TUGAS AKHIR - SM0141501

METODE CRANK-NICOLSON UNTUK MENGHITUNG NILAI STOCK LOAN DENGAN DIVIDEN YANG DIINVESTASIKAN KEMBALI SEBELUM PEMBAYARAN PINJAMAN

NUR ILMAYASINTA
NRP 1212 100 703

Dosen Pembimbing:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

FINAL PROJECT - SM141501

CRANK-NICOLSON METHOD FOR CALCULATING VALUE OF STOCK LOAN WITH DIVIDEND REINVESTED BEFORE REDEMPTION

NUR ILMAYASINTA
NRP 1212 100 703

Supervisors:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

METODE CRANK-NICOLSON UNTUK MENGHITUNG NILAI STOCK LOAN DENGAN DIVIDEN YANG DIINVESTASIKAN KEMBALI SEBELUM PEMBAYARAN PINJAMAN

CRANK-NICOLSON METHOD FOR CALCULATING VALUE OF STOCK LOAN WITH DIVIDEND REINVESTED BEFORE REDEMPTION

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
NUR ILMAYASINTA
NRP. 1212 100 703

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc	Endah Rokhmati M.P., Ph.D
NIP. 19640624 198803 1 001	NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA

Surabaya, Juli 2016

METODE CRANK-NICOLSON UNTUK MENGHITUNG NILAI STOCK LOAN DENGAN DIVIDEN YANG DIINVESTASIKAN KEMBALI SEBELUM PEMBAYARAN PINJAMAN

Nama Mahasiswa	:	Nur Ilmayasinta
NRP	:	1212 100 703
Jurusan	:	Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	:	1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
		2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

Abstrak

Stock loan merupakan salah satu alternatif yang menarik bagi para investor untuk meningkatkan nilai likuiditas tanpa harus menjual saham. Mekanisme stock loan menyerupai American call option. Dari kesamaan mekanisme stock loan dengan American call option ini, maka penentuan nilai stock loan dapat menggunakan persamaan Black-Scholes. Dalam penelitian ini dilakukan perhitungan nilai stock loan dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman menggunakan metode Crank-Nicolson. Nilai stock loan yang diperoleh selanjutnya akan dibandingkan dengan metode Pohon Binomial dari penelitian sebelumnya[3]. Berdasarkan nilai stock loan yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa hasil perhitungan nilai stock loan menunjukkan semakin tinggi harga saham (X)*, dan bertambahnya waktu* (T) *maka nilai stock loan juga semakin tinggi. Sedangkan dari hasil perbandingan didapat bahwa pada grid N=10000 nilai optimal exit price menggunakan metode Crank-Nicolson semakin mendekati nilai optimal exit price* *menggunakan metode Pohon Binomial.*

Kata-kunci: *Option, model Black-Scholes, Stock Loan, American call option, metode Crank-Nicolson.*

CRANK-NICOLSON METHOD FOR CALCULATING VALUE OF STOCK LOAN WITH DIVIDEND REINVESTED BEFORE REDEMPTION

Name	:	Nur Ilmayasinta
NRP	:	1212 100 703
Department	:	Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors	:	1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
		2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

Abstract

Stock loan is one of alternative that appeal investors to get the liquidity without selling the stock. Stock loan mechanism resembles American call option, therefore the determination of the value of stock loan can use Black-Scholes equation. This research is carried out the calculation of stock loan value with dividends reinvested before redemption using Crank-Nicolson method. The obtained stock loan value will be compared using Binomial Tree method from precious research[3]. Based on the stock loan value obtained, it can be concluded that the results of the calculation of stock loan value shows the higher stock price X. Increasing time T, the stock loan value is also higher. Meanwhile, from the comparison result is known that on grid N=10000 optimal exit price value using Crank-Nicolson method is close to the optimal exit price value using Binomial Tree method.

Keywords: *Option, Black-Scholes models, Stock Loan, American call option, Crank-Nicolson method.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Daftar Simbol

S	Harga saham.
S_t	Harga saham pada waktu t.
S_0	Harga saham pada saat $t = 0$.
S_f	Harga saham optimal.
T	*Maturity date*/tanggal jatuh tempo.
r	*interest rate.*
δ	dividen.
σ	*volatility parameter.*
W_t	Proses Wiener atau biasa disebut dengan *Brownian Motion.*
Π	Nilai portofolio.
$d\Pi$	Perubahan nilai portofolio.
∇	Banyaknya lembar saham.
V	Nilai *option.*
$d\tau$	Perubahan waktu.
dX	Perubahan harga saham.
U	Nilai *stock loan* non-dimensional.
X	Harga non-dimensional saham.
X_t	Harga saham non-dimensional pada waktu t.
X_0	Harga saham non-dimensional pada saat $t = 0$.
X_f	Harga saham non-dimensional optimal.
X_{max}	Harga saham non-dimensional maksimal.
j	Notasi perubahan pada sumbu X.
i	Notasi perubahan pada sumbu τ.
$U_{j,i}$	Nilai *stock loan* non-dimensional pada titik j,i.
K	*Strike price.*
γ	Bunga Pinjaman.

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat dari tugas akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Investasi adalah penempatan sejumlah dana pada saat ini dengan harapan untuk memperoleh keuntungan di masa depan. Bentuk investasi secara garis besar ada dua jenis aset yang dapat digunakan sebagai sarana investasi: *real asset* yaitu investasi yang dilakukan dalam asset-asset yang berwujud nyata seperti emas, *real estate* dan karya seni dan *financial asset* yaitu investasi yang dilakukan pada sektor-sektor *financial*, seperti deposito, saham, obligasi, reksadana[1]. Saham sendiri merupakan surat berharga yang menunjukkan kepemilikan perusahaan sehingga pemegang saham memiliki hak klaim atas dividen (pengembalian laba) atau distribusi lain yang dilakukan perusahaan kepada pemegang saham lainnya. Jika perusahaan mendapat keuntungan dalam suatu periode, maka investor akan mendapat deviden berdasarkan jumlah saham yang dimilikinya pada perusahaan tersebut. Kelemahan berinvestasi saham adalah mempunyai risiko kehilangan dana yang besar pula. Investasi ini menuntut investor untuk selalu mengikuti pergerakan saham agar dapat meminimalisir kerugian.

Bagi investor maupun emiten, hal yang menjadi pertimbangan saham tersebut menguntungkan atau tidak adalah likuiditas saham. Likuiditas saham merupakan ukuran jumlah transaksi suatu saham di pasar modal dalam suatu periode tertentu. Semakin tinggi frekuensi transaksi saham tersebut, maka semakin tinggi pula likuiditas saham. Hal tersebut menunjukkan bahwa saham tersebut semakin diminati investor. Jika saham tersebut likuid akan lebih mudah ditransaksikan sehingga terdapat peluang untuk mendapatkan *capital gain*. Bagi emiten sendiri likuiditas saham juga akan menguntungkan, karena apabila perusahaan menerbitkan saham baru akan cepat terserap pasar, selain itu juga memungkinkan perusahaan terhindar dari ancaman *delisting* (dikeluarkan) dari pasar modal.

Alternatif yang menarik bagi investor untuk meningkatkan likuiditas dari saham tanpa menjual saham adalah *stock loan*. Pemberi pinjaman yang merupakan sebuah perusahaan atau bank menawarkan pinjaman dengan saham sebagai jaminannya. Sedangkan peminjam memberi hak untuk mengolah saham kepada pemberi pinjaman tanpa kehilangan kepemilikan. Pemberi pinjaman bisa memiliki saham yang dijadikan jaminan ketika peminjam tidak dapat membayar hutangnya sampai batas waktu kadaluarsa yang ditentukan dan seorang peminjam bisa menerima kembali saham yang dijadikan jaminan kapanpun dalam range waktu perjanjian ketika dia membayar hutangnya dan akumulasi bunga yang sudah ditentukan sebelumnya. Jika harga saham meningkat dalam setiap waktu, peminjam dapat membayar hutangnya, menerima kembali sahamnya dan memperoleh keuntungan tak terhingga. Dalam kondisi sebaliknya, jika harga saham menurun dibawah akumulasi hutang, peminjam dapat meninggalkan hutangnya (*non-recourse loan*). Dalam kasus ini peminjam hanya kehilangan biaya *service* mulai dari awal kontrak[2].

Mekanisme *stock loan* menyerupai *American call* *option*. Selama kontrak berlangsung, jika harga saham meningkat peminjam dapat membayar hutangnya untuk menyelesaikan kontraknya, menerima kembali sahamnya untuk menghasilkan keuntungan. Peminjam bisa dianggap sebagai *holder* (pembeli) pada *call option*, sedangkan pemberi pinjaman yang berkewajiban mengembalikan sahamnya kepada peminjam dianggap sebagai *writer* (penjual) *option*, dan hak peminjam untuk mengakhiri kontrak kapanpun selama waktu kontrak dianggap sebagai hak *early exercise call option*. Peminjam dapat tidak membayar hutangnya dan menyerahkan jaminannya (saham) saat harga saham turun dibawah total nilai pinjaman. Kondisi tersebut mirip dengan kondisi *option* yang tidak di *exercise* yang hanya kehilangan biaya preminya saja. Dari kesamaan mekanisme *stock loan* dengan *American call option*, *stock loan* dapat dianggap sebagai model *American option* dengan *strike price* yang bergantung waktu[2].

