



TESIS - SM 142501

**KONSTRUKSI PERSAMAAN PERMUKAAN
BENTUK-TELUR MENGGUNAKAN KURVA
BENTUK-TELUR HÜGELSCHAFFER**

AHMAT RIF'AN MAULANA
NRP 1213 201 206

Dosen Pembimbing:
Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si., M.T.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015



THESIS - SM 142501

**CONSTRUCTION OF EGG-SHAPED SURFACE
EQUATIONS USING HÜGELSCHAFFER'S EGG-SHAPED
CURVE**

AHMAT RIF'AN MAULANA
NRP 1213 201 206

Supervisors:
Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si., M.T.

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2015

**KONSTRUKSI PERSAMAAN PERMUKAAN
BENTUK-TELUR MENGGUNAKAN KURVA
BENTUK-TELUR HÜGELSCHAFFER**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

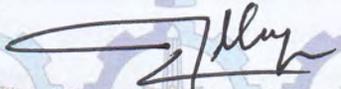
Oleh
AHMAT RIF'AN MAULANA
NRP. 1213 201 206

Tanggal Ujian : 30 Juni 2015
Periode Wisuda : September 2015

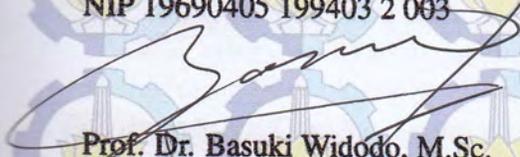
Disetujui oleh


Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
NIP 19620407 198703 1 005

(Pembimbing I)


Dr. Dwi Ratna Sulistyningrum, S.Si., M.T.
NIP 19690405 199403 2 003

(Pembimbing II)


Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP 19650605 198903 1 002

(Penguji)


Dr. Darmaji, S.Si., M.T.
NIP 19691015 199412 1 001

(Penguji)



KONSTRUKSI PERSAMAAN PERMUKAAN BENTUK-TELUR MENGGUNAKAN KURVA BENTUK-TELUR HÜGELSCHAFFER

Nama Mahasiswa : Ahmat Rif'an Maulana
NRP : 1213 201 206
Pembimbing : 1. Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
2. Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si., M.T.

ABSTRAK

Kurva bentuk-telur Hügelschaffer adalah kurva bentuk-telur yang dikonstruksi dari dua buah lingkaran tak-sepusat menggunakan transformasi Newton yang diketahui sebagai *hyperbolism*. Penelitian ini bertujuan untuk merumuskan persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar pada sumbu- x , sumbu- y dan sumbu- z , dan untuk merumuskan volume dan luas permukaan bentuk-telur serta memvisualisasikan persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh menggunakan *software* Geogebra. Kurva bentuk-telur Hügelschaffer dipilih karena persamaannya sederhana dan merepresentasikan garis tepi telur asli. Proses konstruksi persamaan permukaan bentuk-telur dilakukan dengan cara membuat sketsa kurva bentuk-telur pada bidang- xy dan bidang- xz , kemudian kurva diputar pada sumbu-sumbu koordinat. Sedangkan, untuk merumuskan volume bangun ruang bentuk-telur digunakan integral volume metode cakram. Luas permukaan bentuk-telur dihitung menggunakan integral luas permukaan. Visualisasi persamaan permukaan bentuk-telur dilakukan menggunakan GeoGebra dengan terlebih dahulu mengubah persamaan permukaan bentuk-telur (persamaan kartesian) ke bentuk persamaan parametrik. Dari hasil pengonstruksian diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur pada masing-masing sumbu putar dimana titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$; rumus volume bangun ruang bentuk-telur; luas permukaan bentuk-telur dihitung secara numerik; dan dari hasil visualisasi persamaan permukaan bentuk-telur, dengan mengubah-ubah nilai-nilai parameter, yaitu jika $a = b > 0$ dan $w = 0$ diperoleh bola, jika $a > b > 0$ dan $w = 0$ diperoleh *ellipsoid*-putar dan jika $a > b > 0$ dan $0 < |w| < a$ diperoleh permukaan bentuk-telur *oval*.

Kata kunci: Transformasi Newton, kurva bentuk-telur Hügelschaffer, persamaan permukaan bentuk-telur

CONSTRUCTION OF EGG-SHAPED SURFACE EQUATIONS USING HÜGELSCHAFFER'S EGG-SHAPED CURVE

Name : Ahmat Rif'an Maulana
NRP : 1213 201 206
Supervisors : 1. Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
2. Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si., M.T.

ABSTRACT

Hügelschaffer's egg-shaped curve is egg-shaped curve that is constructed by non-concentric two circles using Newton's transformation known as hyperbolism. Hügelschaffers egg-shaped curve is selected because its equation is simple. The goals of this research are to construct the egg-shaped surface equations using Hügelschaffers egg-shaped curve that is rotated about the x -axis, y -axis and z -axis, and to formulate of the volume of the egg-shaped solid and the egg-shaped surface area, also to visualize the egg-shaped surface equations using GeoGebra software. The procedures of the construction of the egg-shaped surface equations are done by drawing the curve onto the xy -plane and xz -plane, then, it is rotated about axes of coordinate. The volume formula of the egg-shaped solid is formulated by using the disk method of the volume integral. The egg-shaped surface area is calculated by using the integral of surface area. Visualization of the egg-shaped surface equations are done using GeoGebra. Based on processes construction are gotten the egg-shaped surface equations on each rotation axis, where the mid-point of major axis is on $Q(p, q, r)$; the formula of the egg-shaped solid volume ; the egg-shaped surface area is calculated numerically; visualization of the egg-shaped surface equations by changing parameter values of a, b and w will result sphere, ellipsoid and oval egg-shaped surface.

Keywords: Newton's tranformation, equation of Hügelschaffer's egg-shaped curve, egg-shaped surface equations

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT peneliti ucapkan sebagai rasa syukur atas limpahan rahmat, pertolongan dan petunjuk-Nya, serta segala kuasa dan perlindungan-Nya sehingga Tesis dengan judul "Konstruksi Persamaan Permukaan Bentuk-Telur Menggunakan Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer" dapat peneliti selesaikan.

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan dalam memperoleh gelar Magister Sains, Program Studi Magister Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Peneliti menyadari bahwa tulisan ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, peneliti mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari berbagai pihak, sehingga penelitian selanjutnya diharapkan dapat lebih baik lagi.

Terselesaikannya Tesis ini tentu saja tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D. selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
2. Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T. selaku Direktur Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
4. Dr. Subiono, M.S. selaku Koordinator Program Studi Magister Matematika ITS dan juga sekaligus Dosen Wali peneliti.
5. Dr. Mahmud Yunus, M.Si. dan Dr. Dwi Ratna Sulistyningrum, S.Si., M.T. selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, perhatian, arahan, nasehat dan motivasi kepada peneliti, sehingga peneliti mampu menyelesaikan Tesis ini.
6. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. dan Dr. Darmaji, S.Si., M.T. selaku Dosen Penguji Tesis. Terima kasih atas pertanyaan, masukan, saran dan kritik yang membantu peneliti untuk memperbaiki Tesis ini.
7. Bapak/Ibu Dosen Pengajar Program Studi Magister Matematika ITS yang telah secara tulus ikhlas memberikan ilmunya kepada peneliti.
8. Kedua orang tua peneliti, Bapak Abdul Manan dan Ibu Istikhomah. Terima kasih atas dukungan, do'a, dan segala pengorbanan lahir dan batin, yang mengasuh dan membimbing peneliti dengan penuh kesabaran, yang setiap malam mendo'akan peneliti dengan penuh pengharapan agar peneliti menjadi anak yang sholeh dan selalu berbakti kepada kedua orang tua.
9. Teman-teman seperjuangan S-2 Matematika ITS angkatan tahun 2013.

10. Semua pihak yang turut serta mendukung dan mambantu dalam penyusunan Tesis ini, yang tidak dapat peneliti sebutkan satu persatu.

Peneliti berharap semoga laporan Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, bagi kemajuan dan perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya disiplin Ilmu Matematika, dan dapat memberikan kontribusi terhadap kemajuan ITS, serta kemajuan Indonesia. Amin.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
<i>TITLE PAGE</i>	iii
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
<i>ABSTRACT</i>	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Transformasi Newton	5
2.2 Persamaan Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer	6
2.3 Karakteristik Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer	8
2.4 Volume Benda Pejal	10
2.5 Luas Permukaan	10
BAB III METODA PENELITIAN	11
3.1 Tahapan-Tahapan Penelitian	11
3.2 Tempat Penelitian	15
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	17
4.1 Persamaan Permukaan Bentuk-Telur Hasil Memutar Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer terhadap Sumbu- x	17
4.2 Persamaan Permukaan Bentuk-Telur Hasil Memutar Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer terhadap Sumbu- y	22
4.3 Persamaan Permukaan Bentuk-Telur Hasil Memutar Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer terhadap Sumbu- z	26
4.4 Volume Bangun Ruang Bentuk-Telur	32
4.5 Luas Permukaan Bentuk-Telur	34

4.6	Hubungan Nilai Parameter a, b dan w dengan Permukaan Bentuk-Telur	36
4.7	Visualisasi Persamaan Permukaan Bentuk-Telur	37
BAB V	PENUTUP	51
5.1	Kesimpulan	51
5.2	Saran	52
	DAFTAR PUSTAKA	53
	LAMPIRAN	55
	BIOGRAFI PENULIS	61

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Hasil Visualisasi Persamaan Permukaan Bentuk-Telur	46
-----------	--	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Hyperbolism (Transformasi Newton suatu kurva pada bidang datar oleh suatu garis lurus dan suatu titik) (Petrovic dan Obradovic, 2010)	5
Gambar 2.2	Hyperbolism (transformasi Newton tergeneralisasi) (Petrovic dan Obradovic, 2010)	6
Gambar 2.3	Konstruksi ellips dengan dua lingkaran sepusat (Petrovic, dkk., 2011)	6
Gambar 2.4	Konstruksi kurva bentuk-telur Hügelschaffer (Petrovic, dkk., 2011)	7
Gambar 2.5	Kurva bentuk-telur Hügelschaffer dirotasi 90°	8
Gambar 4.1	Kurva T pada bidang- xy diputar pada sumbu- x	18
Gambar 4.2	Kurva $y = f(x)$ diputar pada sumbu- x	22
Gambar 4.3	Kurva T pada bidang- xy diputar pada sumbu- y	23
Gambar 4.4	Kurva T di bidang- xz diputar pada sumbu- z	27
Gambar 4.5	Kurva T di bidang- xz dan lingkaran C terletak sejajar bidang- xy	30
Gambar 4.6	Integral volume metode cakram pada kurva bentuk-telur Hügelschaffer	32
Gambar 4.7	Sketsa luas permukaan bentuk-telur	34
Gambar 4.8	Permukaan bentuk-telur dengan sumbu- x sebagai sumbu putar	38
Gambar 4.9	Permukaan bentuk-telur dengan sumbu putar sejajar sumbu- x	39
Gambar 4.10	Permukaan bentuk-telur dengan sumbu- y sebagai sumbu putar	39
Gambar 4.11	Permukaan bentuk-telur dengan sumbu putar sejajar sumbu- y	40
Gambar 4.12	Permukaan bentuk-telur dengan sumbu- z sebagai sumbu putar	41
Gambar 4.13	Permukaan bentuk-telur dengan sumbu putar sejajar sumbu- z	41
Gambar 4.14	Permukaan bentuk-telur dengan $a = 3,118; b = 2,123$ dan $w = 0,091$	42
Gambar 4.15	Permukaan bentuk-telur dengan $a = 3,118; b = 2,123$ dan $w = 0,524$	42
Gambar 4.16	Permukaan bentuk-telur dengan $a = 3,118; b = 2,541$ dan $w = 0,091$	43
Gambar 4.17	Permukaan bentuk-telur dengan $a = 3,118; b = 3$ dan $w = 0,091$	43
Gambar 4.18	Permukaan dengan $a = 10$ dan $b = 2$ serta $w = 1,047$	43

Gambar 4.19	Permukaan dengan $a = 5$ dan $b = 2$ serta $w = 1,047$	44
Gambar 4.20	Bola dengan jari-jari sama dengan 2	44
Gambar 4.21	<i>Ellipsoid</i> -putar	45
Gambar 4.22	Permukaan dengan $a = 3$ dan $c = 2$ serta $w = 0,44$	45

DAFTAR SIMBOL

T	Kurva bentuk-telur Hügelschaffer
K_1	Lingkaran besar dengan jari-jari a
K_2	Lingkaran kecil dengan jari-jari b
C_1	Titik pusat lingkaran K_1
C_2	Titik pusat lingkaran K_2
Γ	Kurva sebarang pada bidang datar hasil transformasi Newton
Γ_1, Γ_2	Kurva sebarang pada bidang datar
w	Jarak titik C_1 dan C_2
V	Volume bangun ruang bentuk-telur
A	Luas permukaan bentuk-telur

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kurva bentuk-telur yang diusulkan oleh matematikawan Jerman Fritz Hügelschaffer merupakan suatu kurva tertutup yang merepresentasikan garis tepi dari telur (Koller, 2000) dan lebih sering disebut konstruksi kurva bentuk-telur Hügelschaffer (Obradovic, dkk., 2013). Ide dasar dari proses konstruksi kurva bentuk-telur Hügelschaffer adalah prosedur konstruktif transformasi Newton yang dilakukan terhadap dua lingkaran tidak sepusat, yang disebut sebagai *hyperbolism* (Petrovic dan Obradovic, 2010). Dengan demikian, proses konstruksi kurva bentuk-telur Hügelschaffer memanfaatkan transformasi Newton yang dikerjakan pada dua lingkaran tak-sepusat.

Dalam hubungannya dengan kurva bentuk-telur Hügelschaffer, terdapat sejumlah artikel yang telah membahas dan menganalisis kurva bentuk-telur Hügelschaffer, di antaranya oleh Petrovic dan Obradovic (2010). Mereka mencoba mengonstruksi ulang kurva bentuk-telur Hügelschaffer menggunakan *Cartesian hyperbole complementary* pada lingkaran. Kemudian, Obradovic, dkk. (2013) mengembangkan penelitian Petrovic dan Obradovic dengan menggeneralisasi kurva berorde lebih tinggi menggunakan generalisasi konstruksi kurva bentuk-telur Hügelschaffer dengan mengubah-ubah besar jarak dan posisi titik pusat dua lingkaran terhadap sumbu- x dan sumbu- y . Sedangkan, Petrovic, dkk. (2011) menganalisa kesesuaian kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diaplikasikan pada desain struktur geometri arsitektur bangunan *The National Centre for the Performing Arts* di Beijing, *The Gherkin*, dan *London City Hall*. Selain itu, dalam Nishiyama (1986), bentuk-telur telah diterapkan pada alat pengeras suara. Pada artikel tersebut dikatakan bahwa dengan menekan berbagai osilasi dan gema yang terjadi di dalam alat pengeras suara, bentuk-telur digunakan untuk meningkatkan reproduksi suara asli. Terapan lainnya adalah *egg-shaped sludge digestion chambers*. Dalam pembandingannya dengan *tubular digestion chamber*, dikatakan bahwa *egg-shaped digestion chambers* unggul dalam hal kerapatan-air (*water-tightness*) dan kerapatan-udara (*air-tightness*).

Sejumlah usulan lain mengenai persamaan kurva bentuk-telur juga telah dikemukakan, di antaranya oleh Yamamoto (2007). Yamamoto mencoba mengonstruksi kurva bentuk-telur dan mencari persamaannya dengan mengusulkan suatu definisi kurva bentuk-telur. Hasil yang diperoleh yaitu suatu persamaan kurva bentuk-telur berderajat empat :

$$(x^2 + y^2)^2 = ax^3 + (a - b)xy^2. \quad (1.1)$$

Hal ini lebih rumit daripada persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer di mana berderajat dua (Obradovic, dkk., 2010), yaitu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}\right) = 1 \quad (1.2)$$

dengan $a > b > 0$ dan $0 < |w| < a$; a, b, w konstanta.

Selain usulan Yamamoto, persamaan dan kurva bentuk-telur juga dapat diperoleh dari definisi kurva oval Descartes dan Cassini (Nishiyama, 1986). Tetapi, masing-masing persamaan kurva hasil konstruksi juga menunjukkan suatu persamaan berderajat empat, yaitu

$$4a^2m^2((c-x)^2 + y^2) - (a^2 + m^2c^2 - 2cm^2x + (m^2 - 1)(x^2 + y^2))^2 = 0 \quad (1.3)$$

dan

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = k^4 - a^4 \quad (1.4)$$

serta hasil penggambaran kurva menunjukkan kurang merepresentasikan bentuk-telur asli (Yamamoto, 2007).

Secara matematis, kurva bentuk-telur Hügelschaffer memiliki persamaan yang unik dan sederhana, yaitu suatu persamaan bentuk ellips yang terdistorsi. Hal ini dapat diperhatikan pada Persamaan 1.2. Pada persamaan tersebut faktor yang memengaruhi dan menentukan bentuk telur adalah parameter a, b dan w . Parameter a menyatakan jari-jari lingkaran besar, dimana akan menjadi panjang sumbu mayor kurva bentuk-telur Hügelschaffer. Parameter b menyatakan jari-jari lingkaran kecil, dimana akan menjadi panjang sumbu minor kurva bentuk-telur Hügelschaffer. Sedangkan, parameter w merupakan jarak antara pusat lingkaran besar dengan pusat lingkaran kecil. Ketiga parameter tersebut berperan menentukan bentuk-telur. Dengan mengubah-ubah nilai parameter-parameter tersebut akan diperoleh bentuk-telur *oval*, lingkaran dan ellips. Sehubungan dengan alasan tersebut, dalam tulisan ini peneliti akan memanfaatkan persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang digunakan untuk mengonstruksi persamaan permukaan bentuk-telur.

Dengan demikian, penelitian ini akan membahas konstruksi persamaan permukaan bentuk-telur dengan memanfaatkan kurva bentuk-telur Hügelschaffer dengan fokus permasalahan, yaitu : (1) mengonstruksi persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar terhadap sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z ; (2) mendapatkan rumus volume bangun ruang bentuk-telur dan rumus luas permukaan bentuk-telur serta memvisualisasikan persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar terhadap sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z .

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini, yaitu:

1. Bagaimanakah persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar terhadap sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z ?
2. Bagaimanakah rumus volume, luas permukaan dan visualisasi persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar terhadap sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z ?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan diselesaikan, maka dalam penelitian ini permasalahan dibatasi pada:

1. Persamaan kurva bentuk-telur yang digunakan adalah persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer.
2. Penampang melintang dari telur jika diiris tegak lurus terhadap sumbu simetri (sumbu mayor) diasumsikan berbentuk lingkaran.
3. Permukaan bentuk-telur yang akan divisualisasikan dan dianalisa adalah bentuk-telur *oval* dengan nilai parameter persamaan diperoleh dari telur unggas domestik, yaitu telur ayam kampung dan telur ayam *Broiler*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini, yaitu:

1. Untuk merumuskan persamaan permukaan bentuk-telur dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar terhadap sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z .
2. Untuk merumuskan volume dan luas permukaan serta memvisualisasikan persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar terhadap sumbu- x , sumbu- y dan sumbu- z .

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini, yaitu:

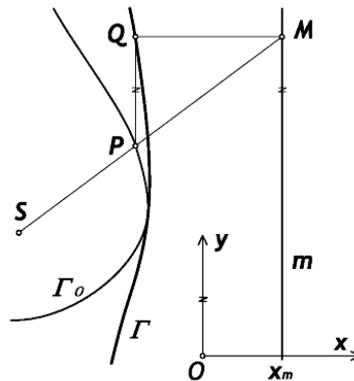
1. Persamaan permukaan bentuk-telur yang dihasilkan dari penelitian ini dapat digunakan antara lain untuk merancang konstruksi bangunan gedung dan merancang konstruksi *digester* bentuk-telur.
2. Memberikan kontribusi terhadap perkembangan ilmu pengetahuan khususnya matematika dalam bidang geometri analitik ruang.
3. Melengkapi kajian teori geometri analitik ruang dengan pendekatan vektor sebagai pengembangan dari *elipsoid*, *hyperboloid*, dan *paraboloid*.

BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Transformasi Newton

Penjelasan berikut ini menguraikan tentang transformasi kurva yang telah dikemukakan oleh Newton dan disebut *hyperbolism*, yang kemudian digunakan untuk mengonstruksi kurva bentuk-telur Hügelschaffer. Secara sederhana Petrovic dan Obradovic (2010) mendeskripsikan proses transformasi kurvanya sebagai berikut.

