



---

TESIS - SM 142501

**PENERAPAN MODEL PREDICTIVE CONTROL  
(MPC) PADA FLOW LINE SISTEM PRODUKSI  
MENGUNAKAN ALJABAR MAX-PLUS**

IMAM FAUZI  
NRP 1214 201 039

DOSEN PEMBIMBING  
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

PROGRAM MAGISTER  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2016



THESIS - SM 142501

**APPLICATION OF MODEL PREDICTIVE CONTROL  
(MPC) FOR FLOW LINE PRODUCTION SYSTEM  
USING MAX-PLUS ALGEBRA**

IMAM FAUZI  
NRP 1214 201 039

SUPERVISOR  
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

MASTER'S DEGREE  
MATHEMATICS DEPARTMENT  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2016

**PENERAPAN MODEL PREDICTIVE CONTROL (MPC) PADA  
FLOW LINE SISTEM PRODUKSI MENGGUNAKAN  
ALJABAR MAX-PLUS**

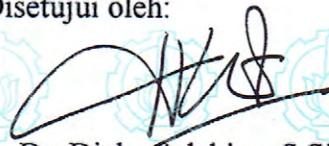
Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (M.Si.)

di  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

oleh:  
IMAM FAUZI  
NRP. 1214 201 039

Tanggal Ujian : 20 Juni 2016  
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh:

  
1. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si. (Pembimbing)  
NIP. 19830517 200812 1 003

  
2. Dr. Hariyanto, M.Si. (Penguji)  
NIP. 19530414 198203 1 002

  
3. Dr. Subiono, M.S. (Penguji)  
NIP. 19570411 198403 1 001

  
4. Dr. Dra. Mardlijah, M.T. (Penguji)  
NIP. 19670114 199102 2 001

Direktur Program Pascasarjana,

  
Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D

NIP. 19601202 198701 1 001

# **PENERAPAN MODEL PREDICTIVE CONTROL (MPC) PADA *FLOW LINE* SISTEM PRODUKSI MENGUNAKAN ALJABAR MAX-PLUS**

Nama mahasiswa : Imam Fauzi  
NRP : 1214 201 039  
Pembimbing : Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

## **ABSTRAK**

Model Predictive Control (MPC) atau dengan kata lain model kendali terprediksi adalah metode desain kontroler yang populer digunakan pada dunia industri. Keuntungan utama dari MPC adalah kemampuannya untuk memberikan constraint atau batasan tertentu pada sinyal pengendali input maupun output. Pada penelitian ini akan dipaparkan mengenai penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL) dan *buffer* memiliki kapasitas terbatas. *Flow line* sistem produksi adalah diagram yang menggambarkan urutan proses pada sistem produksi, mulai dari input, pemroses, sampai output. Dari *flow line* sistem produksi yang telah dimodelkan sebagai sistem MPL kemudian diterapkan MPC untuk mendapatkan waktu optimal ketika bahan baku masuk ke sistem dan waktu optimal ketika bahan jadi meninggalkan sistem yang memenuhi batasan-batasan MPC, sehingga dapat meminimumkan kriteria biaya. Batasan-batasan yang digunakan pada MPC meliputi batasan selisih waktu setiap langkah kejadian input, batas waktu *deadline* sebagai pembatas waktu output, prediksi horizon  $N_p$  adalah rentang waktu prediksi, dan control horizon  $N_c$  adalah rentang waktu pengendalian. Selanjutnya hasil konstruksi dari input, output, dan kriteria biaya pada penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dapat diperoleh dengan menggunakan program matlab.

**Kata kunci:** *Sistem Max-Plus Linier, Flow Line, Sistem Produksi, Model Predictive Control*



# APPLICATION OF MODEL PREDICTIVE CONTROL (MPC) FOR FLOW LINE PRODUCTION SYSTEM USING MAX-PLUS ALGEBRA

By : Imam Fauzi  
Student Identity Number : 1214 201 039  
Supervisor : Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

## ABSTRACT

Model Predictive Control (MPC) is a controller design method that is popularly used in the industrial world. The main advantage of MPC is its ability to provide certain constraints or limits on the input and output signals. This research focuses on applying MPC to flow line production system without buffer and with buffer modeled using max-plus-linear systems and the buffer has a limited capacity. Flow line of production systems is a diagram illustrating the process sequence in the production system, ranging from the input, process and output. We apply MPC to flow line production system in order to compute the time of feeding the raw material to the production system such that the restrictions are met and the cost criterion is minimized. Restrictions include time difference between consecutive input events, deadline of output events, control horizon  $N_c$  is the span of control and prediction horizon  $N_p$  is the prediction time span. Furthermore, the results of MPC in the flow line production system are obtained by using matlab program.

**Key-words:** *Max-Plus-Linear Systems, Flow Line, Production Systems, Model Predictive Control.*



## DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN.....	i
ABSTRAK.....	iii
ABSTRACT.....	v
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR.....	xi
DAFTAR NOTASI.....	xiii
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	4
1.6 Kontribusi Penelitian.....	4
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI.....	5
2.1 Penelitian-Penelitian Terkait.....	5
2.2 Aljabar Max-Plus.....	7
2.2.1 Pengertian Aljabar Max-Plus.....	7
2.2.2 Vektor dan Matriks.....	8
2.3 Model Predictive Control (MPC).....	9
2.4 Sistem Max-Plus Linier (MPL).....	11
2.5 Model Predictive Control untuk Sistem Max-Plus Linier.....	12
2.5.1 Evolusi Sistem.....	12
2.5.2 Constraint (Batasan).....	13
2.5.3 Evolusi Input Setelah Kontrol Horizon.....	14
2.5.4 Kriteria Biaya $J$ .....	14
1) <i>Kriteria biaya untuk output <math>J_{out}</math></i> .....	14
2) <i>Kriteria biaya untuk input <math>J_{in}</math></i> .....	15
2.5.5 Masalah MPC Standar untuk Sistem MPL.....	15

2.6	Model Sistem Produksi Menggunakan Aljabar Max-Plus.....	16
2.6.1	Model <i>Flow Line</i> Sistem Produksi Tanpa <i>Buffer</i> .....	16
2.6.2	Model <i>Flow Line</i> Sistem Produksi dengan <i>Buffer</i> .....	19
BAB 3	METODE PENELITIAN.....	25
3.1	Tahapan Penelitian.....	25
BAB 4	HASIL DAN PEMBAHASAN.....	27
4.1	Penerapan MPC Pada <i>Flow Line</i> Sistem Produksi.....	28
4.1.1	Penerapan MPC Pada <i>Flow Line</i> Sistem Produksi Tanpa <i>Buffer</i> .....	31
4.1.2	Penerapan MPC Pada <i>Flow Line</i> Sistem Produksi dengan <i>Buffer</i> .....	53
4.2	Contoh Kasus Penerapan MPC pada <i>Flow Line</i> Sistem Produksi Kopi Susu Tanpa <i>Buffer</i> .....	75
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN.....	87
5.1	Kesimpulan.....	87
5.2	Saran.....	88
DAFTAR PUSTAKA	.....	89

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 :	Prinsip <i>receding horizon</i> (Seborg dkk, 2011).....	10
Gambar 2.2 :	Model <i>flow line</i> sistem produksi tanpa <i>buffer</i> .....	16
Gambar 2.3 :	Model <i>flow line</i> sistem produksi yang disertai <i>buffer</i> .....	19
Gambar 4.1 :	Mesin produksi dengan pemrosesnya tidak disertai <i>bufer</i> (Seleim dan ElMaraghy, 2014).....	32
Gambar 4.2 :	<i>Flow line</i> dengan $m$ input, $q$ pemroses, $l$ output, dan $l$ waktu <i>deadline</i> (Pohet B., 2015).....	33
Gambar 4.3 :	<i>Flow line</i> dengan 3 input, 5 pemroses, 3 output, dan 3 waktu <i>deadline</i> .....	43
Gambar 4.4 :	Mesin produksi dengan pemrosesnya disertai <i>buffer</i> (Dairy Processing Hand Book, 2012).....	54
Gambar 4.5 :	<i>Flow line</i> dengan $m$ input, $q$ pemroses, $l$ output, $l$ waktu <i>deadline</i> dan disertai <i>buffer</i> pada pemroses $P_2, P_3, \dots, P_q$ (Pohet B., 2015).....	55
Gambar 4.6 :	<i>Flow line</i> dengan 3 input, 4 pemroses, 2 output, 2 waktu <i>deadline</i> dan 2 pemroses disertai <i>buffer</i> .....	63
Gambar 4.7 :	Aliran proses produksi Kopi Susu (Sistem produksi produk kemasan, 2015).....	76
Gambar 4.8 :	<i>Flow line</i> sistem produksi Kopi Susu beserta waktunya.....	78



## DAFTAR NOTASI

Notasi	Pengertian Notasi
$\oplus$	Operasi penjumlahan dalam aljabar max-plus (maksimalisasi).
$\otimes$	Operasi perkalian dalam aljabar max-plus (penjumlahan).
$\bigoplus_{k=1}^n a_k$	$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n$
$\bigotimes_{k=1}^n a_k$	$a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n$
$x^{\otimes k}$	$\underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_k = x \times k$
$A^{\otimes k}$	$\underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_k$ . dengan $k \in \mathbb{N}$ dan $k \neq 0$ .
$A^{\otimes 0} = E_n$	Matriks identitas pada aljabar max-plus.
$A^+$	$\bigoplus_{i=1}^n A^{\otimes i} = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes n} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$
$A^*$	$E \oplus A^+ = \bigoplus_{i \geq 0} A^{\otimes i}$
$e$	0 (Elemen netral dalam aljabar max-plus).
$\varepsilon$	$-\infty$ (Elemen identitas dalam aljabar max-plus).
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real.
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli.
$\mathbb{R}_\varepsilon$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$\mathbb{R}_{\max}$	Aljabar max-plus ( $\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes$ ).
$[A]_{i,j}, a_{i,j}$	Elemen matriks $A$ pada baris ke- $i$ kolom ke- $j$ .
$P_i$	Pemroses ke- $i$ .

$U_a(k)$	Waktu ketika bahan baku ke- $a$ masuk ke sistem dan siap diproses saat kejadian yang ke- $k$ .
$X_i(k)$	Waktu ketika pemroses ke- $i$ memulai proses saat yang ke- $k$ .
$Y_s(k)$	Waktu ketika produk ke- $s$ selesai diproses dan meninggalkan sistem saat yang ke- $k$ .
$d_j$	Lama waktu proses pada pemroses ke- $j$ .
$t_{j,i}$	Lama waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan bahan-bahan dari pemroses ke- $j$ menuju pemroses ke- $i$ .
$t_{u_a,i}$	Lama waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan bahan-bahan dari input ke- $a$ menuju pemroses ke- $i$ .
$t_{j,y_s}$	Lama waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan bahan yang telah diproses dari pemroses ke- $j$ menuju output ke- $s$ .
$N_p$	Prediksi horizon
$N_c$	Kontrol horizon
$\tilde{X}(k + j k)$	Waktu taksiran atau estimasi proses dari pemroses saat yang ke- $(k + j)$ pada kejadian ke- $k$ .
$\tilde{Y}(k + j k)$	Waktu taksiran atau estimasi ketika bahan jadi meninggalkan sistem saat yang ke- $(k + j)$ pada kejadian ke- $k$ .
$\Delta U(k + j)$	Selisih waktu dari setiap langkah kejadian ketika bahan baku masuk ke sistem pada saat kejadian ke- $(k + j)$ .
$\Delta \tilde{Y}(k + j k)$	Selisih waktu taksiran atau estimasi dari setiap langkah kejadian ketika bahan jadi meninggalkan sistem saat yang ke- $(k + j)$ pada kejadian ke- $k$ .
$b_1(k + j)$	Batas maksimum dari selisih waktu dari setiap langkah ketika bahan baku masuk ke sistem pada saat kejadian ke- $(k + j)$ .
$a_1(k + j)$	Batas minimum dari selisih waktu dari setiap langkah ketika bahan jadi meninggalkan sistem pada saat kejadian ke- $(k + j)$ .
$b_2(k + j)$	Batas maksimum dari selisih waktu dari setiap langkah ketika bahan jadi meninggalkan sistem pada saat kejadian ke- $(k + j)$ .
$a_2(k + j)$	Batas minimum dari selisih waktu dari setiap langkah ketika

	bahan jadi meninggalkan sistem pada saat kejadian ke- $(k + j)$ .
$R(k + j)$	Batas waktu <i>deadline</i> maksimum pada saat kejadian yang ke- $(k + j)$ .
$\check{Y}(k)$	Vektor kolom urutan waktu taksiran optimal output
$\check{U}(k)$	Vektor kolom urutan waktu optimal input
$J_{out}$	Kriteria biaya output
$J_{in}$	Kriteria biaya input
$\lambda$	bilangan tak negatif, yaitu sebagai <i>trade-off</i> antara kriteria biaya output $J_{out}$ dan kriteria biaya input $J_{in}$
$J$	Kriteria biaya keseluruhan





# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam dunia industri, efisiensi waktu sangatlah penting, karena tuntutan produksi yang semakin meningkat untuk memenuhi kebutuhan pasar. Oleh karena itu, ketepatan waktu sangatlah dibutuhkan dalam dunia industri. Dalam satu dekade terakhir, model predictive control (MPC) atau dengan kata lain model kendali terprediksi adalah salah satu metode yang populer digunakan dalam dunia industri, karena MPC adalah cara yang efektif dalam proses kontrol yang praktis, dan dapat diterima secara luas dalam proses industri. Keuntungan utama dari MPC adalah kemampuannya untuk memberikan constraint atau batasan tertentu pada sinyal pengendali input maupun output.

MPC konvensional, menggunakan model waktu diskrit linier untuk pengendalian proses. MPC yang digunakan disini adalah untuk sistem event diskrit. Secara umum, dalam aljabar konvensional, model yang digunakan adalah sistem yang nonlinear. Namun pada sistem event diskrit max-plus linier dapat dideskripsikan dalam model linier di aljabar max-plus (Baccelli dkk, 1992). Sistem max-plus linear termasuk dalam sistem event diskrit. Sebagai contoh adalah *flow line* sistem produksi, sistem produksi dengan rute jadwal tetap, dan jaringan kereta api.

Dalam penelitian ini dipaparkan tentang penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang yang dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL). MPC digunakan untuk memprediksi waktu beberapa langkah ke depan dari suatu sistem produksi yang dikonstruksi dalam bentuk *flow line*. Sistem produksi termasuk dalam kategori *Discrete Event Dynamic System* (DEDS). Sistem seperti ini dapat dimodelkan dengan automata, Petri-nets, *Markov-chains*, *queuing network*, simulasi dan aljabar max-plus.

Sebelum memodelkan sistem produksi ke bentuk persamaan aljabar max-plus, terlebih dahulu dikonstruksi bentuk *flow line* dari sistem produksi, yaitu diagram yang menggambarkan skema urutan proses dari suatu sistem produksi

mulai dari input, pemroses, dan output. Setelah terbentuk *flow line* dari sistem produksi kemudian dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL). Selanjutnya diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam sistem MPL untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi, sehingga dapat meminimumkan kriteria biaya dari suatu sistem produksi.

Penelitian tentang pemodelan sistem produksi menggunakan aljabar max-plus telah banyak dilakukan sebelumnya. Misalnya Seleim dan ElMaraghy dalam papernya (Seleim dan ElMaraghy, 2014a) membahas tentang pemodelan sistem produksi dengan aljabar max-plus. Tetapi tidak membahas model aljabar max-plus dari *flow line* sistem produksi yang memuat pemroses yang tersusun secara seri dan paralel dengan *buffer* terbatas. Selanjutnya Seleim dan ElMaraghy dalam papernya (Seleim dan ElMaraghy, 2014b) mengembangkan paper mereka sendiri dengan menambahkan bahasan tentang *flow line* sistem produksi yang memuat pemroses yang tersusun secara campuran seri dan paralel dengan *buffer* terbatas. Kemudian Pohet Bintoto pada tesisnya (Pohet B., 2015) menjelaskan bentuk umum dari suatu model *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai persamaan aljabar max-plus.

Selanjutnya De Schutter dan van den Boom dalam papernya (De Schutter dan van den Boom, 2001) menjelaskan tentang penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi sederhana. Untuk itu penelitian ini mengembangkan penelitian-penelitian sebelumnya dengan menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL). Untuk memperjelas pemahaman tentang penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi, dalam penelitian ini diberikan contoh dari model tersebut dalam suatu *flow line* sistem produksi. Selanjutnya penerapan MPC pada sistem produksi tersebut diimplementasikan kedalam program matlab untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi pada sistem produksi.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan diatas, rumusan masalah pada penelitian ini yaitu bagaimana menerapkan model predictive control (MPC) pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL).

## 1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

1. Kondisi awal dari sistem max-plus linier (MPL) telah ditentukan.
2. Nilai matriks parameter pada sistem max-plus linier (MPL) selalu tetap, tidak tergantung pada setiap langkah kejadian.
3. Nilai matriks parameter berdasarkan dari data yang telah ditentukan.
4. Data yang digunakan untuk proses pada sistem produksi ditentukan sendiri.
5. Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi hanya sebatas pada masalah standar.
6. Proses produksi tidak mengalami gangguan dan tidak mengalami cacat pada produksi.
7. Mesin produksi tidak mengalami kerusakan atau berhenti berproses.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Dari perumusan masalah yang ada, maka tujuan dari penelitian ini yaitu untuk memprediksi waktu optimal ketika bahan jadi meninggalkan sistem (output) dengan mendapatkan waktu optimal ketika bahan baku masuk ke sistem (input), sehingga dapat meminimumkan kriteria biaya, yaitu dengan cara memaksimalkan waktu ketika bahan baku masuk ke sistem sedemikian hingga waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem tidak melewati atau sama dengan batas waktu *deadline* maksimum yang telah ditentukan dari bentuk penyelesaian *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem MPL menggunakan MPC.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer*, sehingga dapat meminimumkan kriteria biaya dari sistem produksi, dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL.

### **1.6 Kontribusi Penelitian**

Kontribusi pada penelitian ini adalah sebagai metode yang digunakan untuk memprediksi waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem (output) yang tidak melewati atau sama dengan batas waktu *deadline* maksimum yang telah ditentukan, dengan cara memaksimalkan waktu ketika bahan baku masuk ke sistem (input), sehingga waktu output tidak terjadi keterlambatan.

## **BAB 2**

### **KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI**

Pada bab ini dibahas mengenai kajian pustaka yang berkaitan dengan penelitian-penelitian sebelumnya dan dasar-dasar teori yang dibutuhkan dalam penelitian ini, yaitu pembahasan mengenai model predictive control (MPC), sistem max-plus linier (MPL), dan beberapa hal yang terkait dengan *flow line* sistem produksi.

#### **2.1 Penelitian-Penelitian Terkait**

Penelitian-penelitian terkait yang pernah dilakukan sebelumnya adalah sebagai berikut.

*Model Predictive Control for Max-Plus-Linear Discrete Event System* (De Schutter dan van den Boom, 2001). Dalam penelitian ini menjelaskan tentang model predictive control (MPC) konvensional, kemudian membahas tentang bagaimana menerapkan MPC untuk sistem max-plus linier (MPL) dalam pengendalian waktu terprediksi untuk mendapatkan waktu optimal pada sistem produksi sederhana. Yaitu pengendalian terhadap waktu saat bahan dasar masuk ke sistem dan memprediksi terhadap waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem.

*Max-Plus Modelling of Manufacturing Flow Line* (Seleim dan ElMaraghy, 2014a). Dalam penelitian disebutkan bahwa aljabar max-plus dapat digunakan untuk memodelkan, mengevaluasi dan mengoptimasi kinerja serta mengontrol sistem manufaktur. Model dalam penelitian ini dapat diperluas pada konfigurasi sistem yang berbeda. Tapi sistem produksi dalam penelitian terbatas pada konfigurasi *flow lines* yang tersusun secara seri dan tipe *merging flow lines* tanpa *buffer* serta seri dengan disertai *buffer*. Pada penelitiannya diperoleh persamaan aljabar max-plus untuk masing-masing tipe *flow line*, yaitu untuk *flow line* dengan tipe serial tanpa *buffer*, *merging flow lines* tanpa *buffer*, dan persamaan aljabar max-plus untuk *flow lines* tipe serial yang disertai *buffer*.

*Generating Max-Plus Equation for Efficient Analysis of Manufacturing Flow Lines* (Seleim dan ElMaraghy, 2014b). Dalam penelitian ini dikembangkan metode baru yang cepat dan efisien untuk membangun persamaan aljabar max-plus dari suatu *flow lines* sistem produksi dengan ukuran dan struktur sembarang serta mempertimbangkan *buffer* yang terbatas dan pemroses-pemroses yang tersusun secara paralel. Selanjutnya pada penelitian ini diperoleh persamaan aljabar max-plus untuk masing-masing tipe *flow line* sistem produksi, yaitu *flow lines* tipe serial tanpa *buffer*, *merging flow lines* tanpa *buffer*, *flow line* yang disertai pemroses-pemroses yang tersusun secara paralel tanpa *buffer*, dan juga diperoleh model *flow lines* sistem produksi yang disertai *buffer*.

*Generalisasi model sistem produksi menggunakan aljabar max-plus* (Pohet Bintoto, 2015). Dalam penelitian ini telah menyempurnakan penelitian-penelitian sebelumnya dengan mendapatkan dua buah Lema, yaitu Lema yang pertama menjelaskan tentang bentuk umum dari *flow line* sistem produksi tanpa *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem persamaan aljabar max-plus. Lema yang kedua menjelaskan tentang bentuk umum dari *flow line* sistem produksi yang disertai *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem persamaan aljabar max-plus. Dan diberikan pula contoh dari *flow line* sistem produksi tersebut yang dimodelkan sebagai sistem persamaan aljabar max-plus.

*Application of Model Predictive Control (MPC) for Flow Line Production System Using Max-Plus Algebra* (Imam, F. and Dieky, A., 2016). Dalam penelitian ini mengembangkan bagaimana menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL). Kemudian dari sistem MPL yang telah diperoleh kemudian diterapkan MPC untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari sistem produksi.

Penelitian ini, fokus pada penerapan model predictive control (MPC) pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL). Yaitu dengan pengendalian waktu ketika bahan baku masuk ke sistem (input), sehingga didapatkan waktu optimal ketika bahan jadi meninggalkan sistem (output) yang tidak melewati batas waktu *deadline* maksimum yang telah ditentukan. Setelah

tersusun sistem MPL, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari sistem produksi. Sehingga dapat meminimumkan kriteria biaya dari *flow line* sistem produksi yang diselesaikan dengan program matlab.

## 2.2 Aljabar Max-Plus

Pada bagian ini dijelaskan mengenai pengertian dan konsep dasar aljabar max-plus, vektor dan matriks aljabar max-plus.

### 2.2.1 Pengertian Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus adalah struktur aljabar dengan menggunakan dua operasi dasar yaitu " maksimalisasi " dan " jumlahan ". Aljabar max-plus didefinisikan oleh  $\mathbb{R}_\varepsilon = \{\mathbb{R} \cup -\infty\}$  dengan  $\mathbb{R}$  adalah himpunan bilangan real. Dua operasi dasar dalam aljabar max-plus adalah maksimalisasi yang dilambangkan dengan  $\oplus$ , dan jumlahan yang dilambangkan dengan  $\otimes$ , dituliskan:

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \max(a, b) & \forall a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon \\ a \otimes b &= a + b & \forall a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon \end{aligned}$$

Aljabar max-plus adalah himpunan  $\mathbb{R}_{\max}$  yang bersama-sama dengan operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  yang dinotasikan dengan  $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$  (Heidergott dkk, 2006). Elemen netral untuk operasi  $\oplus$  adalah  $\varepsilon = -\infty$ , dan elemen netral untuk operasi  $\otimes$  adalah  $e = 0$ . Hal ini dapat ditunjukkan oleh :

$$\begin{aligned} a \oplus \varepsilon &= \max(a, -\infty) = a & \forall a \in \mathbb{R}_{\max} \\ a \otimes e &= a + 0 = a \text{ dan } a \otimes \varepsilon = a + \varepsilon = \varepsilon & \forall a \in \mathbb{R}_{\max} \end{aligned}$$

Seperti halnya aljabar konvensional, operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  adalah bersifat asosiatif dan komutatif, dan operasi perkalian distributif terhadap penjumlahan, yaitu :

$$\begin{aligned} a \otimes (b \oplus c) &= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) & \forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\max} \\ (a \oplus b) \otimes c &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) & \forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\max} \end{aligned}$$

Dalam operasi aljabar max-plus  $\oplus$  dan  $\otimes$ , banyak sifat dan konsep dari aljabar linier dapat diterjemahkan ke dalam aljabar max-plus dengan mengganti +

sebagai  $\oplus$  dan  $\times$  sebagai  $\otimes$ .

