga setiap jumlah contoh yang diambil memiliki kemiripan dengan contoh dari data asli. Karena pengulangan, contoh yang diambil menggunakan metode resampel dengan kasus berulang [9].

Resampel menghasilkan distribusi sampling yang unik berdasarkan data sebenarnya. Metode resampel merupakan hasil perkiraan karena didasarkan pada contoh yang berisi semua hasil yang mungkin dari data yang diteliti oleh peneliti. Metode resampel umumnya mengabaikan asumsi parametrik yang mengabaikan sifat distribusi data yang mendasari. Oleh karena itu, metode ini didasarkan pada asumsi nonparametrik. Di dalam metode resampel, tidak ada persyaratan ukuran contoh tertentu. Oleh karena itu, semakin besar contoh maka semakin dipercayai selang kepercayaan yang dihasilkan oleh metode resampel.

2.3.2 Definisi Bootstrap

Efron menyatakan bahwa bootstrap adalah teknik resampel nonparametrik dengan pengembalian dari data asli yang bertujuan untuk menentukan estimasi standar eror dan interval konfidensi dari parameter populasi seperti rata-rata, rasio, median, proporsi, koefisien korelasi atau koefisien regresi tanpa menggunakan asumsi distribusi. Bootstrap dapat digunakan untuk mengatasi permasalahan dalam statistika baik masalah data yang sedikit, data yang menyimpang dari asumsinya maupun data yang tidak memiliki asumsi dalam distribusinya. Bootstrap juga merupakan suatu metode yang berbasis komputer yang sangat potensial untuk dipergunakan pada masalah keakurasian [10].

2.3.3 Resampel Bootstrap

Misalkan dalam suatu penelitian dipunyai sampel yang berukuran n data amatan yaitu $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan dari sampel ini dihitung estimator $\hat{\theta}$. Metode bootstrap merupakan prosedur pengambilan sampel baru secara berulang sebanyak B sampel dari data asal berukuran n . Sebuah sampel baru diperoleh melalui pengambilan titik sampel dari data asal secara satu persatu dengan pengambilan.

Bentuk sampel yang diperoleh dari metode bootstrap dapat digambarkan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_1^{*(1)}, & x_2^{*(1)}, & x_3^{*(1)}, & \dots & x_n^{*(1)} & & \\
 x_1^{*(2)}, & x_2^{*(2)}, & x_3^{*(2)}, & \dots & x_n^{*(2)} & & \\
 x_1^{*(3)}, & x_2^{*(3)}, & x_3^{*(3)}, & \dots & x_n^{*(3)} & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \\
 x_1^{*(B)}, & x_2^{*(B)}, & x_3^{*(B)}, & \dots & x_n^{*(B)} & &
 \end{array} \tag{2.5}$$

Dengan menerapkan metode bootstrap, maka dari sampel baru dan akan diperoleh estimator-estimator $\hat{\theta}^{*j}$ dengan $j=1, 2, \dots, B$. [11]

Secara umum, langkah-langkah bootstrap adalah sebagai berikut [4]:

1. Menentukan data sampel.
2. Menentukan estimasi $\hat{\theta}$.
3. Melakukan resampel bootstrap pada n data sampel dengan pengembalian.
4. Menentukan estimasi $\hat{\theta}^{*j}$.
5. Mengulangi langkah 3 dan 4 sebanyak B kali.

6. Menentukan selang kepercayaan estimasi parameter bootstrap
7. Melakukan langkah 1-6 sebanyak M kali untuk melihat variabilitas estimasi.

Setiap pengambilan sampel bootstrap akan menghasilkan nilai yang berbeda. Secara teoritis, karena sampel diambil berulang kali maka sifat asimtotis distribusi bootstrap akan mendekati distribusi data yang sebenarnya. Metode resample bootstrap untuk mendapatkan selang kepercayaan parameter sampel yang didapatkan dari metode persentil bootstrap.

2.3.4 Penduga Selang Kepercayaan Bootstrap

Penduga selang θ diperoleh dengan pendekatan metode persentil bootstrap. Setelah diperoleh $\hat{\theta}^{*j}$ untuk setiap replikasi, lalu diurutkan sehingga $\hat{\theta}^{*1} \leq \hat{\theta}^{*2} \leq \dots \leq \hat{\theta}^{*B}$. Sehingga didapatkan batas atas dan batas bawah selang kepercayaannya adalah [4]:

$$[\hat{\theta}_{low}, \hat{\theta}_{up}] = [\hat{\theta}_{B,(\frac{\alpha}{2})}^*, \hat{\theta}_{B,(1-\frac{\alpha}{2})}^*] \quad (2.6)$$

Sebagai contoh, untuk pengulangan 1000 kali atau $B = 1000$ dan menggunakan $\alpha = 5\%$, maka batas bawah dan batas atasnya adalah elemen ke-25 dan elemen ke-975.

2.3.5 Standar Error Bootstrap

Untuk mendapatkan nilai standar error bootstrap \widehat{se}_B dapat dilakukan dengan langkah langkah sebagai berikut [11]:

1. Melakukan resample bootstrap dan didapatkan estimator-estimator $\hat{\theta}^{*j}$ dengan $j=1, 2, \dots, B$.

- Menentukan standar error bootstrap \widehat{se}_B dengan menggunakan standar deviasi S_B untuk bootstrap yang di replikasi B kali.

$$S_B = \left[\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}^{*(b)} - \hat{\theta}^{*(.)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

Dimana $\hat{\theta}^{*(b)}$ adalah estimator resample bootstrap dan $\hat{\theta}^{*(.)}$ yaitu estimator rata-rata bootstrap dengan rumus:

$$\hat{\theta}^{*(.)} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}^{*(b)} \quad (2.8)$$

- Menghitung standar error dengan formula yang asli seperti berikut ini:

$$\widehat{se}_B = \frac{S_B}{\sqrt{B}} \quad (2.9)$$

2.4 Sifat-Sifat Estimator

Statistik merupakan suatu fungsi dari variabel random yang tidak tergantung pada parameter populasi. Pendugaan atau estimasi terhadap suatu parameter diperlukan karena suatu nilai dari parameter biasanya tidak diketahui. Berikut diberikan definisi tentang estimator tak bias, estimator bias, *Mean Square Error (MSE)*, *Mean Integrated Square Error (MISE)* [7].

Definisi 2.4.1 Statistik $T = l(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang digunakan untuk mengestimasi nilai dari $\tau(\theta)$ disebut estimator dari $\tau(\theta)$ dan nilai dari statistik $t = l(x_1, x_2, \dots, x_n)$ disebut estimasi dari $\tau(\theta)$.

Selanjutnya estimator T dinotasikan dengan $\hat{\theta}$.

Misal Ω ruang parameter yang menunjukkan himpunan seluruh kemungkinan nilai θ . Sifat dari estimator yang baik adalah tak bias.

Definisi 2.4.2 Estimator $\hat{\theta}$ dikatakan estimator tak bias dari $\tau(\theta)$ jika:

$$E(\hat{\theta}) = \tau(\theta) \quad (2.10)$$

Untuk semua $\theta \in \Omega$. Jika $E(\hat{\theta})$ tidak sama dengan $\tau(\theta)$, $\hat{\theta}$ dikatakan sebagai estimator bias dari $\tau(\theta)$.

Definisi dari estimator bias sebagai berikut:

Definisi 2.4.3 Jika $\hat{\theta}$ adalah estimator dari $\tau(\theta)$, maka bias dinyatakan dengan

$$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \tau(\theta) \quad (2.11)$$

Dan mean square error (MSE) dari $\hat{\theta}$ dinyatakan dengan

$$MSE(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta} - \tau(\theta)]^2 \quad (2.12)$$

Teorema 2.1 Jika $\hat{\theta}$ adalah estimator dari $\tau(\theta)$, maka

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\theta) + [b(\hat{\theta})]^2 \quad (2.13)$$

MSE yang sesuai yaitu mempertimbangkan varian dan bias dari estimator, sebagaimana kriteria variansi minimum pada estimator tak bias.

Definisi 2.4.4 Jika $MSE(\hat{\theta})$ adalah Mean Square Error, maka

$$MISE[\hat{\theta}] = \int MSE(\hat{\theta}) \quad (2.14)$$

2.5 Pengertian Densitas Kernel

Densitas kernel merupakan salah satu metode nonparametrik untuk menduga fungsi kepadatan probabilitas dari suatu variabel acak. Estimator densitas kernel untuk estimasi nilai densitas $f(x)$ pada titik x didefinisikan sebagai berikut [12]:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \quad (2.15)$$

Dimana K disebut fungsi kernel dan h adalah lebar jendela (*bandwidth*).

Diasumsikan kernel K adalah densitas kontinu, terbatas, simetris di sekitar 0, dan bernilai real. Kernel K memenuhi sifat-sifat:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} xK(x) dx = 0$
3. $0 < \int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x) dx = K_2 < \infty$

Macam-macam bentuk kernel adalah sebagai berikut:

Tabel 2.1 Macam-Macam Bentuk Kernel

Kernel	$K(u)$
Uniform	$\frac{1}{2} I(u \leq 1)$
Triangle	$(1 - u) I(u \leq 1)$
Epanechnikov	$\frac{3}{4} (1 - u^2) I(u \leq 1)$
Quartic	$\frac{15}{16} (1 - u^2)^2 I(u \leq 1)$
Triweight	$\frac{35}{32} (1 - u^2)^3 I(u \leq 1)$
Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$
Cosinus	$\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) I(u \leq 1)$

2.5.1 Estimasi Densitas Kernel

Jika $F(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dengan x adalah variabel acak kontinu, maka peluang suatu kejadian lebih kecil atau sama dengan x adalah $F(x) = P(X \leq x)$. Hubungan antara $F(x)$ dengan fungsi densitas $f(x)$ dinyatakan $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Dari persamaan tersebut, didapat persamaan [13]:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Persamaan (2.17) juga dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx} F(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(x-h)}{h} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Persamaan (2.17) dan (2.18) bila dijumlahkan akan menjadi persamaan

$$\begin{aligned} 2f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{h} \\ f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(x-h)}{2h} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Apabila persamaan (2.19) diestimasi dengan fungsi distribusi empirik, maka persamaan tersebut menjadi

$$\hat{f}(x) = \frac{F(x) - F(x-h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2nh} \#x_i \quad (2.20)$$

$\#x_i$ adalah banyaknya data yang terletak dalam interval $[(x - h), (x + h)]$

Jika didefinisikan fungsi kernel

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{untuk } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$$

Maka persamaan (2.20) dapat ditulis sebagai

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

2.5.2 Estimator Densitas Terbaik

Kebaikan estimator densitas kernel ditentukan oleh dua hal penting yaitu pemilihan fungsi kernel dan *bandwidth*. Namun yang paling menentukan adalah pemilihan *bandwidth* yang optimal [12].