Proses transformasi kurva dimulai dengan suatu kurva pada bidang datar Γ_0 , jika diberikan titik $S(x_S, y_S)$ serta garis lurus $m(x = x_m)$ pada bidang yang sama, dapat diperoleh kurva baru Γ .



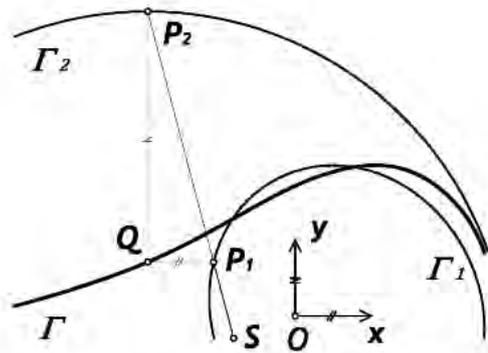
Gambar 2.1: *Hyperbolism* (Transformasi Newton suatu kurva pada bidang datar oleh suatu garis lurus dan suatu titik) (Petrovic dan Obradovic, 2010)

Pada Gambar 2.1 di atas, untuk setiap titik $P(x_P, y_P)$ pada kurva Γ_0 , akan terdapat korespondensi secara tunggal titik $Q(x_Q, y_Q)$ pada kurva Γ sebagai berikut:

1. Garis lurus SP memotong garis m pada titik $M(x_M, y_M)$;
2. Pada garis yang sejajar dengan garis m , melalui titik P , diproyeksikan dari titik M , akan diperoleh titik Q baru yang membentuk kurva baru Γ .

Selanjutnya, jika garis lurus $m(x = x_m)$ diganti dengan suatu kurva baru pada bidang Oxy , maka akan didapatkan transformasi Newton tergeneralisasi seperti pada Gambar 2.2, yaitu jika diberikan titik $S(x_S, y_S)$ dan dua kurva Γ_1 dan Γ_2 pada bidang Oxy , maka dengan *hyperbolism* akan didapatkan kurva baru Γ .

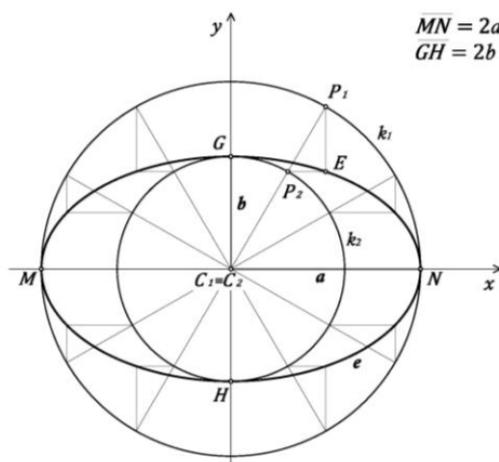
Apabila diperhatikan Gambar 2.2, setiap himpunan garis lurus yang melalui titik S akan memotong kurva Γ_1 di titik $P_1(x_1, y_1)$ dan kurva Γ_2 di titik $P_2(x_2, y_2)$. Titik $Q(x_Q, y_Q)$ pada kurva Γ merupakan himpunan titik potong antara garis yang sejajar dengan Ox dari titik P_1 , dan garis yang sejajar dengan Oy dari titik P_2 .



Gambar 2.2: *Hyperbolism* (transformasi Newton tergeneralisasi) (Petrovic dan Obradovic, 2010)

2.2 Persamaan Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer

Seperti telah dikatakan di latar belakang bahwa konstruksi kurva bentuk-telur Hügelschaffer didasarkan pada transformasi Newton yang disebut *hyperbolism* (Vassenaar, 2004); (Petrovic dan Obradovic, 2010); (Obradovic, dkk., 2013). Konstruksi kurva bentuk-telur ini telah diperkenalkan oleh matematikawan Jerman Fritz Hügelschaffer dengan menggunakan dua lingkaran tak-sepusat, yang sebenarnya diketahui merupakan transposisi konstruksi ellips dengan metode lingkaran sepusat. Seperti pada Gambar 2.3, untuk dua lingkaran sepusat (lingkaran besar $=K_1$; lingkaran kecil $=K_2$) dengan diameter GH dan MN yang masing-masing sama dengan sumbu minor dan sumbu mayor ellips, melalui titik pusat lingkaran (C_1 dan C_2) dapat dibuat sebarang garis lurus yang memotong kedua lingkaran tersebut. Dapat diperhatikan pada Gambar 2.3, bahwa dari titik potong

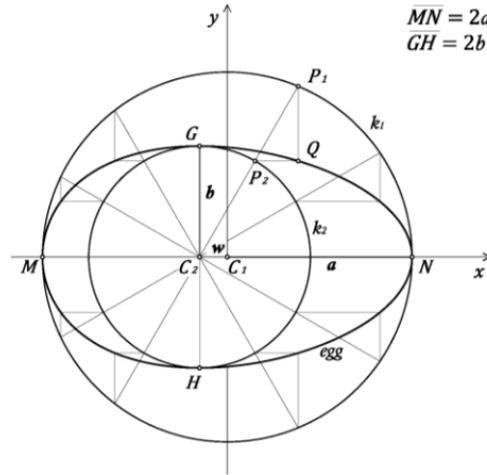


Gambar 2.3: Konstruksi ellips dengan dua lingkaran sepusat (Petrovic, dkk., 2011)

(P_2) yang diperoleh dari lingkaran K_2 , dapat dibuat garis yang sejajar dengan sumbu mayor ellips, sedangkan dari titik potong (P_1) yang diperoleh dari lingkaran K_1 ,

dapat ditarik garis lurus yang sejajar dengan sumbu minor ellips. Perpotongan dari himpunan kedua garis sejajar tersebut (titik-titik E) akan membentuk ellips.

Kemudian, Hügelschaffer menggeser lingkaran K_2 dari posisi titik sepusat, sepanjang sumbu- x dengan jarak sebesar w , sehingga titik-titik potong yang berkorespondensi dengan garis-garis sejajar (titik Q) membentuk kurva bentuk-telur (Gambar 2.4). Sebagaimana prosedur transformasi Newton yang telah dijelaskan



Gambar 2.4: Konstruksi kurva bentuk-telur Hügelschaffer (Petrovic, dkk., 2011)

di atas, dengan memisalkan kurva pertama Γ_1 adalah lingkaran K_1 dengan jari-jari a dan titik pusat C_1 pada titik pusat koordinat O , serta kurva kedua Γ_2 adalah lingkaran K_2 dengan jari-jari b dan titik pusat C_2 . Jika dimisalkan titik S pada transformasi Newton adalah titik pusat C_2 , yang digeser sebesar $w > 0$ sepanjang sumbu- x , maka dengan *hyperbolism* diperoleh kurva bentuk-telur (Gambar 2.4) dengan proses penurunan persamaannya sebagai berikut. Diketahui :

$$K_1 : P_1(x_1, y_1), C_1(0, 0), r_1 = a, (x_1)^2 + (y_1)^2 = a^2 \quad (2.1)$$

$$K_2 : P_2(x_2, y_2), C_2(-w, 0), r_2 = b, (x_2 + w)^2 + (y_2)^2 = b^2 \quad (2.2)$$

Setiap titik $Q(x_1, y_2)$ yang diperoleh dan membentuk kurva bentuk-telur akan memenuhi kondisi berikut:

$$y_1 : y_2 = (x_1 + w) : (x_2 + w) \quad (2.3)$$

Kondisi ini didapatkan dari perbandingan gradien garis C_2P_2 dengan garis C_2P_1 , bahwa gradien garis C_2P_2 dan gradien garis C_2P_1 adalah sama. Dengan mengkuadratkan Persamaan 2.3 dan dilakukan substitusi Persamaan 2.1 dan Persamaan 2.2 ke Persamaan 2.3, maka diperoleh persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer sebagai berikut:

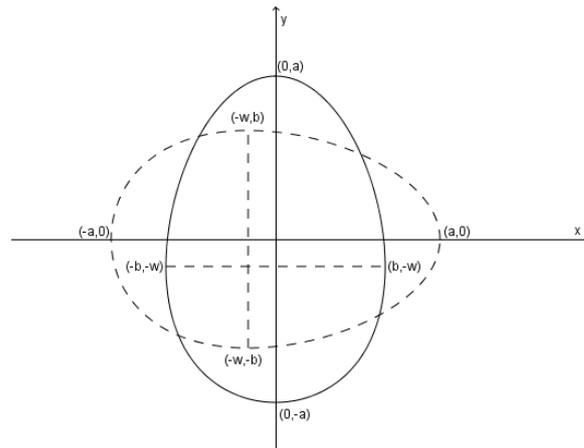
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}\right) = 1 \quad (2.4)$$

dengan $a > b > 0$; $0 < |w| < a$; a, b, w konstanta.

Pada Persamaan 2.4, nilai $2a$ sama dengan panjang sumbu mayor kurva bentuk-telur

dimana sama dengan jari-jari lingkaran besar dan $2b$ sama dengan panjang sumbu minor kurva bentuk-telur dimana sama dengan jari-jari lingkaran kecil, sedangkan w adalah besar jarak antara titik pusat lingkaran besar, yaitu C_1 dan titik pusat lingkaran kecil, yaitu C_2 .

Persamaan 2.4 merupakan persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer dengan sumbu mayor berada di sumbu- x . Selanjutnya, dengan merotasi Persamaan 2.4 sebesar 90° berlawanan arah putar jarum jam, akan didapatkan persamaan kurva bentuk-telur dengan sumbu mayor berada di sumbu- y . Hal ini dapat dilihat seperti pada Gambar 2.5. Prosesnya dapat dipahami sebagai berikut. Rotasi kurva sebesar



Gambar 2.5: Kurva bentuk-telur Hügelschaffer dirotasi 90°

α° adalah

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sehingga, jika $\alpha = 90^\circ$, maka diperoleh

$$x = y'; y = -x'. \quad (2.5)$$

Kemudian, Persamaan 2.5 disubstitusikan ke Persamaan 2.4 dan tanda aksis dihilangkan, diperoleh

$$\frac{x^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wy + w^2}{a^2} \right) + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (2.6)$$

dengan $a > b > 0$; $0 < |w| < a$; a, b, w konstanta.

Pada persamaan tersebut faktor yang memengaruhi dan memainkan peran menentukan bentuk telur adalah parameter a , b dan w . Dengan mengubah-ubah nilai parameter-parameter tersebut dapat menghasilkan bentuk-telur *oval*, lingkaran dan ellips.

2.3 Karakteristik Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer

Beberapa karakteristik yang dapat diamati dari persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer adalah

(1) Parameter w

Sebagaimana dapat diamati pada Persamaan 2.4, hal yang membedakan persamaan tersebut dengan persamaan ellips adalah terdapatnya parameter w yang berperan menentukan kelengkungan kurva bentuk-telur. Sedangkan, parameter $2a$ dan $2b$ masing-masing menentukan panjang sumbu mayor dan panjang sumbu minor kurva bentuk-telur. Jika $a = b > 0$ dan $w = 0$, maka diperoleh persamaan lingkaran. Jika $a > b > 0$ dan $w = 0$, maka diperoleh persamaan ellips.

(2) Kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada titik-titik ujung sumbu minor dan sumbu mayor bukan kurva patah

Jika Persamaan 2.4 dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$, diperoleh

$$y = f(x) = b\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + 2wx + w^2}}$$

sehingga diferensialnya adalah

$$f'(x) = -b \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 + 2wx + w^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(w+x)(wx+a^2)}{(a^2 + 2wx + w^2)^2}$$

Berikutnya, ditunjukkan bahwa $y' = f'(-a) = f'(a) = \infty$ dan $y' = f'(-w) = 0$.

$$f'(-a) = -b \left(\frac{a^2 - (-a)^2}{a^2 + 2w(-a) + w^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(w-a)(w(-a)+a^2)}{(a^2 + 2w(-a) + w^2)^2}$$

$$f'(-a) = b(0)^{-\frac{1}{2}} \frac{(w-a)(w(-a)+a^2)}{(a^2 + 2w(-a) + w^2)^2}$$

$$f'(-a) = b \frac{(w-a)(w(-a)+a^2)}{0(a^2 + 2w(-a) + w^2)^2}$$

$$f'(-a) = \infty$$

$$f'(a) = -b \left(\frac{a^2 - a^2}{a^2 + 2aw + w^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(w+a)(aw+a^2)}{(a^2 + 2aw + w^2)^2}$$

$$f'(a) = b(0)^{-\frac{1}{2}} \frac{(w+a)(aw+a^2)}{(a^2 + 2aw + w^2)^2}$$

$$f'(a) = b \frac{\frac{(w+a)(aw+a^2)}{(a^2+2aw+w^2)^2}}{0}$$

$$f'(a) = \infty$$

$$f'(-w) = -b \left(\frac{a^2 - w^2}{a^2 - 2w^2 + w^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(w-w)(-w^2+a^2)}{(a^2 - 2w^2 + w^2)^2}$$

$$f'(-w) = b(1)^{-\frac{1}{2}} 0$$

$$f'(-w) = 0$$

- (3) Domain dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer
Telah diperoleh bahwa

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2 + 2wx + w^2}}$$

Oleh karena nilai di dalam tanda akar harus ≥ 0 , maka $b^2(a^2 - x^2) \geq 0$ dan $a^2 + 2wx + w^2 > 0$. Sehingga, diperoleh domain dari Persamaan 2.4 adalah

$$D = \left\{ -a \leq x \leq a \vee x < -\frac{(a^2 + w^2)}{2w} \right\}.$$

2.4 Volume Benda Pejal

Pada sub-bab ini akan diulas materi terapan integral untuk menghitung volume suatu benda pejal yang nantinya digunakan sebagai landasan teori untuk menghitung volume telur. Dalam (Larson, 2010), terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menghitung volume suatu benda pejal, salah satunya adalah metode cakram. Dalam menghitung volume telur, akan sangat sesuai jika digunakan metode ini dikarenakan kesimetrisan kurva bentuk-telur terhadap sumbu- x , hal ini dapat dilihat seperti pada Gambar 2.4 di atas. Untuk menghitung volume suatu benda pejal dengan metode cakram, digunakan rumus:

$$V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (2.7)$$

2.5 Luas Permukaan

Sebagaimana dalam kalkulus, untuk perhitungan luas permukaan dari suatu bangun ruang, jika bangun ruang memiliki sumbu simetri atau diperoleh dari suatu kurva yang diputar terhadap suatu sumbu, maka perhitungan luas permukaan dapat digunakan rumus (Varberg, 2010):

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2.8)$$

Oleh karena telur merupakan salah satu bangun ruang yang memiliki sumbu simetri, maka rumus ini akan sesuai jika digunakan untuk mencari luas permukaan telur.

BAB III

METODA PENELITIAN

3.1 Tahapan-Tahapan Penelitian

Tahapan-tahapan penelitian secara menyeluruh yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Studi Literatur

Studi literatur yang dilakukan dalam penelitian ini, yaitu:

- (a) Mencari dan memilih topik penelitian. Topik yang diambil peneliti adalah bentuk geometri telur dikarenakan keunikan dari bentuk geometri telur itu sendiri.
- (b) Mencari artikel jurnal dan referensi lainnya yang terkait dengan topik penelitian. Pencarian dilakukan melalui internet dan artikel pertama yang peneliti dapatkan adalah karya Yamamoto (2007) dan Koller (2000). Selanjutnya, peneliti melakukan penelusuran referensi yang dipakai dalam artikel tersebut.
- (c) Dari hasil penelusuran referensi, didapatkan beberapa bentuk usulan persamaan kurva bentuk-telur. Selanjutnya, peneliti melakukan perbandingan baik persamaan maupun hasil penggambaran kurva. Peneliti memutuskan menggunakan persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer dalam artikel (Petrovic, dkk., 2011) dikarenakan kesederhanaan persamaannya dan hasil penggambaran kurva dapat merepresentasikan bentuk telur aktual, sehingga artikel tersebut dipakai peneliti sebagai rujukan utama dalam penelitian.
- (d) Membuat rumusan permasalahan penelitian. Pemilihan rumusan masalah didasarkan pada hasil penelusuran referensi dengan mencari celah permasalahan yang belum di bahas secara detail. Dari beberapa artikel yang telah membahas dan menganalisa kurva bentuk-telur Hügelschaffer, ditemukan celah bahwa belum dibahas secara detail konstruksi persamaan permukaan bentuk-telur tiga dimensi dengan memanfaatkan kurva bentuk-telur Hügelschaffer.
- (e) Mencari teori-teori yang mendukung topik penelitian termasuk aplikasi dari bangun ruang bentuk telur. Hasil pencarian dan pemilihan teori yang mendukung penelitian sebagai berikut:
 - (i) Transformasi Newton. Teori yang peneliti perlukan adalah definisi dari transformasi Newton dan prosedur dari transformasi Newton itu sendiri, yang dikenal sebagai *hyperbolism*, yang selanjutnya dimanfaatkan untuk konstruksi kurva bentuk-telur Hügelschaffer.
 - (ii) Persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer. Hasil kajian teori ini adalah penjelasan prosedur konstruksi kurva bentuk-telur Hügelschaffer. Selanjutnya, peneliti mencoba menurunkan

persamaan kurva dari gambar yang diperoleh sedemikian sehingga didapatkan persamaan kurva seperti dalam Persamaan (2.4).

- (iii) Melakukan telaah ulang rumus integral volume dan rumus integral luas permukaan dalam kalkulus untuk digunakan mencari rumus volume dan rumus luas permukaan bentuk-telur. Hasil telaah, peneliti putuskan menggunakan integral volume metode cakram (Persamaan (2.3)) dan integral luas permukaan menggunakan Persamaan (2.3). Dengan alasan seperti yang telah disebutkan dalam kajian pustaka di atas.
- (iv) Mencari referensi tambahan dari aplikasi bangun ruang bentuk telur. Diperoleh hasil bahwa bentuk telur telah dimanfaatkan untuk merancang *digester* bentuk-telur, alat pengeras suara (Nishiyama, 1986) serta arsitektur bangunan gedung (Petrovic, dkk., 2011).
- (f) Melakukan pengonstruksian persamaan permukaan bentuk-telur. Pada tahap ini dilakukan pengonstruksian persamaan permukaan bentuk-telur sesuai dengan rumusan masalah yang telah disebutkan di atas, yaitu mengonstruksi persamaan permukaan bentuk-telur menggunakan kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar terhadap sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z . Kemudian, mencari rumus volume dan luas permukaan bentuk-telur serta memvisualisasikan persamaan permukaan bentuk-telur. Proses pengonstruksian persamaan permukaan bentuk-telur (bentuk-telur tiga dimensi) adalah sebagai berikut.
 - (a) Persamaan permukaan bentuk-telur hasil memutar kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada sumbu- x
Langkah-langkah proses pengonstruksiannya adalah sebagai berikut.
 - (1) Membuat sketsa kurva bentuk-telur Hügelschaffer di bidang- xy pada koordinat kartesius 3D dengan sumbu mayor kurva berada pada sumbu- x dan titik tengah sumbu mayor kurva berada pada titik $O(0, 0, 0)$.
 - (2) Menentukan sebarang titik pada kurva bentuk-telur Hügelschaffer, dimisalkan titik P_1 dengan koordinat $P_1(x_1, y_1, 0)$ dan menyubstitusikannya ke dalam persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer.
 - (3) Memutar kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada sumbu- x , sehingga titik $P_1(x_1, y_1, 0)$ membentuk lintasan berupa lingkaran dengan titik pusat lingkaran $P_2(x_1, 0, 0)$ dan jari-jari lingkaran $|P_2P_1|$.
 - (4) Menentukan sebarang titik pada lintasan lingkaran, dimisalkan titik P dengan koordinat $P(x, y, z)$.
 - (5) Menunjukkan titik $P(x, y, z)$ juga memenuhi persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer sedemikian sehingga diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur.
 - (b) Persamaan permukaan bentuk-telur hasil memutar kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada sumbu- y
Langkah-langkah pengonstruksiannya adalah sebagai berikut.

