



TUGAS AKHIR – KM184801

**ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI PADA SISTEM
KEUANGAN DENGAN WAKTU TUNDA**

AMIRA SARAH MARETTA
NRP 61115 4000 0116

Dosen Pembimbing
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.
Soleha, S.Si, M.Si.

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2019



FINAL PROJECT – KM184801

**STABILITY AND BIFURCATION ANALYSIS IN
FINANCIAL SYSTEM WITH TIME DELAY**

AMIRA SARAH MARETTA
NRP 61115 4000 0116

Supervisors
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.
Soleha, S.Si, M.Si.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics, Computation, and Data Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2019

LEMBAR PENGESAHAN

**ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI PADA
SISTEM KEUANGAN DENGAN WAKTU TUNDA**

***STABILITY AND BIFURCATION ANALYSIS IN
FINANCIAL SYSTEM WITH TIME DELAY***

TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika
Pada Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

AMIRA SARAH MARETTA

NRP. 06111540000116

Menyetujui,

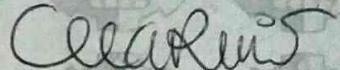
Dosen Pembimbing II,



Soleha, S.Si, M.Si

NIP. 19830107 200604 2 001

Dosen Pembimbing I,



Dr. Dra. Mardlijah, MT

NIP. 19670114 119102 2 001

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika

EMRSDITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT

NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 25 Juli 2019



ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI PADA SISTEM KEUANGAN DENGAN WAKTU TUNDA

Nama Mahasiswa : Amira Sarah Maretta
NRP : 06111540000116
Departemen : Matematika FMKSD-ITS
Dosen Pembimbing : Dr. Dra. Mardlijah, MT
Soleha, S.Si, M.Si

ABSTRAK

Sistem keuangan mempunyai peran penting dalam ekonomi, dimana stabilitas sistem keuangan mempengaruhi stabilitas ekonomi. Ketidakteraturan sistem keuangan akan mengakibatkan masalah pada kegiatan ekonomi lainnya. Pada penelitian ini dilakukan analisa perilaku disekitar titik kritis bifurkasi Hopf pada sistem keuangan dengan waktu tunda. Pada sistem keuangan tanpa waktu tunda, dipilih total tabungan di bank sebagai parameter bifurkasi. Total tabungan di bank harus dipertahankan pada tingkat yang tepat agar perkembangan ekonomi lebih baik. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, sistem keuangan bersifat stabil ketika nilai total tabungan kurang dari 1 ($a < 1$), bersifat tidak stabil ketika total tabungan di bank lebih dari 1 ($a > 1$), dan sistem terjadi bifurkasi Hopf ketika total tabungan sama dengan 1 ($a = 1$). Selanjutnya, ditambahkan waktu tunda pada tingkat suku bunga dan dipilih waktu tunda sebagai parameter bifurkasi. Hasil penelitian ditemukan bahwa waktu tunda memengaruhi sifat kestabilan sistem keuangan yang mula-mula tidak stabil menjadi stabil ketika nilai waktu tunda $\tau \in [0, \tau_n)$ dan terjadi bifurkasi Hopf dengan nilai waktu tunda $\tau = \tau_n$, dimana $\tau_n = 1.993214814$ adalah nilai waktu tunda kritis. Analisa tersebut telah direpresentasikan dalam simulasi numerik Runge-Kutta.

Kata kunci: Sistem keuangan, Stabilitas, Bifurkasi Hopf, Metode Runge-Kutta, Waktu Tunda

STABILITY AND BIFURCATION ANALYSIS IN FINANCIAL SYSTEM WITH TIME DELAY

Name : Amira Sarah Maretta
NRP : 06111540000116
Departement : Matematika FMKSD-ITS
Supervisors : Dr. Dra. Mardlijah, MT
Soleha, S.Si, M.Si

ABSTRACT

The financial system has an important role in the economy, where financial system stability affects economic stability. Financial system irregularities will cause problems in other economic activities. In this study a behavioral analysis was carried out around the critical point of the Hopf bifurcation in the financial system with a delay. In the financial system without time delay, the total savings in the bank are chosen as bifurcation parameters. Total savings in banks must be maintained at the right level so that economic development is better. Based on the Routh-Hurwitz criteria, the financial system is stable when the total value of savings is less than 1 or ($\alpha < 1$), is unstable when the total savings in the bank are more than 1 or ($\alpha > 1$), and the system occurs bifurcation Hopf if the total savings equals to 1 or ($\alpha = 1$). Next, the delay time is added to the interest rate and the delay time is chosen as a bifurcation parameter. The results of the study found that the delay time affected the stability of the financial system which was initially unstable when the delay time value $\tau \in [0, \tau_n)$ and Hopf bifurcation occurred with a time delay value $\tau = \tau_n$, where $\tau_n = 1.993214814$ is the delay time value critical. The analysis has been represented in the Runge-Kutta numerical simulation.

Keyword : Financial System, Stability, Hopf Bifurcation, Runge-Kutta Method, Delay Time

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadiran Allah SWT, karena hanya dengan karunia rahmat, bimbingan, serta anugrah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul Analisis Kestabilan dan Bifurkasi Pada Sistem Keuangan dengan Waktu Tunda.

Dalam proses pembuatan Tugas Akhir ini, penulis mendapat bantuan dan dukungan dari beberapa pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua tercinta, Bapak Temmy Roestam Tribaktianda S. dan Ibu Irawati, adik tersayang Muhammad Luthfy Akbar, serta seluruh keluarga besar penulis atas doa dan dukungan yang selalu diberikan kepada penulis,
2. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT, selaku Kepala Departemen Matematika dan ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T., selaku Sekretaris Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini,
3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si., selaku Ketua Prodi Sarjana Departemen Matematika dan Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si., selaku Sekretaris Prodi Sarjana Departemen Matematika yang telah memberikan arahan akademik selama penulis berkuliah di Departemen Matematika FMKSD – ITS,
4. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T. dan Ibu Soleha, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, dukungan, dan motivasi kepada penulis, sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan,
5. Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si., Bapak Drs. Kamiran, M.Si., dan Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberi ma-sukkan untuk kesempurnaan Tugas Akhir saya,

6. Bapak Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D yang telah membantu dan membimbing penulis dalam menyelesaikan simulasi untuk Tugas Akhir ini,
7. Bapak dan Ibu dosen, serta para staf Departemen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu, yang telah banyak membimbing dan membantu penulis saat menempuh perkuliahan,
8. Pravensa Dastioaji yang selalu memberi dukungan dengan sabar, doa, serta menghibur penulis selama mengerjakan Tugas Akhir ini,
9. Ajeng Puspitaningrum dan Nur Imami Kholidiyyah sebagai sahabat yang selalu membantu, mendukung penulis, dan memberi energi positif kepada penulis,
10. Dasilva Ayu Carindra dan Nadiya Putri Marizka sebagai sahabat yang selalu menemani ketika mengerjakan Tugas Akhir ini,
11. Teman-teman GAP yang telah menemani hari-hari penulis selama kuliah di Matematika ITS,
12. Teman-teman Matematika ITS 2015 yang telah memberikan banyak kenangan selama kuliah
13. Banyak pihak yang tidak dapat ditulis satu persatu oleh penulis yang telah membantu selama penulisan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyusunan Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca sebagai bagan perbaikan di masa yang akan datang. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Juli 2019

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK	i
ABSTRACT	iii
KATA PENGANTAR.....	v
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR SIMBOL.....	xi
BAB I	1
PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	3
BAB II.....	5
TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Penelitian Terdahulu.....	5
2.2 Model Sistem Keuangan	6
2.3 Sistem Persamaan Diferensial	7
2.4 Model Sistem Tundaan Waktu	7
2.5 Titik Setimbang	8
2.6 Pelinearan Sistem	8
2.7 Akar-Akar Persamaan Karakteristik Sistem dan Analisa Kestabilan.....	11

2.8	Bifurkasi	13
2.7.1	Bifurkasi Hopf	14
2.7.2	Kriteria Liu	14
2.9	Nilai Kritis Tundaan	15
BAB III.....		19
METODE PENELITIAN		19
BAB IV		23
ANALISIS DAN PEMBAHASAN.....		23
4.1	Analisa Model Matematika Sistem Keuangan Tanpa Waktu Tunda	23
4.1.1	Titik Setimbang Sistem	24
4.1.2	Linearisasi Sistem.....	25
4.1.3	Analisa Kestabilan dan Bifurkasi	27
4.2	Analisa Model Matematika Sistem Keuangan dengan Waktu Tunda	32
4.2.1	Titik Setimbang	32
4.2.2	Linearisasi Sistem.....	32
4.2.3	Analisa Kestabilan dan Bifurkasi	34
4.3	Simulasi Numerik.....	39
4.3.1	Simulasi tanpa waktu tunda.....	39
4.3.2	Simulasi dengan waktu tunda.....	43
BAB V.....		53
KESIMPULAN DAN SARAN		53
DAFTAR PUSTAKA.....		55
LAMPIRAN A		57
LAMPIRAN B		59

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4. 1 Grafik Kestabilan (x, y, z) terhadap.....	41
Gambar 4. 2 Bidang Solusi dengan $a = 1.79$	42
Gambar 4. 3 Grafik Kestabilan suku bunga dengan.....	46
Gambar 4. 4 Grafik Kestabilan permintaan investasi dengan waktu tunda $\tau \in [0, \tau_n)$	46
Gambar 4. 5 Grafik Kestabilan indeks harga keuangan dengan	47
Gambar 4. 6 Grafik Kestabilan suku bunga dengan waktu tunda mendekati nilai waktu tunda kritis	48
Gambar 4. 7 Grafik Kestabilan permintaan investasi dengan waktu tunda mendekati nilai waktu tunda kritis.....	48
Gambar 4. 8 Grafik Kestabilan Indeks Harga Keuangan dengan waktu tunda mendekati nilai waktu tunda kritis.....	49
Gambar 4. 9 Grafik Kestabilan suku bunga dengan nilai waktu tunda $\tau = \tau_n$	50
Gambar 4. 10 Grafik Kestabilan permintaan investasi dengan nilai waktu tunda $\tau = \tau_n$	50
Gambar 4. 11 Grafik Kestabilan indeks harga keuangan dengan nilai waktu tunda $\tau = \tau_n$	51

DAFTAR SIMBOL

$x(t)$: Suku Bunga
$y(t)$: Tingkat permintaan Investasi
$z(t)$: Indeks Harga Instrumen Keuangan
a	: Total Tabungan di Bank
b	: Biaya Perinvestasi
K	: Konstanta
τ	: Waktu Tunda
τ_n	: Nilai Kritis Waktu Tunda
λ	: Nilai Eigen
E	: Titik Setimbang
J	: Jacobian
M	: Matriks Kriteria Routh-Hurwitz
ω	: Omega
i	: Imajiner

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini, dijelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan yang dibahas pada tugas akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan dari Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Sistem keuangan pada dasarnya adalah tatanan dalam perekonomian suatu negara yang memiliki peran utama dalam menyediakan fasilitas jasa-jasa dibidang keuangan oleh lembaga-lembaga keuangan lainnya misalnya pasar uang dan pasar modal. Sistem keuangan Indonesia pada prinsipnya dapat dibedakan dalam dua jenis yaitu sistem perbankan dan sistem lembaga bukan bank[1]. Menurut Peter S. Rose, sistem keuangan dapat diartikan sebagai kumpulan institusi, pasarm ketentuan perundangan, peraturan-peraturan, dan teknik-teknik dimana surat berharga diperdagangkan, tingkat suku bunga ditetapkan, dan jasa-jasa keuangan (*financial service*) dihasilkan serta ditawarkan ke seluruh bagian dunia [2].

Karakteristik dari sektor keuangan yang paling dominan yang dapat kita amati adalah begitu cepatnya perubahan yang terjadi di dalamnya seiring dengan pesatnya perkembangan dibidang ekonomi. Sistem keuangan memasuki tahap tidak stabil pada saat sistem tersebut telah membahayakan dan menghambat kegiatan ekonomi. Sistem keuangan yang stabil merupakan sistem keuangan yang kuat dan tahan terhadap berbagai gangguan ekonomi sehingga tetap mampu melakukan fungsi intermediasi, melaksanakan pembayaran, dan menyebar risiko secara baik.

Mekanisme ekonomi dalam melakukan fungsinya secara baik sangat berkaitan dengan beberapa fenomena yang terjadi diantaranya perubahan suku bunga, perubahan tingkat permintaan investasi, dan perubahan indeks harga instrumen keuangan. Ketiga fenemona tersebut saling berhubungan satu sama lain dan tidak terlepas dari pengaruh total tabungan

nasional dan biaya perinvestasi. Jika terdapat ketidaksesuaian antara faktor-faktor yang saling berpengaruh di dalam sistem keuangan, maka permasalahan yang ditimbulkan sangat kompleks dan dapat terjadinya kekacauan sistem atau terjadi risiko krisis keuangan.

Semakin rumit masalah yang muncul, beberapa metode sangat dibutuhkan oleh pemerintah guna mengevaluasi suatu masalah tersebut yang nantinya bisa menjadi acuan untuk evaluasi selanjutnya. Beberapa metode pun dapat digunakan, salah satunya adalah *time-delayed*. Metode pengendalian yang efektif dan cepat sangat penting bagi pemerintah ketika beberapa kasus yang rumit muncul. Terdapat beberapa metode pengendali sistem kekacauan yang telah diteliti salah satunya oleh Pyragas pada tahun 1992[3] dengan menggunakan *time-delayed* atau waktu tunda.

