



**TUGAS AKHIR – SM141501**

**PENGEMBANGAN GRAFIK-P MENGGUNAKAN EKSPANSI  
CORNISH-FISHER**

**ANISYKUR ROFIQOH  
1212100006**

**Dosen Pembimbing :  
Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes**

**JURUSAN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2016**

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



**FINAL PROJECT– SM141501**

***AN IMPROVED P-CHART USING CORNISH-FISHER  
EXPANSION***

**ANISYKUR ROFIQOH  
1212100006**

**Supervisor :  
Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes**

**Department of Mathematic  
Faculty of Mathematics and Sciences  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2016**

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

**LEMBAR PENGESAHAN  
PENGEMBANGAN GRAFIK-P MENGGUNAKAN  
EKSPANSI CORNISH-FISHER**

***AN IMPROVED P-CHART USING CORNISH-FISHER  
EXPANSION***

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :  
**ANISYKUR ROFIQOH**  
NRP.1212 100 606

Menyetujui,  
Dosen Pembimbing,

  
**Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes**  
NIP. 19650220 198903 2 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
EMIPA ITS

  
**Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT**  
NIP. 19700831 199403 1 003  
Surabaya, Juli 2016

## PENGEMBANGAN GRAFIK-P MENGGUNAKAN EKSPANSI CORNISH-FISHER

Nama : Anisykur Rofiqoh  
NRP : 1212100006  
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS  
Pembimbing : Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes

### **Abstrak**

Upaya untuk menjaga dan meningkatkan kualitas dari produk yang dihasilkan dapat dilakukan dengan pengendalian kualitas statistik. Ketika proses produksi berlangsung, terdapat suatu keadaan dimana tingkat cacat produk sangat rendah, biasa disebut *high quality processes*. Grafik-p adalah grafik untuk mengendalikan kualitas tingkat proporsi produk yang cacat, biasanya perusahaan-perusahaan industri lebih memilih menggunakan grafik-p yang berdasarkan batas 3 sigma. Tetapi, grafik-p berdasarkan 3 sigma memiliki kendala masalah dalam tingkat keakurasian pada proses dan garis batas pengendali ketika tingkat proporsi cacat produk sangat kecil. Pada tugas akhir ini, dibahas mengenai pengembangan grafik-p dengan menggunakan koreksi dari ekspansi Cornish-Fisher sehingga menghasilkan batas pengendali grafik-p baru yang memiliki peluang *false alarm* yang kecil. Grafik-p dengan peluang *false alarm* terkecil adalah yang memiliki tingkat akurasi yang tertinggi. Contoh penerapan persamaan batas pengendali grafik-p yang baru diilustrasikan pada data cacat produk rem tangan kendaraan di mana dengan menggunakan persamaan batas pengendali grafik-p berdasarkan 3 sigma, nilai peluang *false alarm* adalah 0,035746. Nilai peluang *false alarm* dengan persamaan batas pengendali grafik-p berdasarkan satu dan dua koreksi ekspansi Cornish-Fisher adalah 0,000202 dan 0,003178.

**Kata kunci:** Pengendalian Kualitas, Grafik-p, Koreksi Kuantil Cornish-Fisher, Peluang *False Alarm*.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## AN IMPROVED P-CHART USING CORNISH-FISHER EXPANSION

Name : Anisykur Rofiqoh  
NRP : 1212100006  
Department : Matematika FMIPA-ITS  
Supervisor : Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes

### Abstract

*Efforts to maintain and improve the quality of the resulting product can be done by statistical quality control. When the production process runs, there are situations where rate of defect products is very low, usually called by high quality processes. P-chart is a chart for control quality of the true rate of non-conforming items, many manufacturing industries prefer to use p-chart using 3 sigma limit. However, p-chart using 3 sigma limit suffer a serious inaccuracy in the process and in control limits specification when the true rate of nonconforming items is small. In this final project, an improved p-chart use correction from Cornish-Fisher will be discussed. The result of project is new p-chart with modification of control limit using Cornish-Fisher Expansion method that has small false alarm probability. P-chart with small false alarm probability is a chart that has the highest rate of accuracy. Example of the application for modification p-chart is illustrated in data of defect products of hand brake cable of certain vehicles where with to use p-chart using 3 sigma limit, the value of false alarm probability is 0,035746. The value of false alarm probability with to use p-chart using one and two term correction Cornish-Fisher expansion are 0,000202 and 0,003178.*

**Keywords:** *Quality Control, P-chart, Cornish-Fisher Quantile Correction, False Alarm Probability.*

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR ISI

	Hal
HALAMAN JUDUL .....	i
LEMBAR PENGESAHAN .....	v
ABSTRAK .....	vii
ABSTRACT .....	ix
KATA PENGANTAR .....	xi
DAFTAR ISI .....	xiii
DAFTAR GAMBAR .....	xv
DAFTAR LAMPIRAN .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah .....	2
1.4 Tujuan .....	3
1.5 Manfaat .....	3
1.6 Sistematika Penulisan .....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Variabel Acak Diskrit .....	5
2.2 Distribusi Bernoulli .....	5
2.3 Distribusi Binomial .....	6
2.4 Distribusi Normal .....	6
2.5 Distribusi Normal Standart .....	8
2.6 Momen .....	8
2.7 Fungsi Pembangkit Momen .....	9
2.8 Pengendalian Kualitas Statistik .....	10
2.9 Grafik Pengendali Sifat/Atribut (Grafik-p) .....	10
2.10 Peluang Resiko <i>False Alarm</i> atas Reaksi Sinyal pada Grafik p .....	12
2.11 <i>False Alarm</i> .....	14
2.12 Ekspansi Cornish-Fisher .....	14

BAB III	METODOLOGI PENELITIAN	
	3.1 Jenis dan Sumber Penelitian.....	17
	3.2 Teknik Analisis Data.....	17
	3.3 Penarikan Kesimpulan .....	18
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	
	4.1 Mean dan Varian Distribusi Binomial .....	21
	4.2 Momen Distribusi Binomial .....	23
	4.3 <i>Cumulant</i> Distribusi Binomial .....	28
	4.4 Batas Pengendali Grafik-p Berdasarkan 3 Sigma ....	29
	4.5 Kekurangan Grafik-p Berdasarkan Batas 3 Sigma ..	31
	4.6 Modifikasi Batas Grafik-p dengan Koreksi Ekspansi Cornish-Fisher.....	32
	4.7 Contoh Penerapan Batas Grafik-p Berdasarkan Koreksi Ekspansi Cornish-Fisher dengan Data .....	41
BAB V	PENUTUP	
	5.1 Kesimpulan .....	47
	5.2 Saran .....	48
	DAFTAR PUSTAKA.....	49
	LAMPIRAN .....	51
	BIODATA PENULIS.....	59

## DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 2.1 Kurva Distribusi Normal .....	7
Gambar 2.2 Nilai Persebaran pada Kurva Normal .....	7
Gambar 2.3 Contoh Grafik-p Batas 3 Sigma.....	12
Gambar 2.4 Grafik Pengendali dengan Peluang Salah Jenis I....	13
Gambar 2.5 Grafik Pengendali dengan Peluang Salah Jenis II ..	13
Gambar 3.1 Metodologi Penelitian.....	18
Gambar 4.1 Grafik-p dengan Batas 3-Sigma.....	45
Gambar 4.2 Modifikasi Grafik-p .....	45

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
Lampiran 1 Hasil Perhitungan Peluang <i>False Alarm</i> pada Grafik-p yang Berdasarkan Batas 3 Sigma ketika Nilai p Kecil .....	51
Lampiran 2 Data Produk Cacat Rem Tangan pada Kendaraan ....	52

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

# BAB I PENDAHULUAN

Bab ini membahas latar belakang permasalahan yang kemudian disusun dalam suatu rumusan masalah. Hal-hal mengenai batasan masalah, tujuan dan manfaat dari tugas akhir juga dijabarkan dalam bab ini.

## 1.1 Latar Belakang

Perusahaan selalu berusaha menjaga kepuasan pelanggan dengan cara menyediakan produk-produk dengan kualitas yang baik. Hal tersebut bertujuan agar perusahaan dapat memenangkan persaingan di pasar yang semakin ketat. Salah satu cara untuk meningkatkan kualitas produk adalah dengan melakukan perbaikan produk secara terus-menerus. Beberapa perusahaan menggunakan teknik pengendalian kualitas statistik dimana teknik ini dapat membantu perusahaan dalam mengetahui kelayakan kualitas produk berdasarkan batas-batas kontrol yang telah ditentukan.

*Statistical Process Control* (SPC) bertujuan untuk meminimalkan produk yang cacat. SPC memiliki alat yang berguna untuk sistem pengamatan permanen pada produk, alat tersebut adalah grafik pengendali. Grafik pengendali Shewhart adalah grafik pengendali SPC yang banyak digunakan dalam perusahaan industri karena cara kerjanya yang sederhana. Terdapat dua macam grafik pengendali Shewhart menurut jenis karakteristik kualitasnya yaitu grafik pengendali variabel dan grafik pengendali atribut. Ketika karakteristik kualitas dapat diukur secara numerik, maka hal tersebut disebut variabel. Sebaliknya, jika karakteristik kualitas tidak dapat dinyatakan dengan numerik tetapi hanya dapat dinyatakan dengan cacat atau tidak cacat maka hal tersebut disebut atribut[1].

Grafik-p adalah salah satu grafik pengendali atribut yang digunakan untuk mengendalikan produk cacat dengan asumsi distribusi binomial dari hasil produksi yang berdasarkan pendekatan normal. Grafik-p memiliki tiga garis batas grafik yaitu garis batas atas (*Upper Control Limit*), garis tengah (*Central Line*), dan garis batas bawah (*Lower Control Limit*). Pada proses

produksi, terdapat suatu keadaan dimana tingkat cacat produk tersebut sangat rendah, dan ketika hal tersebut terjadi maka grafik-p yang berdasarkan pendekatan normal memiliki kemiringan (*skewness*) yang menyebabkan asimetri. Karena asimetri, setiap sampel yang memiliki hanya satu produk cacat akan menyebabkan peluang *false-alarm* menjadi sangat tinggi sehingga dapat menyebabkan tingkat akurasi yang rendah pada garis batas grafik[2].

Perbaikan garis batas kontrol grafik-p sangat dibutuhkan untuk meningkatkan akurasi. Salah satu metode yang baik dalam memperbaiki kemiringan pada distribusi adalah dengan menerapkan ekspansi Cornish-Fisher, dimana kuantil dalam metode tersebut berguna untuk memperoleh pendekatan normal yang lebih baik.

Melihat latar belakang yang telah disebutkan, pada tugas akhir ini dilakukan kajian tentang ekspansi Cornish-Fisher pada grafik-p sehingga menghasilkan modifikasi grafik-p yang memiliki batas kontrol grafik yang baru.

### **1.2 Rumusan Masalah**

Rumusan masalah yang dibahas dalam tugas akhir ini adalah:

1. Bagaimana cara menerapkan ekspansi Cornish-Fisher dengan satu koreksi untuk mendapatkan garis batas grafik-p yang baru?
2. Bagaimana cara menerapkan ekspansi Cornish-Fisher dengan dua koreksi untuk mendapatkan garis batas grafik-p yang baru?

### **1.3 Batasan Masalah**

Batasan masalah yang digunakan pada pengerjaan tugas akhir ini adalah:

1. Grafik pengendalian kualitas atribut yang akan dibahas adalah grafik-p.
2. *Software* yang digunakan adalah *software* Minitab.

#### **1.4 Tujuan**

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan yang telah dicapai dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk menerapkan ekspansi Cornish-Fisher dengan satu dan dua koreksi pada grafik-p.

#### **1.5 Manfaat**

Manfaat yang diperoleh dalam pengerjaan tugas akhir ini adalah mendapatkan suatu grafik-p baru dengan koreksi yang sederhana pada batas kontrol grafik yang bisa mendeteksi walaupun nilai  $p$  sangat kecil dan ukuran sampel tidak besar.

#### **1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir**

Tugas akhir ini disusun berdasarkan sistematika penulisan sebagai berikut:

##### **BAB I PENDAHULUAN**

Pada bab ini berisi latar belakang dari penelitian penulis, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat.

##### **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini berisi tentang teori dasar yang digunakan dalam pengembangan grafik-p menggunakan ekspansi Cornish-Fisher yaitu berupa pengertian pengendalian kualitas statistik, penjelasan grafik-p menurut 3-sigma, ekspansi Cornish-Fisher, dan peluang *false alarm*.

##### **BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

Pada bab ini berisi penjelasan mengenai tahapan analisis pengembangan grafik-p menggunakan ekspansi Cornish-Fisher.

##### **BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Pada bab ini dijelaskan secara keseluruhan analisis tentang pengembangan grafik-p dengan menggunakan ekspansi Cornish-Fisher beserta contoh kasus yang bersesuaian dengan pembahasan. Penyajian grafik-p baru diselesaikan dengan program Minitab.

## BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini berisi kesimpulan akhir dan saran dari pengerjaan Tugas Akhir.

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai dasar teori yang digunakan dalam penyusunan tugas akhir. Dasar teori terdiri dari yaitu Statistik deskriptif, pengertian peluang *false alarm*, dan ekspansi Cornish-Fisher.