- (1) Membuat sketsa kurva bentuk-telur Hügelschaffer di bidang- xy pada koordinat kartesius 3D dengan sumbu mayor kurva berada pada sumbu- y dan titik tengah sumbu mayor kurva berada pada titik $O(0, 0, 0)$.
 - (2) Menentukan sebarang titik pada kurva bentuk-telur Hügelschaffer, dimisalkan titik P_1 dengan koordinat $P_1(x_1, y_1, 0)$ dan menyubstitusikannya ke dalam persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer.
 - (3) Memutar kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada sumbu- y , sehingga titik $P_1(x_1, y_1, 0)$ membentuk lintasan berupa lingkaran dengan titik pusat lingkaran $P_2(x_1, 0, 0)$ dan jari-jari lingkaran $|P_2P_1|$.
 - (4) Menentukan sebarang titik pada lintasan lingkaran, dimisalkan titik P dengan koordinat $P(x, y, z)$.
 - (5) Menunjukkan titik $P(x, y, z)$ juga memenuhi persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer sedemikian sehingga diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur.
- (c) Persamaan permukaan bentuk-telur hasil memutar kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada sumbu- z
Langkah-langkah pengonstruksiannya adalah sebagai berikut.
- (1) Membuat sketsa kurva bentuk-telur Hügelschaffer di bidang- xz pada koordinat kartesius 3D dengan sumbu mayor kurva berada pada sumbu- z dan titik tengah sumbu mayor kurva berada pada titik $O(0, 0, 0)$.
 - (2) Membuat sketsa kurva lingkaran pada bidang yang sejajar dengan bidang- xy dengan jari-jari sama dengan panjang sumbu minor kurva bentuk-telur Hügelschaffer.
 - (3) Menggerakkan lingkaran sejajar bidang- xy , di mana lingkaran tetap dalam batas kurva bentuk-telur Hügelschaffer atau lingkaran tetap berpotongan dengan kurva bentuk-telur Hügelschaffer.
 - (4) Menentukan sebarang titik potong antara lingkaran dengan kurva bentuk-telur Hügelschaffer, dimisalkan titik $P(x_p, y_p, z_p)$.
 - (5) Menyubstitusikan titik $P(x_p, y_p, z_p)$ ke persamaan lingkaran-bergerak sedemikian sehingga diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur.

Selanjutnya, untuk mencari rumus volume bangun ruang bentuk-telur dilakukan langkah sebagai berikut.

- (1) Membuat sketsa kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada bidang- xy dengan sumbu mayor kurva berada di sumbu- x .
- (2) Menyatakan persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer dalam bentuk fungsi eksplisit, yaitu $y = f(x)$.
- (3) Menggunakan rumus integral volume metode cakram dengan batas pengintegralan, yaitu batas bawah = $-a$ dan batas atas = a .

- (4) Mengintegrasikan fungsi eksplisit kurva bentuk-telur Hügelschaffer yaitu $y = f(x)$ secara analitik dan menyederhanakannya.

Berikutnya, untuk mencari luas permukaan bentuk-telur dilakukan langkah sebagai berikut.

- (1) Membuat sketsa kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada bidang- xy dengan sumbu mayor kurva berada di sumbu- x .
- (2) Menyatakan persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer dalam bentuk fungsi eksplisit, yaitu $y = f(x)$.
- (3) Menggunakan rumus integral luas permukaan dengan batas pengintegralan, yaitu batas bawah = $-a$ dan batas atas = a .
- (4) Mengintegrasikan fungsi eksplisit kurva bentuk-telur Hügelschaffer yaitu $y = f(x)$ dan menyederhanakannya. Hal ini dilakukan jika integral dapat diselesaikan secara analitik. Jika integral sulit untuk diselesaikan, maka akan digunakan integrasi numerik metode *adaptive quadrature* untuk mengaproksimasi nilai hasil integral yang menyatakan luas permukaan bentuk-telur.

2. Nilai Parameter Persamaan Permukaan Bentuk-Telur

Nilai-nilai parameter a, b dan w diperoleh dari telur asli dengan cara mengukur 63 butir telur ayam menggunakan jangka sorong. Jenis telur yang digunakan dalam penelitian ini adalah 30 butir telur ayam kampung dan 33 butir telur ayam *Broiler*. Pemilihan jenis telur ini dimaksudkan hanya untuk menguji coba kesesuaian hasil penggambaran persamaan permukaan bentuk-telur dengan garis tepi telur asli. Selain itu, secara umum bentuk telur ayam adalah *oval*. Hasil pengukuran ini dimaksudkan juga untuk melihat interval hasil perbandingan nilai a dengan b dan nilai a dengan w sedemikian hingga diperoleh bentuk-telur *oval*. Nilai parameter a didapatkan dari setengah panjang telur dan nilai parameter b didapatkan dari setengah lebar telur. Untuk mendapatkan nilai parameter w , terlebih dahulu telur difoto menggunakan kamera yang dikondisikan diam. Selanjutnya, dengan menggunakan Coreldraw dilakukan pengukuran nilai parameter w hasil perbesaran foto yang mengacu pada ukuran asli telur. Nilai parameter w diukur dari titik tengah sumbu mayor hingga titik potong sumbu minor dan sumbu mayor.

3. Visualisasi Persamaan Permukaan Bentuk-Telur

Visualisasi persamaan permukaan bentuk-telur dilakukan dengan menggunakan *software* GeoGebra. Visualisasi dilakukan pada semua persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh, yaitu persamaan permukaan bentuk-telur hasil putar pada sumbu- x , sumbu- y dan sumbu- z dengan terlebih dahulu menyatakannya dalam bentuk persamaan parametrik. Pada visualisasi ini akan digunakan nilai parameter a, b dan w yang diperoleh dari hasil pengukuran terhadap 63 butir telur ayam untuk disubstitusikan ke persamaan permukaan bentuk-telur dan melihat bagaimana hasil penggambaran permukaan bentuk-telur yang diperoleh. Selain itu, untuk membantu mempercepat dan mempermudah dalam menghitung volume bangun ruang

bentuk-telur dan luas permukaan bentuk-telur akan dibuat program sederhana menggunakan MATLAB.

4. Penarikan Kesimpulan

Penarikan kesimpulan dilakukan berdasarkan hasil pembahasan dan analisa hasil pengonstruksian persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh; rumus volume bangun ruang bentuk-telur; dan luas permukaan bentuk-telur dan sekaligus untuk menjawab rumusan masalah penelitian.

5. Pembuatan Laporan Penelitian

Pembuatan laporan penelitian dilakukan sebagaimana dengan jadwal yang telah direncanakan dengan sistematika penulisan mengacu pada buku Pedoman Penyusunan Tesis PPs ITS 2014.

6. Publikasi Hasil Penelitian

Hasil penelitian ini telah dipresentasikan di "Seminar Nasional Matematika UI-Unpad Tahun 2015 dengan tema "Sinergi *Basic Science* dan Informatika dalam Menghadapi Pemberlakuan Masyarakat Ekonomi Asean" pada tanggal 6 Juni 2015 di Universitas Padjadjaran.

3.2 Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Laboratorium Komputasi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada Bab ini, mula-mula akan dibahas proses konstruksi persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar pada masing-masing sumbu koordinat, yaitu pada sumbu- x , sumbu- y dan sumbu- z . Penjelasan proses konstruksi tersebut akan dilengkapi dengan sketsa kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada koordinat kartesius tiga-dimensi, yang bertujuan untuk mempermudah pembaca dalam memahami proses mendapatkan persamaan permukaan bentuk-telur. Setelah pembahasan proses konstruksi persamaan permukaan bentuk-telur, kemudian dilanjutkan dengan pembahasan proses merumuskan volume bangun ruang bentuk-telur dengan menggunakan integral volume metode cakram. Cara sederhananya yaitu dengan membuat sketsa kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada bidang- xy dan memutarnya pada sumbu- x . Setelah itu, pembahasan dilanjutkan untuk merumuskan luas permukaan bentuk-telur dengan menggunakan integral luas permukaan. Kemudian pada bagian akhir, pembahasan ditutup dengan visualisasi persamaan permukaan bentuk-telur yang telah diperoleh menggunakan *software* GeoGebra. Untuk pembahasan pertama ini akan diawali dengan konstruksi persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar pada sumbu- x .

4.1 Persamaan Permukaan Bentuk-Telur Hasil Memutar Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer terhadap Sumbu- x

Sub-bab ini membahas proses konstruksi persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar pada sumbu- x . Proses konstruksi ini akan memanfaatkan persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer, yaitu Persamaan 2.4 yang digambar pada bidang- xy pada koordinat Kartesius tiga-dimensi. Proses pengonstruksinya dapat dipahami sebagai berikut.

Sebelumnya, untuk menyatakan persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada dimensi-tiga, akan digunakan simbol huruf T . Langkah-langkah pengonstruksinya, yaitu, mula-mula membuat sketsa kurva T pada bidang- xy dengan sumbu mayor kurva T berada di sumbu- x dan titik tengah dari sumbu mayor berada di titik $O(0, 0, 0)$. Kemudian, memutar kurva T pada sumbu- x . Hal ini dapat diperhatikan seperti pada Gambar 4.1. Pada gambar tersebut dapat diperhatikan bahwa jika kurva T diputar pada sumbu- x , maka akan membentuk bangun ruang berupa telur tiga dimensi yang ditunjukkan dengan sketsa garis putus-putus. Pada Gambar 4.1, dapat diperhatikan bahwa kurva T berada di bidang- xy dengan sumbu mayornya berada di sumbu- x dan titik-titik ujung sumbu mayornya adalah $(a, 0, 0)$ dan $(-a, 0, 0)$, serta titik-titik ujung sumbu minornya adalah $(w, b, 0)$ dan $(w, -b, 0)$. Dengan menganalogikan Persamaan 2.4 pada dimensi tiga dan terletak pada bidang- xy , maka persamaan kurva T pada bidang- xy dapat dituliskan:

$$T = \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wx+w^2}{a^2}\right) = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

4.4 disubstitusikan ke Persamaan 4.2, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y^2 + z^2)}{b^2} \left(1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}\right) &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}\right) + \frac{z^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}\right) &= 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

dengan memisalkan bahwa $f(x) = 1 + \frac{2wx+w^2}{a^2}$, maka Persamaan 4.5 dapat ditulis ulang lebih ringkas menjadi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}f(x) + \frac{z^2}{b^2}f(x) = 1. \quad (4.6)$$

dengan syarat $a > b > 0$; $0 < |w| < a$; a, b, w konstanta. Persamaan 4.6 akan menghasilkan permukaan bentuk-telur *oval* dengan syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{b}{a} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675$. Syarat tambahan ini diperoleh dari hasil pengukuran nilai parameter a, b dan w pada 63 butir telur ayam (Lampiran 4 dan Lampiran 5).

Oleh karena titik $P(x, y, z)$ terletak pada permukaan bentuk-telur, dengan demikian, dapat dikatakan bahwa Persamaan 4.6 merupakan persamaan permukaan bentuk-telur yang dicari, yaitu persamaan yang memenuhi himpunan semua titik yang terletak pada permukaan bentuk-telur. Persamaan 4.6 merupakan persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada bidang- xy yang diputar pada sumbu- x . Oleh karena Persamaan 4.6 diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada bidang- xy dengan titik tengah sumbu mayor kurva berada di titik $O(0, 0, 0)$, maka dapat dikatakan bahwa Persamaan 4.6 merupakan persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor berada di titik $O(0, 0, 0)$. Dari Persamaan 4.6 dapat pula dicari persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor berada di titik $Q(p, q, r)$, yaitu dengan cara mentranslasikan kurva T pada masing-masing sumbu koordinat sebesar p, q dan r , yaitu:

pada sumbu- x :

$$x' = x + p \Leftrightarrow x = x' - p \quad (4.7)$$

pada sumbu- y :

$$y' = y + q \Leftrightarrow y = y' - q \quad (4.8)$$

pada sumbu- z :

$$z' = z + r \Leftrightarrow z = z' - r \quad (4.9)$$

kemudian Persamaan 4.7, 4.8 dan 4.9 disubstitusikan ke Persamaan 4.6, dan menghilangkan tanda aksen, maka diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor berada di titik $Q(p, q, r)$, yaitu :

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2}f(x) + \frac{(z - r)^2}{b^2}f(x) = 1 \quad (4.10)$$

dengan $f(x) = 1 + \frac{2w(x-p)+w^2}{a^2}$ dan $a > b > 0$; $0 < |w| < a$; a, b, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{b}{a} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675$.

Selain cara di atas, untuk mendapatkan persamaan permukaan bentuk-telur dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar pada sumbu- x , dapat pula diperoleh dengan membuat sketsa kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada bidang- xz dengan letak sumbu mayor kurva tetap berada di sumbu- x dan titik tengah sumbu mayor kurva tetap berada di titik $O(0, 0, 0)$. Dengan memisalkan bahwa titik-titik ujung sumbu mayor kurva adalah $(a, 0, 0)$ dan $(-a, 0, 0)$ dan titik-titik ujung sumbu minor kurva adalah $(w, 0, c)$ dan $(w, 0, -c)$, dan memutar kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada sumbu- x , maka dapat diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur seperti Persamaan 4.6, yaitu :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} f(x) + \frac{z^2}{c^2} f(x) = 1 \quad (4.11)$$

dengan $f(x) = 1 + \frac{2wx+w^2}{a^2}$ serta $a > c > 0$; $0 < |w| < a$; a, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{c}{a} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675$.

Sedangkan, persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$ adalah

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{c^2} f(x) + \frac{(z-r)^2}{c^2} f(x) = 1 \quad (4.12)$$

dengan $f(x) = 1 + \frac{2w(x-p)+w^2}{a^2}$ serta $a > c > 0$; $0 < |w| < a$; a, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{c}{a} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675$.

Dari Persamaan 4.6 dan Persamaan 4.11, simbol b dan c hanya untuk membedakan titik-titik ujung sumbu minor kurva T di sumbu- y dan di sumbu- z . Berdasarkan hasil persamaan permukaan bentuk-telur di atas yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar terhadap sumbu- x , maka hasilnya dapat diringkas sebagai berikut.

- (1) Persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$, yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang digambar pada bidang- xy dan diputar pada sumbu- x , dimana sumbu mayor kurva di sumbu- x dan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$ adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} f(x) + \frac{z^2}{b^2} f(x) = 1.$$

dengan $f(x) = 1 + \frac{2wx+w^2}{a^2}$ serta $a > b > 0$; $0 < |w| < a$; a, b, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{b}{a} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675$.

- (2) Persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$, yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang digambar pada bidang yang sejajar dengan bidang- xy dan diputar pada sumbu yang sejajar dengan sumbu- x , dimana sumbu mayor kurva sejajar dengan sumbu- x dan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$ adalah

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} f(x) + \frac{(z-r)^2}{b^2} f(x) = 1.$$

dengan $f(x) = 1 + \frac{2w(x-p)+w^2}{a^2}$ serta $a > b > 0$; $0 < |w| < a$; a, b, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{b}{a} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675$.

- (3) Persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$, yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang digambar pada bidang- xz dan diputar pada sumbu- x , dimana sumbu mayor kurva di sumbu- x dan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$ adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2}f(x) + \frac{z^2}{c^2}f(x) = 1.$$

dengan $f(x) = 1 + \frac{2wx+w^2}{a^2}$ serta $a > c > 0$; $0 < |w| < a$; a, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{c}{a} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675$.

- (4) Persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$, yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang digambar pada bidang yang sejajar dengan bidang- xz dan diputar pada sumbu yang sejajar dengan sumbu- x , dimana sumbu mayor kurva sejajar dengan sumbu- x dan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$ adalah

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{c^2}f(x) + \frac{(z-r)^2}{c^2}f(x) = 1.$$

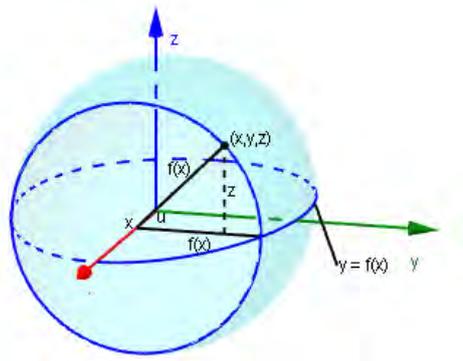
dengan $f(x) = 1 + \frac{2w(x-p)+w^2}{a^2}$ serta $a > c > 0$; $0 < |w| < a$; a, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{b}{a} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675$.

Persamaan permukaan bentuk-telur juga dapat diperoleh dari Persamaan 2.4 dengan memutar secara langsung pada sumbu- x , tetapi, dengan terlebih dahulu menyatakan Persamaan 2.4 dalam bentuk $y = f(x)$, yaitu

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2 + 2wx + w^2}}$$

Kemudian, membuat sketsa kurva $y = f(x)$. Hal ini dapat diperhatikan seperti pada Gambar 4.2. Misalkan, permukaan bentuk-telur pada Gambar 4.2 diperoleh dengan merotasi kurva $y = f(x)$, $-a \leq x \leq a$, pada sumbu- x , dimana $f(x) \geq 0$. Dimisalkan, u adalah sudut rotasi seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.2. Jika (x, y, z) adalah sebarang titik pada permukaan bentuk-telur, maka

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= \sqrt{\frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2 + 2wx + w^2}} \cos(u) \\ z &= \sqrt{\frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2 + 2wx + w^2}} \sin(u) \end{aligned}$$



Gambar 4.2: Kurva $y = f(x)$ diputar pada sumbu- x

Dengan mengkuadratkan variabel y dan z dan menjumlahkannya, akan diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur dalam bentuk persamaan kartesian, yaitu

$$y^2 + z^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2 + 2wx + w^2} \cos^2(u) + \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2 + 2wx + w^2} \sin^2(u)$$

$$y^2 + z^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2 + 2wx + w^2} (\cos^2(u) + \sin^2(u))$$

$$y^2 + z^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2 + 2wx + w^2}$$

$$\frac{y^2 + z^2}{b^2} (a^2 + 2wx + w^2) = a^2 - x^2$$

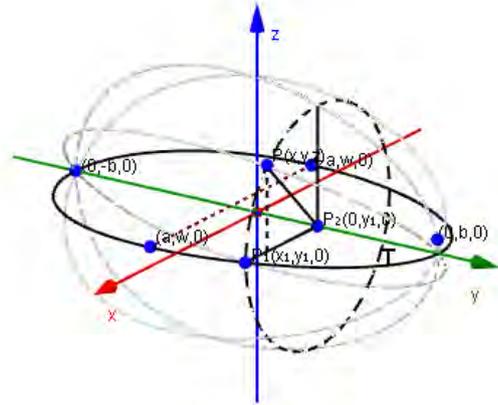
$$x^2 + \frac{y^2 + z^2}{b^2} (a^2 + 2wx + w^2) = a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}\right) + \frac{z^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}\right) = 1$$

4.2 Persamaan Permukaan Bentuk-Telur Hasil Memutar Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer terhadap Sumbu- y

Sebagaimana persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva T yang diputar pada sumbu- x , maka dengan cara yang hampir sama seperti pada subbab sebelumnya, persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva T yang diputar pada sumbu- y juga dapat dicari. Perbedaan utamanya adalah pada letak kedudukan kurva T yaitu berada di bidang- xy dengan sumbu mayor kurva T berada di sumbu- y . Ilustrasi kurva T pada bidang- xy yang diputar pada sumbu- y dapat diperhatikan seperti pada Gambar 4.3.

Penjelasan proses konstruksi persamaan permukaan bentuk-telurnya dapat dipahami sebagai berikut. Pada Gambar 4.3 tersebut, diketahui bahwa titik-titik ujung sumbu mayor kurva T adalah $(0, b, 0)$ dan $(0, -b, 0)$ serta titik-titik ujung sumbu minor kurva T adalah $(a, w, 0)$ dan $(-a, w, 0)$. Sehingga, mudah dipahami bahwa persamaan kurva T pada bidang- xy dengan sumbu mayor berada di sumbu- y



Gambar 4.3: Kurva T pada bidang- xy diputar pada sumbu- y

serta titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$ adalah

$$T = \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wy + w^2}{b^2}\right) + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases} \quad (4.13)$$

dengan $b > a > 0$; $0 < |w| < b$; a, b, w konstanta.