Pada tahun 2005, penelitian yang berjudul "*Hopf Bifurcation in the IS-LM Business Cycle Model with Time Delay*" dilakukan oleh Cai dan ditemukan adanya pengaruh waktu tunda pada proses investasi yang dipengaruhi oleh variabel stok modal [4]. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa adanya pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan sistem.

Kemudian pada tahun 2008, model siklus bisnis akselerator telah dikaji ulang oleh Matsumoto dengan judul "*Note on Godwin's 1951 nonlinear accelerator model with an investment delay*". Pada penelitian tersebut didapat pengaruh penundaan proses investasi[5].

Berdasarkan permasalahan yang ada, pada Tugas Akhir kali ini akan dianalisis kestabilan sistem keuangan dengan variabel suku bunga, tingkat permintaan investasi, dan indeks harga keuangan tanpa dan dengan waktu tunda yang ditambahkan pada variabel suku bunga. Kestabilan sistem dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz dan dilakukan analisa eksistensi bifurkasi, serta diberikan penyelesaian numerik dengan metode numerik Runge-Kutta

yang disajikan dalam bentuk simulasi sehingga simulasi merepresentasikan hasil analisa yang telah dilakukan.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada Tugas Akhir ini adalah:

1. Bagaimana analisa kestabilan dan analisa bifurkasi pada model sistem keuangan dengan waktu tunda.
2. Bagaimana interpretasi hasil analisis dari model sistem keuangan dan penyelesaian numerik dari model tersebut dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta beserta simulasinya.

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penelitian Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Variabel dari model sistem keuangan dengan waktu tunda adalah suku bunga, tingkat permintaan investasi, dan indeks harga keuangan di dalam perekonomian makro.
2. Parameter yang mempengaruhi model sistem keuangan dengan waktu yaitu tabungan total di bank dan biaya perinvestasi.

1.4 Tujuan

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Untuk mendapatkan kestabilan dan eksistensi bifurkasi pada sistem keuangan dengan waktu tunda.
2. Menginterpretasikan hasil analisis model sistem keuangan dengan metode numerik Runge-Kutta.

1.5 Manfaat

Manfaat dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Mengetahui kontribusi dinamika sistem keuangan dan perubahannya

4

2. Memeroleh kajian tentang model sistem keuangan dengan waktu tunda, kestabilan, dan eksistensi bifurkasi pada sistem keuangan dengan waktu tunda
3. Sebagai bahan pertimbangan untuk penelitian selanjutnya.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan mengenai penelitian terdahulu, model sistem keuangan tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda, titik setimbang, linearisasi sistem nonlinear, analisa kestabilan dan bifurkasi, serta simulasi numerik.

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian sebelumnya yang terkait dengan analisis kestabilan dan bifurkasi pada sistem keuangan yaitu pada penelitian tahun 2005 [5] yang berjudul "*Hopf Bifurcation in the IS-LM business cycle model with time delay*". Pada penelitian tersebut mempertimbangkan waktu tunda pada proses investasi. Waktu tunda merepresentasikan adanya waktu antra kesediaan modal hingga kesiapan investor untuk menginvestasikan uangnya, sehingga muncul adanya faktor waktu tunda pada variabel stok modal. Pada penelitian tersebut ditemuka bahwa adanya pengaruh perubahan paramter waktu tunda pada sifat kestabilan sistem yang semula stabil menjadi tidak stabil ataupun sebaliknya. Bifurkasi Hopf juga muncul ketika sistem diberikan waktu tunda sebesar waktu tunda kritis yaitu $\tau = 0.6251$.

Penelitian selanjutnya pada tahun 2012 [6] yang berjudul "*Bifurcation Analysis for a Kind of Nonlinear Finance System with Delayed Feedback and Its Application to Chaos of Control*". Pada penelitian tersebut telah dianalisis model sistem keuangan dengan penambahan waktu tunda pada variabel permintaan investasi dan ditemukan beberapa perubahan perilaku dengan beberapa perubahan parameter waktu tunda. Bifurkasi Hopf terjadi ketika sistem keuangan diberikan waktu tunda sebesar $\tau = 3.1650$.

Penelitian terakhir pada tahun 2016 [7] yang berjudul "*Bifurcation Analysis adn Chaos Control in Modified Finance System with Delayed Feedback*". Pada penelitian tersebut telah dianalisis model sistem keuangan dengan penambahan waktu tunda pada variabel suku bunga dan ditemukan adanya pengaru

sifat kestabilan sistem bergantung pada perubahan parameter waktu tunda. Sifat kestabilan sistem mengalami perubahan yang semua tidak stabil menjadi stabil jika diberikan nilai waktu tunda $\tau \in [0, \tau_n)$ dan terjadi bifurkasi Hopf ketika diberikan nilai waktu tunda $\tau = \tau_n$ dengan $\tau_n = 1.6$ dan merupakan nilai waktu tunda kritis.

2.2 Model Sistem Keuangan

Sistem keuangan merupakan suatu sistem yang mengatur transfer dana antara pihak yang kelebihan dana (*saver*) dan pihak yang membutuhkan dan (*borrowed*) agar tercapai alokasi dana yang efisien serta menyediakan fasilitas keuangan termasuk sistem pembayaran yang diperlukan dalam pembiayaan kegiatan bisnis. Sistem keuangan secara sederhana yang diperlukan dalam pembiayaan kegiatan bisnis. Sistem keuangan secara sederhana merupakan kumpulan lembaga-lembaga keuangan (bank, lembaga asuransi, dan sebagainya), berbagai kebijakan pemerintah dalam bidang ekonomi keuangan, yang disusun sedemikian rupa untuk memperlancar segala transaksi keuangan yang berlangsung yang mendukung terjadinya transaksi-transaksi keuangan di suatu negara, demi kemajuan perkembangan negara tersebut.

Model sistem keuangan merupakan model matematis berupa persamaan differensial nonlinear yang menggambarkan dinamika sistem keuangan di dalam perekonomian makro. Model umum sistem keuangan secara sederhana dapat ditulis dengan tiga variabel, yaitu suku bunga x , tingkat permintaan investasi y , dan indeks harga instrumen keuangan z berikut ini [7]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -a(x(t) + y(t)) \\ \dot{y}(t) &= -y(t) - ax(t)z(t) \\ \dot{z}(t) &= b + ax(t)y(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dimana a adalah total tabungan di bank, b adalah biaya perinvestasi, dan $a, b > 0$.

Berdasarkan [3], akan ditambahkan waktu tunda pada persamaan pertama (2.1), sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -a(x(t) + y(t)) + K[x(t) - x(t - \tau)] \\ \dot{y}(t) &= -y(t) - ax(t)z(t) \\ \dot{z}(t) &= b + ax(t)y(t)\end{aligned}\quad (2.2)$$

dengan K adalah konstanta dan $K, \tau \in \mathbb{R}$, dimana $\tau > 0$.

2.3 Sistem Persamaan Diferensial [8]

Bentuk umum persamaan diferensial orde-1 adalah

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t); \quad x(0) = x_0 \quad (2.3)$$

dimana A adalah matriks koefisien $n \times n$ dan B adalah matriks konstanta. Persamaan (2.3) disebut homogen jika $B = 0$, sehingga solusi dari sistem adalah semua x memenuhi persamaan $\dot{x} = Ax$.

2.4 Model Sistem Tundaan Waktu [9]

Persamaan differensial dengan waktu tunda merupakan salah satu bentuk persamaan differensial dimana turunan dari fungsi yang tidak diketahui berapa waktu tunda yang diberikan. Hal ini berkaitan dengan nilai dari fungsi waktu tunda dibutuhkan suatu proses. Persamaan differensial dengan tundaan waktu dinyatakan dalam bentuk

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)). \quad (2.4)$$

Jika persamaan diferensialnya linear, maka persamaan (2.4) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t - \tau) = 0 \quad (2.5)$$

dengan τ adalah waktu tunda. Misalkan $x(t) = e^{\lambda t}$, maka persamaan (2.5) dapat juga ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} &= 0 \\ e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) &= 0.\end{aligned}$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0$ sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} = 0 \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) disebut persamaan karakteristik dari persamaan diferensial tundaan, jika persamaan (2.6) dimisalkan dengan

$$P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \text{ dan } P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k,$$

maka persamaan (2.6) dapat ditulis kembali sebagai

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda)e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.7)$$

2.5 Titik Setimbang

Titik setimbang merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu.

Diberikan suatu persamaan diferensial:

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.8)$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$, vektor \bar{x} memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

Definisi 2.1 [10]

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari suatu sistem jika $f(\bar{x}) = 0$.

2.6 Pelinearan Sistem

Pelinearan dilakukan pada sistem persamaan nonlinear agar lebih mudah dianalisa kestabilan lokal disekitar titik setimbangnya. Karena model sistem keuangan merupakan sistem nonlinear, maka analisis kestabilannya dilakukan dengan menganalisis kestabilan disekitar titik setimbangnya. Untuk melakukan analisis kestabilan tersebut, digunakan Deret Taylor untuk mencari suatu hampiran solusi disekitar titik setimbang. Deret Taylor untuk f disekitar titik setimbang \bar{x} adalah

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n)}{1!} + \frac{\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{(\partial x_1)^2}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{(\partial x_2)^2}(x_2 - \bar{x}_2)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{(\partial x_n)^2}(x_n - \bar{x}_n)^2}{2!} + \dots \quad (2.9)$$

dimana

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

dan

$$f(\bar{x}) = 0 \text{ (titik kesetimbangan).}$$

Dengan mengabaikan suku-suku berorde tinggi, maka terbentuk suatu model matematika linier dari persamaan nonlinier melalui pendekatan Deret Taylor. Selanjutnya, ditinjau dari sistem $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ disekitar titik setimbang $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ dan kondisi setimbangnya adalah ketika $f(\bar{x}) = 0$, maka persamaan sistem menjadi:

$$\begin{aligned} f_1(x) &\approx \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \\ f_2(x) &\approx \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \\ &\vdots \\ f_n(x) &\approx \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Selanjutnya didefinisikan

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \bar{x}_1 \\ y_2 &= x_2 - \bar{x}_2 \\ &\vdots \\ y_n &= x_n - \bar{x}_n \end{aligned}$$

didapat derivatifnya adalah

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(x) \\ \dot{y}_2 &= f_2(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\dot{y}_n = f_n(\mathbf{x})$$

sehingga $\dot{y} = f(\mathbf{x})$ dan diperoleh

$$\dot{y}_1 = f_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} y_n$$

$$\dot{y}_2 = f_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} y_n$$

⋮

$$\dot{y}_n = f_n(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} y_n$$

jika dinyatakan dalam bentuk matriks, maka dipenuhi

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

atau dapat ditulis menjadi $\dot{y} = J(f(\bar{x}))y$ yang disebut sebagai matriks Jacobian dari fungsi f di sekitar titik kesetimbangan \bar{x} . Berikut akan diberikan definisi dari matriks Jacobian.

Definisi 2.2 [10]

Diberikan fungsi $f = f_1, f_2, \dots, f_n$ dengan $f_i \in C^1(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$ $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dan E himpunan terbuka. Matriks

$$J(f(\bar{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

dinamakan matriks Jacobian dari $f(\bar{x})$.

Jika linearisasi sistem nonlinear di sekitar titik tetap sudah dilakukan, maka bentuk linear sistem tersebut akan dicari akar-akar persamaan karakteristiknya.

2.7 Akar-Akar Persamaan Karakteristik Sistem dan Analisa Kestabilan[8]

Sifat titik setimbang dapat dilihat dari nilai eigen atau akar-akar karakteristik yang didapat dari persamaan karakteristik dengan mencari

$$\det(A - Jf(\bar{x})) = 0. \quad (2.12)$$

Kriteria untuk melihat sifat kestabilan dari titik setimbang tersebut adalah dengan melihat bagian real dari nilai eigen tersebut.

Misalkan $\lambda_j = u_j \pm i\omega_j$, dengan $j = 1, 2, 3, \dots$. Kriteria kestabilan dinyatakan dengan

1. Stabil, jika
 - a. Setiap nilai eigen real adalah negatif ($\lambda_i < 0$, untuk setiap i),
 - b. Setiap komponen bagian real nilai eigen kompleks lebih kecil atau sama dengan nol ($Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap i).
2. Tidak stabil, jika
 - a. Ada nilai eigen real yang positif ($\lambda_i > 0$ untuk setiap i),
 - b. Ada komponen nilai eigen kompleks lebih besar dari nol, ($Re(\lambda) > 0$ untuk setiap i).
3. Sadel, jika ada perkalian dua buah nilai eigen bernilai negatif ($\lambda_j \lambda_j < 0$ untuk i dan j sembarang). Sadel hiperbolik, jika $Re(\lambda_i) \neq 0$, untuk setiap i .

Pada permasalahan tertentu digunakan metode lain untuk menentukan tanda pada bagian real nilai eigen λ dikarenakan kestabilan titik setimbang tidak bisa diamati langsung. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat digunakan jika kestabilan titik setimbang diamati langsung. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz adalah suatu metode untuk

menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung.

Teorema 2.1 [11]

Misalkan a_1, a_2, \dots, a_n bilangan-bilangan real, $a_j = 0$ jika $j > n$. Semua nilai dari persamaan karakteristik

$p(z) = a_n + a_{n-1}z + a_{n-2}z^2 + \dots + a_1z^{n-1} + z^n$ mempunyai bagian real yang negatif jika dan hanya jika untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$, determinan dari matriks $k \times k$

$$M_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{bmatrix}$$

adalah positif.