### 2.1 Variabel Acak Diskrit

Variabel acak adalah suatu fungsi yang nilainya berupa bilangan nyata yang ditentukan oleh setiap unsur dalam ruang sampel. Variabel acak biasanya disimbolkan dengan huruf-huruf kapital misalkan  $X, Y, Z$ , dan sebagainya. Variabel acak yang hanya dapat mengambil nilai sebanyak terhingga adalah variabel acak diskrit, sedangkan variabel acak yang dapat mengambil tak hingga banyak nilai numerik adalah variabel acak kontinu. Misalkan  $X$  adalah variabel acak diskrit, maka fungsi kepadatan probabilitas (*probability density function*) dapat didefinisikan sebagai  $f(x) = P(X = x)$ . Dengan kata lain, fungsi  $f(x)$  adalah fungsi distribusi probabilitas dari  $X$  untuk variabel acak diskrit. PDF dari variabel acak diskrit  $X$  harus memenuhi sifat-sifat berikut:

$0 \leq f(x) \leq 1$ , PDF bernilai nol sampai dengan satu,

$\sum_x f(x) = 1$ , jumlahan dari semua fungsi kepadatan probabilitas (PDF) dari variabel acak diskrit  $X$  pada ruang sampel adalah satu[3].

Mean dan varian dari variabel acak diskrit  $X$  masing-masing adalah[4]:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \quad (2.1)$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i) \quad (2.2)$$

### 2.2 Distribusi Bernoulli

Distribusi Bernoulli adalah distribusi probabilitas yang dihasilkan dari dua kejadian dalam suatu percobaan, yaitu sukses ( $x = 1$ ) dan gagal ( $x = 0$ ) dengan probabilitas sukses  $p$  dan probabilitas

gagal  $q = 1 - p$ . PDF dari variabel acak  $X$  yang berdistribusi Binomial  $X \sim B(1, p)$  adalah,

$$f(x) = P(X = x) = p^x q^{(1-x)} = p^x (1 - p)^{(1-x)} ; \text{ dengan } x = 0 \text{ dan } 1.$$

Pada percobaan Bernoulli, dilakukan pengulangan percobaan acak yaitu misalnya  $I$  sebanyak  $r$  kali, dapat ditulis  $I_1, I_2, \dots, I_r$  yang mana merupakan suatu urutan dari percobaan Bernoulli jika[3]:

1. Pengulangan pada percobaan bersifat independen.
2. Probabilitas sukses bernilai sama untuk setiap pengulangan.

### 2.3 Distribusi Binomial

Distribusi Binomial merupakan distribusi probabilitas dari banyaknya kejadian sukses pada  $n$  percobaan Bernoulli. PDF dari variabel acak  $X$  Binomial dirumuskan sebagai berikut[3]:

$$X \sim B(n, p)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= P(X = x) \\ &= C_x^n p^x q^{(n-x)} \\ &= \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1 - p)^{(n-x)} ; \text{ dengan } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ &= \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)} \end{aligned}$$

Sedangkan fungsi kepadatan kumulatif (CDF) dari variabel acak  $X$  Binomial adalah[3]:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \sum_{k=0}^x f(k) \\ &= \sum_{k=0}^x \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1 - p)^{(n-k)} ; \text{ dengan } k = 0, 1, 2, \dots, x \\ &= \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{(n-k)} \end{aligned}$$

Nilai mean dan varian dari variabel acak diskrit  $X$  berdistribusi Binomial masing-masing adalah[3]:

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = npq = np(1 - p)$$

### 2.4 Distribusi Normal

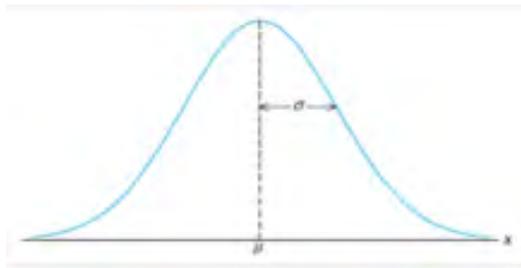
Distribusi Normal memiliki karakteristik dari fungsi kepadatannya yang berbentuk kurva simetris menyerupai lonceng, sehingga kurva Normal ini disebut sebagai kurva berbentuk

lonceng. Fungsi kepadatan peluang (PDF) dari variabel acak  $X$  Normal dirumuskan sebagai[3]

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

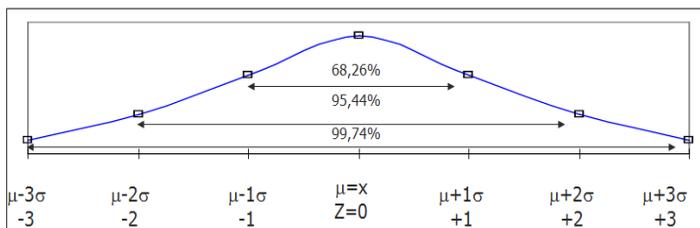
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ dengan } -\infty < \mu < \infty ; \sigma > 0 ; \\ -\infty < x < \infty ; \pi \approx \frac{22}{7} ; e \approx 2,718281828 \dots \quad (2.3)$$

Variabel acak  $X$  berdistribusi Normal dengan parameter mean  $\mu$  dan varian  $\sigma^2$  yang mana PDF dari distribusi diilustrasikan pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 Kurva Distribusi Normal

Berdasarkan penyebaran data yang berdistribusi Normal[5], penyebaran 68% data pengamatan berada pada interval  $\mu - \sigma$  sampai  $\mu + \sigma$ ; penyebaran 95% data pengamatan berada pada interval  $\mu - 2\sigma$  sampai  $\mu + 2\sigma$ ; dan penyebaran 99,7% data pengamatan berada pada interval  $\mu - 3\sigma$  sampai  $\mu + 3\sigma$ . Ilustrasi nilai penyebaran pada kurva normal dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Nilai Persebaran pada Kurva Normal

## 2.5 Distribusi Normal Standart

Misalkan diberikan variabel acak  $X$  berdistribusi Normal dengan parameter mean  $\mu$  dan varian  $\sigma^2$ , maka variabel acak  $Z$  yang berdistribusi Normal Standart dengan parameter  $\mu = 0$  dan  $\sigma^2 = 1$ , menghasilkan fungsi kepadatan peluang (PDF) yaitu [4]:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \text{ dengan } -\infty < z < \infty$$

Sedangkan, fungsi kepadatan kumulatif (CDF) dari variabel acak  $Z$  Normal Standart adalah [4]:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^z f_Z(k) dk \\ &= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) dk \end{aligned}$$

MGF dari distribusi normal standart adalah  $M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ . Jika distribusi lain ingin didekati dengan distribusi normal maka digunakan persamaan transformasi  $Z$  dengan rumus  $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ .

## 2.6 Momen

Berikut ini dijelaskan perumusan secara umum dalam perhitungan nilai ekspektasi dari peubah acak  $X$  [5].

### Definisi 2.1

Jika  $X$  adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka momen ke- $k$  di sekitar 0 yang dinotasikan  $\mu'_k$  didefinisikan sebagai

$$\mu'_k = E(X^k); \text{ dengan } k = 1, 2, 3, \dots \quad \blacksquare$$

Momen di sekitar 0 dari peubah acak diskrit secara umum ditentukan berdasarkan definisi (2.2).

### Definisi 2.2

Jika  $X$  adalah peubah acak diskrit dan  $f(x)$  adalah nilai fungsi peluang dari  $X$  di  $x$ , maka momen ke- $k$  di sekitar 0 yang dinotasikan  $\mu'_k$  didefinisikan sebagai

$$\mu'_k = \sum_{x=1}^k x^k f(x) \quad \blacksquare$$

Rumus umum untuk menghitung nilai ekspektasi dari pangkat  $k$  untuk penyimpangan sebuah peubah acak terhadap rataannya yang biasa disebut momen sekitar rataannya dapat dilihat pada definisi (2.3).

### Definisi 2.3

Jika  $X$  adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka momen sekitar rata-rata ke- $k$  yang dinotasikan dengan  $\mu_k$  didefinisikan sebagai

$$\mu_k = E(X - \mu)^k \text{ dengan } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \blacksquare$$

Definisi momen sekitar rata-rata diskrit dapat dilihat pada definisi (2.4).

### Definisi 2.4

Jika  $X$  adalah peubah acak diskrit dan  $f(x)$  adalah nilai fungsi peluang dari  $X$  di  $x$ , maka momen ke- $k$  yang dinotasikan  $\mu_k$  didefinisikan sebagai

$$\mu_k = \sum_{x=1}^k (x - \mu)^k f(x) \quad \blacksquare$$

Dengan menggunakan fungsi distribusi binomial, dapat diturunkan hubungan antar momen dan momen sekitar rata-rata dari sebuah peubah acak. Berdasarkan definisi (2.4), maka momen ke- $k$  menjadi

$$\mu_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \mu_i' (-\mu)^{(k-i)} \quad (2.4)$$

## 2.7 Fungsi Pembangkit Momen (MGF)

Momen bisa juga diperoleh melalui besaran lainnya, yang dinamakan fungsi pembangkit momen (MGF). Oleh karena itu MGF merupakan sebuah fungsi yang dapat menghasilkan momen-momen. Penentuan distribusi baru dan peubah acak yang baru merupakan kegunaan lain dari MGF[5].

### Definisi 2.5

Jika  $X$  adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka MGF dari  $X$  yang dinotasikan dengan  $M_x(t)$  didefinisikan

$$M_x(t) = E(e^{tX}) \quad \blacksquare$$

MGF dari peubah acak diskrit secara umum ditentukan berdasarkan definisi (2.6).

### Definisi 2.6

Jika  $X$  adalah peubah acak diskrit dan  $f(x)$  adalah nilai fungsi peluang dari  $X$  di  $x$ , maka MGF dari  $X$  didefinisikan sebagai

$$M_x(t) = \sum_x e^{tX} f(x) \quad \blacksquare$$

### Definisi 2.7

Jika  $X$  adalah peubah acak dan  $M_x(t)$  adalah fungsi pembangkit momennya, maka penurunan momen berdasarkan MGF dapat didefinisikan sebagai

$$M_x^r(t)_{t=0} = \mu_r' ; \text{ dengan } r = 1, 2, 3, \dots \quad \blacksquare$$

## 2.8 Pengendalian Kualitas Statistik

Pengendalian Kualitas Statistik merupakan Ilmu yang mempelajari tentang teknik/metode pengendalian kualitas berdasarkan prinsip/konsep statistik. Pengendalian kualitas statistik adalah alat yang sangat berguna dalam membuat produk sesuai dengan spesifikasi sejak dari awal proses hingga akhir proses. Dalam banyak proses produksi, akan selalu ada gangguan yang dapat timbul secara tidak terduga[2].

Ide menemukan pengendalian kualitas statistik adalah untuk mengetahui apa yang sedang terjadi dan bisa digunakan untuk memprediksi apa yang terjadi sehingga tindakan yang dipandang perlu bisa segera dilakukan melalui penggambaran *control chart*.

Tujuan pengendalian kualitas statistik antara lain memperoleh jaminan kualitas (*quality Assurance*) yaitu dapat dilakukan dengan rencana sampel penerimaan, menjaga konsistensi kualitas dengan *control chart*. Dengan penerapan pengendalian kualitas statistik, perusahaan akan mendapat manfaat atau keuntungan antara lain untuk mempertinggi kualitas atau mengurangi biaya, menjaga kualitas lebih *uniform*, penggunaan alat produksi lebih efisien, mengurangi *rework* dan pembuangan, inspeksi yang lebih baik, memperbaiki hubungan produsen-konsumen, spesifikasi lebih baik[6].

## 2.9 Grafik Pengendali Sifat/Atribut (Grafik-p)

Grafik Pengendali Sifat (atribut) membutuhkan data atribut. Ukuran kualitas data atribut adalah karakteristik kualitas suatu produk yang tidak dapat dinyatakan secara numerik, tetapi dapat digolongkan ke dalam kategori sesuai atau tidak sesuai dengan spesifikasi dinyatakan dengan cacat atau tidak cacat[7].

Grafik-p atau *p-chart* (pengendali proporsi kesalahan) merupakan salah satu grafik pengendali atribut yang digunakan untuk mengendalikan bagian produk cacat dalam sampel

berukuran  $n$  yang berdasarkan distribusi binomial dengan parameter  $p$ . Grafik-p digunakan untuk mengetahui apakah cacat produk yang dihasilkan masih dalam batas yang disyaratkan atau tidak. Dapat dikatakan juga sebagai perbandingan antara banyaknya cacat dengan semua pengamatan, yaitu setiap produk yang diklasifikasikan sebagai “diterima” atau “ditolak” (yang diperhatikan banyaknya produk cacat)[7].