Kemudian, ditentukan sebarang titik yang terletak pada kurva T , dimisalkan titik P_1 dengan koordinat $P_1(x_1, y_1, 0)$. Hal ini dapat diperhatikan seperti pada Gambar 4.3 di atas. Jika kurva T diputar pada sumbu- y , maka terbentuk permukaan bentuk-telur dan titik P_1 membentuk lintasan berupa lingkaran dengan pusat $P_2(0, y_1, 0)$ dan jari-jari $|P_2P_1| = x_1$. Oleh karena titik P_1 terletak pada kurva T , maka memenuhi persamaan kurva T di titik P_1 , yaitu

$$T_{P_1} = \begin{cases} z = 0 \\ \frac{(x_1)^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wy_1 + w^2}{b^2}\right) + \frac{(y_1)^2}{b^2} = 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Selanjutnya, pada lintasan lingkaran dipilih sebarang titik, dimisalkan titik $P(x, y, z)$. Dengan demikian, jari-jari lingkaran

$$|P_2P| = |P_2P_1| = x_1. \quad (4.15)$$

Untuk mencari jari-jari $|P_2P|$ dapat juga diperoleh dengan memproyeksikan titik P pada bidang- xy , sehingga

$$|P_2P|^2 = x^2 + z^2. \quad (4.16)$$

Kemudian, Persamaan 4.15 disubstitusikan ke Persamaan 4.16, sehingga diperoleh

$$(x_1)^2 = x^2 + z^2; y = y_1. \quad (4.17)$$

Berikutnya, Persamaan 4.17 disubstitusikan ke Persamaan 4.14, sehingga diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur yang dicari, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + z^2)}{a^2} \left(1 + \frac{2wy + w^2}{b^2}\right) + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wy + w^2}{b^2}\right) + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wy + w^2}{b^2}\right) &= 1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dengan memisalkan bahwa $g(y) = 1 + \frac{2wy+w^2}{b^2}$, maka Persamaan 4.18 dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{x^2}{a^2}g(y) + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2}g(y) = 1. \quad (4.19)$$

dengan $b > a > 0$; $0 < |w| < b$; a, b, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{a}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

Oleh karena Persamaan 4.19 diperoleh dari kurva T dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$, maka Persamaan 4.19 merupakan persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$. Adapun untuk mendapatkan persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$, maka dengan cara yang sama seperti pada subbab sebelumnya, yaitu dengan mentranslasikan kurva T pada masing-masing sumbu koordinat, yaitu sebesar p pada sumbu- x , sebesar q pada sumbu- y dan sebesar r pada sumbu- z , maka diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor berada di titik $Q(p, q, r)$, yaitu

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}g(y) + \frac{(y-q)^2}{b^2} + \frac{(z-r)^2}{a^2}g(y) = 1 \quad (4.20)$$

dengan $g(y) = 1 + \frac{2w(y-q)+w^2}{b^2}$ serta $b > a > 0$; $0 < |w| < b$; a, b, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{a}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

Seperti pada penjelasan sebelumnya, jika letak kedudukan kurva T digambar di bidang- yz dengan titik-titik ujung sumbu mayor $(0, b, 0)$ dan $(0, -b, 0)$, serta titik-titik ujung sumbu minor $(0, w, c)$ dan $(0, w, -c)$, maka persamaan kurva T menjadi

$$T = \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \left(1 + \frac{2wy+w^2}{b^2} \right) = 1 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Sehingga, persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$ adalah

$$\frac{x^2}{c^2}g(y) + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}g(y) = 1 \quad (4.22)$$

dengan $g(y) = 1 + \frac{2wy+w^2}{b^2}$ serta $b > c > 0$; $0 < |w| < b$; b, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{c}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

Sedangkan, persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$ adalah

$$\frac{(x-p)^2}{c^2}g(y) + \frac{(y-q)^2}{b^2} + \frac{(z-r)^2}{c^2}g(y) = 1 \quad (4.23)$$

dengan $g(y) = 1 + \frac{2w(y-q)+w^2}{b^2}$ serta $b > c > 0$; $0 < |w| < b$; b, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{c}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

Berdasarkan hasil persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar terhadap sumbu- y dapat diringkaskan sebagai berikut.

Dengan memisalkan bahwa $g(y) = 1 + \frac{2wy+w^2}{b^2}$, maka Persamaan 4.18 dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{x^2}{a^2}g(y) + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2}g(y) = 1. \quad (4.19)$$

dengan $b > a > 0$; $0 < |w| < b$; a, b, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{a}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

Oleh karena Persamaan 4.19 diperoleh dari kurva T dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$, maka Persamaan 4.19 merupakan persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$. Adapun untuk mendapatkan persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$, maka dengan cara yang sama seperti pada subbab sebelumnya, yaitu dengan mentranslasikan kurva T pada masing-masing sumbu koordinat, yaitu sebesar p pada sumbu- x , sebesar q pada sumbu- y dan sebesar r pada sumbu- z , maka diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor berada di titik $Q(p, q, r)$, yaitu

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}g(y) + \frac{(y-q)^2}{b^2} + \frac{(z-r)^2}{a^2}g(y) = 1 \quad (4.20)$$

dengan $g(y) = 1 + \frac{2w(y-q)+w^2}{b^2}$ serta $b > a > 0$; $0 < |w| < b$; a, b, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{a}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

Seperti pada penjelasan sebelumnya, jika letak kedudukan kurva T digambar di bidang- yz dengan titik-titik ujung sumbu mayor $(0, b, 0)$ dan $(0, -b, 0)$, serta titik-titik ujung sumbu minor $(0, w, c)$ dan $(0, w, -c)$, maka persamaan kurva T menjadi

$$T = \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \left(1 + \frac{2wy+w^2}{b^2} \right) = 1 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Sehingga, persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$ adalah

$$\frac{x^2}{c^2}g(y) + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}g(y) = 1 \quad (4.22)$$

dengan $g(y) = 1 + \frac{2wy+w^2}{b^2}$ serta $b > c > 0$; $0 < |w| < b$; b, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{c}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

Sedangkan, persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$ adalah

$$\frac{(x-p)^2}{c^2}g(y) + \frac{(y-q)^2}{b^2} + \frac{(z-r)^2}{c^2}g(y) = 1 \quad (4.23)$$

dengan $g(y) = 1 + \frac{2w(y-q)+w^2}{b^2}$ serta $b > c > 0$; $0 < |w| < b$; b, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{c}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

Berdasarkan hasil persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar terhadap sumbu- y dapat diringkaskan sebagai berikut.

- (1) Jika kurva T di bidang- xy dengan sumbu mayor berada di sumbu- y dan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$, maka persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$ adalah

$$\frac{x^2}{a^2}f(y) + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2}f(y) = 1.$$

dengan $f(y) = 1 + \frac{2wy+w^2}{b^2}$ serta $b > a > 0$; $0 < |w| < b$; a, b, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{a}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

- (2) Jika kurva T digambar pada bidang sejajar bidang- xy dengan sumbu mayor sejajar sumbu- y dan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$, maka persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$ adalah

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}g(y) + \frac{(y-q)^2}{b^2} + \frac{(z-r)^2}{a^2}g(y) = 1$$

dengan $g(y) = 1 + \frac{2w(y-q)+w^2}{b^2}$ serta $b > a > 0$; $0 < |w| < b$; a, b, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{a}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

- (3) Jika kurva T di bidang- yz dengan sumbu mayor berada di sumbu- y dan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$, maka persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$ adalah

$$\frac{x^2}{c^2}g(y) + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}g(y) = 1.$$

dengan $g(y) = 1 + \frac{2wy+w^2}{b^2}$ serta $b > c > 0$; $0 < |w| < b$; b, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{c}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

- (4) Jika kurva T digambar pada bidang yang sejajar bidang- yz dengan sumbu mayor sejajar sumbu- y dan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$, maka persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$ adalah

$$\frac{(x-p)^2}{c^2}g(y) + \frac{(y-q)^2}{b^2} + \frac{(z-r)^2}{c^2}g(y) = 1$$

dengan $g(y) = 1 + \frac{2w(y-q)+w^2}{b^2}$ serta $b > c > 0$; $0 < |w| < b$; b, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{c}{b} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675$.

Persamaan permukaan bentuk-telur hasil memutar kurva T pada sumbu- y dapat juga diperoleh dari Persamaan 4.6 yang dirotasi sebesar 90° berlawanan arah putaran jarum jam, yaitu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Oleh karena rotasi dilakukan terhadap kurva T di bidang- xy dengan sumbu rotasi adalah sumbu- z , maka nilai z tetap, sehingga diperoleh

$$x = y'; y = -x'. \quad (4.24)$$

Persamaan 4.24 disubstitusikan ke Persamaan 4.6 dan tanda aksen dihilangkan, sehingga diperoleh

$$\frac{x^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wy + w^2}{a^2} \right) + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wy + w^2}{a^2} \right) = 1 \quad (4.25)$$

Sekilas, Persamaan 4.25 dengan Persamaan 4.19 tampak berbeda. Hal ini dikarenakan perbedaan pemisalan titik-titik ujung pada sumbu minor dan sumbu mayor. Parameter a pada persamaan 4.25 merupakan titik ujung sumbu mayor, sedangkan b adalah titik ujung sumbu minor. Jika dimisalkan titik-titik ujung sumbu mayor adalah $(0, b, 0)$ dan $(0, -b, 0)$ dan titik-titik ujung sumbu minor adalah $(a, w, 0)$ dan $(-a, w, 0)$, maka akan didapatkan persamaan yang sama dengan Persamaan 4.19, yaitu

$$\frac{x^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wy + w^2}{b^2} \right) + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wy + w^2}{b^2} \right) = 1$$

dengan $b > a > 0$; $0 < |w| < b$; a, b, w konstanta.

4.3 Persamaan Permukaan Bentuk-Telur Hasil Memutar Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer terhadap Sumbu- z

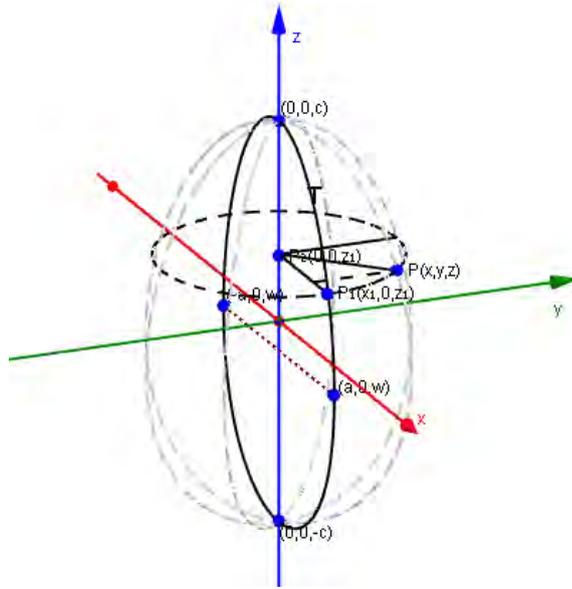
Pada sub-bab ini akan dijelaskan proses konstruksi persamaan permukaan bentuk-telur apabila kurva T terletak di bidang- xz dengan sumbu mayor kurva T berada pada sumbu- z . Prosedur pengonstruksianya hampir sama seperti pada sub-bab sebelumnya, perbedaannya terletak pada kedudukan kurva T dan titik-titik koordinat yang diperlukan serta sumbu putarnya, yaitu sumbu- z . Sehingga, hal ini nantinya juga akan mempengaruhi bentuk persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh. Ilustrasi kurva T di bidang- xz yang diputar pada sumbu- z sehingga membentuk bangun ruang berupa permukaan bentuk-telur dapat diperhatikan seperti pada Gambar 4.4.

Proses konstruksi persamaan permukaan bentuk-telurnya adalah sebagai berikut. Pertama, membuat sketsa kurva T pada bidang- xz dengan sumbu mayor kurva T berada pada sumbu- z . Hal ini dapat diperhatikan seperti pada Gambar 4.4. Pada gambar tersebut, dimisalkan titik-titik ujung sumbu mayor kurva T adalah $(0, 0, c)$ dan $(0, 0, -c)$, serta titik-titik ujung sumbu minor kurva T adalah $(a, 0, w)$ dan $(-a, 0, w)$. Kemudian, dengan menganalogikan persamaan kurva T seperti Persamaan 2.4, maka persamaan kurva T di bidang- xz dengan sumbu mayor kurva T di sumbu- z dan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$ adalah

$$T = \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wz + z^2}{c^2} \right) + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

dengan $c > a > 0$; $0 < |w| < c$; a, c, w konstanta.

Kedua, dipilih sebarang titik yang terletak pada kurva T , dimisalkan titik



Gambar 4.4: Kurva T di bidang- xz diputar pada sumbu- z

P_1 dengan koordinat $P_1(x_1, 0, z_1)$. Jika kurva T diputar pada sumbu- z maka terbentuk permukaan bentuk-telur dan titik P_1 akan membentuk lintasan berupa lingkaran dengan pusat $P_2(0, 0, z_1)$ dan jari-jari $|P_2P_1| = x_1$. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 4.4 di atas. Karena titik $P_1(x_1, 0, z_1)$ terletak pada kurva T , maka memenuhi persamaan kurva T (Persamaan 4.26), sehingga persamaan kurva T di titik P_1 adalah

$$T_{P_1} = \begin{cases} y = 0 \\ \frac{(x_1)^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wz_1 + w^2}{c^2}\right) + \frac{(z_1)^2}{c^2} = 1. \end{cases} \quad (4.27)$$

Kemudian, dipilih sebarang titik $P(x, y, z)$ yang terletak pada lintasan lingkaran, sehingga diperoleh bahwa jari-jari $|P_2P|$ akan sama dengan jari-jari $|P_2P_1|$, yaitu

$$|P_2P| = |P_2P_1| = x_1. \quad (4.28)$$

Selain itu, jari-jari $|P_2P|$ juga dapat dicari dengan cara memproyeksikan titik $P(x, y, z)$ pada bidang- xz , sehingga diperoleh

$$|P_2P|^2 = x^2 + y^2. \quad (4.29)$$

Kemudian, Persamaan 4.28 disubstitusikan ke Persamaan 4.29, sehingga diperoleh

$$(x_1)^2 = x^2 + y^2; z = z_1. \quad (4.30)$$

Selanjutnya, Persamaan 4.30 disubstitusikan ke Persamaan 4.27, sehingga diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur yang dicari, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + y^2)}{a^2} \left(1 + \frac{2wz + w^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wz + w^2}{c^2}\right) + \frac{y^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wz + w^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

dengan memisalkan $h(z) = 1 + \frac{2wz+w^2}{c^2}$, maka Persamaan 4.31 dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{x^2}{a^2}h(z) + \frac{y^2}{a^2}h(z) + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.32)$$

dengan $c > a > 0$; $0 < |w| < c$; a, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{a}{c} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{c} \leq 0,1675$.

Persamaan 4.32 merupakan persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva T pada bidang- xz yang diputar pada sumbu- z dengan titik tengah sumbu mayor berada di titik $O(0, 0, 0)$. Selanjutnya, untuk mencari persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$, maka caranya sama seperti pada subbab sebelumnya, yaitu dengan mentranslasikan Persamaan 4.32 pada sumbu- x sebesar p , pada sumbu- y sebesar q , dan pada sumbu- z sebesar r , sehingga diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$, yaitu

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}h(z) + \frac{(y-q)^2}{a^2}h(z) + \frac{(z-r)^2}{c^2} = 1 \quad (4.33)$$

dengan $h(z) = 1 + \frac{2w(z-r)+w^2}{c^2}$ serta $c > a > 0$; $0 < |w| < c$; a, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{a}{c} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{c} \leq 0,1675$.

Untuk hal yang serupa, selain kurva T di bidang- xz , dengan mengubah letak kurva T pada bidang- yz dan sumbu mayor kurva tetap berada di sumbu- z dan titik tengah sumbu mayor kurva tetap di titik $O(0, 0, 0)$, maka persamaan permukaan bentuk-telur yang mirip dengan Persamaan 4.32 juga dapat diperoleh. Dengan menggunakan cara yang sama, maka persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$ adalah

$$\frac{x^2}{b^2}h(z) + \frac{y^2}{b^2}h(z) + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.34)$$

dengan $h(z) = 1 + \frac{2wz+w^2}{c^2}$ serta $c > b > 0$; $0 < |w| < c$; b, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{b}{c} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{c} \leq 0,1675$.

Sedangkan, persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$, yaitu

$$\frac{(x-p)^2}{b^2}h(z) + \frac{(y-q)^2}{b^2}h(z) + \frac{(z-r)^2}{c^2} = 1 \quad (4.35)$$

dengan $h(z) = 1 + \frac{2w(z-r)+w^2}{c^2}$ serta $c > b > 0$ dan $0 < |w| < c$; b, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{b}{c} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{c} \leq 0,1675$.

Berdasarkan hasil persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer yang diputar pada sumbu- z dapat diringkas sebagai berikut.

- (1) Jika kurva T di bidang- xz dengan sumbu mayor di sumbu- z dan titik tengah dari sumbu mayor kurva T di titik $O(0, 0, 0)$, maka persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$ adalah

$$\frac{x^2}{a^2}h(z) + \frac{y^2}{a^2}h(z) + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

dengan $h(z) = 1 + \frac{2wz+w^2}{c^2}$, serta $c > a > 0$; $0 < |w| < c$; a, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{a}{c} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{c} \leq 0,1675$.

- (2) Jika kurva T digambar pada bidang yang sejajar bidang- xz dengan sumbu mayor kurva sejajar sumbu- z dan titik tengah dari sumbu mayor kurva T di titik $Q(p, q, r)$, maka persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$ adalah

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}h(z) + \frac{(y-q)^2}{a^2}h(z) + \frac{(z-r)^2}{c^2} = 1$$

dengan $h(z) = 1 + \frac{2w(z-r)+w^2}{c^2}$ serta $c > a > 0$; $0 < |w| < c$; a, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{a}{c} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{c} \leq 0,1675$.

- (3) Jika kurva T di bidang- yz dengan sumbu mayor di sumbu- z dan titik tengah dari sumbu mayor kurva T di titik $O(0, 0, 0)$, maka persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$ adalah

$$\frac{x^2}{b^2}h(z) + \frac{y^2}{b^2}h(z) + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

dengan $h(z) = 1 + \frac{2wz+w^2}{c^2}$, serta $c > b > 0$; $0 < |w| < c$; b, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{b}{c} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{c} \leq 0,1675$.

- (4) Jika kurva T digambar pada bidang yang sejajar bidang- yz dengan sumbu mayor kurva sejajar sumbu- z dan titik tengah dari sumbu mayor kurva T di titik $Q(p, q, r)$, maka persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(p, q, r)$ adalah

$$\frac{(x-p)^2}{b^2}h(z) + \frac{(y-q)^2}{b^2}h(z) + \frac{(z-r)^2}{c^2} = 1$$

dengan $h(z) = 1 + \frac{2w(z-r)+w^2}{c^2}$ serta $c > b > 0$; $0 < |w| < c$; b, c, w konstanta. Syarat tambahan: $0,681 \leq \frac{b}{c} \leq 0,815$ dan $0,0292 \leq \frac{w}{c} \leq 0,1675$.

Persamaan permukaan bentuk-telur hasil memutar kurva T terhadap sumbu- z juga dapat diperoleh dengan merotasi Persamaan 4.6 atau Persamaan 4.19 sebesar 90° berlawanan arah putar jarum jam. Jika rotasi dilakukan pada Persamaan 4.19 sebesar 90° berlawanan arah putar jarum jam dengan sumbu rotasi adalah sumbu- x , maka

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Oleh karena rotasi dilakukan terhadap kurva T di bidang- xy dengan sumbu rotasi adalah sumbu- x , maka nilai x tetap, sehingga diperoleh

$$y = z'; z = -y'. \quad (4.36)$$

Selanjutnya, Persamaan 4.36 disubstitusikan ke Persamaan 4.19 dan tanda aksis dihilangkan, sehingga diperoleh

$$\frac{x^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wz + w^2}{b^2} \right) + \frac{y^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wz + w^2}{b^2} \right) + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (4.37)$$

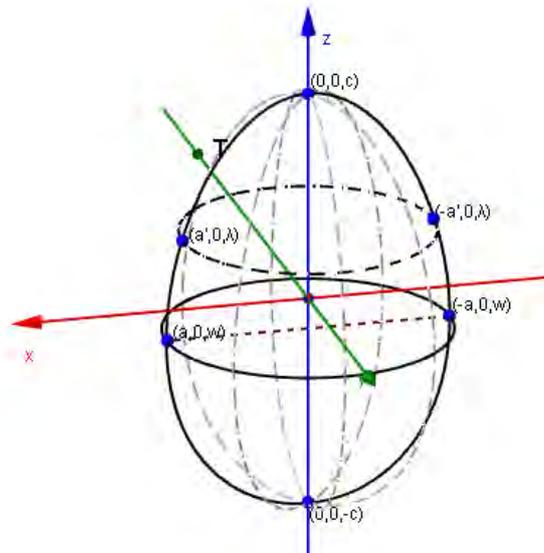
Jika dimisalkan titik-titik ujung sumbu mayor adalah $(0, 0, c)$ dan $(0, 0, -c)$ serta titik-titik ujung sumbu minor adalah $(a, 0, w)$ dan $(-a, 0, w)$, maka Persamaan 4.37 menjadi

$$\frac{x^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wz + w^2}{c^2} \right) + \frac{y^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wz + w^2}{c^2} \right) + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.38)$$

yang sama dengan Persamaan 4.32.

Selain dengan menggunakan cara seperti yang telah dijelaskan di atas, cara yang hampir sama tetapi sedikit berbeda berikut ini juga dapat digunakan untuk mendapatkan persamaan permukaan bentuk-telur. Proses pengonstruksian sedikit berbeda, tetapi menghasilkan persamaan permukaan bentuk-telur yang sama. Metoda ini peneliti uraikan pada kasus jika kurva T berada di bidang- xz dan sumbu mayor kurva T di sumbu- z dan titik tengah sumbu mayor kurva di titik $O(0, 0, 0)$. Untuk kasus lainnya bisa disamakan prosesnya.