Jika diberikan persamaan

$$h(z) = z^3 + pz^2 + qz + r \quad (2.13)$$

maka berlaku lemma berikut

Lemma 2.1[6]

- i) Jika $r < 0$ maka persamaan (2.13) mempunyai setidaknya satu akar bagian riil positif
- ii) Jika $r \geq 0$ dan $\Delta = p^2 - 3q \leq 0$ maka persamaan (2.13) tidak memiliki akar positif
- iii) Jika $r \geq 0$ dan $\Delta = p^2 - 3q > 0$ maka persamaan (2.13) mempunyai akar-akar bagian riil positif jika dan hanya jika $z_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta}}{3} > 0$ dan $h(z_1) \leq 0$

Berdasarkan Lemma 2.1 didapat beberapa asumsi

$$(H_1) \quad r \geq 0 \text{ dan } p^2 \leq q \quad (2.14)$$

$$(H_2) \quad r < 0 \quad (2.15)$$

$$(H_3) \quad r \geq 0, p^2 > 3q, \quad (2.16)$$

$$z_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta}}{3} > 0, \text{ dan } h(z_1) \leq 0.$$

Teorema 2.2 [3]

Misalkan kondisi $a > 1$ berlaku.

- i) Jika (H_1) pada persamaan (2.14) terpenuhi, maka titik ekuilibrium E_1 adalah tidak stabil untuk semua $\tau \geq 0$,
- ii) Jika (H_2) pada persamaan (2.15) atau (H_3) pada persamaan (2.16) terpenuhi, maka titik ekuilibrium E_1 adalah tidak stabil untuk $\tau \in [0, \tau_0)$, dan kestabilan akan berubah seiring dengan bertambahnya nilai τ ,
- iii) Jika $h'(z) \neq 0$ dan (H_2) pada persamaan (2.15) atau (H_3) pada persamaan (2.16) terpenuhi, maka sistem (2.1) terjadi bifurkasi Hopf pada ekuilibrium E_1 ketika $\tau = \tau_k^j$, $k = 1, 2, 3; j = 0, 1, 2, \dots$

Teorema 2.2 diterapkan pada simulasi model Bab IV.

2.8 Bifurkasi [13]

Struktur kualitatif dari suatu sistem dinamik dapat berubah karena adanya perubahan dari parameter sistem dinamik tersebut. Bifurkasi adalah perubahan kualitatif dalam struktur asimtotik suatu sistem dinamik. Nilai parameter ketika terjadi bifurkasi dinamakan titik bifurkasi. Bifurkasi stasioner meliputi perubahan jumlah atau kestabilan titik kesetimbangan, sementara bifurkasi periodik meliputi perubahan jumlah dan/atau kestabilan solusi periodik. Kedua macam bifurkasi ini dapat terjadi dalam sistem dinamik kontinu dua dimensi atau lebih.

Beberapa jenis bifurkasi adalah sebagai berikut:

1. Bifurkasi *Saddle-node*
 Pada bifurkasi *saddle-node*, titik *saddle* dan *node* bergabung sehingga menyebabkan suatu kesetimbangan tunggal dengan nilai eigen nol.
2. Bifurkasi Transkritikal

Pada bifurkasi transkritikal, kestabilan berpindah dari satu titik kesetimbangan ke titik kesetimbangan lainnya.

3. Bifurkasi *Pitchfork*

Bifurkasi *pitchfork* adalah suatu kondisi dimana sistem mengalami transisi dari 1 titik kesetimbangan menjadi 3 titik setimbangan.

4. Bifurkasi Hopf

Bifurkasi Hopf adalah kemunculan siklus batas (*limit cycle*) dari kesetimbangan dalam sistem dinamik yang dihasilkan oleh persamaan diferensial biasa saat kesetimbangan mengalami perubahan stabilitas yang melalui sepasang nilai eigen murni imajiner.

2.8.1 Bifurkasi Hopf

Bifurkasi Hopf adalah berubahnya jenis kestabilan suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial dikarenakan munculnya sepasang nilai eigen yang bernilai imajiner murni. Syarat terjadinya bifurkasi Hopf adalah memenuhi kondisi transversalitas, yaitu kondisi yang dapat menyebabkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan ketika waktu tunda berubah,

$$\frac{d}{d\tau} Re(\lambda)|_{\lambda=i\omega^*, \tau=\tau^*} \neq 0.$$

Kondisi ini menyatakan bahwa sepasang akar imajiner murni dari persamaan karakteristik (2.7) melintasi sumbu imajiner dengan kecepatan tidak nol [8], sehingga akan terjadi perubahan nilai real akar persamaan karakteristik dari negatif menuju positif atau sebaliknya.

2.8.2 Kriteria Liu

Liu menemukan sebuah kriteria untuk menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf tanpa menggunakan nilai eigen, melainkan dengan memanfaatkan koefisien dari persamaan karakteristik. Misalkan persamaan (2.3) ditulis kembali sebagai sebuah sistem yang memiliki kaitan dengan sebuah parameter μ , sehingga

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) \quad (2.17)$$

sistem tersebut memiliki titik tetap yaitu (x_0, μ_0) . Diasumsikan bahwa ada sebuah nilai eigen dari matriks Jacobi yang bernilai

imajiner murni ketika $\mu = \mu_0$ dan memenuhi kondisi transversalitas,

Persamaan karakteristik yang dapat dibentuk dari sistem adalah

$$p(\lambda; \mu) = p_0(\mu) + p_1(\mu)\lambda + \dots + p_n(\mu)\lambda^n$$

Polinomial $(\lambda; \mu)$ memiliki akar-akar λ yang memiliki bagian riil bernilai negatif ketika semua kriteria kestabilan Routh-Hurwitz terpenuhi, sehingga kriteria untuk terjadinya bifurkasi Hopf menurut Liu untuk $n = 3$ adalah

1. $p_0(\mu_0) > 0, p_1(\mu_0) > 0, p_1(\mu_0)p_2(\mu_0) - p_0(\mu_0) = 0,$
2. $\frac{d}{d\mu} D_2(\mu_0)_{\mu=\mu_0} \neq 0.$

2.9 Nilai Kritis Tundaan[13]

Menurut Forde dan Nelson, ketika nilai $\tau \neq 0$ akar karakteristik λ akan mengalami perubahan. Suatu nilai kritis τ akan ada dimana nilai akar-akar dari persamaan (2.6) akan mengalami transisi dari yang memiliki akar real negatif menjadi memiliki akar real positif atau sebaliknya. Jika hal ini terjadi maka bisa dikatakan bahwa ada sebuah nilai yang menyebabkan persamaan (2.7) memiliki akar-akar imajiner murni.

Misalkan akar persamaan karakteristik (2.7) adalah $\lambda = i\omega, \omega > 0, \omega \in \mathbb{R}$, sehingga persamaan (2.7) menjadi

$$P_1(i\omega) + P_2(i\omega)e^{-i\omega\tau} = 0.$$

Jika bagian polinomial dipisah menjadi bagian real dan imajiner serta suku eksponennya diubah dalam bentuk trigonometri, maka diperoleh

$$R_1(\omega) + iQ_1(\omega) + (R_2(\omega) + iQ_2(\omega))(\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) = 0, \quad (2.18)$$

dengan

$$R_1(\omega) = \sum_j (-1)^{j+1} a_j v^{2j}; \quad Q_1(\omega) = \sum_j (-1)^j a_{j+1} v^{2j+1}$$

$$R_2(\omega) = \sum_j (-1)^{j+1} b_j v^{2j}; \quad Q_2(\omega) = \sum_j (-1)^j b_{j+1} v^{2j+1}.$$

Agar persamaan (2.16) terpenuhi, bagian real dan imajiner harus sama dengan nol sehingga

$$\begin{aligned} R_1(\omega) + R_2(\omega) \cos \omega\tau + Q_2(\omega) \sin \omega\tau &= 0 \\ Q_1(\omega) - R_2(\omega) \sin \omega\tau + Q_2(\omega) \cos \omega\tau &= 0. \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} -R_1(\omega) &= R_2(\omega) \cos \omega\tau + Q_2(\omega) \sin \omega\tau \\ Q_1(\omega) &= R_2(\omega) \sin \omega\tau - Q_2(\omega) \cos \omega\tau. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Jika persamaan (2.17) dikuadratkan, akan didapatkan

$$\begin{aligned} (R_1(\omega))^2 &= (R_2(\omega))^2 \cos^2 \omega\tau + (Q_2(\omega))^2 \sin^2 \omega\tau + \\ &2R_2(\omega)Q_2(\omega) \sin \omega\tau \cos \omega\tau, \end{aligned} \quad (2.20)$$

dan

$$\begin{aligned} (Q_1(\omega))^2 &= (R_2(\omega))^2 \sin^2 \omega\tau + (Q_2(\omega))^2 \cos^2 \omega\tau - \\ &2R_2(\omega)Q_2(\omega) \sin \omega\tau \cos \omega\tau. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Selanjutnya, kedua persamaan (2.18) dan (2.19) dijumlahkan sehingga diperoleh

$$(R_1(\omega))^2 + (Q_1(\omega))^2 = (R_2(\omega))^2 + (Q_2(\omega))^2 \quad (2.22)$$

Persamaan (2.20) adalah persamaan polinomial dimana trigonometri dan nilai waktu tunda telah tereliminasi.

Terjadinya bifurkasi Hopf terdapat syarat yang harus dipenuhi yaitu syarat kondisi transversalitas dimana nilai waktu tunda τ harus memenuhi kondisi tersebut. Berikut diberikan Lemma 2.2 yang menjamin terpenuhinya kondisi transversal.

Lemma 2.2 [13]

Jika $\lambda = i\omega^$ dan $\tau = \tau^*$ memenuhi persamaan karakteristik (2.6) maka*

$$\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda)|_{\lambda=i\omega^*, \tau=\tau^*} \neq 0,$$

jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} R_1(\omega^*)R_1'(\omega^*) + Q_1(\omega^*)Q_1'(\omega^*) &\neq R_2(\omega^*)R_2'(\omega^*) + \\ &Q_2(\omega^*) + Q_2'(\omega^*). \end{aligned}$$

2.10 Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler. Metode Euler merupakan metode perhitungan solusi numerik yang dilakukan langkah demi langkah dengan pendekatan garis singgung. Untuk fungsi dari persamaan differensial [14]:

$$y' = f(x, y)$$

Dengan titik pendekatan awal (x_0, y_0) berdasarkan metode Euler nilai fungsi penyelesaian diperoleh dengan:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

atau

$$y_{n+1} = y_n + dy$$

dy adalah nilai perubahan nilai fungsi setiap step.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan diuraikan metode yang digunakan dalam penelitian secara rinci. Metode penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian dapat berjalan sistematis.

1. Studi Literatur

Tahap ini merupakan tahap untuk melakukan identifikasi permasalahan, yaitu mencari referensi yang menunjang penelitian. Materi yang dicari adalah tentang sistem keuangan, model sistem dinamik dengan waktu tunda, titik setimbang, sistem nonlinear, lineari sistem nonlinear, sifat kestabilan sistem, bifurkasi, metode Runge-Kutta, dan penyelesaian numerik dengan dde23.

2. Mengkaji Model Matematika Sistem Keuangan

Pada tahap ini, dilakukan kajian terhadap model sistem keuangan dengan dua kondisi, yaitu tanpa waktu tunda ($\tau = 0$) dan dengan waktu tunda ($\tau > 0$). Kajian sistem keuangan dilakukan agar dapat merepresentasikan dinamika sistem keuangan dengan parameter yang telah ditetapkan.

3. Mencari Titik Setimbang Sistem

Selanjutnya, pada tahap ini akan dicari titik tetap model sistem keuangan, yaitu titik yang diperoleh ketika sistem dalam keadaan setimbang atau ketika tidak terjadi perubahan terhadap waktu.

4. Linearisasi Sistem Non Linear

Selanjutnya adalah tahap linearisasi sistem. Sistem keuangan merupakan sistem nonlinear sehingga sistem harus dilinearakan terlebih dahulu agar dapat lebih mudah dianalisa kestabilannya yang selanjutnya akan diselidiki adanya bifurkasi pada sistem.

5. Analisa Kestabilan

Setelah sistem keuangan sudah dilinearkan, selanjutna akan diselidiki sifat kestabilan pada sistem keuangan.

6. Analisa Bifurkasi

Pada tahap ini akan dilakukan analisa eksistensi bifurkasi yang ada pada sistem setelah didapatkan hasil analisa kestabilannya.