### 2.2.2 Vektor dan Matriks

Himpunan matriks berukuran  $m \times n$  dalam aljabar max-plus dinotasikan dengan  $\mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$ . Selanjutnya matriks  $A$  dapat dituliskan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Adakalanya elemen  $a_{ij}$  dituliskan sebagai  $[A]_{i,j}$  untuk  $i \in \underline{m}$  dan  $j \in \underline{n}$  dengan  $\underline{m} = \{1, 2, 3, \dots, m\}$  dan  $\underline{n} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  (Subiono, 2015).

Aljabar max-plus dapat diterapkan dalam matriks seperti halnya aljabar konvensional. Jika  $A$  dan  $B$  dua matriks berdimensi sama yaitu  $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$  dan  $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times p}$ , maka

$$(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$$

$$(A \otimes C)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n (a_{ik} \otimes c_{kj}) = \max_k (a_{ik} + c_{kj})$$

untuk semua  $i, j$ . Matriks  $\mathcal{E}_{m \times n}$  adalah matriks nol  $m \times n$  dalam aljabar max-plus yaitu  $(\mathcal{E}_{m \times n})_{ij} = \varepsilon$  untuk semua  $i, j$ .  $E_n$  adalah matriks identitas  $n \times n$  dalam aljabar max-plus, yaitu  $(E_n)_{ii} = 0$  untuk semua  $i$  dan  $(E_n)_{ij} = \varepsilon$  untuk semua  $i, j$  dengan  $i \neq j$ .

Matriks perpangkatan pada aljabar max-plus dengan matriks  $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$  didefinisikan sebagai  $A^{\otimes 0} = E_n$  dan  $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$  untuk  $k = 1, 2, \dots$ .

Menurut Baccelli dkk (2001) sebuah persamaan bentuk umum:

$$X = A \otimes X \oplus B \otimes U \quad (2.1)$$

dengan  $X$  adalah variabel vektor ukuran  $n \times 1$ ,  $U$  adalah input vektor ukuran  $m \times 1$ ,  $A$  adalah matriks persegi ukuran  $n \times n$ , dan  $B$  adalah matriks ukuran  $n \times m$ , mempunyai solusi:

$$X = A^* \otimes B \otimes U \quad (2.2)$$

dengan  $A^*$  didefinisikan sebagai  $A^* = E \oplus A^+$ , dimana

$$A^+ = \bigoplus_{i=1}^n A^{\otimes i} = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes n} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$$

### 2.3 Model Predictive Control (MPC)

Pada bagian ini dijelaskan mengenai konsep dasar tentang MPC. Model predictive control (MPC) atau sistem kendali prediktif yaitu sistem kendali yang menggunakan hasil prediksi dalam mengeluarkan kendali input. Kendali input ini merupakan kendali optimal untuk pengendalian berdasarkan hasil prediksi *plant* beberapa langkah waktu ke depan.

Salah satu kelebihan MPC adalah teknik ini memperhitungkan batasan nilai input dan output. MPC adalah sebuah teknik kontrol sistem waktu diskrit, yaitu menggunakan perencanaan *plant* dengan input dan output yang dapat dimodelkan dengan persamaan ruang keadaan *plant* dalam waktu diskrit linier.

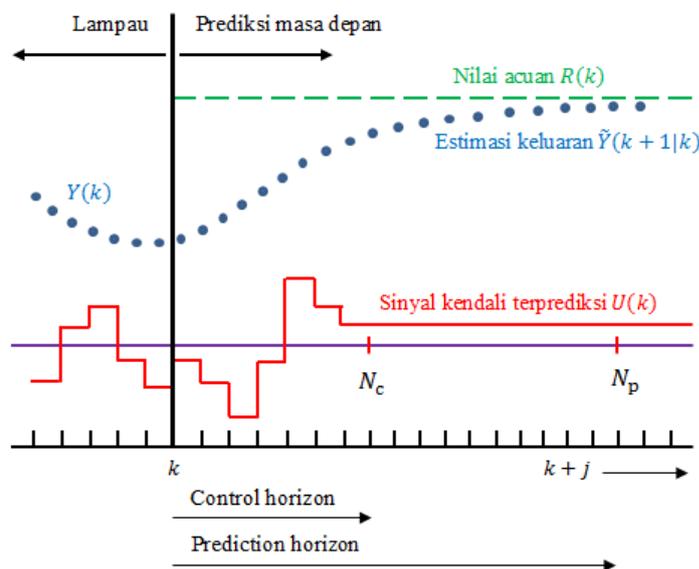
Metode MPC memiliki beberapa keunggulan dibandingkan dengan metode pengendali konvensional lainnya, diantaranya adalah (Enda W. S., 2012):

1. Konsepnya sangat intuitif serta penalaannya mudah.
2. Dapat digunakan untuk mengendalikan proses yang beragam, mulai dari proses yang sederhana sampai proses yang kompleks, memiliki waktu tunda yang besar, *non-minimum phase* atau proses yang tidak stabil.
3. Dapat menangani sistem *multivariable*.
4. Mempunyai kompensasi terhadap waktu tunda.
5. Mempunyai kemampuan dari pengendali *feed forward* untuk mengkompensasi gangguan yang terukur.
6. Mudah untuk mengimplementasikan pengendali yang diperoleh.
7. Dapat memperhitungkan batasan atau *constraint* dalam merancang pengendali.
8. Sangat berguna jika sinyal acuan untuk masa yang akan datang diketahui.

MPC termasuk dalam konsep perancangan pengendali berbasis model proses digunakan secara eksplisit untuk merancang pengendali dengan cara

meminimumkan suatu fungsi kriteria. Prinsip yang mendasari pada setiap MPC adalah (Holkar K. S. and Waghmare L. M., 2010) :

1. Menggunakan model proses untuk memprediksi keluaran proses yang akan datang dalam rentang waktu yang telah ditentukan (*horizon*).
2. Menghitung sinyal kendali dengan meminimasi suatu fungsi kriteria yang ditetapkan sebelumnya dengan tujuan untuk menjaga keluaran proses agar sedekat mungkin dengan trayektori acuan.
3. Sinyal kendali  $u(k|k)$  dikirim keproses, sedangkan sinyal kendali terprediksi berikutnya dibuang, karena pada pencuplikan berikutnya keluaran  $y(k + 1)$  sudah diketahui nilainya. Maka langkah pertama dilulang dengan nilai keluaran proses yang baru dan semua prosedur perhitungan yang diperlukan diperbaiki. Sinyal kendali yang baru  $u(k + 1|k + 1)$  nilainya berbeda dengan  $u(k + 1|k)$ , dihitung dengan menggunakan prinsip *receding horizon* seperti yang terlihat pada gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1: Prinsip *receding horizon* (Seborg dkk, 2011)

Pada sistem linier konvensional, bentuk model persamaannya menggunakan operasi perkalian dan penjumlahan atau dapat disebut dengan sistem persamaan plus-times linier (PTL) dalam bentuk *discrete event system* sebagai berikut.

$$X(k + 1) = AX(k) + BU(k) \quad (2.3)$$

$$Y(k) = CX(k) \quad (2.4)$$

MPC untuk model persamaan sistem max-plus linier (MPL) diadaptasikan dari bentuk MPC untuk persamaan sistem plus-times linier (PTL) seperti yang terlihat pada persamaan (2.3) dan (2.4) dengan menggantikan operasi perkalian menjadi penjumlahan dan operasi penjumlahan digantikan dengan maksimalisasi.

MPC untuk sistem MPL juga menggunakan prinsip *receding horizon* (prinsip horizon berjalan) yaitu pada saat kejadian ke- $k$ , urutan kontrol waktu input  $U(k), \dots, U(k + N_c - 1)$  yang akan datang ditentukan, sehingga kriteria biaya diminimalkan tergantung pada batasan. Pada saat kejadian ke- $k$ , elemen pertama ( $U(k)$ ) dari urutan optimal diterapkan dalam proses. Pada saat waktu kejadian berikutnya horizon digeser, model diperbarui dengan informasi baru dari perhitungan yang pertama, dan optimasi baru saat kejadian ke- $(k + 1)$  dilakukan, dan begitu seterusnya (De Schutter, B. and van den Boom, T., 2000). Seperti yang terlihat pada Gambar 2.1.

Parameter  $N_p$ ,  $N_c$  dan  $\lambda$  adalah tiga parameter dasar pada MPC. Prediksi horizon  $N_p$  adalah panjang langkah dari proses, dan interval waktu  $(1, N_p)$  berisi urutan dari proses. Kontrol horizon  $N_c \leq N_p$  biasanya diambil sama dengan urutan sistem. Parameter  $\lambda \geq 0$  adalah sebagai *trade-off* antara kriteria biaya output  $J_{out}$  dan kriteria biaya input  $J_{in}$ , dan biasanya diambil sekecil mungkin selama masih dapat menstabilkan pengendalian.

## 2.4 Sistem Max-Plus Linier (MPL)

Bentuk persamaan pada sistem event diskrit dapat dimodelkan ke dalam bentuk sistem max-plus linier sebagai berikut (Baccelli dkk, 1992).

$$X(k + 1) = A \otimes X(k) \oplus B \otimes U(k) \quad (2.5)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k) \quad (2.6)$$

dengan  $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$  dan  $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{l \times n}$ , dimana  $m$  adalah banyaknya input dan  $l$  adalah banyaknya output. Pada peneitian ini hanya menggunakan yang deterministik untuk kasus sistem MPL, yaitu nilai matriks parameter  $A, B$ , dan  $C$  selalu tetap, tidak tergantung pada setiap langkah kejadian  $k$ .

## 2.5 Model Predictive Control untuk Sistem Max-Plus Linier

Pada bagian ini dijelaskan mengenai model predictive control (MPC) untuk sistem max-plus linier (MPL) yaitu sebagai berikut.

### 2.5.1 Evolusi Sistem

Misalkan  $X(k)$  adalah waktu mulai proses pada pemroses saat kejadian ke- $k$ , dan waktu taksiran dapat dihitung menggunakan perhitungan sebelumnya. Jika keadaan dari sistem  $X(k)$  pada saat ke- $k$  diketahui, maka dapat diperkirakan taksiran evolusi sistem output untuk urutan input yang diberikan  $U(k), \dots, U(k + N_p - 1)$  dengan menggunakan model (2.5) dan (2.6) adalah sebagai berikut.

$$\tilde{X}(k + j|k) = A \otimes \tilde{X}(k + j - 1|k) \oplus B \otimes U(k + j - 1) \quad (2.7)$$

$$\tilde{Y}(k + j|k) = C \otimes \tilde{X}(k + j|k) \quad (2.8)$$

untuk  $j = 1, 2, \dots, N_p$ . Dimana  $\tilde{X}(k + j|k)$  adalah menyatakan waktu taksiran ketika pemroses memulai proses pada saat yang ke- $(k + j)$  pada kejadian ke- $k$ , pada waktu taksiran pemroses  $\tilde{X}(k - 1|k) = X(k - 1)$ . Dan  $\tilde{Y}(k + j|k)$  adalah menyatakan waktu taksiran ketika bahan jadi meninggalkan sistem saat yang ke- $(k + j)$  pada kejadian ke- $k$ . Pada MPC untuk sistem MPL, taksiran keadaan dari (2.7) dan (2.8) dapat dihilangkan untuk mengurangi jumlah variabel pada masalah optimasi yang dihasilkan, yang mengarah ke perhitungan optimal dari MPC.

Dari persamaan (2.7) dan (2.8), didapatkan bentuk persamaan waktu taksiran output dalam aljabar max-plus adalah sebagai berikut (De Schutter dan van den Boom, 2001).

$$\tilde{Y}(k + j|k) = C \otimes A^{\otimes j} \otimes X(k) \oplus \bigoplus_{i=0}^{j-1} C \otimes A^{\otimes j-i} \otimes B \otimes U(k + i)$$

jika dituliskan dalam bentuk matriks adalah

$$\check{Y}(k) = G(k) \oplus H \otimes \check{U}(k)$$

dengan

$$\tilde{Y}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{Y}(k+1|k) \\ \tilde{Y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \tilde{Y}(k+N_p|k) \end{bmatrix}, \tilde{U}(k) = \begin{bmatrix} U(k) \\ U(k+1) \\ \vdots \\ U(k+N_p-1) \end{bmatrix}, G(k) = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes N_p} \end{bmatrix} \otimes X(k)$$

$$\text{dan } H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes N_p-1} \otimes B & C \otimes A^{\otimes N_p-2} \otimes B & \cdots & C \otimes B \end{bmatrix},$$

dengan  $\tilde{Y}(k)$  adalah waktu taksiran pada saat bahan jadi meninggalkan sistem pada saat kejadian yang ke- $k$  dan  $U(k)$  adalah waktu ketika bahan baku masuk ke sistem pada saat kejadian yang ke- $k$ .

### 2.5.2 Constraint (Batasan)

MPC untuk sistem MPL menggunakan batasan untuk sistem event diskrit, yaitu memberikan batas maksimum dan minimum pada kejadian input maupun output, dengan tujuan selisih dari setiap kejadian input maupun output tidak terlampaui jauh atau terlampaui dekat. Selisih dari setiap kejadian input adalah selisih dari setiap langkah pada saat bahan baku masuk ke sistem  $\Delta U(k+j)$  diberikan batasan, yaitu batas maksimum  $b_1$  dan batas minimum  $a_1$ . Begitu pula untuk selisih dari setiap kejadian output, yaitu selisih dari setiap langkah waktu taksiran pada saat bahan jadi meninggalkan sistem  $\Delta \tilde{Y}(k+j|k)$  diberikan batasan, yaitu batas maksimum  $b_2$  dan batas minimum  $a_2$  yang diberikan sebagai berikut.

$$a_1(k+j) \leq \Delta U(k+j) \leq b_1(k+j) \quad \text{untuk } j = 1, \dots, N_c - 1 \quad (2.9)$$

$$a_2(k+j) \leq \Delta \tilde{Y}(k+j|k) \leq b_2(k+j) \quad \text{untuk } j = 1, \dots, N_p \quad (2.10)$$

dengan  $\Delta U(k+j) = U(k+j) - U(k+j-1)$  dan  $\Delta^2 U(k+j) = \Delta U(k+j) - \Delta U(k+j-1)$ .

atau waktu *deadline* maksimum untuk kejadian output adalah sebagai berikut.

$$\tilde{Y}(k+j|k) \leq R(k+j) \quad \text{untuk } j = 1, \dots, N_p \quad (2.11)$$

Pada sistem MPL, waktu kejadian input dan output urutannya harus selalu monoton naik. Oleh karena itu, harus selalu menambahkan kondisi  $\Delta U(k + j) \geq 0$  dengan  $j = 0, \dots, N_p - 1$ , untuk menjamin bahwa urutan input selalu naik.

### 2.5.3 Evolusi Input Setelah Kontrol Horizon

Pada batasan kontrol horizon konvensional, input harus tetap konstan pada saat kejadian ke- $(k + N_c)$ , ini tidak digunakan dalam sistem MPL karena urutan input harus monoton naik. Oleh karena itu, kondisi ini dirubah sebagai berikut. tingkat laju harus tetap konstan setelah kejadian ke- $(k + N_c)$ , yaitu

$$\Delta U(k + j) = \Delta U(k + N_c - 1) \quad \text{untuk } j = N_c, \dots, N_p - 1 \quad (2.12)$$

atau  $\Delta^2 U(k + j) = 0$  untuk  $j = N_c, \dots, N_p - 1$ . Kondisi ini menunjukkan keteraturan pada urutan input dan mencegah masalah *buffer overflow* yang bisa muncul ketika semua bahan dimasukkan ke sistem pada saat yang bersamaan.

### 2.5.4 Kriteria Biaya J

Kriteria biaya disini ada dua macam, yaitu kriteria biaya untuk output  $J_{out}$  dan kriteia biaya untuk input  $J_{in}$  yang dijelaskan sebagai berikut.

#### 1) Kriteria biaya untuk output $J_{out}$

Kriteria biaya output  $J_{out}$  adalah pada saat waktu bahan jadi meninggalkan sistem tidak melewati atau sama dengan batas waktu *deadline* maksimum maka biaya nol, dan jika waktu bahan jadi meninggalkan sistem melewati batas waktu *deadline* maksimum maka terjadi keterlambatan. Jika waktu *deadline*  $R(k)$  dari produk jadi diketahui dan jika harus membayar denda untuk setiap keterlambatan, formula kriteria biaya keterlambatan yang tepat adalah sebagai berikut.

$$J_{out} = \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^l \max[\tilde{Y}_i(k + j|k) - R_i(k + j), 0] \quad (2.13)$$

## 2) *Kriteria biaya untuk input $J_{in}$*

Kriteria biaya input  $\check{U}^T(k) \check{U}(k)$  adalah untuk meminimalisasi waktu input. Karena ini bisa mengakibatkan *buffer* input *overflows*, maka waktu input dimaksimumkan, yaitu bahan baku yang masuk ke sistem dibuat selambat mungkin. Akibatnya, kapasitas internal *buffer* disimpan serendah mungkin, sehingga mengakibatkan kesetabilan pada *buffer*. Jadi kriteria biaya untuk sistem MPL yang sesuai adalah  $J_{in} = -\check{U}^T(k) \check{U}(k)$ . Sehingga formula yang tepat untuk fungsi tujuan yang mengarah ke maksimalisasi waktu input  $J_{in}$  adalah sebagai berikut.

$$J_{in} = - \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^m U_i(k+j-1) \quad (2.14)$$

Jadi, kriteria biaya  $J$  adalah waktu ketika bahan baku masuk ke sistem dibuat selambat mungkin, sedemikian hingga waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem tidak melewati atau sama dengan batas waktu *deadline* maksimum yang telah ditentukan. Kriteria biaya MPC untuk sistem MPL diberikan sebagai berikut.

$$J = J_{out} + \lambda J_{in}$$

dengan  $\lambda \geq 0$ , adalah sebagai *trade-off* antara kriteria biaya output  $J_{out}$  dan kriteria biaya input  $J_{in}$

### 2.5.5 **Masalah MPC Standar untuk Sistem MPL**

Masalah MPC standar untuk sistem max-plus linier (MPL) adalah sebagai berikut:

$$\min_{\check{U}(k)} J = \min_{\check{U}(k)} (J_{out} + \lambda J_{in}) \quad (2.15)$$

Persamaan (2.15) artinya bahwa dengan memaksimumkan waktu ketika bahan baku masuk ke sistem sedemikian hingga waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem tidak melewati batas waktu *deadline* maksimum yang telah ditentukan. Kemudian kriteria biaya output  $J_{out}$  dan kriteria biaya input  $J_{in}$  harus memenuhi kondisi sebagai berikut.

$$\check{Y}(k) = G(k) \oplus H \otimes \check{U}(k) \quad (2.16)$$

$$\Delta U(k+j) \geq 0 \quad \text{untuk } j = 0, \dots, N_p - 1 \quad (2.17)$$

$$\Delta^2 U(k+j) = 0 \quad \text{untuk } j = N_c, \dots, N_p - 1 \quad (2.18)$$

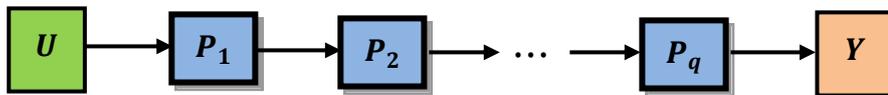
Ini disebut masalah MPC-MPL untuk kejadian ke- $k$ . MPC-MPL juga menggunakan prinsip *receding horizon*.

## 2.6 Model Sistem Produksi Menggunakan Aljabar Max-Plus

Sebelum memodelkan suatu sistem produksi menggunakan aljabar max-plus, terlebih dahulu harus dibuat *flow line* dari sistem produksi tersebut. *Flow line* merupakan susunan skema yang menunjukkan urutan pekerjaan dalam suatu sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output. Kemudian dikonstruksi bentuk persamaan aljabar max-plus dari *flow line* sistem produksi tersebut. Berikut adalah penjelasan dari model *flow line* sistem produksi bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem MPL.

### 2.6.1 Model *Flow Line* Sistem Produksi Tanpa *Buffer*

Model *flow line* sistem produksi tanpa *buffer* adalah sebuah bentuk *flow line* dimana pada semua pemrosesnya tidak disertai *buffer*. Sebagai contoh adalah sebagai berikut.



Gambar 2.2: Model *flow line* sistem produksi tanpa *buffer* (Pohet B., 2015)

Dari model *flow line* pada Gambar 2.2 memiliki bentuk persamaan aljabar max-plus sebagai berikut.

$$X(k+1) = A \otimes X(k+1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \quad (2.19)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k) \quad (2.20)$$

dengan  $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{1 \times q}$  dan  $D \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q \times 1}$  sebagai berikut.

$$X(k) = \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_q(k) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ d_1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ & \ddots & & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & d_{q-1} & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d_1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2 & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & d_q \end{bmatrix},$$

$$C = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \cdots \quad d_q] \text{ dan } D = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Dengan melihat elemen-elemen pada matriks  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , dan  $D$  dari persamaan aljabar max-plus, maka dapat dikonstruksi model *flow line* sistem produksi tergeneralisir menggunakan aljabar max-plus. Untuk matriks  $A$ , elemen entri  $[A]_{i,j}$  merupakan bobot sisi yang menghubungkan dari pemroses ke- $j$  menuju pemroses ke- $i$  ditambah dengan lamanya proses pada pemroses ke- $j$ . Dalam ekspresi matematika dapat dituliskan dengan  $w(j, i) + d_j$  dengan  $w(j, i)$  merupakan lamanya waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan dari pemroses ke- $j$  menuju pemroses ke- $i$  yaitu sebesar  $t_{j,i}$ . Sedangkan untuk matriks  $B$ , elemen-elemen pada diagonal utamanya merupakan lamanya proses dari masing-masing pemroses. Untuk matriks  $C$ , elemen-elemennya terlihat bahwa merupakan bobot sisi dari pemroses yang terhubung dengan  $Y$  (output). Demikian juga matriks  $D$ , elemen-elemennya merupakan bobot sisi dari  $U$  (input) menuju pemroses yang terhubung dengan  $U$ .

Berdasarkan tinjauan diatas, maka dapat diperoleh model *flow line* sistem produksi tergeneralisir tanpa *buffer* seperti yang diberikan pada Lema 2.1 berikut ini.