Misalkan diketahui kurva T pada bidang- xz dengan titik-titik ujung sumbu mayor adalah $(0, 0, c)$ dan $(0, 0, -c)$ serta titik-titik ujung sumbu minor adalah $(a, 0, w)$ dan $(-a, 0, w)$. Diketahui pula lingkaran C yang terletak pada bidang yang sejajar dengan bidang- xy dengan jari-jari sama dengan a . Ilustrasi kurva T dan lingkaran C ini dapat diperhatikan seperti pada Gambar 4.5 berikut ini. Pada



Gambar 4.5: Kurva T di bidang- xz dan lingkaran C terletak sejajar bidang- xy

Gambar 4.5, jika lingkaran C digerakkan sejajar dengan kedudukan semula dan tetap dalam batas kurva T serta tetap sebangun, maka bidang yang dilalui lingkaran C akan membentuk bangun ruang berupa permukaan bentuk-telur. Dimisalkan lingkaran yang bergerak tersebut adalah lingkaran C' . Maka untuk mendapatkan persamaan permukaan bentuk-telur tersebut, prosesnya dapat dipahami sebagai berikut.

Mudah dipahami bahwa persamaan kurva T di bidang- xz dengan sumbu mayor

di sumbu- z adalah

$$T = \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wz+w^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \quad (4.39)$$

dengan $c > a > 0$; $0 < |w| < c$; a, c, w konstanta, dan persamaan lingkaran C adalah

$$C = \begin{cases} z = w \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \quad (4.40)$$

serta persamaan lingkaran-bergerak C' adalah

$$C' = \begin{cases} z = \lambda \\ x^2 + y^2 = (a')^2 \end{cases} \quad (4.41)$$

Pada Persamaan 4.41, parameter a' adalah parameter yang belum diketahui nilainya. Untuk itu, akan dicari nilai dari parameter tersebut dengan menyatakannya dalam bentuk parameter a dan c yang telah diketahui nilainya. Caranya, dipilih sebarang titik pada kurva T , misalkan titik tersebut adalah $P(x_p, y_p, z_p)$. Oleh karena titik $P(x_p, y_p, z_p)$ terletak pada kurva T , maka memenuhi persamaan kurva T , yaitu

$$T = \begin{cases} y = 0 \\ \frac{(x_p)^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wz_p+w^2}{c^2}\right) + \frac{(z_p)^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow (x_p)^2 = \frac{a^2(c^2-(z_p)^2)}{c^2+2wz_p+w^2} \end{cases} \quad (4.42)$$

Misalkan, titik $P(x_p, y_p, z_p)$ adalah titik potong antara kurva T dengan lingkaran bergerak C' dan terletak pada titik $(a', 0, \lambda)$, maka didapatkan hubungan bahwa $a' = x_p$ dan $z_p = \lambda$, sehingga Persamaan 4.42 menjadi

$$(a')^2 = \frac{a^2(c^2 - \lambda^2)}{c^2 + 2w\lambda + w^2} \quad (4.43)$$

Kemudian, Persamaan 4.43 disubstitusikan ke Persamaan 4.41, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{a^2(c^2 - z^2)}{c^2 + 2wz + w^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} &= \frac{c^2 - z^2}{c^2 + 2wz + w^2} \\ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}\right)(c^2 + 2wz + w^2) &= c^2 - z^2 \\ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}\right)\left(\frac{c^2 + 2wz + w^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{2wz + w^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{2wz + w^2}{c^2}\right) + \frac{y^2}{a^2}\left(1 + \frac{2wz + w^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Misalkan, $h(z) = 1 + \frac{2wz+w^2}{c^2}$, maka Persamaan 4.44 menjadi

$$\frac{x^2}{a^2}h(z) + \frac{y^2}{a^2}h(z) + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.45)$$

dengan $c > a > 0$; $0 < |w| < c$; a, c, w konstanta.

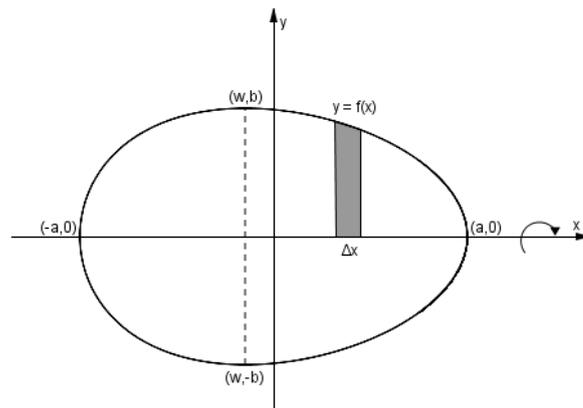
Dengan membandingkan Persamaan 4.45 dengan Persamaan 4.32, tampak diperoleh hasil persamaan yang sama. Dengan demikian, Persamaan 4.45 merupakan persamaan permukaan bentuk-telur yang dicari, yaitu persamaan permukaan bentuk-telur dengan titik tengah sumbu mayor di titik $O(0, 0, 0)$.

4.4 Volume Bangun Ruang Bentuk-Telur

Pada sub-bab ini akan dibahas cara mendapatkan rumus volume bangun ruang bentuk-telur dengan menggunakan integral volume metode cakram dan persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer (Persamaan 2.4). Untuk mencari volume bangun ruang bentuk-telur, rumus integral volume metode cakram yang digunakan sebagaimana telah disampaikan pada Bab 2, yaitu

$$V(x) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (4.46)$$

Rumus volume bangun ruang bentuk-telur yang dicari di sini diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada bidang- xy yang diputar pada sumbu- x dengan sumbu mayor berada pada sumbu- x . Hal ini dapat dilihat seperti pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6: Integral volume metode cakram pada kurva bentuk-telur Hügelschaffer

Oleh karena sumbu simetri kurva bentuk-telur Hügelschaffer sama dengan sumbu- x dan titik-titik ujung dari sumbu mayor sama dengan $(a, 0)$ dan $(-a, 0)$, maka batas-batas pengintegralan dari Persamaan 4.46 di atas menjadi

$$V(x) = \pi \int_{-a}^a [f(x)]^2 dx. \quad (4.47)$$

Telah diketahui bahwa persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada bidang- xy dengan sumbu mayor pada sumbu- x adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}\right) = 1 \quad (4.48)$$

dengan $a > b > 0$; $0 < |w| < a$; a, b, w konstanta.

Lebih lanjut, jika Persamaan 4.48 dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$ maka

$$\begin{aligned}
 \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wx + w^2}{a^2} \right) &= 1 - \frac{x^2}{a^2} \\
 \frac{y^2}{b^2} \left(\frac{a^2 + 2wx + w^2}{a^2} \right) &= \frac{a^2 - x^2}{a^2} \\
 \frac{y^2}{b^2} (a^2 + 2wx + w^2) &= a^2 - x^2 \\
 y^2 &= \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2 + 2wx + w^2} \\
 y &= \pm b \sqrt{\frac{(a^2 - x^2)}{a^2 + 2wx + w^2}} \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

Kemudian, menyatakan bahwa $f(x) = y(x)$. Selanjutnya, Persamaan 4.49 disubstitusikan ke Persamaan 4.47, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \pi \int_{-a}^a [f(x)]^2 dx \\
 &= \pi \int_{-a}^a \left(\frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2 + 2wx + w^2} \right) dx \\
 &= \pi \int_{-a}^a \frac{a^2 b^2}{2wx + a^2 + w^2} dx - \pi \int_{-a}^a \frac{b^2 x^2}{2wx + a^2 + w^2} dx \\
 &= \pi a^2 b^2 \int_{-a}^a \frac{1}{2wx + a^2 + w^2} dx - \pi b^2 \int_{-a}^a \frac{x^2}{2wx + a^2 + w^2} dx
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan mengintegrasikan dan sedikit menguraikan serta menyubstitusikan batas atas sama dengan a dan batas bawah sama dengan $-a$, maka diperoleh hasil pengintegralannya, yaitu

$$\begin{aligned}
 V &= \pi a^2 b^2 \frac{1}{w} \ln \left(\frac{a+w}{a-w} \right) + \pi b^2 \frac{a(a^2 + w^2)}{2w^2} - \pi b^2 \frac{(a^2 + w^2)^2}{4w^2} \frac{1}{w} \ln \left(\frac{a+w}{a-w} \right) \\
 &= \pi b^2 \left[\left(a^2 - \frac{(a^2 + w^2)^2}{4w^2} \right) \frac{1}{w} \ln \left(\frac{a+w}{a-w} \right) + \frac{a(a^2 + w^2)}{2w^2} \right] \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil pengintegralan di atas, maka rumus untuk menghitung volume bangun ruang bentuk-telur adalah

$$V = \pi b^2 \left[\left(a^2 - \frac{(a^2 + w^2)^2}{4w^2} \right) \frac{1}{w} \ln \left(\frac{a+w}{a-w} \right) + \frac{a(a^2 + w^2)}{2w^2} \right] \quad (4.51)$$

Persamaan 4.51 di atas merupakan persamaan yang diperoleh dari Persamaan 4.48. Jika kurva bentuk-telur Hügelschaffer digambar pada bidang- xy dan sumbu mayor berada di sumbu- y dengan persamaan kurva yaitu

$$\frac{x^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wy + w^2}{b^2} \right) + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.52)$$

dengan $b > a > 0$; $0 < |w| < b$; a, b, w konstanta. Maka rumus volume bangun ruang bentuk-telurnya adalah

$$V = \pi a^2 \left[\left(b^2 - \frac{(b^2 + w^2)^2}{4w^2} \right) \frac{1}{w} \ln \left(\frac{b + w}{b - w} \right) + \frac{b(b^2 + w^2)}{2w^2} \right] \quad (4.53)$$

Sedangkan, jika kurva bentuk-telur Hügelschaffer digambar pada bidang- xz dan sumbu mayor berada di sumbu- z dengan persamaan kurvanya yaitu

$$\frac{x^2}{a^2} \left(1 + \frac{2wz + w^2}{c^2} \right) + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.54)$$

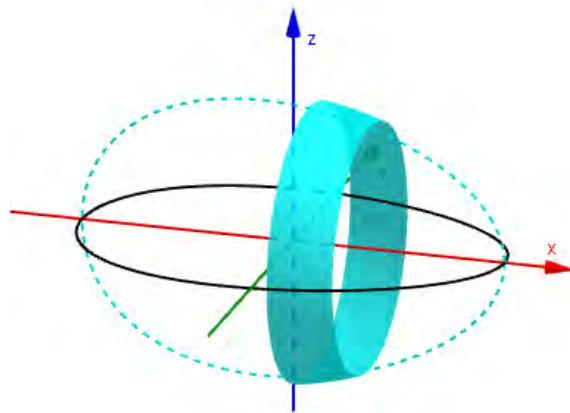
dengan $c > a > 0$; $0 < |w| < c$; a, c, w konstanta. Maka rumus volume bangun ruang bentuk-telurnya adalah

$$V = \pi a^2 \left[\left(c^2 - \frac{(c^2 + w^2)^2}{4w^2} \right) \frac{1}{w} \ln \left(\frac{c + w}{c - w} \right) + \frac{c(c^2 + w^2)}{2w^2} \right] \quad (4.55)$$

Selanjutnya, untuk mempermudah dan mempercepat dalam menghitung volume bangun ruang bentuk-telur, akan dibuat program *M-file* dengan menggunakan MATLAB. Program *M-file* ini dapat dilihat pada Lampiran 1.

4.5 Luas Permukaan Bentuk-Telur

Pembahasan berikut ini bertujuan untuk memformulasikan luas permukaan bentuk-telur. Telah diketahui bahwa kurva bentuk-telur Hügelschaffer merupakan suatu kurva yang simetris terhadap sumbu- x apabila digambar pada bidang- xy dan sumbu mayornya berada pada sumbu- x . Hal ini seperti ditunjukkan pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7: Sketsa luas permukaan bentuk-telur

Dengan demikian, untuk mencari luas permukaan bentuk-telur dapat digunakan rumus integral luas permukaan berikut ini.

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (4.56)$$

Telah diketahui bahwa titik-titik ujung sumbu mayor kurva sama dengan $(a, 0)$ dan $(-a, 0)$, maka batas atas dan batas bawah dari integral luas permukaan di atas menjadi

$$A = 2\pi \int_{-a}^a f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (4.57)$$

Diketahui pula bahwa persamaan kurva bentuk-telur Hügelschaffer pada bidang- xy dengan sumbu mayor pada sumbu- x adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}\right) = 1 \quad (4.58)$$

Oleh karena untuk mencari luas permukaan bentuk-telur diperlukan persamaan dalam bentuk $f(x)$ dan diferensialnya, maka lebih lanjut, jika Persamaan 4.58 dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x)$, diperoleh

$$y = f(x) = \pm b \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + 2wx + w^2}} \quad (4.59)$$

dan diferensialnya adalah

$$f'(x) = -b \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 + 2wx + w^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(w+x)(wx+a^2)}{(a^2 + 2wx + w^2)^2} \quad (4.60)$$

Selanjutnya, Persamaan 4.59 dan 4.60 disubstitusikan ke dalam Persamaan 4.57, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-a}^a f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= 2\pi b \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + 2wx + w^2}} \sqrt{1 + \left[-b \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 + 2wx + w^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(w+x)(wx+a^2)}{(a^2 + 2wx + w^2)^2} \right]^2} dx \\ &= 2\pi b \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + 2wx + w^2}} \sqrt{1 + b^2 \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 + 2wx + w^2} \right)^{-1} \frac{(w+x)^2 (wx+a^2)^2}{(a^2 + 2wx + w^2)^4}} dx \\ &= 2\pi b \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + 2wx + w^2}} \sqrt{1 + \frac{b^2 (w+x)^2 (wx+a^2)^2}{(a^2 - x^2)(a^2 + 2wx + w^2)^3}} dx \\ &= 2\pi b \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + 2wx + w^2}} \sqrt{\frac{(a^2 - x^2)(a^2 + 2wx + w^2)^3 + b^2 (w+x)^2 (wx+a^2)^2}{(a^2 - x^2)(a^2 + 2wx + w^2)^3}} dx \\ &= 2\pi b \int_{-a}^a \sqrt{\frac{(a^2 - x^2)(a^2 + 2wx + w^2)^3 + b^2 (w+x)^2 (wx+a^2)^2}{(a^2 + 2wx + w^2)^4}} dx \\ &= 2\pi b \int_{-a}^a \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 + 2wx + w^2)^3 + b^2 (w+x)^2 (wx+a^2)^2}}{(a^2 + 2wx + w^2)^2} dx \quad (4.61) \end{aligned}$$

Oleh karena integran dari Persamaan 4.61 di atas sulit untuk dicari hasil integralnya secara analitik, maka untuk mencari integral dari persamaan tersebut, selanjutnya akan digunakan integrasi numerik dengan menggunakan metode

adaptive quadrature. Dengan demikian, dalam penelitian ini pencarian luas permukaan bentuk-telur akan diaproksimasi nilainya dengan menggunakan integrasi numerik metode *adaptive quadrature*.

Dengan membandingkan hasil metode Simpson's 1/3, metode Romberg dan metode *adaptive quadrature*, maka pemilihan metode ini didasarkan atas alasan bahwa meskipun integrasi Romberg lebih efisien jika dibandingkan dengan kaidah simpson's 1/3 gabungan, tetapi kedua metode tersebut menggunakan jarak antartitik partisi yang sama. Kendala ini tidak memperhatikan perhitungan bahwa pada beberapa fungsi dapat memiliki daerah dimana grafik mengalami perubahan secara ekstrim, sehingga memerlukan perbaikan jarak antartitik partisi. Dengan demikian, untuk mendapatkan tingkat keakuratan yang diinginkan, perbaikan jarak harus diterapkan dimana saja, meskipun hal tersebut hanya diperlukan pada daerah-daerah yang berubah secara tajam. Metode *adaptive quadrature* ini dapat memperbaiki keadaan tersebut dengan secara otomatis mengubah ukuran langkah/jarak partisi sedemikian sehingga *step* kecil diambil pada daerah yang berubah secara tajam dan *step* besar diambil pada grafik yang berubah secara perlahan (Chapra, 2012).

Selain itu, aproksimasi nilai integral numerik dengan menggunakan metode *adaptive quadrature* ini "lebih baik" jika dibandingkan dengan metode integrasi numerik lainnya, yaitu metode trapezoidal, metode simpson $\frac{1}{3}$, metode simpson $\frac{3}{8}$ dan metode Romberg. Lebih baik di sini dalam artian bahwa metode ini lebih efisien, dan secara umum hampiran atau aproksimasi nilai integral numerik metode ini memberikan toleransi tertentu. Selain itu, metode *adaptive quadrature* dapat memperkecil *error* aproksimasi dan juga dapat memprediksi *error* estimasi pada aproksimasi (Burden, 2011).

Untuk fungsi *M-file* MATLAB dari algoritma integrasi numerik metode *adaptive quadrature* ini dapat dilihat pada Lampiran 2. Program *M-file* ini diambil dalam (Chapra, 2012) dimana *M-file* tersebut didasarkan atas algoritma yang telah dikembangkan oleh Cleve Moler.

4.6 Hubungan Nilai Parameter a, b dan w dengan Permukaan Bentuk-Telur

Istilah *oval* berasal dari bahasa Latin *ovum*, diartikan sebagai kurva tertutup antara lingkaran dan ellipsis, tanpa definisi matematika secara tepat (sumber: <http://mathworld.wolfram.com/Oval.html>). Istilah *oval* digunakan untuk mendeskripsikan kurva di geometri yang tidak terdefinisi dengan baik (*not well-defined*) (sumber: <http://en.m.wikipedia.org/wiki/Oval>).

Pada persamaan permukaan bentuk-telur dengan sumbu- x sebagai sumbu putar (Persamaan 4.6), syarat batas dari persamaan tersebut adalah $a > b > 0$; $0 < |w| < a$; a, b, w konstanta. Jika dicermati lagi, syarat ini belum menjamin bahwa persamaan tersebut akan menghasilkan permukaan bentuk-telur, dalam hal ini bentuk-telur *oval*. Untuk itu, usaha terbatas yang dapat dilakukan peneliti untuk mendapatkan hubungan nilai parameter a, b dan w terhadap permukaan bentuk-telur *oval* adalah mengukur panjang dan lebar pada telur. Hasil yang diperoleh tentu saja tidak dapat digeneralisasi untuk semua jenis telur. Pengukuran dilakukan pada 63 butir telur ayam menggunakan jangka sorong, dengan rincian: 30 butir telur ayam kampung dan 33 butir telur ayam *Broiler*. Jenis telur tersebut dipilih karena

secara umum berbentuk *oval*. Pengukuran ini dimaksudkan untuk mendapatkan interval hasil perbandingan antara nilai parameter b dengan a dan nilai parameter w dengan a . Hasil pengukuran dapat dilihat pada Lampiran 4 dan Lampiran 5. Kemudian, dicari perbandingan antara nilai parameter b dengan a , dan perbandingan nilai parameter w dan a .

Dari hasil pengukuran dan perbandingan nilai parameter, diperoleh interval:
Pada telur ayam kampung:

$$0,6834264 \leq \frac{b}{a} \leq 0,8148936; 0,0384615 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675978.$$

Pada telur ayam *Broiler*:

$$0,681178396 \leq \frac{b}{a} \leq 0,798395917; 0,029165148 \leq \frac{w}{a} \leq 0,140794224.$$

Dengan menggabungkan kedua interval tersebut, diperoleh:

$$0,681178396 \leq \frac{b}{a} \leq 0,8148936; 0,029165148 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675978.$$

Hasil ini tentu saja tidak dapat digeneralisasi untuk semua bentuk-telur *oval* dikarenakan interval tersebut diperoleh dari hasil pengukuran pada telur tertentu dengan jumlah yang terbatas.

4.7 Visualisasi Persamaan Permukaan Bentuk-Telur

Pada pembahasan berikut ini akan divisualisasikan persamaan permukaan bentuk-telur. Visualisasi akan dilakukan pada semua persamaan bentuk-telur yang telah diperoleh, yaitu persamaan permukaan bentuk-telur hasil memutar kurva bentuk-telur Hügelschaffer terhadap sumbu- x , sumbu- y dan sumbu- z , dimana titik tengah dari sumbu mayor berada di titik $Q(p, q, r)$. Sebelum persamaan permukaan bentuk-telur divisualisasikan dalam bentuk permukaan tiga-dimensi, persamaan permukaan bentuk-telur dalam kartesian terlebih dahulu diubah ke bentuk persamaan parametrik, yaitu:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(t) \\ y &= \frac{ab \sin(t) \cos(u)}{\sqrt{a^2 + 2aw \cos(t) + w^2}} \\ z &= \frac{ab \sin(t) \sin(u)}{\sqrt{a^2 + 2aw \cos(t) + w^2}} \end{aligned}$$

dengan $0 \leq t \leq \pi$ dan $0 \leq u \leq 2\pi$.