Grafik-p memiliki rata-rata  $np$  dan standart deviasi adalah  $np(1 - p)$ . Batas grafik-p memiliki rumus seperti berikut:

$$UCL = p + 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$CL = p$$

$$LCL = p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

dengan,

UCL : *Upper Control Limit*/Batas Pengendalian Atas

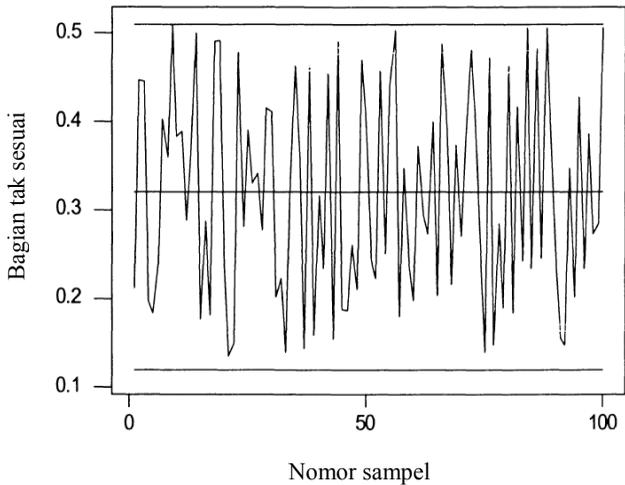
LCL : *Lower Control Limit*/Batas Pengendalian Bawah

CL : *Center Line*/Garis Tengah

Gambar 2.3 merupakan contoh grafik-p berdasarkan 3 sigma.

Grafik-p adalah grafik pengendali berdasarkan pendekatan normal dari distribusi binomial. Ketika batas pengendali 3 sigma digunakan, peluang jatuhnya plot keluar dari garis batas pengendali ketika proses tersebut terkendali (peluang *false alarm*) adalah bernilai 0,0027. Nilai peluang ini telah dianggap nilai peluang yang baik secara ekonomi khususnya di bidang industri[2].

*High-quality processes* biasanya berkaitan dengan jumlah produk cacat yang rendah. Untuk proses tersebut, ukuran akurasi dapat diambil untuk mengukur tingkat produk cacat yang berlebihan, dengan kata lain pendekatan yang dilakukan membutuhkan penggunaan peralatan pengukuran yang jauh lebih canggih atau juga memerlukan jumlah waktu dan tenaga yang mahal[1].



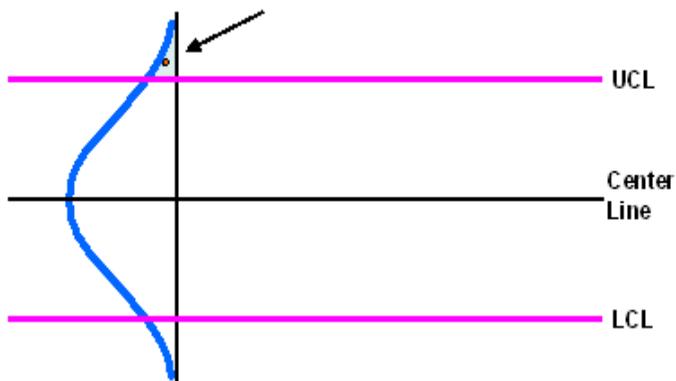
Gambar 2.3 Contoh Grafik-p  
Berdasarkan 3 sigma

## 2.10 Peluang Resiko *False Alarm* atas Reaksi Sinyal pada Grafik-p

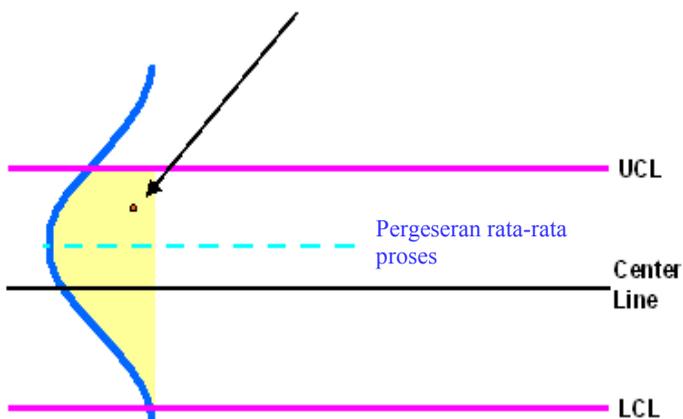
Evaluasi dari tampilan grafik-p adalah berdasarkan kesalahan jenis I. Kesalahan jenis I pada grafik-p adalah peluang sebuah proses sebenarnya terkendali, tetapi sinyal tak terkendali muncul, artinya peluang  $\bar{p}$  tidak jatuh antara batas UCL dan LCL grafik-p, ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 2.4. Peluang kesalahan jenis I dilambangkan dengan  $\alpha$ , dimana nilai ketetapan  $\alpha$  untuk standart Amerika adalah 0,0027[1].

Kesalahan jenis II adalah peluang suatu proses sebenarnya tidak dalam keadaan terkendali, tetapi grafik pengendali tidak memberikan sinyalnya, ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 2.5. Besarnya peluang harus dihitung untuk setiap plot.

Jika menggunakan batas 3 sigma, peluang bahwa sinyal seperti ini tidak benar adalah 0,0027



Gambar 2.4 Grafik Pengendali dengan peluang kesalahan jenis I



Gambar 2.5 Grafik Pengendali dengan peluang kesalahan jenis II

### 2.11 False Alarm

Ketika batas pengendali dari grafik dengan 3-sigma yang digunakan, peluang terjadinya *false alarm* adalah sekitar 0,27%. Keadaan dengan proses yang berada di luar batas kendali dengan peluang tertentu, menampilkan hasil yang lebih buruk dari yang diharapkan. Dalam kasus seperti itu, harus diambil tindakan untuk membuat koreksi pada proses yang diluar kendali.

Jumlah produk cacat pada sampel sering dimodelkan dengan menggunakan distribusi binomial atau distribusi Poisson. Distribusi ini didekati dengan distribusi normal ketika grafik pengendali 3-sigma digunakan. Tetapi, batas pengendali grafik 3-sigma memiliki masalah terutama ketika ukuran sampel kecil.

Pendekatan normal biasanya kurang valid dan batas pengendali harus digunakan untuk mengurangi kemungkinan *false alarm*[2].

### 2.12 Ekspansi Cornish-Fisher

Ekspansi Cornish-Fisher adalah sifat asimtotik yang digunakan untuk pendekatan normal kuantil dari beberapa distribusi, diberikan kuantil dari distribusi normal standart dan *cumulant* distribusi. Ketika sampel *cumulant* digunakan pada teori *cumulant*, maka pendekatan menjadi estimator dan oleh karena itu penting untuk memiliki estimator yang konstan dari *cumulant*. Persamaan (2.5) adalah versi ekspansi yang terpotong.  $z_\alpha$  adalah kuantil  $\alpha$  dari distribusi standart normal,  $\kappa_3$  dan  $\kappa_4$  adalah *cumulant* ketiga dan keempat dari distribusi,  $\sigma$  adalah standart deviasi,  $\mu$  adalah rata-rata, dan  $x_\alpha$  adalah pendekatan dari kuantil  $\alpha$ . Persamaan (2.5) dapat juga ditulis dalam bentuk momen distribusi yaitu[8],

$$x_\alpha = \mu + \frac{1}{2}(\sigma^2 + 1)z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\kappa_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\kappa_4 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\kappa_5^2 \quad (2.5)$$

Versi lain dari bentuk ekspansi Cornish-Fisher dapat dilihat pada persamaan (2.6) yang memiliki  $\gamma_1$  sebagai kemiringan (*skewness*) tengah standartisasi dan  $\gamma_2$  adalah kemencengan

(*kuortosis*) tengah standartisasi. Untuk menghasilkan persamaan (2.5), distribusinya adalah standart normal sehingga ekspansi terdapat pada  $x'_\alpha$  dimana  $x'_\alpha = \frac{(x_\alpha - \mu)}{\sigma}$  dengan rata-rata bernilai 0 dan nilai variansi adalah 1. Akibatnya, persamaan (2.5) pada bentuk keduanya hanya bernilai  $z_\alpha$  sehingga bentuk  $x_\alpha$  menjadi

$$Y^\alpha = \mu + \sigma x'_\alpha \text{ dimana}$$

$$x'_\alpha = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\gamma_1 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\gamma_2 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\gamma_1^2 \quad (2.6)$$

$$x_\alpha = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\kappa_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\kappa_4 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\kappa_3^2$$

Momen dan *cumulant* dibutuhkan untuk memenuhi persamaan (2.6) dimana  $\mu_i$  adalah momen tengah ke-i dan  $\kappa_i$  adalah *cumulant* ke-i, *cumulant*  $\kappa_3$  dan  $\kappa_4$  dapat disebut juga *skewness* dan *kurtosis*. Karena  $\mu_2 = 1$  untuk distribusi standart normal, *moment-cumulant* menunjukkan bahwa  $\mu_4 = \kappa_4 - 3$ , yaitu *kurtosis* yang berlebih.

Prinsip dasar dari ekspansi Cornish-Fisher adalah ketika momen dari distribusi terdefinisi, maka kuantil dari distribusi tersebut dapat dianggap sebagai pendekatan kuantil dari distribusi sebenarnya. Pada kasus ekspansi Cornish-Fisher, kuantil dari distribusi dinyatakan sebagai sifat asimtotik yaitu fungsi kuantil yang sesuai dari distribusi standart normal. Bentuk dari ekspansi adalah fungsi polinomial dari kuantil dari distribusi standart normal, dan koefisien adalah fungsi dari momen atau *cumulant* yang ditunjukkan pada persamaan (2.5).

Ekspansi Cornish-Fisher digunakan untuk mengembangkan pendekatan normal. Meskipun ekspansi Cornish-Fisher dibenarkan sebagai  $n$  mendekati tak hingga, tetapi pada kenyataannya ekspansi Cornish-Fisher digunakan dengan  $n$  terbatas. Hal tersebut membuat ekspansi Cornish-Fisher menjadi koreksi berbasis momen untuk variabel acak non-normal. Karena itu, koreksi yang dibuat dari ekspansi Cornish-Fisher untuk memperbaiki non-normalitas tidak akan berbeda jauh.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB III**

### **METODOLOGI PENELITIAN**

Bab ini menjelaskan tentang langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir.

#### **3.1 Jenis dan Sumber Penelitian**

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian studi literatur. Literatur yang digunakan berupa buku, jurnal, hasil penelitian sebelumnya, atau berbagai artikel yang berkaitan dengan tugas akhir ini. Literatur utama yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah jurnal yang ditulis oleh Silvia Joekes dan Emanuel Pimentel Barbosa[1].

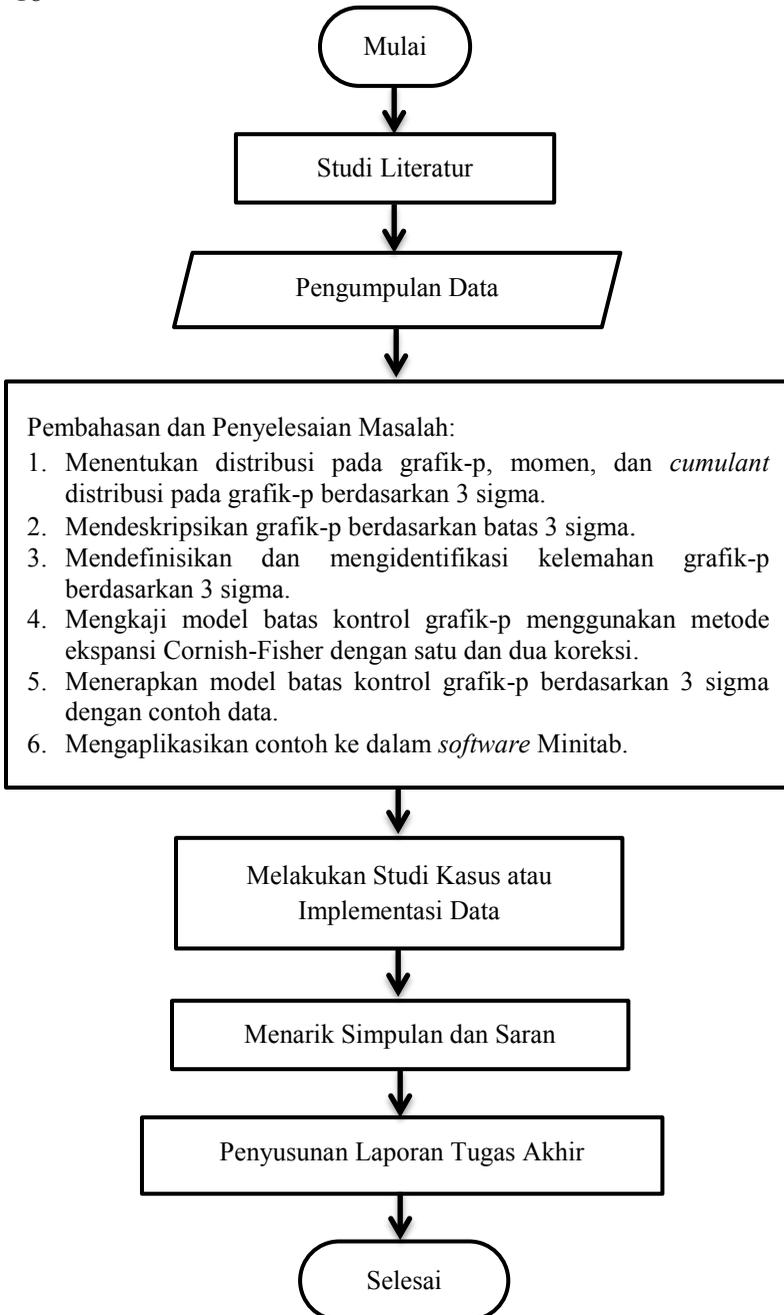
Data yang digunakan untuk contoh penerapan tugas akhir ini adalah data produksi rem tangan kendaraan yang cacat. Data tersebut diperoleh dari data jurnal yang ditulis oleh Silvia Joekes dan Emanuel Pimentel Barbosa[1].