7. Simulasi Numerik

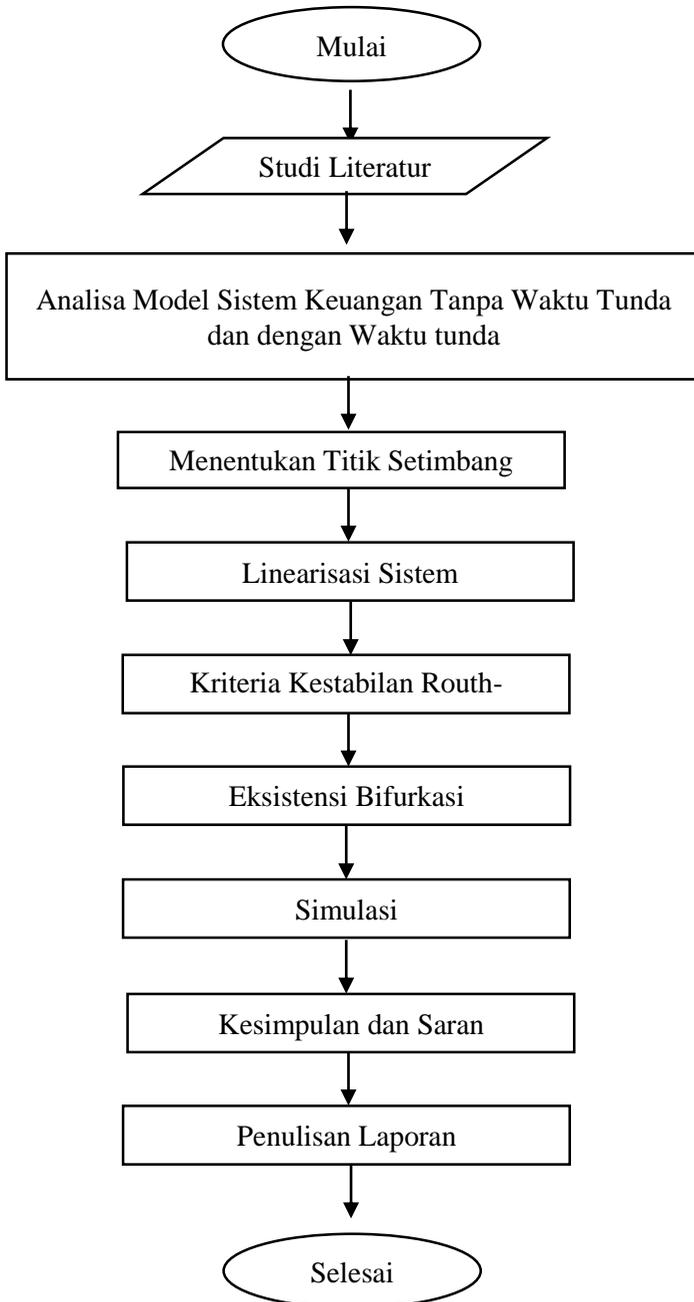
Pada tahap ini, dilakukan analisis hubungan antara bilangan reproduksi dasar dan stabilitas kesetimbangan dengan metode numerik Runge-Kutta orde 4 menggunakan *software* MATLAB.

8. Kesimpulan dan Saran

Tahap terakhir akan dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil pembahasan sebelumnya. Selanjutnya diberikan saran untuk perbaikan pada penelitian berikutnya.

9. Diagram Alir

Pada tahap ini disusun diagram alir pada Gambar 3.1 sebagai langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian.



Gambar 3. 1 Diagram Alir Penelitian

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi tentang pembahasan mengenai representasi matematika sistem keuangan, titik setimbang model matematika sistem keuangan, penentuan kestabilan model matematika sistem keuangan, linearisasi sistem model matematiks sistem keaungan, analisa bifurkasi pada sistem keaungan, dan penyelesaian numerik dari model sistem keaungan yang disimulasikan dengan menggunakan program MATLAB. Model sistem keuangan akan dianalisa pada saat dua kondisi yaitu tanpa waktu tunda ($\tau = 0$) atau dengan waktu tunda ($\tau > 0$),

4.1 Analisa Model Matematika Sistem Keuangan Tanpa Waktu Tunda

Pada subbbab ini akan dilakukan analisa model sistem keuangan tanpa waktu tunda atau ketika $\tau = 0$. Analisa model sistem keuangan tanpa waktu tunda mencakup penentuan titik setimbang model matematika sistem keuangan, penentuan kestabilan model sistem keuangan, analisa bifurkasi sistem keuangan, dan penyelesaian numerik yang disimulasikan dengan MATLAB. Model sistem keuangan telah dijelaskan sebelumnya pada subbab 2.2, dan persamaan (2.1) dapat ditulis kembali sebagai berikut[7]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -a(x(t) + y(t)) \\ \dot{y}(t) &= -y(t) - ax(t)z(t) \\ \dot{z}(t) &= b + ax(t)y(t)\end{aligned}\quad (4.1)$$

dimana

x = suku bunga

y = tingkat permintaan investasi

z = indeks harga instrumen keuangan

a = total tabungan di bank

b = biaya per investasi

dan $a, b > 0$.

4.1.1 Titik Setimbang Sistem

Titik setimbang $E_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ adalah titik yang diperoleh ketika sistem keuangan berada pada keadaan stasioner. Keadaan stasioner adalah keadaan dimana tidak terjadi perubahan pada suku bunga, tingkat permintaan investasi, dan indeks harga seiring dengan perubahan waktu. Titik tetap sistem (4.1) diperoleh ketika laju tingkat suku bunga, laju tingkat permintaan investasi, dan laju indeks harga sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -a(x(t) + y(t)) &= 0 \\ -y(t) - ax(t)z(t) &= 0 \\ b + ax(t)y(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Selanjutnya akan dicari himpunan penyelesaian dari sistem persamaan (4.2) sebagai berikut:

- Penyelesaian persamaan (4.2) yang pertama

$$\begin{aligned} -ax(t) - ay(t) &= 0 \\ -ax(t) &= ay(t) \\ x(t) &= -y(t) \end{aligned}$$

- Substitusi persamaan $x(t) = -y(t)$ ke persamaan ketiga pada (4.2)

$$\begin{aligned} b + ax(t)y(t) &= 0 \\ b + a(-y(t))y(t) &= 0 \\ b - ay(t)^2 &= 0 \\ y(t)^2 &= \frac{b}{a} \\ y(t) &= \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

karena terdapat penyebut dalam bentuk akar maka harus risonalisasikan terlebih dahulu sehingga didapat

$$y(t) = \frac{\sqrt{ab}}{a} \text{ atau } y(t) = -\frac{\sqrt{ab}}{a}$$

- Selanjutnya substitusi persamaan

$x(t) = -y(t)$ ke persamaan kedua pada (4.2)

$$-y(t) - ax(t)z(t) = 0$$

$$-y(t) - a(-y(t))z(t) = 0$$

$$-y(t) + ay(t)z(t) = 0$$

$$y(t)(-1 + az(t)) = 0$$

sehingga didapat $y(t) = 0$ atau

$$-1 + az(t) = 0$$

$$az(t) = 1$$

$$z(t) = \frac{1}{a}$$

Berdasarkan perhitungan di atas, maka titik setimbang yang diperoleh sebagai berikut:

1. Jika $y(t) = 0$ disubsitusi ke persamaan pertama dan kedua pada (4.2) maka didapat $x(t) = 0$ dan $z(t) = 0$. Sehingga pada kondisi ini didapat $E_0(0,0,0)$.
2. Jika $y(t) = \pm \frac{\sqrt{ab}}{a}$ disubsitusi ke persamaan kedua pada (4.2) maka didapat $z(t) = \frac{1}{a}$. Karena $x(t) = -y(t)$, maka pada kondisi ini didapat dua titik tetap yaitu $E_1(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a})$ dan $E_2(-\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a})$.

4.1.2 Linearisasi Sistem

Model sistem keuangan merupakan sistem nonlinear, sehingga untuk mendapatkan analisa kestabilan sistem perlu dilinearisasikan terlebih dahulu agar lebih mudah mendapatkan analisisnya.

Persamaan (4.1) akan dilinearisasikan dengan menggunakan pendekatan Deret Taylor disekitar titik setimbang.

Misalkan:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y} &= f_2(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z} &= f_3(x(t), y(t), z(t))\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= x(t) - \bar{x} \\ \hat{y}(t) &= y(t) - \bar{y} \\ \hat{z}(t) &= z(t) - \bar{z}\end{aligned}$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned}f_1(x(t), y(t), z(t)) &= -a(x(t) - y(t)) \\ f_2(x(t), y(t), z(t)) &= -y(t) - ax(t)z(t) \\ f_3(x(t), y(t), z(t)) &= b + ax(t)y(t).\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari Deret Taylor dari f_1, f_2, f_3 disekitar titik setimbang $E(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\begin{aligned}f_1(\hat{x} + \bar{x}, \hat{y} + \bar{y}, \hat{z} + \bar{z}) &= \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial x(t)}(x(t) - \bar{x}) + \\ &\quad \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial y(t)}(y(t) - \bar{y}) + \\ &\quad \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial z(t)}(z(t) - \bar{z}) + Rf_1 \\ &= -a\hat{x}(t) - a\hat{y}(t) + Rf_1 \\ f_2(\hat{x} + \bar{x}, \hat{y} + \bar{y}, \hat{z} + \bar{z}) &= \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial x(t)}(x(t) - \bar{x}) + \\ &\quad \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial y(t)}(y(t) - \bar{y}) + \\ &\quad \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial z(t)}(z(t) - \bar{z}) + Rf_2 \\ &= -az(t)\hat{x}(t) - \hat{y}(t) \\ &\quad -ax(t)\hat{z}(t) + Rf_2 \\ f_3(\hat{x} + \bar{x}, \hat{y} + \bar{y}, \hat{z} + \bar{z}) &= \frac{\partial f_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial x(t)}(x(t) - \bar{x}) + \\ &\quad \frac{\partial f_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial y(t)}(y(t) - \bar{y}) + \\ &\quad \frac{\partial f_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial z(t)}(z(t) - \bar{z}) + Rf_3 \\ &= ay(t)\hat{x}(t) + ax(t)\hat{y}(t) \\ &\quad + Rf_3,\end{aligned}$$

karena R_{f1} , R_{f2} , dan R_{f3} nilainya mendekati nol maka dapat diabaikan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a\hat{x}(t) - a\hat{y}(t) \\ \dot{y} &= -az(t)\hat{x}(t) - \hat{y}(t) - ax(t)\hat{z}(t) \\ \dot{z} &= ay(t)\hat{x}(t) + ax(t)\hat{y}(t)\end{aligned}\quad (4.3)$$

Persamaan (4.6) dapat ditulis dalam matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -a & 0 \\ -az(t) & -1 & -ax(t) \\ ay(t) & ax(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}\quad (4.4)$$

dengan $J = \begin{bmatrix} -a & -a & 0 \\ -az(t) & -1 & -ax(t) \\ ay(t) & ax(t) & 0 \end{bmatrix}$.

4.1.3 Analisa Kestabilan dan Bifurkasi

Untuk mendapatkan analisa kestabilan harus didapatkan persamaan karakteristik terlebih dahulu. Persamaan karakteristik didapatkan dari $\det(J - \lambda I) = 0$ sehingga didapat,

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix} -a & -a & 0 \\ -az(t) & -1 & -ax(t) \\ ay(t) & ax(t) & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 0 \\ \det\left(\begin{bmatrix} -a & -a & 0 \\ -az(t) & -1 & -ax(t) \\ ay(t) & ax(t) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) &= 0 \\ \det\left(\begin{bmatrix} -a - \lambda & -a & 0 \\ -az(t) & -1 - \lambda & -ax(t) \\ ay(t) & ax(t) & -\lambda \end{bmatrix}\right) &= 0\end{aligned}\quad (4.5)$$

- Analisa disekitar titik $E_0(0,0,0)$
Pada kasus ini, titik $E(0,0,0)$ dianggap tidak ada terjadinya proses sistem keuangan ekonomi makro sehingga pada titik ini tidak dilakukan analisa.
- Analisa disekitar titik $E_1\left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a}\right)$

Analisa sifat kestabilan disekitar titik E_1 dapat dilakukan dengan mensubstitusikan titik $\left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a}\right)$ ke dalam persamaan (4.5) sehingga didapat

$$\det \begin{pmatrix} -a - \lambda & -a & 0 \\ -a \left(\frac{1}{a}\right) & -1 - \lambda & -a \left(\frac{\sqrt{ab}}{a}\right) \\ a \left(-\frac{\sqrt{ab}}{a}\right) & a \left(\frac{\sqrt{ab}}{a}\right) & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -a - \lambda & -a & 0 \\ -1 & -1 - \lambda & -\sqrt{ab} \\ -\sqrt{ab} & \sqrt{ba} & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (-a - \lambda)[(-1 - \lambda)(-\lambda) - (\sqrt{ab})(-\sqrt{ab})] - \\ &(-a)[(-1)(-\lambda) - (-\sqrt{ab})(-\sqrt{ab})] + 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow (-a - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + ab) + a\lambda - a^2b = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^3 + (a + 1)\lambda^2 + ab\lambda + 2a^2b = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Selanjutnya, persamaan (4.6) dapat ditulis sebagai polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

dengan

$$a_1 = a + 1$$

$$a_2 = ab$$

$$a_3 = 2a^2b.$$

Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.1 didapatkan matriks M_k dengan $k = 1, 2, 3$ sebagai berikut:

$$M_1 = [a + 1]$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} a + 1 & 2a^2b \\ 1 & ab \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} a + 1 & 2a^2b & 0 \\ 1 & ab & 0 \\ 0 & a + 1 & 2a^2b \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Teorema 2.1, sistem mempunyai sifat stabil jika dan hanya jika determinan dari $M_1, M_2,$ dan M_3 adalah positif, sehingga akan dicari masing-masing determinan dari matriks $M_1, M_2,$ dan M_3 .