**Lema 2.1** (Pohet B., 2015) *Misalkan  $G$  suatu graf berarah yang mempresentasikan suatu flow line sistem produksi. Titik pada  $G$  mempresentasikan input, pemroses, dan output pada flow line, sedangkan garis  $G$  mempresentasikan rute perpindahan bahan-bahan. Misalkan himpunan titik*

$V = \{U, P, Y\}$  dengan  $U = \{U_1, U_2, \dots, U_m\} \subset V$  menyatakan input,  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_q\} \subset V$  menyatakan pemroses, dan  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\} \subset V$  menyatakan output pada flow line,  $t_{j,i}$  bobot sisi dari  $P_j$  menuju  $P_i$ ,  $t_{U_a,i}$  bobot sisi dari  $U_a$  menuju  $P_i$ ,  $t_{j,Y_s}$  bobot sisi dari  $P_j$  menuju  $Y_s$ , dan  $d_j$  menyatakan lama proses pada pemroses ke- $j$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, q$ ,  $a = 1, 2, 3, \dots, m$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots, n$ , maka didefinisikan matriks  $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times q}$ , dan  $D \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q \times m}$  yang elemen-elemennya sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
[A]_{i,j} &= \begin{cases} d_j \otimes t_{j,i} & , \text{ada garis dari } P_j \text{ ke } P_i \\ \varepsilon & , \text{tidak ada garis dari } P_j \text{ ke } P_i \end{cases} \\
[B]_{i,j} &= \begin{cases} d_i & , i = j \\ \varepsilon & , i \neq j \end{cases} \\
[C]_{s,j} &= \begin{cases} d_j \otimes t_{j,Y_s} & , \text{ada garis dari } P_j \text{ ke } Y_s \\ \varepsilon & , \text{tidak ada garis dari } P_j \text{ ke } Y_s \end{cases} \\
[D]_{i,a} &= \begin{cases} t_{U_a,i} & , \text{ada garis dari } U_a \text{ ke } P_i \\ \varepsilon & , \text{tidak ada garis dari } U_a \text{ ke } P_i \end{cases}
\end{aligned}$$

Jika  $X_i(k+1)$  menyatakan waktu ketika pemroses ke- $i$  memulai proses saat yang ke- $(k+1)$  dan  $Y_s(k)$  merupakan waktu ketika produk ke- $s$  meninggalkan sistem saat yang ke- $k$  maka diperoleh

$$\begin{aligned}
X_i(k+1) &= \left( \bigoplus_{j=1}^q [A]_{i,j} \otimes X_j(k+1) \right) \oplus [B]_{i,i} \otimes X_i(k) \\
&\oplus \left( \bigoplus_{a=1}^m [D]_{i,a} \otimes U_a(k) \right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$Y_s(k) = \left( \bigoplus_{j=1}^q [C]_{s,j} \otimes X_j(k) \right) \tag{2.22}$$

Dengan  $U_a(k+1)$  menyatakan waktu ketika bahan dasar masuk dan siap diproses untuk saat yang ke- $(k+1)$ . Lebih lanjut persamaan (2.21) dan (2.22) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A \otimes X(k+1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \\ Y(k) &= C \otimes X(k) \end{aligned} \quad (2.23)$$

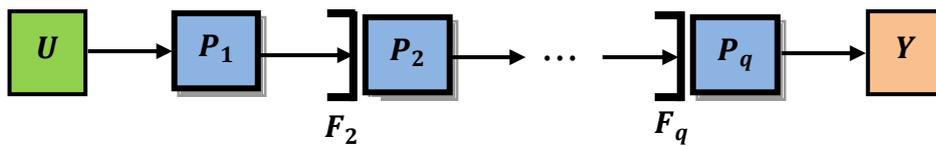
Dari persamaan (2.1) dan (2.2), persamaan (2.23) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k) \\ Y(k) &= C \otimes X(k) \end{aligned} \quad (2.24)$$

dengan  $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_q \end{bmatrix}$ ,  $\hat{A} = A^* \otimes B$ , dan  $\hat{B} = A^* \otimes D$ .

### 2.6.2 Model Flow Line Sistem Produksi dengan Buffer

Model *flow line* sistem produksi yang disertai *buffer* adalah sebuah bentuk *flow line* dimana pada pemrosesnya disertai *buffer*. Dalam kasus ini, diasumsikan bahwa untuk pemroses yang terhubung dengan input ( $U_a$ ) tidak disertai *buffer*. *Buffer* di sini memiliki kapasitas terbatas, dan kapasitas *buffer* tersebut berupa bilangan bulat yang dinotasikan dengan  $F_i$  dengan  $i = 2, 3, \dots, q$ . Sebagai contoh adalah sebagai berikut.



Gambar 2.3: Model *flow line* sistem produksi yang disertai *buffer* (Pohet B., 2015)

Model *flow line* pada Gambar 2.3 memiliki bentuk persamaan aljabar max-plus sebagai berikut.

$$X(k+1) = A \otimes X(k+1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \quad (2.25)$$

$$\oplus A_i \otimes X_i(k - F)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k) \quad (2.26)$$

dengan  $A, B \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{q \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{1 \times q}$ ,  $D \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{q \times 1}$  dan  $A_i \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{q \times q}$ .  $A_i$  adalah matriks *null* yang hanya terdiri dari satu elemen  $e$  yang terletak pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $(i + 1)$  sebagai berikut.

$$X(k) = \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_q(k) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ d_1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ & \ddots & & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & d_{q-1} & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d_1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2 & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & d_q \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$C = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \cdots \quad d_q], \text{ dan } A_i = \begin{bmatrix} \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \varepsilon & \varepsilon & \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & e & \varepsilon & \\ \vdots & & \vdots & \varepsilon & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & \varepsilon & \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Dengan melihat elemen-elemen pada matriks  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , dan  $D$  dari persamaan aljabar max-plus, maka dapat dikonstruksi model *flow line* sistem produksi tergeneralisir menggunakan aljabar max-plus. Untuk matriks  $A$ , elemen entri  $[A]_{i,j}$  merupakan bobot sisi yang menghubungkan dari pemroses ke- $j$  menuju pemroses ke- $i$  ditambah dengan lamanya proses pada pemroses ke- $j$ . Dalam ekspresi matematika dapat dituliskan dengan  $w(j, i) + d_j$  dengan  $w(j, i)$  merupakan lamanya waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan dari pemroses ke- $j$  menuju pemroses ke- $i$  yaitu sebesar  $t_{j,i}$ . Sedangkan untuk matriks  $B$ , elemen-elemen pada diagonal utamanya merupakan lamanya proses dari masing-masing pemroses. Untuk matriks  $C$ , elemen-elemennya terlihat bahwa merupakan bobot sisi dari pemroses yang terhubung dengan  $Y$  (output). Demikian juga matriks  $D$ , elemen-elemennya merupakan bobot sisi dari  $U$  (input) menuju pemroses yang terhubung dengan  $U$ .

Berdasarkan tinjauan diatas, maka dapat diperoleh model *flow line* sistem produksi tergeneralisir tanpa *buffer* seperti yang diberikan pada Lema 2.2 berikut ini.

**Lema 2.2** (Pohet B., 2015) *Misalkan  $G$  suatu graf berarah yang mempresentasikan suatu flow line sistem produksi. Titik pada  $G$  mempresentasikan input, pemroses, dan output pada flow line, sedangkan garis  $G$  mempresentasikan rute perpindahan bahan-bahan. Misalkan himpunan titik  $V = \{U, P, Y\}$  dengan  $U = \{U_1, U_2, \dots, U_m\} \subset V$  menyatakan input,  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_q\} \subset V$  menyatakan pemroses, dan  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\} \subset V$  menyatakan output pada flow line,  $t_{j,i}$  bobot sisi dari  $P_j$  menuju  $P_i$ ,  $t_{U_a,i}$  bobot sisi dari  $U_a$  menuju  $P_i$ ,  $t_{j,Y_s}$  bobot sisi dari  $P_j$  menuju  $Y_s$ , dan  $d_j$  menyatakan lama proses pada pemroses ke- $j$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, q$ ,  $a = 1, 2, 3, \dots, m$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots, n$ , maka didefinisikan matriks  $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times q}$ , dan  $D \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q \times m}$  yang elemen-elemennya sebagai berikut.*

$$\begin{aligned}
 [A]_{i,j} &= \begin{cases} d_j \otimes t_{j,i} & , \text{ ada garis dari } P_j \text{ ke } P_i \\ \varepsilon & , \text{ tidak ada garis dari } P_j \text{ ke } P_i \end{cases} \\
 [B]_{i,j} &= \begin{cases} d_i & , i = j \\ \varepsilon & , i \neq j \end{cases} \\
 [C]_{s,j} &= \begin{cases} d_j \otimes t_{j,Y_s} & , \text{ ada garis dari } P_j \text{ ke } Y_s \\ \varepsilon & , \text{ tidak ada garis dari } P_j \text{ ke } Y_s \end{cases} \\
 [D]_{i,a} &= \begin{cases} t_{U_a,i} & , \text{ ada garis dari } U_a \text{ ke } P_i \\ \varepsilon & , \text{ tidak ada garis dari } U_a \text{ ke } P_i \end{cases}
 \end{aligned}$$

*Jika  $X_i(k + 1)$  menyatakan waktu ketika pemroses ke- $i$  memulai proses saat yang ke- $(k + 1)$  dan  $Y_s(k)$  merupakan waktu ketika produk ke- $s$  meninggalkan sistem saat yang ke- $k$  maka diperoleh*

$$\begin{aligned}
X_i(k+1) = & \left( \bigoplus_{j=1}^q [A]_{i,j} \otimes X_j(k+1) \right) \oplus [B]_{i,i} \otimes X_i(k) \\
& \oplus \left( \bigoplus_{a=1}^m [D]_{i,a} \otimes U_a(k) \right) \\
& \oplus \left( \bigoplus_{l=1, [A]_{l,i} \neq \varepsilon, F_l \neq \infty}^q -t_{i,l} \otimes X_l(k - F_l) \right)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$Y_s(k) = \left( \bigoplus_{j=1}^q [C]_{s,j} \otimes X_j(k) \right) \tag{2.28}$$

Dengan  $U_a(k+1)$  menyatakan waktu ketika bahan dasar masuk dan siap diproses untuk saat yang ke- $(k+1)$ . Lebih lanjut persamaan (2.27) dan (2.28) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
X(k+1) = & A \otimes X(k+1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \\
& \oplus \left( \bigoplus_{l=1}^q A_l \otimes X(k - F_l) \right)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

$$\text{dengan } [A]_{i,j} = \begin{cases} -t_{i,l} & , [A]_{j,i} \neq \varepsilon, j = l, \text{ dan } F_l \neq \infty \\ \varepsilon & , \text{ yang lain} \end{cases}$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2), persamaan (2.29) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k) \oplus \left( \bigoplus_{l=1}^q \widehat{AB}_l \otimes X(k - F_l) \right) \tag{2.30}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

$$\text{dengan } X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_q \end{bmatrix}, \hat{A} = A^* \otimes B, \hat{B} = A^* \otimes D, \text{ dan } \widehat{AB}_l = A^* \otimes A_l, l = 1, 2, \dots, q$$

karena operasi  $\oplus$  pada aljabar max-plus bersifat komutatif maka persamaan (2.30) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \left( \bigoplus_{l=1}^q \widehat{A}B_l \otimes X(k-F_l) \right) \oplus \hat{B} \otimes U(k) \quad (2.31)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

Dari persamaan (2.31) dapat diperoleh persamaan matriks berikut.

$$\check{X}(k+1) = \check{A} \otimes \check{X}(k) \oplus \check{B} \otimes U(k) \quad (2.32)$$

$$Y(k) = \check{C} \otimes \check{X}(k) \quad (2.33)$$

dengan  $\check{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\check{q} \times \check{q}}$ ,  $\check{B} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\check{q} \times m}$ , dan  $\check{C} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times \check{q}}$  untuk  $\check{q} = q(\max(F_1, F_2, \dots, F_q) + 1)$

sedangkan 
$$\check{X}(k) = \begin{bmatrix} X(k) \\ X(k-1) \\ X(k-2) \\ \vdots \\ X(k - \max(F_1, F_2, \dots, F_q)) \end{bmatrix},$$

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & [\check{A}]_{1,2} & \cdots & [\check{A}]_{1,s-1} & [\check{A}]_{1,s} \\ E(q \times q) & \mathcal{E}(q \times q) & \cdots & \mathcal{E}(q \times q) & \mathcal{E}(q \times q) \\ \mathcal{E}(q \times q) & E(q \times q) & \cdots & \mathcal{E}(q \times q) & \mathcal{E}(q \times q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{E}(q \times q) & \mathcal{E}(q \times q) & \cdots & E(q \times q) & \mathcal{E}(q \times q) \end{bmatrix}, \quad \check{B} = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ \mathcal{E}(q \times m) \\ \mathcal{E}(q \times m) \\ \vdots \\ \mathcal{E}(q \times m) \end{bmatrix}$$

dan  $\check{C} = [C \quad \mathcal{E}(n \times q) \quad \mathcal{E}(n \times q) \quad \cdots \quad \mathcal{E}(n \times q)]$  dengan  $E(q \times q)$  adalah matriks identitas berordo  $q \times q$ , dan  $\mathcal{E}(q \times q)$  adalah matriks null yaitu matriks berordo  $q \times q$  yang semua elemennya adalah  $\varepsilon$ . Sedangkan  $[\check{A}]_{1,b}$  didefinisikan sebagai berikut.

$$[\check{A}]_{1,b} = \bigoplus_{l=1, F_l=b-1}^q \widehat{AB}_l \quad (2.34)$$

dengan  $b = 2, 3, \dots, t$  dan  $t = \max(F_1, F_2, \dots, F_q) + 1$ .

## **BAB 3**

### **METODE PENELITIAN**

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah penelitian yang digunakan atau dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian.

#### **3.1 Tahapan Penelitian**

Tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Studi literatur

Pada tahap ini dikumpulkan informasi mengenai model predictive control (MPC), sistem max-plus linier (MPL), dan *flow line* sistem produksi. Informasi-informasi tersebut akan didapatkan dari buku-buku, journal ilmiah, *paper-paper*, dan artikel-artikel yang terkait dengan penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL.

2. Mempelajari bentuk sistem MPL dari *flow line* sistem produksi (Pohet B. 2015)

Pada tahap ini mempelajari bagaimana cara penyusunan sistem MPL dari *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer*.

3. Penerapan model predictive control (MPC) pada sistem produksi

Setelah mempelajari bentuk sistem MPL dari *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer*, kemudian diterapkan MPC pada sistem produksi tersebut, untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari sistem produksi.

4. Menyajikan suatu contoh

Untuk mempermudah pemahaman tentang bagaimana menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang yang dimodelkan sebagai sistem MPL, maka diberikan contoh dari bentuk model MPC-MPL dari *flow line* sistem produksi tersebut.

5. Penyelesaian MPC dan menganalisa hasil simulasi

Pada tahap ini akan dicari penyelesaian dari penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan menggunakan program matlab dan menganalisa hasil simulasi, kemudian akan diperoleh waktu optimal terprediksi pada sistem produksi.

## BAB 4

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas mengenai penerapan model predictive control (MPC) pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL). Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi adalah suatu metode untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi beberapa langkah ke depan pada sistem produksi. Dalam penerapan MPC ini, bertujuan untuk mendapatkan waktu optimal ketika bahan baku masuk ke sistem, sehingga diperoleh waktu optimal ketika bahan jadi meninggalkan sistem. Dalam penyelesaian dari penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi, langkah pertama yaitu mengkonstruksi bentuk *flow line* dari suatu sistem produksi yaitu diagram yang menggambarkan skema urutan proses pada sistem produksi mulai dari input, proses, sampai output. Selanjutnya diterapkan MPC untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL. Untuk lebih memperjelas dari penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer*, maka diberikan contoh aplikasi dari model yang diperoleh tersebut. Pada bagian ini juga diberikan contoh kasus mengenai penerapan MPC pada model *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang.

Dalam suatu *flow line* sistem produksi tentunya dapat diketahui lama waktu yang dibutuhkan untuk melakukan proses pada setiap pemroses ( $d_i$ ), lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan dari input menuju pemroses ( $t_{U_a,j}$ ), dari suatu pemroses menuju pemroses yang lain ( $t_{i,j}$ ), dan dari pemroses menuju output ( $t_{j,Y_s}$ ). Kemudian dikonstruksi model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi yang diketahui waktu prosesnya tersebut. Kemudian dalam penerapan MPC, tentunya harus diketahui kondisi awal waktu ketika bahan baku masuk ke sistem atau input ( $U(-1)$ ), ditentukan kondisi awal waktu mulai proses pada pemroses ( $X(0)$ ), ditentukan batas waktu maksimum dan minimum dari selisih waktu pada setiap langkah kejadian input ( $\Delta U(k)$ ), ditentukan batas waktu *deadline* maksimum ( $R(k)$ ) sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi

meninggalkan sistem, ditentukan kontrol horizon  $N_c$ , ditentukan prediksi horizon  $N_p$ , dan ditentukan nilai  $\lambda \geq 0$ . Setelah tersusun sistem MPL dari *flow line* sistem produksi, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi yang memenuhi batasan-batasan MPC. Setelah diperoleh waktu optimal terprediksi, kemudian didapatkan kriteria biaya, yaitu dengan memaksimumkan waktu input sedemikian hingga waktu output tidak melewati atau sama dengan batas waktu *deadline* maksimum yang telah ditentukan.

#### 4.1 Penerapan MPC Pada *Flow Line* Sistem Produksi

Pada bagian ini dijelaskan mengenai penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* maupun pemrosesnya disertai *buffer*.

*Buffer* dalam proses produksi adalah tempat penampung bahan setengah jadi hasil dari proses pada mesin pemroses yang akan diproses lebih lanjut ke mesin pemroses berikutnya. Kemudian *buffer* di sini memiliki kapasitas terbatas, dengan besar kapasitas berupa bilangan bulat yang dinotasikan dengan  $F_i$ . Tujuan pemberian *buffer* dalam proses produksi adalah menghindari penumpukan hasil produksi bahan setengah jadi yang telah diproses pada mesin pemroses yang akan diproses lebih lanjut ke mesin pemroses berikutnya.

Kemudian jika *flow line* sistem produksi dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* berarti bahwa bahan setengah jadi yang telah diproses dari mesin satu ke mesin lainnya tanpa melalui penampung yang memiliki kapasitas terbatas. Jadi, hasil dari proses bahan setengah jadi yang telah diproses dari mesin pemroses langsung diproses lebih lanjut ke mesin pemroses berikutnya. Salah satu alasan tidak menggunakan *buffer* karena waktu proses pada mesin pertama biasanya lebih lama atau sama dengan dari waktu proses pada mesin kedua.

Dan jika *flow line* sistem produksi dengan pemrosesnya disertai *buffer* berarti bahwa bahan setengah jadi yang diproses dari mesin satu ke mesin lainnya melalui mekanisme tertentu yaitu dengan *buffer* yang memiliki kapasitas terbatas untuk menghindari penumpukan hasil produksi bahan setengah jadi yang telah

diproses dari mesin pemroses dan akan diproses lebih lanjut ke mesin pemroses berikutnya. Salah satu alasan penggunaan *buffer* karena waktu proses pada mesin pertama biasanya lebih cepat dari waktu proses pada mesin kedua.

Selanjutnya dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi ada beberapa tahapan penyelesaian, yaitu sebagai berikut:

- 1) Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output.
- 2) Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi tersebut beserta waktu prosesnya.
- 3) Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer*.
- 4) Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut.

Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL) maksudnya adalah dari bentuk *flow line* sistem produksi yang kemudian dikonstruksi menjadi bentuk sistem MPL, kemudian sistem MPL inilah yang digunakan dalam penerapan MPC. Pada prinsipnya penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* adalah sama, yaitu bentuk *flow line* sistem produksi tersebut dikonstruksi terlebih dahulu menjadi bentuk sistem MPL yang kemudian digunakan dalam menerapkan MPC untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari sistem produksi. Yang membedakan adalah proses penurunan rumus persamaan sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer*. Jadi bisa dikatakan juga penerapan MPC untuk sistem MPL yang meliputi:

- 1) Evolusi sistem

Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang sudah dimodelkan ke dalam bentuk sistem MPL, bentuk persamaan sistemnya adalah berbentuk taksiran atau estimasi, yaitu waktu taksiran ketika mesin pemroses

memulai proses pada setiap langkah kejadian dan waktu taksiran ketika bahan jadi meninggalkan sistem pada setiap langkah kejadian.

2) Constraint (batasan)

Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang sudah dikonstruksi menjadi sistem MPL, selisih pada setiap waktu langkah kejadian input diberikan batas maksimum dan batas minimum. Kemudian waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem diberikan batas waktu *deadline* maksimum.

3) Evolusi input setelah kontrol horizon

Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang sudah dikonstruksi menjadi sistem MPL, selisih waktu pada setiap langkah kejadian input setelah kontrol horizon selalu tetap atau konstan.

4) Kriteria biaya

Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang sudah dikonstruksi menjadi sistem MPL, terdapat dua kriteria biaya, yaitu kriteria biaya input dan kriteria biaya output.

Untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi tentunya harus melalui proses evolusi sistem, yaitu proses perhitungan untuk mendapatkan urutan waktu optimal output terprediksi, yang tentunya sudah didapatkan urutan waktu optimal input. Prosedur untuk mendapatkan waktu optimal input adalah menggunakan prinsip *receding horizon*. Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi harus diketahui kondisi awal dan ditentukan batasan-batasan yang memenuhi MPC. Untuk mendapatkan urutan waktu optimal input tentunya harus diketahui kondisi awal waktu kejadian input  $U(-1)$ . Untuk memulai waktu proses pada pemroses tentunya harus diketahui kondisi awal waktu mulai proses pada pemroses  $X(0)$ .

Kemudian selisih waktu dari setiap langkah kejadian input diberikan batasan tertentu, yaitu batas maksimum dan batas minimum, dengan tujuan selisih waktu dari setiap langkah kejadian input tidak terlampaui jauh dan tidak terlampaui dekat, yang dinotasikan dengan  $\Delta U(k+j)$  untuk  $j = 1, \dots, N_c - 1$ . Kemudian batasan waktu taksiran kejadian output diberikan batas waktu *deadline* maksimum, yaitu  $\tilde{Y}(k+j|k) \leq R(k+j)$  untuk  $j = 1, \dots, N_p$ .

Selanjutnya pada evolusi sistem urutan waktu kejadian input dan output haruslah monoton naik, maka selisih waktu dari setiap langkah urutan kejadian input harus lebih besar atau sama dengan nol yaitu  $\Delta U(k + j) \geq 0$ , dengan  $j = 0, \dots, N_p - 1$ , untuk menjamin bahwa urutan waktu input selalu naik. Kemudian selisih waktu dari setiap langkah urutan kejadian input setelah kontrol horizon  $N_c$  selalu konstan, yaitu  $\Delta U(k + j) = \Delta U(k + N_c - 1)$ .

Dari penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang sudah dimodelkan sebagai sistem MPL, kemudian didapatkan kriteria biaya. Kriteria biaya disini ada dua, yaitu kriteria biaya input  $J_{in}$  dan kriteria biaya output  $J_{out}$ . Kriteria biaya input adalah memaksimumkan waktu ketika bahan baku masuk ke sistem. Sedangkan kriteria biaya output adalah waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem tidak melewati atau sama dengan batas waktu *deadline* maksimum yang telah ditentukan.

Pada pembahasan kali ini, penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi ada dua macam, yaitu penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* dan penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer*. Oleh karena itu, dalam subbab ini dibahas terlebih dahulu mengenai penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang yang pemrosesnya tidak disertai *buffer* sebagai berikut.

#### **4.1.1 Penerapan MPC Pada *Flow Line* Sistem Produksi Tanpa *Buffer***

Pada bagian ini dijelaskan mengenai penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer*. Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer*, ada beberapa tahapan penyelesaian, yaitu sebagai berikut.