Teorema 2.2 Jika $\hat{f}_h(x)$ diberikan oleh persamaan (2.14), maka

1. $Bias[\hat{f}_h(x)] = \frac{h^2}{2} f''(x) \alpha(K) + o(h^2)$
dengan $\alpha(K) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 K(s) ds$
2. $Var[\hat{f}_h(x)] = \frac{1}{nh} f(x) \|K\|_2^2 + o\left(\frac{1}{nh}\right)$
 $nh \rightarrow \infty$, dengan $\|K\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(s) ds$

Teorema 2.3 Jika $\hat{f}_h(x)$ diberikan oleh persamaan (2.15) dan berdasarkan Teorema 2.1, maka:

$$MSE[\hat{f}_h(x)] = \frac{1}{nh} f(x) \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} [f''(x) \alpha(K)]^2 + o(h^4) + o\left(\frac{1}{nh}\right) \quad (2.21)$$

MSE merupakan jumlahan dari varian dan bias kuadrat. Meminimalkan MSE terhadap h dapat dipandang sebagai kompromi antara masalah estimasi densitas yang sangat mulus, yaitu jika h sangat besar untuk menurunkan varian, dan masalah estimasi densitas yang tidak mulus, yaitu jika dipilih h yang kecil untuk menurunkan bias kuadrat.

Teorema 2.4 Jika $\hat{f}_h(x)$ diberikan oleh persamaan (2.15) dan berdasarkan definisi (2.4.4), maka:

$$MISE[\hat{f}_h(x)] = \frac{1}{nh} \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} \|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) + o(h^4) + o\left(\frac{1}{nh}\right) \quad (2.22)$$

Jika bagian yang berorder tinggi dari sisi kanan yaitu $o(h^4) + o\left(\frac{1}{nh}\right)$ diabaikan, maka dapat didefinisikan sebagai $A-MISE$, diperoleh:

$$\begin{aligned} A - MISE[\hat{f}_h(x)] &= \frac{1}{nh} \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} \|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) \\ &= \frac{1}{nh} \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} \|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Menentukan lebar jendela optimal h , dapat dilakukan dengan menurunkan $A-MISE$ terhadap parameter h , diperoleh

$$h = \left[\frac{\|K\|_2^2}{\|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) n} \right]^{\frac{1}{5}} = n^{-\frac{1}{5}} \quad (2.24)$$

Lebar jendela optimal digunakan untuk mengestimasi fungsi densitas dari data sehingga dapat diperoleh estimator fungsi densitas kernel yang akan mewakili fungsi densitas data yang sebenarnya.

2.6 Integrasi Numerik

Integrasi numerik mengambil peranan penting dalam masalah sains dan teknik. Hal ini mengingat di dalam bidang sains sering

ditemukan persamaan-persamaan integral matematis yang tidak mudah atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitis. Oleh sebab itu, kehadiran analisis numerik menjadi penting manakala pendekatan analitis mengalami kesulitan.

Ada beberapa teknik integrasi numerik yang sangat umum digunakan untuk memperoleh pendekatan integral fungsi $y(x)$ pada batas interval $[a, b]$. Secara umum, integral fungsi $y(x)$ pada interval tersebut dapat dinyatakan:

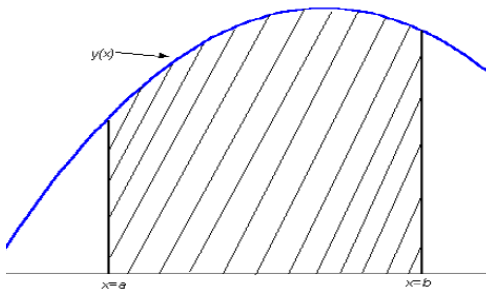
$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2.25)$$

Persamaan (2.25) dapat diartikan sebagai integral dari fungsi $y(x)$ terhadap peubah bebas x yang dievaluasi mulai dari $x = a$ hingga $x = b$. Pendekatan numerik terhadap persamaan (2.25) dapat dinyatakan sebagai

$$I(x) \approx \sum_{i=1}^N w_i y(x_i) \quad (2.26)$$

dengan N yaitu jumlah segmen, $y(x_1) = (a)$ dan $y(x_N) = y(b)$.

Perhatikan bahwa pendekatan numerik terhadap bentuk integral pada persamaan (2.25) merupakan jumlahan dari deret suku-suku dengan titik-titik x_i terbentang dari $x = a$ hingga $x = b$ dan di setiap titik x_i dievaluasi fungsi $y(x)$. Faktor x_i ini sering disebut sebagai titik simpul (*node*). Sedangkan, faktor pengali w_i disebut faktor bobot.



Gambar 2.1 Deskripsi Bentuk Integral $I = \int_a^b y(x) dx$

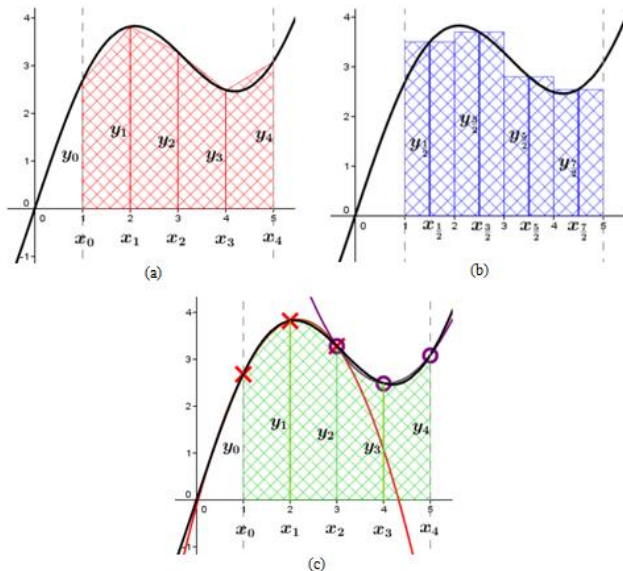
Ada beberapa metode integrasi numerik salah satunya berdasarkan polinomial interpolasi. Gagasan menghampiri fungsi $f(x)$ dengan polinomial interpolasi $p_n(x)$ adalah sebagai berikut:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_n(x) dx \quad (2.27)$$

yang dalam hal ini,

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \quad (2.28)$$

Metode integrasi numerik yang diturunkan berdasarkan polinomial interpolasi diantaranya metode trapezoidal, metode titik tengah dan metode Simpson. Metode trapezoidal merupakan integrasi numerik yang didasarkan pada penjumlahan segmen-segmen berbentuk trapesium dari serangkaian titik-titik pada kurva yang berdasarkan pada polinomial orde satu yaitu garis lurus.



Gambar 2.2 (a) Metode Trapezoidal (b) Metode Titik Tengah (c) Metode Simpson

Untuk aturan titik tengah, diperoleh dengan cara yang sama dengan aturan trapezoidal. Dengan mengevaluasi fungsi $f(x)$ pada titik tengah setiap interval, maka kesalahannya akan lebih kecil dibandingkan metode trapezoidal. Sedangkan metode Simpson merupakan metode integrasi numerik melalui pendekatan polinomial orde 2.

Berdasarkan pendekatan polinomial yang digunakan, metode Simpson lebih tepat nilainya dibandingkan metode trapezoidal dan titik tengah. Selain itu, error yang dihasilkan metode Simpson lebih kecil dibandingkan metode trapezoidal dan titik tengah [14].

2.6.1 Metode Simpson

Metode Simpson merupakan perluasan dari aturan trapezoidal dan titik tengah dengan berdasarkan pendekatan menggunakan polinomial orde 2 yaitu:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_2(x) dx \quad (2.29)$$

dengan $f_2(x)$ adalah polinomial orde 2 yaitu

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (2.30)$$

Dengan memilih tiga titik dalam interval integrasi yaitu $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ dan $(b, f(b))$ sehingga menjadi bentuk seperti pada persamaan (2.30) yaitu:

$$f(a) = f_2(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 \quad (2.31)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{a+b}{2}\right) + a_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (2.32)$$

$$f(b) = f_2(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 \quad (2.33)$$

Untuk mendapatkan a_0 , a_1 , dan a_2 dengan menyelesaikan persamaan (2.31), (2.32) dan (2.33). Maka didapatkan:

$$\begin{aligned}
 I &\approx \int_a^b f_2(x) dx \\
 &= \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Pada metode Simpson, interval $[a, b]$ dibagi menjadi dua segmen dengan $\Delta x = \frac{b-a}{2}$ sehingga didapatkan:

$$\int_a^b f_2(x) dx = \frac{\Delta x}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \tag{2.35}$$

Dan untuk metode Simpson dengan multisegmen didapatkan:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f_2(x) dx &= \\
 &\frac{\Delta x}{3n} \left[f(x_0) + 4 \sum_{j=\text{ganjil}}^{n-1} f(x_j) + 2 \sum_{j=\text{genap}}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right]
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam tugas akhir ini dibagi menjadi beberapa tahapan-tahapan penelitian dan diberikan diagram alur untuk mempermudah memahami tahapan-tahapan pengerjaan Tugas Akhir.