Determinan \mathbf{M}_1 didapat,

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}_1| &= |a + 1| \\ &= a + 1, \end{aligned}$$

karena berdasarkan Teorema 2.1 sistem akan bersifat stabil jika dan hanya jika determinan matriks \mathbf{M}_1 positif, sehingga determinan \mathbf{M}_1 harus memenuhi

$$a + 1 > 0. \quad (4.7)$$

Selanjutnya untuk determinan \mathbf{M}_2 didapat,

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}_2| &= \begin{vmatrix} a + 1 & 2a^2b \\ 1 & ab \end{vmatrix} \\ &= (a + 1)(ab) - 2a^2b \\ &= ab(a + 1 - 2a) \\ &= ab(1 - a), \end{aligned}$$

karena berdasarkan Teorema 2.1 sistem akan bersifat stabil jika dan hanya jika determinan matriks \mathbf{M}_2 positif, sehingga determinan \mathbf{M}_2 harus memenuhi

$$ab(1 - a) > 0. \quad (4.8)$$

Untuk determinan \mathbf{M}_3 didapat,

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}_3| &= \begin{vmatrix} a + 1 & 2a^2b & 0 \\ 1 & ab & 0 \\ 0 & a + 1 & 2a^2b \end{vmatrix} \\ &= [(a + 1)(ab)(2a^2b) - 0] \\ &\quad - [(2a^2b)(2a^2b) - 0] + 0 \\ &= (a + 1)(2a^3b^2) - 4a^4b^2 \\ &= 2a^4b^2 + 2a^3b^2 - 4a^4b^2 \\ &= 2a^3b^2 - 2a^4b^2 \\ &= 2a^3b^2(1 - a), \end{aligned}$$

karena berdasarkan Teorema 2.1 sistem akan bersifat stabil jika dan hanya jika determinan matriks \mathbf{M}_3 positif, sehingga determinan \mathbf{M}_3 harus memenuhi

$$2a^3b^2(1 - a) > 0. \quad (4.9)$$

Berdasarkan Teorema 2.1 dan persamaan (4.7) sistem akan stabil jika dan hanya jika determinan dari matriks \mathbf{M}_1 adalah positif, sehingga $a > -1$ agar memenuhi syarat

tersebut. Selanjutnya, berdasarkan persamaan (4.8) dan persamaan (4.9), serta Teorema 2.1, jika $a > 1$, maka sistem keuangan mempunyai sifat tidak stabil karena determinan matriks M_2 dan M_3 kurang dari 0. Jika $a < 1$ berdasarkan Teorema 2.1 maka sistem keuangan mempunyai sifat stabil karena determinan matriks M_2 dan M_3 lebih dari 0. Namun, jika $a = 1$ sistem keuangan mempunyai sifat stabil dengan nilai akar bagian real negatif namun memiliki bagian imajiner sehingga bifurkasi mungkin muncul.

Selanjutnya, untuk menganalisa terjadinya bifurkasi Hopf pada saat $a = 1$ dapat dilakukan dengan kriteria Liu yang telah dijelaskan pada subbab 2.8.1. Menurut kriteria Liu, ada sebuah parameter yang terkait pada model tanpa waktu tunda, dalam hal ini adalah parameter a yang mewakili total tabungan di bank. Jika a^* merupakan nilai parameter saat terjadi bifurkasi Hopf di sekitar titik tetap $E\left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a}\right)$, maka dengan kondisi $a = a^*$.

Selanjutnya, persamaan (4.6) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$p(\lambda) = p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0$$

dengan

$$\begin{aligned} p_3 &= 1 \\ p_2 &= a + 1 \\ p_1 &= ab \\ p_0 &= 2a^2b. \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Liu syarat perlu dan cukup terjadinya bifurkasi Hopf yaitu

1. $p_0 > 0$
 $2a^2b > 0$

$$\begin{aligned} p_1 &> 0 \\ ab &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1p_2 - p_0 &= 0 \\ ab(a + 1) - 2a^2b &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & \frac{d}{da}(p_1 p_2 - p_0) \neq 0 \\
& \frac{d}{da}(ab - a^2 b) \neq 0 \\
& b - 2ab \neq 0.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, titik $E_1 \left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a} \right)$ mengalami bifurkasi Hopf pada $a = a^*$ dimana $a^* = 1$, stabil ketika $a < 1$, dan tidak stabil jika $a > 1$.

- Pada titik $E_2 \left(-\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a} \right)$

Analisa sifat kestabilan disekitar titik E_1 dapat dilakukan dengan mensubsitusikan titik $\left(-\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a} \right)$ ke dalam persamaan (4.5) sehingga didapat

$$\det \begin{pmatrix} -a - \lambda & -a & 0 \\ -a \left(\frac{1}{a} \right) & -1 - \lambda & -a \left(-\frac{\sqrt{ab}}{a} \right) \\ a \left(\frac{\sqrt{ab}}{a} \right) & a \left(-\frac{\sqrt{ab}}{a} \right) & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -a - \lambda & -a & 0 \\ -1 & -1 - \lambda & \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} & -\sqrt{ab} & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow (-a - \lambda)[(-1 - \lambda)(-\lambda) - (\sqrt{ab})(-\sqrt{ab})] - \\
& (-a)[(-1)(-\lambda) - (-\sqrt{ab})(-\sqrt{ab})] + 0 = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (-a - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + ab) + a\lambda - a^2 b = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + (a + 1)\lambda^2 + ab\lambda + 2a^2 b = 0, \quad (4.10)$$

karena persamaan (4.10) sama dengan (4.6) maka analisa

kestabilan pada titik $E_2 \left(-\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a} \right)$ dianggap sama dengan

titik $E_1 \left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a} \right)$.

4.2 Analisa Model Matematika Sistem Keuangan dengan Waktu Tunda ($\tau > 0$)

Pada sub bab 4.1 telah dianalisa model matematika sistem keuangan tanpa waktu tunda. Selanjutnya pada sub bab 4.2 akan dianalisa model sistem keuangan dengan waktu tunda yang mencakup penentuan titik setimbang model sistem keuangan, linearisasi model sistem keuangan, penentuan kestabilan model sistem keuangan, analisa bifurkasi sistem keuangan, dan penyelesaian numerik yang disimulasikan dengan MATLAB. Model sistem keuangan dengan waktu tunda telah dijelaskan pada subab 2.2 dan persamaan (2.2) dapat ditulis kembali sebagai berikut[7]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -a(x(t) + y(t)) + K[x(t) - x(t - y)] \\ \dot{y}(t) &= -y(t) - ax(t)z(t) \\ \dot{z}(t) &= b + ax(t)y(t)\end{aligned}\quad (4.2)$$

4.2.1 Titik Setimbang

Sistem persamaan diferensial dengan waktu tunda yaitu suatu persamaan diferensial yang memuat ketergantungan dari waktu sebelum dan waktu sekarang, karena waktu tunda tidak mempengaruhi titik setimbang, maka untuk peroleh titik setimbang dipertimbangkan kasus yang sama dengan tanpa waktu tunda, sehingga titik setimbang dianggap sama.

4.2.2 Linearisasi Sistem

Persamaan (4.11) akan dilinearisasikan dengan menggunakan pendekatan Deret Taylor disekitar titik setimbang. Pada persamaan (4.8) dimisalkan :

$$\begin{aligned}f_1(x(t), y(t), z(t), x(t - \tau)) &= -a(x(t) + y(t)) \\ &\quad + Kx(t) - Kx(t - \tau) \\ f_2(x(t), y(t), z(t)) &= -y(t) + ax(t)z(t) \\ f_3(x(t), y(t), z(t)) &= b + ax(t)y(t)\end{aligned}$$

Analisis dilakukan dengan melakukan pendekatan linear sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} x(t) - \bar{x} \\ y(t) - \bar{y} \\ z(t) - \bar{z} \end{pmatrix} + J_2 \begin{pmatrix} x(t - \tau) - \bar{x} \\ y(t - \tau) - \bar{y} \\ z(t - \tau) - \bar{z} \end{pmatrix}$$

dengan J_1 dan J_2 adalah matriks Jacobi yang didefinisikan sebagai berikut

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x(t-\tau)} & \frac{\partial f_1}{\partial y(t-\tau)} & \frac{\partial f_1}{\partial z(t-\tau)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x(t-\tau)} & \frac{\partial f_2}{\partial y(t-\tau)} & \frac{\partial f_2}{\partial z(t-\tau)} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x(t-\tau)} & \frac{\partial f_3}{\partial y(t-\tau)} & \frac{\partial f_3}{\partial z(t-\tau)} \end{pmatrix}$$

sehingga didapat,

$$J_1 = \begin{pmatrix} -a + K & -a & 0 \\ -az(t) & -1 & -ax(t) \\ ay(t) & ax(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dapat diperoleh dengan menyelesaikan $\det(\lambda I - J_1 - J_2 e^{-\lambda\tau}) = 0$

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a + K & -a & 0 \\ -az(t) & -1 & -x(t) \\ ay(t) & ax(t) & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -Ke^{-\lambda\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + a - K + Ke^{-\lambda\tau} & a & 0 \\ az(t) & \lambda + 1 & ax(t) \\ ay(t) & -ax(t) & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\lambda + a - K + Ke^{-\lambda\tau}) \left[(\lambda + 1)(\lambda) - ((ax(t))(ax(t))) \right] \\
&\quad - a \left[(az(t))(\lambda) - ((ax(t))(ay(t))) \right] + 0 \\
&\quad = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 + a^2(x(t))^2\lambda + a\lambda^2 + a\lambda + a^3(x(t))^2 - K\lambda^2 - \\
&K\lambda - Ka^2(x(t))^2 + Ke^{-\lambda\tau}\lambda^2 + Ke^{-\lambda\tau}\lambda + \\
&Ke^{-\lambda\tau}a^2(x(t))^2 - a^2z(t)\lambda - a^3x(t)y(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2(1 + a - K + Ke^{\lambda\tau}) + \lambda \left(a^2(x(t))^2 + a - K + \right. \\
&Ke^{-\lambda\tau} - a^2z(t) \left. \right) + a^3(x(t))^2 - Ka^2(x(t))^2 + \\
&Ke^{-\lambda\tau}a^2(x(t))^2 - a^3x(t)y(t) = 0
\end{aligned}$$

4.2.3 Analisa Kestabilan dan Bifurkasi

Pada subbab 4.2.2 telah dilakukan linearisasi dengan pendekatan linear, selanjutnya akan dilakukan analisa kestabilan didekat titik setimbang yang telah didapat pada subbab 4.2.2. Telah didapatkan persamaan karakteristik dari persamaan (4.11), yaitu

$$\begin{aligned}
&\lambda^3 + \lambda^2(1 + a - K + Ke^{\lambda\tau}) + \lambda \left(a^2(x(t))^2 + a - K + \right. \\
&Ke^{-\lambda\tau} - a^2z(t) \left. \right) + a^3(x(t))^2 - Ka^2(x(t))^2 + \\
&Ke^{-\lambda\tau}a^2(x(t))^2 - a^3x(t)y(t) = 0 \tag{4.12}
\end{aligned}$$

- Analisa disekitar titik $E_0 = (0,0,0)$

Pada kasus ini, titik $E(0,0,0)$ dianggap tidak akan terjadinya proses sistem keuangan ekonomi makro sehingga pada titik ini tidak dilakukan analisa.

- Analisa disekitar titik $E_1 \left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a} \right)$

Dengan mensubsitusikan titik $\left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a} \right)$ ke dalam persamaan (4.12) sehingga didapat

$$\begin{aligned}
& \lambda^3 + \lambda^2(1 + a - K + Ke^{\lambda\tau}) + \lambda \left(a^2 \left(\frac{\sqrt{ab}}{a} \right)^2 + a - K + \right. \\
& \left. Ke^{-\lambda\tau} - a^2 \left(\frac{1}{a} \right) \right) + a^3 \left(\frac{\sqrt{ab}}{a} \right)^2 - Ka^2 \left(\frac{\sqrt{ab}}{a} \right)^2 + \\
& Ke^{-\lambda\tau} a^2 \left(\frac{\sqrt{ab}}{a} \right)^2 - a^3 \left(\frac{\sqrt{ab}}{a} \right) \left(-\frac{\sqrt{ab}}{a} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2(1 + a - K + Ke^{-\lambda\tau}) + \lambda(ab + a - K + \\
& Ke^{-\lambda\tau} - a) + a^2b - Kab + Ke^{-\lambda\tau}ab + a^2b = 0 \\
& \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2(1 + a - K) + \lambda(ab - K) - Kab + 2a^2b + \\
& Ke^{-\lambda\tau}(\lambda^2 + \lambda + ab) = 0 \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Asumsikan persamaan karakteristik (4.13) memiliki solusi imajiner murni berbentuk $\lambda = i\omega$. Dengan mempertimbangkan adanya bifurkasi Hopf disekitar titik tetap $E \left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a} \right)$ dengan $\omega > 0, \omega \in \mathbb{R}$ dalam melakukan adanya analisis bifurkasi Hopf.