##### **1) Tahap pertama**

Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output. Untuk mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi, terlebih dahulu

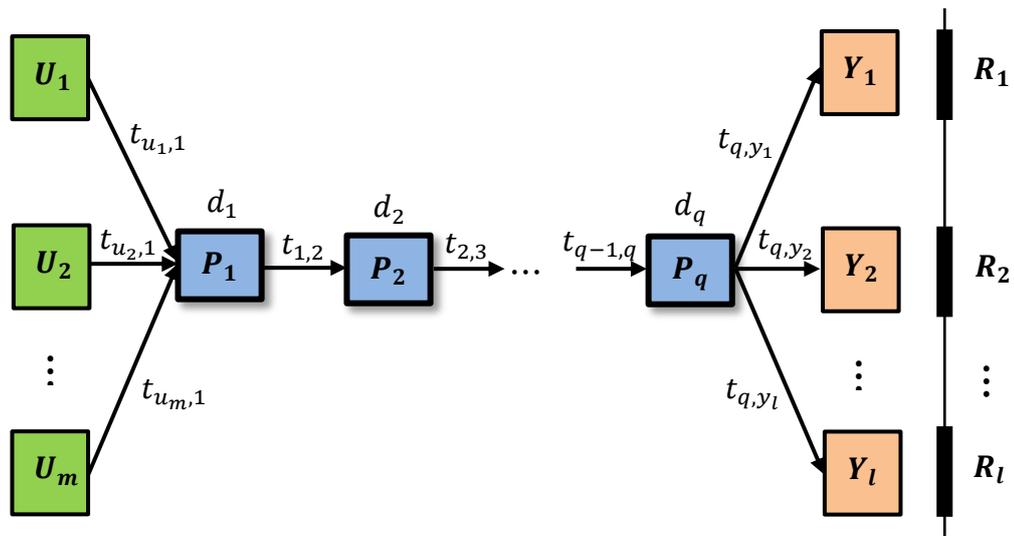
harus mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi. Misalkan diberikan ilustrasi mesin produksi dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* seperti pada Gambar 4.1 berikut.



Gambar 4.1: Mesin produksi dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* (Seleim dan ElMaraghy, 2014)

## 2) Tahap kedua

Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi tersebut beserta waktu prosesnya. Setelah mengetahui suatu mesin produksi yang akan dimodelkan, kemudian dikonstruksi bentuk *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema mesin produksi tersebut. Misalkan diberikan bentuk *flow line* sistem produksi pada Gambar 4.2 yang menggambarkan susunan skema dari mesin produksi pada Gambar 4.1 dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* sebagai berikut.



Gambar 4.2: *Flow lines* dengan  $m$  input,  $q$  pemroses,  $l$  output, dan  $l$  waktu *deadline* (Pohet B., 2015).

Misalkan  $X_i(k)$  merupakan waktu memulai proses yang ke- $k$  pada pemroses ke- $i$ ,  $Y_s(k)$  merupakan waktu ketika produk ke- $s$  selesai diproses dan meninggalkan sistem saat yang ke- $k$ , dan  $U_a(k+1)$  merupakan waktu ketika bahan dasar ke- $a$  masuk ke sistem dan siap untuk diproses saat yang ke- $(k+1)$ .

Pada Gambar 4.2 terlihat bahwa  $d_i$  merupakan waktu yang dibutuhkan untuk melakukan proses pada pemroses ke- $i$ ,  $t_{u_a,1}$  merupakan waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan bahan baku dari input  $U_a$  menuju pemroses ke-1 ( $P_1$ ),  $t_{n,y_s}$  merupakan waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan bahan baku dari pemroses ke- $n$  ( $P_n$ ) menuju output  $Y_s$ ,  $t_{i,j}$  merupakan waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan setengah jadi dari pemroses  $P_i$  menuju pemroses  $P_j$  dengan  $a = 1, 2, 3, \dots, m$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots, l$ , dan  $i, j = 1, 2, 3, \dots, q$ . Diberikan pula waktu *deadline* maksimum yang telah ditentukan  $R(k)$  sebagai pembatas supaya waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem tidak melewati batas waktu *deadline* maksimum. Untuk  $Y_1$  batas waktu *deadline* maksimum adalah  $R_1$ , untuk  $Y_2$  batas waktu *deadline* maksimum adalah  $R_2$ , dan seterusnya sampai untuk  $Y_l$  batas waktu *deadline* maksimum adalah  $R_l$ .

Untuk memulai proses yang ke- $(k + 1)$  pada pemroses  $P_1$  harus menunggu sampainya bahan baku dari  $U_1, U_2, \dots, U_m$  pada pemroses  $P_1$  saat yang ke- $(k + 1)$  dan selesainya proses di pemroses  $P_1$  saat yang ke- $k$ .

### 3) Tahap ketiga

Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer*. Setelah mengkonstruksi bentuk *flow line* sistem produksi seperti yang terlihat pada Gambar 4.2 dari mesin produksi dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* yang telah diberikan pada Gambar 4.1, kemudian dimodelkan sebagai sistem MPL dari *flow line* sistem produksi tersebut, yang di berikan sebagai berikut.

Berdasarkan Lema 2.1 (Pohet B. 2015), persamaan aljabar max-plus dalam bentuk matriks dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang tanpa *buffer* pada Gambar 4.2 adalah sebagai berikut.

$$X(k + 1) = A \otimes X(k + 1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \quad (4.1)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k) \quad (4.2)$$

dengan  $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{l \times q}$ , dan  $D \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q \times m}$ .

Dari persamaan (2.1) dan (2.2), kemudian persamaan (4.1) dan (4.2) dapat disederhanakan, sehingga didapatkan bentuk sistem max-plus linier (MPL) dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang tanpa *buffer* pada Gambar 4.2 sebagai berikut.

$$X(k + 1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k) \quad (4.3)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k) \quad (4.4)$$

dengan  $\hat{A} = A^* \otimes B$  dan  $\hat{B} = A^* \otimes D$ .

### 4) Tahap keempat

Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut. Setelah tersusun model MPL dari *flow line* sistem produksi, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem

produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem MPL.

Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem MPL yang telah diperoleh, kemudian sistem MPL tersebut digunakan dalam penerapan MPC, sehingga dapat disebut juga penerapan MPC untuk sistem MPL yang meliputi:

1) Evolusi sistem

Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang sudah dimodelkan kedalam bentuk sistem MPL, bentuk persamaan sistemnya adalah berbentuk taksiran atau estimasi, yaitu waktu taksiran ketika mesin pemroses memulai proses pada setiap langkah kejadian  $k$  dan waktu taksiran ketika bahan jadi meninggalkan sistem pada setiap langkah kejadian  $k$ .

Untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari suatu *flow line* sistem produksi harus melalui proses evolusi sistem. Evolusi sistem di sini adalah perubahan pada *state* yaitu perubahan pada setiap langkah kejadian  $k$  baik input maupun output. Jadi evolusi sistem di sini yaitu proses perhitungan untuk mendapatkan urutan waktu optimal output terprediksi pada setiap langkah kejadian  $k$ , yang tentunya sudah didapatkan urutan waktu optimal input. Prosedur untuk mendapatkan urutan waktu optimal input menggunakan prinsip *receding horizon*, yaitu pada saat kejadian ke- $k$ , urutan waktu input  $U(k), \dots, U(k + N_c - 1)$  yang akan datang ditentukan, sehingga kriteria biaya diminimumkan tergantung pada batasan. Pada saat kejadian ke- $k$ , elemen pertama  $U(k)$  dari urutan optimal diterapkan dalam proses. Pada saat waktu kejadian berikutnya horizon digeser, model diperbarui dengan informasi baru dari perhitungan yang pertama, dan optimasi baru saat kejadian ke- $(k + 1)$  dilakukan, dan begitu seterusnya. Dimana proses untuk mendapatkan urutan waktu optimal input dengan prinsip *receding horizon* diperoleh dari *toolbox* program matlab MPC (De Schutter, B. and van den Boom, T., 2000). Kemudian proses perhitungan evolusi sistem dijelaskan sebagai berikut.

Dari persamaan sistem max-plus linier (MPL) pada persamaan (2.5) dan (2.6) yaitu

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A \otimes X(k) \oplus B \otimes U(k) \\ Y(k) &= C \otimes X(k) \end{aligned}$$

Dalam penerapan MPC untuk Sistem MPL, bentuk persamaan sistemnya berbentuk taksiran atau estimasi seperti pada persamaan (2.7) dan (2.8) berikut.

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k+j|k) &= A \otimes \tilde{X}(k+j-1|k) \oplus B \otimes U(k+j-1) \\ \tilde{Y}(k+j|k) &= C \otimes \tilde{X}(k+j|k) \end{aligned}$$

Karena kondisi awal waktu mulai proses pada pemroses  $X(k)$  sudah diketahui, maka waktu taksiran proses pada pemroses saat yang ke- $(k)$  pada kejadian ke- $k$  yaitu  $\tilde{X}(k|k)$  dapat dituliskan sebagai  $X(k)$ . Evolusi sistem pada waktu taksiran ketika pemroses memulai proses saat yang ke- $(k+j)$  pada kejadian ke- $k$ , yaitu  $\tilde{X}(k+j|k)$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k+1|k) &= A \otimes X(k) \oplus B \otimes U(k) \\ \tilde{X}(k+2|k) &= A \otimes \tilde{X}(k+1|k) \oplus B \otimes U(k+1) \\ &= A \otimes [A \otimes X(k) \oplus B \otimes U(k)] \oplus B \otimes U(k+1) \\ &= A^{\otimes 2} \otimes X(k) \oplus A \otimes B \otimes U(k) \oplus B \otimes U(k+1) \\ \tilde{X}(k+3|k) &= A \otimes \tilde{X}(k+2|k) \oplus B \otimes U(k+2) \\ &= A \otimes [A^{\otimes 2} \otimes X(k) \oplus A \otimes B \otimes U(k) \oplus B \otimes U(k+1)] \\ &\quad \oplus B \otimes U(k+2) \\ &= A^{\otimes 3} \otimes X(k) \oplus A^{\otimes 2} \otimes B \otimes U(k) \oplus A \otimes B \otimes U(k+1) \\ &\quad \oplus B \otimes U(k+2) \\ &\quad \vdots \\ \tilde{X}(k+j|k) &= A \otimes \tilde{X}(k+j-1|k) \oplus B \otimes U(k+j-1) \end{aligned}$$

untuk  $j = 1, \dots, N_p$ .

Atau bentuk persamaan umum untuk waktu taksiran ketika pemroses memulai proses yaitu  $\tilde{X}(k+j|k)$  dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\tilde{X}(k+j|k) = A^{\otimes j} \otimes X(k) \oplus \bigoplus_{i=0}^{j-1} A^{\otimes j-1} \otimes B \otimes U(k+i)$$

Kemudian evolusi sistem pada waktu taksiran ketika bahan jadi meninggalkan sistem saat yang ke- $(k + j)$  pada kejadian ke- $k$  yaitu  $\tilde{Y}(k + j|k)$  adalah dengan mensubstitusikan persamaan waktu taksiran ketika pemroses memulai proses yaitu  $\tilde{X}(k + j|k)$  pada persamaan waktu taksiran output adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(k + 1|k) &= C \otimes \tilde{X}(k + 1|k) \\
&= C \otimes [A \otimes X(k) \oplus B \otimes U(k)] \\
&= C \otimes A \otimes X(k) \oplus C \otimes B \otimes U(k) \\
\tilde{Y}(k + 2|k) &= C \otimes \tilde{X}(k + 2|k) \\
&= C \otimes [A^{\otimes 2} \otimes X(k) \oplus A \otimes B \otimes U(k) \oplus B \otimes U(k + 1)] \\
&= C \otimes A^{\otimes 2} \otimes X(k) \oplus C \otimes A \otimes B \otimes U(k) \oplus C \otimes B \otimes U(k + 1) \\
\tilde{Y}(k + 3|k) &= C \otimes \tilde{X}(k + 3|k) \\
&= C \otimes [A^{\otimes 3} \otimes X(k) \oplus A^{\otimes 2} \otimes B \otimes U(k) \oplus A \otimes B \otimes U(k + 1) \\
&\quad \oplus B \otimes U(k + 2)] \\
&= C \otimes A^{\otimes 3} \otimes X(k) \oplus C \otimes A^{\otimes 2} \otimes B \otimes U(k) \oplus C \otimes A \otimes B \\
&\quad \otimes U(k + 1) \oplus C \otimes B \otimes U(k + 2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\tilde{Y}(k + j|k) = C \otimes \tilde{X}(k + j|k)$$

untuk  $j = 1, \dots, N_p$

Atau bentuk persamaan umum untuk waktu taksiran ketika bahan jadi meninggalkan sistem saat yang ke- $(k + j)$  pada kejadian ke- $k$  yaitu  $\tilde{Y}(k + j|k)$  dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\tilde{Y}(k + j|k) = C \otimes A^{\otimes j} \otimes X(k) \oplus \bigoplus_{i=0}^{j-1} C \otimes A^{\otimes j-1} \otimes B \otimes U(k + i)$$

Waktu taksiran output jika dituliskan dalam bentuk matriks aljabar max-plus adalah sebagai berikut.

$$\tilde{Y}(k) = G(k) \oplus H \otimes \tilde{U}(k)$$

dengan

$$\check{Y}(k) = \begin{bmatrix} \check{Y}(k+1|k) \\ \check{Y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \check{Y}(k+N_p|k) \end{bmatrix}, \check{U}(k) = \begin{bmatrix} U(k) \\ U(k+1) \\ \vdots \\ U(k+N_p-1) \end{bmatrix}, G(k) = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes N_p} \end{bmatrix} \otimes X(k)$$

$$\text{dan } H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes N_p-1} \otimes B & C \otimes A^{\otimes N_p-2} \otimes B & \cdots & C \otimes B \end{bmatrix}$$

Persamaan matriks aljabar max-plus waktu taksiran output  $\check{Y}(k)$  pada *flow line* sistem produksi, di dalam matriks  $G$  dan  $H$  terdapat matriks parameter  $A$ ,  $B$ , dan  $C$ . Namun jika untuk persamaan matriks aljabar max-plus waktu taksiran output  $\check{Y}(k)$  pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang tanpa *buffer*, maka di dalam matriks  $G$  dan  $H$  menggunakan matriks parameter  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ , dan  $C$  seperti pada persamaan (4.3) dan (4.4).

## 2) Constraint (batasan)

Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang sudah dikonstruksi menjadi sistem MPL, selisih pada waktu setiap langkah kejadian input diberikan batas maksimum dan batas minimum, yaitu batas maksimum  $b$  dan batas minimum  $a$  yang diberikan sebagai berikut.

$$a(k+j) \leq \Delta U(k+j) \leq b(k+j) \quad \text{untuk } j = 1, \dots, N_c - 1.$$

Kemudian waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem diberikan batas waktu *deadline* maksimum  $R(k)$ , yaitu sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem diberikan sebagai berikut.

$$\check{Y}(k+j|k) \leq R(k+j) \quad \text{untuk } j = 1, \dots, N_p$$

## 3) Evolusi input setelah kontrol horizon

Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang sudah dikonstruksi menjadi sistem MPL, selisih waktu pada setiap langkah kejadian input setelah kontrol horizon selalu tetap atau konstan. Kemudian selisih waktu dari setiap langkah urutan kejadian input harus lebih besar atau sama dengan nol yaitu

$\Delta U(k + j) \geq 0$ , dengan  $j = 0, \dots, N_p - 1$ , untuk menjamin bahwa urutan waktu input selalu naik.

Jadi secara keseluruhan, dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL, harus diketahui kondisi dan memenuhi batasan-batasan MPC sebagai berikut:

- 1) Kondisi awal waktu input  $U(-1)$ ,
- 2) Kondisi awal waktu proses pada pemroses  $X(0)$ ,
- 3)  $k = 0$ , yaitu variabel pada setiap langkah waktu kejadian input maupun output,
- 4) Prediksi horizon  $N_p$ , yaitu rentang waktu prediksi dalam memprediksi waktu optimal pada setiap langkah kejadian proses produksi dimulai dari langkah kejadian ke- $k$  sampai yang ke- $(k + N_p)$ .
- 5) Kontrol horizon  $N_c$ , yaitu rentang waktu pengendalian, dengan  $N_c \leq N_p$
- 6) Batas waktu *deadline* maksimum  $R(k)$ , yaitu sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem diberikan sebagai berikut.

$$\tilde{Y}(k + j|k) \leq R(k + j) \quad \text{untuk } j = 1, \dots, N_p$$

- 7) Batasan untuk selisih waktu dari setiap langkah kejadian ketika bahan baku masuk ke sistem. Untuk batas maksimum  $b$  dan batas minimum  $a$  yang diberikan sebagai berikut.

$$a(k + j) \leq \Delta U(k + j) \leq b(k + j) \quad \text{untuk } j = 1, \dots, N_c - 1$$

- 8) Bilangan tak negatif  $\lambda \geq 0$ , yaitu sebagai *trade-off* antara kriteria biaya output  $J_{\text{out}}$  dan kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$ .

Setelah diperoleh model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* dan telah ditentukan nilai-nilai dari kondisi beserta batasan-batasan yang memenuhi MPC diatas, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi tersebut, dengan cara memasukkan matriks parameter dari sistem MPL yaitu matriks  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ , dan  $C$  yang sudah didapatkan, beserta kondisi dan batasan-batasan yang memenuhi MPC di atas ke dalam *toolbox* program matlab MPC (Bart De

Schutter, 2001). Hasil simulasi dan analisa dari penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan program matlab, kemudian didapatkan urutan waktu optimal input  $[U_{\text{opt}}]_{k=0}^{N_p-1}$  dan urutan waktu optimal output  $[Y_{\text{opt}}]_{k=1}^{N_p}$  beserta kriteria biaya  $J$ .

#### 4) Kriteria biaya

Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang sudah dikonstruksi menjadi sistem MPL terdapat dua kriteria biaya, yaitu kriteria biaya input dan kriteria biaya. Setelah diperoleh urutan waktu optimal input dan urutan waktu optimal output kemudian diperoleh kriteria biaya  $J$ . Proses perhitungan untuk mendapatkan kriteria biaya  $J$  dijelaskan sebagai berikut.

Dari urutan waktu optimal output, kemudian diperoleh kriteria biaya output  $J_{\text{out}}$ , yaitu kriteria biaya dari waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem. Jika waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem tidak melewati atau sama dengan batas waktu *deadline* maksimum maka biaya nol, dan jika waktu bahan jadi meninggalkan sistem melewati batas waktu *deadline* maksimum maka terjadi keterlambatan. Dari persamaan (2.13), formula kriteria biaya output  $J_{\text{out}}$  diberikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 J_{\text{out}} &= \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^l \max(\tilde{Y}_i(k+j|k) - R_i(k+j), 0) \\
 &= \sum_{j=1}^{N_p} (\max(\tilde{Y}_1(k+j|k) - R_1(k+j), 0) + \max(\tilde{Y}_2(k+j|k) - R_2(k+j), 0) \\
 &\quad + \dots + \max(\tilde{Y}_n(k+j|k) - R_n(k+j), 0))
 \end{aligned}$$

Dari urutan waktu optimal input, kemudian diperoleh kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$ , yaitu kriteria biaya dari waktu ketika bahan baku masuk ke sistem. Kriteria biaya input adalah memaksimalkan waktu ketika bahan baku masuk ke sistem, yaitu bahan baku masuk ke sistem dibuat selambat mungkin. Dari persamaan (2.14), formula kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$  diberikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
J_{\text{in}} &= - \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^m U_i(k+j-1) \\
&= - \sum_{j=1}^{N_p} (U_1(k+j-1) + U_2(k+j-1) + \dots + U_m(k+j-1))
\end{aligned}$$

Dari kriteria biaya output  $J_{\text{out}}$  dan kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$  diperoleh kriteria biaya  $J$ , yang artinya bahwa dengan memaksimumkan waktu ketika bahan baku masuk ke sistem sedemikian hingga waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem tidak melewati atau sama dengan batas waktu *deadline* maksimum  $R(k)$  yang telah ditentukan. Dari persamaan (2.15), formula kriteria biaya  $J$  dari waktu optimal terprediksi dari sistem produksi diberikan sebagai berikut.

$$J = J_{\text{out}} + \lambda J_{\text{in}}$$

dengan  $\lambda \geq 0$ , yaitu sebagai *trade-off* antara kriteria biaya output  $J_{\text{out}}$  dan kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$ .

Untuk nilai  $\lambda > 1$  atau sangat besar, yaitu jika  $J_{\text{in}}$  berubah sedikit maka  $J$  berubah banyak, dan jika  $J_{\text{out}}$  berubah sedikit maka  $J$  berubah sedikit. Jadi untuk kasus  $\lambda$  bernilai besar maka yang diprioritaskan adalah waktu ketika bahan baku masuk ke sistem, sedangkan waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem tidak dipermasalahkan.

Untuk nilai  $\lambda < 1$  atau sangat kecil, yaitu jika  $J_{\text{in}}$  berubah sedikit maka  $J$  berubah sedikit, dan jika  $J_{\text{out}}$  berubah sedikit maka  $J$  juga berubah sedikit. Jadi untuk kasus  $\lambda$  bernilai kecil maka yang diprioritaskan adalah waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem, sedangkan waktu ketika bahan baku masuk ke sistem tidak dipermasalahkan.

Untuk nilai  $\lambda = 1$ , maka kriteria biaya waktu ketika bahan baku masuk ke sistem dan kriteria biaya waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem keduanya diprioritaskan. Berarti keduanya sangat penting.

Untuk lebih memperjelas dan memahami penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi, maka diberikan contoh penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang yang pemrosesnya tidak disertai *buffer* sebagai berikut.

**Contoh 4.1** Diberikan *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* yang menggambarkan susunan skema dari suatu mesin produksi mulai dari input, proses, sampai output. Kemudian diterapkan MPC untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari sistem produksi tersebut.

Misalkan terdapat suatu mesin produksi yang membutuhkan tiga bahan baku dan menghasilkan tiga jenis hasil produksi. Dalam sistem produksi tersebut terdapat 5 mesin untuk memroses bahan-bahan baku yaitu mesin 1, mesin 2, mesin 3, mesin 4 dan mesin 5. Mesin produksi tersebut pada pemrosesnya tidak disertai *buffer*.

Untuk menyelesaikan contoh permasalahan diatas, terdapat beberapa tahapan penyelesaian, yaitu sebagai berikut:

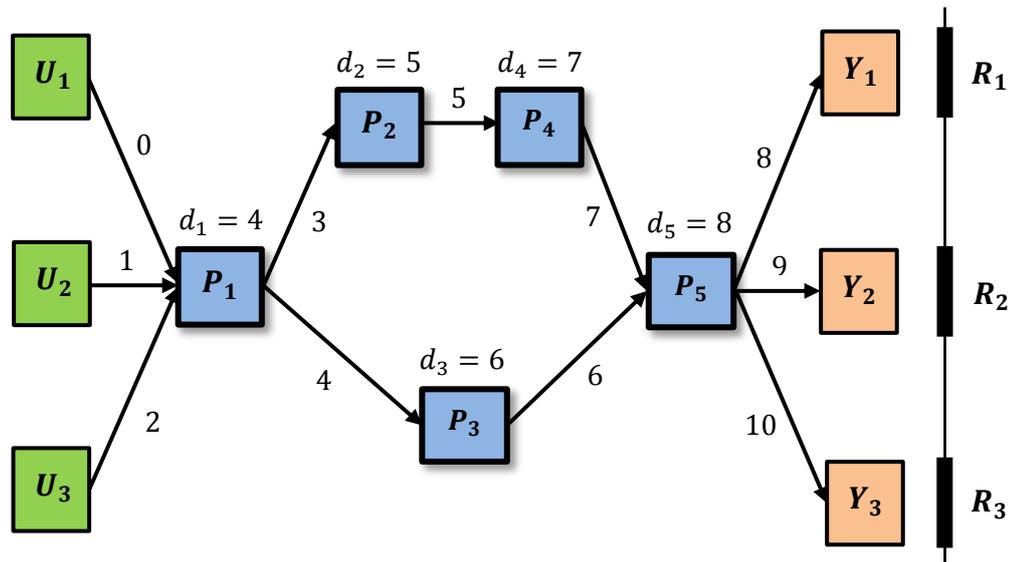
### 1) Tahap pertama

Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output. Dalam kasus contoh 4.1 ini, langsung diberikan model *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer*.