Untuk menentukan harga *option*, model yang digunakan adalah model Black-Scholes. Kenyataannya, terkadang sulit untuk mencari solusi analitik atau eksak sehingga cara lainnya adalah dengan solusi numerik. Sedangkan untuk perhitungan nilai *stock loan* sendiri, fungsi pembayaran pada saat jatuh tempo bergantung pada pembagian dividen kepada peminjam. Kondisi pembagian dividen dibagi menjadi tiga yakni ketika pemberi pinjaman mengumpulkan dividen sebelum pembayaran pinjaman, dividen diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman dan dividen langsung diberikan kepada peminjam. Dalam tugas akhir ini, membahas mengenai perhitungan nilai *stock loan* dalam kondisi dividen diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman dengan metode Crank-Nicolson.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, disusun beberapa rumusan masalah yang dibahas dalam tugas akhir ini yaitu:

1. Bagaimana penghitungan nilai *stock loan* dengan dividen diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman menggunakan pendekatan numerik Crank-Nicolson?

2. Bagaimana analisis hasil simulasi penghitungan nilai *stock loan* dengan dividen diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman menggunakan pendekatan numerik Crank-Nicolson?

3. Bagaimana perbandingan antara hasil perhitungan *optimal exit price* dengan dividen diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman menggunakan metode Crank-Nicolson dengan hasil perhitungan menggunakan metode Pohon Binomial?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini antara lain:

1. Hasil perhitungan menggunakan metode Pohon Binomial diambil dari referensi nomor[3].

2. Periode peminjaman berhingga.

3. Pertumbuhan nilai pinjaman adalah $qe^{\gamma t}$.

4. Simulasi menggunakan *software* Matlab.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini yaitu:

1. Mendapatkan nilai stock loan dengan dividen diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman menggunakan pendekatan numerik Crank-Nicolson.

2. Mendapatkan analisis hasil simulasi dari nilai *stock loan* dengan dividen diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman menggunakan metode Crank-Nicolson.

3. Mengetahui perbandingan antara hasil perhitungan *optimal exit price* dengan dividen diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman menggunakan metode Crank-Nicolson dengan hasil perhitungan menggunakan metode Pohon Binomial.

1.5 Manfaat

Manfaat yang didapat dalam Tugas Akhir ini adalah mendapatkan nilai *stock loan* dengan dividen diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman dan perbandingan *optimal exit price* antara metode Pohon Binomial dan metode Crank-Nicolson.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Pada Bab II berisi penelitian terdahulu dan teori-teori yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir ini, *option*, *stock loan*, persamaan diferensial parsial Black-Scholes, dan metode beda hingga Crank-Nicolson.

3. BAB III METODE PENELITIAN
   Dalam bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, selanjutnya dilakukan analisis masalah dan simulasi. Tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Pada Bab IV dibahas secara detail mengenai solusi numerik perhitungan nilai *stock loan* dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman menggunakan metode Crank-Nicolson.

5. BAB V PENUTUP
   Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab ini menjelaskan tentang penelitian terdahulu dan teori-teori yang terkait dengan Tugas Akhir ini yaitu *option*, *stock loan*, persamaan diferensial parsial Black-Scholes, dan metode beda hingga Crank-Nicolson.

2.1 Penelitian Terdahulu

Metode Crank-Nicolson dikembangkan oleh Crank John dan Phyllips Nicholson pada pertengahan abad ke-20. Metode Crank-Nicolson ini merupakan salah satu dari beberapa metode beda hingga yang memiliki kestabilan tanpa syarat dan nilai eror-nya paling kecil dibandingkan dengan metode-metode yang lain. Selvi mengaplikasikan metode Crank-Nicolson untuk menentukan harga *European call option* pada model Heston[4].

Model Black-Scholes merupakan model yang sesuai untuk menghitung harga opsi. Gina dan Ana melakukan penelitian yang berkaitan dengan Model Black-Scholes di pasar finansial. Mereka mendapatkan metode numerik untuk *European option* dan *exotic option*, untuk satu aset dan untuk model dua aset[5]. Dalam kasus lain Li dan Hong menggunakan Hopscotch dan metode Crank-Nicolson untuk menentukan nilai *Europian option*, dan juga menganalisis hasil harga dari dua metode ini dengan membandingkan hasil nilai dari model Black-Scholes[6].

Stock loan adalah alternatif yang menarik bagi investor untuk meningkatkan likuiditas dari saham tanpa menjual saham itu sendiri. Graselli dan Gomez telah memperlajari *stock loan* dalam pasar yang tidak sempurna. Mereka menyediakan pernyataan tegas dalam menghitung biaya perawatan untuk *stock loan* abadi dan menggunakan metode numerik untuk perhitungan nilai *stock loan* dengan waktu jatuh tempo yang terbatas. Dalam penelitiannya menggunakan metode beda hingga dengan PSOR (projected successive over relaxion) untuk perhitungan nilai *stock loan* dengan batas waktu jatuh tempo dalam pasar yang tidak sempurna[7]. Salah satu penelitian tentang *stock loan* telah dilakukan oleh Endah R.M. Putri dan Xiaoping Lu, dalam penelitiannya Lu dan Putri melakukan evaluasi semi analitik dari *stock loan* standart dengan tanggal jatuh tempo yang terbatas (*Finite Maturity*) menggunakan metode transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsialnya. Lu dan Putri juga menyajikan rumusan *stock loan* dengan tiga model pembagian dividen yang berbeda[2].

2.2 Option

Option merupakan perjanjian secara tertulis antara dua pihak, yaitu pihak *holder* (pembeli) dan *writer* (penjual), dimana *holder* diberi hak oleh *writer* untuk membeli atau menjual sejumlah aset dengan harga tertentu *(strike price/exercise price)* dan pada waktu tertentu *(expiration date)* sesuai dengan perjanjian yang telah disepakati antara dua pihak[8].

2.2.1 Istilah-istilah dalam Option

Beberapa istilah penting yang mendasari perdagangan *option* antara lain [9]:

1. *Underlying Asset*
   Aset mendasar yang diperdagangkan dalam pasar modal. Dalam pasar option, *underlying asset*

yang diperdagangkan hanya tersedia untuk sekuritas-sekuritas tertentu dan indeks-indeks yang disetujui.

2. *Maturity/ Expiration Date*
   Tanggal waktu jatuh tempo atau batas waktu dimana *option* tersebut dapat dilaksanakan. Setelah melewati *maturity date*, *option* dinyatakan kadaluarsa atau tidak dapat dieksekusi.

3. *Strike/ Exercise Price*
   Harga pembelian atau penjualan yang telah ditentukan untuk *underlying asset* ketika *option* dieksekusi. Harga tersebut menjadi patokan pada saat jatuh tempo.

4. Premi
   Harga yang harus dibayarkan oleh pembeli *option* kepada penjual *option.*

2.2.2 Jenis-jenis Option

Terdapat dua jenis *option* berdasarkan bentuk hak yang terjadi, antara lain [9]:

a. *Call Option.* Sebuah kontrak *option* yang memberikan hak (bukan kewajiban) kepada pemegangnya untuk membeli suatu aset dalam jumlah tertentu pada jangka waktu dan harga yang telah ditentukan sebelumnya.

b. *Put Option.* Sebuah kontrak *option* yang memberikan hak (bukan kewajiban) kepada pemiliknya untuk menjual suatu aset dalam jumlah tertentu pada jangka waktu dan harga yang telah ditentukan sebelumnya.

Berdasarkan waktu eksekusinya, *option* dibedakan menjadi dua, yaitu [9]:

a. *American option. Option* yang dapat dieksekusi setiap saat sampai waktu *maturity date.*

b. *European option*. *Option* yang dapat dieksekusi hanya pada saat waktu *maturity date* saja.

2.2.3 Keuntungan dari Perdagangan Option

Beberapa keuntungan yang dapat diperoleh dengan adanya perdagangan *option* antara lain [9]:

(a) Manajemen Risiko.
Put option dari suatu *underlying asset* yang dimiliki oleh pemodal/investor dapat digunakan untuk melakukan *hedging*(melindungi portofolio terhadap risiko penurunan harga pasar) melalui penundaan penjualan saham yang dimilikinya terhadap penurunan harga, sehingga dapat menghindari terjadinya risiko kerugian.

(b) Memberikan Waktu yang Fleksibel.
Pemegang *call option* maupun *put option* dari sebuah kontrak *option* dapat menentukan apakah akan melaksanakan haknya atau tidak hingga masa jatuh tempo berakhir (*maturity date*).

(c) Menyediakan Sarana Spekulasi.
Para investor dapat memperkirakan harga naik dengan pertimbangan membeli *call option* dan pertimbangan membeli *put option* jika perkiraan harga turun. Hal ini dilakukan untuk memperoleh keuntungan.