Dari persamaan (4.13) dimisalkan bahwa

$$\Delta(\lambda, \tau) = P_1(\lambda, \tau) + P_2(\lambda, \tau)e^{-\lambda\tau} = 0$$

dimana

$$P_1(\lambda, \tau) = \lambda^3 + \lambda^2(1 + a - K) + \lambda(ab - K) - Kab + 2a^2b \tag{4.14}$$

dan

$$P_2(\lambda, \tau)e^{-\lambda\tau} = Ke^{-\lambda\tau}(\lambda^2 + \lambda + ab) \tag{4.15}$$

Selanjutnya dimisalkan bahwa $\lambda = i\omega$, sehingga jika disubsitusikan ke dalam persamaan (4.14) dan (4.15) didapat

$$\begin{aligned}
P_1(i\omega, \tau) &= (i\omega)^3 + (i\omega)^2(1 + a - K) + [(i\omega) \\
& (ab - K)] - Kab + 2a^2b \\
&= -i\omega^3 - \omega^2(1 + a - K) + i\omega ab - i\omega K - Kab + 2a^2b \\
P_2(i\omega, \tau)e^{-\lambda\tau} &= K((i\omega)^2 + i\omega + ab)e^{-(i\omega\tau)} \\
&= K(-\omega^2 + i\omega + ab)(\cos(\omega\tau) + \\
& i \sin(\omega\tau)) \\
&= K(-\omega^2 \cos(\omega\tau) - i\omega^2 \sin(\omega\tau) + i\omega \cos(\omega\tau) - \\
& \omega \sin(\omega\tau) + abc\cos(\omega\tau) + iabsin(\omega\tau))
\end{aligned}$$

$$= K(-\omega^2 \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau) + abc\cos(\omega\tau) + iabsin(\omega\tau) - i\omega^2 \sin(\omega\tau) + i\omega\cos(\omega\tau))$$

Agar mempermudah perhitungan maka akan dipisah antara konstanta bilangan real dengan konstanta bilangan imajiner.

- Konstanta bilangan real

$$-\omega^2(1 + a - K) - Kab + 2a^2b + K(-\omega^2 \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau) + abc\cos(\omega\tau)) = 0 \quad (4.14)$$

- Konstanta bilangan imajiner

$$-\omega^3 + \omega(ab - K) + K(-\omega^2 \sin(\omega\tau) + \omega \cos(\omega\tau) + absin(\omega\tau)) = 0 \quad (4.15)$$

Selanjutnya persamaan (4.14) dan (4.15) dikuadratkan dan kemudian dijumlah.

Persamaan (4.14) dikuadratkan menjadi

$$[\omega^2(1 + a - K) + Kab - 2a^2b]^2 = [K(-\omega^2 \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau) + abc\cos(\omega\tau))]^2$$

$$\Leftrightarrow \omega^4(1 + 2a - 2K + a^2 - 2aK + K^2) + \omega^2(-4a^2b + 2Kab - 4a^3b + 6Ka^2b - 2K^2ab) + 4a^4b^2 - 4Ka^3b^2 + K^2a^2b^2 = K^2(a^2b^2 \cos^2(\omega\tau) - 2ab\omega^2 \cos^2(\omega\tau) + \omega^4 \cos^2(\omega\tau) - 2ab\omega \sin(\omega\tau) \cos(\omega\tau) + 2\omega^3 \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau) + \omega^2 \sin^2(\omega\tau)) \quad (4.16)$$

Persamaan (4.15) dikuadratkan menjadi

$$(\omega^3 - ab\omega + K\omega)^2 = [K(-\omega^2 \sin(\omega\tau) + \omega \cos(\omega\tau) + absin(\omega\tau))]^2$$

$$\Leftrightarrow \omega^6 + \omega^4(-2ab + 2K) + \omega^2(a^2b^2 - 2Kab + K^2) = K^2(a^2b^2 \sin^2(\omega\tau) - 2ab\omega^2 \sin^2(\omega\tau) + \omega^4 \sin^2(\omega\tau) + 2ab\omega \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau) - 2\omega^3 \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau) + \omega^2 \cos^2(\omega\tau)) \quad (4.17)$$

Persamaan (4.17) dijumlah dengan (4.16) didapat

$$\omega^6 + \omega^4(K^2 - 2Ka + a^2 - 2ab + 2a + 1) + \omega^2(-2K^2ab + 6Ka^2b - 4a^3b + a^2b^2 - 4a^2b + K^2) +$$

$$4a^4b^2 - 4Ka^3b^2 + K^2a^2b^2 = K^2(a^2b^2 \cos^2(\omega\tau) + a^2b^2 \sin^2(\omega\tau) - 2ab\omega^2 \cos^2(\omega\tau) - 2ab\omega^2 \sin^2(\omega\tau) + \omega^4 \cos^2(\omega\tau) + \omega^4 \sin^2(\omega\tau) + \omega^2 \cos^2(\omega\tau) + \omega^2 \sin^2(\omega\tau))$$

$$\begin{aligned} &\omega^6 + \omega^4(K^2 - 2Ka + a^2 - 2ab + 2a + 1) + \\ &\omega^2(-2K^2ab + 6Ka^2b - 4a^3b + a^2b^2 - 4a^2b + K^2) + \\ &4a^4b^2 - 4Ka^3b^2 + K^2a^2b^2 = K^2(a^2b^2(\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)) - 2ab\omega^2(\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)) + \\ &\omega^4(\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)) + \omega^2(\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau))) \end{aligned}$$

$$\omega^6 + \omega^4(1 + 2a - 2ab + a^2 - 2Ka) + \omega^2(a^2b^2 + 6Ka^2b - 4a^3b - 4a^2b) + 4a^4b^2 - 4Ka^3b^2 = 0 \quad (4.18)$$

Untuk mengetahui kestabilan dari sistem keuangan dengan waktu tunda disekitar titik $E_1 \left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a} \right)$ nilai eigen perlu dicari dengan mengetahui akar-akar dari persamaan (4.18) yaitu, dengan memisalkan $\omega^2 = s$ sehingga didapat

$$h(s) = s + ps^2 + qs + r = 0 \quad (4.19)$$

dengan

$$p = 1 + 2a - 2ab + a^2 - 2Ka$$

$$q = a^2b^2 + 6Ka^2b - 4a^3b - 4a^2b$$

dan

$$r = 4a^4b^2 - 4Ka^3b^2.$$

Kestabilan sistem dapat menggunakan Lemma 2.1

Misalkan persamaan (4.19) memiliki akar-akar positif yang dilambangkan dengan s_1, s_2 , dan s_3 . Persamaan (4.18) memiliki akar positif yaitu

$$\omega_1 = \sqrt{s_1}, \omega_2 = \sqrt{s_2} \text{ dan } \omega_3 = \sqrt{s_3}.$$

Selanjutnya, akan dicari nilai waktu tunda kritis, dari persamaan (4.14) didapat

$$\sin(\omega\tau) = \frac{\omega(K\cos(\omega\tau)+ab-\omega^2-K)}{K(ab-\omega^2)},$$

dan disubstitusikan ke persamaan (4.15) sehingga didapat

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cos(\omega\tau) &= \frac{\omega^4(K-a)+\omega^2(K-2Kab+3a^2b)+Ka^2b^2-2a^3b^2}{K(\omega^4+\omega^2-2ab\omega^2+a^2b^2)} \\ \Leftrightarrow \omega\tau &= \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{\omega^4(K-a)+\omega^2(K-2Kab+3a^2b)+Ka^2b^2-2a^3b^2}{K(\omega^4+\omega^2-2ab\omega^2+a^2b^2)}\right) \\ \tau_n &= \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{\omega^4(K-a)+\omega^2(K-2Kab+3a^2b)+Ka^2b^2-2a^3b^2}{K(\omega^4+\omega^2-2ab\omega^2+a^2b^2)}\right) + \\ &\frac{2n\pi}{\omega} \text{ dengan } n = 0,1,2, \dots \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pada persamaan (4.20) terdapat bahwa n tak hingga nilai waktu tunda τ_n yang memenuhi persamaan (4.11). maka dipilih nilai minimum dengan mengambil nilai $n = 0$ dari τ_n agar efektif. Nilai τ_n inilah yang disebut sebagai nilai kritis tundaan. Analisis selanjutnya, dilakukan untuk diuji apakah nilai waktu tunda tersebut memenuhi kondisi transversalitas sebagai berikut

$$Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \neq 0.$$

Berdasarkan Lemma 2.2 kondisi transversalitas terpenuhi jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} R_1(\omega^*)R_1'(\omega^*) + Q_1(\omega^*)Q_1'(\omega^*) &\neq R_2(\omega^*)R_2'(\omega^*) \\ &+ Q_2(\omega^*) + Q_2'(\omega^*). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Misalkan $\lambda = i\omega$ sebagai akar persamaan (4.11). dari persamaan (4.14) dan (4.15) diperoleh

$$\begin{aligned} R_1(\omega) &= \omega^2(1+a-K) - Kab + 2a^2b \\ R_2(\omega) &= Kab - K\omega^2 \\ Q_1(\omega) &= -\omega^3 + \omega(ab-K) \\ Q_2(\omega) &= \omega \end{aligned} \quad (2.22)$$

persamaan (2.22) diturunkan terhadap ω sehingga didapat

$$\begin{aligned} R_1'(\omega) &= 2\omega(1+a-K) \\ R_2'(\omega) &= -2\omega K \\ Q_1'(\omega) &= -3\omega^2 + ab - K \\ Q_2'(\omega) &= 1 \end{aligned}$$

dan didapat

$$R_1(\omega^*)R_1'(\omega^*) + Q_1(\omega^*)Q_1'(\omega^*) = 3\omega^5 + \omega^3(2K^2 - 4Ka + 2a^2 - 4ab + 4a + 2) + \omega(2K^2ab - 6Ka^2b + 4a^3b + a^2b^2 - 4Kab + 4a^2b_K^2)$$

$$R_2(\omega^*)R_2'(\omega^*) + Q_2(\omega^*) + Q_2'(\omega^*) = 2K^2\omega^3 + \omega(1 - 2K^2ab)$$

sehingga syarat

$$R_1(\omega^*)R_1'(\omega^*) + Q_1(\omega^*)Q_1'(\omega^*) \neq R_2(\omega^*)R_2'(\omega^*) + Q_2(\omega^*) + Q_2'(\omega^*)$$

terpenuhi dan menunjukkan bahwa syarat transversal terpenuhi, sehingga terbukti bahwa pada sistem keuangan dengan waktu tunda disekitar titik $E_1(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a})$ terjadi bifurkasi Hopf pada saat $\tau = \tau_n$. Jika pada suatu model sistem tersebut terjadi bifurkasi maka itu artinya pada model sistem tersebut juga terjadi isolasi terus-menerus, namun tidak demikian untuk sebaliknya.

4.3 Simulasi Numerik

Pada subbab ini, dibahas bagaimana cara untuk memperoleh solusi numerik dari model sistem keuangan dan simulasi numeriknya. Hal ini bertujuan untuk memudahkan dalam menganalisis model, serta interpretasi dari hasil analisis yang sudah dilakukan. Penyelesaian numerik yang digunakan adalah metode Runge-Kutta orde-4. Metode Runge-Kutta mencapai keakuratan dari suatu pendekatan Taylor. Metode ini mempunyai suatu galat pemototngan h^3 dengan h merupakan langkah waktu (*step size*).

4.3.1 Simulasi tanpa waktu tunda

Perhatikan kembali sistem (4.1). misalkan

$$\begin{aligned} f_1(t, x, y, z) &= \dot{x} = -a(x(t) + y(t)) \\ f_2(t, x, y, z) &= \dot{y} = -y(t) - ax(t)z(t) \\ f_3(t, x, y, z) &= \dot{z} = b + ax(t)y(t) \end{aligned}$$

Dan nilai awal

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

$$z(t_0) = z_0$$

maka diperoleh integrasi numerik dengan metode numerik Runge-Kutta orde-4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x}) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y}) \\z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6}(k_{1,z} + 2k_{2,z} + 2k_{3,z} + k_{4,z})\end{aligned}$$

Dengan

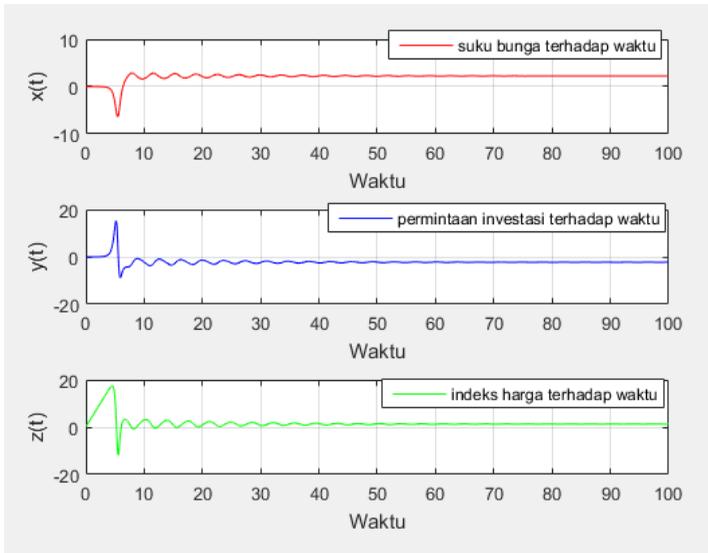
$$\begin{aligned}k_{1,x} &= hf_1(t, x, y, z) = h(-ax_n - ay_n) \\k_{2,x} &= hf_1(t, x, y, z) = h\left(-a\left(x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right) - a\left(y_n + \frac{k_{1,y}}{2}\right)\right) \\k_{3,x} &= hf_1(t, x, y, z) = h\left(-a\left(x_n + \frac{k_{2,x}}{2}\right) - a\left(y_n + \frac{k_{2,y}}{2}\right)\right) \\k_{4,x} &= hf_1(t, x, y, z) = h\left(-a(x_n + k_{3,x}) - a(y_n + k_{3,y})\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{1,y} &= hf_2(t, x, y, z) = h(-y_n - ax_n z_n) \\k_{2,y} &= hf_2(t, x, y, z) = h\left(-y_n - a\left(x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right)\left(z_n + \frac{k_{1,z}}{2}\right)\right) \\k_{3,y} &= hf_2(t, x, y, z) = h\left(-y_n - a\left(x_n + \frac{k_{2,x}}{2}\right)\left(z_n + \frac{k_{2,z}}{2}\right)\right) \\k_{4,y} &= hf_2(t, x, y, z) = h\left(-y_n - a(x_n + k_{3,x})(z_n + k_{3,z})\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{1,z} &= hf_3(t, x, y, z) = h(b + ax_n y_n) \\k_{2,z} &= hf_3(t, x, y, z) = h\left(\left(b + a\left(x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right)\right)\left(y_n + \frac{k_{1,y}}{2}\right)\right) \\k_{3,z} &= hf_3(t, x, y, z) = h\left(\left(b + a\left(x_n + \frac{k_{2,x}}{2}\right)\right)\left(y_n + \frac{k_{2,y}}{2}\right)\right) \\k_{4,z} &= hf_3(t, x, y, z) = h\left(b + a(x_n + k_{3,x})(y_n + k_{3,y})\right).\end{aligned}$$

Simulasi sistem dilakukan untuk menganalisis kestabilan yang diperoleh dan menggunakan parameter $a = 0.79$ dan $b = 4$.