### 2) Tahap kedua

Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi beserta waktu prosesnya. Pada Gambar 4.3 terdapat 5 mesin yang tidak disertai *buffer* untuk memroses bahan-bahan baku yaitu mesin 1, mesin 2, mesin 3, mesin 4, dan mesin 5. Proses dalam sistem produksi tersebut, bahan-bahan baku dimasukkan dalam mesin 1. Output-output yang dihasilkan oleh mesin 1 kemudian diproses oleh mesin 2 dan 3, output dari mesin 2 kemudian diproses dimesin 4, sedangkan output dari mesin 3 diproses dimesin 5, dan output dari mesin 4 juga diproses dimesin 5. Jadi untuk memulai proses pada mesin 5 harus menunggu hasil dari mesin 3 dan mesin 4. Dan diberikan pula waktu *deadline* maksimum  $R_1$  sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi 1 meninggalkan sistem ( $Y_1$ ), waktu *deadline* maksimum  $R_2$  sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi 2 meninggalkan sistem ( $Y_2$ ), dan waktu *deadline* maksimum  $R_3$  sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi 3 meninggalkan sistem ( $Y_3$ ). Untuk

waktu proses yang dibutuhkan dalam sistem produksi tersebut seperti yang terlihat pada Gambar 4.3 diberikan sebagai berikut.



Gambar 4.3: *Flow line* bentuk sebarang dengan 3 input, 3 output, 3 waktu *deadline*, dan 5 pemroses tanpa *buffer*

Pada Gambar 4.3 terlihat bahwa lama waktu  $d_i$  yang dibutuhkan untuk melakukan proses pada mesin pemroses  $P_i$  diberikan sebagai berikut. Lama waktu untuk melakukan proses pada mesin pemroses 1 adalah  $d_1 = 4$  satuan waktu, lama waktu untuk melakukan proses pada mesin pemroses  $P_2$  adalah  $d_2 = 5$  satuan waktu, lama waktu untuk melakukan proses pada mesin pemroses  $P_3$  adalah  $d_3 = 6$  satuan waktu, lama waktu untuk melakukan proses pada mesin pemroses  $P_4$  adalah  $d_4 = 7$  satuan waktu, dan lama waktu untuk melakukan proses pada mesin pemroses  $P_5$  adalah  $d_5 = 8$  satuan waktu. Diberikan juga waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan-bahan mulai dari input, proses, sampai output adalah sebagai berikut. Lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan baku dari  $U_1$  ke mesin pemroses  $P_1$  adalah  $t_{u_1,1} = 0$  satuan waktu, lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan baku dari  $U_2$  ke mesin pemroses  $P_1$  adalah  $t_{u_2,1} = 1$  satuan waktu, lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan baku dari  $U_3$  ke mesin pemroses  $P_1$  adalah  $t_{u_3,1} = 2$  satuan waktu, kemudian lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan

setengah jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_1$  ke mesin pemroses  $P_2$  adalah  $t_{1,2} = 3$  satuan waktu, lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan setengah jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_1$  ke mesin pemroses  $P_3$  adalah  $t_{1,3} = 4$  satuan waktu, lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan setengah jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_2$  ke mesin pemroses  $P_4$  adalah  $t_{2,4} = 5$  satuan waktu, lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan setengah jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_3$  ke mesin pemroses  $P_5$  adalah  $t_{3,5} = 6$  satuan waktu, lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan setengah jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_4$  ke mesin pemroses  $P_5$  adalah  $t_{4,5} = 7$  satuan waktu, selanjutnya lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_5$  ke  $Y_1$  adalah  $t_{5,y_1} = 8$  satuan waktu, lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_5$  ke  $Y_2$  adalah  $t_{5,y_2} = 9$  satuan waktu, dan lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_5$  ke  $Y_3$  adalah  $t_{5,y_3} = 10$  satuan waktu.

Untuk memulai proses yang ke- $(k + 1)$  pada pemroses  $P_1$  harus menunggu sampainya bahan baku dari  $U_1$ ,  $U_2$ , dan  $U_3$  pada pemroses  $P_1$  saat yang ke- $(k + 1)$  dan selesainya proses di pemroses  $P_1$  saat yang ke- $k$ .

### 3) Tahap ketiga

Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer*. Berdasarkan waktu proses dan aturan proses produksi diatas, maka dapat disusun persamaan linier dari *flow line* sistem produksi pada Gambar 4.3 sebagai berikut.

$$X_1(k + 1) = \max(U_1(k) + 0, U_2(k) + 1, U_3(k) + 2, X_1(k) + 4)$$

$$\begin{aligned} X_2(k + 1) &= \max(X_1(k + 1) + 4 + 3, X_2(k) + 5) \\ &= \max(X_1(k + 1) + 7, X_2(k) + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3(k + 1) &= \max(X_1(k + 1) + 4 + 4, X_3(k) + 6) \\ &= \max(X_1(k + 1) + 8, X_3(k) + 6) \end{aligned}$$

$$X_4(k + 1) = \max(X_2(k + 1) + 5 + 5, X_4(k) + 7)$$

$$\begin{aligned}
&= \max(X_2(k+1) + 10, X_4(k) + 7) \\
X_5(k+1) &= \max(X_3(k+1) + 6 + 6, X_4(k+1) + 7 + 7, X_5(k) + 8) \\
&= \max(X_3(k+1) + 12, X_4(k+1) + 14, X_5(k) + 8) \\
Y_1(k) &= 8 + 8 + X_5(k) \\
&= 16 + X_5(k) \\
Y_2(k) &= 8 + 9 + X_5(k) \\
&= 17 + X_5(k) \\
Y_3(k) &= 8 + 10 + X_5(k) \\
&= 18 + X_5(k)
\end{aligned}$$

Jika dituliskan dalam persamaan aljabar max-plus, maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
X_1(k+1) &= 4 \otimes X_1(k) \oplus 0 \otimes U_1(k) \oplus 1 \otimes U_2(k) \oplus 2 \otimes U_3(k) \\
X_2(k+1) &= 4 \otimes 3 \otimes X_1(k+1) \oplus 5 \otimes X_2(k) \\
&= 7 \otimes X_1(k+1) \oplus 5 \otimes X_2(k) \\
X_3(k+1) &= 4 \otimes 4 \otimes X_1(k+1) \oplus 6 \otimes X_3(k) \\
&= 8 \otimes X_1(k+1) \oplus 6 \otimes X_3(k) \\
X_4(k+1) &= 5 \otimes 5 \otimes X_2(k+1) \oplus 7 \otimes X_4(k) \\
&= 10 \otimes X_2(k+1) \oplus 7 \otimes X_4(k) \\
X_5(k+1) &= 6 \otimes 6 \otimes X_3(k+1) \oplus 7 \otimes 7 \otimes X_4(k+1) \oplus 8 \otimes X_5(k) \\
&= 12 \otimes X_3(k+1) \oplus 14 \otimes X_4(k+1) \oplus 8 \otimes X_5(k) \\
Y_1(k) &= 8 \otimes 8 \otimes X_5(k) \\
&= 16 \otimes X_5(k) \\
Y_2(k) &= 8 \otimes 9 \otimes X_5(k) \\
&= 17 \otimes X_5(k) \\
Y_3(k) &= 8 \otimes 10 \otimes X_5(k) \\
&= 18 \otimes X_5(k)
\end{aligned}$$

dimana

$X_1(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin yang ke-1 pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$X_2(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin yang ke-2 pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$X_3(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin yang ke-3 pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$X_4(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin yang ke-4 pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$X_5(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin yang ke-5 pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$U_1(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan baku yang ke-1 masuk ke sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$U_2(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan baku yang ke-2 masuk ke sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$U_3(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan baku yang ke-3 masuk ke sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$Y_1(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan jadi yang ke-1 meninggalkan sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$Y_2(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan jadi yang ke-2 meninggalkan sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$Y_3(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan jadi yang ke-3 meninggalkan sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

Berdasarkan Lema 2.1 (Pohet B., 2015), persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks aljabar max-plus dari *flow line* sistem produksi pada Gambar 4.3 asebagai berikut.

$$\begin{aligned} X(k + 1) &= A \otimes X(k + 1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \\ Y(k) &= C \otimes X(k) \end{aligned}$$

dengan

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 12 & 14 & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 16 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 17 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 18 \end{bmatrix}, \text{ dan } D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Dari matriks  $A$ , kemudian diperoleh matriks  $A^*$  yang didefinisikan sebagai  $A^* = E \oplus A^+$  dengan  $E$  adalah matriks identitas dalam aljabar max-plus dan  $A^{+5} = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} \oplus A^{\otimes 4} \oplus A^{\otimes 5}$  adalah sebagai berikut.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 12 & 14 & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 17 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 20 & 24 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 31 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$A^{\otimes 4} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \text{ dan } A^{\otimes 5} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan matriks  $A^*$  adalah sebagai berikut.

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 17 & 10 & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 31 & 24 & 12 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2), persamaan matriks diatas dapat disederhanakan, sehingga didapatkan model sistem max-plus linier (MPL) dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang tanpa *buffer* pada Gambar 4.3 sebagai berikut.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k) \\ Y(k) &= C \otimes X(k) \end{aligned}$$

dengan

$$\hat{A} = A^* \otimes B = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 11 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 12 & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 21 & 15 & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ 35 & 29 & 18 & 21 & 8 \end{bmatrix} \text{ dan } \hat{B} = A^* \otimes D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 11 \\ 18 & 19 & 20 \\ 32 & 33 & 34 \end{bmatrix}$$

Perhitungan  $A^*$ ,  $\hat{A}$ , dan  $\hat{B}$  didapatkan dengan menggunakan *Max-plus Algebra and Petri Net Toolbox* yang diimplementasikan dengan program scilab 5.5.1.

#### 4) Tahap keempat

Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut. Setelah diperoleh bentuk model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi pada Gambar 4.3, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem MPL.

Untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari suatu *flow line* sistem produksi harus melalui proses evolusi sistem, yaitu proses perhitungan untuk mendapatkan urutan waktu optimal output terprediksi, yang tentunya sudah didapatkan urutan waktu optimal input dengan menggunakan konsep *receding*

*horizon*. Evolusi sistem dalam bentuk matriks dengan  $N_p = 7$  diperoleh sebagai berikut.

$$\tilde{Y}(k) = G(k) \oplus H \otimes \tilde{U}(k)$$

dengan

$$\tilde{Y}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1(k+1|k) \\ \tilde{Y}_2(k+1|k) \\ \tilde{Y}_3(k+1|k) \\ \tilde{Y}_1(k+2|k) \\ \tilde{Y}_2(k+2|k) \\ \tilde{Y}_3(k+2|k) \\ \vdots \\ \tilde{Y}_1(k+7|k) \\ \tilde{Y}_2(k+7|k) \\ \tilde{Y}_3(k+7|k) \end{bmatrix}, \tilde{U}(k) = \begin{bmatrix} U_1(k) \\ U_2(k) \\ U_3(k) \\ U_1(k+1) \\ U_2(k+1) \\ U_2(k+1) \\ \vdots \\ U_1(k+6) \\ U_2(k+6) \\ U_3(k+6) \end{bmatrix}, G(k) = \begin{bmatrix} C \otimes \hat{A} \\ C \otimes \hat{A}^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C \otimes \hat{A}^{\otimes 7} \end{bmatrix} \otimes X(k)$$

dimana

$$C \otimes \hat{A} = \begin{bmatrix} 51 & 45 & 34 & 37 & 24 \\ 52 & 46 & 35 & 38 & 25 \\ 53 & 47 & 36 & 39 & 26 \end{bmatrix}, C \otimes \hat{A}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 59 & 53 & 42 & 45 & 32 \\ 60 & 54 & 43 & 46 & 33 \\ 61 & 55 & 44 & 47 & 34 \end{bmatrix},$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 67 & 61 & 50 & 53 & 40 \\ 68 & 62 & 51 & 54 & 41 \\ 69 & 63 & 52 & 55 & 42 \end{bmatrix}, C \otimes \hat{A}^{\otimes 4} = \begin{bmatrix} 75 & 69 & 58 & 61 & 48 \\ 76 & 70 & 59 & 62 & 49 \\ 77 & 71 & 60 & 63 & 49 \end{bmatrix},$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 5} = \begin{bmatrix} 83 & 77 & 66 & 69 & 56 \\ 84 & 78 & 67 & 70 & 57 \\ 85 & 79 & 68 & 71 & 58 \end{bmatrix}, C \otimes \hat{A}^{\otimes 6} = \begin{bmatrix} 91 & 85 & 74 & 77 & 64 \\ 92 & 86 & 75 & 78 & 65 \\ 93 & 87 & 76 & 79 & 66 \end{bmatrix},$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 7} = \begin{bmatrix} 99 & 93 & 82 & 85 & 72 \\ 100 & 94 & 83 & 86 & 73 \\ 101 & 95 & 84 & 87 & 74 \end{bmatrix}, \text{ dan } X(k) = \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \\ X_5(k) \end{bmatrix},$$

$$\text{sedangkan } H = \begin{bmatrix} C \otimes \hat{B} & \mathcal{E}(3 \times 3) & \cdots & \mathcal{E}(3 \times 3) \\ C \otimes \hat{A} \otimes \hat{B} & C \otimes \hat{B} & \cdots & \mathcal{E}(3 \times 3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes \hat{A}^{\otimes 6} \otimes \hat{B} & C \otimes \hat{A}^{\otimes 5} \otimes \hat{B} & \cdots & C \otimes \hat{B} \end{bmatrix}$$

dimana

$$C \otimes \hat{B} = \begin{bmatrix} 48 & 49 & 50 \\ 49 & 50 & 51 \\ 50 & 51 & 52 \end{bmatrix}, \quad C \otimes \hat{A} \otimes \hat{B} = \begin{bmatrix} 56 & 57 & 58 \\ 57 & 58 & 59 \\ 58 & 59 & 60 \end{bmatrix},$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 2} \otimes \hat{B} = \begin{bmatrix} 64 & 65 & 66 \\ 65 & 66 & 67 \\ 66 & 67 & 68 \end{bmatrix}, \quad C \otimes \hat{A}^{\otimes 3} \otimes \hat{B} = \begin{bmatrix} 72 & 73 & 74 \\ 73 & 74 & 75 \\ 74 & 75 & 76 \end{bmatrix},$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 4} \otimes \hat{B} = \begin{bmatrix} 80 & 81 & 82 \\ 81 & 82 & 83 \\ 82 & 83 & 84 \end{bmatrix}, \quad C \otimes \hat{A}^{\otimes 5} \otimes \hat{B} = \begin{bmatrix} 88 & 89 & 90 \\ 89 & 90 & 91 \\ 90 & 91 & 92 \end{bmatrix},$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 6} \otimes \hat{B} = \begin{bmatrix} 96 & 97 & 98 \\ 97 & 98 & 99 \\ 98 & 99 & 100 \end{bmatrix}, \text{ dan } \mathcal{E}(3 \times 3) \text{ adalah matriks } \textit{null} \text{ ordo } 3 \times 3.$$

Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL, harus diketahui kondisi beserta batasan-batasan sebagai berikut:

- 1) Kondisi awal waktu input  $U_i(-1) = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,
- 2) Kondisi awal waktu proses pada pemroses  $X(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10]^T$ ,
- 3)  $k = 0$ , adalah kondisi variabel yang digunakan pada setiap langkah waktu kejadian input maupun output.
- 4) Prediksi horizon  $N_p = 7$ . Diambil nilai 7 karena akan memprediksi waktu optimal pada setiap langkah kejadian proses produksi sampai 7 langkah kejadian berikutnya.
- 5) Kontrol horizon  $N_c = 4$ . Diambil nilai 4 karena nilai tersebut memenuhi  $N_c \leq N_p$ .

- 6) Waktu *deadline* maksimum sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem yang telah diberikan sebagai berikut

$$R(k) = [70 \ 71 \ 72 \ 75 \ 76 \ 77 \ 80 \ 81 \ 82 \ 86 \ 87 \ 88 \ 90 \\ 91 \ 92 \ 95 \ 96 \ 97 \ 100 \ 101 \ 102]^T$$

- 7) Batas maksimum dan minimum dari selisih waktu pada setiap langkah kejadian ketika bahan baku masuk ke sistem. Dengan batas maksimum adalah 12 dan batas minimum adalah 2, yang telah diberikan sebagai berikut.

$$2 \leq \Delta U(k + j) \leq 12 \text{ untuk } j = 0, 1, \dots, 3.$$

- 8) dan  $\lambda = 1$ . Karena pada contoh 4.1 ini dianggap bahwa kriteria biaya output  $J_{\text{out}}$  dan kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$  keduanya diprioritaskan.

Selanjutnya, setelah diperoleh sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* dan telah ditentukan nilai-nilai dari kondisi beserta batasan-batasan yang memenuhi MPC diatas, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi, dengan cara memasukkan matriks parameter dari sistem MPL yaitu matriks  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ , dan  $C$  yang sudah didapatkan, beserta kondisi dan batasan-batasan yang memenuhi MPC di atas ke dalam *toolbox* program matlab MPC (Bart De Schutter, 2001). Hasil simulasi dan analisa dari penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan program matlab tersebut, kemudian diperoleh urutan waktu optimal input sebagai berikut

$$[U_{\text{opt}}]_{k=0}^6 = [U_1 \ U_2 \ U_3]^T \\ = [12 \ 12 \ 12 \ 24 \ 24 \ 24 \ 34 \ 33 \ 32 \ 42 \ 41 \ 40 \ 50 \\ 49 \ 48 \ 58 \ 57 \ 56 \ 66 \ 65 \ 64]^T$$

urutan waktu optimal output sebagai berikut

$$[Y_{\text{opt}}]_{k=1}^7 = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3]^T \\ = [62 \ 63 \ 64 \ 74 \ 75 \ 76 \ 82 \ 83 \ 84 \ 90 \ 91 \ 92 \ 98 \\ 99 \ 100 \ 106 \ 107 \ 108 \ 114 \ 115 \ 116]^T$$

dan kriteria biaya  $J = -726$ .

Selanjutnya, setelah diperoleh urutan waktu optimal output dan urutan waktu optimal input kemudian diperoleh kriteria biaya  $J$ . Proses perhitungan untuk mendapatkan kriteria biaya  $J$  di jelaskan sebagai berikut.

Dari urutan waktu optimal output, kemudian diperoleh kriteria biaya output  $J_{out}$ . Berdasarkan persamaan (2.13) formula untuk kriteria biaya output  $J_{out}$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
J_{out} &= \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^3 \max(\tilde{Y}_i(k+j|k) - R_i(k+j), 0) \\
&= \sum_{j=1}^7 (\max(\tilde{Y}_1(k+j|k) - R_1(k+j), 0) + \max(\tilde{Y}_2(k+j|k) - R_2(k+j), 0) \\
&\quad + \max(\tilde{Y}_3(k+j|k) - R_3(k+j), 0)) \\
&= \max((62 - 70), 0) + \max((63 - 71), 0) + \max((64 - 72), 0) \\
&\quad + \max((74 - 75), 0) + \max((75 - 76), 0) + \max((76 - 77), 0) \\
&\quad + \max((82 - 80), 0) + \max((83 - 81), 0) + \max((84 - 82), 0) \\
&\quad + \max((90 - 86), 0) + \max((91 - 87), 0) + \max((92 - 88), 0) \\
&\quad + \max((98 - 90), 0) + \max((99 - 91), 0) + \max((100 - 92), 0) \\
&\quad + \max((106 - 95), 0) + \max((107 - 96), 0) + \max((108 - 97), 0) \\
&\quad + \max((114 - 100), 0) + \max((115 - 101), 0) \\
&\quad + \max((116 - 102), 0) \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8 + 8 + 11 + 11 \\
&\quad + 11 + 14 + 14 + 14 \\
&= 117
\end{aligned}$$

Jadi kriteria biaya output  $J_{out} = 117$

Dari urutan waktu optimal input, kemudian diperoleh kriteria biaya input  $J_{in}$ . Berdasarkan persamaan (2.14) formula untuk kriteria biaya input  $J_{in}$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
J_{in} &= - \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^3 U_i(k+j-1) \\
&= - \sum_{j=1}^7 (U_1(k+j-1) + U_2(k+j-1) + U_3(k+j-1)) \\
&= -(12 + 12 + 12 + 24 + 24 + 24 + 34 + 33 + 32 + 42 + 41 + 40 + 50 \\
&\quad + 49 + 48 + 58 + 57 + 56 + 66 + 65 + 64) \\
&= -843
\end{aligned}$$

Jadi kriteria biaya input  $J_{inp} = -843$

Dari kriteria biaya output  $J_{out}$  dan kriteria biaya input  $J_{in}$ , kemudian diperoleh kriteria biaya  $J$  dengan  $\lambda = 1$  sebagai berikut.

$$J = J_{out} + \lambda J_{in}$$

$$J = 117 - 843$$

$$J = -726$$

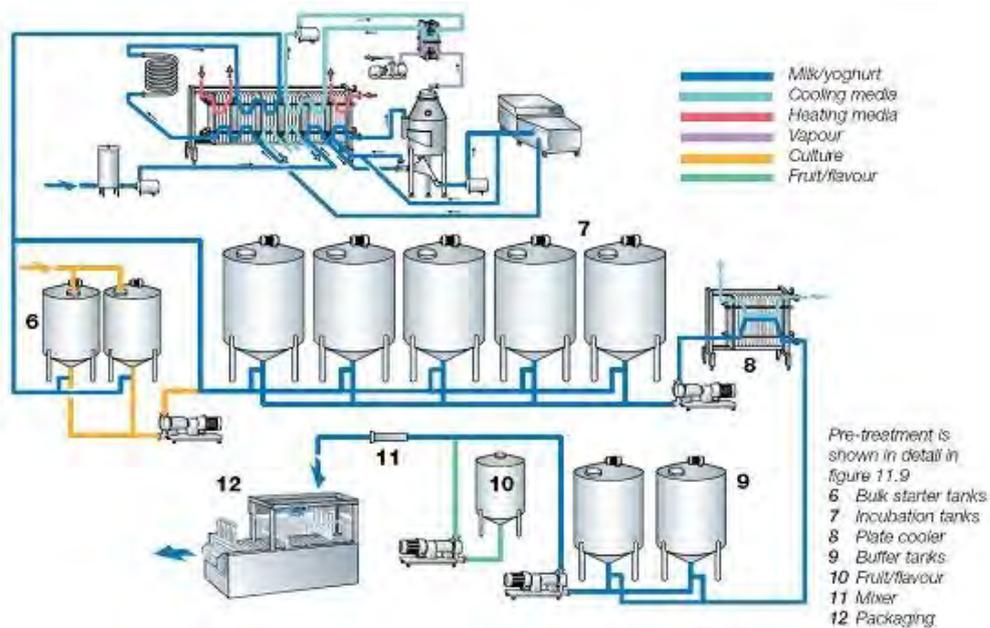
#### 4.1.2 Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi dengan *Buffer*

Pada bagian ini dijelaskan mengenai penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan pemrosesnya disertai *buffer*. Pada dasarnya penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan *buffer* sama seperti halnya pada penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi tanpa *buffer*, yaitu sistem MPL yang telah diperoleh dari *flow line* sistem produksi tersebut digunakan dalam penerapan MPC untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dalam sistem produksi. Yang membedakan adalah proses penurunan rumus persamaan sistem MPL dari *flow line* sistem produksi, karena jika pada *flow line* sistem produksi dengan *buffer*, bahan setengah jadi yang akan diproses dari mesin satu ke mesin lainnya harus melalui *buffer* terlebih dahulu. Jadi sistem MPL dari *flow line* sistem produksi tanpa *buffer* berdasarkan Lema 2.1 dan sistem MPL dari *flow line* sistem produksi dengan *buffer* berdasarkan Lema 2.2.

Seperti halnya pada penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer*, penyelesaian pada penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan pemrosesnya disertai *buffer* juga memiliki tahapan penyelesaian yang sama, yaitu sebagai berikut.

### 1) Tahap pertama

Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dikonstruksi sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output. Untuk mengkonstruksi *flow line* sistem produksi, terlebih dahulu harus mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi. Misalkan diberikan contoh suatu mesin produksi dengan pemrosesnya disertai *buffer* yang di ilustrasikan pada Gambar 4.4 berikut.