2.2.4 Faktor-faktor yang Mempengaruhi Harga Option

Beberapa faktor yang mempengaruhi harga *option* antara lain [9]:

a) Harga *Underlying Asset*.
Harga suatu *underlying asset* dijadikan patokan dalam menentukan harga *option*. Harga suatu *call option* akan

semakin meningkat apabila harga *underlying asset*-nya juga meningkat. Sedangkan untuk harga *put option* akan mengalami penurunan. Hal ini menunjukkan bahwa harga *underlying asset* berbanding lurus dengan harga *call option* dan berbanding terbalik dengan harga *put option.*

b) *Moneyness.*
Moneyness merupakan perbedaan antara harga *underlying asset* saat ini dengan *strike price.* Suatu *put option* dan *call option* akan memiliki nilai apabila berada pada kondisi *in the money.* Sehingga harga *put option* tersebut semakin meningkat apabila *strike price*-nya tinggi dan berlaku sebaliknya pada *call option.*

c) Jangka Waktu Jatuh Tempo.
Harga suatu *option* bergantung pada jangka waktu jatuh tempo *option* tersebut. Untuk *American option* akan menjadi lebih berharga apabila jangka waktu jatuh temponya semakin meningkat. Dikarenakan *American option* dapat di*exercise* sewaktu-waktu sampai batas *maturity date.* Sementara untuk *European option*, tidak terpengaruh terhadap waktu jatuh tempo. Hal ini dikarenakan *European option* di*exercise* hanya pada saat *maturity date.*

d) Volatilitas.
Volatilitas suatu *underlying asset* merupakan tolak ukur tingkat ketidakpastian pergerakan *underlying* tersebut di masa mendatang. Semakin besar volatilitas (semakin besar jarak antara naik turunnya harga *underlying asset*), maka semakin meningkat harga *call option* dan *put option.*

e) Tingkat Suku Bunga Bebas Risiko.
   Tingkat suku bunga bebas risiko juga mempengaruhi harga suatu *option.* Jika tingkat suku bunga dalam perekonomian meningkat, maka akan mempengaruhi harapan kenaikan harga suatu *underlying asset*, misalnya saham. Harga *put option* akan menurun dengan adanya peningkatan *risk free interest rate.* Begitu pula sebaliknya, *call option* akan meningkat.

f) Dividen.
   Jika aset dasar *option* adalah saham, dividen dapat mempengaruhi nilai *option.* Dividen akan mengurangi harga saham sebesar jumlah dividen yang dibagikan sehingga akan menurunkan nilai *call* dan meningkatkan nilai *put.*

2.3 Saham

Saham *(stock)* dapat didefinisikan tanda penyertaan atau kepemilikan seseorang atau badan dalam suatu perusahaan atau perseroan terbatas. Wujud saham adalah selembar kertas yang menerangkan bahwa pemilik kertas tersebut adalah pemilik perusahaan yang menerbitkan surat berharga tersebut. Porsi kepemilikan ditentukan oleh seberapa besar penyertaan yang ditanamkan di perusahaan tersebut[10].

2.3.1 *Stock Loan*

Stock loan adalah kontrak antara *borrower* (pemilik saham) dan *lender* (pemilik uang), dimana *borrower* memberikan *collateral* (jaminan) dan *lender* memberikan *loan* (pinjaman). Ketika *borrower* membutuhkan uang, *borrower* menjual saham tapi tidak ingin kehilangan saham maka *borrower* bisa hanya menjaminkan sahamnya agar mendapatkan uang. Mekanisme dari *stock loan* sendiri menyerupai mekanisme *American call option* dan *stock loan* dapat dianggap sebagai American option dengan strike price yang bergantung pada waktu dimana jika dalam *American call option* dikenal istilah *holder* yakni orang yang membeli saham dan *writer* yakni orang yang menjual saham, maka pada *Stock Loan* ada pihak yang mempunyai saham *(borrower)* dan pihak yang mempunyai uang *(lender)*.

Borrower mengajukan pinjaman kepada *lender* (perusahaan pribadi atau bank) dengan menjaminkan saham (*stock*). *Borrower* tidak kehilangan hak kepemilikan dari *stock* tersebut, *lender* hanya berhak menyimpan *stock* yang dijaminkan saja. Namun, jika *borrower* gagal untuk melunasi pinjaman sampai batas waktu yang ditentukan maka *stock* yang dijaminkan akan diambil alih oleh *lender*. Pada setiap saat selama kontrak *stock loan*, jika harga saham naik maka *borrower* dapat membayar kembali pinjaman ditambah bunga untuk keluar dari kontrak. Jika harga saham turun, *borrower* dapat meninggalkan kewajibannya untuk membayar pinjaman (*walk away*) dan hanya kehilangan biaya premi saja[2].

Dalam pembagiannya terdapat tiga model pembagian dividen, dan pada Tugas Akhir ini akan digunakan model dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman. Dalam hal ini, dividen yang diinvestasikan kembali segera setelah dibayar, akan dikembalikan sebagai bagian dari penebusan jaminan. Pergerakan harga saham diwakili oleh[2]:

$$e^{\delta t}S = S_0 e^{(rt+\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)} \tag{2.1}$$

2.4 Persamaan Diferensial Black-Scholes

Dalam menentukan harga *option* dan penyelesaian persamaanya dapat menggunakan model Black-Scholes, dimana perubahan harga saham (S) saat t diasumsikan mengikuti gerak Geometric Brownian, maka pembentukan model Black-Scholes adalah sebagai berikut[10]:

$$\begin{aligned} dS &= rSdt + \sigma S dW_t && (2.2) \\ \Pi &= V - \nabla S \\ d\Pi &= dV - \nabla dS && (2.3) \end{aligned}$$

dimana Π adalah nilai portofolio.

Penurunan V (dV), didapat dengan menggunakan pendekatan deret Taylor dua variabel bebas:

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + \frac{\partial V}{\partial t}dt + ... \tag{2.4}$$

Substitusi persamaan (2.2) ke dalam persamaan (2.4):

$$\begin{aligned} dV(S,t) &= \frac{\partial V}{\partial S}(rSdt + \sigma S dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(rSdt + \sigma S dW_t)^2 \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial t}dt \\ &= rSdt\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S dW_t\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(r^2S^2dt^2 + \sigma^2S^2 \\ &\quad dW_t{}^2 + 2rSdt\sigma S dW_t) + \frac{\partial V}{\partial t}dt \\ &= rSdt\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S dW_t\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}r^2S^2dt^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\ &\quad \sigma^2S^2dW_t{}^2 + rSdt\sigma S dW_t\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}dt && (2.5) \end{aligned}$$

dengan menggunakan *Quadratic Variation* pada *Brownian Motion*[11]:

$$\begin{aligned} dW_t{}^2 &= dt \\ dW_t dt &= 0 \\ dt^2 &= 0 \end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan persamaan *Quadratic Variation* pada *Brownian Motion* kedalam persamaan (2.5), didapat persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} dV(S,t) &= rSdt\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + 0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + 0 \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial t}dt \\ &= \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + \left(rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt \end{aligned} \tag{2.6}$$

persamaan (2.6) merupakan Lemma Ito, dimana Lemma Ito ini digunakan untuk mengubah persamaan differensial stokastik menjadi persamaan differensial parsial.

Substitusikan Lemma Ito pada persamaan (2.6) ke persamaan (2.3):

$$d\Pi = \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + \left(rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt - \nabla dS \tag{2.7}$$

dengan mensubstitusikan persamaan $\nabla = \frac{\partial V}{\partial S}$ dan persamaan (2.2) ke persamaan (2.7) maka:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + \left(rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt - \frac{\partial V}{\partial S} \\ &\quad (rSdt + \sigma S dW_t) \\ &= \sigma S dW_t \frac{\partial V}{\partial S} + rS\frac{\partial V}{\partial S}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial V}{\partial t}dt - rS \\ &\quad \frac{\partial V}{\partial S}dt - \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dW_t \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial V}{\partial t}dt \end{aligned}$$

Pada kenyataannya ketika investor menyimpan uangnya di Bank, investor akan mendapat profit tanpa melakukan apa-apa sehingga investor mengharapkan hal yang sama ketika meletakkan uangnya di pasar modal. Sehingga harapan untuk perubahan nilai portofolio di bank = portofolio di market adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
d\Pi_{bank} &= d\Pi_{market} \\
d\Pi &= r\Pi dt \\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial V}{\partial t}dt &= r(V - \nabla S)dt \\
\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt &= \left(rV - rS\frac{\partial V}{\partial S}\right)dt \\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} &= 0 \\
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV &= 0 \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

dengan,
σ = volatilitas
r = suku bunga
V = harga opsi saham
S = harga saham.
Persamaan (2.8) menggunakan syarat batas sehingga membentuk sistem persamaan differensial parsial Black-Scholes sebagai berikut:

$$\begin{cases}
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\
V(0,t) = 0 \\
V(S,T) = max(S-K,0) \\
V(S_f(t),t) = S_f(t) - K \\
\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = 1
\end{cases}$$

2.5 Metode Beda Hingga

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan diferensial yang memuat satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas. Salah satu cara untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik adalah dengan menggunakan metode beda hingga. Metode ini menggunakan pendekatan ekspansi Taylor di titik acuan (x).

Suatu fungsi dari sauatu variabel bebas $f(x)$ didifferensialkan n kali didalam interval $[x_0 - h, x_0 + h]$ dimana h cukup kecil, dapat diuraikan dalam bentuk deret pangkat menurut Deret Taylor sebagai berikut[12]:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + ... + \\ &\quad \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}h^{n-1} + O(h^n). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sedangkan pada titik $(x_0 - h)$ diperoleh bentuk deret Taylor sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_0 - h) &= f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - ... + \\ &\quad \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}h^{n-1} + O(h^n). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pendekatan untuk turunan pertama dilakukan dengan memotong suku-suku berorde lebih dari satu. Hal ini disebabkan untuk h yang cukup kecil, h^2 jauh kecil sehingga dapat diabaikan. Pendekatan turunan pertama dari persamaan (2.9) dan persamaan (2.10) adalah sebagai berikut:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + O(h^2)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - O(h)$$

atau

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{2.11}$$

Persamaan (2.11) dikenal sebagai pendekatan beda maju (*forward difference*), sedangkan persamaan (2.12) dibawah ini dikenal sebagai pendekatan beda mundur (*backward difference*).