Visualisasi dilakukan dengan menggunakan nilai parameter a , b dan w di dalam dan di luar interval hasil pengukuran pada telur yang telah disebutkan pada sub-bab sebelumnya, yang bertujuan untuk melihat pengaruh nilai parameter-parameter tersebut terhadap bentuk permukaan yang dihasilkan. Visualisasi dalam penelitian ini dilakukan dengan menggunakan *software* GeoGebra dengan sintaks: Surface $(x, y, z, t, 0, \pi, u, 0, 2\pi)$.

Dari hasil pengonstruksian persamaan permukaan bentuk-telur, telah diperoleh

persamaan permukaan bentuk-telur hasil memutar kurva bentuk-telur Hügelschaffer terhadap sumbu- x dimana titik tengah sumbu mayor berada di titik $Q(p, q, r)$ adalah

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} f(x) + \frac{(z-r)^2}{b^2} f(x) = 1 \quad (4.62)$$

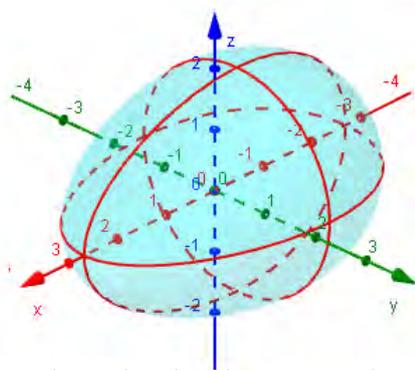
dengan $f(x) = \left(1 + \frac{2w(x-p)+w^2}{a^2}\right)$.

Selanjutnya, berdasarkan Lampiran 4, dengan mengambil nilai parameter telur nomor 1, yaitu $a = 2,685$; $b = 1,835$ dan $w = 0,45$ dan disubstitusikan ke Persamaan 4.62 serta dimisalkan titik $Q(0, 0, 0)$, maka Persamaan 4.62 menjadi

$$\frac{x^2}{2,685^2} + \frac{y^2}{1,835^2} \left(1 + \frac{0,9x + 0,45^2}{2,685^2}\right) + \frac{z^2}{1,835^2} \left(1 + \frac{0,9x + 0,45^2}{2,685^2}\right) = 1.$$

Dengan menggunakan *software* GeoGebra, hasil visualisasinya seperti ditunjukkan Gambar 4.8.

Pada Gambar 4.8, dapat dilihat bahwa jika permukaan diiris pada bidang- xy



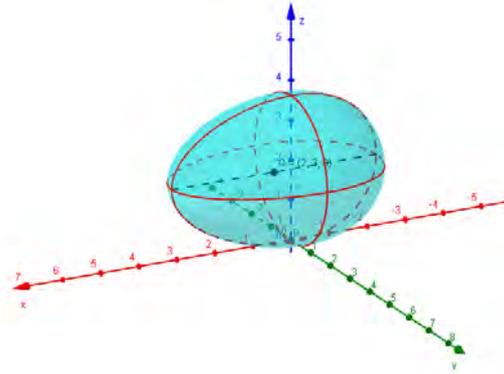
Gambar 4.8: Permukaan bentuk-telur dengan sumbu- x sebagai sumbu putar

maupun pada bidang- xz , tampak diperoleh kurva bentuk-telur. Hal ini ditunjukkan oleh kurva bentuk-telur warna merah. Sebaliknya, jika permukaan diiris tegak lurus terhadap sumbu mayor, tampak diperoleh irisan berupa lingkaran. Dengan demikian, hasil visualisasi ini menunjukkan permukaan bentuk-telur yang diputar pada sumbu- x dan titik tengah sumbu mayor di titik pusat koordinat $O(0, 0, 0)$. Pada gambar tersebut tampak diperoleh permukaan bentuk-telur *oval*. Pada pembahasan sebelumnya, untuk menghitung volume bangun ruang bentuk-telur digunakan Persamaan 4.51 dan untuk menghitung luas permukaan bentuk-telur digunakan Persamaan 4.61 yang diselesaikan secara numerik menggunakan *M-file* pada Lampiran 2. Dengan menggunakan rumus tersebut diperoleh volumenya $V = 37,6572358$ dan luas permukaannya $A \approx 4,840306949$.

Sekarang, jika dimisalkan titik $Q(2, 3, 3)$ dan disubstitusikan ke Persamaan 4.62, maka diperoleh

$$\frac{(x-2)^2}{2,685^2} + \frac{(y-3)^2}{1,835^2} f(x) + \frac{(z-3)^2}{1,835^2} f(x) = 1,$$

dengan $f(x) = \left(1 + \frac{0,9(x-2)+0,45^2}{2,685^2}\right)$. Hasil visualisasinya seperti diperlihatkan oleh Gambar 4.9.



Gambar 4.9: Permukaan bentuk-telur dengan sumbu putar sejajar sumbu- x

Pada Gambar 4.9, dapat diamati merupakan permukaan bentuk-telur *oval* dengan sumbu putar sejajar sumbu- x dan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(2, 3, 3)$. Hal ini ditunjukkan bahwa jika permukaan diiris sejajar bidang- xy atau bidang- yz , tampak diperoleh irisan berupa kurva bentuk-telur, titik atau himpunan kosong jika irisan melebihi batas-batas telur, yaitu $1,165 \leq b \leq 4,835$. Jika permukaan diiris sejajar bidang- yz , diperoleh irisan berupa lingkaran, titik atau himpunan kosong jika irisan melebihi batas nilai $-0,685 \leq a \leq 4,685$.

Selanjutnya, akan divisualisasikan persamaan permukaan bentuk-telur hasil memutar kurva bentuk-telur terhadap sumbu- y . Telah diperoleh persamaannya adalah

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}g(y) + \frac{(y-q)^2}{b^2} + \frac{(z-r)^2}{a^2}g(y) = 1, \quad (4.63)$$

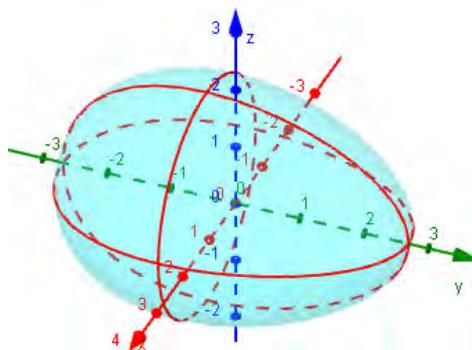
dengan $g(y) = \left(1 + \frac{2w(y-q)+w^2}{b^2}\right)$.

Jika nilai-nilai parameter $a = 1,835$; $b = 2,685$ dan $w = 0,45$ disubstitusikan ke Persamaan 4.63 dan dimisalkan $Q(0, 0, 0)$, maka diperoleh

$$\frac{x^2}{1,835^2} \left(1 + \frac{0,9y + 0,45^2}{2,685^2}\right) + \frac{y^2}{2,685^2} + \frac{z^2}{1,835^2} \left(1 + \frac{0,9y + 0,45^2}{2,685^2}\right) = 1.$$

Hasil visualisasinya seperti ditunjukkan oleh Gambar 4.10.

Gambar 4.10 memperlihatkan jika permukaan diiris sejajar bidang- xy atau



Gambar 4.10: Permukaan bentuk-telur dengan sumbu- y sebagai sumbu putar

bidang- yz , diperoleh irisan berupa kurva bentuk-telur, titik atau himpunan kosong

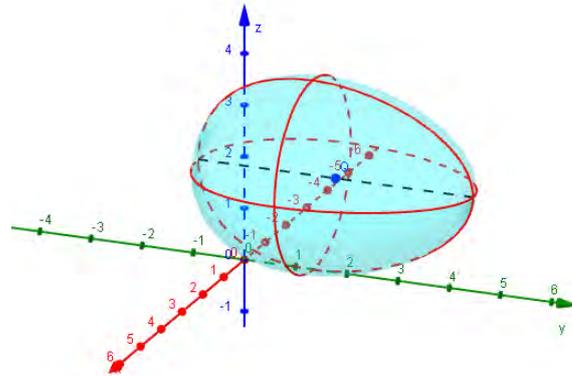
jika irisan melebihi batas-batas permukaan, yaitu $-1,835 \leq a \leq 1,835$. Sebaliknya, jika permukaan diiris sejajar bidang- xz , diperoleh irisan berupa lingkaran, titik atau himpunan kosong jika irisan melebihi batas $-2,685 \leq b \leq 2,685$. Hal ini menunjukkan bahwa permukaan tersebut diperoleh dari kurva bentuk-telur yang diputar terhadap sumbu- y . Gambar 4.10 juga dapat diperoleh dengan merotasi Gambar 4.8 sebesar 90° berlawanan arah putar jarum jam.

Selanjutnya, jika dimisalkan titik $Q(3, 3, 3)$ dan disubstitusikan ke Persamaan 4.63, diperoleh

$$\frac{(x-3)^2}{1,835^2} g(y) + \frac{(y-3)^2}{2,685^2} + \frac{(z-3)^2}{1,835^2} g(y) = 1$$

dengan $g(y) = \left(1 + \frac{0,9(y-3)+0,45^2}{2,685^2}\right)$. Hasil visualisasinya dapat dilihat pada Gambar 4.11.

Pada Gambar 4.11, dapat diamati merupakan permukaan bentuk-telur hasil



Gambar 4.11: Permukaan bentuk-telur dengan sumbu putar sejajar sumbu- y

memutar kurva bentuk-telur sejajar sumbu- y dan titik tengah sumbu mayor di titik $Q(3, 3, 3)$. Hasil irisan permukaan terhadap bidang- xy dan bidang- yz menunjukkan berupa kurva bentuk-telur, titik atau himpunan kosong jika irisan melebihi batas $1,165 \leq a \leq 4,835$. Jika permukaan diiris sejajar bidang- xz , diperoleh irisan berupa lingkaran, titik atau himpunan kosong jika irisan melebihi batas $0,315 \leq b \leq 5,685$. Untuk mendapatkan Gambar 4.11 dapat juga diperoleh dengan mentranslasikan Gambar 4.10 sepanjang titik $Q(3, 3, 3)$.

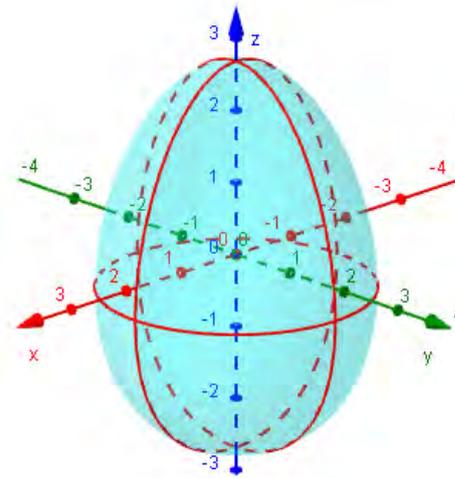
Untuk persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari kurva bentuk-telur Hügelschaffer di bidang- xz yang diputar sejajar sumbu- z dan titik tengah sumbu mayor berada di titik $Q(p, q, r)$ adalah

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} h(z) + \frac{(y-q)^2}{a^2} h(z) + \frac{(z-r)^2}{c^2} = 1 \quad (4.64)$$

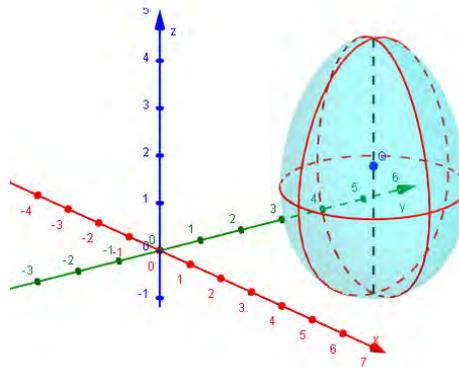
dengan $h(z) = \left(1 + \frac{2w(z-r)+w^2}{c^2}\right)$.

Jika nilai-nilai parameter $a = 1,835$; $c = 2,685$ dan $w = 0,45$ disubstitusikan ke Persamaan 4.64 dan dimisalkan $Q(0, 0, 0)$, diperoleh

$$\frac{x^2}{1,835^2} \left(1 + \frac{0,9z + 0,45^2}{2,685^2}\right) + \frac{y^2}{1,835^2} \left(1 + \frac{0,9z + 0,45^2}{2,685^2}\right) + \frac{z^2}{2,685^2} = 1$$



Gambar 4.12: Permukaan bentuk-telur dengan sumbu-z sebagai sumbu putar



Gambar 4.13: Permukaan bentuk-telur dengan sumbu putar sejajar sumbu-z

dan hasil visualisasinya seperti ditunjukkan Gambar 4.12.

Jika dimisalkan titik $Q(3, 3, 2)$, diperoleh hasil visualisasinya seperti ditunjukkan Gambar 4.13.

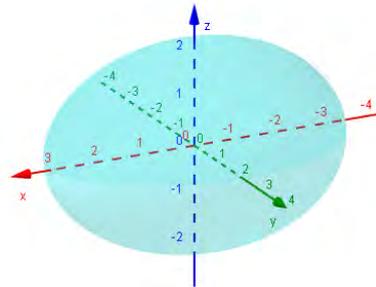
Pada Gambar 4.12 maupun Gambar 4.13, jika permukaan diiris sejajar bidang- xz atau bidang-, diperoleh irisan berupa kurva bentuk-telur, titik atau himpunan kosong jika melebihi batas-batas permukaan. Sedangkan, jika permukaan diiris sejajar bidang- xy , diperoleh irisan berupa lingkaran. Hal ini menunjukkan bahwa permukaan bentuk-telur tersebut diperoleh dari kurva bentuk-telur yang diputar terhadap sumbu- z . Tampak bahwa permukaan bentuk-telur (Gambar 4.12) dapat diperoleh dengan merotasi Gambar 4.10 sebesar 90° berlawanan arah putar jarum jam dan Gambar 4.13 merupakan translasi dari Gambar 4.12 sepanjang titik $Q(3, 3, 2)$.

Visualisasi berikut ini bertujuan untuk melihat pengaruh nilai parameter persamaan terhadap bentuk permukaan yang dihasilkan. Untuk a dan b tetap, w tidak tetap. Jika dimisalkan nilai parameter $a = 3,118$; $b = 2,123$ dan $w = 0,091$ dan disubstitusikan ke Persamaan 4.62 dengan $Q(0, 0, 0)$, diperoleh

$$\frac{x^2}{3,118^2} + \frac{y^2}{2,123^2} \left(1 + \frac{0,182x + 0,091^2}{3,118^2} \right) + \frac{z^2}{2,123^2} \left(1 + \frac{0,182x + 0,091^2}{3,118^2} \right) = 1$$

dan hasil visualisasi seperti diperlihatkan Gambar 4.14.

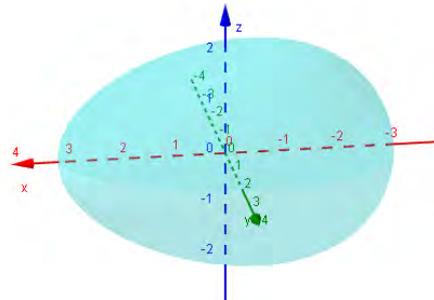
Sedangkan, jika nilai w diperbesar menjadi $w = 0,524$, hasil visualisasinya seperti



Gambar 4.14: Permukaan bentuk-telur dengan $a = 3,118$; $b = 2,123$ dan $w = 0,091$

ditunjukkan Gambar 4.15.

Dari Gambar 4.14 dan Gambar 4.15 dapat dianalisa sebagai berikut. Untuk nilai



Gambar 4.15: Permukaan bentuk-telur dengan $a = 3,118$; $b = 2,123$ dan $w = 0,524$

a dan b tetap. Semakin besar nilai w , maka permukaan yang dihasilkan semakin menjauhi bentuk *oval*. Sebaliknya, semakin kecil nilai w mendekati nol, maka permukaan yang dihasilkan semakin mendekati bentuk *ellipsoid*-putar. Simpulan ini dapat berlaku untuk nilai a dan b tetap dan memenuhi interval sebagaimana hasil pengukuran pada 63 butir telur ayam, yaitu $0,681 \leq \frac{b}{a} \leq 0,815$.

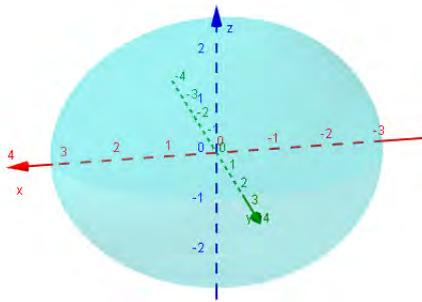
Sekarang, untuk nilai a dan w tetap, tetapi b tidak tetap. Jika dimisalkan $a = 3,118$; $w = 0,091$ dan $b = 2,541$ dan disubstitusikan ke Persamaan 4.62 dengan $Q(0,0,0)$, diperoleh

$$\frac{x^2}{3,118^2} + \frac{y^2}{2,541^2} \left(1 + \frac{0,182x + 0,091^2}{3,118^2} \right) + \frac{z^2}{2,541^2} \left(1 + \frac{0,182x + 0,091^2}{3,118^2} \right) = 1$$

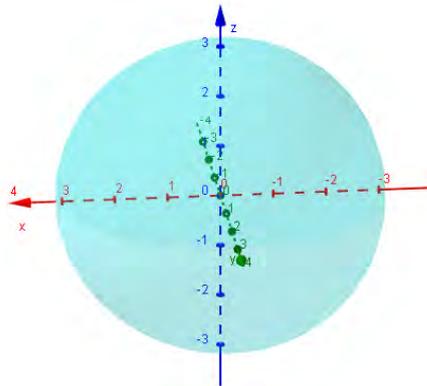
dengan hasil visualisasi seperti pada Gambar 4.16.

Sedangkan, jika nilai $b = 3$, hasil visualisasinya seperti ditunjukkan Gambar 4.17.

Dari Gambar 4.16 dan Gambar 4.17 dapat dianalisa sebagai berikut. Untuk nilai a dan w tetap. Semakin besar nilai b mendekati a , maka permukaan yang dihasilkan semakin mendekati bentuk bola. Sebaliknya, semakin kecil nilai b , maka permukaan yang dihasilkan mendekati bentuk *ellipsoid* atau *oval* jika nilai b dalam interval $0,681 \leq \frac{b}{a} \leq 0,815$. Simpulan ini berlaku jika nilai a dan w memenuhi interval $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,168$. Berdasarkan hasil visualisasi di atas, Persamaan



Gambar 4.16: Permukaan bentuk-telur dengan $a = 3,118$; $b = 2,541$ dan $w = 0,091$



Gambar 4.17: Permukaan bentuk-telur dengan $a = 3,118$; $b = 3$ dan $w = 0,091$

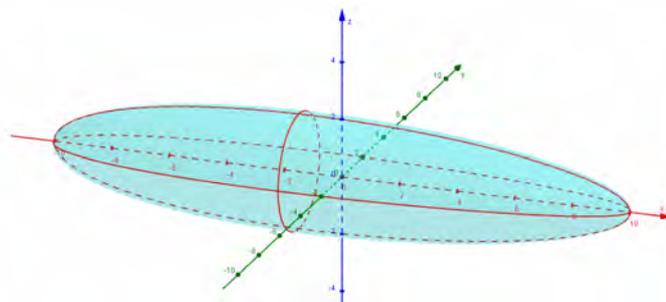
4.62 akan menghasilkan permukaan bentuk-telur *oval* jika nilai w kurang dari setengah nilai b .

Untuk nilai b dan w tetap, dan nilai a tidak tetap. Jika dimisalkan $b = 10$; $w = 1,047$ dan $a = 10$ dan disubstitusikan ke Persamaan 4.62 dan dimisalkan $Q(0,0,0)$, diperoleh

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{2^2} \left(1 + \frac{2,092x + 1,047^2}{10^2} \right) + \frac{z^2}{2^2} \left(1 + \frac{2,092x + 1,047^2}{10^2} \right) = 1$$

dan hasil visualisasinya seperti Gambar 4.18.