Tahap-tahap penelitian yang dilakukan pada pengerjaan tugas akhir adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Yaitu dilakukan pengumpulan teori-teori pendukung untuk menunjang tugas akhir ini, seperti pengolahan data dengan metode bootstrap, mencari estimator data, dan nilai keandalan.

2. Penentuan Objek Penelitian

Pada tahap ini ditentukan objek penelitian yang akan digunakan pada tugas akhir ini yaitu berupa mesin di PT. X.

3. Pengambilan Data

Pada tahap ini dilakukan pengambilan data sekunder di PT. X berupa data X yaitu data waktu kerusakan mesin selama 5 tahun terakhir yaitu data tahun 2013-2017 serta data bentuk pemeliharaan pada mesin tersebut.

4. Resampel Data dengan Metode bootstrap

Setelah mendapatkan data, data tersebut dibangkitkan dengan metode bootstrap. Yaitu dengan membuat sampel baru dan di resampel dengan pengembalian sehingga sesuai jumlah populasi sebenarnya.

5. Mencari Estimator-Estimasi dari Data

Dari masing-masing sampel baru dicari estimasinya serta mencari estimator dari estimator-estimator yang sudah didapatkan. Nantinya estimator dari hasil resampel akan digunakan data baru untuk mencari nilai keandalan.

6. Estimasi Densitas Kernel Gaussian

Mendapatkan estimator densitas kernel Gaussian yang digunakan untuk mencari nilai keandalan

7. Mencari Nilai Keandalan

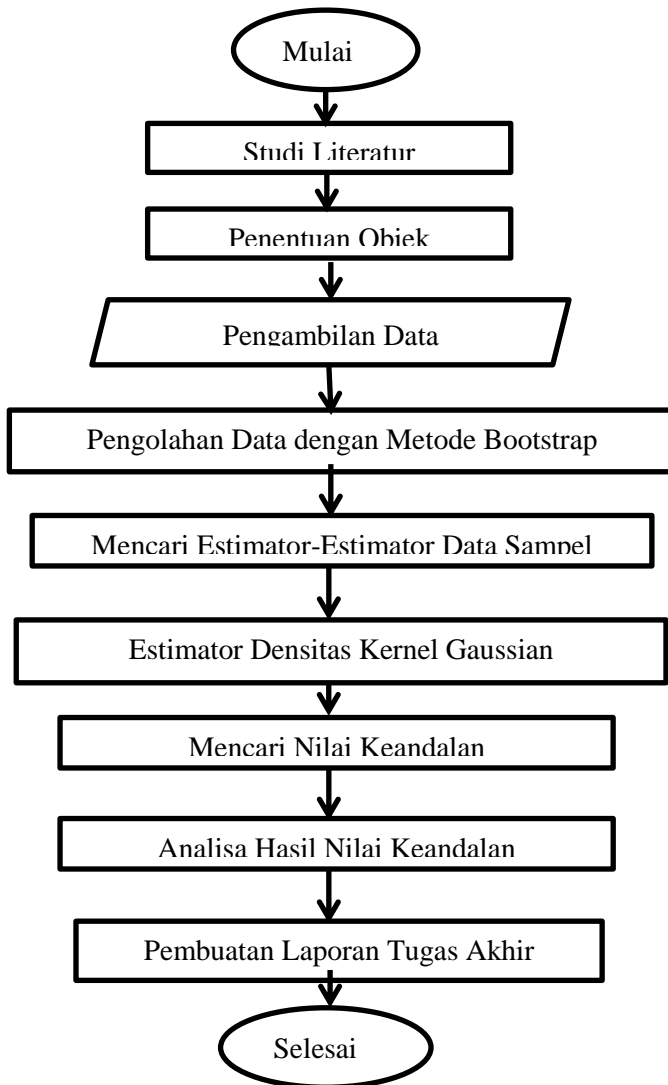
Pada tahap ini dihitung berapa nilai keandalan pada *zero-failure* data. Mencari nilai keandalan berdasarkan estimator densitas kernel Gaussian

8. Analisa Hasil Nilai Keandalan

Pada tahap ini, dilakukan analisis terhadap nilai keandalan yang didapat serta dicari pemeliharaan yang tepat untuk mesin tersebut.

9. Pembuatan Laporan Tugas Akhir

Berikut diagram alir untuk metodologi pengerjaan tugas akhir ini:



Gambar 3.1 Diagram Alir Pengerjaan Tugas Akhir

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas mengenai resampel metode bootstrap untuk mendapatkan estimator-estimator yang digunakan sebagai data baru dan estimator parameter titik bootstrap serta mencari nilai keandalan melalui densitas kernel Gaussian.

4.1 Deskripsi Data Mesin pada PT. X

Mesin serut adalah pembersih permukaan kayu dari *cuttermark* dan meratakan permukaan kayu sehingga seluruh permukaan sama tinggi dan membuat keempat sisi kayu bersudut 90° . Mesin serut ini di gunakan sebagai alat yang menunjang dalam industri furniture dari industri rumah tangga sampai industri skala besar. Mesin serut sangat membantu dalam memenuhi kebutuhan manusia yang terbuat dari bahan kayu.



Gambar 4.1 Mesin Double Planer

Mesin serut otomatis atau yang disebut mesin double planer merupakan alat yang di gunakan sebagai penghalus kayu

berkapasitas tinggi. Gambar mesin dapat dilihat pada Gambar 4.1. Mesin ini hanya digunakan pada industri-industri yang berskala besar. Mesin double planer ini dalam pengerjaan penghalusan permukaan benda kerja dua sisi sekaligus secara otomatis. Dan juga mesin ini dapat membentuk profil bagian sudut benda kerja.

Salah satu komponen yang berperan penting dalam mesin double planer adalah *bearing* atau bantalan. Gambar komponen *bearing* dapat dilihat pada Gambar 4.2. *Bearing* merupakan elemen mesin yang manumpu poros berbeban, sehingga putaran atau gerak bolak-baliknya dapat berlangsung secara halus, aman dan panjang umur. Bearing dibuat untuk menerima beban radial murni, beban aksial murni, atau gabungan dari keduanya.



Gambar 4.2 *Bearing* pada Mesin Double Planer

Mesin pada PT. X ini bekerja 24 jam penuh. *Bearing* harus cukup kokoh untuk memungkinkan poros serta elemen mesin lainnya bekerja dengan baik. Jika *bearing* tidak berfungsi dengan baik maka seluruh sistem akan menurun atau tidak dapat bekerja dengan yang semestinya. *Bearing* akan rusak, tetapi dengan

waktu cukup lama yaitu sekitar 6 bulan sampai satu tahun. Dilakukan perawatan untuk menjaga agar bearing dapat bekerja dengan baik seperti melakukan pelumasan pada *bearing* dan memasang *bearing* dengan tepat posisinya. Selama mesin itu berjalan, *bearing* akan terus bekerja sampai terjadi kerusakan pada *bearing*. Sehingga bisa dikatakan data kerusakan bearing merupakan *zero-failure* data. Ketika bearing rusak, tidak ada proses perbaikan, langsung diganti dengan *bearing* yang baru.

4.2 Resampel Data dengan Metode Bootstrap

Dalam pengambilan data diperoleh *zero-failure* data yang jumlahnya terbatas yaitu $n < 30$ sehingga data tersebut belum merepresentasikan data sebenarnya. Diperlukan resampel dengan metode bootstrap untuk memperbesar datanya. Proses resampel data dijalankan berdasarkan tinjauan pustaka oleh penelitian Sholih A [4]. Yaitu dari data sampel yang ada, ditentukan parameter statistik yang digunakan θ yaitu parameter rata-rata. Selanjutnya dilakukan resampel bootstrap dengan pengembalian sehingga seperti bentuk pada persamaan (2.5) dan menghitung estimasi parameternya. Proses resampel bootstrap dilakukan sebanyak B sesuai jumlah yang diinginkan. Dari proses tersebut terjadi pengulangan sebanyak M kali untuk melihat variansi nilai estimasi. Dipilih pengulangan data dengan standar error terkecil berdasarkan persamaan (2.9) agar mendapatkan estimasi yang tepat. Hasil dari proses resampel bootstrap menurut Sholih A [4] adalah:

$$\hat{\theta}^{*(j)} = \hat{\theta}^{*(1)}, \hat{\theta}^{*(2)}, \dots, \hat{\theta}^{*(B)}$$

Hasil dari resampel bootstrap merupakan estimator-estimator bootstrap sebanyak B yang akan menjadi sampel baru.