#### **3.2 Teknik Analisis Data**

Analisis dalam tugas akhir ini dilakukan secara kuantitatif yaitu dengan menggunakan teknik pendekatan statistik, agar kesimpulan dapat diperoleh secara tepat. Teknik statistik yang digunakan adalah menerapkan model ekspansi Cornish-Fisher sehingga menghasilkan rumus batas pengendali grafik-p yang baru. Tugas akhir ini menggunakan *software* aplikasi Minitab. Langkah-langkah dalam analisis data ditunjukkan pada Gambar 3.1.

Langkah-langkah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan dan menganalisis data-data yang dibutuhkan. Kegiatan ini dilakukan untuk memahami model dari permasalahan yang ada dan sebagai contoh penerapan perhitungan pada rumus yang dihasilkan. Langkah-langkah dalam pengerjaan tugas akhir ditunjukkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Metodologi Penelitian

## 2. Pembahasan dan penyelesaian masalah.

Berikut adalah tahapan untuk membahas dan mencari penyelesaian mengenai topik yang dibahas dalam tugas akhir ini:

- a. Menentukan distribusi pada grafik-p, momen dan *cumulant* distribusi pada grafik-p berdasarkan 3 sigma.
- b. Mendeskripsikan grafik-p berdasarkan batas 3 sigma.
- c. Mendefinisikan dan mengidentifikasi kelemahan grafik-p berdasarkan 3 sigma.
- d. Mengkaji model batas kontrol grafik-p menggunakan metode ekspansi Cornish-Fisher dengan satu koreksi.
- e. Mengkaji model batas kontrol grafik-p menggunakan metode ekspansi Cornish-Fisher dengan dua koreksi.
- f. Menerapkan model batas kontrol grafik-p berdasarkan 3 sigma dengan contoh data.
- g. Mengaplikasikan contoh ke dalam *software* Minitab.

### 3.3 Penarikan Kesimpulan

Tahap terakhir dari tugas akhir ini adalah penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan pada tahap sebelumnya.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini diuraikan beberapa masalah yang berkaitan dengan distribusi binomial, grafik-p, modifikasi ekspansi Cornis-Fisher untuk batas grafik-p, dan penerapan batas grafik-p baru pada data.

### 4.1 Mean dan Variansi Distribusi Binomial

Distribusi peluang adalah model matematika yang menghubungkan nilai variabel dengan probabilitas terjadinya nilai di dalam populasi. Distribusi diskrit adalah salah satu macam dari distribusi peluang. Apabila variabel acak yang digunakan adalah variabel acak diskrit, maka distribusi peluangnya dinamakan distribusi peluang diskrit. Misalnya, banyaknya cacat dalam suatu produksi adalah termasuk distribusi diskrit. Terdapat beberapa distribusi peluang diskrit yang kerap kali timbul dalam pengendalian kualitas statistik, salah satunya adalah distribusi binomial [7].

Pandang suatu proses yang terdiri dari sederetan  $n$  percobaan yang independen, dengan hasil setiap percobaan dapat berbentuk “sukses” atau “gagal”. Percobaan semacam ini dinamakan percobaan Bernoulli. Apabila percobaan sukses ( $x = 1$ ) memiliki probabilitas sukses  $p$  dan apabila percobaan gagal ( $x = 0$ ) dengan probabilitas gagal  $q = 1 - p$ , maka fungsi peluang  $X$  adalah

$$f(X) = \begin{cases} p; & X = 1 \\ 1 - p; & X = 0 \end{cases}$$

Pada percobaan Bernoulli, dilakukan pengulangan percobaan acak yaitu misalnya percobaan  $I$  yang dilakukan sebanyak  $n$  kali, sehingga dapat ditulis  $I_1, I_2, \dots, I_n$  yang mana merupakan suatu urutan dari percobaan Bernoulli, jika pengulangan pada percobaan bersifat independen dan peluang sukses bernilai sama untuk setiap pengulangan. Oleh karena itu, percobaan yang dilakukan sebanyak  $n$  kali dengan nilai peluang sukses yang sama dapat ditulis dengan  $X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ . Nilai tengah/mean dari setiap  $I_r$  adalah [4],

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{I_r} &= E(I_r) \\
 &= \sum_{r=0}^1 I_r f(I_r) \\
 E(I_r) &= 0 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) \\
 &= 0(1-p) + 1(p) \\
 &= p
 \end{aligned}$$

Nilai mean untuk distribusi binomial adalah

$$\begin{aligned}
 \mu_X &= \sum_{r=1}^n E(I_r) \\
 &= E(I_1) + E(I_2) + \dots + E(I_n) \\
 &= \underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ suku}} \\
 &= np
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Variansi untuk setiap  $I_r$  adalah

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= E[(X - \mu)^2] \\
 \sigma_{I_r}^2 &= E[(X - \mu_{I_r})^2] \\
 &= \{\sum_{r=0}^1 E(I_r^2) f(I_r)\} - \mu_{I_r}^2 \\
 &= (0)^2 q + (1)^2 p - p^2 \\
 &= p(1-p) \\
 &= pq
 \end{aligned}$$

Variansi distribusi binomial adalah

$$\begin{aligned}
 \sigma_X^2 &= \sum_{r=1}^n \sigma_{I_r}^2 \\
 &= \sigma_{I_1}^2 + \sigma_{I_2}^2 + \dots + \sigma_{I_n}^2 \\
 &= \underbrace{pq + pq + \dots + pq}_{n \text{ suku}} \\
 &= npq
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sehingga nilai rata-rata dan variansi dari distribusi binomial adalah  $\mu = E(X) = np$  dan  $\sigma^2 = npq$

Distribusi binomial dengan parameter  $n$  dan  $p$  didefinisikan sebagai distribusi dari variabel acak  $X$  dengan,

$X \sim B(n, p)$

$$B(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Nilai  $p$  dapat disetimasi ketika  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah bagian dari nilai pengamatan dari distribusi binomial.

## 4.2 Momen Distribusi Binomial

Bentuk-bentuk sederhana dari momen dan ukuran-ukuran yang didapat dari momen diuraikan sebagai berikut,

### a. Momen di Sekitar Titik Asal

Berdasarkan definisi (2.1), jika  $X$  adalah peubah acak, maka momen ke- $k$  di sekitar 0 didefinisikan sebagai

$$\mu'_k = E(X^k)$$

Berdasarkan rumus di atas, maka nilai momen di sekitar 0 untuk beberapa nilai  $k$  adalah:

$$\mu'_1 = E(X^1)$$

$$\mu'_2 = E(X^2)$$

$$\mu'_3 = E(X^3)$$

$$\mu'_4 = E(X^4)$$

Momen bisa juga diperoleh melalui besaran lainnya, yang dinamakan MGF. Momen di sekitar 0 bisa diperoleh dengan menggunakan penurunan momen berdasarkan MGF. Jika  $X$  adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka MGF dari  $X$  yang dinotasikan dengan  $M_x(t)$  didefinisikan pada definisi (2.5). Diberikan  $f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots, n$ , sehingga

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \sum_{i=0}^n e^{tX_i} f(X_i) \\ &= \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)} \\ &= \\ &= e^{t \cdot 0} \binom{n}{0} p^0 q^{(n-0)} + e^{t \cdot 1} \binom{n}{1} p^1 q^{(n-1)} + \\ &= e^{t \cdot 2} \binom{n}{2} p^2 q^{(n-2)} + \dots + e^{t \cdot n} \binom{n}{n} p^n q^{(n-n)} \\ &= q^n + e^{tn} p^n \\ &= (q + e^t p)^n \\ &= (pe^t + q)^n \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dengan MGF seperti persamaan (4.3) tersebut, maka momen disekitar titik asal dengan menghitung turunan dari MGF. Momen di sekitar titik asal memiliki  $t = 0$ , dapat ditulis  $\mu'_m = M'_x(t)_{t=0}$

dengan  $m = 1, 2, 3, \dots$  Berikut adalah beberapa momen ke- $m$  di sekitar titik asal:

$$\begin{aligned}\mu'_m &= E[X^m] \\ &= M_x^m(t)_{t=0} \\ &= \frac{d^m}{dt^m} M_x(t)\end{aligned}\tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= E[X] \\ &= M_x^1(t)_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (pe^t + q)^n \\ &= n(pe^t + q)^{(n-1)}pe^t \\ &= np(p + q)^{(n-1)} \\ \mu'_1 &= np\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu'_2 &= E[X^2] \\ &= M_x^2(t)_{t=0} \\ &= \frac{d^2}{dt^2} (pe^t + q)^n \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} (pe^t + q)^n \right) \\ &= \frac{d}{dt} (n(pe^t + q)^{(n-1)}pe^t) \\ &= np \frac{d}{dt} ((pe^t + q)^{(n-1)}e^t) \\ &= np [e^t(n-1)(pe^t + q)^{(n-2)}pe^t + (pe^t + q)^{(n-1)}e^t] \\ &= np [(n-1)(p+q)^{(n-2)}p + (p+q)^{(n-1)}] \\ &= np [(n-1)p + 1] \\ &= np(np - p + 1) \\ \mu'_2 &= n^2p^2 + np(1-p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu'_3 &= E[X^3] \\ &= M_x^3(t)_{t=0} \\ &= \frac{d^3}{dt^3} (pe^t + q)^n \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{d}{dt} (pe^t + q)^n \right) \\ &= \frac{d^2}{dt^2} (n(pe^t + q)^{(n-1)}pe^t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= np \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} ((pe^t + q)^{(n-1)} e^t) \right) \\
&= np \frac{d}{dt} (e^t (n-1)(pe^t + q)^{(n-2)} pe^t + (pe^t + q)^{(n-1)} e^t) \\
&= np [(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{(n-3)} e^t \cdot (pe^t)^2 + \\
&\quad 2pe^t \cdot e^t (n-1)(pe^t + q)^{(n-2)}] + [(n-1)(pe^t + \\
&\quad q)^{(n-2)} e^t \cdot pe^t] + [(pe^t + q)^{(n-1)} e^t] \\
&= npe^t [(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{(n-3)} (pe^t)^2 + \\
&\quad 2pe^t (n-1)(pe^t + q)^{(n-2)} + (n-1)(pe^t + \\
&\quad q)^{(n-2)} pe^t + (pe^t + q)^{(n-1)}] \\
&= np [(n-1)(n-2)(p+q)^{(n-3)} p^2 + 2p(n-1)(p+ \\
&\quad q)^{(n-2)} + (n-1)(p+q)^{(n-2)} p + (p+q)^{(n-1)}] \\
&= np [(n-1)(n-2)p^2 + 2p(n-1) + (n-1)p + 1] \\
&= np - 3np^2 + 2np^3 + 3n^2p^2 - 3n^2p^3 + n^3p^3 \\
\mu'_3 &= np(1-p)(1-2p) + 3n^2p^2(1-p) + n^3p^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu'_4 &= E[X^4] \\
&= M_x^4(t)_{t=0} \\
&= \frac{d^4}{dt^4} (pe^t + q)^n \\
&= \frac{d^3}{dt^3} \left( \frac{d}{dt} (pe^t + q)^n \right) \\
&= \frac{d^3}{dt^3} (n(pe^t + q)^{(n-1)} pe^t) \\
&= np \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{d}{dt} ((pe^t + q)^{(n-1)} e^t) \right) \\
&= np \frac{d^2}{dt^2} (e^t (n-1)(pe^t + q)^{(n-2)} pe^t + (pe^t + q)^{(n-1)} e^t) \\
&= np \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} (e^t (n-1)(pe^t + q)^{(n-2)} pe^t + (pe^t + \\
&\quad q)^{(n-1)} e^t) \right) \\
&= np \frac{d}{dt} [(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{(n-3)} e^t \cdot (pe^t)^2 + \\
&\quad 2pe^t \cdot e^t (n-1)(pe^t + q)^{(n-2)}] + [(n-1)(pe^t + \\
&\quad q)^{(n-2)} e^t \cdot pe^t] + [(pe^t + q)^{(n-1)} e^t]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= np[(n-1)(n-2)(n-3)(pe^t + q)^{(n-4)} pe^t \cdot (pe^t)^3 + \\
&\quad 3(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{(n-3)}(pe^t)^2 e^t] + \\
&\quad [2(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{(n-3)}e^t \cdot (pe^t)^2 + 4(n-1)(pe^t + q)^{(n-2)}p(e^t)^2] + [(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{(n-3)}e^t \cdot (pe^t)^2 + 2(n-1)(pe^t + q)^{(n-2)}p(e^t)^2] + [(n-1)(pe^t + q)^{(n-2)}p(e^t)^2 + (pe^t + q)^{(n-1)}e^t] \\
&= npe^t[(n-1)(n-2)(n-3)(pe^t + q)^{(n-4)}(pe^t)^3 + 3(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{(n-3)}(pe^t)^2 + 2(n-1)(n-2)(pe^t + q)^{(n-3)}(pe^t)^2 + 4(n-1)(pe^t + q)^{(n-2)}pe^t + (n-1)(n-2)(pe^t + q)^{(n-3)}(pe^t)^2 + 2(n-1)(pe^t + q)^{(n-2)}pe^t + (n-1)(pe^t + q)^{(n-2)}pe^t + (pe^t + q)^{(n-1)}] \\
&= np[(n-1)(n-2)(n-3)(p+q)^{(n-4)}(p)^3 + 3(n-1)(n-2)(p+q)^{(n-3)}(p)^2] + [2(n-1)(n-2)(p+q)^{(n-3)}(p)^2 + 4(n-1)(p+q)^{(n-2)}p] + [(n-1)(n-2)(p+q)^{(n-3)}(p)^2 + 2(n-1)(p+q)^{(n-2)}p] + [(n-1)(p+q)^{(n-2)}p + (p+q)^{(n-1)}] \\
&= np[(n^3 - 3n^2 - 3n^2 + 9n + 2n - 6)(p)^3 + (3n^2 - 9n + 6)(p)^2 + 2(n^2 - 3n + 2)(p)^2 + 4p(n-1) + (n^2 - 3n + 2)(p)^2 + p(2n-2) + (n-1)p + 1] \\
&= np^4(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) + np^3(3n^2 - 9n + 6) + np^3(2n^2 - 6n + 4) + np^2(4n + 4) + np^3(n^2 - 3n + 2) + np^2(2n - 2) + np^2(n - 1) + np \\
&= (np - 7np^2 + 12np^3 - 6np^4) + (6n^2p^2 - 18n^2p^3 + 6n^3p^3 + 12n^2p^4 - 6n^3p^4) + (n^2p^2 - n^2p^4 + n^4p^4) \\
\mu'_4 &= np(1-p)[1 - 6p + 6p^2] + 6n^2p^2(1-p)[1 - 2p + np] + n^2p^2(1 - p^2 + n^2p^2)
\end{aligned}$$