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + O(h^2)$$
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + O(h)$$

atau

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}. \tag{2.12}$$

Dengan mengurangkan persamaan (2.9) ke persamaan (2.10) diperoleh pendekatan turunan pertama yang lain yaitu pendekatan beda pusat atau beda tengah (*center difference*) pada persamaan (2.13) berikut:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}. \tag{2.13}$$

Karena turunan kedua ditinjau dari deret Taylor hingga suku berorde dua, maka pemotongan dilakukan mulai suku-suku berorde tiga.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!} + O(h^3). \tag{2.14}$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!} - O(h^3). \tag{2.15}$$

Dengan menjumlahkan persamaan (2.14) dan persamaan (2.15) diperoleh pendekatan turunan kedua pada persamaan (2.16) berikut:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}. \tag{2.16}$$

Nilai pendekatan untuk turunan ketiga, keempat dan seterusnya dapat dilakukan dengan cara yang sama.

Apabila sumbu x dibagi menjadi beberapa bagian interval Δx yang panjangnya sama, maka absis titik i dapat ditulis dalam bentuk $x_i = i(\Delta x)$ dengan $i = 1, 2, 3, ...$ sehingga pendekatan turunan pertama dan kedua di titik i menjadi:

1. Pendekatan beda maju

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}.$$

2. Pendekatan beda mundur

$$f'(x_i) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}.$$

3. Pendekatan beda pusat/tengah

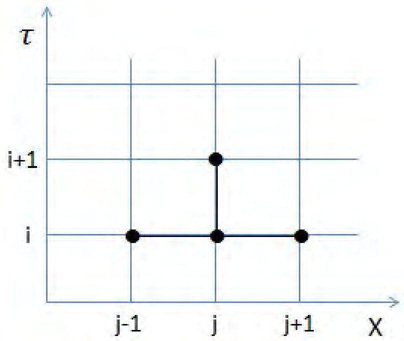
$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2(\Delta x)}.$$

4. Pendekatan turunan kedua

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i - f_{i-1}}{(\Delta x)^2}.$$

2.5.1 Metode Beda Hingga Eksplisit

Pendekatan Beda hingga eksplisit digunakan untuk mencari penyelesaian fungsi $U(X,\tau)$ menggunakan pendekatan beda maju dan beda tengah pada titik interiornya. Titik i adalah indeks subskip untuk dimensi waktu sedangkan titik j adalah indeks subskrip untuk dimensi harga, seperti terlihat pada gambar berikut:



Gambar 2.1: Skema Eksplisit

Pendekatan turuan parsial pertama beda maju digunakan untuk mendapatkan $\frac{\partial U}{\partial \tau}$ dan beda pusat untuk mendapatkan $\frac{\partial U}{\partial X}$, sedangkan pendekatan turunan parsial kedua digunakan untuk mendapatkan $\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$ sebagai berikut:

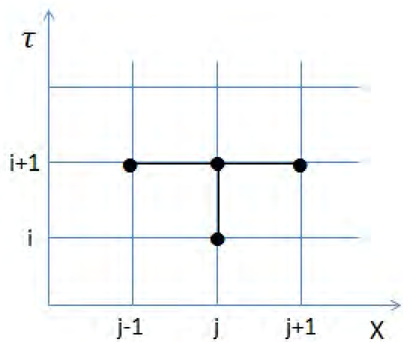
$$\frac{\partial U}{\partial \tau} \approx \frac{U_{j,i+1} - U_{j,i}}{\Delta \tau} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} \approx \frac{U_{j+1,i} - U_{j-1,i}}{2\Delta X} \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \approx \frac{U_{j+1,i} - 2U_{j,i} + U_{j-1,i}}{(\Delta X)^2} \tag{2.19}$$

2.5.2 Metode Beda Hingga Implisit

Pendekatan Beda hingga implisit digunakan untuk mencari penyelesaian fungsi $U(X,\tau)$ menggunakan pendekatan beda maju dan beda tengah pada titik interiornya. Titik i adalah indeks subskrip untuk dimensi waktu sedangkan titik j adalah indeks subskrip untuk dimensi harga seperti terlihat pada gambar berikut:



Gambar 2.2: Skema Implisit

Pendekatan turunan parsial pertama beda mundur digunakan untuk mendapatkan $\frac{\partial U}{\partial \tau}$ dan beda pusat untuk mendapatkan $\frac{\partial U}{\partial X}$, sedangkan pendekatan turunan parsial kedua digunakan untuk mendapatkan $\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$ sebagai berikut:

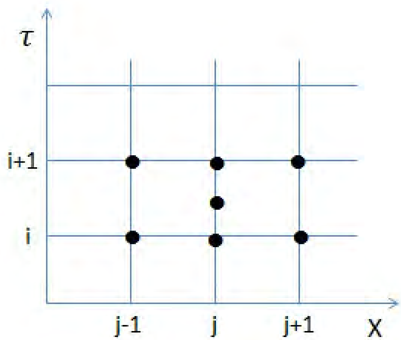
$$\frac{\partial U}{\partial \tau} \approx \frac{U_{j,i+1} - U_{j,i}}{\Delta \tau} \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} \approx \frac{U_{j+1,i+1} - U_{j-1,i+1}}{2\Delta X} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \approx \frac{U_{j+1,i+1} - 2U_{ji+1} + U_{j-1,i+1}}{(\Delta X)^2} \tag{2.22}$$

2.5.3 Metode Beda Hingga Crank-Nicolson

Metode Crank-Nicolson merupakan pengembangan dari metode eksplisit dan metode implisit. Pada metode ini, pendekatan solusi $U(X,\tau)$ dihitung melalui titik j,i dan titik $j,i+1$, artinya pendekatan suku derivatif harga pada waktu ke $i+1$ merupakan rata-rata derifatif pada waktu ke i dan $i+1$ atau dengan kata lain metode Crank-Nicolson merupakan rata-rata dari metode eksplisit dan metode implisit seperti gambar berikut:



Gambar 2.3: Skema Crank-Nicolson

$$U_{j,i+\frac{1}{2}} = \frac{U_{j,i+1}+U_{j,i}}{2} \tag{2.23a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{U_{j,i+1}-U_{j,i}}{\Delta\tau} \tag{2.23b}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{4\Delta X}(U_{j+1,i}-U_{j-1,i}+U_{j+1,i+1}-U_{j-1,i+1}) \tag{2.23c}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{1}{2(\Delta X)^2}(&U_{j+1,i}-2U_{j,i}+U_{j-1,i}+U_{j+1,i+1}\\ &-2U_{j,i+1}+U_{j-1,i+1})\end{aligned} \tag{2.23d}$$

2.6 Metode SOR

Sistem persamaan linier terdiri atas sejumlah persamaan linier dan sejumlah variabel. Menyelesaikan suatu sistem persamaan linier adalah mencari nilai dari variabel-variabel yang memenihi persamaan linier yang diberikan. Pada dasarnya terdapat dua kelompok metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier. Metode pertama disebut metode langsung yakni dalam langkah berhingga, sedangkan metode kedua aadalah metode tak langsung atau iteratif, metode ini digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier berukuran besar dan proporsi koefisien nolnya besar.

Kesulitan utama dalam penentuan harga *American option* adalah kondisi batas yang memungkinkan terjadinya *early exercise*, sehingga untuk mengatasi kesulitan itu dapat dipilih metode iteratif untuk menyelesaikan sistem linear daripada metode langsung. Salah satu metode iteratif yang dapat digunakan adalah metode *Succesive Overrelaxation* (SOR), metode SOR merupakan variasi dari metode Gauss-Seidel untuk penyelesaian sistem persamaan linear.

Terdapat sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$Ax = b$$

metode SOR dalah teknik iteratif yang menyelesaikan sisi kiri dari persamaan x dan menggunakan nilai iteratif sebelumnya dari x pada sisi kanannya. Skema iteratif dimulai dari inisialisasi titik $x^{(0)}$:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

dimana $i = 1, ..., N, k$ adalah iterasi dan ϵ adalah parameter *overrelaxation*, hingga kriteria konvergensi terpenuhi sehingga:

$$\parallel x^{(k+1)} - x^{(k)} \parallel < \epsilon.$$

dengan ϵ adalah parameter toleransi.

Aplikasikan langkah di atas untuk perhitungan nilai *stock loan* dengan metode Crank-Nicolson harus diselesaikan sistem sebagai berikut:

$$M_1 f_{i+1} = M_2 f_i \tag{2.24}$$

namun dalam *American Option* terdapat perbedaan kondisi batas dimana tidak ada penghalang nilai *option* akan bernilai sama dengan *payoff* sehingga sistem diselesaikan dengan cara sebagi berikut,

$$M_1 f_{i+1} = r_i, \tag{2.25}$$

dimana r_i merupakan matriks sebelah kanan dinyatakan sebagai berikut,

$$r_i = M_2 f_i + R, \tag{2.26}$$

untuk mengecek kemungkinan *exercise price* yang bisa dilakukan setiap saat selama masa berlaku kontrak, diperlukan

$$f_i^{k+1} = maks\{g_i, f_{ij}^k\} \tag{2.27}$$

dengan g_i merupakan nilai *payoff* disetiap titik i.

BAB III
METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan mengenai langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas tiga tahap, antara lain: studi literatur, analisis masalah dan penarikan kesimpulan.

3.1 Studi Literatur

Pada Bab ini menjelaskan tentang penelitian terdahulu dan teori-teori yang terkait dengan Tugas Akhir ini yaitu *option*, *stock loan*, persamaan diferensial parsial Black-Scholes, metode beda hingga Crank-Nicolson dan metode SOR.