4.3 Estimator Densitas Kernel

Setelah melakukan resample bootstrap dan mendapatkan data baru, tahap selanjutnya yaitu mendapatkan estimator densitas kernel Gaussian. Densitas ini digunakan untuk metode nonparametrik karena data sebelumnya tidak diketahui distribusinya. Densitas kernel Gaussian untuk merepresentasikan fungsi dari data sampel yang ada. Estimator densitas kernel untuk estimasi nilai densitas $f(x)$ pada titik x berdasarkan (2.15) didefinisikan:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

Dengan kernel Gaussian seperti pada Tabel 2.1 didefinisikan:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Jika $X_i = \theta^{*(B)}$ adalah estimator-estimator hasil resample bootstrap dan B adalah jumlah data resample bootstrap, maka:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{Bh} \sum_{i=1}^B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \theta^{*(B)}}{h}\right)^2} \quad (4.1)$$

Dan nilai optimal dari h berdasarkan (2.24) didapatkan:

$$h \approx n^{-\frac{1}{5}} = B^{-\frac{1}{5}} \quad (4.2)$$

4.4 Mencari Nilai Keandalan

Tahap selanjutnya adalah mencari nilai keandalan. Berdasarkan persamaan (2.4) untuk mencari nilai keandalan adalah:

$$R(x) = 1 - F(x)$$

Untuk nilai $F(x)$ didapatkan berdasarkan persamaan (2.1) yaitu:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Dengan fungsi pada persamaan (4.1) didapatkan:

$$F(x) = \sum_{i=1}^B \int_{-\infty}^x \frac{1}{B h \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\theta^{*(B)}}{h}\right)^2} dt$$

Selanjutnya, misalkan

$$\frac{t-\theta^{*(B)}}{h} = z$$

$$\frac{1}{h} dt = dz$$

Batas atas dan batas bawah:

$$t = x \rightarrow z = \frac{x-\theta^{*(B)}}{h}$$

$$t = -\infty \rightarrow z = -\infty$$

Didapatkan

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^B \int_{-\infty}^{\frac{x-\theta^{*(B)}}{h}} \frac{1}{B h \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} h dz \\ &= \sum_{i=1}^B \int_{-\infty}^{\frac{x-\theta^{*(B)}}{h}} \frac{1}{B\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \end{aligned}$$

Selanjutnya, dimisalkan kembali:

$$u = \frac{z}{1-z}$$

$$u - uz = z$$

$$u = z + uz$$

$$u = z(1 + u)$$

$$z = \frac{u}{u+1}$$

$$dz = \frac{1(u+1)-u(1)}{(u+1)^2} du$$

$$dz = \frac{1}{(u+1)^2} du$$

Batas atas:

$$u = \frac{z}{1-z}$$

Diketahui

$$z = \frac{x-\theta^{*(B)}}{h}$$

Maka

$$u = \frac{\frac{x-\theta^{*(B)}}{h}}{1-\frac{x-\theta^{*(B)}}{h}}$$

$$u = \frac{x-\theta^{*(B)}}{h-x+\theta^{*(B)}}$$

Batas bawah:

$$\text{Jika } z = -\infty$$

Maka

$$u = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(\frac{z}{1-z} \right) = -1$$

Sehingga didapatkan:

$$F(x) = \sum_{i=1}^B \int_{-1}^c \frac{1}{B \sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{u+1}\right)^2}}{(u+1)^2} du \quad (4.3)$$

$$\text{Dengan } c = \frac{x-\theta^{*(B)}}{h-x+\theta^{*(B)}}$$

Bentuk $F(x)$ pada (4.3) merupakan bentuk distribusi normal, dimana penyelesaian dari $F(x)$ tidak dapat menggunakan integral

secara analitik. Untuk itu, digunakan pendekatan secara numerik. Secara umum, integral numerik digunakan untuk memperoleh pendekatan integral fungsi $f(x)$ pada batas interval $[a, b]$ dengan jumlahan dari deret suku-suku dengan titik-titik x_i mulai dari $x = a$ hingga $x = b$ dan setiap titik x_i dievaluasi fungsi $f(x)$.

Berdasarkan pada Bab II digunakan metode Simpson untuk menyelesaikan integral numerik. Metode Simpson berdasarkan persamaan (2.35), untuk mencari nilai $F(x)$ pada persamaan (4.3) yaitu:

ketika $i = 1$,

$$F(x) = \frac{1}{B\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\Delta x}{3} \left(f(u_0) + 4 \sum_{j=\text{ganjil}}^{n-1} f(u_j) + 2 \sum_{j=\text{genap}}^{n-2} f(u_j) + f(u_n) \right) \right]$$

Misal $n = 100$

$$\text{Maka } \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{c+1}{100}$$

$$F(x) = \frac{1}{B\sqrt{2\pi}} \left[\frac{c+1}{300} \left(f(u_0) + 4 \sum_{j=\text{ganjil}}^{n-1} f(u_j) + 2 \sum_{j=\text{genap}}^{n-2} f(u_j) + f(u_n) \right) \right]$$

Dengan nilai $f(u_j)$ seperti pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Nilai $f(u_j)$ untuk Proses pada Metode Simpson

j	u_j	$f(u_j)$
0	-1	$f(-1)$
1	$-1 + \Delta x$	$f(-1 + \Delta x)$
2	$-1 + 2\Delta x$	$f(-1 + 2\Delta x)$
\vdots	\vdots	\vdots
100	C	$f(c)$

Proses mencari nilai $F(x)$ ketika $i=2, 3, \dots, 1000$ sama seperti untuk mencari nilai pada saat $i = 1$. Sehingga didapatkan nilai $F(x)$ adalah

$$F(x) = \sum_{i=1}^B \frac{1}{B\sqrt{2\pi}} \left[\frac{c+1}{300} \left(f(u_0) + 4 \sum_{j=ganjil}^{n-1} f(u_j) + 2 \sum_{j=genap}^{n-2} f(u_j) + f(u_n) \right) \right] \quad (4.4)$$

Selanjutnya didapatkan nilai keandalannya berdasarkan (2.1) dan (4.4) adalah

$$R(x) = 1 - \sum_{i=1}^B \frac{1}{B\sqrt{2\pi}} \left[\frac{c+1}{300} \left(f(u_0) + 4 \sum_{j=ganjil}^{n-1} f(u_j) + 2 \sum_{j=genap}^{n-2} f(u_j) + f(u_n) \right) \right] \quad (4.5)$$

Dengan

$$c = \frac{x - \theta^{*(B)}}{h - x + \theta^{*(B)}}$$

4.5 Selang Kepercayaan Bootstrap

Selanjutnya mencari selang kepercayaan bootstrap dengan metode presentil. Dengan mengurutkan estimator-estimator bootstrap didapatkan sesuai persamaan (2.6) yaitu:

$$[\hat{\theta}_{low}, \hat{\theta}_{up}] = [\hat{\theta}_{B,(\frac{\alpha}{2})}^*, \hat{\theta}_{B,(1-\frac{\alpha}{2})}^*]$$

$[\hat{\theta}_{low}, \hat{\theta}_{up}]$ merupakan batas atas dan batas bawah selang kepercayaan untuk estimator-estimator bootstrap.

4.6 Simulasi Data

4.6.1 Deskripsi Data

Dalam Tugas Akhir ini, data yang digunakan adalah data kerusakan komponen *bearing* pada mesin double planer di PT. X.

Variabel yang diambil dimisalkan x yaitu data waktu (Minggu) bearing mulai digunakan sampai mengalami kerusakan. Data diambil dalam kurun waktu 5 tahun yaitu tahun 2013-2017.

Tabel 4.2 Data Kerusakan Bearing Mesin

Waktu kerusakan	1	2	3	4	5	6
x (Minggu)	23	24	29	30	32	34
Kuantitas	1	1	2	1	1	2

Waktu kerusakan didefinisikan sebagai waktu mulai bearing dipasang dalam mesin kemudian beroperasi sesuai fungsinya sampai bearing mengalami kerusakan dan harus diganti. Data waktu kerusakan bearing pada mesin double planer di PT. X berturut-turut ada 8 sampel yang terdapat pada Tabel 4.2.

4.6.2 Resampel Data dengan Bootstrap

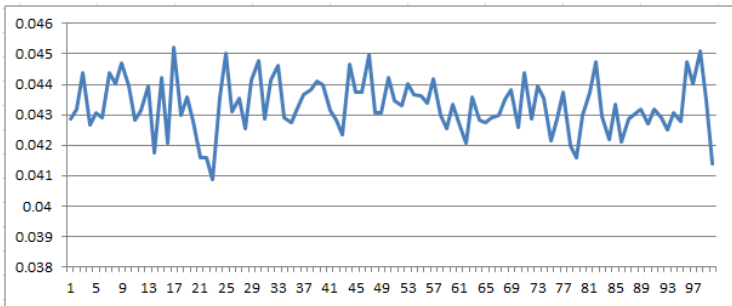
Ukuran data waktu kerusakan bearing yang diambil dari perusahaan cukup kecil sehingga diperlukan resampel dengan metode bootstrap untuk memperbesar ukuran data. Dalam jurnal Solih A [4], perbedaan banyaknya resampel bootstrap tidak memberikan hasil yang berbeda untuk nilai estimasi yang diberikan dan digunakan B sebanyak 1000. Resampel data waktu kerusakan bearing dihitung dengan bantuan *software R 3.4.3 for Windows*. Program resampel data dapat dilihat di Lampiran B. Data awal dengan $n = 8$ diresampel sebanyak $B = 100, 200, 500, 1000$. Sebelum mendapatkan hasil resampel, dilakukan pengulangan resampel. Pengulangan dilakukan untuk mendapatkan hasil resampel yang optimal yaitu dengan memilih

standar error terkecil. Berikut ini hasil percobaan dengan pengulangan $M = 10, 20, 50, 100$ terdapat pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Resampel Bootstrap dengan Pengulangan M kali

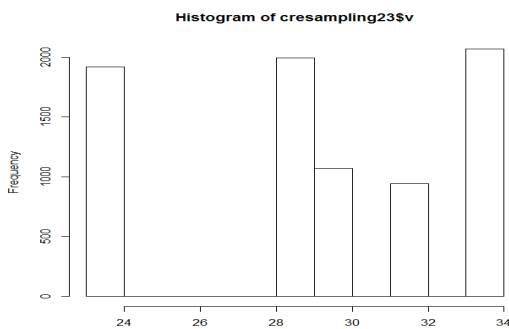
Jumlah Resampel (B)	Jumlah pengulangan (M)	Standar Error Terkecil (\widehat{se}_B)
100	10	0.122299
	20	0.120276
	50	0.119258
	100	0.11442
200	10	0.089056
	20	0.088197
	50	0.086688
	100	0.08608
500	10	0.058206
	20	0.057738
	50	0.057054
	100	0.056211
1000	10	0.042166
	20	0.041133
	50	0.041079
	100	0.041044