### b. Momen di Sekitar Rata-rata (Momen Tengah)

Dengan menggunakan fungsi distribusi binomial, dapat diturunkan antara momen dan momen di sekitar rata-rata dari sebuah peubah acak. Berdasarkan momen sekitar rata-rata diskrit dari definisi (2.4), maka:

$$\mu_h = E[X - \mu]^h$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[ \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} X^r (-\mu)^{(h-r)} \right] \\
&= \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} (-\mu)^{(h-r)} \mu'_r \tag{4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \sum_{r=0}^1 \binom{1}{r} (-\mu)^{(1-r)} \mu'_r \\
&= \binom{1}{0} (-\mu)^{(1-0)} \mu'_0 + \binom{1}{1} (-\mu)^{(1-1)} \mu'_1 \\
&= -\mu + \mu'_1 \\
&= np - np \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \sum_{r=0}^2 \binom{2}{r} (-\mu)^{(2-r)} \mu'_r \\
&= \binom{2}{0} (-\mu)^{(2-0)} \mu'_0 + \binom{2}{1} (-\mu)^{(2-1)} \mu'_1 + \binom{2}{2} (-\mu)^{(2-2)} \mu'_2 \\
&= \mu^2 - 2\mu'_1\mu + \mu'_2 \\
&= \mu'_2 - \mu^2 \\
&= n^2p^2 + np(1-p) - n^2p^2 \\
&= np(1-p) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= \sum_{r=0}^3 \binom{3}{r} (-\mu)^{(3-r)} \mu'_r \\
&= \binom{3}{0} (-\mu)^{(3-0)} \mu'_0 + \binom{3}{1} (-\mu)^{(3-1)} \mu'_1 + \binom{3}{2} (-\mu)^{(3-2)} \mu'_2 + \\
&\quad \binom{3}{3} (-\mu)^{(3-3)} \mu'_3 \\
&= -\mu^3 + 3\mu'_1\mu^2 - 3\mu'_2\mu + \mu'_3 \\
&= \mu'_3 - 3\mu'_2\mu + 2\mu^3 \\
&= [np(1-p)(1-2p) + 3n^2p^2(1-p) + n^3p^3] - \\
&\quad [3(np)n^2p^2 + np(1-p)] + [3(np)^2(np)] - [(np)^3] \\
&= np - 3np^2 + 2np^3 \\
&= np(1-p)(1-2p)
\end{aligned}$$

$$\mu_4 = \sum_{r=0}^4 \binom{4}{r} (-\mu)^{(4-r)} \mu'_r$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{4}{0} (-\mu)^{(4-0)} \mu'_0 + \binom{4}{1} (-\mu)^{(4-1)} \mu'_1 + \binom{4}{2} (-\mu)^{(4-2)} \mu'_2 + \\
&\quad \binom{4}{3} (-\mu)^{(4-3)} \mu'_3 + \binom{4}{4} (-\mu)^{(4-4)} \mu'_4 \\
&= \mu^4 - 4\mu'_1\mu^3 + 6\mu'_2\mu^2 - 4\mu'_3\mu + \mu'_4 \\
&= [np(1-p)(1-6p+6p^2) + 6n^2p^2(1-p)(1-2p + \\
&\quad np) + n^2p^2(1-p^2+n^2p^2)] - [4(np)p(1-p)(1- \\
&\quad 2p) + 3n^2p^2(1-p) + n^3p^3] + [6(np)^2n^2p^2 + \\
&\quad np(1-p)] - [4(np)^3(np)] + [(np)^4] \\
&= np - 7np^2 + 12np^3 - 6np^4 + 7n^2p^2 - 18n^2p^3 + \\
&\quad 6n^3p^3 + 11n^2p^4 - 6n^3p^4 + n^4p^4 - 4n^2p^2 + 12n^2p^3 - \\
&\quad 8n^2p^4 - 12n^3p^3 + 12n^3p^4 - 4n^4p^4 + 6n^4p^4 - 6n^3p^4 + \\
&\quad 6n^3p^3 - 3n^4p^4 \\
&= np - 7np^2 + 12np^3 - 6np^4 + 3n^2p^2 - 6n^2p^3 + 3n^2p^4 \\
&= np(1-p)[1-6p(1-p)] + 3n^2p^2(1-p)^2
\end{aligned}$$

### 4.3 Cumulant Distribusi Binomial

Persamaan *cumulant* diperoleh dari logaritma MGF pada persamaan (4.4), dengan momen tengah pada persamaan (4.5) yang distandarisasi [1], diperoleh:

$$\kappa_n = \frac{E[X-\mu]^n}{\sigma^n} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{E[X-\mu]^1}{\sigma^1} \\
&= \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_2}} \\
&= \frac{0}{\sqrt{np(1-p)}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_2 &= \frac{E[X-\mu]^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{\mu_2}{\mu_2} \\
&= \frac{np(1-p)}{np(1-p)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_3 &= \frac{E[X-\mu]^3}{\sigma^3} \\
&= \frac{\mu_3}{\sigma^3} \\
&= \frac{\mu_2 \sqrt{\mu_2}}{np(1-p)(1-2p)} \\
&= \frac{np(1-p)\sqrt{np(1-p)}}{(1-2p)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_4 &= \frac{E[X-\mu]^4}{\sigma^4} - 3(\kappa_2)^2 \\
&= \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3(1)^2 \\
&= \frac{np(1-p)(1-6p+6p^2)+3n^2p^2(1-p)(1-p)}{np(1-p)np(1-p)} - 3 \\
&= \frac{(1-6p+6p^2)+3np(1-p)-3np(1-p)}{np(1-p)} \\
&= \frac{(1-6p+6p^2)}{np(1-p)}
\end{aligned}$$

#### 4.4 Batas Pengendali Grafik-p Berdasarkan 3 Sigma

Proporsi cacat suatu produk didefinisikan sebagai perbandingan banyak cacat pada produk dengan besarnya ukuran sampel dalam suatu produksi. Asas-asas statistik yang melandasi grafik pengendali untuk bagian tak sesuai/cacat didasarkan atas distribusi normal. Anggap bahwa proses produksi bekerja dalam keadaan stabil, sehingga peluang proporsi cacat produk adalah  $p$ , dan produk yang diproduksi berurutan adalah independen, maka setiap unit yang diproduksi merupakan realisasi suatu variabel random Bernoulli dengan parameter  $p$ . Apabila sampel random dengan  $n$  unit produk dipilih, dan  $D$  adalah banyak unit produk yang tidak sesuai, maka  $D$  berdistribusi binomial dengan parameter  $n$  dan  $p$ , yaitu

$$P\{D = x\} = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Nilai mean atau rata-rata dari distribusi binomial adalah  $np$  dan variansi  $np(1-p)$  seperti yang telah diuraikan pada persamaan (4.1) dan (4.2).

Proporsi cacat suatu produk didefinisikan sebagai perbandingan banyak produk yang cacat dalam sampel  $D$  dengan

ukuran sampel  $n$ . Misalkan  $X$  adalah jumlah cacat produk dari  $n$  unit produk, maka dengan asumsi terkontrol,  $X$  adalah variabel acak binomial dengan parameter  $n$  dan  $p$ . Jika  $Y = \frac{X}{n}$  adalah fraksi dari subgroup yang cacat, mean dan variansi dari  $Y$  adalah,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E\left[\frac{X}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n}E[X] \\ &= \frac{np}{n} \\ &= p \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2_Y &= Var[Y] \\ &= E[Y^2] - (E[Y])^2 \\ &= E\left[\frac{X^2}{n^2}\right] - \left(E\left[\frac{X}{n}\right]\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2}E[X^2] - p^2 \\ &= \frac{n^2p^2 + np(1-p)}{n^2} - p^2 \\ &= \frac{n^2p^2 + np(1-p) - n^2p^2}{n^2} \\ &= \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Jika  $Y$  suatu statistik yang mengukur suatu karakteristik kualitas, dan jika mean  $Y$  adalah  $\mu_Y$  dan variansinya adalah  $\sigma^2_Y$ , maka model umum batas grafik pengendali berdasarkan 3 sigma adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_Y + Z_\alpha \sigma_Y \\ &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ CL &= \mu_Y = p \\ LCL &= \mu_Y - Z_\alpha \sigma_Y \\ &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Apabila bagian yang tidak sesuai proses  $p$  tidak diketahui, maka  $p$  harus ditaksir dari data observasi. Cara yang biasa adalah memilih  $m$  sampel pendahuluan, masing-masing berukuran  $n$ . Maka jika ada  $D_i$  unit yang tidak bersesuaian dalam sampel  $i$

adalah  $p_i = \frac{D_i}{n}$  dimana  $i = 1, 2, \dots, m$  dan rata-rata bagian yang tidak sesuai sampel-sampel ini adalah  $\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m p_i}{m}$ . Statistik  $\bar{p}$  menaksir bagian yang tidak bersesuaian  $p$  yang tidak diketahui. Garis tengah dan batas grafik pengendali untuk produk cacat atau bagian yang tidak bersesuaian adalah

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ CL &= \bar{p} \\ LCL &= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

#### 4.5 Kekurangan Grafik-p Berdasarkan Batas 3 Sigma

Grafik-p berdasarkan 3 sigma adalah grafik pengendali yang berdasarkan pendekatan normal. Ketika nilai  $p$  kecil dan ukuran sampel tidak terlalu besar, peluang *false alarm* menjadi sangat tinggi. Lampiran 1 dihasilkan melalui rumus[2]:

$$P(\text{False alarm}) = 1 - P(n \times LCL \leq X \leq n \times UCL)$$

dengan asumsi  $X$  berdasarkan distribusi binomial dengan parameter  $n$  dan  $p$ .

Peluang gagal dalam mendeteksi perubahan karakteristik proses akan menjadi tinggi. Grafik-p adalah grafik pengendali atribut yang berdasarkan distribusi binomial, sehingga batas pengendali yang berdasarkan pendekatan normal tidak dapat lagi menggambarkan keadaan sebenarnya dari proses karena distribusi binomial memiliki kemiringan jauh dari normal dengan kata lain grafik-p berdasarkan batas 3 sigma tidak bisa mendeteksi perubahan proses secara akurat/teliti. Hal ini sama dengan ketika peluang *false alarm* sangat tinggi, maka sinyal yang benar menjadi tidak terbaca.

Masalah yang sangat serius dari grafik-p berdasarkan 3 sigma adalah ketika proporsi cacat pada produk memiliki nilai yang sangat kecil, bahkan nilai UCL dapat menjadi lebih kecil dari pada nilai persen dari produk cacat, kecuali jika ukuran sampel memiliki nilai yang sangat besar.

#### 4.6 Modifikasi Batas Grafik-p dengan Koreksi Ekspansi Cornish Fisher

Ketika grafik-p digunakan untuk pengendalian suatu produk, maka hal penting yang harus diperhatikan adalah penggunaan pendekatan pada batas grafik. Karena kemiringan (*skewness*) dari distribusi binomial, maka batas bawah berdasarkan batas 3 sigma tidak bisa digunakan. Dengan kata lain, modifikasi pada batas grafik yang sederhana dapat digunakan untuk memperoleh batas pengendali yang lebih baik untuk grafik-p.