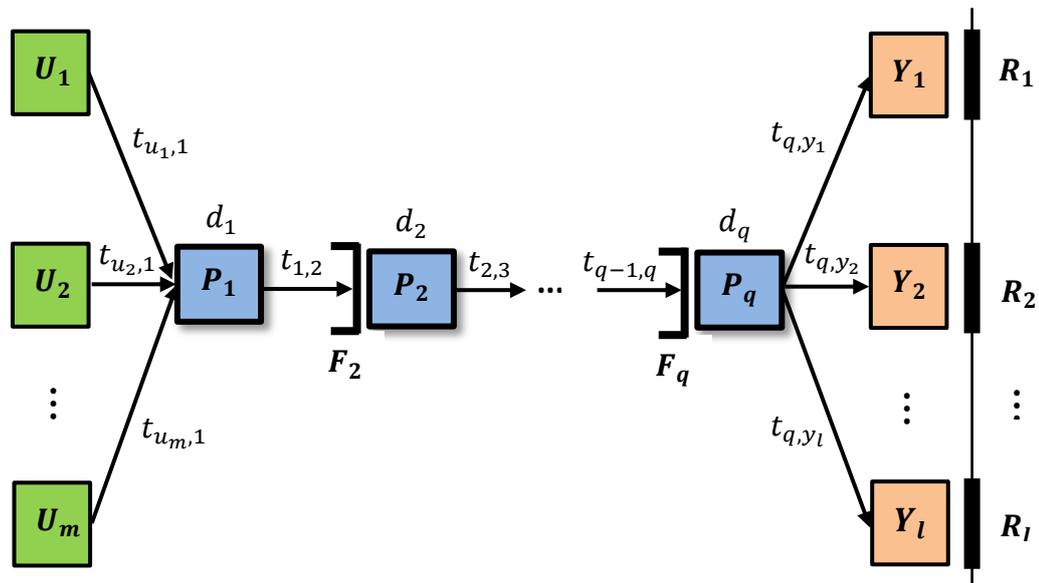
Gambar 4.4: Mesin produksi dengan pemrosesnya disertai *buffer* (Dairy Processing Hand Book, 2012)

Contoh *buffer* pada mesin produksi pada Gambar 4.4 yaitu pada nomor 9 bernama *buffer tanks*, sebagai penyimpan sementara bahan setengah jadi dari proses pembuatan susu *yoghurt* atau susu fermentasi sebelum diproses ke mesin

berikutnya sampai menjadi susu *yoghurt* dalam kemasan yang siap konsumsi. Dengan *buffer tanks* tersebut mempunyai kapasitas terbatas.

## 2) Tahap kedua

Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi tersebut beserta waktu prosesnya. Setelah mengetahui suatu mesin produksi yang akan dimodelkan, kemudian dikonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema mesin produksi tersebut. Misalkan diberikan bentuk model *flow line* sistem produksi pada Gambar 4.5 yang menggambarkan susunan skema dari mesin produksi pada Gambar 4.4 sebagai berikut.



Gambar 4.5: *Flow lines* dengan  $m$  input,  $q$  pemroses,  $l$  output,  $l$  waktu *deadline*, dan disertai *buffer* pada pemroses  $P_2, P_3, \dots, P_q$  (Pohet B., 2015).

Misalkan  $X_i(k)$  merupakan waktu memulai proses yang ke- $k$  pada pemroses ke- $i$ ,  $Y_s(k)$  merupakan waktu ketika produk ke- $s$  selesai diproses dan meninggalkan sistem saat yang ke- $k$ , dan  $U_a(k+1)$  merupakan waktu ketika bahan dasar ke- $a$  masuk ke sistem dan siap untuk diproses saat yang ke- $(k+1)$ .

Pada Gambar 4.5 terlihat bahwa *flow line* sistem produksi tersebut pemrosesnya disertai *buffer* yang terletak pada pemroses  $P_2, P_3$  sampai dengan  $P_q$

dengan kapasitas sebesar  $F_2, F_3$  sampai dengan  $F_q$ . Jika  $d_i$  merupakan waktu yang dibutuhkan untuk melakukan proses pada pemroses ke- $i$ ,  $t_{u_a,1}$  merupakan waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan bahan baku dari input  $U_a$  menuju pemroses ke-1 ( $P_1$ ),  $t_{n,y_s}$  merupakan waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan bahan baku dari pemroses ke- $n$  ( $P_n$ ) menuju output  $Y_s$ ,  $t_{i,j}$  merupakan waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan setengah jadi dari pemroses  $P_i$  menuju pemroses  $P_j$ , dan  $F_i$  merupakan kapasitas *buffer* yang terdapat pada pemroses ke- $i$  dengan  $a = 1, 2, 3, \dots, m$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots, l$ , dan  $i, j = 1, 2, 3, \dots, q$ . Diberikan pula waktu *deadline* maksimum yang telah ditentukan  $R(k)$ , sebagai pembatas waktu supaya waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem tidak melewati batas waktu *deadline* maksimum. Untuk  $Y_1$  batas waktu *deadline* maksimum adalah  $R_1$ , untuk  $Y_2$  batas waktu *deadline* maksimum adalah  $R_2$ , dan seterusnya sampai untuk  $Y_l$  batas waktu *deadlinenya* adalah  $R_l$ .

Untuk memulai proses ke- $i$  ( $P_i$ ) yang ke- $(k + 1)$  harus menunggu sampainya bahan baku pada  $P_i$  saat yang ke- $(k + 1)$ , selesainya proses pada pemroses  $P_i$  saat yang ke- $k$ , dan harus menunggu pemroses  $P_{i+1}$  telah memulai proses untuk kejadian yang ke- $(k - F_{i+1})$ .

### 3) Tahap ketiga

Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer*. Setelah mengkonstruksi bentuk *flow line* sistem produksi seperti yang terlihat pada Gambar 4.5 dari mesin produksi dengan pemrosesnya disertai *buffer* yang telah diberikan pada Gambar 4.4, kemudian dimodelkan sebagai sistem MPL dari *flow line* sistem produksi tersebut, yang di berikan sebagai berikut.

Berdasarkan Lema 2.2 (Pohet B. 2015), persamaan aljabar max-plus dalam bentuk matriks dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang yang pemrosesnya disertai *buffer* pada Gambar 4.5 adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
X(k+1) &= A \otimes X(k+1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \oplus A_2 \\
&\quad \otimes X_2(k-F_2) \oplus A_3 \otimes X_3(k-F_3) \oplus \dots \oplus A_q \\
&\quad \otimes X_q(k-F_q)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k) \tag{4.6}$$

dengan  $A, B, A_2, \dots, A_q \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{l \times q}$ , dan  $D \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q \times m}$ .

Dari persamaan (2.1) dan (2.2), Persamaan (4.5) dapat disederhanakan dengan mendapatkan matriks  $A^*$ . Sehingga persamaan (4.5) dan (4.6) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
X(k+1) &= \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k) \oplus \widehat{AB}_2 \otimes X_2(k-F_2) \oplus \widehat{AB}_3 \\
&\quad \otimes X_3(k-F_3) \oplus \dots \oplus \widehat{AB}_q \otimes X_q(k-F_q)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

dengan  $\hat{A} = A^* \otimes B$ ,  $\hat{B} = A^* \otimes D$ , dan  $\widehat{AB}_i = A^* \otimes A_i$ .

Karena operasi  $\oplus$  pada aljabar max-plus bersifat komutatif maka persamaan (4.7) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
X(k+1) &= \hat{A} \otimes X(k) \oplus \widehat{AB}_2 \otimes X_2(k-F_2) \oplus \widehat{AB}_3 \otimes X_3(k-F_3) \\
&\quad \oplus \dots \oplus \widehat{AB}_q \otimes X_q(k-F_q) \oplus \hat{B} \otimes U(k)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

Dari persamaan (4.8), kemudian diperoleh persamaan sistem max-plus linier (MPL) dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang yang pemrosesnya disertai *buffer* adalah sebagai berikut.

$$\check{X}(k+1) = \check{A} \otimes \check{X}(k) \oplus \check{B} \otimes U(k) \tag{4.9}$$

$$Y(k) = \check{C} \otimes \check{X}(k) \tag{4.10}$$

dengan  $\check{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\check{q} \times \check{q}}$ ,  $\check{B} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\check{q} \times m}$ , dan  $\check{C} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{l \times \check{q}}$  untuk  $\check{q} = q(\max(F_1, F_2, \dots, F_q) + 1)$

sedangkan  $\check{X}(k) = \begin{bmatrix} X(k) \\ X(k-1) \\ X(k-2) \\ \vdots \\ X(k - \max(F_1, F_2, \dots, F_q)) \end{bmatrix},$

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & [\check{A}]_{1,2} & \cdots & [\check{A}]_{1,s-1} & [\check{A}]_{1,s} \\ E(q \times q) & \mathcal{E}(q \times q) & \cdots & \mathcal{E}(q \times q) & \mathcal{E}(q \times q) \\ \mathcal{E}(q \times q) & E(q \times q) & \cdots & \mathcal{E}(q \times q) & \mathcal{E}(q \times q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{E}(q \times q) & \mathcal{E}(q \times q) & \cdots & E(q \times q) & \mathcal{E}(q \times q) \end{bmatrix}, \check{B} = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ \mathcal{E}(q \times m) \\ \mathcal{E}(q \times m) \\ \vdots \\ \mathcal{E}(q \times m) \end{bmatrix}$$

dan  $\check{C} = [C \ \mathcal{E}(n \times q) \ \mathcal{E}(n \times q) \ \cdots \ \mathcal{E}(n \times q)]$  dengan  $E(q \times q)$  adalah matriks identitas berordo  $q \times q$ , dan  $\mathcal{E}(q \times q)$  adalah matriks *null* yaitu matriks berordo  $q \times q$  yang semua elemennya adalah  $\varepsilon$ . Sedangkan  $[\check{A}]_{1,b}$  didefinisikan sebagai berikut.

$$[\check{A}]_{1,b} = \bigoplus_{l=1, F_l=b-1}^q \widehat{A}B_l \quad (4.11)$$

dengan  $b = 2, 3, \dots, t$  dan  $t = \max(F_1, F_2, \dots, F_q) + 1$ .

#### 4) Tahap keempat

Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer* dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut. Setelah tersusun model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi dengan pemrosesnya disertai *buffer* tersebut, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem MPL,

Untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari suatu *flow line* sistem produksi harus melalui proses evolusi sistem, yaitu proses perhitungan untuk mendapatkan urutan waktu optimal output terprediksi, yang tentunya sudah didapatkan urutan waktu optimal input dengan menggunakan prinsip *receding*

*horizon*, dimana proses untuk mendapatkan urutan waktu optimal input dengan prinsip *receding horizon* diperoleh dari *toolbox* program matlab MPC (De Schutter, B. and van den Boom, T., 2000). Evolusi sistem dalam bentuk matriks diberikan sebagai berikut.

$$\check{Y}(k) = G(k) \oplus H \otimes \check{U}(k)$$

dengan

$$\check{Y}(k) = \begin{bmatrix} \check{Y}(k+1|k) \\ \check{Y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \check{Y}(k+N_p|k) \end{bmatrix}, \check{U}(k) = \begin{bmatrix} U(k) \\ U(k+1) \\ \vdots \\ U(k+N_p-1) \end{bmatrix}, G(k) = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes N_p} \end{bmatrix} \otimes X(k)$$

$$\text{dan } H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes N_p-1} \otimes B & C \otimes A^{\otimes N_p-2} \otimes B & \cdots & C \otimes B \end{bmatrix},$$

Persamaan matriks aljabar max-plus waktu taksiran output  $\check{Y}(k)$  pada *flow line* sistem produksi, di dalam matriks  $G$  dan  $H$  terdapat matriks parameter  $A$ ,  $B$ , dan  $C$ . Namun jika untuk persamaan matriks aljabar max-plus waktu taksiran output  $\check{Y}(k)$  pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer*, maka di dalam matriks  $G$  dan  $H$  menggunakan matriks parameter  $\check{A}$ ,  $\check{B}$ , dan  $\check{C}$  seperti pada persamaan (4.9) dan (4.10).

Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL, harus diketahui kondisi beserta batasan-batasan sebagai berikut:

- 1) Kondisi awal waktu input  $U(-1)$ ,
- 2) Kondisi awal waktu proses pada pemroses  $X(0)$ ,
- 3)  $k = 0$ , yaitu variabel pada setiap langkah waktu kejadian input maupun output,

- 4) Prediksi horizon  $N_p$ , yaitu rentang waktu prediksi dalam meprediksi waktu optimal pada setiap langkah kejadian proses produksi dimulai dari langkah yang ke- $k$  sampai yang ke- $(k + N_p)$ .
- 5) Kontrol horizon  $N_c$ , yaitu rentang waktu pengendalian, dengan  $N_c \leq N_p$
- 6) Batas waktu *deadline* maksimum  $R(k)$ , yaitu sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem.

$$\tilde{Y}(k + j|k) \leq R(k + j) \quad \text{untuk } j = 1, \dots, N_p$$

- 7) Batasan untuk selisih waktu dari setiap langkah kejadian ketika bahan baku masuk ke sistem. Untuk batas maksimum  $b$  dan batas minimum  $a$

$$a(k + j) \leq \Delta U(k + j) \leq b(k + j) \quad \text{untuk } j = 1, \dots, N_c - 1$$

- 8) Bilangan tak negatif  $\lambda \geq 0$ , yaitu sebagai *trade-off* antara kriteria biaya output  $J_{out}$  dan kriteria biaya input  $J_{in}$ .

Setelah diperoleh model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* dan sudah ditentukan nilai-nilai dari kondisi beserta batasan-batasan yang memenuhi MPC diatas, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi tersebut, dengan cara memasukkan matriks parameter dari sistem MPL yaitu matriks  $\check{A}$ ,  $\check{B}$ , dan  $\check{C}$  yang sudah didapatkan, beserta kondisi dan batasan-batasan yang memenuhi MPC di atas ke dalam *toolbox* program matlab MPC (Bart De Schutter, 2001). Hasil simulasi dan analisa dari penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan program matlab, kemudian didapatkan urutan waktu optimal input  $[U_{opt}]_{k=0}^{N_p-1}$  dan urutan waktu optimal output  $[Y_{opt}]_{k=1}^{N_p}$  beserta kriteria biaya  $J$ .

Selanjutnya, setelah diperoleh urutan waktu optimal output dan urutan waktu optimal input kemudian diperoleh kriteria biaya  $J$ . Proses perhitungan untuk mendapatkan kriteria biaya  $J$  di jelaskan sebagai berikut.

Dari urutan waktu optimal output, kemudian diperoleh kriteria biaya output  $J_{out}$ . Berdasarkan persamaan (2.13) formula untuk kriteria biaya output  $J_{out}$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
J_{\text{out}} &= \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^l \max(\tilde{Y}_i(k+j|k) - R_i(k+j), 0) \\
&= \sum_{j=1}^{N_p} (\max(\tilde{Y}_1(k+j|k) - R_1(k+j), 0) + \max(\tilde{Y}_2(k+j|k) - R_2(k+j), 0) \\
&\quad + \dots + \max(\tilde{Y}_n(k+j|k) - R_n(k+j), 0))
\end{aligned}$$

Kemudian, dari urutan waktu optimal input, kemudian diperoleh kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$ . Berdasarkan persamaan (2.14) formula untuk kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
J_{\text{in}} &= - \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^m U_i(k+j-1) \\
&= - \sum_{j=1}^{N_p} (U_1(k+j-1) + U_2(k+j-1) + \dots + U_m(k+j-1))
\end{aligned}$$

Jadi, dari kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$  dan kriteria biaya output  $J_{\text{out}}$ , kemudian diperoleh kriteria biaya  $J$  sebagai berikut.

$$J = J_{\text{out}} + \lambda J_{\text{in}}$$

dengan  $\lambda \geq 0$ , yaitu sebagai *trade-off* antara kriteria biaya output  $J_{\text{out}}$  dan kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$ .

Untuk lebih memperjelas dan memahami penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang, maka diberikan contoh *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer*. Berikut adalah contoh penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer*.

**Contoh 4.2** Diberikan *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer* yang menggambarkan susunan skema dari suatu mesin produksi mulai dari input, proses, sampai output sebagai berikut. Kemudian

diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari sistem produksi.

Misalkan terdapat suatu mesin produksi yang membutuhkan tiga bahan baku dan menghasilkan dua jenis hasil produksi. Dalam sistem produksi tersebut terdapat 4 mesin untuk memroses bahan-bahan baku yaitu mesin 1, mesin 2, mesin 3, dan mesin 4. Beberapa mesin pada sistem produksi tersebut disertai *buffer* yaitu pada mesin 3 dengan kapasitas 1 satuan dan pada mesin 4 dengan kapasitas 1 satuan.

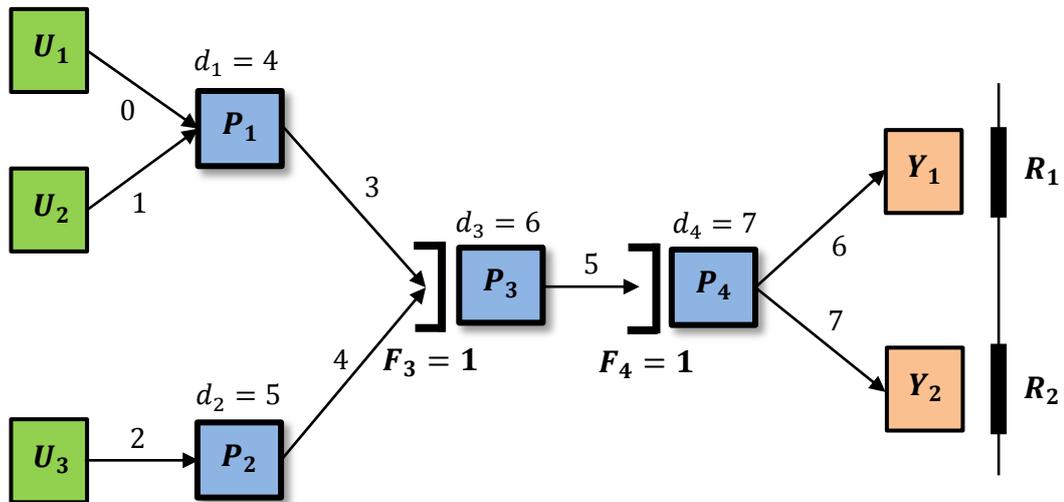
Untuk menyelesaikan contoh permasalahan diatas, terdapat beberapa tahapan penyelesaian, yaitu sebagai berikut:

### 1) Tahap pertama

Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output. Dalam kasus contoh 4.2 ini, langsung diberikan model *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer*.

### 2) Tahap kedua

Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi beserta waktu prosesnya. Proses dalam sistem produksi tersebut terdapat 2 bahan baku dimasukkan ke dalam mesin 1 dan satu bahan baku yang lainnya dimasukkan ke dalam mesin 2. Output-output yang dihasilkan oleh mesin 1 dan mesin 2 kemudian diproses oleh mesin 3, output dari mesin 3 kemudian diproses di mesin 4. Jadi untuk memulai proses pada mesin 4 harus menunggu hasil dari mesin 3, begitu pula untuk memulai proses pada mesin 3 harus menunggu hasil dari mesin 1 dan mesin 2. Dan diberikan pula waktu *deadline* maksimum  $R_1$  sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi 1 meninggalkan sistem ( $Y_1$ ) dan waktu *deadline* maksimum  $R_2$  sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi 2 meninggalkan sistem ( $Y_2$ ). Untuk waktu proses yang dibutuhkan dalam sistem produksi tersebut seperti yang terlihat pada Gambar 4.6 diberikan sebagai berikut.



Gambar 4.6: Flow lines dengan 3 input, 2 output, 2 waktu *deadline*, dan 2 pemroses yang disertai *buffer*.

Pada Gambar 4.6 terlihat bahwa waktu  $d_i$  yang dibutuhkan untuk melakukan proses pada mesin pemroses  $P_i$  adalah sebagai berikut. Lama waktu untuk melakukan proses pada mesin pemroses  $P_1$  adalah  $d_1 = 4$  satuan waktu, lama waktu untuk melakukan proses pada mesin pemroses  $P_2$  adalah  $d_2 = 5$  satuan waktu, lama waktu untuk melakukan proses pada mesin pemroses  $P_3$  adalah  $d_3 = 6$  satuan waktu, dan lama waktu untuk melakukan proses pada mesin pemroses  $P_4$  adalah  $d_4 = 7$  satuan waktu. Diberikan juga waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan-bahan mulai dari input, proses, sampai output adalah sebagai berikut. Lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan baku dari  $U_1$  ke mesin pemroses  $P_1$  adalah  $t_{u_1,1} = 0$  satuan waktu, lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan baku dari  $U_2$  ke mesin pemroses  $P_1$  adalah  $t_{u_2,1} = 1$  satuan waktu, lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan baku dari  $U_3$  ke mesin pemroses  $P_2$  adalah  $t_{u_3,2} = 2$  satuan waktu, kemudian lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan setengah jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_1$  ke mesin pemroses  $P_3$  adalah  $t_{1,3} = 3$  satuan waktu, lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan setengah jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_2$  ke mesin pemroses  $P_3$  adalah  $t_{2,3} = 4$  satuan waktu, lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan setengah jadi hasil

dari proses pada mesin pemroses  $P_3$  ke mesin pemroses  $P_4$  adalah  $t_{3,4} = 5$  satuan waktu, selanjutnya lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_4$  ke  $Y_1$  adalah  $t_{4,y_1} = 6$  satuan waktu, dan lama waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan jadi hasil dari proses pada mesin pemroses  $P_4$  ke  $Y_2$  adalah  $t_{4,y_2} = 7$  satuan waktu. Pemroses-pemroses pada *flow line* tersebut juga disertai *buffer* yang terdapat pada  $P_3$  dan  $P_4$  yaitu *buffer* yang terletak pada mesin pemroses  $P_3$  memiliki kapasitas sebesar  $F_3 = 1$ , dan *buffer* yang terletak pada mesin pemroses  $P_4$  memiliki kapasitas sebesar  $F_4 = 1$ .

Untuk memulai proses yang ke- $(k + 1)$  pada pemroses  $P_1$  harus menunggu sampainya bahan baku dari  $U_1$  dan  $U_2$  pada pemroses  $P_1$  saat yang ke- $(k + 1)$ , selesainya proses di pemroses  $P_1$  saat yang ke- $k$ , dan harus menunggu pemroses  $P_3$  telah memulai proses untuk kejadian yang ke- $(k - F_3)$ . Untuk memulai proses yang ke- $(k + 1)$  pada pemroses  $P_2$  harus menunggu sampainya bahan baku dari  $U_3$  pada pemroses  $P_2$  saat yang ke- $(k + 1)$ , selesainya proses di pemroses  $P_2$  saat yang ke- $k$ , dan harus menunggu pemroses  $P_3$  telah memulai proses untuk kejadian yang ke- $(k - F_3)$ .