Dari Tabel 4.3 dapat dilihat bahwa semakin besar jumlah resampel tidak mempengaruhi standar error yang dihasilkan. Sedangkan untuk jumlah pengulangan yang semakin besar, didapatkan hasil standar error yang lebih kecil. Hal itu dikarenakan proses resampel menghasilkan data yang acak dan berubah-ubah yang memungkinkan untuk mendapatkan standar error yang lebih kecil. Dari hasil percobaan pengulangan tersebut, diambil pengulangan sebanyak $M = 100$. Berikut nilai standar error dari pengulangan resampel sebanyak 100 kali terdapat pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Plot Nilai Standar Error Pengulangan 100 kali

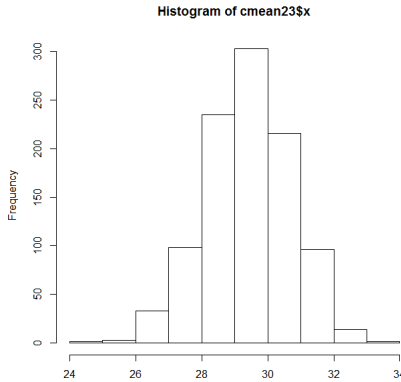
Dari Gambar 4.3 yaitu data 100 kali pengulangan didapatkan standar error yang dapat dilihat pada Lampiran F. Nilai standar error terkecil yaitu $\widehat{se}_{1000} = 0.041044$ pada pengulangan yang ke-23. Selanjutnya didapatkan hasil resample pada pengulangan ke-23 yang akan menjadi sampel baru. Histogram penyebaran hasil resample dari data pengulangan ke-23 pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Histogram Hasil Resample Bootstrap

Gambar 4.4 Terlihat bahwa hasil resample tersebar merata disetiap sampel awal. Nilai $x = 23$ tersebar sebanyak 984 resample, $x = 24$ sebanyak 936 resample, $x = 29$ sebanyak 1995, $x = 30$ sebanyak 1072, $x = 32$ sebanyak 942, dan $x = 34$

sebanyak 2071 resampel. Sehingga bisa dikatakan semua data baru dapat mewakili data aslinya.



Gambar 4.5 Histogram Estimator-Estimador Bootstrap

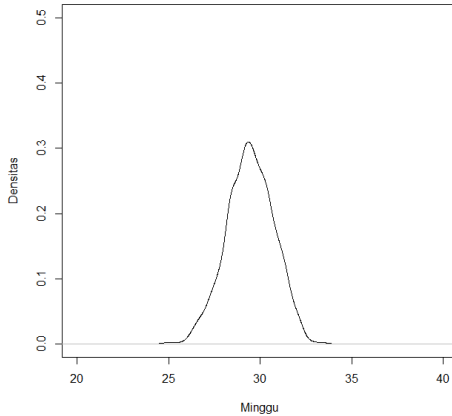
Selanjutnya dengan menggunakan parameter statistik rata-rata diperoleh 1000 data estimator-estimator bootstrap yang ditunjukkan dalam histogram pada Gambar 4.5. Estimator-estimator bootstrap adalah sampel baru hasil resampel bootstrap. data sampel baru dapat dilihat pada Lampiran E.

4.6.3 Estimator Densitas Kernel pada Data

Berdasarkan persamaan (4.2) bandwidth optimal diperoleh dengan meminimalkan $A-MISE$ terhadap h yaitu $n^{-\frac{1}{5}}$. Data yang akan diestimasi adalah data yang berasal dari hasil resampel bootstrap, sehingga jika diketahui B adalah banyak resampel bootstrap yaitu diambil 1000, maka dengan pendekatan bandwidth optimal tersebut diperoleh h adalah $h \approx B^{-\frac{1}{5}} \approx (1000)^{-\frac{1}{5}} = 0.251189$.

Dan berdasarkan persamaan (4.1) dengan $B = 1000$ dan $h = 0.251189$ estimator densitas kernel dinyatakan:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{(1000)(0.251189)} \sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \theta^*(B)}{0.251189} \right)^2}$$



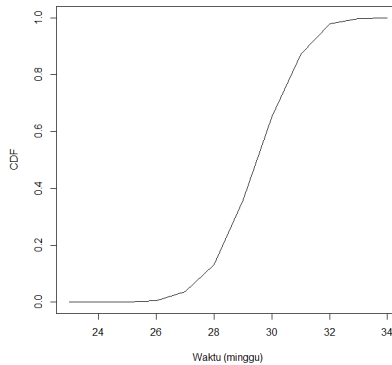
Gambar 4.6 Plot Estimator Densitas Kernel Gaussian

Plot estimator densitas kernel Gaussian dapat diperoleh dengan bantuan *software R 3.4.3 for Windows*. Program plot estimator densitas kernel Gaussian dapat dilihat pada Lampiran C. Plot yang dihasilkan dari densitas kernel ditunjukkan pada Gambar 4.6.

4.6.4 Nilai Keandalan Suatu Mesin

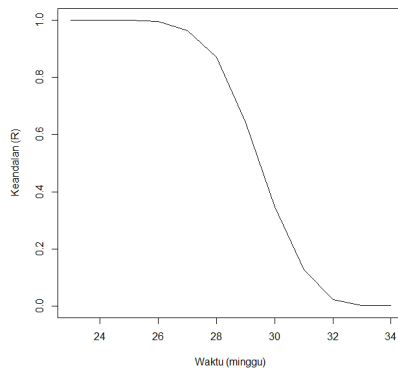
Tahap selanjutnya adalah perhitungan nilai keandalan yang didapatkan melalui pendekatan metode Simpson yang menggunakan densitas kernel Gaussian. Dengan bantuan *software R 3.4.3 for Windows* didapatkan nilai $F(x)$ dan $R(x)$. Program untuk mencari nilai $F(x)$ dan $R(x)$ dapat dilihat pada Lampiran D. Secara grafik nilai $F(x)$ didapatkan seperti pada Gambar 4.7 yang mana dalam perhitungannya dengan 1000 data yang dapat dilihat pada Lampiran F. Nilai $F(x)$ merupakan jumlahan peluang

kerusakan bearing dengan waktu x . Nilai $F(x)$ digunakan untuk mencari nilai $R(x)$ yaitu nilai keandalan. Untuk hasil nilai keandalan menggunakan kernel lain dapat dilihat pada Lampiran G dimana nilai keandalan menggunakan densitas kernel Gaussian lebih tinggi dan sesuai dengan *zero-failure* data yang seharusnya memiliki keandalan yang tinggi.



Gambar 4.7 Grafik Nilai $F(x)$ pada Data

Sedangkan untuk nilai $R(x)$ didapatkan seperti pada Gambar 4.8.



Gambar 4.8 Grafik Nilai $R(x)$ pada Data

Terlihat bahwa grafik yang dihasilkan bahwa nilai keandalan tinggi pada waktu 23-28 minggu. Artinya bahwa dalam waktu 23-28 minggu, bearing pada mesin masih berjalan baik. Mulai waktu 29 minggu turun secara signifikan bahkan sampai menuju 0. Artinya, fungsi kerja bearing pada waktu 29 minggu sudah mengalami penurunan. Nilai keandalan dapat dilihat pada Tabel 4.3. Sedangkan untuk *zero-failure* data pada komponen bearing mesin tanpa mengalami kegagalan dalam penggunaannya yang seharusnya memiliki keandalan yang tinggi sampai minimal 34 minggu. Hal ini bisa saja terjadi mengingat banyak faktor lain yang mempengaruhi. Salah satu faktor yang mempengaruhi rendahnya keandalan bearing adalah kurangnya pelumasan pada bearing, pemasangan bearing yang kurang pas dan faktor jenis kayu yang dibentuk pada waktu tersebut.

Tabel 4.4 Nilai $R(x)$ pada Data Bearing

x	$R(x)$
23	1
24	0.9999998
25	0.9991561
26	0.9956874
27	0.9641654
28	0.8694013
29	0.6413683
30	0.3465802
31	0.1267308
32	0.02175377
33	0.002329183
34	0.001364023

Ketika terdapat bahan kayu yang harus dibentuk termasuk kayu dengan tekstur yang berat, diperlukan pelumasan bisa dalam jangka waktu dua kali dari biasanya. Karena jika dilakukan pelumasan tetap dengan waktu seperti biasanya, menyebabkan bearing panas, dan jika diteruskan bisa lengket dan bearing tidak mau memutar. Perawatan bearing berupa pemasangan yang tepat, tidak miring, juga diperlukan agar keandalannya tetap tinggi tidak merusak bearing.

4.6.5 Selang Kepercayaan Bootstrap

Dari 1000 data yang ada, diurutkan dari estimator yang paling kecil sampai yang paling besar, sehingga didapatkan selang kepercayaan menggunakan presentil bootstrap $\alpha = 5\%$ yaitu batas bawah 26.750 dan batas atas 31.875 pada elemen data ke-25 dan ke-975.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dalam tugas akhir ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Parameter bootstrap yang digunakan pada *zero-failure* data kerusakan *bearing* mesin double planer yaitu parameter rata-rata. Didapatkan 1000 estimator bootstrap dengan selang kepercayaan [26.750; 31.875].
2. Nilai keandalan dari *zero-failure* data didapatkan dengan persamaan:

$$R(x) = 1 - \sum_{i=1}^B \frac{1}{B\sqrt{2\pi}} \left[\frac{c+1}{300} \left(f(u_0) + 4 \sum_{j=ganjil}^{n-1} f(u_j) + 2 \sum_{j=genap}^{n-2} f(u_j) + f(u_n) \right) \right]$$

Dengan

$$c = \frac{x - \theta^{*(B)}}{h - x + \theta^{*(B)}}$$

Nilai keandalan *bearing* mesin double planer untuk waktu 23-28 minggu cukup tinggi yaitu 1 sampai 0.8694013 dan mulai waktu 29 minggu mengalami penurunan dikarenakan beberapa faktor diantaranya faktor kurangnya pelumasan pada bearing, pemasangan bearing yang kurang pas, dan tekstur kayu yang dibentuk.