3.2 Analisis Masalah

Pada tahap ini dilakukan analisis masalah yaitu dengan menyelesaikan model persamaan differensial parsial Black-Scholes untuk *stock loan* dengan metode Crank-Nicolson, yaitu :

1. Pembentukan persamaan diferensial Black-Scholes dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman.

2. Mentransformasikan sistem persamaan diferensial parsial menjadi bentuk non-dimensional.

3. Pendiskritan model Black-Scholes non-dimensional dengan metode Crank-Nicolson.

4. Pemilihan parameter yang digunakan untuk menghitung nilai *stock loan*, meliputi[3]:

    a. Suku bunga atau *interest rate.* Suku bunga (r) yang digunakan adalah konstan dan nilianya 0.06.
    b. Dividen (δ) sebesar 0.03.
    c. Nilai volatilitas dari *underlying asset* (σ) sebesar 0.4.
    d. Nilai pinjaman (q) sebesar 0.7.
    e. Bunga pinjaman (γ) sebesar 0.1.

5. Perhitungan nilai *stock loan* menggunakan hasil diskritisasi dari metode Crank-Nicolson kemudian memasukkan nilai parameter-parameter yang telah diberikan dengan memperhatikan syarat awal dan syarat batas dari *stock loan* dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman yang selnajutnya akan membentuk matriks Tridiagonal yang merupaka pennyelesaian dari metode Crank-Nicolson dan selanjutnya diselesaikan dengan metode SOR.

3.3 Simulasi Menggunakan Matlab

Pada tahap ini akan dilakukan simulasi dengan menggunakan *software* Matlab, yang selanjutnya akan dibandingkan antara hasil perhitungan menggunakan metode Crank-Nicolson dengan perhitungan menggunakan metode Pohon Binomial pada penelitian sebelumnya, sebagai perbandingan keakuratan.

3.4 Penarikan Kesimpulan

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan pada tahap sebelumnya.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dilakukan analisis hasil dan pembahasan mengenai langkah-langkah dalam perhitungan nilai *stock loan* dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman pada model Black-Scholes menggunakan metode beda hingga Crank-Nicolson. Untuk menghitung nilai *stock loan* dapat digunakan model Black-Scholes pada *American call option* karena persamaan mekanisme antara keduanya. Penentuan nilai *stock loan* dapat dilakukan dengan menggunakan penyelesaian numerik yaitu metode beda hingga Crank-Nicolson yang selanjutnya akan dilakukan simulasi dari hasil perhitungan numerik tersebut.

4.1 Pembentukan Persamaan Diferensial Black-Scholes dengan Dividen yang di Investasikan Kembali Sebelum Pembayaran Pinjaman

Pada tahap ini dibahas bagaimana pembentukan persamaan diferensial Black-Scholes dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman. Sebelumnya pada bab II dibahas mengenai pembentukan persamaan diferensial Black-Scholes umum dan mengenai bentuk pergerakan saham dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman pada persamaan (2.1) sebagai berikut:

$$e^{\delta t} S = S_0 e^{(rt + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)}$$

Dari persamaan diferensial Black-Scholes umum dan mengenai bentuk pergerakan saham dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman ini, selanjutnya dicari bagaimana model Black-Scholes dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman.

Harga saham pada dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman mengikuti pertumbuhan dividen, misalkan $e^{\delta t}S = S_2$ menjadi harga saham yang efektif untuk jaminan pada saat t untuk *stock loan* dengan dividen yang diinvestasikan kembali, dimana S adalah harga saham[2]. Mengacu pada pembentukan Black-Scholes pada persamaan (2.2) menjadi:

$$dS_2 = rS_2dt + \sigma S_2dW_t \tag{4.1}$$

dengan menggunakan langkah yang sama seperti pada pembentukan Black-Scholes pada bab II maka didapatkan hasil akhir model Black-Scholes dengan dividen yang dinvestasikan kembali seperti berikut:

$$\frac{\partial V_2(S_2,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S_2^2\frac{\partial^2 V_2(S_2,t)}{\partial S_2^2}+rS_2\frac{\partial V_2(S_2,t)}{\partial S_2}-rV_2(S_2,t)=0 \tag{4.2}$$

dengan kondisi batas untuk persamaan diferensial parsial adalah sebagai berikut:
Saat jatuh tempo nilai *stock loan* adalah

$$V_2(S_2,t) = max(S_2 - qe^{\gamma t}, 0). \tag{4.3}$$

Jika harga saham $S_2 = 0$ nilai *stock loan*=0 atau

$$V_2(0,t) = 0. \tag{4.4}$$

Pada harga saham yang optimal (S_{f2}) nilai *stock loan* adalah:

$$V_2(S_{f2}(t),t) = S_{f2} - qe^{\gamma t} \tag{4.5}$$

dan *continuity property* dari batas diatas adalah:

$$\frac{\partial V_2}{\partial S_2}(S_{f2}(t), t) = 1. \tag{4.6}$$

Sehingga sistem persamaan diferensial dari *stock loan* dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman terdapat pada persamaan (4.2) dan dengan menggunakan kondisi batas pada persamaan (4.3), (4.4), (4.5) dan (4.6) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S_2^2} + rS_2 \frac{\partial V_2}{\partial S_2} - rV_2 = 0 \\ V_2(0, t) = 0 \\ V_2(S_2, t) = max(S_2 - qe^{\gamma t}, 0) \\ V_2(S_{f2}(t), t) = S_{f2} - qe^{\gamma t} \\ \frac{\partial V_2}{\partial S_2}(S_{f2}(t), t) = 1 \end{cases}$$

4.2 Transformasi Sistem Persamaan Diferensial Parsial menjadi Bentuk non-Dimensional

Pada tahap ini, dilakukan perubahan variabel untuk mendapatkan persamaan diferensial yang lebih sederhana (sistem PDP non-dimensional) sehingga diperoleh persamaan Black-Scholes dengan variabel baru. Dimana model Black-Scholes dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman pada persamaan (4.2) dan diberikan transformasi variabel sebagai berikut[2]:

$$S_2 = Xqe^{\gamma t} \tag{4.7}$$

$$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \tag{4.8}$$

$$V_2(S_2, t) = U(X, \tau)qe^{\gamma t} \tag{4.9}$$

Model Black-Scholes pada persamaan (4.2) akan ditransformasikan menggunakan variabel pada persamaan

(4.7), (4.8) dan (4.9) untuk mendapatkan persamaan diferensial yang lebih sederhana (sistem PDP non-dimensional). Berikut adalah turunan dari $V_2(S_2,t)$ terhadap t:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(V_2(S_2,t))}{\partial t} &= \frac{\partial(U(X,\tau)qe^{\gamma t})}{\partial t} \\
&= qe^{\gamma t}\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial t} + (U(X,\tau))\frac{\partial(qe^{\gamma t})}{\partial t} \\
&= qe^{\gamma t}\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial t} + \gamma qe^{\gamma t}(U(X,\tau)) \\
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial(X)}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial \tau}\frac{\partial(\tau)}{\partial t}\right) \\
&\quad +\gamma qe^{\gamma t}(U(X,\tau)) \\
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Se^{-\gamma t}}{q}\right) + \frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial \tau}\right. \\
&\quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma^2 T}{2} - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)\right) + \gamma qe^{\gamma t}(U(X,\tau)) \\
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\left(\frac{-\gamma S}{qe^{\gamma t}}\right) + \frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial \tau}\right. \\
&\quad \left.\left(\frac{-\sigma^2}{2}\right)\right) + \gamma qe^{\gamma t}(U(X,\tau)) \\
&= -\gamma S\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X} - qe^{\gamma t}\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial \tau} \\
&\quad +\gamma qe^{\gamma t}(U(X,\tau)) \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Berikut adalah turunan dari $V_2(S_2,t)$ terhadap S_2:

$$
\frac{\partial V_2(S_2,t)}{\partial S_2} = \frac{\partial(U(X,\tau)qe^{\gamma t})}{\partial S_2}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_2(S_2,t)}{\partial S_2} &= qe^{\gamma t}\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial S_2} + (U(X,\tau))\frac{\partial(qe^{\gamma t})}{\partial S_2} \\
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S_2} + \frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S_2}\right) + 0 \\
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{S}{qe^{\gamma t}}\right) + \frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial \tau}\right. \\
&\quad \left.\frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right)\right) \\
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\frac{1}{qe^{\gamma t}} + \frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial \tau}0\right) \\
&= qe^{\gamma t}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\frac{1}{qe^{\gamma t}}\right) \\
&= \frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X} \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Berikut adalah turunan kedua dari $V_2(S_2,t)$ terhadap S_2:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_2(S_2,t)}{\partial S_2^2} &= \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\partial V_2(S_2,t)}{\partial S_2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\right)\frac{\partial(X)}{\partial S_2} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\right) \\
&\quad \frac{\partial(\tau)}{\partial S_2} \\
&= \frac{\partial^2(U(X,\tau))}{\partial X^2}\frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{S}{qe^{\gamma t}}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\right) \\
&\quad \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_2(S_2,t)}{\partial S_2^2} &= \frac{\partial^2(U(X,\tau))}{\partial X^2}\frac{1}{qe^{\gamma t}}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial(U(X,\tau))}{\partial X}\right)0\\ &= \frac{\partial^2(U(X,\tau))}{\partial X^2}\frac{1}{qe^{\gamma t}} \qquad (4.12)\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.10), (4.11), (4.12) dan juga variabel transformasi pada persamaan (4.7), (4.8), (4.9) ke persamaan (4.2), maka didapat:

$$-\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial\tau}+X^2\frac{\partial^2 U(X,\tau)}{\partial X^2}+\alpha X\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial X}-\alpha U(X,\tau)=0 \qquad (4.13)$$

dimana:

$$\alpha=\frac{2(r-\gamma)}{\sigma^2}$$

Pada saat harga saham = 0 maka nilai *stock loan* mencapai titik terendah yaitu 0.