Pada sistem tanpa waktu tunda titik setimbang yang diperoleh berdasarkan nilai parameter adalah $E = \left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a}\right) = (2.250175801, -2.250175801, 1.265822785)$. Nilai parameter memenuhi syarat kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Parameter a merupakan parameter yang menggambarkan total tabungan di bank. Dilakukan pengamatan untuk nilai $a = 0.79$ dan $a =$



Gambar 4. 1 Grafik Kestabilan (x, y, z) terhadap fungsi t (waktu) pada saat untuk $a = 0.79$

1.79.

Laju Perubahan Suku Bunga (x)

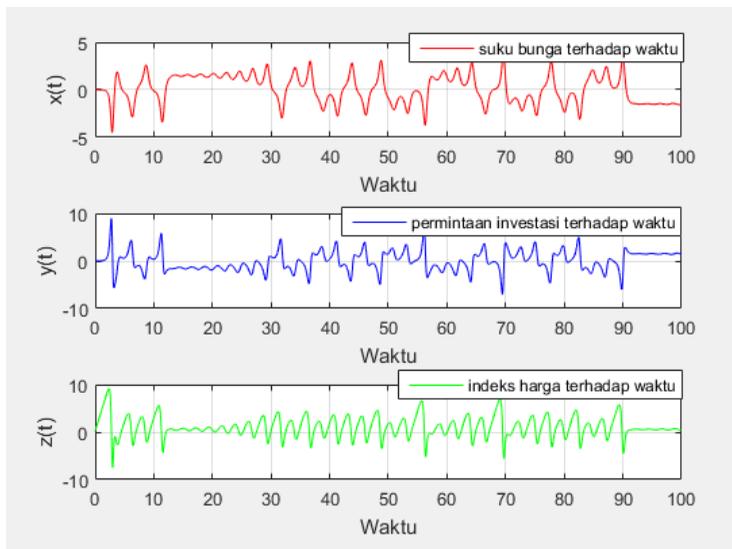
Berdasarkan Gambar 4.1, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk tingkat suku bunga dengan nilai awal sebesar 0.5 berisolasi bergerak naik dan turun kemudian bergerak didekat titik $-$ dan konstan di titik 0 seiring dengan bertambahnya waktu.

Laju Perubahan Tingkat Permintaan Investasi (y)

Berdasarkan Gambar 4.1, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk tingkat permintaan investasi dengan nilai awal sebesar 0.5 bergerak naik turun dan naik dan mendekati titik 0 kemudian konstan seiring dengan bertambahnya waktu.

Laju Perubahan Indeks Harga Keuangan (z)

Berdasarkan Gambar 4.1, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk harga instrumen keuangan dengan nilai awal sebesar 0.2 bergerak naik dan setelah itu berisolasi mendekati titik 0 kemudian konstan mendekati titik 0 seiring dengan bertambahnya waktu.



Gambar 4. 2 Grafik Kestabilan dengan $a = 1.79$

Laju Perubahan Suku Bunga (x)

Berdasarkan Gambar 4.2, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk tingkat suku bunga dengan nilai awal sebesar 0.5 bergerak naik dan turun secara terus menerus tidak menuju ke suatu titik tertentu.

Laju Perubahan Tingkat Permintaan Investasi (y)

Berdasarkan Gambar 4.2, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk tingkat permintaan investasi dengan nilai awal sebesar 0.5 bergerak naik dan turun secara terus menerus tidak menuju ke suatu titik tertentu.

Laju Perubahan Indeks Harga Keuangan (z)

Berdasarkan Gambar 4.2, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk indeks harga keuangan dengan nilai awal sebesar 0.2 berisolasi terus menerus sehingga tidak menuju ke suatu titik tertentu.

4.3.2 Simulasi dengan waktu tunda

Perhatikan kembali sistem (4.2). misalkan

$$f_1(t, x, y, z) = \dot{x} = -a(x(t) + y(t)) - Kx(t) - Kx(t - \tau)$$

$$f_2(t, x, y, z) = \dot{y} = -y(t) - ax(t)z(t)$$

$$f_3(t, x, y, z) = \dot{z} = b + ax(t)y(t)$$

Dan nilai awal

$$x(t_0) = x_0$$

$$y(t_0) = y_0$$

$$z(t_0) = z_0$$

maka diperoleh integrasi numerik dengan metode numerik Runge-Kutta orde-4 sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y})$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(k_{1,z} + 2k_{2,z} + 2k_{3,z} + k_{4,z})$$

dengan

$$k_{1,x} = hf_1(t, x, y, z) = h(-ax_n - ay_n + Kx_n - Kx_{n-\tau})$$

$$k_{2,x} = hf_1\left(t, x, y, z\right) = h\left(-a\left(x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right) - a\left(y_n + \frac{k_{1,y}}{2}\right) + Kx_n + \frac{k_{1,x}}{2} - Kx_{n-\tau} + \frac{k_{1,x}}{2}\right)$$

$$k_{3,x} = hf_1(t, x, y, z) = h\left(-a\left(x_n + \frac{k_{2,x}}{2}\right) - a\left(y_n + \frac{k_{2,y}}{2}\right) + Kx_n + \frac{k_{2,x}}{2} - Kx_{n-\tau} + \frac{k_{2,x}}{2}\right)$$

$$k_{4,x} = hf_1(t, x, y, z) = h\left(-a(x_n + k_{3,x}) - a(y_n + k_{3,y}) + K(x_n + k_{3,x} - K(x_{n-\tau} + k_{3,x}))\right)$$

$$k_{1,y} = hf_2(t, x, y, z) = h(-y_n - ax_n z_n)$$

$$k_{2,y} = hf_2(t, x, y, z) = h\left(-y_n - a\left(x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right)\left(z_n + \frac{k_{1,z}}{2}\right)\right)$$

$$k_{3,y} = hf_2(t, x, y, z) = h\left(-y_n - a\left(x_n + \frac{k_{2,x}}{2}\right)\left(z_n + \frac{k_{2,z}}{2}\right)\right)$$

$$k_{4,y} = hf_2(t, x, y, z) = h\left((-y_n - a(x_n + k_{3,x})(z_n + k_{3,z}))\right)$$

$$k_{1,z} = hf_3(t, x, y, z) = h(b + ax_n y_n)$$

$$k_{2,z} = hf_3(t, x, y, z) = h\left(\left(b + a\left(x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right)\right)\left(y_n + \frac{k_{1,y}}{2}\right)\right)$$

$$k_{3,z} = hf_3(t, x, y, z) = h\left(\left(b + a\left(x_n + \frac{k_{2,x}}{2}\right)\right)\left(y_n + \frac{k_{2,y}}{2}\right)\right)$$

$$k_{4,z} = hf_3(t, x, y, z) = h\left(b + a(x_n + k_{3,x})(y_n + k_{3,y})\right).$$

Pada simulasi dengan waktu tunda akan dilakukan dengan $n = 0$ karena terdapat nilai τ yang tak hingga agar lebih efektif. Diketahui sebelumnya bahwa

$$\tau_n = \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{\omega^4(K-a) + \omega^2(K-2Kab+3a^2b) + Ka^2b^2 - 2a^3b^2}{K(\omega^4 + \omega^2 - 2ab\omega^2 + a^2b^2)}\right) + \frac{2n\pi}{\omega},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

dan

$$\omega^6 + \omega^4(1 + 2a - 2ab + a^2 - 2Ka) + \omega^2(a^2b^2 + 6Ka^2b - 4a^3b - 4a^2b) + 4a^4b^2 - 4Ka^3b^2 = 0 \quad (4.29)$$

Persamaan (4.29) merupakan persamaan kuadrat dalam ω^2 , misalkan $s = \omega^2$ sehingga didapat

$$s^3 + s^2(1 + 2a - 2ab + a^2 - 2Ka) + s(a^2b^2 + 6Ka^2b - 4a^3b - 4a^2b) + 4a^4b^2 - 4Ka^3b^2 = 0 \quad (4.30)$$

Berdasarkan Teorema 2.2, diambil nilai $a = 1.79$, $b = 4$, dan $K = -2$ lalu disubsitusikan ke persamaan (4.29) sehingga didapat

$$s^3 + 4.6241s^2 - 327.482224s + 1567.586228 = 0 \quad (4.31)$$

dan didapat akar-akar persamaan sebagai berikut:

$$s_1 = 5.910609319, \quad s_2 = 11.84874005, \quad \text{dan} \quad s_3 = -22.38344937$$

karena $s = \omega^2$ sehingga didapat

$$\omega_1 = 2.431174473$$

$$\omega_2 = 3.442199885$$

$$\omega_3 = 4.731115024i$$

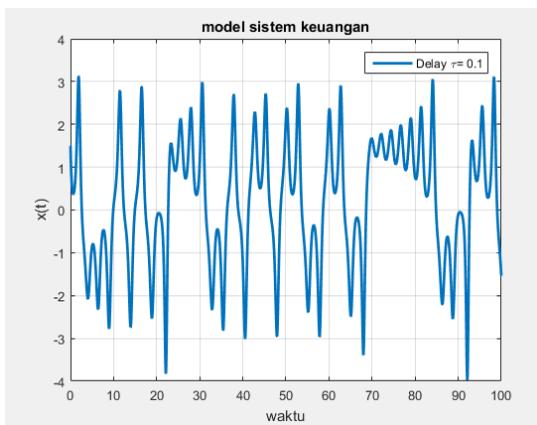
$$\omega_4 = 2.431174473i$$

$$\omega_5 = 3.442199885i$$

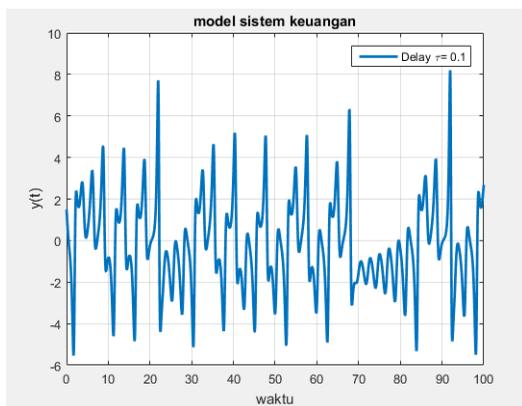
$$\omega_6 = 3.889088523.$$

Nilai ω harus memenuhi $\omega > 0$ maka akan digunakan ω_1, ω_2 , dan ω_6 untuk mendapatkan nilai τ . Substitusikan nilai ω_1, ω_2 , dan ω_6 ke persamaan (4.27) dan diambil nilai $n = 0$ sehingga didapat nilai waktu tunda kritis $\tau_n = 1.993214814$.