Sistematika pendekatan untuk pengembangan akurasi peluang dari grafik-p terdiri dalam menentukan koreksi dengan ekspansi Cornish-Fisher. Koreksi dengan ekspansi Cornish-Fisher ini tergantung pada ukuran sampel dan nilai dari proses parameter.

Ekspansi Cornish-Fisher adalah persamaan untuk pendekatan kuantil dari variabel acak yang berdasarkan *cumulant* dari distribusi. Pada grafik-p distribusi yang digunakan adalah distribusi binomial. Dengan kata lain, langkah awal untuk memasukkan persamaan Cornish-Fisher pada persamaan batas pengendali grafik-p adalah dengan menentukan momen dan *cumulant* dari distribusi binomial. Penurunan persamaan untuk momen dan *cumulant* dapat dilihat pada persamaan (4.4), (4.5), dan (4.6). Momen dan *cumulant* dari distribusi binomial adalah Momen di sekitar titik asal pada distribusi binomial:

$$\mu'_1 = E[X] = np$$

$$\mu'_2 = E[X^2] = n^2p^2 + np(1-p)$$

$$\mu'_3 = E[X^3] = np(1-p)(1-2p) + 3n^2p^2(1-p) + n^3p^3$$

$$\mu'_4 = E[X^4] = np(1-p)[1-6p+6p^2] + 6n^2p^2(1-p)[1-2p+np] + n^2p^2(1-p^2+n^2p^2)$$

Momen di sekitar rata-rata pada distribusi binomial:

$$\mu_1 = E[X - \mu]^1 = np$$

$$\mu_2 = E[X - \mu]^2 = np(1-p)$$

$$\mu_3 = E[X - \mu]^3 = np(1-p)(1-2p)$$

$$\mu_4 = E[X - \mu]^4 = np(1-p)[1-6p(1-p)] + 3n^2p^2(1-p)^2$$

*Cumulant* distribusi binomial:

$$\kappa_1 = 0$$

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= 1 \\ \kappa_3 &= \frac{(1-2p)}{\sqrt{np(1-p)}} \\ \kappa_4 &= \frac{(1-6p+6p^2)}{np(1-p)}\end{aligned}$$

Menentukan koreksi dengan ekspansi Cornish-Fisher adalah dengan sistematika pendekatan distribusi. Diketahui bahwa grafik-p adalah berdasarkan distribusi binomial dan apabila  $n$  di luar nilai tabel dan nilai  $p$  sangat kecil, maka distribusi binomial dapat didekati oleh distribusi normal. Distribusi binomial dapat didekati dengan distribusi normal dengan menggunakan persamaan MGF distribusi binomial. Bukti bahwa distribusi binomial bisa didekatkan dengan distribusi normal dapat dilihat pada persamaan (4.11).

Diketahui  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \sim B(n, p)$ , PDF distribusi binomial adalah  $X \sim B(n, p)$   $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$ ; dengan  $x = 0, 1, 2, \dots, n$ . Sehingga MGF dari distribusi binomial adalah  $M_{x_i}(t) = (pe^t + q)^n$ . Penurunan persamaan MGF distribusi binomial dapat dilihat pada persamaan (4.3). Jika  $Y = \frac{X}{n}$ , maka MGF dari  $Y$  adalah,

$$\begin{aligned}M_Y(t) &= M_{\frac{X}{n}}(t) \\ &= M_X\left(\frac{t}{n}\right) \\ &= \left(pe^{\frac{t}{n}} + q\right)^n\end{aligned}$$

Rata-rata dari  $Y$  adalah  $E[Y] = p$  dan variansi dari  $Y$  adalah  $\sigma^2_Y = \frac{p(1-p)}{n}$ . Penurunan persamaan rata-rata dan variansi  $Y$  dapat dilihat pada persamaan (4.7) dan (4.8). Dengan menggunakan hampiran normal yaitu  $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ , maka nilai statistik  $Z$  baru jika  $Y = \frac{X}{n}$  adalah,

$$\begin{aligned}Z &= \frac{Y-E(x)}{\sqrt{Var(x)}} \\ &= \frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\end{aligned}$$

Persamaan MGF dari statistik  $Z$  baru jika  $Y = \frac{X}{n}$  adalah,

$$\begin{aligned}
 M_Z(t) &= E[e^{tZ}] \\
 &= E \left\{ \exp \left[ t \left( \frac{\frac{X}{n} - p}{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right) \right] \right\} \\
 &= e^{\frac{-tp}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} \cdot M_X \left( \frac{t}{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right) \\
 &= e^{\frac{-tp}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} \left[ p e^{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \frac{t}{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} + q \right]^n \\
 &= e^{\frac{-tp}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} \left[ p e^{\frac{t}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} + q \right]^n \\
 &= \left[ e^{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \frac{-tp}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} \left( p e^{\frac{t}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} + q \right) \right]^n \\
 &= \left[ p e^{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \frac{tq}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} + q e^{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \frac{-tp}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} \right]^n \\
 &= \left[ p \left( 1 + \frac{tq}{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \frac{t^2 q^2}{2n^2 \frac{p(1-p)}{n}} + \frac{t^3 q^3}{6n^3 \frac{p(1-p)}{n} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \dots \right) \right]^n + \\
 &\quad \left[ q \left( 1 - \frac{tp}{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \frac{t^2 p^2}{2n^2 \frac{p(1-p)}{n}} + \frac{t^3 p^3}{6n^3 \frac{p(1-p)}{n} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \dots \right) \right]^n \\
 &= \left[ p + \frac{ptq}{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \frac{pt^2 q^2}{2n^2 \frac{p(1-p)}{n}} + \frac{pt^3 q^3}{6n^3 \frac{p(1-p)}{n} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \dots \right]^n + \\
 &\quad \left[ q - \frac{tpq}{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \frac{t^2 p^2 q}{2n^2 \frac{p(1-p)}{n}} + \frac{t^3 p^3 q}{6n^3 \frac{p(1-p)}{n} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \dots \right]^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ p + \frac{ptq}{n\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \frac{t^2q}{2n} + \frac{t^3q^2}{6n^2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \dots \right]^n + \left[ q - \right. \\
&\quad \left. \frac{tpq}{n\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \frac{t^2p}{2n} + \frac{t^3p^2}{6n^2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} + \dots \right]^n \\
&= \left[ 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3(q-p)}{6\sqrt{p(1-p)}} + \dots \right]^n \\
\lim_{n \rightarrow \infty} M_z(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3(q-p)}{6\sqrt{p(1-p)}} + \dots \right]^n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{t^2}{2n} \right]^n \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Bentuk persamaan (4.11) merupakan MGF dari distribusi normal standart. Jadi  $Z = \frac{\frac{X-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}$  berdistribusi  $N(0,1)$ . Dengan menggunakan teknik MGF dapat ditunjukkan  $Y$  berdistribusi  $N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ . Sehingga terbukti bahwa dapat dilakukan pendekatan dari distribusi binomial terhadap distribusi normal standart.

#### 4.6.1 Grafik-p dengan Satu Koreksi

Koreksi pertama pada ekspansi asimtotik Cornish-Fisher adalah koreksi untuk kemiringan distribusi pada grafik-p. Jika  $X$  adalah variabel acak distribusi binomial dengan ukuran sampel  $n$  dan parameter  $p$ , maka  $Y = \frac{X}{n}$  adalah proporsi distribusi binomial dengan nilai  $\mu = E[Y] = p$  dan momen tengah dari  $Y$  yaitu  $\mu_2 = Var[Y] = \frac{p(1-p)}{n}$  dapat dilihat pada persamaan (4.7) dan (4.8).  $z_\alpha$  dilambangkan sebagai kuantil ke- $\alpha$  dari distribusi normal standart, sehingga untuk mengaplikasikan pada grafik-p, teorema ekspansi Cornish-Fisher untuk satu koreksi untuk kuantil ke- $\alpha$  dari distribusi  $Y$  adalah[6]

$$x_\alpha(1) = \mu + \frac{1}{2}(\sigma^2 + 1)z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\kappa_3$$

Karena  $\alpha$  berdasarkan distribusi normal standart, maka digunakan transformasi  $Z$  untuk pendekatan normal dengan  $X \sim N(0,1)$  sehingga,

$$x_\alpha(1) = 0 + \frac{1}{2}(1 + 1)z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\kappa_3$$

$$Y_\alpha \cong x_\alpha(1)$$

$$Y_\alpha \cong z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\kappa_3$$

$Y_\alpha$  adalah rumus transformasi  $Z$  yaitu

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (4.12)$$

dengan,

$x$  : satu koreksi untuk kuantil ke- $\alpha$  ( $Y_\alpha(1)$ )

$\mu$  : momen tengah dari  $Y$

$\sigma$  : standart deviasi dari  $Y$

$$\text{Sehingga, } Z = \frac{Y_\alpha(1) - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$UCL_1 \cong Y_\alpha(1)$$

$$LCL_1 \cong Y_\alpha(1)$$

$$\frac{Y_\alpha(1) - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \cong z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\kappa_3$$

$$\frac{Y_\alpha(1) - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \cong z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1) \frac{(1-2p)}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$Y_\alpha(1) - p \cong z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1) \frac{(1-2p)}{\sqrt{np(1-p)}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$Y_\alpha(1) - p \cong z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1) \frac{(1-2p)}{n}$$

$$Y_\alpha(1) - p \cong z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6n}(z_\alpha^2 - 1)(1 - 2p)$$

$$Y_\alpha(1) \cong p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6n}(z_\alpha^2 - 1)(1 - 2p)$$

Karena  $\alpha = 0,0027$  sehingga nilai resiko  $z_{0,0027} = \pm 3$

1. Untuk UCL dengan batas satu koreksi berdasarkan ekspansi Cornish-Fisher disimbolkan  $UCL_1 = Y_{0,0027}(1)$

$$Y_\alpha(1) \cong p \pm z_{0,0027} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6n} (z_{0,0027}^2 - 1)(1 - 2p)$$

$$Y_\alpha(1) \cong p + 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6n} (3^2 - 1)(1 - 2p)$$

$$Y_\alpha(1) \cong p + 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{8}{6n} (1 - 2p)$$

$$Y_\alpha(1) \cong p + 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n} (1 - 2p)$$

$$UCL_1 \cong p + 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n} (1 - 2p)$$

$$UCL_1 = p + 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n} (1 - 2p)$$

2. Untuk LCL dengan batas satu koreksi berdasarkan ekspansi Cornish-Fisher disimbolkan  $LCL_1 = Y_{0,0027}(1)$

$$Y_\alpha(1) \cong p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6n} ((-3)^2 - 1)(1 - 2p)$$

$$Y_\alpha(1) \cong p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{8}{6n} (1 - 2p)$$

$$Y_\alpha(1) \cong p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n} (1 - 2p)$$

$$LCL_1 \cong p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n} (1 - 2p)$$

$$LCL_1 = p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n} (1 - 2p)$$

#### 4.6.2 Grafik-p dengan dua koreksi

Koreksi kedua pada ekspansi asimtotik Cornish-Fisher adalah koreksi untuk kemiringan dan kurtosis distribusi pada grafik-p.  $Y_\alpha(2)$  adalah koreksi ekspansi Cornish-Fisher untuk dua koreksi pada kuantil ke- $\alpha$  dari distribusi  $Y$ .