$$\begin{aligned}V_2(0,t)&=0\\ U(0,\tau)qe^{\gamma t}&=0\\ U(0,\tau)&=\frac{0}{qe^{\gamma t}} \qquad (4.14)\\ &=0.\end{aligned}$$

Pada saat tanggal kadaluarsa ($t = T$) maka nilai *stock loan* memenuhi persamaan berikut,

$$\begin{aligned}V_2(S_2,T)&=max(S_2-qe^{\gamma t},0)\\ U(X,0)qe^{\gamma t}&=max(Xqe^{\gamma t}-qe^{\gamma t},0)\\ U(X,0)qe^{\gamma t}&=max((X-1)qe^{\gamma t},0) \qquad (4.15)\\ U(X,0)&=\frac{max((X-1)qe^{\gamma t},0)}{qe^{\gamma t}}\\ U(X,0)&=max(X-1,0).\end{aligned}$$

Pada saat harga saham mencapai harga maksimal, maka nilai *stock loan* mencapai titik tertinggi yaitu,

$$
\begin{aligned}
V_2(S_{max2}, t) &= S_{max2} - qe^{\gamma t} \\
U(X_{max}, \tau)qe^{\gamma t} &= X_{max}qe^{\gamma t} - qe^{\gamma t} \\
U(X_{max}, \tau)qe^{\gamma t} &= (X_{max} - 1)qe^{\gamma t} \\
U(X_{max}, \tau) &= \frac{(X_{max} - 1)qe^{\gamma t}}{qe^{\gamma t}} \\
&= X_{max} - 1.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Ketika $S_2 = S_{f2}(t)$, borrower harus melunasi pinjamanya, jika tidak maka nilai *stock loan* akan jatuh dan tidak memenuhi prinsip *arbitrage-free*. Bentuk non-dimensional batas bebas pertama dinyatakan sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
V_2(S_{f2}(t), t) &= S_{f2}(t) - qe^{\gamma t} \\
U(X_f(\tau), \tau)qe^{\gamma t} &= X_f(\tau)qe^{\gamma t} - qe^{\gamma t} \\
&= (X_f(\tau) - 1)qe^{\gamma t} \\
U(X_f(\tau), \tau) &= \frac{(X_f(\tau) - 1)qe^{\gamma t}}{qe^{\gamma t}} \\
&= (X_f(\tau) - 1)
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

sedangkan bentuk non dimensional batas bebas kedua dinyatakan sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_2}{\partial S_2}(S_{f2}(t), t) \quad &= 1 \\
&= \frac{\partial V_2(S_{f2}(t), t)}{\partial X} . \frac{\partial X}{\partial S_2} \quad = 1 \\
&= \frac{\frac{\partial V_2(S_{f2}(t), t)}{\partial X}}{\frac{\partial S_2}{\partial X}} \quad = 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_2}{\partial S_2}(S_{f2}(t),t) &= \frac{\dfrac{\partial U(X_f(\tau),\tau)}{\partial X}qe^{\gamma t}}{qe^{\gamma t}} &= 1 \\ &= \frac{\partial U}{\partial X}(X_f(\tau),\tau) &= 1.\end{aligned} \tag{4.18}$$

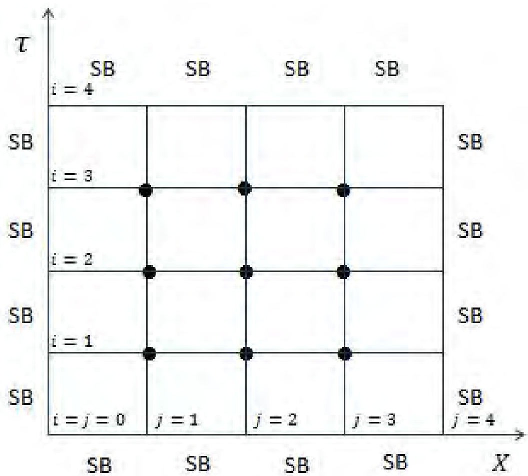
Dari persamaan (4.13), (4.14),(4.15), (4.16), (4.17) dan (4.18) didapat sistem *stock loan* dalam bentuk non-dimensional sebagai berikut:

$$\begin{cases} -\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial \tau} + X^2\frac{\partial^2 U(X,\tau)}{\partial X^2} + \alpha X\frac{\partial U(X,\tau)}{\partial X} - \alpha U(X,\tau) = 0 \\ U(0,\tau) = 0 \\ U(X,0) = max(X(0)-1,0) \\ U(X_f(\tau),\tau) = X_f(\tau) - 1 \\ \frac{\partial U}{\partial X}(X_f(\tau),\tau) = 1 \end{cases}$$

4.3 Pendiskritan Formula untuk *Stock Loan*

Persamaan Black-Scholes untuk *Stock Loan* dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman dinyatakan pada persamaan (4.2). Persamaan Black-Scholes dapat dinyatakan dengan pembagian M grid dengan panjang interval $\Delta\tau = \frac{\tau}{M}$. Dengan τ merupakan total waktu dari M+1 grid. Total waktu dapat dituliskan menjadi $0, \Delta\tau, 2\Delta\tau, ..., \tau$.

X_{max} merupakan harga tertinggi dari *stock loan* ketika di*exercise*. X_{max} didefinisikan dengan $\Delta X = \frac{X_{max}}{N}$, kemudian dimasukkan kedalam grid N+1 sehingga menjadi $0, \Delta X, 2\Delta X, ..., X_{max}$. (N+1) dan (M+1) merupakan jumlah total grid harga saham (X) dan waktu (τ) yang akan digunakan untuk menentukan nilai dari *stock loan* pada waktu ke-τ dan pada tingkat harga saham mencapai X_{max}. Pembagian grid persamaan Black-Scholes dapat dengan syarat batas dapat dilihat pada gambar berikut:

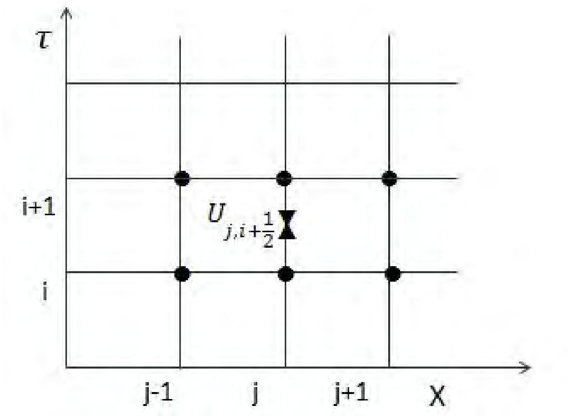


Gambar 4.1: Pembagian Grid dengan Syarat Batas

Koordinat titik (j,i) menghubungkan antar titik harga saham $j\Delta X$ dan titik waktu $i\Delta\tau$. Koordinat titik (j,i) dinotasikan dengan $U_{j,i}$.

4.4 Pendiskritan Persamaan Difeerensial Black-Scholes non-Dimensional dengan Metode Crank-Nicolson

Pada tahap ini, akan dilakukan pendiskritan model Black-Scholes non-dimensional dengan metode beda hingga Crank-Nicolson. Metode beda hingga Crank-Nicolson adalah rata-rata dari metode beda hingga eksplisit dan implisit. Titik-titik yang digunakan dalam metode Crank-Nicolson adalah seperti pada gambar berikut:



Gambar 4.2: Pembagian Grid pada Skema Crank-Nicolson $U(X,\tau)$

dimana titik i diketahui sedangkan titik i+1 tidak diketahui. Variabel yang akan digunakan dalam pendiskritan beda hingga Crank-Nicolson dinotasikan sebagai berikut:

$$U(X,\tau) = U(j\Delta X, i\Delta\tau) = U_{j,i}.$$

Penurunan pada metode beda hingga Crank-Nicolson didapat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} U(X,\tau) &= U_{j,i+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{U_{j,1}+U_{j,i+1}}{2} \qquad (4.19) \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{U_{j,i+1}-U_{j,i}}{\Delta\tau} \qquad (4.20) \\ \frac{\partial U}{\partial X} &= \frac{1}{4\Delta X}(U_{j+1,i}-U_{j-1,i}+U_{j+1,i+1} \\ &\quad -U_{j-1,i+1}) \qquad (4.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} &= \frac{1}{2(\Delta X)^2}(U_{j+1,i} - 2U_{j,i} + U_{j-1,i} + U_{j+1,i+1} \\ &\quad -2U_{j,i+1,} + U_{j-1,i+1}) \qquad (4.22)\end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (4.19-4.22) ke persamaan (4.13), didapat:

$$\begin{aligned}0 &= -\left(\frac{U_{j,i+1} - U_{j,i}}{\Delta\tau}\right) + X^2\frac{1}{2\Delta X^2}(U_{j+1,i} - 2U_{j,i} + U_{j-1,i} \\ &\quad +U_{j+1,i+1} - 2U_{j,i+1} + U_{j-1,i+1}) + \alpha X\frac{1}{4(\Delta X)}(U_{j+1,i} \\ &\quad -U_{j-1,i} + U_{j+1,i+1} - U_{j-1,i+1}) - \alpha\left(\frac{U_{j,i} + U_{j,i+1}}{2}\right)\end{aligned}$$