### 3) Tahap ketiga

Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer*. Berdasarkan waktu proses dan aturan proses produksi diatas, maka dapat disusun persamaan linier dari *flow line* sistem produksi pada Gambar 4.3 sebagai berikut.

$$X_1(k + 1) = \max(X_1(k) + 4, U_1(k) + 0, U_2(k) + 1, X_3(k - 1) + (-3))$$

$$X_2(k + 1) = \max(X_2(k) + 5, U_3(k) + 2, X_3(k - 1) + (-4))$$

$$\begin{aligned} X_3(k + 1) &= \max(X_1(k + 1) + 4 + 3, X_2(k + 1) + 5 + 4, X_3(k) + 6, X_4(k - 1) \\ &\quad + (-5)) \\ &= \max(X_1(k + 1) + 7, X_2(k + 1) + 9, X_3(k) + 6, X_4(k - 1) \\ &\quad + (-5)) \end{aligned}$$

$$X_4(k + 1) = \max(X_3(k + 1) + 6 + 5, X_4(k) + 7)$$

$$\begin{aligned}
&= \max(X_3(k+1) + 11, X_4(k) + 7) \\
Y_1(k) &= 7 + 6 + X_4(k) \\
&= 13 + X_4(k) \\
Y_2(k) &= 7 + 7 + X_4(k) \\
&= 14 + X_6(k)
\end{aligned}$$

Jika dituliskan dalam persamaan aljabar max-plus diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
X_1(k+1) &= 4 \otimes X_1(k) \oplus 0 \otimes U_1(k) \oplus 1 \otimes U_2(k) \oplus -3 \otimes X_3(k-1) \\
X_2(k+1) &= 5 \otimes X_2(k) \oplus 2 \otimes U_3(k) \oplus -4 \otimes X_3(k-1) \\
X_3(k+1) &= 4 \otimes 3 \otimes X_1(k+1) \oplus 5 \otimes 4 \otimes X_2(k+1) \oplus 6 \otimes X_3(k) \oplus -5 \\
&\quad \otimes X_4(k-1) \\
&= 7 \otimes X_1(k+1) \oplus 9 \otimes X_2(k+1) \oplus 6 \otimes X_3(k) \oplus -5 \\
&\quad \otimes X_4(k-1) \\
X_4(k+1) &= 6 \otimes 5 \otimes X_3(k+1) \oplus 7 \otimes X_4(k) \\
&= 11 \otimes X_3(k+1) \oplus 7 \otimes X_4(k) \\
Y_1(k) &= 7 \otimes 6 \otimes X_4(k) \\
&= 13 \otimes X_4(k) \\
Y_2(k) &= 7 \otimes 7 \otimes X_4(k) \\
&= 14 \otimes X_6(k)
\end{aligned}$$

dimana

$X_1(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin yang ke-1 pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$X_2(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin yang ke-2 pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$X_3(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin yang ke-3 pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$X_4(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin yang ke-4 pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$U_1(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan baku yang ke-1 masuk ke sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$U_2(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan baku yang ke-2 masuk ke sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$U_3(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan baku yang ke-3 masuk ke sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$Y_1(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan jadi yang ke-1 meninggalkan sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$Y_2(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan jadi yang ke-2 meninggalkan sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

Berdasarkan Lema 2.2 (Pohet B. 2015) Persamaan-persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks aljabar max-plus sebagai berikut.

$$X(k+1) = A \otimes X(k+1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \oplus A_3 \otimes X_3(k-1) \\ \oplus A_4 \otimes X_4(k-1)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

dengan

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & 9 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 11 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 13 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$\text{dan } A_4 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

Dari matriks  $A$ , kemudian diperoleh matriks  $A^*$  yang didefinisikan sebagai  $A^* = E \oplus A^+$  dengan  $E$  adalah matriks identitas dalam aljabar max-plus dan  $A^{+4} = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} \oplus A^{\otimes 4}$  adalah sebagai berikut.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & 9 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 11 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 18 & 20 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \text{ dan } A^{\otimes 4} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan  $A^*$  adalah sebagai berikut.

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & 9 & 0 & \varepsilon \\ 18 & 20 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh matriks  $A^*$ , kemudian didapatkan persamaan matriks aljabar max-plus lebih sederhana dari *flow line* sistem produksi pada Gambar 4.6 sebagai berikut.

$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k) \oplus \widehat{AB}_3 \otimes X_3(k-1) \oplus \widehat{AB}_4 \otimes X_4(k-1)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

dengan

$$\hat{A} = A^* \otimes B = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 11 & 14 & 6 & \varepsilon \\ 22 & 25 & 17 & 7 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = A^* \otimes D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ 7 & 8 & 11 \\ 18 & 19 & 22 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{AB}_3 = A^* \otimes A_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 16 & \varepsilon \end{bmatrix}, \text{ dan } \widehat{AB}_4 = A^* \otimes A_4 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 \end{bmatrix}$$

Perhitungan  $A^*$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\widehat{AB}_3$ , dan  $\widehat{AB}_4$ , didapatkan dengan menggunakan *Max-plus Algebra and Petri Net Toolbox* yang diimplementasikan dengan program scilab 5.5.1.

Karena operasi  $\oplus$  pada aljabar max-plus bersifat komutatif, maka persamaan sistem max-plus linier diatas dapat dituliskan sebagai berikut.

$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \widehat{AB}_3 \otimes X_3(k-1) \oplus \widehat{AB}_4 \otimes X_4(k-1) \oplus \hat{B} \otimes U(k)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

Kemudian dimodelkan menjadi sistem max-plus linier (MPL) yang lebih sederhana sebagai berikut.

$$\check{X}(k+1) = \check{A} \otimes \check{X}(k) \oplus \check{B} \otimes U(k)$$

$$Y(k) = \check{C} \otimes \check{X}(k)$$

dengan

$$\check{X}(k) = \begin{bmatrix} X(k) \\ X(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \\ X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ X_3(k-1) \\ X_4(k-1) \end{bmatrix}, \check{B} = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ \mathcal{E}(4 \times 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ 7 & 8 & 11 \\ 18 & 19 & 22 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & (\widehat{AB}_3 \oplus \widehat{AB}_4) \\ E(4 \times 4) & \mathcal{E}(4 \times 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -4 & \varepsilon \\ 11 & 14 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & -5 \\ 22 & 25 & 17 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & 16 & 6 \\ 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$\text{dan } \check{C} = [C \quad \mathcal{E}(2 \times 4)] = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 13 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

dimana  $E(4 \times 4)$  adalah matriks identitas ordo  $4 \times 4$ ,  $\mathcal{E}(4 \times 4)$  adalah matriks *null* ordo  $4 \times 4$ ,  $\mathcal{E}(4 \times 3)$  adalah matriks *null* ordo  $4 \times 3$ , dan  $\mathcal{E}(2 \times 4)$  adalah matriks *null* ordo  $2 \times 4$ . Atau dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \\ X_3(k+1) \\ X_4(k+1) \\ X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -4 & \varepsilon \\ 11 & 14 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & -5 \\ 22 & 25 & 17 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & 16 & 6 \\ 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \\ X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ X_3(k-1) \\ X_4(k-1) \end{bmatrix} \\ \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ 7 & 8 & 11 \\ 18 & 19 & 22 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} U_1(k) \\ U_2(k) \\ U_3(k) \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 13 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \\ X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ X_3(k-1) \\ X_4(k-1) \end{bmatrix}$$

#### 4) Tahap keempat

Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer* dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi. Setelah diperoleh bentuk model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi pada Gambar 4.6, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan pemrosesnya disertai *buffer* pada Gambar 4.6 yang dimodelkan sebagai sistem MPL

Untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari suatu *flow line* sistem produksi harus melalui proses evolusi sistem, yaitu proses perhitungan untuk mendapatkan urutan waktu optimal output terprediksi, yang tentunya sudah didapatkan urutan waktu optimal input dengan menggunakan prinsip *receding horizon*. Evolusi sistem dalam bentuk matriks dengan  $N_p = 8$  diperoleh sebagai berikut.

$$\check{Y}(k) = G(k) \oplus H \otimes \check{U}(k)$$

dengan

$$\check{Y}(k) = \begin{bmatrix} \check{Y}_1(k+1|k) \\ \check{Y}_2(k+1|k) \\ \check{Y}_1(k+2|k) \\ \check{Y}_2(k+2|k) \\ \vdots \\ \check{Y}_1(k+8|k) \\ \check{Y}_2(k+8|k) \end{bmatrix}, \check{U}(k) = \begin{bmatrix} U_1(k) \\ U_2(k) \\ U_3(k) \\ \vdots \\ U_1(k+7) \\ U_2(k+7) \\ U_3(k+7) \end{bmatrix}, G(k) = \begin{bmatrix} \check{C} \otimes \check{A} \\ \check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 2} \\ \vdots \\ \check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 8} \end{bmatrix} \otimes \check{X}(k)$$

dimana

$$\check{C} \otimes \check{A} = \begin{bmatrix} 35 & 38 & 30 & 20 & \varepsilon & \varepsilon & 29 & 19 \\ 36 & 39 & 31 & 21 & \varepsilon & \varepsilon & 30 & 20 \end{bmatrix},$$

$$\check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 42 & 45 & 37 & 27 & \varepsilon & \varepsilon & 36 & 26 \\ 43 & 46 & 38 & 28 & \varepsilon & \varepsilon & 37 & 27 \end{bmatrix},$$

$$\check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 49 & 52 & 44 & 34 & \varepsilon & \varepsilon & 43 & 33 \\ 50 & 53 & 45 & 35 & \varepsilon & \varepsilon & 44 & 34 \end{bmatrix},$$

$$\check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 4} = \begin{bmatrix} 56 & 59 & 51 & 41 & \varepsilon & \varepsilon & 50 & 40 \\ 57 & 60 & 52 & 42 & \varepsilon & \varepsilon & 51 & 41 \end{bmatrix},$$

$$\check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 5} = \begin{bmatrix} 63 & 66 & 58 & 48 & \varepsilon & \varepsilon & 57 & 47 \\ 64 & 67 & 59 & 49 & \varepsilon & \varepsilon & 58 & 48 \end{bmatrix},$$

$$\check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 6} = \begin{bmatrix} 70 & 73 & 65 & 55 & \varepsilon & \varepsilon & 64 & 54 \\ 71 & 74 & 66 & 56 & \varepsilon & \varepsilon & 65 & 55 \end{bmatrix},$$

$$\check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 7} = \begin{bmatrix} 77 & 80 & 72 & 62 & \varepsilon & \varepsilon & 71 & 61 \\ 78 & 81 & 73 & 63 & \varepsilon & \varepsilon & 72 & 62 \end{bmatrix},$$

$$\check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 8} = \begin{bmatrix} 84 & 87 & 79 & 69 & \varepsilon & \varepsilon & 78 & 68 \\ 85 & 88 & 80 & 70 & \varepsilon & \varepsilon & 79 & 69 \end{bmatrix}, \text{ dan } \check{X}(k) = \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \\ X_4(k) \\ X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ X_3(k-1) \\ X_4(k-1) \end{bmatrix},$$

$$\text{sedangkan } H = \begin{bmatrix} \check{C} \otimes \check{B} & \mathcal{E}(2 \times 3) & \cdots & \mathcal{E}(2 \times 3) \\ \check{C} \otimes \check{A} \otimes \check{B} & \check{C} \otimes \check{B} & \cdots & \mathcal{E}(2 \times 3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 7} \otimes \check{B} & \check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 6} \otimes \check{B} & \cdots & \check{C} \otimes \check{B} \end{bmatrix}$$

dimana

$$\check{C} \otimes \check{B} = \begin{bmatrix} 31 & 32 & 35 \\ 32 & 33 & 36 \end{bmatrix}, \quad \check{C} \otimes \check{A} \otimes \check{B} = \begin{bmatrix} 38 & 39 & 42 \\ 39 & 40 & 43 \end{bmatrix},$$

$$\check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 2} \otimes \check{B} = \begin{bmatrix} 45 & 46 & 49 \\ 46 & 47 & 50 \end{bmatrix}, \quad \check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 3} \otimes \check{B} = \begin{bmatrix} 52 & 53 & 56 \\ 53 & 54 & 57 \end{bmatrix},$$

$$\check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 4} \otimes \check{B} = \begin{bmatrix} 59 & 60 & 63 \\ 60 & 61 & 64 \end{bmatrix}, \quad \check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 5} \otimes \check{B} = \begin{bmatrix} 66 & 67 & 70 \\ 67 & 68 & 71 \end{bmatrix},$$

$$\check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 6} \otimes \check{B} = \begin{bmatrix} 73 & 74 & 77 \\ 74 & 75 & 78 \end{bmatrix}, \quad \check{C} \otimes \check{A}^{\otimes 7} \otimes \check{B} = \begin{bmatrix} 80 & 81 & 84 \\ 81 & 82 & 85 \end{bmatrix},$$

dan  $\mathcal{E}(2 \times 3)$  adalah matriks *null* ordo  $2 \times 3$ .

Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL, harus diketahui kondisi beserta batasan-batasan sebagai berikut:

- 1) Kondisi awal waktu input  $U_i(-1) = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,
- 2) Kondisi awal waktu proses pada pemroses
 
$$X(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 10 \ -4 \ -5 \ -6 \ -17]^T,$$
- 3)  $k = 0$ , adalah kondisi variabel yang digunakan pada setiap langkah waktu kejadian input maupun output.
- 4) Prediksi horizon  $N_p = 8$ . Diambil nilai 8 karena akan memprediksi waktu optimal pada setiap langkah kejadian proses produksi sampai 8 langkah kejadian berikutnya.
- 5) Kontrol horizon  $N_c = 5$ . Diambil nilai 5 karena nilai tersebut memenuhi  $N_c \leq N_p$ .
- 6) Waktu *deadline* maksimum sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem yang telah diberikan sebagai berikut.

$$R(k) = [50 \ 52 \ 58 \ 60 \ 66 \ 68 \ 74 \ 76 \ 84 \ 86 \ 94 \ 96 \ 105 \\ 107 \ 117 \ 119]^T$$

- 7) Batas maksimum dan minimum dari selisih waktu pada setiap langkah kejadian ketika bahan baku masuk ke sistem. Dengan batas maksimum adalah 12 dan batas minimum adalah 2, yang telah diberikan sebagai berikut.

$$2 \leq \Delta U(k + j) \leq 12 \quad \text{untuk } j = 0, 1, \dots, 4.$$

8) dan  $\lambda = 1$ . Karena pada contoh 4.2 ini dianggap bahwa kriteria biaya output  $J_{out}$  dan kriteria biaya input  $J_{in}$  keduanya diprioritaskan.

Selanjutnya, setelah diperoleh sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* dan telah ditentukan nilai-nilai dari kondisi beserta batasan-batasan yang memenuhi MPC diatas, kemudian diterapkan MPC untuk sistem MPL untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi dengan cara memasukkan matriks parameter dari sistem MPL yaitu matriks  $\check{A}$ ,  $\check{B}$ , dan  $\check{C}$  yang sudah didapatkan, beserta kondisi dan batasan-batasan yang memenuhi MPC di atas ke dalam *toolbox* program matlab MPC (Bart De Schutter, 2001). Hasil simulasi dan analisa dari penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan program matlab tersebut, kemudian diperoleh urutan waktu optimal input sebagai berikut

$$\begin{aligned} [U_{opt}]_{k=0}^7 &= [U_1 \quad U_2 \quad U_3]^T \\ &= [12 \quad 12 \quad 12 \quad 24 \quad 24 \quad 24 \quad 36 \quad 35 \quad 32 \quad 48 \quad 47 \quad 44 \quad 60 \\ &\quad 59 \quad 56 \quad 72 \quad 71 \quad 68 \quad 84 \quad 83 \quad 80 \quad 96 \quad 95 \quad 92]^T \end{aligned}$$

urutan waktu optimal output sebagai berikut

$$\begin{aligned} [Y_{opt}]_{k=1}^8 &= [Y_1 \quad Y_2]^T \\ &= [47 \quad 48 \quad 59 \quad 60 \quad 67 \quad 68 \quad 79 \quad 80 \quad 91 \quad 92 \quad 103 \quad 104 \\ &\quad 115 \quad 116 \quad 127 \quad 128]^T \end{aligned}$$

dan kriteria biaya  $J = -1187$ .

Selanjutnya, setelah diperoleh urutan waktu optimal output dan urutan waktu optimal input kemudian diperoleh kriteria biaya  $J$ . Proses perhitungan untuk mendapatkan kriteria biaya  $J$  di jelaskan sebagai berikut.

Dari urutan waktu optimal output, kemudian diperoleh kriteria biaya output  $J_{out}$ . Berdasarkan persamaan (2.13) formula untuk kriteria biaya output  $J_{out}$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
J_{out} &= \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^2 \max(\tilde{Y}_i(k+j|k) - R_i(k+j), 0) \\
&= \sum_{j=1}^8 (\max(\tilde{Y}_1(k+j|k) - R_1(k+j), 0) + \max(\tilde{Y}_2(k+j|k) - R_2(k+j), 0)) \\
&= \max((47 - 50), 0) + \max((48 - 52), 0) + \max((59 - 58), 0) \\
&\quad + \max((60 - 60), 0) + \max((67 - 66), 0) + \max((68 - 68), 0) \\
&\quad + \max((79 - 74), 0) + \max((80 - 76), 0) + \max((91 - 84), 0) \\
&\quad + \max((92 - 86), 0) + \max((103 - 94), 0) + \max((104 - 96), 0) \\
&\quad + \max((115 - 105), 0) + \max((116 - 107), 0) \\
&\quad + \max((127 - 117), 0) + \max((128 - 119), 0) \\
&= 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 5 + 4 + 7 + 6 + 9 + 8 + 10 + 9 + 10 + 9 \\
&= 79
\end{aligned}$$

Jadi kriteria biaya output  $J_{out} = 79$

Dari urutan waktu optimal input, kemudian diperoleh kriteria biaya input  $J_{in}$ . Berdasarkan persamaan (2.14) formula untuk kriteria biaya input  $J_{in}$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
J_{in} &= - \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^3 U_i(k+j-1) \\
&= - \sum_{j=1}^8 (U_1(k+j-1) + U_2(k+j-1) + U_3(k+j-1)) \\
&= -(12 + 12 + 12 + 24 + 24 + 24 + 36 + 35 + 32 + 48 + 47 + 44 + 60 \\
&\quad + 59 + 56 + 72 + 71 + 68 + 84 + 83 + 80 + 96 + 95 + 92) \\
&= -1266
\end{aligned}$$

Jadi kriteria biaya input  $J_{in} = -1266$

Dari kriteria biaya output  $J_{out}$  dan kriteria biaya input  $J_{in}$ , kemudian diperoleh kriteria biaya  $J$  dengan  $\lambda = 1$  sebagai berikut.

$$J = J_{out} + \lambda J_{in}$$

$$J = 79 - 1266$$

$$J = -1187$$

#### **4.2 Contoh Kasus Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi Kopi Susu Tanpa *Buffer***

Berikut adalah contoh kasus sebagai ilustrasi dari penerapan MPC pada suatu *flow line* sistem produksi, yaitu sistem produksi kopi susu. Sistem produksi Kopi Susu berikut terinspirasi dari suatu proses produksi yang memproduksi produk dalam kemasan kaleng yang diambil dari sebuah referensi pada web sistem produksi produk kemasan (Dewiagustiyani, 2015). Pada web tersebut diberikan susunan skema dari sistem produksi produk kemasan kaleng, namun tidak diberikan waktu proses produksinya. Oleh karena itu, waktu proses produksinya ditentukan sendiri dan susunan skemanya dibuat lebih sederhana. Kemudian proses produksi tersebut dianalogikan sebagai sistem produksi Kopi Susu dalam kemasan. Pada contoh kasus ini, diterapkan MPC pada sistem produksi Kopi Susu untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari sistem produksi Kopi Susu yang dimodelkan sebagai sistem MPL.

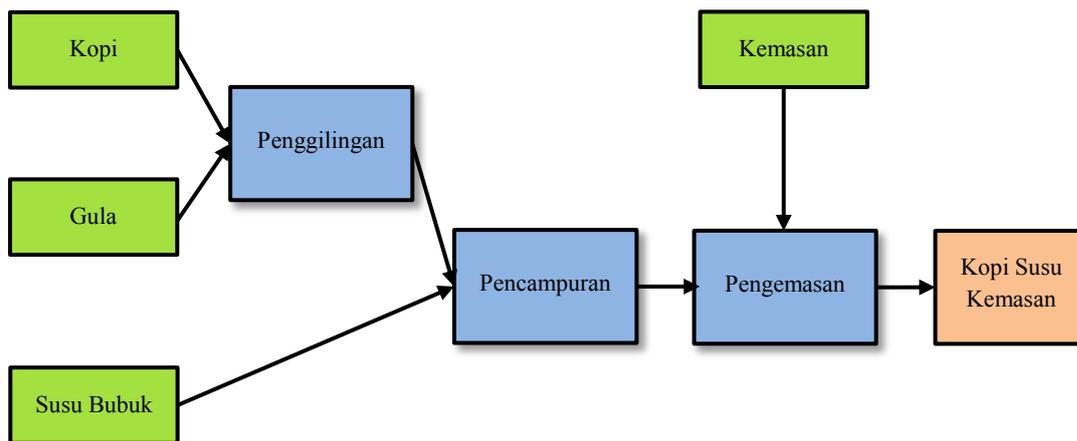
Berikut dijelaskan mengenai penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi Kopi Susu beserta tahapan penyelesaian.

##### **1) Tahap pertama**

Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output. Proses produksi Kopi Susu terdiri atas 3 proses utama, yaitu Penggilingan, Pencampuran, dan Pengemasan,

Proses produksi Kopi Susu pertama dimulai dengan Penggilingan. Proses ini membutuhkan bahan dasar berupa Kopi dan Gula. Urutan proses produksi kedua yaitu pencampuran. Proses ini membutuhkan bahan dasar berupa Susu Bubuk dan hasil dari proses penggilingan yaitu output dari proses pertama.

Kemudian proses yang ketiga yaitu Pengemasan. Proses ini membutuhkan bahan dasar berupa Kemasan dan hasil dari proses Pencampuran yaitu output dari proses kedua. Kemudian hasil produk dari ketiga proses tersebut adalah Kopi Susu dalam Kemasan. Susunan skema dari sistem produksi Kopi Susu diberikan pada Gambar 4.7 berikut.



Gambar 4.7: Aliran proses produksi Kopi Susu (Sistem produksi produk kemasan, 2015)

Keterangan Gambar 4.7 adalah sebagai berikut.

Pada bagian bahan baku terdiri dari :

- Kopi
- Gula
- Susu Bubuk
- Kemasan

Pada bagian mesin pemroses terdiri dari :

- Mesin Penggilingan
- Mesin Pencampuran
- Mesin Pengemasan

Pada bagian bahan jadi hanya terdiri dari satu produk jadi yaitu :

- Kopi Susu Kemasan

Berikut adalah waktu proses beserta variabel yang digunakan pada pemroses yang di jelaskan pada tabel 4.1 berikut.

Tabel 4.1: Waktu proses produksi Kopi Susu

Variabel	Keterangan Proses	Waktu (menit)
$t_{U_{1,1}}$	Lama waktu perpindahan bahan dasar Kopi ke mesin Penggilingan	3
$t_{U_{2,1}}$	Lama waktu perpindahan bahan dasar Gula ke mesin Penggilingan	4
$t_{U_{3,2}}$	Lama waktu perpindahan bahan dasar Susu Bubuk ke mesin Pencampuran	6
$t_{U_{4,3}}$	Lama waktu perpindahan bahan dasar Kemasan ke mesin Pengemasan	8
$t_{1,2}$	Lama waktu perpindahan bahan setengah jadi dari mesin Penggilingan ke mesin Pencampuran	5
$t_{2,3}$	Lama waktu perpindahan bahan setengah jadi dari mesin Pencampuran ke mesin Pengemasan	7
$t_{3,y}$	Lama waktu perpindahan bahan jadi dari mesin Pengemasan ke tempat produk jadi	9
$d_1$	Lama waktu proses pada mesin Penggilingan ( $P_1$ )	30
$d_2$	Lama waktu proses pada mesin Pencampuran ( $P_2$ )	20
$d_3$	Lama waktu proses pada mesin Pengemasan ( $P_3$ )	15

## 2) Tahap kedua

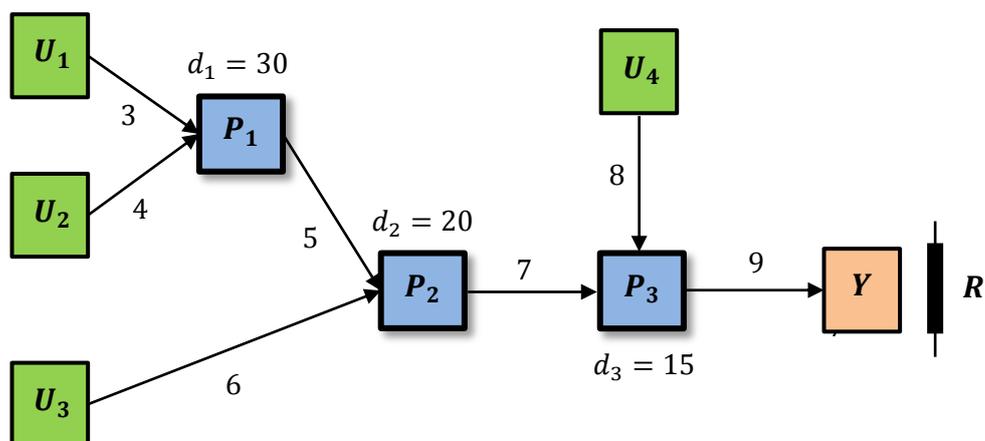
Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi beserta waktu prosesnya. Proses  $P_1$  membutuhkan bahan dasar berupa Kopi dan Gula. Proses  $P_2$  membutuhkan bahan dasar berupa Susu Bubuk dan hasil dari proses pada mesin Penggilingan. Kemudian proses  $P_3$  membutuhkan bahan dasar berupa Kemasan dan hasil dari proses pada mesin Pencampuran. Aliran proses produksi Kopi Susu dimulai dengan memasukkan

Kopi dan Susu ke dalam  $P_1$ . Setelah selesai diproses pada  $P_1$  kemudian dimasukkan ke dalam  $P_2$  beserta bahan dasar Susu Bubuk, berturut-turut sampai berakhir pada  $P_3$ .