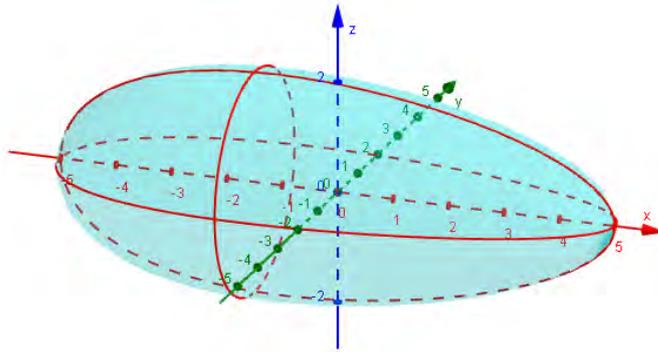
Sedangkan, jika nilai a diperkecil menjadi $a = 5$, maka hasil visualisasi seperti



Gambar 4.18: Permukaan dengan $a = 10$ dan $b = 2$ serta $w = 1,047$

ditunjukkan Gambar 4.19.

Dari Gambar 4.18 dan Gambar 4.19 dapat dianalisa sebagai berikut. Semakin



Gambar 4.19: Permukaan dengan $a = 5$ dan $b = 2$ serta $w = 1,047$

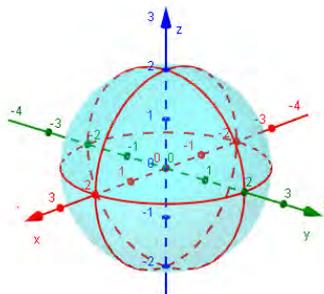
besar nilai a , maka permukaan yang dihasilkan semakin tidak merepresentasikan bentuk-telur *oval*. Sebaliknya, semakin kecil nilai a , maka terdapat beberapa kemungkinan. Pertama, jika nilai a berada dalam interval $0,681 \leq \frac{b}{a} \leq 0,815$ dan nilai w berada dalam interval $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,168$, maka diperoleh permukaan bentuk-telur *oval*. Kedua, jika nilai a sangat mendekati atau sama dengan b , maka diperoleh permukaan mendekati bentuk bola. Ketiga, jika nilai $a < b$, maka hal ini tidak memenuhi syarat Persamaan 4.62, sehingga tidak akan diperoleh permukaan bentuk-telur.

Sekarang, dengan menggunakan syarat batas nilai parameter pada Persamaan 4.62, yaitu $a = b > 0; w = 0$ dan apabila dimisalkan nilai parameter $a = b = 2$ dan $w = 0$, maka dengan menyubstitusikan nilai parameter-parameter tersebut ke dalam Persamaan 4.62, diperoleh

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

yang tidak lain merupakan persamaan bola dengan jari-jari sama dengan 2, dengan hasil visualisasi dapat dilihat seperti pada Gambar 4.20.

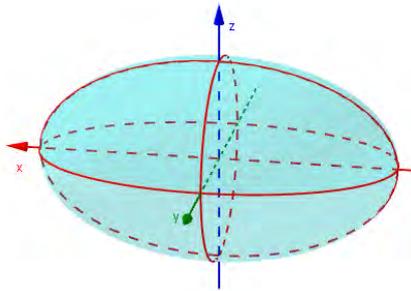
Berikutnya, dengan memberikan syarat batas nilai parameter pada Persamaan



Gambar 4.20: Bola dengan jari-jari sama dengan 2

4.62, yaitu $a > b > 0$ dan $w = 0$, dan jika dimisalkan nilai parameter $a = 3$ dan $b = 2$ serta $w = 0$, dan disubstitusikan ke Persamaan 4.62, maka akan didapatkan permukaan *ellipsoid*-putar dengan persamaan

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$



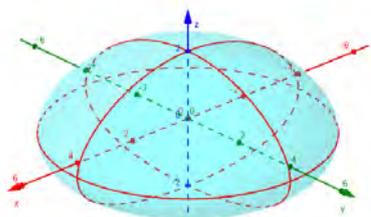
Gambar 4.21: *Ellipsoid-putar*

dan hasil visualisasi seperti pada Gambar 4.21.

Selanjutnya, dapat dilihat kembali bahwa Persamaan 4.64 mensyaratkan nilai $c > a > 0$. Selanjutnya, jika syarat tersebut tidak dipenuhi dan dipilih nilai $a > c$, yaitu $a = 3$ dan $c = 2$ serta $w = 0,44$, dan dimisalkan $Q(0, 0, 0)$, maka permukaan yang dihasilkan seperti ditunjukkan pada Gambar 4.20 dengan persamaan

$$\frac{x^2}{3^2} \left(1 + \frac{0,88z + 0,44^2}{2^2} \right) + \frac{y^2}{3^2} \left(1 + \frac{0,88z + 0,44^2}{2^2} \right) + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

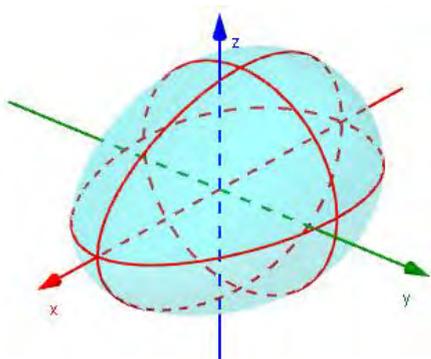
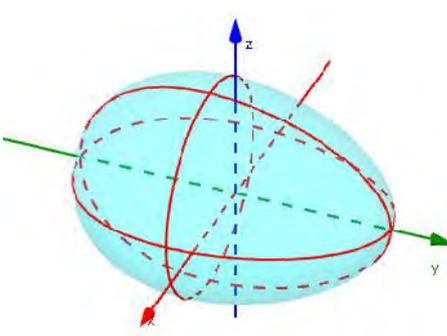
Dari Gambar 4.22, tampak bahwa permukaan yang dihasilkan tidak merepre-



Gambar 4.22: Permukaan dengan $a = 3$ dan $c = 2$ serta $w = 0,44$

sentasikan bentuk-telur. Hal ini dapat dilihat pada kurva hasil irisan permukaan pada bidang- xz dan bidang- yz yang merupakan kurva bukan bentuk-telur. Berikut ini adalah tabel ringkasan hasil visualisasi pada masing-masing persamaan permukaan bentuk-telur.

Tabel 4.1: Hasil Visualisasi Persamaan Permukaan Bentuk-Telur

Persamaan	Contoh Visualisasi								
<p>Permukaan bentuk-telur dengan sumbu-x sebagai sumbu-putar:</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} f(x) + \frac{z^2}{b^2} f(x) = 1,$ <p>dengan $f(x) = 1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}$.</p> <p>Syarat: $a > b > 0; 0 < w < a; a, b, w$ konstanta. Syarat tambahan tidak berlaku umum: Berdasarkan hasil pengukuran 63 butir telur ayam, persamaan akan menghasilkan permukaan bentuk-telur <i>oval</i>, jika</p> $0,681178396 \leq \frac{b}{a} \leq 0,8148936 \text{ dan}$ $0,029165148 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675978.$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>Bidang</th> <th>Irisan</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Bidang-xy atau sejajar bidang-xy</td> <td>Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong</td> </tr> <tr> <td>Bidang-xz atau sejajar bidang-xz</td> <td>Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong</td> </tr> <tr> <td>Bidang-yz atau sejajar bidang-yz</td> <td>Lingkaran, titik, atau himpunan kosong</td> </tr> </tbody> </table>	Bidang	Irisan	Bidang-xy atau sejajar bidang-xy	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong	Bidang-xz atau sejajar bidang-xz	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong	Bidang-yz atau sejajar bidang-yz	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong	<p>$a = 2,69$ $b = 1,84$ $w = 0,45$</p> 
Bidang	Irisan								
Bidang-xy atau sejajar bidang-xy	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong								
Bidang-xz atau sejajar bidang-xz	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong								
Bidang-yz atau sejajar bidang-yz	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong								
<p>Permukaan bentuk-telur dengan sumbu-y sebagai sumbu-putar:</p> $\frac{x^2}{a^2} g(y) + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} g(y) = 1,$ <p>dengan $g(y) = 1 + \frac{2wy + w^2}{b^2}$.</p> <p>Syarat: $b > a > 0; 0 < w < b; a, b, w$ konstanta. Syarat tambahan tidak berlaku umum: Berdasarkan hasil pengukuran 63 butir telur ayam, persamaan akan menghasilkan permukaan bentuk-telur <i>oval</i>, jika</p> $0,681178396 \leq \frac{a}{b} \leq 0,8148936 \text{ dan}$ $0,029165148 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675978.$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>Bidang</th> <th>Irisan</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Bidang-xy atau sejajar bidang-xy</td> <td>Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong</td> </tr> <tr> <td>Bidang-xz atau sejajar bidang-xz</td> <td>Lingkaran, titik, atau himpunan kosong</td> </tr> <tr> <td>Bidang-yz atau sejajar bidang-yz</td> <td>Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong</td> </tr> </tbody> </table>	Bidang	Irisan	Bidang-xy atau sejajar bidang-xy	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong	Bidang-xz atau sejajar bidang-xz	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong	Bidang-yz atau sejajar bidang-yz	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong	<p>$a = 1,84$ $b = 2,69$ $w = 0,45$</p> 
Bidang	Irisan								
Bidang-xy atau sejajar bidang-xy	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong								
Bidang-xz atau sejajar bidang-xz	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong								
Bidang-yz atau sejajar bidang-yz	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong								

Permukaan bentuk-telur dengan sumbu-z sebagai sumbu-putar:

$$\frac{x^2}{a^2} h(z) + \frac{y^2}{a^2} h(z) + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\text{dengan } h(z) = 1 + \frac{2wz + w^2}{c^2}.$$

Syarat: $c > a > 0; 0 < |w| < c; a, c, w$ konstanta.

Syarat tambahan tidak berlaku umum:

Berdasarkan hasil pengukuran 63 butir telur ayam, persamaan akan menghasilkan permukaan bentuk-telur *oval*, jika

$$0,681178396 \leq \frac{a}{c} \leq 0,8148936 \text{ dan}$$

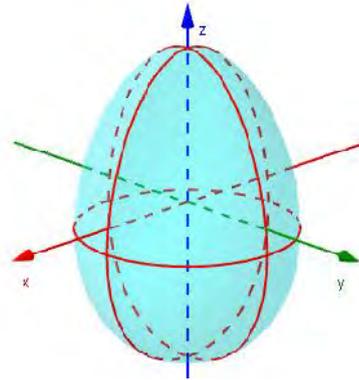
$$0,029165148 \leq \frac{w}{c} \leq 0,1675978.$$

Bidang	Irisan
Bidang-xy atau sejajar bidang-xy	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong
Bidang-xz atau sejajar bidang-xz	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong
Bidang-yz atau sejajar bidang-yz	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong

$$a = 1,84$$

$$c = 2,69$$

$$w = 0,45$$



Permukaan bentuk-telur dengan sumbu-putar sejajar sumbu-x dan titik tengah sumbu mayor di $Q(p, q, r)$:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} \mathbb{E}(x) + \frac{(z-r)^2}{b^2} \mathbb{E}(x) = 1,$$

$$\text{dengan } \mathbb{E}(x) = 1 + \frac{2w(x-p) + w^2}{a^2}.$$

Syarat: $a > b > 0; 0 < |w| < a; a, b, w$ konstanta.

Syarat tambahan tidak berlaku umum:

Berdasarkan hasil pengukuran 63 butir telur ayam, persamaan akan menghasilkan permukaan bentuk-telur *oval*, jika

$$0,681178396 \leq \frac{b}{a} \leq 0,8148936 \text{ dan}$$

$$0,029165148 \leq \frac{w}{a} \leq 0,1675978.$$

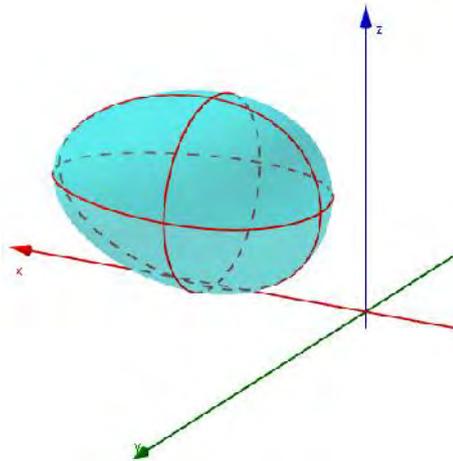
Bidang	Irisan
Sejajar bidang-xy	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong
Sejajar bidang-xz	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong
Sejajar bidang-yz	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong

$$a = 2,69$$

$$b = 1,84$$

$$w = 0,45$$

$$Q = (2,3,3)$$



Permukaan bentuk-telur dengan sumbu-putar sejajar sumbu-y dan titik tengah sumbu mayor di $Q(p, q, r)$:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}w(y) + \frac{(y-q)^2}{b^2} + \frac{(z-r)^2}{a^2}w(y) = 1,$$

dengan $w(y) = 1 + \frac{2w(y-q) + w^2}{b^2}$.

Syarat: $b > a > 0; 0 < |w| < b; a, b, w$ konstanta.

Syarat tambahan tidak berlaku umum:

Berdasarkan hasil pengukuran 63 butir telur ayam, persamaan akan menghasilkan permukaan bentuk-telur *oval*, jika

$$0,681178396 \leq \frac{a}{b} \leq 0,8148936 \text{ dan}$$

$$0,029165148 \leq \frac{w}{b} \leq 0,1675978.$$

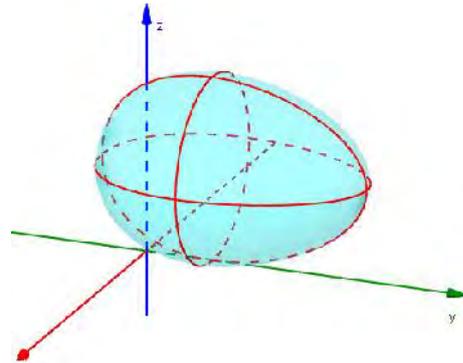
Bidang	Irisan
Sejajar bidang-xy	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong
Sejajar bidang-xz	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong
Sejajar bidang-yz	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong

$$a = 1,84$$

$$b = 2,69$$

$$w = 0,45$$

$$Q = (3,3,3)$$



Permukaan bentuk-telur dengan sumbu-putar sejajar sumbu-z dan titik tengah sumbu mayor di $Q(p, q, r)$:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} \{ (z) + \frac{(y-q)^2}{a^2} \{ (z) + \frac{(z-r)^2}{c^2} = 1,$$

dengan $\{ (z) = 1 + \frac{2w(z-r) + w^2}{c^2}$.

Syarat: $c > a > 0; 0 < |w| < c; a, c, w$ konstanta.

Syarat tambahan tidak berlaku umum:

Berdasarkan hasil pengukuran 63 butir telur ayam, persamaan akan menghasilkan permukaan bentuk-telur *oval*, jika

$$0,681178396 \leq \frac{a}{c} \leq 0,8148936 \text{ dan}$$

$$0,029165148 \leq \frac{w}{c} \leq 0,1675978.$$

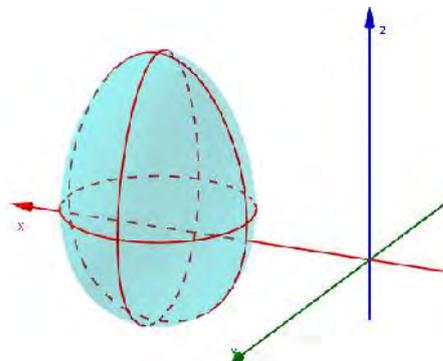
Bidang	Irisan
Sejajar bidang-xy	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong
Sejajar bidang-xz	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong
Sejajar bidang-yz	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong

$$a = 1,84$$

$$c = 2,69$$

$$w = 0,45$$

$$Q = (3,3,2)$$



Bola:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} f(x) + \frac{z^2}{b^2} f(x) = 1,$$

dengan $f(x) = 1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}$.

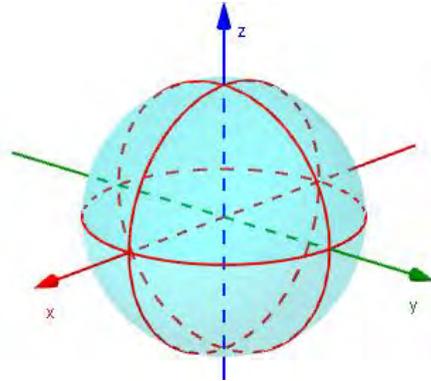
Syarat: persamaan akan menghasilkan permukaan berupa bola, jika $a = b > 0$ dan $w = 0$.

Bidang	Irisan
Bidang-xy atau sejajar bidang-xy	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong
Bidang-xz atau sejajar bidang-xz	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong
Bidang-yz atau sejajar bidang-yz	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong

$a = 2$

$b = 2$

$w = 0$



Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} f(x) + \frac{z^2}{b^2} f(x) = 1,$$

dengan $f(x) = 1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}$.

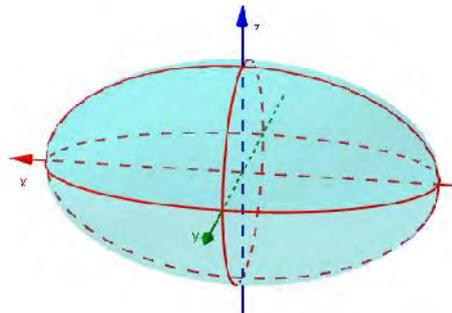
Syarat: persamaan akan menghasilkan permukaan berupa ellipsoid, jika $a > b > 0$ dan $w = 0$.

Bidang	Irisan
Bidang-xy atau sejajar bidang-xy	Ellips, titik, atau himpunan kosong
Bidang-xz atau sejajar bidang-xz	Ellips, titik, atau himpunan kosong
Bidang-yz atau sejajar bidang-yz	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong

$a = 3$

$b = 2$

$w = 0$



Permukaan di luar interval hasil pengukuran 63 butir telur ayam:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} f(x) + \frac{z^2}{b^2} f(x) = 1,$$

dengan $f(x) = 1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}$.

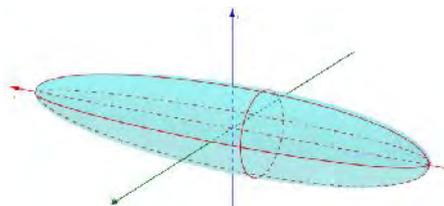
Syarat: $a > b > 0; 0 < |w| < a; a, b, w$ konstanta.

Bidang	Irisan
Bidang-xy atau sejajar bidang-xy	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong
Bidang-xz atau sejajar bidang-xz	Kurva bentuk-telur, titik, atau himpunan kosong
Bidang-yz atau sejajar bidang-yz	Lingkaran, titik, atau himpunan kosong

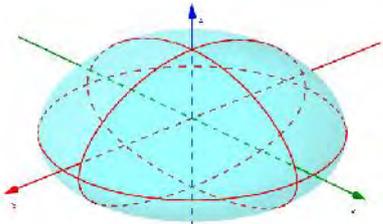
$a = 10$

$b = 2$

$w = 1,047$



Keterangan: permukaan dengan $b = 0,2a$ dan $w = 0,1047a$, diluar interval bentuk-telur oval

hasil pengukuran 63 butir telur ayam.	
<p>Permukaan ketika syarat persamaan tidak dipenuhi:</p> $\frac{x^2}{a^2} h(z) + \frac{y^2}{a^2} h(z) + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ <p>dengan $h(z) = 1 + \frac{2wz + w^2}{c^2}.$</p> <p>Syarat: $c > a > 0; 0 < w < c; a, c, w$ konstanta. Keterangan: permukaan ketika syarat persamaan tidak dipenuhi ($a > c > 0$).</p>	<p>$a = 4$ $c = 2$ $w = 0,44$</p> 

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil proses pengonstruksian persamaan permukaan bentuk-telur, volume bangun ruang bentuk-telur, luas permukaan bentuk-telur dan visualisasi persamaan permukaan bentuk-telur, dapat disimpulkan:

1. Persamaan permukaan bentuk-telur hasil memutar kurva bentuk-telur Hügelschaffer terhadap sumbu-sumbu koordinat:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} f(x) + \frac{(z-r)^2}{b^2} f(x) = 1$$

dengan $f(x) = \left(1 + \frac{2w(x-p)+w^2}{a^2}\right)$ dan $a > b > 0$; $0 < |w| < a$; a, b, w konstanta.

Persamaan tersebut diperoleh dari kurva bentuk-telur yang diputar terhadap sumbu- x . Dengan merotasi persamaan tersebut sebesar 90° berlawanan arah putar jarum jam akan diperoleh persamaan permukaan bentuk-telur yang diputar terhadap sumbu- y dan sumbu- z .