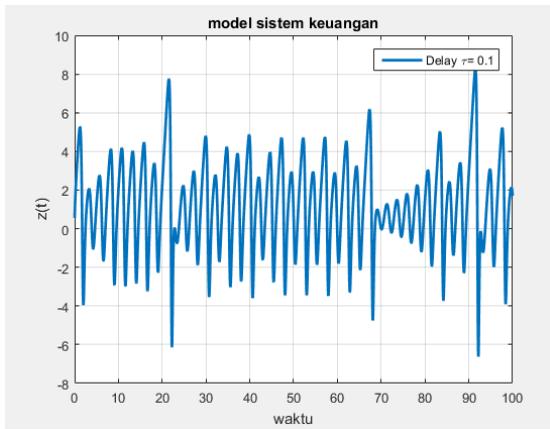
Berdasarkan Teorema 2.2, simulasi dilakukan dengan mengambil nilai waktu tunda $\tau = 0.1, \tau_n = 1.993214814$, dan $\tau = 1.5$



Gambar 4. 3 Grafik Kestabilan suku bunga dengan waktu tunda $\tau \in [0, \tau_n)$

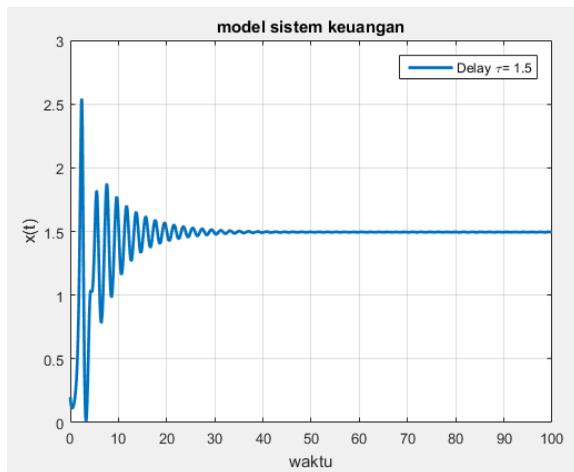


Gambar 4. 4 Grafik Kestabilan permintaan investasi dengan waktu tunda $\tau \in [0, \tau_n)$

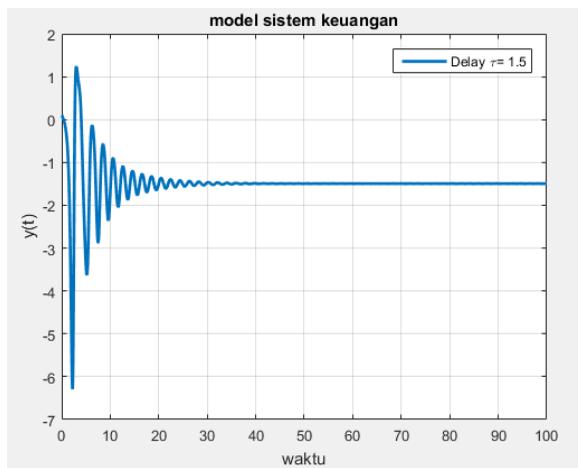


Gambar 4. 5 Grafik Kestabilan indeks harga keuangan dengan waktu tunda $\tau \in [0, \tau_n)$

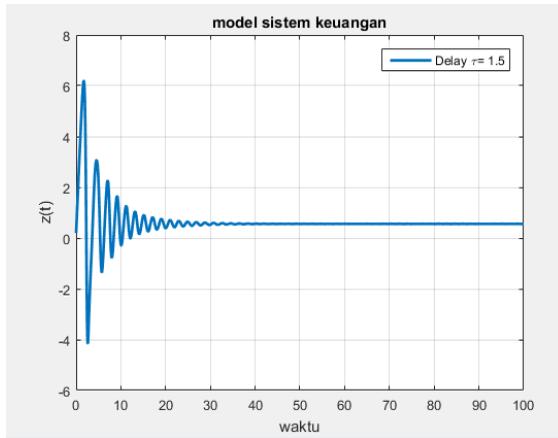
Pada Gambar 4.3 sampai Gambar 4.5 dimana total tabungan sebesar $a = 1.79$ dan waktu tunda sebesar $\tau = 0.1$ mengakibatkan tingkat suku bunga, permintaan investasi, dan indeks harga keuangan yang semula tanpa waktu tunda bersifat tidak stabil menjadi tetap stabil karena berdasarkan Teorema 2.2 sistem yang semua tidak stabil akan tetap tidak stabil ketika waktu tunda $\tau \in [0, \tau_n)$.



Gambar 4. 6 Grafik Kestabilan suku bunga dengan waktu tunda mendekati nilai waktu tunda kritis

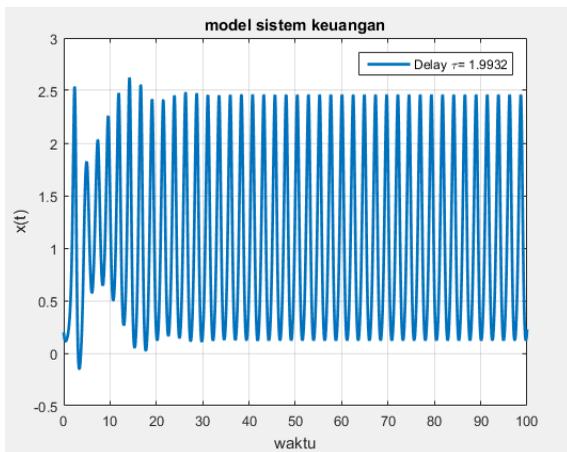


Gambar 4. 7 Grafik Kestabilan permintaan investasi dengan waktu tunda mendekati nilai waktu tunda kritis

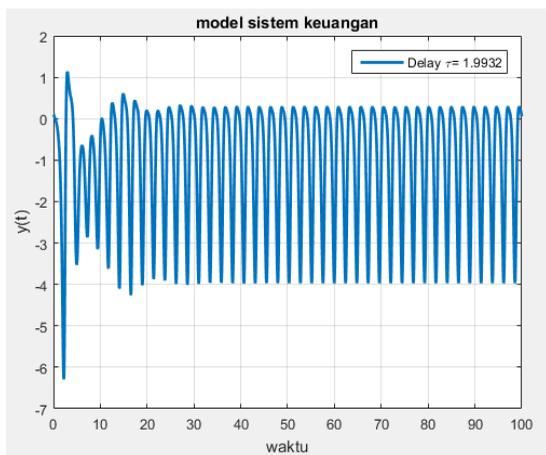


Gambar 4. 8 Grafik Kestabilan Indeks Harga Keuangan dengan waktu tunda mendekati nilai waktu tunda kritis

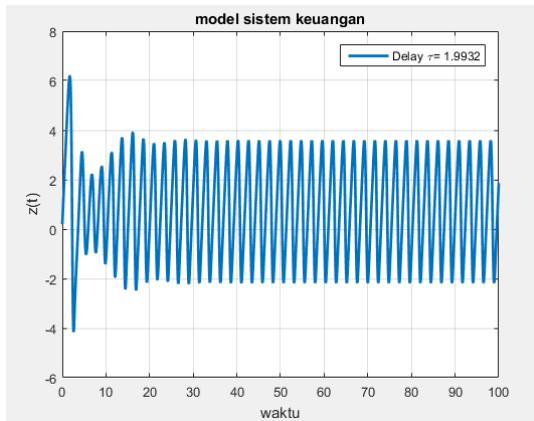
Pada Gambar 4.6 sampai Gambar 4.8 dimana total tabungan sebesar $a = 1.79$ dan waktu tunda sebesar $\tau = 1.5$ mengakibatkan tingkat suku bunga, permintaan investasi, dan indeks harga keuangan yang semula tanpa waktu tunda bersifat tidak stabil menjadi stabil karena berdasarkan Teorema 2.2 sistem yang semula tidak stabil akan menjadi stabil dengan bertambahnya nilai waktu tunda.



Gambar 4. 9 Grafik Kestabilan suku bunga dengan nilai waktu tunda $\tau = \tau_n$



Gambar 4. 10 Grafik Kestabilan permintaan investasi dengan nilai waktu tunda $\tau = \tau_n$



Gambar 4. 11 Grafik Kestabilan indeks harga keuangan dengan nilai waktu tunda $\tau = \tau_n$

Pada Gambar 4.9 sampai Gambar 4.11 dimana total tabungan sebesar $a = 1.79$ dan waktu tunda sebesar $\tau = 1.993214814$ mengakibatkan tingkat suku bunga, permintaan investasi, dan indeks harga keuangan yang semula tanpa waktu tunda bersifat tidak stabil menjadi mengalami bifurkasi dimana grafik periodik berisolasi terus menerus sepanjang waktu dan tidak menuju ke suatu titik tertentu. Berdasarkan Teorema 2.2, sistem akan mengalami bifurkasi Hopf ketika nilai waktu tunda sama dengan nilai waktu tunda kritisnya.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari analisa yang dilakukan pada sistem keuangan dengan waktu tunda diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model sistem keuangan dengan waktu tunda memiliki tiga titik kesetimbangan yaitu $E_0(0,0,0)$ dan $E_{1,2} \left(\pm \frac{\sqrt{ab}}{a}, \mp \frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a} \right)$. Kestabilan sistem pada titik setimbang $E_{2,3} = \left(\pm \frac{\sqrt{ab}}{a}, \mp \frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a} \right)$ memiliki sifat kestabilan yang sama yaitu akan bersifat stabil jika $a < 1$, tidak sabil jika $a > 1$, dan terjadi bifurkasi ketika $a = 1$ dengan $\tau = 0$. Pada sistem dengan $\tau > 0$, sistem yang semula tidak stabil akan tetap tidak stabil ketika nilai waktu tunda $\tau \in [0, \tau_n)$ namun akan mengalami perubahan kestabilan seiring dengan bertambahnya nilai waktu tunda, dan sistem mengalami bfiurkasi Hopf pada saat nilai waktu tunda sama dengan nilai waktu tunda kritis $\tau = \tau_n$, dengan waktu tunda kritis didapat $\tau_n = 1.993214814$
2. Dengan metode numerik Runge-Kutta menggunakan software MATLAB, diperoleh penyelesaian numerik dari sistem keuangan memberikan hasil yang sama dengan hasil analisis untuk kestabilan titik tetap.

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya dapat dianalisa kestabilan sistem secara global dan juga dapat diberikan suatu pengontrol sehingga waktu tunda tidak dapat memengaruhi kestabilan sistem.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] IMF, *Compilation Guide on Financial Soundness Indicators*, Washington DC: IMF, 2004.
- [2] P. S. Rose, *Bank Management and Financial Service*, 2002.
- [3] K. Pyragas, "Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback," *Physics Letters A*, pp. 421-428, 1992.
- [4] Cai. JP, "Hopf Bifurcation in the IS-LM Business Cycle Model with Time Delay," *Electronic Journal of Differential Equations*, pp. 1-6, 2005.
- [5] A. Matsumoto, "Note on Goodwin's 1951 Nonlinear Accelerator Model with an Investment Delay," *Journal of Economic Dynamics and Control*, pp. 832-842, 2009.
- [6] R. Zhang, "Bifurcation Analysis for a Kind of Nonlinear Finance System with Delayed Feedback and Its Application to Control of Chaos," *Journal of Applied Mathematics Vol. 2012*, 2012.
- [7] J. Yang, "Bifurcation Analysis and Chaos Control in a Modified Financial System with Delayed Feedback," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016.
- [8] Tu, *Dynamic System: An Introduction with Application in Economics and Biology*, Hiedelberg: Springer-Verlag, 1994.
- [9] Kuang Y., *Differential Equation with Application in Population Dynamics*, Buston (USA): Academic Press, 1993.
- [10] Perko, *Differential Equation and Dynamical System*, New York: Springer-Verlag, 2000.

- [11] S. D. Fisher, *Complex Variables Second Edition*, New York: Dover Publications, Inc., 1990.
- [12] W. Liu, "Criterion of hopf Bifurcation without Using Eigenvalues," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp. 250-256, 1994.
- [13] N. P. Forde J, "Application of Sturm Sequences to Bifurcation Analysis of Delay Differential Equation Models," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp. 273-284, 2003.
- [14] R. Murnir, *Metode Numerik Sebagai Algoritma Komputasi*, Bandung, 2003.

LAMPIRAN A

SCRIPT TANPA WAKTU TUNDA

```
[T1,Y1] = ode45(@(t,y) TA_Mira(t, y, 0.79, 4), [0 10], [0  
1.97 -0.5]);  
  
plot(T1,Y1(:,1),'r', T1,Y1(:,2),'b', T1,Y1(:,3),'g');  
legend('x terhadap t','y terhadap t','z terhadap t');  
grid on;  
xlabel('Waktu');  
ylabel('Rate');  
  
function dydt = TA_Mira_k4(t,y,a,b)  
  
    dydt = zeros(3,1);  
    dydt(1) = -a*y(1)-a*y(2);  
    dydt(2) = -y(2)-a*y(1)*y(3);  
    dydt(3) = b+a*y(1)*y(2);  
  
end
```


LAMPIRAN B

SCRIPT DENGAN WAKTU TUNDA

```
function dYdt=cobadelayy(t,Y,Z)
tau=0.2;
a = 0.79;
b = 4;
k=-1;
y1=Y(1);
y2=Y(2);
y3=Y(3);

y1_tau=Z(1,1);

dy1dt= -a*y1-a*y2+k*y1-k*y1_tau; %x(t)=y(1), y(t)=y(2),
z(t)=y(3)
dy2dt= -y2-a*y1*y3;
dy3dt= b+a*y1*y2; %ylag(2)= y(t-tau), ylag(3)=z(t-tau)

dYdt= [dy1dt; dy2dt; dy3dt]

function sol=cobadelay
tau=0.2;
sol=dde23(@cobadelayy,tau,[0.1;0.1;0.1],[0,100]);

y1=sol.y(1,:);
y2=sol.y(2,:);
y3=sol.y(3,:);

tau=0.2;
a = 2.79;
b = 4;
k=-1;
```

```
figure
plot(sol.x,y1,sol.x,y2,sol.x,y3);
legend 'y1' 'y2' 'y3'
%-----
```

BIODATA PENULIS



Penulis yang mempunyai nama lengkap Amira Sarah Maretta lahir di Jakarta pada tanggal 25 Maret 1997. Penulis merupakan anak pertama dari empat bersaudara dari Bapak Temmy Roestam R.T.S dan Ibu Irawati. Penulis telah menempuh pendidikan formal di TKIT Nurul Fikri Depok, SDIT Nurul Fikri Depok, SMPIT Nurul Fikri Depok, dan SMAIT Nurul Fikri Depok. Setelah menamatkan jenjang formal penulis melanjutkan studi S1 di Departemen Matematika ITS angkatan 2015 ,dengan NRP 06111540000116 dan selama kuliah penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan. Pada saat kuliah, penulis juga aktif dalam Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) sebagai staff External Affair (2016/2017) dan sebagai *secretary of Media Information Departement* (2017/2018), dan mengikuti kepanitiaan kegiatan lainnya. Penulis juga pernah mengikuti kerja praktek di PT. Petrokimia Gresik. Demikian Biodata penulis, jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai laporan tugas akhir ini, dapat dikirimkan melalui amirasarahmaretta@gmail.com Terimakasih.