Untuk memasukkan bahan baku berupa Kopi dan Gula ke dalam  $P_1$  masing-masing membutuhkan waktu sebesar 3 dan 4 menit, pemindahan bahan dasar berupa Susu Bubuk ke dalam  $P_2$  sebesar 6 menit, pemindahan bahan dasar berupa Kemasan ke dalam  $P_3$  sebesar 8 menit, pemindahan bahan hasil Penggilingan dari  $P_1$  menuju  $P_2$  membutuhkan waktu sebesar 5 menit, pemindahan bahan hasil Pencampuran dari  $P_2$  menuju  $P_3$  membutuhkan waktu sebesar 7 menit, dan pemindahan produk jadi dari  $P_3$  menuju  $Y$  membutuhkan waktu sebesar 9 menit. Kemudian lama waktu proses pada  $P_1$  sebesar 20 menit, lama waktu proses pada  $P_2$  sebesar 30 menit, dan lama waktu proses pada  $P_3$  sebesar 15 menit.

Aturan proses produksi Kopi Susu adalah sebagai berikut. Pada pemroses  $P_1$  hanya dapat memulai proses ketika bahan baku Kopi dan Gula dimasukkan ke dalam  $P_1$ . Setelah produk meninggalkan  $P_1$ , secepat mungkin  $P_1$  akan melakukan proses kembali apabila semua input  $P_1$  terpenuhi. Pada pemroses  $P_2$  dan  $P_3$  juga dapat dimuali bekerja apabila input masing-masing proses terpenuhi.

Model *flow line* sistem produksi beserta waktu proses produksi Kopi Susu diberikan pada Gambar 4.8 berikut.



Gambar 4.8: *Flow Line* sistem produksi Kopi Susu beserta waktunya dengan 4 input, 1 output, 1 waktu *deadline*, dan 3 pemroses tanpa *buffer*

Untuk memulai proses pada  $P_1$  saat langkah kejadian yang ke- $(k + 1)$  harus menunggu sampainya bahan baku dari  $U_1$  dan  $U_2$  pada pemroses  $P_1$  saat yang ke- $(k + 1)$  dan selesainya proses pada  $P_1$  saat yang ke- $k$ . Untuk memulai proses pada  $P_2$  saat langkah kejadian yang ke- $(k + 1)$  harus menunggu sampainya bahan baku dari  $U_3$  pada pemroses  $P_2$  saat yang ke- $(k + 1)$ , harus menunggu sampainya hasil proses dari  $P_1$  ke  $P_2$  saat yang ke- $(k + 1)$ , dan selesainya proses pada  $P_2$  saat yang ke- $k$ . Untuk memulai proses pada  $P_3$  saat langkah kejadian yang ke- $(k + 1)$  harus menunggu sampainya bahan baku dari  $U_4$  pada pemroses  $P_3$  saat yang ke- $(k + 1)$ , harus menunggu sampainya hasil proses dari  $P_2$  ke  $P_3$  saat yang ke- $(k + 1)$ , dan selesainya proses pada  $P_3$  saat yang ke- $k$ .

### 3) Tahap ketiga

Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi Kopi Susu. Berdasarkan waktu proses dan aturan proses produksi diatas, maka dapat disusun persamaan linier dari sistem produksi Kopi Susu sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 X_1(k + 1) &= \max(U_1(k) + 3, U_2(k) + 4, X_1(k) + 30) \\
 X_2(k + 1) &= \max(X_1(k + 1) + 30 + 5, U_3(k) + 6, X_2(k) + 20) \\
 &= \max(X_1(k + 1) + 35, U_3(k) + 6, X_2(k) + 20) \\
 X_3(k + 1) &= \max(X_2(k + 1) + 20 + 7, U_4(k) + 8, X_3(k) + 15) \\
 &= \max(X_2(k + 1) + 27, U_4(k) + 8, X_3(k) + 15) \\
 Y(k) &= 15 + 9 + X_3(k) \\
 &= 24 + X_3(k)
 \end{aligned}$$

Persamaan diatas jika dituliskan dalam notasi aljabar max-plus adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 X_1(k + 1) &= 30 \otimes X_1(k) \oplus 3 \otimes U_1(k) \oplus 4 \otimes U_2(k) \\
 X_2(k + 1) &= 30 \otimes 5 \otimes X_1(k + 1) \oplus 20 \otimes X_2(k) \oplus 6 \otimes U_3(k) \\
 &= 35 \otimes X_1(k + 1) \oplus 20 \otimes X_2(k) \oplus 6 \otimes U_3(k) \\
 X_3(k + 1) &= 20 \otimes 7 \otimes X_2(k + 1) \oplus 15 \otimes X_3(k) \oplus 8 \otimes U_4(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 27 \otimes X_2(k + 1) \oplus 15 \otimes X_3(k) \oplus 8 \otimes U_4(k) \\
Y(k) &= 15 \otimes 9 \otimes X_3(k) \\
&= 24 \otimes X_3(k)
\end{aligned}$$

dimana

$X_1(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin Penggilingan pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$X_2(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin Pencampuran pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$X_3(k)$  : Menyatakan waktu mulai proses mesin Pengemasan pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$U_1(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan baku Kopi masuk ke mesin Penggilingan pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$U_2(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan baku Gula masuk ke mesin Penggilingan pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$U_3(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan baku Susu Bubuk masuk ke mesin Pencampuran pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$U_4(k)$  : Menyatakan waktu ketika bahan baku Kemasan masuk ke mesin Pengemasan pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

$Y(k)$  : Menyatakan waktu ketika produk jadi meninggalkan sistem pada langkah kejadian yang ke- $k$ .

Berdasarkan Lema 2.1 (Pohet B. 2015), persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks aljabar max-plus dari *flow line* sistem produksi Kopi Susu pada Gambar 4.8 sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
X(k + 1) &= A \otimes X(k + 1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \\
Y(k) &= C \otimes X(k)
\end{aligned}$$

dengan

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}, Y = [Y], A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 35 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 27 & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 30 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 20 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 15 \end{bmatrix},$$

$$C = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad 24], \text{ dan } D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix}$$

Dari matriks  $A$ , kemudian diperoleh matriks  $A^*$  yang didefinisikan sebagai  $A^* = E \oplus A^+$  dengan  $E$  adalah matriks identitas dalam aljabar max-plus dan  $A^{+3} = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3}$  adalah sebagai berikut.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 35 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 27 & \varepsilon \end{bmatrix}, A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 62 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \text{ dan } A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan matriks  $A^*$  adalah sebagai berikut.

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 35 & 0 & \varepsilon \\ 62 & 27 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2), persamaan matriks aljabar max-plus diatas dapat disederhanakan, sehingga didapatkan bentuk sistem MPL dari *flow line* sistem produksi Kopi Susu pada Gambar 4.8 adalah sebagai berikut.

$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

dengan

$$\hat{A} = A^* \otimes B = \begin{bmatrix} 30 & \varepsilon & \varepsilon \\ 65 & 20 & \varepsilon \\ 92 & 47 & 15 \end{bmatrix} \text{ dan } \hat{B} = A^* \otimes D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 38 & 39 & 6 & \varepsilon \\ 65 & 66 & 33 & 8 \end{bmatrix}$$

Perhitungan  $A^*$ ,  $\hat{A}$ , dan  $\hat{B}$  didapatkan dengan menggunakan *Max-plus Algebra and Petri Net Toolbox* yang diimplementasikan dengan program scilab 5.5.1.

#### 4) Tahap keempat

Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi Kopi Susu dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut. Setelah diperoleh bentuk model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi pada Gambar 4.8, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi Kopi Susu yang dimodelkan sebagai sistem MPL.

Untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi Kopi Susu harus melalui proses evolusi sistem, yaitu proses perhitungan untuk mendapatkan urutan waktu optimal output terprediksi, yang tentunya sudah didapatkan urutan waktu optimal input dengan menggunakan prinsip *receding horizon*, dimana proses untuk mendapatkan urutan waktu optimal input dengan prinsip *receding horizon* diperoleh dari *toolbox* program matlab MPC (De Schutter, B. and van den Boom, T., 2000). Evolusi sistem dalam bentuk matriks dengan  $N_p = 9$  diperoleh sebagai berikut.

$$\check{Y}(k) = G(k) \oplus H \otimes \check{U}(k)$$

dengan

$$\check{Y}(k) = \begin{bmatrix} \check{Y}(k+1|k) \\ \check{Y}(k+2|k) \\ \check{Y}(k+3|k) \\ \check{Y}(k+4|k) \\ \check{Y}(k+5|k) \\ \check{Y}(k+6|k) \\ \check{Y}(k+7|k) \\ \check{Y}(k+8|k) \\ \check{Y}(k+9|k) \end{bmatrix}, \check{U}(k) = \begin{bmatrix} U_1(k) \\ U_2(k) \\ U_3(k) \\ U_4(k) \\ \vdots \\ U_1(k+8) \\ U_2(k+8) \\ U_3(k+8) \\ U_4(k+8) \end{bmatrix}, G(k) = \begin{bmatrix} C \otimes \hat{A} \\ C \otimes \hat{A}^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C \otimes \hat{A}^{\otimes 9} \end{bmatrix} \otimes X(k)$$

dimana

$$C \otimes \hat{A} = [116 \quad 71 \quad 39], \quad C \otimes \hat{A}^{\otimes 2} = [146 \quad 91 \quad 54],$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 3} = [176 \quad 111 \quad 69], \quad C \otimes \hat{A}^{\otimes 4} = [206 \quad 131 \quad 84],$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 5} = [236 \quad 151 \quad 99], \quad C \otimes \hat{A}^{\otimes 6} = [266 \quad 171 \quad 114],$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 7} = [296 \quad 191 \quad 129], \quad C \otimes \hat{A}^{\otimes 8} = [326 \quad 211 \quad 144],$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 9} = [356 \quad 231 \quad 159], \quad \text{dan } X(k) = \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \end{bmatrix},$$

$$\text{sedangkan } H = \begin{bmatrix} C \otimes \hat{B} & \mathcal{E}(1 \times 4) & \cdots & \mathcal{E}(1 \times 4) \\ C \otimes \hat{A} \otimes \hat{B} & C \otimes \hat{B} & \cdots & \mathcal{E}(1 \times 4) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes \hat{A}^{\otimes 8} \otimes \hat{B} & C \otimes \hat{A}^{\otimes 7} \otimes \hat{B} & \cdots & C \otimes \hat{B} \end{bmatrix}$$

dimana

$$C \otimes \hat{B} = [89 \quad 90 \quad 57 \quad 32],$$

$$C \otimes \hat{A} \otimes \hat{B} = [119 \quad 120 \quad 77 \quad 47],$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 2} \otimes \hat{B} = [149 \quad 150 \quad 97 \quad 62],$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 3} \otimes \hat{B} = [179 \quad 180 \quad 117 \quad 77],$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 4} \otimes \hat{B} = [209 \quad 210 \quad 137 \quad 92],$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 5} \otimes \hat{B} = [239 \quad 240 \quad 157 \quad 107],$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 6} \otimes \hat{B} = [269 \quad 270 \quad 177 \quad 122],$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 7} \otimes \hat{B} = [299 \quad 300 \quad 197 \quad 137],$$

$$C \otimes \hat{A}^{\otimes 8} \otimes \hat{B} = [329 \quad 330 \quad 217 \quad 152]$$

dan  $\mathcal{E}(1 \times 4)$  adalah matriks *null* ordo  $1 \times 4$ .

Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi Kopi Susu yang dimodelkan sebagai sistem MPL, harus diketahui kondisi beserta batasan-batasan sebagai berikut:

- 1) Kondisi awal waktu input  $U(-1) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ ,
- 2) Kondisi awal waktu proses pada pemroses  $X(0) = [0 \quad 0 \quad 10]^T$ ,
- 3)  $k = 0$ , adalah kondisi variabel yang digunakan pada setiap langkah waktu kejadian input maupun output.

- 4) Prediksi horizon  $N_p = 9$ . Dambil nilai 9 karena akan memprediksi waktu optimal pada setiap langkah kejadian proses produksi sampai 9 langkah kejadian berikutnya.
- 5) Kontrol horizon  $N_c = 6$ . Diambil nilai 6 karena nilai tersebut memenuhi  $N_c \leq N_p$ .
- 6) Waktu *deadline* maksimum sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem yang telah diberikan sebagai berikut  

$$R(k) = [150 \ 155 \ 165 \ 176 \ 185 \ 195 \ 206 \ 218 \ 230]^T,$$
- 7) Batas maksimum dan minimum waktu setiap langkah kejadian ketika bahan baku masuk ke sistem. Dengan batas maksimum adalah 12 dan batas minimum adalah 2, yang telah diberikan sebagai berikut.  

$$2 \leq \Delta U(k + j) \leq 12 \text{ untuk } j = 0, 1, \dots, 5$$
- 8) dan  $\lambda = 1$ . Karena pada contoh kasus ini dianggap bahwa kriteria biaya output  $J_{out}$  dan kriteria biaya input  $J_{in}$  keduanya diprioritaskan.

Selanjutnya, setelah diperoleh sistem MPL dari *flow line* sistem produksi Kopi Susu dan telah ditentukan nilai-nilai dari kondisi beserta batasan-batasan yang memenuhi MPC diatas, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi Kopi Susu tersebut, dengan cara memasukkan matriks parameter dari sistem MPL yaitu matriks  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ , dan  $C$  yang sudah didapatkan, beserta kondisi dan batasan-batasan yang memenuhi MPC di atas ke dalam *toolbox* program matlab MPC (Bart De Schutter, 2001). Hasil simulasi dan analisa dari penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi Kopi Susu dengan program matlab tersebut, kemudian diperoleh urutan waktu optimal input sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 [U_{opt}]_{k=0}^8 &= [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T \\
 &= [12 \ 12 \ 12 \ 12 \ 24 \ 24 \ 24 \ 24 \ 36 \ 36 \ 36 \ 36 \ 48 \\
 &\quad 48 \ 48 \ 48 \ 60 \ 60 \ 60 \ 60 \ 72 \ 72 \ 72 \ 72 \ 84 \ 84 \\
 &\quad 84 \ 84 \ 96 \ 96 \ 96 \ 96 \ 108 \ 108 \ 108 \ 108]^T
 \end{aligned}$$

urutan waktu optimal output sebagai berikut

$$[Y_{\text{opt}}]_{k=1}^9 = [116 \quad 146 \quad 176 \quad 206 \quad 236 \quad 266 \quad 296 \quad 326 \quad 356]^T$$

dan kriteria biaya  $J = -1673$

Selanjutnya, setelah diperoleh urutan waktu optimal output dan urutan waktu optimal input kemudian diperoleh kriteria biaya  $J$ . Proses perhitungan untuk mendapatkan kriteria biaya  $J$  di jelaskan sebagai berikut.

Dari urutan waktu optimal output, kemudian diperoleh kriteria biaya output  $J_{\text{out}}$ . Berdasarkan persamaan (2.13) formula untuk kriteria biaya output  $J_{\text{out}}$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} J_{\text{out}} &= \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^1 \max(\tilde{Y}_i(k+j|k) - R_i(k+j), 0) \\ &= \sum_{j=1}^9 \max(\tilde{Y}(k+j|k) - R(k+j), 0) \\ &= \max((116 - 150), 0) + \max((146 - 155), 0) + \max((176 - 165), 0) \\ &\quad + \max((206 - 176), 0) + \max((236 - 185), 0) \\ &\quad + \max((266 - 195), 0) + \max((296 - 206), 0) \\ &\quad + \max((326 - 218), 0) + \max((356 - 230), 0) \\ &= 0 + 0 + 11 + 30 + 51 + 71 + 90 + 108 + 126 \\ &= 487 \end{aligned}$$

Jadi kriteria biaya output adalah  $J_{\text{out}} = 487$ .

Dari urutan waktu optimal input, kemudian diperoleh kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$ . Berdasarkan persamaan (2.14) kriteria biaya input  $J_{\text{in}}$  adalah sebagai berikut.

$$J_{\text{in}} = \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^4 U_i(k+j-1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^8 (U_1(k+j-1) + U_2(k+j-1) + U_3(k+j-1) + U_4(k+j-1)) \\
&= -(12 + 12 + 12 + 12 + 24 + 24 + 24 + 24 + 36 + 36 + 36 + 36 + 48 \\
&\quad + 48 + 48 + 48 + 60 + 60 + 60 + 60 + 72 + 72 + 72 + 72 + 84 \\
&\quad + 84 + 84 + 84 + 96 + 96 + 96 + 96 + 108 + 108 + 108 + 108) \\
&= -2160
\end{aligned}$$

Jadi kriteria biaya untuk input  $J_{in} = -2160$

Dari kriteria biaya output  $J_{out}$  dan kriteria biaya input  $J_{in}$ , kemudian diperoleh kriteria biaya  $J$  dengan  $\lambda = 1$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
J &= J_{out} + \lambda J_{in} \\
J &= 487 - 2160 \\
J &= -1673
\end{aligned}$$

## BAB 5

### KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini dituliskan kesimpulan yang diperoleh dari hasil analisis dan simulasi yang telah dilakukan sebelumnya. Selain itu disini juga dituliskan saran untuk penelitian berikutnya.

#### 5.1 Kesimpulan

Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dibedakan menjadi dua, yaitu penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang tanpa *buffer* dan penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem MPL. Dari sistem MPL yang telah diperoleh, kemudian diterapkan MPC untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi tersebut, sehingga dapat meminimumkan kriteria biaya, yaitu dengan memaksimumkan waktu ketika bahan baku masuk ke sistem (input) sedemikian hingga waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem (output) tidak melewati atau sama dengan batas waktu *deadline* maksimum yang telah ditentukan.

Pada penelitian ini, penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi terdapat beberapa tahapan penyelesaian, yaitu 1) Tahap pertama mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output. 2) Tahap kedua mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi beserta waktu prosesnya. 3) Tahap ketiga mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* maupun disertai *buffer*. 4) Tahap keempat mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* maupun disertai *buffer* dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut.

Setelah tersusun model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi yang memenuhi kondisi beserta batasan-batasan MPC. Kemudian didapatkan waktu optimal terprediksi

dari *flow line* sistem produksi dengan cara memasukkan matriks parameter dari sistem MPL beserta kondisi dan batasan-batasan yang memenuhi MPC ke dalam *toolbox* program matlab MPC (Bart De Schutter, 2001). Hasil simulasi dan analisa penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan program matlab, kemudian didapatkan urutan waktu optimal input  $[U_{\text{opt}}]_{k=0}^{N_p-1}$ , urutan waktu optimal output  $[Y_{\text{opt}}]_{k=1}^{N_p}$ , dan kriteria biaya  $J$ .

## 5.2 Saran

Pada penelitian ini, untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi dari sistem produksi dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL berdasarkan hasil simulasi dan analisa dengan menggunakan program matlab. Untuk itu diharapkan penelitian berikutnya agar bisa menyempurnakan penelitian ini dengan melakukan analisis yang lebih mendalam, yaitu bagaimana bentuk simulasi jika proses terjadi stagmasi. Dan diharapkan juga pada penelitian berikutnya, bagaimana bentuk model jika lama waktu proses terjadi perubahan pada saat waktu langkah kejadian tertentu.

## DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN.....	i
ABSTRAK.....	iii
ABSTRACT.....	v
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR.....	xi
DAFTAR NOTASI.....	xiii
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	4
1.6 Kontribusi Penelitian.....	4
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI.....	5
2.1 Penelitian-Penelitian Terkait.....	5
2.2 Aljabar Max-Plus.....	7
2.2.1 Pengertian Aljabar Max-Plus.....	7
2.2.2 Vektor dan Matriks.....	8
2.3 Model Predictive Control (MPC).....	9
2.4 Sistem Max-Plus Linier (MPL).....	11
2.5 Model Predictive Control untuk Sistem Max-Plus Linier.....	12
2.5.1 Evolusi Sistem.....	12
2.5.2 Constraint (Batasan).....	13
2.5.3 Evolusi Input Setelah Kontrol Horizon.....	14
2.5.4 Kriteria Biaya $J$ .....	14
1) <i>Kriteria biaya untuk output <math>J_{out}</math></i> .....	14
2) <i>Kriteria biaya untuk input <math>J_{in}</math></i> .....	15
2.5.5 Masalah MPC Standar untuk Sistem MPL.....	15

2.6	Model Sistem Produksi Menggunakan Aljabar Max-Plus.....	16
2.6.1	Model <i>Flow Line</i> Sistem Produksi Tanpa <i>Buffer</i> .....	16
2.6.2	Model <i>Flow Line</i> Sistem Produksi dengan <i>Buffer</i> .....	19
BAB 3	METODE PENELITIAN.....	25
3.1	Tahapan Penelitian.....	25
BAB 4	HASIL DAN PEMBAHASAN.....	27
4.1	Penerapan MPC Pada <i>Flow Line</i> Sistem Produksi.....	28
4.1.1	Penerapan MPC Pada <i>Flow Line</i> Sistem Produksi Tanpa <i>Buffer</i> .....	31
4.1.2	Penerapan MPC Pada <i>Flow Line</i> Sistem Produksi dengan <i>Buffer</i> .....	53
4.2	Contoh Kasus Penerapan MPC pada <i>Flow Line</i> Sistem Produksi Kopi Susu Tanpa <i>Buffer</i> .....	75
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN.....	87
5.1	Kesimpulan.....	87
5.2	Saran.....	88
DAFTAR PUSTAKA	.....	89

## BIODATA PENULIS



Penulis bernama Imam Fauzi, lahir di Banyuwangi, 26 juni 1986, merupakan anak kedua dari empat bersaudara, kebetulan kakak pertama saya meninggal pada saat di kandungan. Penulis menempuh pendidikan formal di SDN Alasmalang 1 (1994 – 2000), MTsN Rogojampi (2000 – 2003), dan SMK Muhammadiyah 6 Rogojampi (2003 – 2005). Setelah lulus dari jenjang sekolah menengah kejuruan (SMK), penulis melanjutkan studi di Universitas PGRI Banyuwangi jurusan Matematika fakultas MIPA (2007 – 2012) dengan NIM 078420200264. Pada masa perkuliahan penulis aktif dalam beberapa kegiatan baik internal maupun eksternal. Kegiatan internal adalah mengikuti Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) dan Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA). Kegiatan eksternal mengikuti kegiatan Himpunan Mahasiswa Islam (HMI). Kemudian penulis melanjutkan studi Pra S2 selama 1 tahun (2013 – 2014) di Jurusan Matematika FMIPA ITS dengan beasiswa PRA-S2 SAINTEK. Selanjutnya penulis melanjutkan studi megister di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (MIPA), Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (ITS) dengan NRP 1214201039. Penulis menempuh studi megister dengan menerima beasiswa yang merupakan kelanjutan dari beasiswa PRA-S2 SAINTEK. Penulis dapat dihubungi malalui nomor HP 085230588652 atau melalui email: [imamfauzi446@yahoo.co.id](mailto:imamfauzi446@yahoo.co.id).