5.2 Saran

Adapun beberapa saran untuk penelitian selanjutnya:

1. Mencari nilai keandalan dengan metode bootstrap pada *zero-failure* data dengan densitas yang berbeda.
2. Menerapkan metode bootstrap nonparametrik pada kasus-kasus yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Arina F, Ferdinant FP, dan Hamid A. 2013. Penentuan Keandalan dengan Menggunakan *Reliability Block Diagram* (RBD) yang Berkonfigurasi Redundant pada Mesin Boiler di PT. X. Seminar Nasional IENACO. Teknik Industri, Untirta
- [2] Jiang P, Xing Y, Jia X, dan Guo B. 2014. *Weibull Failure Probability Estimation Based on Zero-Failure Data*. China: Hindawi Publishing Corporation.
- [3] Kurniawan A. 2017. Penggunaan Metode Bootstrap untuk Pemodelan Fungsi Reliabilitas Distribusi Gumbel Tersensor Type III. Surabaya: Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya.
- [4] Solih A. 2015. Estimasi *Confidence Interval* (CI) Bootstrap untuk Analisis Data Sampel Terbatas. ISTEK Edisi Juni 2015 Volume IX No. 1.
- [5] Sunandi N dan Malau A. 2003. Penafsiran Fungsi Densitas untuk Suatu Data dengan Penaksir Kernel. *Jurnal Matematika, Sains, dan Teknologi*, Volume 4, Nomor 1.
- [6] Hansen, Bruce E. 2009. *Lecture Notes on Nonparametrics*. University of Wisconsin. Spring.
- [7] Bain, L. J. dan M. Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Second Edition*. Duxbury Press, Inc, California.
- [8] Ebeling, C.E. 1997. *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering*. The McGraw Hill Companies Inc, New York.

- [9] Bruch C, Muniich R, dan Zins S. 2011. Variance Estimation for Complex Surveys. *Seventh Framework Programme for Research*. 3: 18-35.
- [10] Sahinler, S. and Topuz, D., 2007, *Bootstrap and Jackknife Resampling Algorithms for Estimation of Regression Parameters*, JAQM, no. 2, **2**, 188-199.
- [11] Efron, B. dan Tibshirani, R.J. 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman & Hall , Inc.
- [12] Hardle, W. 1990. *Smoothing Technique with Implementation in S*. Springer Verlag, New York.
- [13] Hayati H, Santoso R, dan Rusgiyono A. 2014. Analisis Grafik Pengendali Nonparametrik dengan Estimasi Fungsi Densitas Kernel pada Kasus Waktu Pelorotan Batik Tulis. *Jurnal Gaussian*, Volume 3, Nomor 1.
- [14] Anton, H. 1999. *Calculus, A New Horizon, 6th Edition*. John Wiley & Sons, Inc, New York.

LAMPIRAN A
Bukti Teorema

Teorema 2.1 Jika $\hat{\theta}$ adalah estimator dari $\tau(\theta)$, maka

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\theta) + [b(\hat{\theta})]^2$$

Bukti:

$$\begin{aligned} MSE[\hat{\theta}] &= E[\hat{\theta} - \tau(\theta)]^2 \\ &= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \tau(\theta)]^2 \\ &= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))][E(\hat{\theta}) - \tau(\theta)] + \\ &\quad [E(\hat{\theta}) - \tau(\theta)]^2 \\ &= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + 2E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]E[E(\hat{\theta}) - \tau(\theta)] + \\ &\quad [E(\hat{\theta}) - \tau(\theta)]^2 \\ &= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + 2[E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})]E[E(\hat{\theta}) - \tau(\theta)] + \\ &\quad [E(\hat{\theta}) - \tau(\theta)]^2 \\ &= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + [E(\hat{\theta}) - \tau(\theta)]^2 \end{aligned}$$

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\theta) + [b(\hat{\theta})]^2$$

(Terbukti)

Teorema 2.2 Jika $\hat{f}_h(x)$ diberikan oleh persamaan (2.14), maka

1. $Bias[\hat{f}_h(x)] = \frac{h^2}{2} f''(x)\alpha(K) + o(h^2)$

$$\text{dengan } \alpha(K) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 K(s) ds$$

$$2. \text{Var}[\hat{f}_h(x)] = \frac{1}{nh} f(x) \|K\|_2^2 + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

$$nh \rightarrow \infty, \text{ dengan } \|K\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(s) ds$$

Bukti:

1. Berdasarkan definisi (2.10) didapatkan nilai bias:

$$\text{Bias}[\hat{f}_h(x)] = E[\hat{f}_h(x)] - f(x)$$

- Mencari nilai $E[\hat{f}_h(x)]$

$$E[\hat{f}_h(x)] = E\left(\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right)$$

Misalkan $X_i = u$ maka

$$\begin{aligned} E[\hat{f}_h(x)] &= E\left(\frac{1}{nh} nK\left(\frac{x-u}{h}\right)\right) \\ &= E\left(\frac{1}{h} K\left(\frac{x-u}{h}\right)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-u}{h}\right) f(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{u-x}{h}\right) f(u) du \end{aligned}$$

Misalkan $s = \frac{u-x}{h}$ maka $du = hds$, sehingga

$$\begin{aligned} E[\hat{f}_h(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K(s) f(x+sh) hds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(s) f(x+sh) ds \end{aligned}$$

Jadi didapatkan,

$$\text{Bias}[\hat{f}_h(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} K(s) f(x+sh) ds - f(x)$$

Dengan mengekspansikan ke dalam deret Taylor, didapatkan

$$\begin{aligned}
Bias[\hat{f}_h(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} K(s) \left[f(x) + \frac{sh}{1!} f'(x) + \frac{s^2 h^2}{2!} f''(x) + o(h^2) \right] ds - f(x) \\
&= f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(s) ds + h f'(x) \int_{-\infty}^{\infty} s K(s) ds + \frac{h^2}{2} f''(x) \int_{-\infty}^{\infty} s^2 K(s) ds + o(h^2) - f(x) \\
&= f(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \alpha(K) + o(h^2) - f(x)
\end{aligned}$$

$$Bias[\hat{f}_h(x)] = \frac{h^2}{2} f''(x) \alpha(K) + o(h^2)$$

(Terbukti)

2. Mencari nilai varian

$$\begin{aligned}
Var[\hat{f}_h(x)] &= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n Var \left(K \left(\frac{x-X_i}{h} \right) \right) \\
Var[\hat{f}_h(x)] &= \frac{1}{n^2 h^2} \sum_{i=1}^n Var \left(K \left(\frac{x-X_i}{h} \right) \right)
\end{aligned}$$

Misalkan $X_i = u$ maka

$$\begin{aligned}
Var[\hat{f}_h(x)] &= \frac{1}{n^2 h^2} n Var \left(K \left(\frac{x-u}{h} \right) \right) \\
&= \frac{1}{nh^2} Var \left(K \left(\frac{x-u}{h} \right) \right) \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{h^2} E \left(K^2 \left(\frac{x-u}{h} \right) \right) - \left(\frac{1}{h} E \left(K \left(\frac{x-u}{h} \right) \right) \right)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} K^2 \left(\frac{x-u}{h} \right) f(u) du - \left(\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} K \left(\frac{x-u}{h} \right) f(u) du \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

Misalkan $s = \frac{u-x}{h}$ maka $du = hds$, sehingga

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\hat{f}_h(x)] &= \\
& \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(s) f(x+sh) h ds - \left[\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} K(s) f(x+sh) h ds \right]^2 \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(s) f(x+sh) ds - \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(s) f(x+sh) ds \right]^2 \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(s) [f(x) + o(h)] ds - \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(s) (f(x) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. o(h)) ds \right]^2 \right\} \\
&= \frac{1}{nh} [f(x) + o(h)] \int_{-\infty}^{\infty} K^2(s) ds - \frac{1}{n} [f(x) + o(h)]^2 \\
&= \frac{1}{nh} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(s) ds + o\left(\frac{1}{nh}\right) \\
\text{Var}[\hat{f}_h(x)] &= \frac{1}{nh} f(x) \|K\|_2^2 + o\left(\frac{1}{nh}\right)
\end{aligned}$$

(Terbukti)

Teorema 2.4 Jika $\hat{f}_h(x)$ diberikan oleh persamaan (2.14) dan berdasarkan definisi (2.4.4), maka:

$$MISE[\hat{f}_h(x)] = \frac{1}{nh} \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} \|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) + o(h^4) + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

Bukti:

Berdasarkan definisi (2.4.4) didapatkan:

$$\begin{aligned} MISE[\hat{f}_h(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} MSE[\hat{f}_h(x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{nh} f(x) \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} [f''(x) \alpha(K)]^2 + o(h^4) + o\left(\frac{1}{nh}\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{nh} \|K\|_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \frac{h^4}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (f''(x))^2 dx \alpha^2(K) + o(h^4) + o\left(\frac{1}{nh}\right) \\ &= \frac{1}{nh} \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} \|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) + o(h^4) + o\left(\frac{1}{nh}\right) \end{aligned}$$

$$MISE[\hat{f}_h(x)] = \frac{1}{nh} \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} \|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) + o(h^4) + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