2. Volume bangun ruang bentuk-telur, luas permukaan bentuk-telur dan hasil visualisasi:

- (a) Volume bangun ruang bentuk-telur dihitung menggunakan rumus:

$$V = \pi b^2 \left[\left(a^2 - \frac{(a^2 + w^2)^2}{4w^2} \right) \frac{1}{w} \ln \left(\frac{a+w}{a-w} \right) + \frac{a(a^2 + w^2)}{2w^2} \right]$$

dengan syarat $a > b > 0$; $0 < |w| < a$; a, b, w konstanta.

- (b) Luas permukaan bentuk-telur dihitung menggunakan persamaan

$$A = 2\pi b \int_{-a}^a \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 + 2wx + w^2)^3 + b^2(w+x)^2(wx+a^2)^2}}{(a^2 + 2wx + w^2)^2} dx$$

yang diselesaikan secara numerik.

- (c) Dari hasil analisa pengaruh nilai-nilai parameter persamaan permukaan bentuk-telur terhadap hasil visualisasi bentuk permukaan, maka berdasarkan syarat persamaan yaitu $a > b > 0$; $0 < |w| < a$, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Untuk nilai a dan b tetap, dan nilai w tidak tetap. Semakin besar nilai w , maka bentuk permukaan yang dihasilkan semakin menjauhi bentuk *oval*. Sebaliknya, semakin kecil nilai w mendekati nol, maka bentuk permukaan yang dihasilkan semakin mendekati bentuk *ellipsoid*.

Simpulan ini berlaku untuk nilai a dan b tetap dan memenuhi interval $0,681 \leq \frac{b}{a} \leq 0,815$.

Untuk nilai a dan w tetap, dan nilai b tidak tetap. Semakin besar nilai b mendekati a , maka bentuk permukaan yang dihasilkan semakin mendekati bentuk bola. Sebaliknya, semakin kecil nilai b , maka bentuk permukaan yang dihasilkan mendekati bentuk *ellipsoid* jika w sangat kecil mendekati nol dan menghasilkan permukaan bentuk-telur *oval* jika nilai b dalam interval $0,681 \leq \frac{b}{a} \leq 0,815$. Simpulan ini berlaku jika nilai a dan w memenuhi interval $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,168$.

Untuk nilai b dan w tetap, dan nilai a tidak tetap. Semakin besar nilai a , maka bentuk permukaan yang dihasilkan semakin menjauhi permukaan bentuk-telur *oval*. Sebaliknya, semakin kecil nilai a , maka diperoleh tiga kemungkinan. Pertama, jika nilai a berada dalam interval $0,681 \leq \frac{b}{a} \leq 0,815$ dan nilai w berada dalam interval $0,0292 \leq \frac{w}{a} \leq 0,168$, maka diperoleh permukaan bentuk-telur *oval*. Kedua, jika nilai a sangat mendekati atau sama dengan b , maka bentuk permukaan yang dihasilkan mendekati bentuk bola. Ketiga, jika nilai $a < b$, maka bentuk permukaan yang dihasilkan tidak akan diperoleh permukaan bentuk-telur *oval*, *ellipsoid* atau bola.

Jika nilai $a = b > 0$ dan nilai $w = 0$, maka bentuk permukaan yang dihasilkan adalah bola. Sedangkan, jika nilai $a > b > 0$ dan nilai $w = 0$, maka bentuk permukaan yang dihasilkan adalah *ellipsoid*.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, peneliti memberikan saran kepada pembaca sebagai berikut.

1. Untuk penelitian selanjutnya, dilakukan kajian mengenai persamaan bidang singgung pada persamaan permukaan bentuk-telur.
2. Pada umumnya, bangun ruang permukaan lengkung yang memiliki sumbu simetri dapat dikonstruksi dari dua buah kurva, maka peneliti menyarankan untuk dilakukan penelitian lanjutan mengenai konstruksi persamaan permukaan hasil kombinasi kurva bentuk-telur Hügelschaffer dengan ellipsis, parabola dan hiperbola.
3. Pada pemanfaatannya untuk *digester* bentuk-telur, dilakukan analisa distribusi gaya tegang permukaan menggunakan persamaan permukaan bentuk-telur yang diperoleh dari penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Burden, R. L. dan Douglas, F. J., (2011), *Numerical Analysis*, 9th ed., Brook/Cole, Boston, USA.

Chapra, S. C., (2012), *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*, 3rd ed., McGrawHill, New York.

Varberg, D. dan Purcell, S. R., (2010), *Calculus*, 9th edition, Brooks/Cole, USA.

Koller, J., (2000), "Egg Curves and Ovals", Artikel ini diakses di website: <http://www.mathematische-basteleien.de/eggcurves>, pada tanggal 20 Januari 2015.

Nishiyama, Y., (1986), "The Mathematics of Egg Shaped", Department of Business Information, Faculty of Information Management, Osaka University of Economics, Osaka, Japan.

Obradovic, M., Malesevic, B. dan Petrovic, M., (2010), "Conic Sections of a Type of Egg Curve Based Conoid", *Proceeding MonGeometrija 2010*, Eds: Miodrag Nestorovic, Faculty of Architecture in Belgrade, Serbia, pp. 447-466.

Obradovic, M., Malesevic, B., Petrovic, M. dan Djukanovic, G., (2013), "Generating Curves of Higher Order Using the Generalisation of Hügelschaffer's Egg Curve Construction", "Politehnica" University of Timisoara, Faculty of Civil Engineering, Timisoara, Romania, pp. 110-115.

Petrovic, M. dan Obradovic, M., (2010), "The Complement of the Hügelschaffer's Construction of the Egg Curve", *Proceeding 25th National and 2nd International Scientific Conference, MonGeometrija 2010*, Eds: Miodrag Nestorovic, Faculty of Civil Engineering and Architecture in Nis Serbian Society for Geometry and Graphic SUGIG, Vlasina, Serbia, pp. 520-531.

Petrovic, M., Obradovic, M. dan Mijailovic, R., (2011), "Suitability Analysis of Hügelschaffer's Egg Curve Application in Architectural Structure's Geometry, *Buletinul Institutului Politehnic din Iasi*, Universitatea Tehnica Gheorghe Asachi, Vol. III, pp. 115-122.

Larson, R. H. E., (2010), *Calculus*, 9th edition, Brooks/Cole, Belmont, USA.

Vassenaar, J., (2004), "2nd curves, cubic curves, cubic Egg curves", Artikel ini diakses di website: <http://www.2ndcurves.com>, pada tanggal 3 Februari 2015.

Yamamoto, N., (2007), "Equation of Egg Shaped Curves", Artikel ini diakses di website: http://www.geocities.jp/nyjp07/Egg/index_egg_E.html, pada tanggal 20 Januari 2015.

LAMPIRAN

Lampiran 1. List M-file Program Matlab untuk Menghitung Volume Bangun Ruang Bentuk-Telur

```
function [Vx Vy Vz] = volumetelur (a,b,w)
% volumetelur adalah program untuk menghitung volume
  bangun ruang bentuk
%          telur
V1 = pi*(b^2)*((((a^2) - (((a^2)+(w^2))^2)/(4*w^2))))
    *(1/w)*log((a+w)/(a-w))+a*((a^2)+(w^2))/(2*w^2));
a1=b;
b1=a;
V2 = pi*(a1^2)*((((b1^2) - (((b1^2)+(w^2))^2)/(4*w^2))))
    *(1/w)*log((b1+w)/(b1-w))+b1*((b1^2)+(w^2))/(2*w^2)
    ));
c=a;
a=b;
V3 = pi*(a^2)*((((c^2) - (((c^2)+(w^2))^2)/(4*w^2))))
    *(1/w)*log((c+w)/(c-w))+c*((c^2)+(w^2))/(2*w^2));
Vx = V1;
Vy = V2;
Vz = V3;
end
```

Lampiran 2. List M-file Program Matlab Metode *Quadrature Adaptive*

```
function q = quadadapt(f,a1,a2,tol,varargin)
% quadadapt : program menghitung integral  $f(x)$  dari  $a$ 
%             sampai  $b$  menggunakan
%             metode adaptive quadrature
% inputan :
%    $f$  : fungsi yang dicari integral numeriknya
%    $a1$  : batas bawah integral
%    $a2$  : batas atas integral
%    $tol$  : toleransi
% output :
%    $q$  : nilai numerik hasil integrasi menggunakan metode
%       adaptive quadrature
if nargin < 4 || isempty(tol),tol = 1.e-6;end
c = (a1 + a2)/2;
fa1 = feval(f,a1,varargin{:});
fc = feval(f,c,varargin{:});
fa2 = feval(f,a2,varargin{:});
q = quadstep(f, a1, a2, tol, fa1, fc, fa2, varargin{:})
;
end
function q = quadstep(f,a1,a2,tol,fa1,fc,fa2,varargin)
% quad step : Subfungsi rekursif yang digunakan pada
%             metode quadadapt
h = a2 - a1; c = (a1 + a2)/2;
fd = feval(f,(a1+c)/2,varargin{:});
fe = feval(f,(c+a2)/2,varargin{:});
q1 = h/6 * (fa1 + 4*fc + fa2);
q2 = h/12 * (fa1 + 4*fd + 2*fc + 4*fe + fa2);
if abs(q2 - q1) <= tol
q = q2 + (q2 - q1)/15;
else
qa1 = quadstep(f, a1, c, tol, fa1, fd, fc, varargin{:})
;
qa2 = quadstep(f, c, a2, tol, fc, fe, fa2, varargin{:})
;
q = qa1 + qa2;
end
end
```

Lampiran 3. Program Matlab *Output* Hasil Hitungan Volume dan Luas Permukaan Bentuk-Telur

```

clc;
%Judul Program
disp('          VOLUME DAN LUAS PERMUKAAN BENTUK-TELUR'
);
disp('
=====
');

%Input
a = input('Masukkan nilai parameter a : ');
b = input('Masukkan nilai parameter b : ');
w = input('Masukan parameter w : ');
f = @(x) sqrt(((a^2)-(x^2))*(((a^2)+(2*w*x)+(w^2))^3)
+((b^2)*((w+x)^2))*((w*x+(a^2))^2))/((a^2)+(2*w*x)+(
w^2))^2;
a1 = -a;
a2 = a;
%Output
disp('=====HASIL PERHITUNGAN=====')
[Vx Vy Vz] = volumetelur(a,b,w);
A = quadadapt(f,a1,a2);

%Output
format long
tabel = [Vx;Vy;Vz;A];
judul = '    Volume Thd sb-x    |    Volume Thd sb-y    |
        Volume Thd sb-z    |    Luas Permukaan    ';
disp(judul),disp(transpose(tabel))

```

Lampiran 4. Data Hasil Pengukuran Nilai Parameter a , b dan w pada 30 Butir Telur Ayam Kampung

Tabel 1: Nilai Parameter a , b dan w Hasil Pengukuran pada 30 Butir Telur Ayam Kampung

No. Telur	Panjang (cm)	Lebar (cm)	a	b	w	Hasil Bagi b dan a	Hasil Bagi w dan a
1	5.37	3.67	2.685	1.835	0.45	0.6834264	0.1675978
2	5.246	3.726	2.623	1.863	0.32	0.7102554	0.1219977
3	5.334	3.864	2.667	1.932	0.2	0.7244094	0.0749906
4	5.09	3.748	2.545	1.874	0.3	0.7363458	0.1178782
5	5.204	3.9	2.602	1.95	0.2	0.7494235	0.0768640
6	5.236	3.9	2.618	1.95	0.13	0.7448434	0.0496562
7	5.112	3.84	2.556	1.92	0.14	0.7511737	0.0547731
8	5.2	3.916	2.6	1.958	0.1	0.7530769	0.0384615
9	5.03	3.57	2.515	1.785	0.35	0.7097416	0.1391650
10	5.118	3.776	2.559	1.888	0.16	0.7377882	0.0625244
11	5.06	3.814	2.53	1.907	0.2	0.7537549	0.0790514
12	4.972	3.776	2.486	1.888	0.14	0.7594529	0.0563154
13	5.22	3.73	2.61	1.865	0.11	0.7145594	0.0421456
14	5	3.75	2.5	1.875	0.11	0.7500000	0.0440000
15	5.09	3.75	2.545	1.875	0.11	0.7367387	0.0432220
16	5.344	3.82	2.672	1.91	0.18	0.7148204	0.0673653
17	4.48	3.25	2.24	1.625	0.15	0.7254464	0.0669643
18	4.844	3.7	2.422	1.85	0.18	0.7638315	0.0743187
19	4.91	3.81	2.455	1.905	0.24	0.7759674	0.0977597
20	5.02	3.84	2.51	1.92	0.15	0.7649402	0.0597610
21	5.08	3.85	2.54	1.925	0.19	0.7578740	0.0748031
22	5.01	3.8	2.505	1.9	0.12	0.7584830	0.0479042
23	4.8	3.5	2.4	1.75	0.17	0.7291667	0.0708333
24	4.874	3.77	2.437	1.885	0.15	0.7734920	0.0615511
25	4.8	3.73	2.4	1.865	0.15	0.7770833	0.0625000
26	5	3.81	2.5	1.905	0.15	0.7620000	0.0600000
27	4.7	3.83	2.35	1.915	0.11	0.8148936	0.0468085
28	4.735	3.78	2.3675	1.89	0.15	0.7983105	0.0633580
29	4.92	3.66	2.46	1.83	0.14	0.7439024	0.0569106
30	4.95	3.8	2.475	1.9	0.14	0.7676768	0.0565657
Min.	4.48	3.25	2.24	1.625	0.1	0.6834264	0.0384615
Maks.	5.37	3.916	2.685	1.958	0.45	0.8148936	0.1675978

Keterangan: $a = 0,5 \times \text{Panjang}$; $b = 0,5 \times \text{Lebar}$

Lampiran 5. Data Hasil Pengukuran Nilai Parameter a , b dan w pada 33 Butir Telur Ayam Broiler

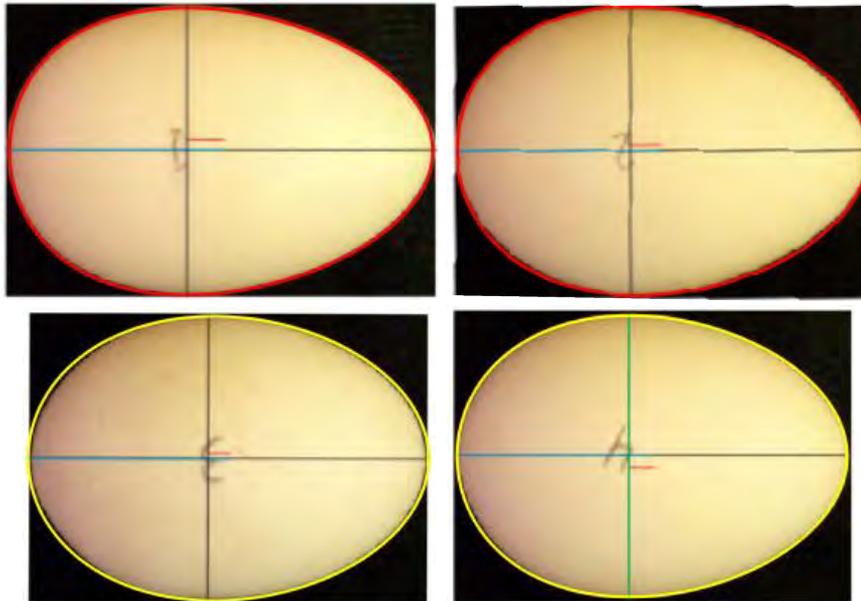
Tabel 2: Nilai Parameter a , b dan w Hasil Pengukuran pada 33 Butir Telur Ayam Broiler

No. Telur	Panjang (cm)	Lebar (cm)	a	b	w	Hasil Bagi b dan a	Hasil Bagi w dan a
1	5.91	4.402	2.955	2.201	0.28	0.744839255	0.094754653
2	6.236	4.56	3.118	2.28	0.26	0.731237973	0.093008339
3	5.99	4.41	2.995	2.205	0.22	0.736227045	0.07345576
4	6.236	4.38	3.118	2.19	0.4	0.702373316	0.128287364
5	5.724	4.3	2.862	2.15	0.26	0.751222921	0.090845563
6	5.57	4.186	2.785	2.093	0.22	0.751526032	0.078994614
7	5.744	4.27	2.872	2.135	0.35	0.743384401	0.121866295
8	5.39	4.19	2.695	2.095	0.24	0.777365492	0.089053803
9	5.634	4.3	2.817	2.15	0.24	0.763223287	0.085197018
10	5.64	4.266	2.82	2.133	0.14	0.756382979	0.04964539
11	5.6	4.266	2.8	2.133	0.26	0.761785714	0.092857143
12	5.6	4.24	2.8	2.12	0.2	0.757142857	0.071428571
13	5.856	4.246	2.928	2.123	0.2	0.725068306	0.068306011
14	5.464	4.334	2.732	2.167	0.25	0.793191801	0.091508053
15	5.668	4.46	2.834	2.23	0.3	0.786873677	0.105857445
16	6.11	4.162	3.055	2.081	0.36	0.681178396	0.117839607
17	5.5	4.228	2.75	2.114	0.2	0.768727273	0.072727273
18	6.06	4.646	3.03	2.323	0.3	0.766666667	0.099009901
19	5.64	4.26	2.82	2.13	0.18	0.755319149	0.063829787
20	5.41	4.109	2.705	2.0545	0.37	0.759519409	0.136783734
21	5.486	4.38	2.743	2.19	0.08	0.798395917	0.029165148
22	5.7	4.41	2.85	2.205	0.28	0.773684211	0.098245614
23	5.68	4.45	2.84	2.225	0.16	0.783450704	0.056338028
24	5.9	4.12	2.95	2.06	0.28	0.698305085	0.094915254
25	6	4.34	3	2.17	0.32	0.723333333	0.106666667
26	5.54	4.29	2.77	2.145	0.39	0.774368231	0.140794224
27	5.544	4.29	2.772	2.145	0.28	0.773809524	0.101010101
28	5.6	4.17	2.8	2.085	0.24	0.744642857	0.085714286
29	5.646	4.286	2.823	2.143	0.17	0.759121502	0.060219625
30	5.78	4.386	2.89	2.193	0.2	0.758823529	0.069204152
31	6.07	4.46	3.035	2.23	0.11	0.73476112	0.036243822
32	5.42	4.266	2.71	2.133	0.26	0.787084871	0.095940959
33	5.68	4.31	2.84	2.155	0.25	0.758802817	0.088028169
Min.	5.39	4.109	2.695	2.0545	0.08	0.681178396	0.029165148
Maks.	6.236	4.646	3.118	2.323	0.4	0.798395917	0.140794224


Keterangan: $a = 0,5 \times \text{Panjang}$;

$b = 0,5 \times \text{Lebar}$

Lampiran 6. Contoh Hasil Penggambaran Kurva Bentuk-Telur Hugelschaffer terhadap Garis Tepi dari Telur



Gambar 1: Kurva Bentuk-Telur Hugelschaffer terhadap Garis Tepi Telur Ayam Kampung



Gambar 2: Kurva Bentuk-Telur Hugelschaffer terhadap Garis Tepi Telur Ayam *Broiler*

BIOGRAFI PENULIS



Penulis bernama lengkap Ahmat Rif'an Maulana, dilahirkan di Dusun Dukuhdimoro, Desa Dukuhdimoro, Kecamatan Mojoagung, Kabupaten Jombang, Jawa Timur pada tanggal 15 Januari 1990 dan merupakan anak keempat dari empat bersaudara pasangan Bapak Abdul Manan dan Ibu Istikhomah. Pendidikan formal yang ditempuh diantaranya, lulus dari SD Negeri Dukuhdimoro pada tahun 2002, kemudian melanjutkan ke SMP Negeri 1 Mojoagung lulus tahun 2005. Pendidikan menengah atas ditempuh di SMA Negeri Mojoagung lulus tahun 2008 dan melanjutkan pendidikan tinggi S-1 Program Studi Pendidikan Matematika pada tahun 2009 di STKIP PGRI Jombang

dan lulus tahun 2013 dengan predikat *cumlaude* sebagai wisudawan terbaik. Kemudian, melanjutkan pendidikan S-2 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Insitut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya. Adapun judul penelitian penulis pada jenjang pendidikan S-1 yaitu: Komposisi Fungsi Vektor dalam Dua Parameter dan Bentuk Umum Fungsi Vektor yang Grafiknya Sama dengan Grafik Fungsi Invers. Sedangkan, pada jenjang pendidikan S-2, penulis mengambil bidang minat Geometri Analitik Ruang dengan judul Tesis: Konstruksi Persamaan Permukaan Bentuk-Telur Menggunakan Kurva Bentuk-Telur Hügelschaffer. Informasi, kritik, dan saran yang berhubungan dengan Tesis ini dapat ditunjukkan ke alamat e-mail: a_rifan_m@yahoo.com.