Kalikan kedua ruas dengan $\Delta\tau$:

$$\begin{aligned}0 &= -(U_{j,i+1} - U_{j,i}) + X^2(\Delta\tau)\frac{1}{2\Delta X^2}(U_{j+1,i} - 2U_{j,i} + U_{j-1,i} \\ &\quad +U_{j+1,i+1} - 2U_{j,i+1} + U_{j-1,i+1}) + \alpha X(\Delta\tau)\frac{1}{4(\Delta X)}(U_{j+1,i} \\ &\quad -U_{j-1,i} + U_{j+1,i+1} - U_{j-1,i+1}) - \alpha(\Delta\tau)\left(\frac{U_{j,i} + U_{j,i+1}}{2}\right)\end{aligned}$$

Substitusikan:

$$\begin{aligned}X &= j(\Delta X) \\ j &= \frac{X}{\Delta X}\end{aligned}$$

diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}0 &= -U_{j,i+1} + U_{j,i} + \frac{j^2}{2}(\Delta\tau)(U_{j+1,i} - 2U_{j,i} + U_{j-1,i} + U_{j+1,i+1}, \\ &\quad -2U_{j,i+1} + U_{j-1,i+1}) + \frac{\alpha j}{4}(\Delta\tau)(U_{j+1,i} - U_{j-1,i} \\ &\quad +U_{j+1,i+1} - U_{j-1,i+1}) - \frac{\alpha}{2}(\Delta\tau)(U_{j,i} + U_{j,i+1,})\end{aligned}$$

Nilai *stock loan* dapat diperoleh pada waktu ke i+1, apabila variabel yang indeks i dipindah ke ruas kiri dan yang mengandung indeks sejenis dikumpulkan untuk mempermudah perhitungan, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&U_{j-1,i}\left(\frac{j^2}{2}\Delta\tau-\frac{j}{4}\alpha\Delta\tau\right)+U_{j,i}\left(1-j^2\Delta\tau-\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right)\\
&+U_{j+1,i}\left(\frac{j^2}{2}\Delta\tau+\frac{j}{4}\alpha\Delta\tau\right)=U_{j-1,i+1}\left(\frac{j^2}{2}\Delta\tau-\frac{j}{4}\alpha\Delta\tau\right)\\
&+U_{j,i+1}\left(-1-j^2\Delta\tau-\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right)+U_{j+1,i+1}\\
&+\left(\frac{j^2}{2}\Delta\tau\frac{j}{4}\alpha\Delta\tau\right) \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Misalkan:

$$a_j = \Delta\tau\frac{j^2}{2}-\Delta\tau\alpha\frac{j}{4} \qquad (4.24)$$

$$b_j = -1-\Delta\tau j^2-\frac{\alpha\Delta\tau}{2} \qquad (4.25)$$

$$c_j = \Delta\tau\frac{j^2}{2}+\Delta\tau\alpha\frac{j}{4} \qquad (4.26)$$

$$d_j = -\Delta\tau\frac{j^2}{2}+\Delta\tau\alpha\frac{j}{4} \qquad (4.27)$$

$$e_j = -1+\Delta\tau j^2+\frac{\alpha\Delta\tau}{2} \qquad (4.28)$$

$$f_j = -\Delta\tau\frac{j^2}{2}-\Delta\tau\alpha\frac{j}{4} \qquad (4.29)$$

dengan menggunakan pemisalan pada persamaan (4.24)-(4.29), maka persamaan (4.23) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned}
a_jU_{j-1,i}+b_jU_{j,i}+c_jU_{j+1,i} &= d_jU_{j-1,i+1}+e_jU_{j,i+1}\\
&\quad +f_jU_{j+1,i+1} \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

dimana $i = 0, 1, 2, ..., M - 1$ dan $j = 1, 2, 3, ..., N$. Variabel i merupakan titik grid yang membagi τ dengan interval [0,M] sebanyak M+1 vektor dan j merupakan titik grid yang membagi X dengan interval [0,N] sebanyak N+1 vektor. Maka persamaan (4.30) dapat ditulis menjadi matriks tridiagonal sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{N-1} & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,i} \\ U_{2,i} \\ U_{3,i} \\ \vdots \\ U_{N-2,i} \\ U_{N-1,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 U_{0,i+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{N-1} U_{N,i+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & e_2 & f2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_3 & e_3 & f_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_4 & e_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & d_{N-1} & e_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,i+1} \\ U_{2,i+1} \\ U_{3,i+1} \\ \vdots \\ U_{N-2,i+1} \\ U_{N-1,i+1} \end{bmatrix}$$

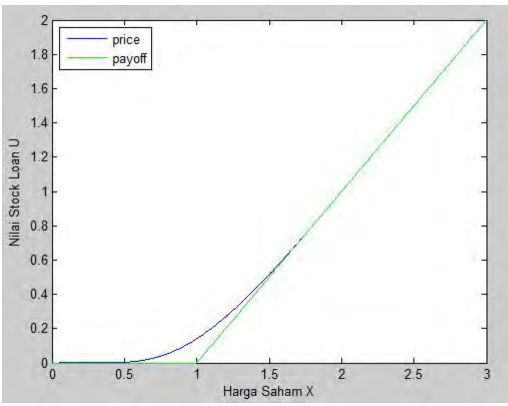
4.5 Hasil Perhitungan Numerik *Stock Loan* dengan Metode Beda Hingga Crank-Nicolson

Berikut ini adalah hasil nilai *stock loan* yang diperoleh dari persamaan Black-Scholes dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman menggunakan metode beda hingga Crank-Nicolson. Parameter yang digunakan adalah $r = 0.06$, $\sigma = 0.4$, $\gamma = 0.1$, $\delta = 0.03$, dan $X_{max} = 3$. Nilai *stock loan* ditunjukkan pada tabel (4.1).

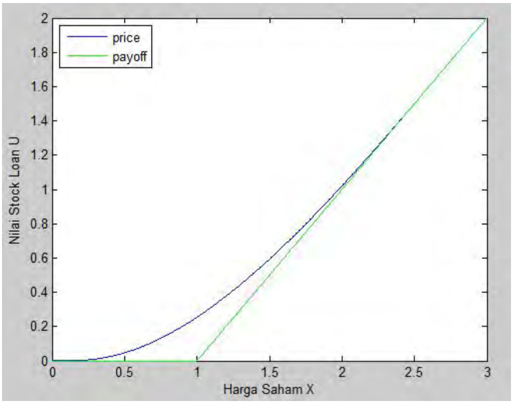
Tabel 4.1: Hasil Perhitungan Nilai *Stock loan*

Year (T)	Harga Saham (X)	Nilai Stock Loan	*Year* (T)	Harga Saham (X)	Nilai Stock Loan
1	1	0.141558685	5	1	0.255300873
	2	1.001		2	1.020965807
	3	2		3	2
2	1	0.189730904	10	1	0.303132896
	2	1.00351048		2	1.040071915
	3	2		3	2
3	1	0.21829813	15	1	0.33598474
	2	1.009309999		2	1.062050645
	3	2		3	2
4	1	0.239226321	20	1	0.358024654
	2	1.015436397		2	1.078512576
	3	2		3	2

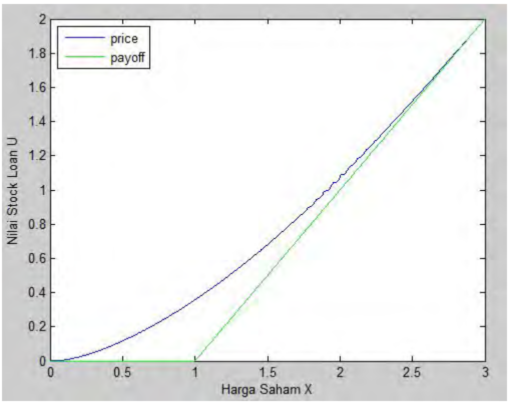
Dari Tabel (4.1) dapat disimpulkan bahwa nilai *stock loan* mengalami kenaikan seiring dengan kenaikan harga saham dan semakin lamanya waktu kontrak. Nilai-nilai *stock loan* pada Tabel (4.1) dapat ditunjukkan dalam bentuk grafik seperti pada gambar (4.3), (4.4) dan (4.5).



Gambar 4.3: Grafik Nilai *Stock Loan* saat T=1



Gambar 4.4: Grafik Nilai *Stock Loan* saat T=5



Gambar 4.5: Grafik Nilai *Stock Loan* saat T=20

Berdasarkan gambar (4.3), (4.4), dan (4.5) dapat disimpulkan bahwa nilai *stock loan* mengalami kenaikan seiring dengan kenaikan harga saham. Nilai *payoff*=nilai *stock* *loan* adalah waktu yang optimal bagi investor untuk melunasi pinjamannya atau yang biasa disebut dengan *optimal exit price*, apabila investor melunasi pinjamannya sebelum atau sesudah *optimal exit price* maka keuntungan yang didapatkan tidak optimal.