Jika bagian yang berorder tinggi dari sisi kanan teorema yaitu $o(h^4) + o\left(\frac{1}{nh}\right)$ diabaikan, maka dapat didefinisikan sebagai *A-MISE*, diperoleh

$$\begin{aligned} A - MISE[\hat{f}_h(x)] &= \frac{1}{nh} \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} \|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) \\ &= \frac{1}{nh} \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} \|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) \end{aligned}$$

Menentukan lebar jendela optimal h , dapat dilakukan dengan menurunkan *A-MISE* terhadap parameter h , diperoleh

$$\frac{\partial(A-MISE[\hat{f}_h(x)])}{\partial h} = 0$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{nh} \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} \|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) \right)}{\partial h} = 0$$

$$-\frac{1}{nh^2} \|K\|_2^2 + h^3 \|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) = 0$$

$$h^3 \|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) = \frac{1}{nh^2} \|K\|_2^2$$

$$h^5 = \frac{\|K\|_2^2}{\|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) n}$$

$$h = \left[\frac{\|K\|_2^2}{\|f''(x)\|_2^2 \alpha^2(K) n} \right]^{\frac{1}{5}} \approx n^{-\frac{1}{5}}$$

(Terbukti)

LAMPIRAN B

Listing Program Resampel Data Metode Bootstrap

```
>library(boot)
>d<-c(23, 24, 29, 29, 30, 32, 34, 34)
>str(d)
>waktu.mean= mean(d)
>B = 1000
>n = length(d)
>boot.statistics.sd = 5
>hasilsd = numeric(length=100)
>for(i in 1:100){
  dboot.samples = matrix(sample(d, size = B * n, replace =
  TRUE),B,n)
  dboot.statistics = apply(dboot.samples, 1, mean)
  dboot.statistics.mean=mean(dboot.statistics)
  dboot.statistics.sd=sd(dboot.statistics)
  hasilsd[i]=dboot.statistics.sd
  if (dboot.statistics.sd<boot.statistics.sd){
    boot.samples = dboot.samples
    boot.statistics = dboot.statistics
    boot.statistics.mean = dboot.statistics.mean
    boot.statistics.sd = dboot.statistics.sd
  }
}

>boot.samples
>boot.statistics
>boot.statistics.mean
>boot.statistics.sd
>quantile(boot.statistics,c(0.025,0.975))
>hist(boot.samples)
>hist(boot.statistics)
```

```
>hasilsd  
>write.csv(boot.samples, file = "20cresmean1000.csv")  
>write.csv(boot.statistics, file = "20cmean1000.csv")  
>write.csv(hasilsd, file = "20sd1000.csv")
```

LAMPIRAN C
Listing Program Plot Estimasi Fungsi Densitas Kernel
Gaussian pada Data

```
>win.graph()
>par(mfrow=c(1,1))
>cmean23$x
>plot(density(cmean23$x,bw=0.251189,kernel=c("gaussian"),
  weight=NULL>window=kernel,n=1000),main="",type="l",xlab
  ="Minggu",ylab="Densitas",xlim=c(20,40),ylim=c(0,1))
>title(main="grafik fungsi densitas kernel gaussian")
```


LAMPIRAN D

Listing Program Metode Simpson Mencari Nilai $F(x)$ dan $R(x)$

```
>simpson_v2 <- function(fun, a, b, n=100) {  
  # numerical integral using Simpson's rule  
  # assume a < b and n is an even positive integer  
>if (a == -Inf & b == Inf) {  
  f <- function(t) (fun((1-t)/t) + fun((t-1)/t))/t^2  
  s <- simpson_v2(f, 0, 1, n) }  
>else if (a == -Inf & b != Inf) {  
  f <- function(t) fun(b-(1-t)/t)/t^2  
  s <- simpson_v2(f, 0, 1, n) }  
>else if (a != -Inf & b == Inf) {  
  f <- function(t) fun(a+(1-t)/t)/t^2  
  s <- simpson_v2(f, 0, 1, n) }  
>else {  
>h <- (b-a)/n  
>x <- seq(a, b, by=h)  
>y <- fun(x)  
>y[is.nan(y)]=0  
>s <- y[1] + y[n+1] + 2*sum(y[seq(2,n,by=2)]) +  
  4*sum(y[seq(3,n-1, by=2)])  
>s <- s*h/3      }  
>return(s)      }  
  
>A <- matrix(cmean23$x, nrow=1000,ncol=1)  
>hasil = numeric(length=length(A))  
>for(i in seq_along(A)) {  
>A[i,1]  
>f <- function(x) exp(-(((x-  
A[i,1])/0.251189)^2)/2)/(1000*0.251189*sqrt(2*pi))
```

```

>hasil[i]= simpson_v2(f, -Inf,24, n=100)
}
>hasil

>CDF=sum(hasil)
>CDF
>R=1-CDF
>R
>write.csv(hasil, file = "simpson24.csv")

># epanechnikov f <- function(x) (3/4)*(1-((x-
  A[i,1])/0.251189)^2)*(abs((x-A[i,1])/0.251189)<=1)
># gaussian f <- function(x) exp(-((x-
  A[i,1])/0.251189)^2/2)/(1000*0.251189*sqrt(2*pi))
># uniform f <- function(x) (1/2)*(abs((x-A[i,1])/0.251189)<=1)
># triangle f <- function(x) (1-abs((x-A[i,1])/0.251189))*(abs((x-
  A[i,1])/0.251189)<=1)
># quartic f <- function(x) (15/16)*(1-((x-
  A[i,1])/0.251189)^2)^2*(abs((x-A[i,1])/0.251189)<=1)
># triweight f <- function(x) (35/32)*(1-((x-
  A[i,1])/0.251189)^2)^3*(abs((x-A[i,1])/0.251189)<=1)
># cosinus f <- function(x) (pi/4)*cos((pi/2)*((x-
  A[i,1])/0.251189))*(abs((x-A[i,1])/0.251189)<=1)

>win.graph()
>par(mfrow=c(1,1))
>x<-c(23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34)
>hasil<c(1,0.9999998,0.9991561,0.9956874,0.9641654,0.869401
  3,0.6413683,0.3465802,0.1267308,0.02175377,0.002329183,0.
  001364023)

```



```
>plot(x,hasil,main="",xlab="Waktu (minggu)",ylab="Keandalan
(R)", type="l", xlim=c(23,34),ylim=c(0,1))
>title(main="Grafik Keandalan Mesin")
>win.graph()
>par(mfrow=c(1,1))
>x<-c(23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34)
>hasil<-c(3.817779e-
  17,0.0000002362751,0.0008438566,0.004312588,0.0358346,0.
  1305987,0.3586317,0.6534198,0.8732692,0.9782462,0.997670
  8,0.998636)
>plot(x,hasil,main="",xlab="Waktu (minggu)",ylab="CDF",
  type="l", xlim=c(23,34),ylim=c(0,1))
>title(main="Grafik Cumulative Density Function ")
```


LAMPIRAN E
Data Hasil Resampel Bootstrap ($\hat{\theta}^{*B}$)

28.125	30	30.5	28.625	29.125	30.625	27.875	29.5
29.5	28.5	29.5	27.5	28.75	29.625	28	30.625
28.375	31.875	29.875	30.125	30.375	29.625	29	31.5
29.25	30.625	28.875	29.125	28.375	30	28.625	29
28.125	29.875	28.75	29.875	28	28.125	30.625	28.375
28.375	28.75	28.375	29.875	32	30.5	28.875	28.125
28.375	28.5	30.375	29.875	30.75	29.25	27.125	28.5
31	29.5	29.75	27.375	29.375	28.625	28.25	30.375
27.875	29.125	28.875	30.75	29.375	29.75	28.625	28.125
29.75	31.125	32	28.25	27.75	29.25	31	28.875
27.375	28.625	31.125	29.875	31.875	30.25	31	30.5
29	30.625	28.625	29.5	30.125	28.375	29.875	30.375
28.375	29.375	28.25	29.875	30.375	27.5	29.625	29.25
30.5	29.5	30.875	28.375	31	29.625	26.75	31.25
27.625	28.5	28	28.625	25.75	30.25	29.375	30.25
29	29.375	31	28.25	28.875	28.25	29.125	28.875
30.5	29.875	27.75	29.25	29.875	29.5	30.625	28.75
31.5	29.5	30.125	30.375	30.375	30.125	30.5	27.25
26.625	29.625	30.5	33	27.375	30	30.375	29.5
30	31.25	29.875	31.375	31.25	29	28.25	30.5
27.375	29.125	32.375	28.125	28.625	29.875	31.25	30.125
31.25	29.5	30.25	30.875	30.25	29.375	28.375	30.875
29.875	28.875	28	28.375	28.25	30.125	29.125	26.875
31.5	30.75	31.75	30	31.125	28.125	30.375	30.25
27.375	30.25	28.375	30.625	31	31.375	29	28.75
31	31	28.125	28.375	29.125	30	31.375	30.75
30.5	30.125	29.5	29.375	29.125	30.75	30	30.375
28.875	28.5	28.375	30.25	29.625	31	29.375	29.125
28.375	32.25	30.375	28.625	29	28.125	29.125	29.625
30	29.875	29.125	30	29	26.625	31.25	30.375

LAMPIRAN E (Lanjutan)