Karena  $\alpha$  berdasarkan distribusi normal standart, maka digunakan transformasi  $Z$  untuk pendekatan normal dengan  $X \sim N(0,1)$  sehingga[1],

$$x_{\alpha}(2) = \mu + \frac{1}{2}(\sigma^2 + 1)z_{\alpha} + \frac{1}{6}(z_{\alpha}^2 - 1)\kappa_3 + \frac{1}{24}(z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha})\kappa_4 - \frac{1}{36}(2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha})\kappa_3^2$$

$$x_{\alpha}(2) = 0 + \frac{1}{2}(1 + 1)z_{\alpha} + \frac{1}{6}(z_{\alpha}^2 - 1)\kappa_3 + \frac{1}{24}(z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha})\kappa_4 - \frac{1}{36}(2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha})\kappa_3^2$$

$$Y_{\alpha} \cong x_{\alpha}(2)$$

$$Y_{\alpha} \cong z_{\alpha} + \frac{1}{6}(z_{\alpha}^2 - 1)\kappa_3 + \frac{1}{24}(z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha})\kappa_4 - \frac{1}{36}(2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha})\kappa_3^2$$

$Y_{\alpha}$  adalah rumus transformasi  $Z$  yaitu

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (4.12)$$

dengan,

$x$  : dua koreksi untuk kuantil ke- $\alpha$  ( $Y_{\alpha}(2)$ )

$\mu$  : momen tengah dari  $Y$

$\sigma$  : standart deviasi dari  $Y$

$$\text{Sehingga, } Z = \frac{Y_{\alpha}(2) - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$UCL_2 \cong Y_{\alpha}(2)$$

$$LCL_2 \cong Y_{\alpha}(2)$$

$$\frac{Y_{\alpha}(2) - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \cong z_{\alpha} + \frac{1}{6}(z_{\alpha}^2 - 1)\kappa_3 + \frac{1}{24}(z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha})\kappa_4 - \frac{1}{36}(2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha})\kappa_3^2$$

$$Y_{\alpha}(2) - p \cong z_{\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}(z_{\alpha}^2 - 1) \frac{(1-2p)}{\sqrt{np(1-p)}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{24}(z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha}) \frac{(1-6p+6p^2)}{np(1-p)} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} - \frac{1}{36}(2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha}) \left( \frac{(1-2p)}{\sqrt{np(1-p)}} \right)^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$Y_{\alpha}(2) - p \cong z_{\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6}(z_{\alpha}^2 - 1)(1 - 2p) + \frac{1}{24}(z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha}) \frac{(1-6p+6p^2)}{np(1-p)} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} - \frac{1}{36}(2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha}) \frac{(1-2p)^2}{np(1-p)} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$Y_\alpha(2) - p \cong z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6} (z_\alpha^2 - 1)(1 - 2p) + \frac{1}{24} (z_\alpha^3 - 3z_\alpha)(1 - 6p + 6p^2) \frac{\sqrt{p(1-p)}}{p(1-p)} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} - \frac{1}{36} (2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)(1 - 2p)^2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{p(1-p)} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$$

$$Y_\alpha(2) \cong p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{1}{6} (z_\alpha^2 - 1)(1 - 2p) + \frac{1}{24} (z_\alpha^3 - 3z_\alpha)(1 - 6p + 6p^2) \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \frac{1}{n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{36} (2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)(1 - 2p)^2 \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \frac{1}{n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$Y_\alpha(2) \cong Y_\alpha(1) + \frac{1}{24n^2} (z_\alpha^3 - 3z_\alpha) \frac{(1-6p+6p^2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} - \frac{1}{36n^2} (2z_\alpha^3 - 5z_\alpha) \frac{(1-2p)^2}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Karena  $\alpha = 0,0027$  sehingga nilai resiko  $z_{0,0027} = \pm 3$

1. Untuk UCL dengan batas dua koreksi berdasarkan ekspansi Cornish-Fisher disimbolkan  $UCL_2 = Y_{0,0027}(2)$

$$Y_\alpha(2) \cong Y_{0,0027}(1) + \frac{1}{24n^2} (z_{0,0027}^3 - 3z_{0,0027}) \frac{(1-6p+6p^2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} - \frac{1}{36n^2} (2z_{0,0027}^3 - 5z_{0,0027}) \frac{(1-2p)^2}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$Y_\alpha(2) \cong$$

$$p + 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n} (1 - 2p) + \frac{1}{24n^2} (3^3 - 3(3)) \frac{(1-6p+6p^2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} - \frac{1}{36n^2} (2(3)^2 - 5(3)) \frac{(1-2p)^2}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$Y_\alpha(2) \cong UCL_1 + \frac{18}{24n^2} \frac{(1-6p+6p^2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} - \frac{39}{36n^2} \frac{(1-2p)^2}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$Y_\alpha(2) \cong UCL_1 + \frac{3}{4n^2} \frac{(1-6p+6p^2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} - \frac{13}{12n^2} \frac{(1-4p+4p^2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$Y_{\alpha}(2) \cong UCL_1 + \frac{9-54p+54p^2-13+52p-52p^2}{12n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$Y_{\alpha}(2) \cong UCL_1 + \frac{-2+p+p^2}{6n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$Y_{\alpha}(2) \cong UCL_1 - \frac{[p(1-p)+2]}{6n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$UCL_2 \cong UCL_1 - \frac{[p(1-p)+2]}{6n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$UCL_2 = UCL_1 - \frac{[p(1-p)+2]}{6n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

2. Untuk LCL dengan batas dua koreksi berdasarkan ekspansi Cornish-Fisher disimbolkan  $LCL_2 = Y_{0,0027}(2)$

$$Y_{\alpha}(2) \cong$$

$$p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n} (1 - 2p) + \frac{1}{24n^2} (3^3 - 3(3)) \frac{(1-6p+6p^2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} - \frac{1}{36n^2} (2(3)^2 - 5(3)) \frac{(1-2p)^2}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$Y_{\alpha}(2) \cong LCL_1 + \frac{18}{24n^2} \frac{(1-6p+6p^2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} - \frac{39}{36n^2} \frac{(1-2p)^2}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$Y_{\alpha}(2) \cong LCL_1 + \frac{3}{4n^2} \frac{(1-6p+6p^2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} - \frac{13}{12n^2} \frac{(1-4p+4p^2)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$Y_{\alpha}(2) \cong LCL_1 + \frac{9-54p+54p^2-13+52p-52p^2}{12n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$Y_{\alpha}(2) \cong LCL_1 + \frac{-2+p+p^2}{6n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$Y_{\alpha}(2) \cong LCL_1 - \frac{[p(1-p)+2]}{6n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$LCL_2 \cong UCL_1 - \frac{[p(1-p)+2]}{6n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$LCL_2 = LCL_1 - \frac{[p(1-p)+2]}{6n^2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

#### 4.7 Contoh Penerapan Batas Grafik-p Berdasarkan Koreksi Ekspansi Cornish-Fisher dengan Data

Data yang akan dijadikan sebagai contoh penerapan adalah data cacat produk pada produksi rem tangan kendaraan, yang dapat dilihat pada Lampiran 2. Data tersebut merupakan data dari jurnal yang ditulis oleh Silvia Joeekes dan Emanuel Pimentel Barbosa[1].

Misalkan cacat produk rem tangan kendaraan dilambangkan  $X$  dimana  $X$  berdasarkan distribusi binomial. Ukuran sampel pada produk rem tangan dilambangkan  $n$ . Produksi rem tangan dilakukan sebanyak  $m$  kali. Oleh karena itu proporsi cacat dirumuskan  $p_i = \frac{\sum_{i=1}^{150} X_i}{n}$  Diketahui dari data yang diilustrasikan pada Lampiran 1 bahwa

$$\sum_{i=1}^{150} X_i = 45$$

$$n = 20$$

$$m = 150$$

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{p_i}{m} \\ &= \frac{2,25}{150} \\ &= \frac{45}{3000} \\ &= 0,015 \end{aligned}$$

Nilai proporsi pada produk rem tangan kendaran yang cacat adalah 0,015. Sehingga, jika dimasukkan pada rumus batas grafik-p yang berdasarkan 3 sigma, maka

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ &= 0,015 + 3\sqrt{\frac{0,015(1-0,015)}{20}} \\ &= 0,015 + 3(0,027179955) \\ &= 0,015 + 0,081539867 \\ &= 0,096539867 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CL &= \bar{p} \\ &= 0,015 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
LCL &= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\
&= 0,015 - 3\sqrt{\frac{0,015(1-0,015)}{20}} \\
&= 0,015 - 3(0,027179955) \\
&= 0,015 - 0,081539865 \\
&= -0,066539865
\end{aligned}$$

Dengan nilai  $UCL = 0,096539867$  dan  $LCL = -0,066539865$ , maka nilai peluang *false alarm* adalah

$$\begin{aligned}
P(\text{False alarm}) &= 1 - P(n \times LCL \leq X \leq n \times UCL) \\
&= 1 - P(20 \times (-0,066539865) \leq X \leq 20 \times 0,096539867) \\
&= 1 - P(-1,3307973 \leq X \leq 1,93079734) \\
&= 1 - [P(X \leq 1,93079734) - P(X \leq 0)] \\
&= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\
&= 1 - [(1 - 0,015)^{20} + 20(0,015)(1 - 0,015)^{20-1}] \\
&= 1 - [0,739136433 + 0,225117695] \\
&= 1 - 0,964254 \\
&= 0,035746
\end{aligned}$$

Berikut perhitungan batas grafik-p baru dengan menggunakan satu koreksi ekspansi Cornish-Fisher,

$$\begin{aligned}
UCL_1 &= UCL + \frac{4}{3n}(1 - 2\bar{p}) \\
&= 0,096539867 + \frac{4}{3(20)}(1 - 2(0,015)) \\
&= 0,096539867 + \frac{4}{60}(1 - 0,03) \\
&= 0,096539867 + 0,06466666 \\
&= 0,161206533 \\
LCL_1 &= LCL + \frac{4}{3n}(1 - 2\bar{p}) \\
&= -0,066539865 + \frac{4}{3(20)}(1 - 2(0,015)) \\
&= -0,066539865 + \frac{4}{60}(1 - 0,03) \\
&= -0,066539865 + 0,06466666 \\
&= -0,001873205
\end{aligned}$$

Dengan nilai  $UCL_1 = 0,161206533$  dan  $LCL_1 = -0,001873205$ , maka nilai peluang *false alarm* adalah

$$\begin{aligned}
 P(\text{False alarm}) &= 1 - P(n \times LCL_1 \leq X \leq n \times UCL_1) \\
 &= 1 - P(20 \times (-0,001873205) \leq X \leq 20 \times 0,161206533) \\
 &= 1 - P(-0,0374641 \leq X \leq 3,22413066) \\
 &= 1 - [P(X \leq 3,22413066) - P(X \leq 0)] \\
 &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] \\
 &= 1 - \left[ (1 - 0,015)^{20} + 20(0,015)(1 - 0,015)^{20-1} + \frac{20(20-1)}{2} (0,015)^2 (1 - 0,015)^{20-2} + \frac{20(20-1)(20-2)}{6} (0,015)^3 (1 - 0,015)^{20-3} \right] \\
 &= 1 - [0,739136433 + 0,225117695 + 0,032567788 + 0,002975737014] \\
 &= 1 - 0,999798 \\
 &= 0,000202
 \end{aligned}$$

Berikut perhitungan batas grafik-p baru dengan menggunakan dua koreksi ekspansi Cornish-Fisher,

$$\begin{aligned}
 UCL_2 &= UCL_1 - \frac{[\bar{p}(1-\bar{p})+2]}{6n^2 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}} \\
 &= 0,161206533 - \frac{[0,015(1-0,015)+2]}{6(20)^2 \sqrt{\frac{0,015(1-0,015)}{20}}} \\
 &= 0,161206533 - \frac{2,014775}{2400(0,027179955)} \\
 &= 0,161206533 - \frac{2,014775}{65,231892} \\
 &= 0,161206533 - 0,030886349 \\
 &= 0,130320183 \\
 LCL_2 &= LCL_1 - \frac{[\bar{p}(1-\bar{p})+2]}{6n^2 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}} \\
 &= -0,001873205 - \frac{[0,015(1-0,015)+2]}{6(20)^2 \sqrt{\frac{0,015(1-0,015)}{20}}}
 \end{aligned}$$

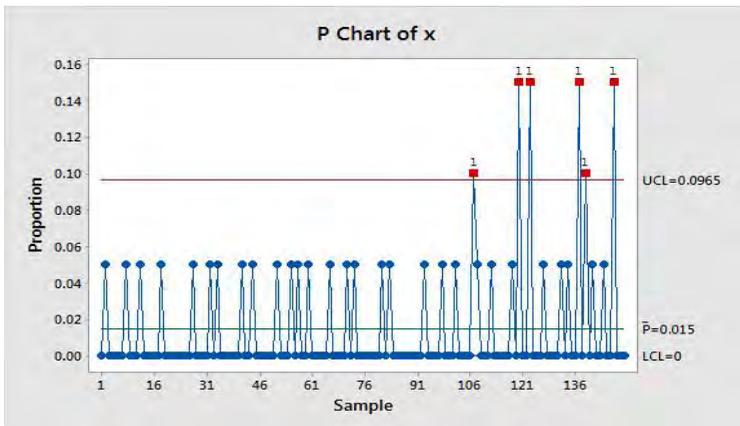
$$\begin{aligned}
&= -0,001873205 - \frac{2,014775}{2400(0,027179955)} \\
&= -0,001873205 - \frac{2,014775}{65,231892} \\
&= -0,001873205 - 0,030886349 \\
&= -0,032759554
\end{aligned}$$

Dengan nilai  $UCL_2 = 0,130320183$  dan  $LCL_2 = -0,032759554$ , maka nilai peluang *false alarm* adalah

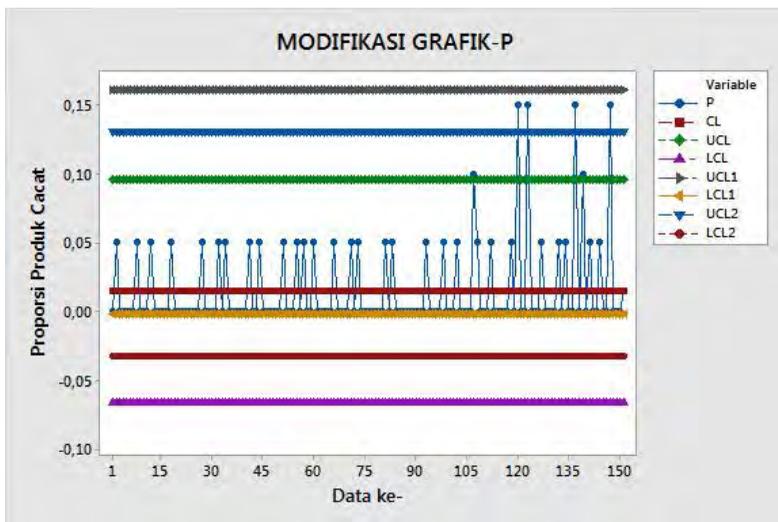
$$\begin{aligned}
P(\text{False alarm}) &= 1 - P(n \times LCL_2 \leq X \leq n \times UCL_2) \\
&= 1 - P(20 \times (-0,032759554) \leq X \leq 20 \times 0,130320183) \\
&= 1 - P(-0,65519108 \leq X \leq 2,60640366) \\
&= 1 - [P(X \leq 2,60640366) - P(X \leq 0)] \\
&= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\
&= 1 - \left[ (1 - 0,015)^{20} + 20(0,015)(1 - 0,015)^{20-1} + \frac{20(20-1)}{2} (0,015)^2 (1 - 0,015)^{20-2} \right] \\
&= 1 - [0,739136433 + 0,225117695 + 0,032567788] \\
&= 1 - 0,996822 \\
&= 0,003178
\end{aligned}$$

Peluang *false alarm* adalah nilai yang dilihat untuk mengetahui tingkat akurasi pada grafik-p. Jika nilai peluang *false alarm* semakin kecil dari peluang *false alarm* batas 3 sigma yaitu sebesar 0,0027, maka tingkat akurasi pada grafik-p menjadi semakin tinggi sehingga grafik-p baik digunakan untuk mengukur kualitas suatu produk.