4.6 Hasil Perbandingan Metode Crank-Nicolson dan Metode Pohon Binomial

Nilai *stock loan* yang didapat pada Tabel (4.1) selanjutnya akan digunakan untuk menentukan nilai *optimal exit price.* Penelitian mengenai *optimal exit price* dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman didapat pada referensi[3]. Hasil perhitungan dengan metode Crank-Nicolson menggunakan parameter-parameter yang sama pada referensi[3], berikut adalah tabel perbandingan *optimal exit price* antara metode Pohon Binomial dan metode Crank-Nicolson:

Tabel 4.2: *Optimal Exit Price* Metode Crank-Nicolson dan Metode Pohon Binomial

T(year)	Optimal exit price(X_f)							
	Crank-Nicolson						Interpolasi Lagrange	Binomial
	N=100	N=500	N=1000	N=2500	N=5000	N=7000	N=10000	N=10000
1	1	0.98	0.96	0.938	0.918	0.91857	1.3356	1.3-1.4
3	1.75	1.711	1.7	1.676	1.604	1.55143	1.8636	1.8-1.9
5	2.4	2.33	2.28	2.176	2.004	1.89	2.3958	2.3-2.4

Dari Tabel (4.2) menunjukkan bahwa hasil perhitungan nilai *optimal exit price* menggunakan metode Crank-Nicolson mengalami kenaikan disetiap pertambahan waktu (T). Perhitungan pada Tabel (4.2) juga menunjukkan bahwa pada grid N=10000 nilai *optimal exit price* menggunakan metode

Crank-Nicolson semakin mendekati nilai *optimal exit price* menggunakan metode Pohon Binomial.

LAMPIRAN A
Listing Program Penentuan Nilai *Stock Loan* Menggunakan Metode Crank-Nicolson

```
%Perhitungan Nilai Stock Loan Menggunakan Metode Crank Nicolson%
% Restart
%clf;
clear;
clc;
tic;
%Konstanta
Xmax = 3 ;
%Interest rate
r = 0.06;
%Volatilitas
sigma = 0.4;
%Expiry date
T = 5;
Tmin = 0;
t = ((T-Tmin)*sigma^2)/2;
%Bunga pinjaman
gamma = 0.1;
delta = 0;
% Parameter overrelaxation
omega=1.5;
% Toleransi
tol=0.001;
% Pinjaman
q = 0.7;
```

```
% Banyaknya grid arah X
N = 200;
% Banyaknya grid arah tau
M = N;

% Range of time tau
t_ min = 0;
t_ max = t;
% Range of X
X_ min = 0;
X_ max = Xmax;

% Step
% Arah tau
dt = (t_ max - t_ min) / M;
% Arah X
dX = (X_ max - X_ min) /N;

% Penentuan grid
% Arah tau
t = t_ min : dt : t_ max;
% Arah X
X = X_ min : dX : X_ max;

vetj = 0:N;
veti = 0:M;

% Kondisi batas
C = zeros(N+1,M+1)';
C(:,1) = max(X - 1,0);
payoff = C(:,1);
pastval = payoff(2:N,1)';
```

```
C(end,:) = 0;
boundval = C(end,:);

% Deskripsi koefisien alfa
alfa=2*(r-gamma)/sigma^2;

% Koefisien matriks
a = -dt/4*(2*vetj.^2+(alfa)*vetj);
b = -1 +((vetj.^2) * dt) + (alfa * dt / 2);
c = - (vetj.^2) * dt / (2) + ((alfa) * vetj * dt) / (4);
d = dt/4*(2*vetj.^2+(alfa)*vetj);
e = -1 -(vetj.^2 * dt)-(alfa * dt / 2);
f = (vetj.^2 * dt) / (2) - ((alfa) * vetj *dt) / (4);

% Sistem matriks
M1 = diag(c(3:N),-1) + diag(b(2:N)) + diag(a(2:N-1),1);
M2 = diag(f(3:N),-1) + diag(e(2:N)) + diag(d(2:N-1),1);

%Successive overrelaxation
%Menentukan nilai stock loan
aux = zeros(N-1,1);
for j=1:1:M
    aux(1) = a(2)*(boundval(1,j)+boundval(1,j+1));
    aux(end) = 2*a(M)*(payoff(end));
    rhs = M1*pastval'+aux;
    oldval = pastval;
    error = REALMAX;
    while tol < error
        newval(1) = max(payoff(2),...
        oldval(1)+(omega/b(2))*(...
        rhs(1)-(b(2)*oldval(1)+ c(2)*oldval(2))));
    for k=2:N-2
    newval(k) = max(payoff(k+1),...
```

```
            oldval(k)+ (omega/e(k+1))*(...
            rhs(k)-(a(k+1)*newval(k-1))-...
            (b(k+1)*oldval(k)+c(k+1)*oldval(k+1))));
        end
        newval(N-1) = max(payoff(N),...
            oldval(N-1)+ (omega/b(N))*(...
            rhs(N-1)-(a(N)*newval(N-2))-...
            (b(N)*oldval(N-1))));
        error = norm(newval-oldval);
        oldval = newval;
    end
        pastval=newval;
end
newval = [boundval(1) newval payoff(end)];
jdown = floor(X/dX);
jup = ceil(X/dX);
if jdown == jup
      price = newval(1,jdown+1);
else
      price = newval(1,jdown+1)+...
            (X-jdown*dX)*(newval(1,jup+1)-
            newval(1,jup+1))'/dX;
end
figure(1)
plot(X,newval,'b',X,payoff,'g');
xlabel('Dimensionless Stock Price X');
ylabel('Dimensionless Stock Loan Value U');
legend('price','payoff','Location','NorthWest');
toc;
```

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Diperoleh nilai *stock loan* dengan dividen yang diinvestasikan kembali sebelum pembayaran pinjaman dengan menggunakan pendekatan numerik Crank-Nicolson pada Tabel (4.1) dan didapat bahwa nilai *stock loan* mengalami kenaikan seiring dengan kenaikan harga saham dan semakin lamanya waktu kontrak.

2. Dari hasil perhitungan pada Tabel (4.1) menunjukkan bahwa nilai *stock loan* mengalami kenaikan pada $X = 1$ dan $X = 2$ ketika T bertambah, sedangkan saat $Xmax$ yang dalam penelitian ini $Xmax = 3$ bernilai sama yaitu $U = 2$ atau nilai dari *payoff*. Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil perhitungan pada Tabel (4.1) menunjukkan semakin tinggi harga saham (X), dan bertambahnya waktu (T) maka nilai *stock loan* juga semakin tinggi.

3. Berdasarkan hasil perhitungan *optimal exit price* dengan menggunkan metode Crank-Nicolson pada Tabel (4.2) menunjukkan bahwa hasil perhitungan nilai *optimal exit price* menggunakan metode Crank-Nicolson mengalami kenaikan disetiap pertambahan waktu (T) dan pada grid N=10000 semakin mendekati nilai *optimal exit price* yang didapat dengan menggunakan metode Pohon Binomial.

5.2 Saran

Adapun saran dari Tugas Akhir ini adalah untuk penelitian selanjutya dapat digunakan metode ADI (*Alternating Direction Implicit*) untuk menentukan nilai *stock loan.*

DAFTAR PUSTAKA

[1] Suselo, D., (2015). **Dunia Manajemen**. *http://dedisuselopress.blogspot.co.id/2015/11/gambaran-umum-investasi.html*. Diakses pada 02 Februari 2016.

[2] Lu, X., Putri, E.R.M., (2015). **Semi-Analytic Valuation of Stock Loan with Finite Maturity**. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 27 206-215.

[3] Dai, M., Xu Z.Q., (2010). **Optimal Redeeming Strategy Of Stock Loans With Finite Maturity**. Departement of Mathematics, National University of Singapore. Mathematical Institute, Uneversity of Oxford.

[4] Liyonita, S.I., (2015). **Aplikasi Metode Crank-Nicolson untuk Menentukan Harga *European call option* pada Model Heston**. Tugas Akhir. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[5] Dura, G., Mosneagu A.M., (2010). **Numerical Approximation of Black-Scholes Equation**.

[6] Weitian, L., Xi, H., (2010). **Solving Black-Scholes PDE by Crank-Nicolson and Hopscotch methods**. Mlardalen University, Sweden.

[7] Grasselli MR, Gomez C., (2010). **Stock loans in incomplete markets**. Appl Math Finance 119.

[8] Wilmott, P., (1995). **The Mathematics Of Financial Derivatives**. Press Syndicate of the University of Cambridge, England.

[9] Bapepam. (2003). **Perdagangan Option di Pasar Modal Indonesia**. *http://www.bapepam.go.id/pasar_modal/publikasi_pm/kajian_pm/option.pdf*. Diakses pada 02 Februari 2016.

[10] Tjiptono, D., Fakhruddin H.M., (2001). **Pasar Modal di Indonesia**.

[11] Willmot, P., (2007). **Introduces Quantitative Finance**. 2nd Edition. John Wiley & Son, Ltd, Chichester.

[12] Recktenwald, G. W., (2011). **Finite-Difference Approximations to the Heat Equation**. Tesis. Portland State University.

LAMPIRAN B
Biodata Penulis

Penulis bernama Nur Ilmayasinta, biasa dipanggil Maya. Penulis dilahirkan di Gresik, 03 Desember 1994. Penulis merupakan putri dari pasangan Iskandar dan Aminah Ulfah. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari RAM 202 (1999-2000), MI Assa'adah Sukowati (2000-2006), MTs Ma'arif NU Assa'adah II Sampurnan Bungah (2006-2009), dan MA Ma'arif NU Assa'adah Sampurnan Bungah (2009-2012). Kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya pada tahun 2012 dengan NRP 1212 100 703. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selama kuliah, penulis memiliki pengalaman berorganisasi di KM ITS sebagai staf Dept. DALAM NEGERI HIMATIKA ITS (2013-2014), staf TKG BEM FMIPA ITS (2013-2014), staf Dept. DALAM NEGERI CSS MoRA ITS (2013-2015), dan Bendahara II OLIMPIADE MATEMATIKA ITS (2013-2014).

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: *ilmayasinta@gmail.com*