31.375	31.25	30.125	27.75	28.125	28.125	27.375	29.5
30	27.625	28.375	30.5	29	29.5	30.125	28
29.625	29.25	31	28.375	30.875	30.75	29.625	29.25
32.25	29.375	28.625	28.625	27.875	30.75	31.125	27.375
30.625	29.25	28.75	29.625	31.5	29.875	31	31.625
30.25	30.125	28.25	29.125	29.375	31.625	29.125	30.625
29.5	32.125	27.75	28.875	27.875	28.5	31.25	29.625
31.75	26.375	30.875	32.25	26.625	30.625	27.75	29.75
28.375	30.75	29.375	29.75	29.25	29.625	31.125	31.25
29.875	28.75	28.25	28	28.75	30.25	27.75	29.25
30.625	31.5	30.875	29.5	27.125	30.875	30.25	28.375
30.25	27.25	27.375	29	29.5	30.625	28	28.625
30	27.75	30.125	28.75	29.25	31.25	29.875	29.375
28.5	31.25	29.375	29.125	28.375	28.75	30	28.75
29.25	31	30.5	30.75	29.875	29.625	30.25	29.875
30.25	31.125	30	29.75	31.125	28.25	29.875	29.5
26.875	28.5	29	29.75	30.25	31.375	29.5	30
29.875	30.375	26.375	30.75	27.875	31.5	29.125	29.625
26.5	28.25	30.125	27.75	28.5	27.375	29.25	27.75
27.875	30.75	30.75	29.875	31.875	28.875	27	30.5
28	30.25	28.125	30.75	30	29.75	29.75	31.75
27.875	30.625	31	28.375	28.875	31.25	28.375	29.125
29.625	28	29.75	31.375	29.5	29.25	28.5	31.25
29.875	30	29.875	30.25	27.25	30.875	29	28.5
28.25	30	29.125	28.125	27.625	30.625	27.25	29.125
26.75	28.625	29	30.25	28.625	29.625	29.875	30.5
29.125	29.625	31.75	30.375	31.5	29.125	30.625	29.5
30.5	30.25	29	30	29.375	29.5	30.25	27.625
31.75	29.625	24.875	29.125	30.5	29.75	29.375	29.75
28.5	29.375	29.5	29.625	27.375	28	29.125	30.75
31.375	28.25	27.125	28.625	30.875	30.875	25.25	28.375
31.125	29.375	30.75	30.5	29.5	28.375	27.25	30
30.5	28.625	28.625	28.375	29	29.125	26.25	32

LAMPIRAN E (Lanjutan)

31.25	30.25	30.125	28.75	32.25	28	30.125	29
30.5	30.25	29	30.5	29.375	27.75	28.625	29.5
31.375	27.625	30.25	29.5	29.125	29.125	29.375	31.375
27	30	29.625	27.25	31.625	27.75	28.375	26.875
30.875	30.375	27.25	28.5	28.625	31	30.875	29.75
29.25	30.75	30	27.5	27.75	28.25	29.5	31.375
29.125	30.125	30.125	28.5	28.25	28.75	28.5	29.25
28.875	27.875	30.375	29.375	27.625	29.625	29	29.5
28.75	27.375	28.625	30.5	30.375	30.125	32	29.375
27.625	31	31.75	30.375	30.75	28.75	30.375	29.25
31.625	26.875	30.125	29	29.875	29.875	28.5	28.375
31	28.5	29.625	30.375	29.625	27.625	29.25	27.625
30.5	29	31.375	26.75	29	29.125	29.125	27.75
28.125	31.5	31.375	31.375	29.5	30.125	29.5	30.625
30.25	28.75	27.5	27.875	30.25	29.5	28.625	29.625
30.25	27.875	31.5	30.5	30.25	29.125	30.25	29.25
30.875	32	30.625	28	29	28.375	30	29.75
29.375	29.5	30	28.5	27.625	26.875	29.125	32
28.875	30.875	28.375	31.875	28.375	29.875	31.375	30.375
29.625	30.125	26.75	31.375	28.375	31.875	28.75	27.125
27	30	28.375	29.125	30.625	27.75	28.875	29.375
29.375	30	29.375	29.625	31.5	29	28.875	28.875
28.5	32	32.75	27.75	29.375	32.125	28.5	31.625
27.875	30.375	28.25	29.375	29.375	29.75	29.25	29.375
29.125	29.75	28	31.5	30.5	26.875	29	29.375
29.875	32.125	28.75	28	29.375	29.125	30	29.375
30.375	28.875	29.25	31.125	30.25	27	27.25	31
29.5	30.125	31.5	28.375	29.5	29	30.375	29.375
30.625	29.75	31.375	30.25	29.875	29.5	32	29.625
27	31.375	28.75	31.125	29	29.625	31	30.75
30.375	27.625	26.25	30.125	29.125	28.375	29.125	28
29.625	31	29.125	28.25	28	31	29.25	30.875

LAMPIRAN E (Lanjutan)

30.25	32	31.625	29.25	30.375	29.25	29.75	30.25
29.625	29.625	28.375	28.375	31.125	29.375	29.75	28.25
26.25	31.125	29.625	28.875	29.25	27.875	28.75	29.875
29.375	28.75	28.125	29.375	28.875	28.25	30.5	31
29.875	30.5	27.25	29.875	29.875	29.125	30.375	31.625
28.75	29	28.875	30.125	29.75	29.625	28.75	32.5
27.625	29.5	28.875	27.5	29.5	30.5	29.875	29.625
30	29.125	28.625	29.5	28.375	31	29	28.75
28.375	28.625	28.375	31.25	30.375	29.625	28.625	30.75
29.25	28.375	31.75	30.375	29	26.5	30.375	31.625
31.375	28.625	27.125	30	29.875	30	28.875	30.75
28.375	29.25	28.875	28.375	28.75	28.625	32.25	26.375
30.25	29.125	28.75	27.25	27.625	28.75	26.25	26.625
29.25	31	29.875	30.625	30.25	29.625	29.125	26.75
29.75	28.625	29.25	30.75	26.625	28.5	30.125	28.625
29.25	30.25	28.125	29	29.625	31.875	28.25	27.375
28.75	31.625	30.625	28.5	29.25	30.75	28.375	28.875
29.25	31.375	29.625	28.875	29.625	26	28.75	29.25
29.125	30.75	31.375	29.75	31	29.875	30.375	30.125
28.375	31.125	30	29.625	31.125	31.5	31.125	28.5
29	29.625	30.375	27.75	28.75	29.75	30.75	28.875
29	26.375	30.125	28.5	28.25	28.875	29.125	32.125
28.625	29.375	29.25	29.25	29.5	27.875	29.125	29.875
28.5	28.5	29.875	30.125	31.125	29.5	29.25	27.625
27.375	29.75	31	28.75	28	29.875	30.25	31.375
29.125	29.875	27.375	30.625	29.625	29.875	29.25	28.375
27.5	30.25	32.25	29	29	29	30.75	30.625
27.25	33.5	26.625	27.875	29.5	29.375	30.875	26.75
27.125	28.25	30.125	30.5	30.5	29.125	30	29
29.25	28.25	28.625	31	29.75	29.5	30.25	29.5

LAMPIRAN F
Nilai Standar Error Pengulangan Bootstrap (\widehat{se}_B)

0.042845	0.041573	0.043143	0.042607	0.043757
0.043199	0.041606	0.042814	0.04208	0.044729
0.044382	0.040859	0.04235	0.043564	0.042956
0.042668	0.043589	0.044644	0.042834	0.042197
0.043063	0.04503	0.043754	0.04275	0.043346
0.042923	0.043103	0.043754	0.042912	0.042113
0.044392	0.043551	0.044983	0.042997	0.042869
0.044029	0.04256	0.043071	0.0435	0.043013
0.044701	0.044129	0.043084	0.043807	0.043194
0.043931	0.044781	0.044217	0.042602	0.042689
0.042838	0.042866	0.043446	0.044396	0.043182
0.043149	0.044135	0.043291	0.042868	0.042896
0.043949	0.044611	0.04401	0.043949	0.042512
0.041761	0.042924	0.04367	0.043543	0.043083
0.04421	0.04273	0.043619	0.042164	0.042801
0.04208	0.043226	0.04338	0.042871	0.044738
0.04523	0.043662	0.044183	0.043759	0.044021
0.042975	0.04383	0.042984	0.042004	0.045104
0.043579	0.044091	0.042548	0.041596	0.043447
0.042778	0.043981	0.043346	0.042977	0.041409

LAMPIRAN G
Nilai Keandalan dengan Densitas Kernel Lain

Kernel	$R(x = 25)$
Uniform	0.811958
Triangle	0.782211
Epanechnikov	0.790205
Quartic	0.776996
Triweight	0.768502
Gaussian	0.999156
Cosinus	0.787746

BIODATA PENULIS

Lia Zahrotun Nafisa atau yang biasa dipanggil Nafis lahir di Kediri, 22 Juli 1996. Penulis menempuh pendidikan di MI TPI Tambakrejo, MTs Negeri Pare, dan MAN 3 Kota Kediri (Sekarang MAN 2 Kota Kediri). Penulis yang merupakan anak pertama dari tiga bersaudara yang diterima di Departemen Matematika ITS dengan melalui jalur SBMPTN pada tahun 2014 untuk menempuh pendidikan S1 Matematika. Penulis juga mengikuti kegiatan organisasi yaitu aktif di Lembaga Dakwah Departemen Matematika ITS (LDJ Ibnu Muqhlah Matematika ITS) sebagai staf Big Event pada periode 2015/2016 dan Sekretaris Kaderisasi pada periode 2016/2017. Penulis juga aktif di Lembaga Dakwah Kampus ITS (JMMI ITS) sebagai staf Badan Pelaksana Mentoring (BPM) pada periode 2015/2016, Wakil Biro Mentor BPM pada 2016/2017 dan Wakil Direktur II BPM pada 2017/2018. Selain organisasi, penulis juga pernah mengikuti pelatihan seperti LKMM Pra-TD, Program Studi Islam (PSI) 1, 2 dan 3. Di Departemen Matematika ITS penulis mengambil bidang minat Riset Operasi dan Pengolahan Data (ROPD). Hal-hal yang perlu didiskusikan mengenai tugas akhir ini dapat didiskusikan melalui email lianafisa96@gmail.com

Semoga bermanfaat.