Setelah mendapatkan hasil perhitungan, langkah selanjutnya adalah menuangkan perhitungan pada grafik pengendali p. Gambar 4.1 menunjukkan grafik-p berdasarkan batas 3 sigma dengan menggunakan software minitab. Gambar 4.2 menunjukkan grafik-p berdasarkan 3 sigma dan grafik p yang telah dimodifikasi dengan menggunakan ekspansi Cornish-Fisher dan ditampilkan dengan menggunakan program minitab.



Gambar 4.1 Grafik-p  
Berdasarkan Batas 3 Sigma



Gambar 4.2 Perbandingan Garis  
Batas pada Grafik-p

Dapat dilihat dari perhitungan peluang *false alarm*, batas grafik-p dengan peluang *false alarm* yang terkecil memiliki tingkat akurasi yang tinggi. Plot-plot proporsi produk cacat dengan rumus batas yang berdasarkan 3 sigma yang awalnya ada yang keluar garis batas, tetapi saat plot-plot proporsi produk cacat tersebut di implementasikan pada rumus ekspansi Cornish-Fisher, plot-plot yang awalnya keluar garis batas menjadi berada dalam batas pengendali.

## LAMPIRAN 1

**Hasil Perhitungan Peluang *False Alarm* pada Grafik-p yang Berdasarkan Batas 3 Sigma ketika Nilai p Kecil**

p	n (ukuran sampel)				
	5	10	20	50	100
0,01	0,9520	0,9086	0,8189	0,6066	0,3695
0,02	0,9078	0,8179	0,6747	0,3674	0,1362
0,03	0,8672	0,7402	0,5465	0,2218	0,0508
0,04	0,8160	0,6710	0,4494	0,1335	0,0191
0,05	0,7749	0,5998	0,3611	0,0801	0,0074
0,06	0,7359	0,5406	0,2957	0,0480	0,0047
0,07	0,6988	0,4876	0,2362	0,0287	0,0023
0,08	0,6636	0,4402	0,1925	0,0171	0,0026
0,09	0,6304	0,3904	0,1529	0,0103	0,0015
0,10	0,5910	0,3503	0,1240	0,0084	0,0023

**LAMPIRAN 2****Data Produk Cacat Rem Tangan pada Kendaraan**

Data ke-	Banyak Cacat	Ukuran Sampel	Proporsi Cacat
1	0	20	0
2	1	20	0,05
3	0	20	0
4	0	20	0
5	0	20	0
6	0	20	0
7	0	20	0
8	1	20	0,05
9	0	20	0
10	0	20	0
11	0	20	0
12	1	20	0,05
13	0	20	0
14	0	20	0
15	0	20	0
16	0	20	0
17	0	20	0
18	1	20	0,05
19	0	20	0

**LAMPIRAN 2 LANJUTAN**

Data ke-	Banyak Cacat	Ukuran Sampel	Proporsi Cacat
20	0	20	0
21	0	20	0
22	0	20	0
23	0	20	0
24	0	20	0
25	0	20	0
26	0	20	0
27	1	20	0,05
28	0	20	0
29	0	20	0
30	0	20	0
31	0	20	0
32	1	20	0,05
33	0	20	0
34	1	20	0,05
35	0	20	0
36	0	20	0
37	0	20	0
38	0	20	0
39	0	20	0
40	0	20	0
41	1	20	0,05

**LAMPIRAN 2 LANJUTAN**

Data ke-	Banyak Cacat	Ukuran Sampel	Proporsi Cacat
42	0	20	0
43	0	20	0
44	1	20	0,05
45	0	20	0
46	0	20	0
47	0	20	0
48	0	20	0
49	0	20	0
50	0	20	0
51	1	20	0,05
52	0	20	0
53	0	20	0
54	0	20	0
55	1	20	0,05
56	0	20	0
57	1	20	0,05
58	0	20	0
59	0	20	0
60	1	20	0,05
61	0	20	0
62	0	20	0
63	0	20	0

**LAMPIRAN 2 LANJUTAN**

Data ke-	Banyak Cacat	Ukuran Sampel	Proporsi Cacat
64	0	20	0
65	0	20	0
66	1	20	0,05
67	0	20	0
68	0	20	0
69	0	20	0
70	0	20	0
71	1	20	0,05
72	0	20	0
73	1	20	0,05
74	0	20	0
75	0	20	0
76	0	20	0
77	0	20	0
78	0	20	0
79	0	20	0
80	0	20	0
81	1	20	0,05
82	0	20	0
83	1	20	0,05
84	0	20	0
85	0	20	0

**LAMPIRAN 2 LANJUTAN**

Data ke-	Banyak Cacat	Ukuran Sampel	Proporsi Cacat
86	0	20	0
87	0	20	0
88	0	20	0
89	0	20	0
90	0	20	0
91	0	20	0
92	0	20	0
93	1	20	0,05
94	0	20	0
95	0	20	0
96	0	20	0
97	0	20	0
98	1	20	0,05
99	0	20	0
100	0	20	0
101	0	20	0
102	1	20	0,05
103	0	20	0
104	0	20	0
105	0	20	0
106	0	20	0
107	2	20	0,1

**LAMPIRAN 2 LANJUTAN**

Data ke-	Banyak Cacat	Ukuran Sampel	Proporsi Cacat
108	1	20	0,05
109	0	20	0
110	0	20	0
111	0	20	0
112	1	20	0,05
113	0	20	0
114	0	20	0
115	0	20	0
116	0	20	0
117	0	20	0
118	1	20	0,05
119	0	20	0
120	3	20	0,15
121	0	20	0
122	0	20	0
123	3	20	0,15
124	0	20	0
125	0	20	0
126	0	20	0
127	1	20	0,05
128	0	20	0
129	0	20	0

**LAMPIRAN 2 LANJUTAN**

Data ke-	Banyak Cacat	Ukuran Sampel	Proporsi Cacat
130	0	20	0
131	0	20	0
132	1	20	0,05
133	0	20	0
134	1	20	0,05
135	0	20	0
136	0	20	0
137	3	20	0,15
138	0	20	0
139	2	20	0,1
140	0	20	0
141	1	20	0,05
142	0	20	0
143	0	20	0
144	1	20	0,05
145	0	20	0
146	0	20	0
147	3	20	0,15
148	0	20	0
149	0	20	0
150	0	20	0

## BAB V PENUTUP

Pada bab ini diberikan kesimpulan mengenai hasil analisa dan pembahasan yang telah dilakukan serta berisi saran sebagai pertimbangan dalam pengembangan atau penelitian lebih lanjut.

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan keseluruhan hasil analisa dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Penerapan ekspansi Cornish-Fisher dengan satu koreksi adalah dengan menerapkan koreksi kemiringan distribusi binomial pada ekspansi Cornish-Fisher, sehingga menghasilkan persamaan baru pada batas pengendali grafik-p yaitu

$$UCL_1 = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n}(1-2p)$$

$$LCL_1 = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{4}{3n}(1-2p)$$

2. Penerapan ekspansi Cornish-Fisher dengan dua koreksi adalah dengan menerapkan koreksi kurtosis distribusi binomial pada ekspansi Cornish-Fisher, sehingga menghasilkan persamaan baru pada batas pengendali grafik-p yaitu

$$UCL_2 = UCL_1 - \frac{[p(1-p)+2]}{6n^2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

$$LCL_2 = LCL_1 - \frac{[p(1-p)+2]}{6n^2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

3. Berdasarkan contoh penerapan pada data cacat produk rem tangan kendaraan, nilai peluang *false alarm* grafik-p berdasarkan batas 3 sigma yang memiliki nilai  $UCL = 0,096539867$  dan  $LCL = -0,066539865$  adalah 0,035746. Nilai peluang *false alarm* grafik-p dengan satu koreksi ekspansi Cornish-Fisher yang memiliki nilai  $UCL_1 = 0,161206533$  dan  $LCL_1 = -0,001873205$  adalah 0,000202. Nilai peluang *false alarm* grafik-p dengan dua koreksi ekspansi Cornish-Fisher yang memiliki nilai  $UCL = 0,130320183$  dan  $LCL = -0,032759554$  adalah 0,003178.

4. Berdasarkan hasil dari contoh penerapan, maka persamaan batas grafik-p yang baru yaitu dengan koreksi ekspansi Cornish-Fisher dapat memperkecil peluang *false alarm*, sehingga tingkat akurasi semakin tinggi.

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil analisis, pembahasan, dan kesimpulan yang telah dilakukan, saran untuk tugas akhir ini adalah jauh lebih baik jika dilakukan koreksi yang lebih dari dua koreksi agar lebih banyak perbandingan dan bisa memilih batas pengendali yang lebih tinggi tingkat akurasinya untuk mengendalikan tingkat cacat produk yang rendah.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Joekes, Silvia dan Barbosa, Emanuel Pimentel (2013). **An Improved Attribute Control Chart for Monitoring Non-Conforming Proportion in High Quality Processes** . Control Engineering Practice, Vol. 21, 407-412.
- [2] Xie, M., Goh, T. N.dan Kuralmani, V.(2002). **Statistical Models and Control Charts for High Quality Processes**. Massachusetts: Kluwer Academic Publication.
- [3] Lefebvre, M.(2006).Applied Probability and Statistics. New York:Springer.
- [4] Walpole, E.R. 1992. **Pengantar Statistika Edisi ke-3**. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.
- [5] Bluman, A.G. (2012). Elementary Statistics: A Step by Sttep Approach. Eighth Edition. New York: McGraw-Hill.
- [6] Winterbottom, A. (1993). **Simple Adjustments to Improve Control Limits on Attribute Charts**. Quality and Reliability Engineering International, Vol. 9 No. 2, 105–109.
- [7] Montgomery, Douglas C. 1993. **Pengantar Pengendalian Kualitas Statistik**. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press. Hal.119-160.
- [8] Cornish, E. A. dan Fisher, Ronald A. (1938). **Moments and Cumulants in the Specification of Distributions**. International Statistical Institute, 5 (4):307-320.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BIODATA PENULIS



Nama lengkap penulis yaitu Anisykur Rofiqoh yang biasa dipanggil Anis, lahir di Sangatta, 1 Juni 1994. Pendidikan formal yang pernah ditempuh yaitu TK YPPSB pada tahun 1998 sampai tahun 2000, SD YPPSB 1 pada tahun 2000 sampai tahun 2006, SMP YPPSB pada tahun 2006 sampai tahun 2009, SMA Darul Ulum 2 Unggulan BPPT RSBI Jombang pada tahun 2009 sampai tahun 2012. Saat ini penulis sedang menempuh pendidikan S1 di Jurusan Matematika Institut Sepuluh Nopember dengan bidang minat Riset Operasi dan Pengolahan Data (ROPD).

Selama di bangku kuliah, penulis aktif di organisasi dalam kampus yaitu HIMATIKA ITS. Pada tahun 2013-2014 penulis menjadi staff Departemen Pengabdian Masyarakat HIMATIKA ITS. Pada tahun 2014-2015 penulis menjadi anggota tim LITBANG HIMATIKA ITS. Selain aktif dalam berorganisasi, penulis juga aktif dalam beberapa acara kepanitiaan, seperti menjadi OC Padamu HIMATIKA ITS pada tahun 2013, sie. Pubdok dan penanggung jawab regional Balikpapan pada acara OMITS HIMATIKA ITS tahun 2014, panitia TD HIMATIKA ITS pada tahun 2014 dan menjadi sie. Kestari dalam OMITS HIMATIKA tahun 2015.

Demikian biodata penulis. Jika ingin memberi kritik, saran, dan diskusi mengenai Tugas Akhir ini, dapat dikirimkan melalui email [anisykur12@gmail.com](mailto:anisykur12@gmail.com). Terima kasih.